Oponentský posudek na disertační práci Mgr. Miroslava Kačeny: **Topological and descriptive methods in the theory of function and Banach spaces**

Disertace sestává ze čtyřech původních vědeckých prací. První tři z nich byly publikovány v časopisech Commentat. Math. Univ. Carol., Bull. Sci. Math. a Cent. Eur. J. Math. a jsou věnovány Choquetově teorii. Dva z těchto článků zahrnují společné výsledky autora disertace a školitele, další napsal autor disertace. Čtvrtá práce věnovaná topologickým vlastnostem Banachových prostorů byla zaslána do tisku. Jejím autorem je M. Kačena.

Na Choquetovu teorii lze pohlížet buďto jako na teorii kompaktních konvexních množin v topologickém vektorovém prostoru nebo jako na studium podprostorů prostoru spojitých funkcí (dále mluvíme jen o prostorech funkcí) na kompaktním topologickém prostoru. Samozřejmě tyto dva pohledy mají mnoho společného, nicméně přenos výsledků z geometrické Choquetovy teorie do její analytické podoby prostorů funkcí není v žádném případě automatický. Na konci šedesátých let se objevily výsledky Lazara, Daviese a Vincent-Smithe o součinech a projektivních limitách Choquetových simplexů. Samotná jejich definice není a priori zřejmá. Podobně tomu je u prostorů funkcí: není vůbec jasné, jak definovat součin prostorů funkcí tak, aby např. součin simpliciálních prostorů byl simpliciální prostor.

Kapitola 1 disertace je věnována podrobnému studiu této otázky. M. Kačena definuje celou třídu prostorů, které mohou přirozeně být považovány za součin prostorů funkcí, studuje jejich Choquetovu hranici, extremální množiny a příslušné prostory afinních funkcí. Věty 3.52 a 3.53 ukazují, že součin prostorů funkcí je simpliciální, právě když každý faktor je simpliciální. Pokud jsou všechny faktory simpliciální, potom se (jednoznačně určená) maximální reprezentující míra získá jako součin maximálních reprezentujících měr (věta 3.59). Dále jsou analogické otázky podrobeny studiu pro projektivní limity prostorů funkcí. Situace zde je však jiná. Sice projektivní limita simpliciálních prostorů je simpliciální, ale, jak je ukázáno na příkladu, obrácení neplatí. Pouze za dodatečných předpokladů o vzájemné souvislosti Choquetových hranic projektivního systému je možné maximální míry projektivní limity charakterizovat.

Kapitola 2 disertace řeší důležitý problém: za jakých okolností zachovává spojité afinní zobrazení mezi kompaktními konvexními množinami vztahy mezi maximálními reprezentujícími mírami? Autoři ukázali, že i když zobrazení převádí extremální body na extremální body, obrazem maximální miry může být míra, která maximální není (takže tvrzení ohlášené S. Telemanem v roce 1994 není pravdivé). V této kapitole jsou mj. nalezeny postačující podmínky pro zachování maximálních měr: cílová konvexní množina je simplex nebo extremální body cílového prostoru mají Lindelöfovu vlastnost. Jsou také uvedeny cenné příklady ilustrující situace, které pro zobrazení mezi kompaktními konvexními množinami mohou nastat, pokud jedna z nich není simplex (injektivita zobrazení na extremálních bodech se nepřenáší na celý kompakt, resp. na množinu maximálních měr).

Kapitola 3 disertace zahrnuje společné výsledky autora a J. Spurného a je věnována tomuto problému: za jakých okolností zachovává operátor abstraktní Dirichletovy úlohy na simpliciálních prostorech funkcí či na simplexech baireovské třídy? Pro spojité funkce charakteristiku podal H. Bauer v roce 1961, pro funkce 1. Baireovy třídy J. Spurný v roce 2005. Výsledky o posuvu tříd pro vyšší Baireovy třídy jsou nové a zúplňují poznatky, které dříve dokázali G. Choquet a G. Mokobodzki,

M. Talagrand a M. Capon. S ohledem na aplikace v teorii potenciálu považuji za cenné a zajímavé trvrzení věty 5.2 o zachovávání Baireových tříd počínaje druhou, pokud prostor je simpliciální a *všechny* maximální míry jsou neseny spočetným sjednocením kompaktů obsažených v Choquetově hranici (tuto podmínku zde nazveme (S)). Pro případ prostoru harmonických funkcí je známa charakteristika maximálních měr pomocí vymetání (mimochodem, odkaz na s. 44, 23. řádek shora, má být na [6], nikoli na [8]). Důkaz věty 1.3 se tak redukuje na ověření podmínky (S). Její splnění však vyplývá, ve skutečnosti pro mnohem obecnější situaci eliptických harmonických prostorů, z faktu, že maximální míry pro body z komplementu Choquetovy hranice jsou vzájemně absolutně spojité (J. Bliedtner, W. Hansen, Math. Ann. 222 (1976), 261-274; viz citace [8]). Tedy věta 1.3 platí dokonce v obecnější potenciálně teoretické situaci zahrnující eliptické parciální diferenciální rovnice.

Kapitola 4 disertace představuje dosud nepublikovaný článek autora věnovaný topologickým vlastnostem Banachových prostorů a operátorů. Výchozím bodem je topologie (*right topology*) zavedená v roce 2007, pomocí které lze charakterizovat slabě kompaktní operátory. V práci jsou studovány sekvenciální *right* Banachovy prostory a příbuzné pojmy, jsou zlepšeny výsledky dosažené v literatuře a je řešen problém související s Pełczyńskiho podmínkou (V). Jsou také studovány prostory spojitých funkcí s hodnotami v Banachových prostorech.

Disertační práce přináší ve všech čtyřech kapitolách celou řadu zajímavých a nových výsledků. Jejich originalita je (u tří kapitol) stvrzena publikací v kvalitních matematických periodikách. Výsledky se týkají aktuálních oblastí matematické analýzy a jsou dosaženy na základě pokročilých metod funkcionální analýzy, topologie, teorie míry a deskriptivní teorie množin. Autor plně prokázal, že má velmi dobrou znalost poznatků z moderní matematické analýzy, úspěšně se orientuje v současném výzkumu a je schopen tvůrčím způsobem dosavadní poznání rozvíjet a přispívat k řešení problémů, které jsou v dané tematice podstatné, nebo k zodpovězení otázek formulovaných jinými matematiky. Disertace, stejně tak jako autoreferát, jsou pečlivě a pěkně zpracovány, odborná i celková úroveň práce je podle mého názoru nadprůměrná. Doporučuji, aby na základě obhajoby disertační práce byl Mgr. Miroslavu Kačenovi udělen akademický titul Ph.D.

V Praze dne 7. března 2011 Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc.