Oponentní posudek na diplomovou práci „Intuitionistic Logic and Axiomatic Theories“ Vladimíra Brablece

Emil Jeřábek

10. září 2010

Práce se zabývá některými formálními vlastnostmi jednoduchých intuicionistických teorií (volenými coby kritéria, zda jsou ony teorie dostatečně intuicionistické). Zkoumané teorie zahrnují teorii rovnosti (E) a různé varianty teorie následníka ($\mathrm{SUCC}^{\to}$, $\mathrm{SUCC}^{\vee}$), teorií lineárního (wLO, LO) a hustého lineárního (wDNO, DNO) uspořádání, teorie racionálních čísel s uspořádáním a sčítáním (wRNA, RNA) a Robinsonovy aritmetiky ($\mathrm{Q}^{\to}$, $\mathrm{Q}^{\vee}$). Autor se pro každou z nich snaží určit, zda splývá se svým klasickým předobrazem, zda je saturovaná (t.j. má-li zároveň disjunction property a term existence property), zda splňuje de Jonghovu větu (t.j. zda její sentenční schematická výroková logika je IPC) a zda je rozhodnutelná.

Po úvodu a kapitole 2 sestávající z definic základních pojmů z intuicionistické logiky a používaných teorií následuje kapitola 3, jejímž tématem je vztah uvažovaných teorií k jejich klasickým rozšířením. Pro důkazy, že daná teorie T se rovná svému klasickému rozšíření T^c (t.j. že T dokazuje zákon vyloučeného třetího LEM), autor používá větu převzatou ze Smoryńského práce [4], jež tvrdí, že $T = T^c$ pokud T^c je modelově úplná a T dokazuje LEM pro atomické formule a nějakou prenexní axiomatizaci T^c. Nerovnosti $T \neq T^c$ jsou dokázány sestrojením jednoduchých kripkovských modelů.

Kapitola 4 se zabývá pojmem tzv. saturované teorie: teorie je saturovaná pokud je bezesporná, má disjunction property (DP) a term existence property ($\mathrm{EP_t}$; autor se z nejasných důvodů těmto standardním termínům vyhýbá). Autor nejdříve předkládá charakterizaci saturovaných teorií pomocí Aczelova slashe, převzatou ze Smoryńského [3], v syntaktické prezentaci zobecněné z podání [1] pro výrokovou logiku. Tato charakterizace je poté aplikována na zkoumané teorie. Autor dále zmiňuje (bez bližšího rozpracování) kritérium pro saturovanost pomocí Harropových formulí a sémantické kriterium pomocí amalgamace kripkovských modelů, opět dle Smoryńského.

V kapitole 5 se autor zabývá výrokovou logikou indukovanou danými teoriemi. De Jongh dokázal, že výroková logika Heytingovy aritmetiky je IPC: t.j., pro libovolnou výrokovou formuli A, jestliže $\mathrm{HA} \vdash A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ pro všechny aritmetické sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pak $\vdash_{\mathrm{IPC}} A$. Autor nejprve předkládá lemma převzaté z důkazu de Jonghovy věty v [3], a s jeho pomocí dokáže, že analog de Jonghovy věty platí pro E, LO a wLO. Na druhou stranu autor tvrdí, že de Jonghova věta neplatí pro $\mathrm{SUCC}^{\to/\vee}$, wRNA a wDNO.

Konečně kapitola 6 se zabývá (algoritmickou) rozhodnutelností. Až na pár výjimek jsou uvažované teorie nerozhodnutelné, důkazy jsou většinou převzaté z [4] a probíhají redukcí intuicionistické teorie s jedním unárním predikátem bez mimologických axiomů, jejíž nerozhodnutelnost ukázali Maslov, Mints a Orevkov. Na závěr autor tvrdí, že wRNA je konzervativní rozšíření wDNO.

Zvolené téma práce je poměrně zajímavé. Výzkum intuicionistických teorií se nejčastěji zaměřuje na teorie alespoň aritmetické síly, jako např. Heytingovu aritmetiku, různé teorie typů, či dokonce teorii množin. V kontrastu k nim stojí jednoduché klasické teorie rozhodnutelných struktur jako např. $\langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$. Je užitečné si uvědomit, do jaké míry se vlastnosti těchto teorií zachovávají při přechodu k intuicionistické logice, a v čem se naopak liší. Autor se v práci pokusil shrnout Smoryńského články věnující se této problematice a systematicky popsat základní vlastnosti některých těchto teorií, což je užitečný počin. Hodnotu práce bohužel značně sráží některé zásadní nedostatky.

