Posudek na disertaci Ondřeje Kůrky

První kapitola pojednává o klíčovém pojmu nelineární analýzy a optimalizace — o fréchetovském subdiferenciálu $\partial f(\cdot)$ zdola polospojité funkce f na normovaném lineárním prostoru X. Je studována množina $S(f) := \{x \in X : \partial f(x) \neq \emptyset\}$. Podle Zajíčka je tato vždy suslinovská a podle Holického s Lackovičem je $S(f)$ typu $F_{\sigma\delta\sigma}$ pokud zúplnění $\widehat{X}$ prostoru X je reflexivní. Doktorand O. Kůrka za předpokladu nereflexivnosti $\widehat{X}$ konstruuje lipschitzovskou funkci $f : X \to \mathbb{R}$, takovou, že $S(f)$ není borelovská. Dokonce, pokud píšeme X ve tvaru $Y \times \mathbb{R}$, tak ke každé suslinovské neborelovské $M \subset \mathbb{R}$ nalézá lipschitzovskou $f : X \to \mathbb{R}$ takovou, že $M \times \{0\} = S(f)$. Originální důkaz vychází ze známé Jamesovy charakterizace nereflexivních prostorů. Pak podrobně analyzuje pojem fréchetovského subdiferenciálu. Nakonec všechno chytře zabudovává do deskriptívní teorie, zejména užívajíce dobře a špatně posazené stromy v $\mathbb{N}^{<\omega}$. Z důkazu jsem se hodně přiučil.

V druhé kapitole autor pěkně rozpracoval Kaufmanovu metodu konstrukce norem s nestandartními vlastnostmi ve smyslu deskriptivní teorie množin. Hlaví věta dávájící odpověď na otázku Debse, Godefroye a Saint-Raymonda zní: V každém separabilním nereflexivním Banachově prostoru existuje ekvivalentní rotundní norma taková, že k ní odpovídající množina elementů duálu nabývajících normu není borelovské třídy $\alpha < \omega_1$, kde α je a priori předepsané.

Třetí a poslední kapitola je věnována pojmu takzvané binormality, nejdříve pro topologické prostory, posléze pak s velkým soustředěním na neseparabilní Banachovy prostory. Majíce dvě topologie τ, σ na množině X, řekneme, že trojice (X, τ, σ) je binormální pokud pro každou σ-uzavřenou $A \subset X$ a každou τ-uzavřenou $B \subset X \backslash A$ existují τ-otevřená $A \subset C \subset X \backslash B$ a σ-otevřená $B \subset D \subset X \backslash C$. Tento jev se vyskytuje při porovnávání jemné a hustotní topologie s euklidovskou topologií pod názvem Lusinovy-Menchoffovy vlastnosti. Zde je pozornost soustředěna zejména na "binormální" chování normové a slabé, respektive slabé* topologie v Banachových prostorech. Holický ukázal, že pro separabilní Banachův prostor E je trojice (E,norma,weak) binormální a že (ℓ_∞,norma,weak) binormální není. Autor disertace rozšiřuje Holického výsledek na široké třídy neseparabilních Banachových prostorů. Činí tak zručným užitím silného instrumentu projekčního rozkladu identity zavedeného Lindenstraussem. Nejdříve však studuje binormalitu v topologických prostorech. Formuluje pěkné ekvivalentní podmínky. Pak studuje zesílenou vlastnost takzvané silné binormality. Dál do kapitoly vkládá několik ilustrativních příkladů ze světa stromů, kde ukazuje mantinely dokázaných výsledků. Konečně dává do souvislosti binormalitu s vlastností prostoru býti Asplundovým: E je Asplundův právě když trojice (E^*,norma,weak*) je "separabilně" binormání. A pár dalších pěkných tvrzení musím vynechat kvůli zachování rozumné délky posudku.

Výsledky práce, již publikované ve špičkových světových časopisech, jsou originální a velmi zajímavé. Rovněž tak jejich důkazy. Celá práce je pěkně, čistě psaná. Prošel jsem všechny důkazy a shledal je správné. Pár drobných dotazů a připomínek artikuluji v níže přiloženém seznamu. Na všechny již O. Kůrka v mezičase reagoval k mé plné spkojenosti. Oceňuji i autoreferát. Tento sice na jedné straně kopíruje části disertace, na druhé však obsahuje dodatečný výklad k postupům v některých komplikovaných důkazech, zejména v první a druhé kapitole. Disertace svým obsahem daleko přesahuje průměr prací podávaných k obhajobě na zdejší fakultě.

Domnívám se, že předložená práce Mgr. Ondřeje Kurky jednoznačně splňuje všechny požadavky kladené na doktorandskou disertační práci a že autor je plně schopen samostatné vědecké práce. Práci vřele doporučuji k obhajobě titulu PhD.

Vážnější připomínky, otázky

U Lemmy 1.3.1 bych očekával, že (ii*) bude pojednávat o zobrazení Θ.
strana 15:
řádka 6: Ukázat, že norma $|||\cdot|||$ je LUR. Dodejte přesný odkaz nebo dokažte.
strana 12:
Nelze dokázat Proposition 2.2.2 také pro koanalytické množiny?
strana 14: Nelze poznámku (c) rozšít na nereflexivní neseparabilní WCG Asplundovy popstory, viz [2]?
Poznámky na stranách 14, 15 by zasloužily rozvést, dokázat podrobně, co se tam naznačuje. Považme, že celá disertace má necelých 40 stránek, takže nebyla potřeba psát zhuštěně.
strana 17:
řádka 10: Prosím příklad posloupnosti (ε_i).
Otázka: Nedaly by užité techniky v druhé kapitole i více výsledků; nebudete pokračovat v duchu této kapitoly?
strana 26: Dokázat, že g je spojitá.
strana 29:
řádka 9 zdola: Nevím nakolik je vžito jméno “bounded P.R.I.” Čtenář by se mohl domnívat, že je to silnější pojem, než P.R.I.. Přitom v disertaci je to opačně.
strana 36:
řádka 7: Dokázat, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} r(F_n) = \emptyset$.
Strana 37:
Stálo by za to nalézt přímý důkaz Věty 3.6.8.

V Praze 7. března 2011.

Doc. RNDr. Marián Fabian, DrSc.
Matematický ústav AV ČR