Oponentský posudek doktorandské disertační práce Mgr. Miroslava Kačeny

„Topological and descriptive methods in the theory of function and Banach spaces“

Předložená práce sestává z krátkého úvodu a čtyř původních článků, z nichž tři byly publikovány a jeden byl zaslán k publikaci. Dva z publikovaných článků jsou napsány se spoluautorem, jímž je školitel uchazeče J. Spurný.

První kapitola obsahuje článek, jehož je uchazeč jediným autorem a který byl publikován v časopise *Comment. Math. Univ. Carolinae.* Je to poměrně dlouhý článek (32 stran v časopise, 26 stran v disertaci), jehož tématem jsou součiny a inverzní limity funkčních prostorů. Výsledky i metody tohoto článku jsou dosti technické. Jeho hodnota však mimo jiné spočívá v tom, že poskytuje metody konstrukce netriviálních simplicálních prostorů.

Ve třetím oddílu tohoto článku jsou zavedeny tři druhy součinu systému $(K_i, \mathcal{H}_i)_{i\in I}$ funkčních prostorů – algebraický tenzorový součin označovaný symbolem $\odot$, injektivní tenzorový součin označovaný symbolem $\otimes$ a multiafinní součin označovaný symbolem $\boxplus$. Autor dále definuje obecný *součin* funkčních prostorů jako libovolný funkční prostor obsahující algebraický tenzorový součin a obsažený v multiafinním součinu prostorů spojitých afinních funkcí. Článek obsahuje množství výsledků o obecných součinech i o třech výše zmíněných typech součinů - inkluze mezi nimi, asociativní zákon, o projekcích na menší součiny, o reprezentujících mírách na součinu. K důležitým výsledkům patří tvrzení, že Choquetova hranice součinu je součinem Choquetových hranic, jednoznačnost prostoru afinních spojitých funkcí na součinu simpliciálních prostorů, fakt, že součin simpliciálních prostorů je simpliciální a charakterizace maximálních měr na součinu.

Ve čtvrtém oddílu se autor věnuje inverzním limitám funkčních prostorů a jejich chování vůči Choquetově hranici a maximálním mírám.

Druhá kapitola obsahuje článek napsaný s J. Spurným publikovaný v časopise *Bull. Sci. Math.* Zabývá se situací, kdy X a Y jsou kompaktní konvexní množiny a $\varphi : X \to Y$ spojité afinní zobrazení; a jednou z otázek je, zda zachovávání extremálních bodů při φ implikuje zachovávání maximálních měr při indukovaném zobrazení. V článku S. Telemana z roku 1994 se tvrdí, že odpověď je vždy kladná. Zde se ukazuje, že tomu tak obecně není, a zkoumají se speciální případy, kdy tomu tak je. Tyto speciální případy jsou dva – je třeba předpokládat, že $\operatorname{ext} Y$ je Lindelöfův nebo že Y je simplex. Druhý případ byl známý a autoři zde uvádějí alternativní důkaz; první případ je nový výsledek, jehož důkaz je vcelku standardní. Kromě těchto pozitivních tvrzení obsahuje článek tři protipříklady. Dva z nich jsou založeny na chytré modifikaci tzv. dikobrazí topologie; jeden je dokonce konečněrozměrný. Pokud tomu rozumím dobře, je tento příklad složitě popsané kanonické zobrazení trojrozměrného simplexu na čtverec. Hodnota tohoto článku spočívá zejména v opravení chyb a nepřesností ve zmíněném článku S. Telemana a vyjasnění, co v této souvislosti platí a co nikoli.

Třetí kapitola obsahuje článek napsaný společně s J. Spurným publikovaný v *Cent. Eur. J. Math.* Zabývá se abstraktní Dirichletovou úlohou, tj. následující situací. Nechť K je kompaktní prostor a $\mathcal{H}$ simpliciální funkční prostor na K. Lze každou omezenou funkci Baireovy třídy α na K modifikovat tak, aby nová funkce se shodovala s původní na Choquetově hranici a byla $\mathcal{H}$-afinní třídy α? V článku se nejprve ze známých výsledků snadno odvodí, že odpověď je kladná pro každý nekonečný ordinál α. K nejhlubším výsledkům tohoto článku patří tři protipříklady. Jde o simpliciální funkční prostory na metrizovatelných kompaktech, přičemž pro první z nich je odpověď záporná pro každý konečný ordinál, pro druhý z nich je odpověď záporná pro $\alpha = 0$ a kladná pro $\alpha \geq 1$, pro třetí z nich je odpověď záporná pro $\alpha \leq 1$ a kladná pro $\alpha \geq 2$. Při konstrukci prvního příkladu se používá součin simpliciálních prostorů podle první kapitoly disertace. Existence druhého příkladu snadno plyne ze známých výsledků, zde použitá metoda však zároveň dává příklad třetí. Posledním výsledkem, který autoři připisují W. Hansenovi, je kladná odpověď pro $\alpha \geq 2$ v případě prostorů harmonických funkcí.