První problém spočívá v autorově formalistickém přístupu k intuicionistickým teoriím. Dovolím si ocitovat charakteristickou pasáž na str. 29:

> So far, we declared that we merely inspected properties of some intuitionistic theories, but at the same time, we could say that we searched for the "genuine" formulation of the theories. From the intuitionistic perspective, DNO and RNA were badly formulated because they enable non-constructive sentences to be proved. However, we have found "better" formulations of dense linear order and addition of rational numbers. [...] We may assert that wDNO, wRNA and wLO are the "genuine" theories, but the qualification of different versions of SUCC and Q is much more doubtable. It depends on whether we prefer the recognition of non-zero elements [...] or keeping far from non-constructive sentences.

To je naprostý blud. Bavíme-li se o teoriích typu teorie racionálních čísel, pak „pravá“ (genuine) intuicionistická teorie se přeci nepozná podle toho, že má tu či onu formální vlastnost, ale podle toho, zda adekvátně popisuje tvrzení platná v zamýšlené struktuře (či skupině struktur) v rámci (nějaké větve) intuicionistické matematiky. Na zákonu vyloučeného třetího není samo o sobě nic nekonstruktivního, intuicionisté jej pouze odmítají přijmout *a priori* jako axiom, je nutné jej v konkretních případech dokázat. Racionální čísla *mají* v intuicionistické matematice rozhodnutelnou rovnost a uspořádání, neboť se jedná o konečné objekty jejichž identitu a základní vlastnosti lze zjistit v konečně mnoha krocích. Teorie DNO a RNA jsou proto „pravé“ intuicionistické teorie. To, že dokazují LEM, není nevýhoda nebo známka jejich nekonstruktivnosti, naopak je to z intuicionistického pohledu netriviální užitečné tvrzení dávající konstruktivní význam zákonu vyloučeného třetího pro danou třídu formulí (což pochopitelně souvisí s tím, že obě teorie jsou algoritmicky rozhodnutelné), a tyto teorie rozhodně nejsou „špatně formulované“. Podíváme-li se na seznam zkoumaných teorií, tak (jak bylo právě řečeno) DNO a RNA jsou intuicionisticky adekvátní teorie racionálních čísel, wDNO a wRNA lze uvažovat jako adekvátní teorie *reálných* čísel, jež intuicionisticky rozhodnutelnou rovnost nemají (tyto teorie ovšem nebudou v žádném rozumném smyslu úplné), zatímco obě verze SUCC jsou příliš *slabé*, intuicionisticky adekvátní teorie následníka na přirozených číslech je SUCC + $x = y \vee \neg(x = y)$ (která je, podobně jako DNO, klasická). E, wLO a LO nepopisují konkrétní strukturu a všechny tři jsou intuicionisticky smysluplné. Q je pomocná teorie zavedená jako vhodná základní teorie pro reprezentaci rekurzivních funkcí a věty o neúplnosti, a v tomto smyslu je její přirozenější intuicionistická verze teorie $Q^{\vee}$, pro niž platí základní věta o Σ^0_1-úplnosti (ač autor tvrdí opak).

Zmíněný odstavec na str. 29 by bylo možné považovat za nepodstatnou vatu, jež nestojí za (dvakrát delší) odstavec, který jsem o něm právě napsal. Autorova formalističnost se ovšem (vedle samotné volby zkoumaných teorií) citelně projevuje v následující kapitole 4 (saturované teorie). Autor si u většiny zkoumaných teorií prostě odfajfkuje, že saturované nejsou (což je interpretováno jako známka, že nejsou dostatečně konstruktivní). To je ovšem ve většině případů zavádějící tvrzení, které ve skutečnosti indikuje, že kritérium saturovanosti je nevhodně definované. Především je saturovanost konjunkce dvou (resp. tří, ale všechny uvažované teorie jsou bezesporné) více méně nezávislých podmínek, takže kdyby nic jiného, čtenář by v nesaturovaných případech (pro něž vesměs selže EP_t) alespoň očekával, že se dozví, zda mají tyto teorie DP. Nedozví. (Odpověď je nejspíš pro všechny ano.) Samo EP_t ovšem pro mnoho uvažovaných teorií selže z triviálního důvodu, že v jazyce teorie není dostatek uzavřených termů. To pochopitelně nic neříká o konstruktivitě dané teorie. Podle autorovy definice není dostatečně konstruktivní ani holá intuicionistická predikátová logika v jazyce bez konstant! Varianty EP se uvažují jako kritérium konstruktivity proto, že jsou jistou formalizací principu „k důkazu $\exists x\, \varphi(x)$ je nutné sestrojit objekt a a dokázat $\varphi(a)$". Není důvod vyžadovat, aby onen objekt musel být sestrojen pomocí *termu*. Z tohoto důvodu se v literatuře běžně uvažují i jiné varianty EP, např. je možné žádat, aby byl objekt a v dané teorii pouze definovatelný. Nějaká taková varianta EP by byla daleko užitečnější v kontextu teorií jako wRNA než EP_t. Alternativně by též dávalo smysl nešidit jazyk uvažovaných teorií a expandovat jej o základní definovatelné funkce (např. wRNA je de facto teorie uspořádaných vektorových prostorů nad $\mathbb{Q}$, je proto poněkud absurdní vyvozovat nějaké závěry z toho, že autor do jejího jazyka nezahrnul symboly pro skalární násobení jednotlivými racionálními čísly).

Druhý, ale dle mého názoru daleko závažnější, problém této diplomové práce je její matematická nekorektnost. Značná část práce je parafrází Smoryńského článků a v těchto pasážích pochopitelně nejsou kritické chyby, protože převzaté výsledky platí. Nicméně i v těchto pasážích se objevují méně závažné nedostatky. Zdá se, že v mnoha případech autor zapomněl přizpůsobit převzaté důkazy odchylkám v definicích či ve značení (viz např. zjevně nepravdivé Lemma 4.6, poměrně nekoherentní je též kapitola 4.3.2). Naprostá katastrofa ovšem nastává, když se autor snaží přispět svými vlastními „výsledky" (to se týká zejména kapitoly 5). Autorův „důkaz" Prop. 5.7 je neuvěřitelná snůška vágních nesrozumitelných úvah, logických chyb, mávání rukama a neopodstatněných závěrů (detaily viz níže), a dohromady nemá hlavu ani patu. Totéž platí o Prop. 5.8 a Prop. 6.16. Považuji takřka za skandální, že něco takového autor vůbec mohl s vážnou tváří odevzdat. Je velmi znepokojující, že za pět letech magisterského studia *logiky* nezíská student ani základní představu o tom, co je platný matematický důkaz. Dále, většina tímto způsobem „dokázaných" tvrzení je nepravdivá, a co hůř, lze je vyvrátit ne příliš složitě za pomoci jiných výsledků obsažených v této práci (zejména v kapitole 6; detaily viz níže), což by mělo být v technických možnostech autora. Konkrétně, neplatí Prop. 5.7, Cor. 5.9 ani Prop. 6.16; zdali platí Prop. 5.8, Bůh suď. Neplatí ani Lemma 6.14, ale zde není zcela zřejmé, zda se nejedná jen o chybné značení.

Ve studijním a zkušebním řádu se k diplomovým pracím praví, že *student musí prokázat* *schopnost samostatného tvůrčího zpracování problematiky.* Ve světle právě uvedeného mám vážné pochybnosti, zda pan Brablec něco takového prokázal. Můj celkový dojem z práce je, že netriviální věty jsou buď převzaté z literatury, nebo jsou špatně. Spíše bych tedy řekl, že student prokázal, že jakmile se pustí do samostatného tvůrčího zpracování problematiky, nedá se výsledkům jeho počínání věřit. Navrhuji klasifikovat práci známkou „dobře“, za snahu.

Dále uvádím připomínky ke konkretním pasážím textu.