Čtvrtá kapitola obsahuje článek, jehož jediným autorem je uchazeč, a který byl zaslán k publikaci. Týká se tzv. sekvenciálně správných Banachových prostorů. Zabývá se vlastnostmi Banachových prostorů příbuzných Dunford-Pettisově a reverzní Dunford-Pettisově vlastnosti. Vlastnosti tohoto typu jsou definovány pomocí vztahu mezi některými typy operátorů – konkrétně jde o operátory slabě kompaktní, úplně spojité, slabě úplně spojité, pseudo-slabě kompaktní, správně úplně spojité a bezpodmínečně konvergentní. V článku jsou nejprve shrnuty obecně platné implikace mezi těmito typy operátorů a z toho plynoucí implikace mezi příslušnými vlastnostmi Banachových prostorů, definovanými podle následujícího schématu: Banachův prostor X má příslušnou vlastnost, jestliže pro každý Banachův prostor Y je každý operátor $T : X \to Y$ odpovídajícího typu slabě kompaktní. Některé z těchto implikací jsou snadné či známé, ale jsou zde utříděny a doplněny novými vlastnostmi. Dalším přínosem článku jsou protipříklady na některé z obrácených implikací. Tyto příklady odpovídají na otázky z literatury. Přitom nejsou nově konstruovány, ale jsou využity vlastnosti některých známých příkladů. Konkrétně, je dokázáno, že existuje sekvenciálně správný prostor (tj. prostor, na němž každý pseudo-slabě kompaktní operátor je slabě kompaktní), který nemá vlastnost (V) (tj. existuje na něm bezpodmínečně konvergentní operátor, který není slabě kompaktní); a prostor, který má Dieudonného vlastnost (D) (tj. každý slabě úplně spojitý operátor je slabě kompaktní), ale není sekvenciálně správný.

V posledním oddílu tohoto článku se dokazuje, že pro řídce rozložený kompakt K a sekvenciálně správný prostor X je prostor $C(K, X)$ také sekvenciálně správný, a stejný výsledek ještě pro jednu vlastnost.

Všechny články obsažené v disertaci obsahují netriviální nové výsledky. Domnívám se, že určitě prokazují, že uchazeč dobře zvládá obtížné důkazové techniky, práci s literaturou i vědeckou spolupráci.

V čem spatřuji nedostatky práce či rezervy uchazeče, je zejména dobře čitelná a srozumitelná prezentace výsledků. Například:

- Někdy se zbytečně složitě formulují a dokazují jednoduché věci (například Example 1.4 ve druhé kapitole zmíněný již výše, nebo Corollary 3.5 ve čtvrté kapitole). To může hlavní myšlenky docela zatemnit.
- Někdy je uveden dlouhý seznam definic, ve kterém se čtenář nesnadno orientuje. To platí například ve druhé sekci čtvrté kapitoly, ale třeba i v úvodu třetí kapitoly. Expertům v příslušné úzké oblasti to problémy při četbě nedělá, ale celkově to může snížit okruh čtenářů. Je sice jasné, že příslušné pojmy je třeba definovat, ale možná by bylo možné definice lépe uspořádat (ve čtvrté kapitole), nebo omezit nadužívání formalismu (ve třetí kapitole). To by případným čtenářům usnadnilo situaci.
- Někdy jsou nadužívány odkazy na literaturu. Standardní použití literatury jsou odkazy na jinde dokázané výsledky a na všeobecně známou terminologii. Odkazy na důkazy, metody důkazů a speciální pojmy by se měly používat jen výjimečně. Tato připomínka se týká zejména čtvrté sekce čtvrté kapitoly, kde se používá například integrál podle konečně-aditivní operátorové míry. Jde o speciální pojem, který se navíc docela dost využívá v důkazech. V takovém případě je lepší uvést definici nebo alespoň explicitně vyjmenovat vlastnosti, které se budou používat. Situace, kdy čtenář musí listovat několika knihami a články, aby vůbec pochopil, co se tvrdí a dokazuje, není příliš šťastná a zmenšuje okruh čtenářů.

Tyto nedostatky však nesnižují vědeckou kvalitu disertace a v případě čtvrté kapitoly mohou být alespoň částečně napraveny v rámci recenzního řízení v příslušném časopise.

Domnívám se, že autor jednoznačně prokázal, že je schopen samostatné vědecké práce, a předložená práce splňuje všechny požadavky kladené na doktorandskou disertační práci.

V Praze dne 3. března 2011

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D.
KMA MFF UK