- Def. 2.3: axiom A6 nedává smysl (resp., je dokazatelný z ostatních a popsaná axiomatizace je proto neúplná). Chybějící axiom pro konjunkci má správně znít $A \to (B \to A\&B)$ (někdy se též objevuje ve složitější verzi $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to A\&B))$).
- Thm. 2.6 platí v uvedeném tvaru pouze pro konečné Γ.
- Def. 2.7: "at each of them there is J_n" je dost nepřesný popis.
- Thm. 2.8: v literatuře lze běžně najít přinejmenším tři různé definice pojmů "subtree" nebo "tree embedding". Pro jednu z nich (podmnožina vrcholů s indukovaným uspořádáním) věta neplatí (protože každý strom lze pak vnořit do binárního), pro druhou (vrchol spolu se vším nad ním) ji nelze aplikovat na Jaśkowského stromy. Bylo by proto záhodno, aby autor použitý pojem explicitně definoval.
- Thm. 2.18: uvedená formulace Löwenheimovy–Skolemovy je pro intuicionistickou logiku nevhodná. Jednak nelze redukovat nedokazatelnost na konzistenci, takže by bylo užitečnější předpokládat $T \nvdash \varphi$ a závěr zesílit na $\mathcal{K} \nVdash \varphi$; jednak by bylo též vhodné přidat podmínku $|\mathcal{K}| \leq \aleph_0 + |L|$.
- str. 13, LO a wLO: zde by neškodilo říci něco o motivaci této volby axiomů (LO platí pro rozhodnutelná uspořádání jako např. racionální čísla; wLO, na rozdíl od LO, platí i pro čísla reálná).
- str. 15: axiomy DN1–3 jsou v (w)RNA redundantní.
- Prop. 3.12: druhá část věty plyne z první, neboť nad wLO rozhodnutelnost $<$ implikuje rozhodnutelnost $=$.
- Prop. 3.14, "$\alpha \Vdash$ AP because $\beta \Vdash (x < y \vee y < x)$": co je β?
- Lem. 4.6 je zcela špatně. Je-li Γ sporné, pak např. $\Gamma \nmid \neg\varphi_{\mathrm{at}}$. Obecněji $\Gamma \mid \varphi$ iff φ je pravdivé v klasickém jednoprvkovém modelu v němž platí všechny predikáty.
- Thm. 4.8: ve znění věty musí být "Acz(Γ) is a maximal consistent ...", protože nekonzistentní teorie je d-úplná i e-úplná. Naopak, "deductively closed" lze vynechat, protože to plyne z kterékoliv ze zbylých dvou podmínek.
- Cor. 4.10: předpoklad na konzistenci je zbytečný.
- Prop. 4.16: k důkazu není vůbec potřeba mašinerie Aczelova slashe, přímo z definice aplikované na sentence $\exists x\,(0 < x \wedge x < 1)$ nebo $\exists x\,(x + x = 1)$ je zřejmé, že tyto teorie nejsou e-úplné.

- Prop. 4.18: to není moc iluminativní důkaz. Nešlo by tohle dokázat přímo (bez použití [TS00]), čímž by se naopak získal alternativní důkaz saturovanosti Harropovských teorií?
- pod Prop. 4.18, "a natural question arises ...": tohle není přirozená otázka, protože odpověď je očividně ne (k libovolné saturované teorii lze např. přidat jako axiom $\varphi \to \varphi$, kde φ není Harropova formule). Daleko přirozenější otázka je, zda je každá saturovaná teorie ekvivalentní *nějaké* množině Harropových axiomů.
- Def. 4.20: "Let $\mathcal{K}$ be a Kripke model and let a language L with at least one constant be given" nedává smysl, protože volbou kripkovského modelu je již jazyk zafixován.
- Thm. 4.21:
  - Pominu-li další problémy (viz níže), větu nelze při dané definici operací $\sum$ a $'$ aplikovat na *žádnou* teorii. Má-li teorie model $\mathcal{K}_0$, má také model $\mathcal{K}_1$ na stejném rámci takový, že nosiče $l_0(\alpha)$ a $l_1(\beta)$ jsou disjunktní pro všechna α, β. Potom $(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1)'$ neexistuje. Aby tato konstrukce vůbec dávala smysl, musela by se tedy Def. 4.20 nějak modifikovat, aby bylo možné přejmenovávat prvky. Takovou modifikaci budu nadále předpokládat.
  - $\mathcal{F}$ rozhodně nemůže být vlastní třída, což by formulace věty dovolovala. Při autorově definici $\sum$ dokonce musí být $\mathcal{F}$ spočetné a je to posloupnost, ne množina.
  - Ze stejného důvodu je $\mathcal{F}$ neprázdné. Pak ovšem nic nezaručuje, že T má vůbec nějaký model, takže mezi předpoklady je třeba přidat bezespornost T.
  - $'$ je nedeterministická operace (a to podstatně: různou volbou splňování atomických formulí v α_0 lze ovlivnit množinu sentencí platných v $\mathcal{K}'$), takže "$(\sum \mathcal{F})'$ is a model of T" ve znění věty je nejednoznačné: lze to číst "každý model tvaru $(\sum \mathcal{F})'$ je model T" nebo "nějaký model tvaru $(\sum \mathcal{F})'$ je model T". Druhá varianta je správně.
  - Třída modelů dané teorie je *vždy* uzavřena na disjunktní sjednocení. Předpoklad věty by proto šel zjednodušit, stačí předpokládat, že pro každý model $\mathcal{K} \Vdash T$ existuje model T tvaru $\mathcal{K}'$. Podezírám ovšem autora, že pouze zapomněl přizpůsobit Smoryńského značení svému, a že ve skutečnosti se všude mlčky předpokládá, že uvažujeme pouze modely s kořenem.
  - V důkazu věty se $(\sum \mathcal{F})'$ aplikuje na množinu modelů indexovanou všemi uzavřenými termy. Vzhledem k autorově definici tohle nelze provést pokud jazyk L není spočetný. Vzhledem k předchozí poznámce to je jedno, protože lze nejdřív utvořit disjunktní sjednocení (přestože není instancí autorova $\sum$) a potom vzít $(\sum \mathcal{F}_1)'$ pro $|\mathcal{F}_1| = 1$; pokud ovšem autor skutečně předpokládá omezení na modely s kořenem jak píši výše, pak je nutné buď přidat spočetnost jazyka do předpokladů věty, nebo upravit Def. 4.19 aby dovolovala nespočetné sumy (což by bylo záhodno tak jako tak, to zbytečné omezení se nijak nepoužije).
- pod Exm. 4.22: ač autor tvrdí opak, na Q sémantické kriterium Thm. 4.21 také nelze použít. Obecněji, lze jej použít pro teorii T pouze tehdy, pokud $T \vdash \neg(t = s)$ pro

každou dvojici syntakticky různých uzavřených termů t, s (to je podmínka nutná, ne postačující). (Pokud to není pravda, tak existuje model T v jehož kořeni platí $t = s$. Na jednu stranu, protože rovnost není v uvažovaných modelech absolutní, lze tento model upravit na model $\mathcal{K}_0$, v němž jsou realizace t a s různé objekty. Na druhou stranu, protože v kořeni platí $t = s$, lze jej upravit na model $\mathcal{K}_1$, v němž jsou realizace t a s totožné. Pak $(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1)'$ neexistuje, podobně jako v Exm. 4.22.) V Q není dokazatelné např. $\neg(0 + 0 = 0)$, tudíž předpoklad Thm. 4.21 nesplňuje.

Z tohoto příkladu by mělo být zřejmé, že Thm. 4.21 je prakticky takřka nepoužitelná, s výjimkou velmi omezené třídy teorií.

- Lem. 4.23:
  - Model $\mathcal{K}$ ve znění věty musí mít kořen, jinak by šlo vzít $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ pro libovolné T.
  - Opět chybí předpoklad, že T je konzistentní.
  - $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ jsou generované podmodely, nikoliv podrámce, modelu $\mathcal{K}$.
  - V důkazu: z $\mathcal{K} \Vdash A \vee B$ obecně neplyne $\mathcal{K} \Vdash A$ nebo $\mathcal{K} \Vdash B$. Zde je právě potřeba použít, že $\mathcal{K}$ má kořen.
- diskuse pod Lem. 4.23: Z problémů jak zmíněných v práci, tak přehlédnutých autorem a zmíněných v tomto posudku, je jasně vidět, že autor si pro formulaci sémantického kriteria saturovanosti zvolil špatnou sémantiku intuicionistické logiky. Jiná běžně používaná sémantika vypadá takto (při značení z Def. 2.9):
  - Pro $\alpha \leq \beta$ nepožadujeme, aby nosič $l(\alpha)$ byl podmnožinou nosiče $l(\beta)$. Místo toho máme (jako součást modelu) dánu funkci $f_{\alpha,\beta} \colon l(\alpha) \to l(\beta)$.
  - Podmínka persistence se změní na požadavek, že $f_{\alpha,\beta}$ je homomorfizmus (klasických) struktur $l(\alpha)$ resp. $l(\beta)$.
  - Musí platit $f_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_\alpha$ a $f_{\beta,\gamma} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\gamma}$ kdykoliv $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.
  - V logice s rovností klademe $\alpha \Vdash (t = s)[e]$ iff $t^{l(\alpha)}[e] = s^{l(\alpha)}[e]$.

  V této sémantice problémy podobné Exm. 4.22 nenastanou, a je docela možné, že bude platit nějaká analogie Lem. 4.23 pro predikátovou logiku.
- str. 42, ř. 7: ona teorie neobsahuje výrokový *axiom*, ale dokazuje výrokové *schéma*.
- Lem. 5.2: z aplikací je zřejmé, že $\mathcal{K}$ nemá být model výrokový, ale predikátový.
- Prop. 5.3: "There exists a modified Jaskowski tree K with an origin α_0 such that $\mathcal{K}^* = \langle K, \leq, \Vdash^* \rangle$ is a propositional Kripke model and ..." nedává smysl, rámec je jednoznačně určen modelem, ale nikoli naopak. Mělo by být: "There exists a propositional Kripke model $\mathcal{K}^* = \langle K, \leq, \Vdash^* \rangle$ with a root α_0 such that $\langle K, \leq \rangle$ is a modified Jaśkowski tree and ...".

- před Lem. 5.5: lemma neukazuje, že de Jonghova věta je jemnější kritérium konstruktivnosti než koincidence [s klasickým rozšířením], nýbrž pouze, že není hrubší.

- Prop. 5.7: jak již bylo řečeno výše, důkaz této věty je zcela nekoherentní. Pokusím se vypíchnout nějaké konkretní body:

  - De Jonghova věta je *univerzální* tvrzení: "pro každou výrokovou formuli A, jestliže $\nvdash_{\mathrm{IPC}} A$, pak ...". Její negace, již se autor snaží dokázat, je tedy *existenční* tvrzení. Důkaz ovšem začíná "Assume that $\nvdash_{\mathrm{IPC}} A$", a autor se tváří, jako by cosi dokazoval pro *každou* intuicionistickou netautologii, což očividně nemůže fungovat (vezměme např. $A = \bot$).
  - Pokud bychom chtěli dokázat, že de Jonghova věta *platí*, pak stačí pro každé k najít sentence $\psi_1, \ldots, \psi_k$ s nějakými vlastnostmi, které by dovolily použít Lemma 5.2 podobně jako v důkazu 5.3. Pokud ale chceme dokázat, že de Jonghova věta *neplatí*, pak z neexistence takových formulí ψ_i nic neplyne (to, že selže jedna konkrétní strategie důkazu de Jonghovy věty ještě neznamená, že neexistuje jiný důkaz).
  - Pokud pro každé k existují formule $\psi_1, \ldots, \psi_k$ s uvedenými vlastnostmi, ještě to neznamená, že existuje nekonečná posloupnost $\{\psi_i \mid i < \omega\}$ s těmito vlastnostmi, protože formule (řekněme) ψ_1 mohla být pro různá k různá.
  - Nevím, jestli se mám smát nebo brečet, když vidím $\psi_1, \ldots, \psi_\infty$ jako značení pro nekonečnou posloupnost indexovanou přirozenými čísly.
  - Pro použití lemmatu 5.2 by nestačilo najít formule $\psi_1, \ldots, \psi_k$ a modely $\mathcal{K}_i \Vdash T$ tak, že $\mathcal{K}_j \Vdash \psi_i$ iff $i = j$. V lemmatu se požaduje, aby navíc $\mathcal{K}_i$ měly jednoprvkové rámce, t.j. aby to byly klasické struktury. Tuto podmínku lze o něco oslabit: důkaz projde za předpokladu, že $\mathcal{K}_j \Vdash \neg\psi_i$ pro všechna $i \neq j$. Úplně vynechat však tuto podmínku nelze.
  - Nevím o žádném netriviálním způsobu, jak tvrzení "non-linear tree models comprise of linear models" přiřadit význam tak, aby získalo pravdivostní hodnotu, a aby tato hodnota byla pravda.
  - Pro $\beta \geq \alpha$ platí $|l(\beta)| \geq |l(\alpha)|$ vždy, protože $l(\beta) \supseteq l(\alpha)$.
  - Argument, proč linearní modely stejného "typu" nelze rozlišit sentencí, je nesmyslný. Stejně jako výše: pokud selže nějaká strategie jak ukázat jisté tvrzení, nijak z toho neplyne, že ono tvrzení nelze ukázat jiným způsobem (a už vůbec ne, že lze ukázat jeho negaci).
  - Prop. 5.7 *neplatí,* tedy obě teorie SUCC *splňují* de Jonghovu větu. Nechť $\{\mathrm{nf}_n \mid n \leq \omega\}$ je očíslování intuicionistických výrokových formulí v jedné proměnné jako v [2, Exm. 7.66] (t.j. v Riegerově–Nishimurově svazu jsou formule s lichým indexem "uvnitř", formule se sudým indexem "na okraji"). Položme $\chi_i = \forall x\, \mathrm{nf}_{2i+1}(P(x))$ a $\psi_i = \chi_{i+1} \wedge \neg\chi_i$. Lze ukázat, že formule ψ_i je konzistentní s $\mathrm{M}_1 + \exists x\, P(x)$ pro každé i. Dle níže uvedené poznámky (pro str. 53) tedy existují modely $\mathcal{K}_i \Vdash \mathrm{SUCC}^\vee + f(\psi_i)$ (značení viz str. 48). Zřejmě $\mathcal{K}_j \Vdash \neg f(\psi_i)$ pro $i \neq j$, dle výše uvedeného lze tedy

aplikovat lemma 5.2 a dokázat de Jonghovu větu pro SUCC podobně, jako v důkazu Prop. 5.3.

- Prop. 5.8: "důkaz" je ještě zmatečnější, než důkaz Prop. 5.7 (resp. je jeho úpravou), a nebudu jej blíže rozebírat. Jen bych vypíchnul, že jako další ingredience v něm vystupuje autorův zoufale naivní pokus klasifikovat modely wRNA (bez jakéhokoliv náznaku důkazu). Popis není zcela jasný, ale zdá se, že když autorovu představu aplikuju na *klasické* modely wRNA (t.j. modely RNA, alias lineárně uspořádané divizibilní abelovské grupy s vyznačeným pozitivním prvkem), mělo by platit, že všechny tyto modely jsou izomorfní $\mathbb{Q}$! Nic takového neplatí ani v náznaku, a to ani pro spočetné modely. RNA má $2^{\aleph_0}$ neizomorfních spočetných modelů. [Pro čtenáře obeznámené se základními pojmy deskriptivní teorie ekvivalencí na polských prostorech:] Co hůř, RNA je Borelovsky úplná, takže na relaci izomorfizmu modelů RNA lze redukovat relaci isomorfizmu *libovolných* spočetných struktur, a žádná netriviální klasifikace modelů RNA až na izomorfizmus proto není možná.

- Cor. 5.9 je odvozený pomocí nepravdivé věty 6.16 z nedokázané věty 5.8. Navíc ho lze vyvrátit pomocí výsledků z kapitoly 6, t.j. de Jonghova věta pro wDNO *platí*. Jedna možnost je využít Riegerovy–Nishimurovy formule stejným způsobem, jako uvádím výše pro SUCC. Jiná možnost je definovat $\chi_i = \exists x_1, \dots, x_i\,(x_1 < \cdots < x_i \wedge P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_i))$ a $\psi_i = \chi_i \wedge \neg\chi_{i+1}$, kde $P(x) = \forall y\,(x = y \vee x < y \vee y < x)$. Podobně jako v důkazu Thm. 6.6 se ukáže, že wDNO + ψ_i má model, a pak lze postupovat jako v Prop. 5.3.

- str. 49 pod eq. 6.2 a podobně na mnoha dalších místech v celé práci (zvláště v kapitole 6): $\mathcal{K}_2 = \langle K, \leq, l_1, \Vdash_2 \rangle$ je nesmysl. Dle definice 2.9 je $l(\alpha)$ struktura, ne jen její nosič. Expandujeme-li tedy model o realizace nových predikátů nebo funkcí, nutně se změní nejen $\Vdash$, ale i l. Autor zřejmě otrocky opsal Smoryńského značení a nenamáhal se upravit jej svým definicím.

- str. 51, eq. 6.8: to nedává smysl, e je ohodnocení v $l_1(\alpha)$, ne v $l_{1'}(\alpha)$ (jejichž univerza jsou disjunktní).

- str. 53, na konci kap. 6.1: "At the end, we found out that the construction cannot be used for proving the undecidability of SUCC$^\vee$." Toto je značně pochybné tvrzení. Ano, pokud vezmeme tu konstrukci do poslední čárky doslova tak, jak je v práci formulována, tak model SUCC$^\vee$ obecně nedá. V této konstrukci je ovšem očividně značná vůle, kupříkladu realizace 0 byla volena zcela libovolně. Pokud tedy kořen modelu $\mathcal{K}$ obsahuje alespoň jeden prvek a splňující $P(a)$, lze volit $o = a$, což zaručí, že výsledný model splňuje SUCC$^\vee$. Prakticky stejná konstrukce tedy dá okamžitě redukci teorie $\mathrm{M}_1 + \exists x\,P(x)$ na SUCC$^\vee$. Je $\mathrm{M}_1 + \exists x\,P(x)$ nerozhodnutelná?[1] Ať tak či tak, čekal bych, že autor k tomu něco řekne, dřív než začne vynášet kategorické soudy že se něco nedá použít.

- str. 57, uprostřed: v definici $l_1(\beta)$ má být asi $l_1(\beta) = l(\beta) \cup l_1(\alpha) \cup \dots$. Dále není řečeno, odkud se bere a: $\beta \Vdash P(a)$ lze vzít jako implicitní požadavek aby $a \in l(\beta)$, ale

[1] Domnívám se, že ano, a že to lze dokázat snadnou úpravou důkazu v [4, §III.B].

není zřejmé, zda následující $\alpha \not\Vdash P(a)$ implikuje $a \in l(\alpha)$, nebo zda má naopak tato podmínka automaticky platit pro všechna $a \in l(\beta) \setminus l(\alpha)$.

- str. 57, ř. −9: "$(a_0, a_1 \cdots \in l(\alpha))$" — jaké α? Tohle opravdu nedává smysl. Napadají mne zhruba dvě možnosti: buď očíslujeme najedou $\bigcup_{\alpha \in K} l(\alpha)$, nebo pro každé α zvolíme zvláštní očíslování $l(\alpha)$. V druhém případě ovšem nastanou zásadní potíže se zbytkem důkazu, protože očíslování v α a $\beta > \alpha$ nebudou souhlasit na prvcích $l(\alpha)$. V prvním případě zas nebude ke konci důkazu zaručeno $a_{i+1} \in l(\alpha)$. Důkaz je každopádně potřeba opravit.

- Prop. 6.13: "every formula that is translated by the Gödel translation is weaker than the original formula" rozhodně neplatí, viz např. dvojici $\varphi = \neg\forall x\, P(x)$, $\varphi^{\mathrm{g}} = \neg\forall x \neg\neg P(x)$. Je zarážející, že si autor takové elementární vlastnosti intuicionistické logiky není vědom. V daném případě sice skutečně platí $\mathrm{Q} \vdash \mathrm{Q}^{\mathrm{g}}$, ale je to potřeba ověřit podrobněji rozborem axiomů.

- Lem. 6.14: "for any" $\mapsto$ "for some". Co je daleko podstatnější je, že toto lemma platí pouze pro $\mathrm{Q}^{\rightarrow}$. Naopak, lze snadno nahlédnout, že $\mathrm{Q}^{\vee}$ dokazuje uvedenou formuli $x \leq \overline{n} \rightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = \overline{n}$ a splňuje větu o Σ-úplnosti.

- Prop. 6.16: to je další z autorových voodoo důkazů.
  - Ano, do každého modelu wRNA lze vnořit klasická standardní racionální čísla. To ale v žádném případě neznamená, že toto vnoření zachovává platnost neatomických sentencí. Autora by měl udeřit do očí prostý fakt, že v důkazu o wRNA použil pouze to, že platí v klasickém $\mathbb{Q}$. Kdyby tedy důkaz platil, muselo by být dokonce RNA konzervativní nad wDNO.
  - Tvrzení věty každopádně neplatí, wRNA *není* konzervativní nad wDNO. Z věty 6.6 vyplývá, že wDNO nedokazuje sentenci $\forall x, y\, (P(x) \leftrightarrow P(y))$, kde $P(x) = \forall u\, (x \# u \vee \neg(x \# u))$. Tato sentence je ovšem snadno dokazatelná ve wRNA použitím axiomu RN5.

Vybrané jazykové a terminologické poznámky pro autora:

- Craig Smoryński, Stanisław Jaśkowski a Vítězslav Švejdar jsou v práci jmenováni jako Smorynski, Jaskowski, Švejdar. Důvod této nekonzistence mi není zcela zřejmý, domnívám se, že první dva pánové si svá nabodeníčka zaslouží též.

- Def. 2.7: čemu říkáte "origin" se běžně nazývá "root". "Origin" je 0 ve vektorovém prostoru, popř. počátek souřadnicového systému.

- str. 13, DNO: tato teorie se běžně označuje DLO (*d*ense *l*inear *o*rder). Co znamená N?

- Prop. 3.14: "We proof that" $\mapsto$ "prove".

- str. 26 nahoře: "Either $\mathrm{SUCC}^{\rightarrow}$ or $\mathrm{SUCC}^{\vee}$ does not coincide with ..." by znamenalo, že právě jedna z těch dvou teorií nekoinciduje s atd. Mělo by být "Neither $\mathrm{SUCC}^{\rightarrow}$ nor $\mathrm{SUCC}^{\vee}$ coincides with".

- Prop. 3.17: "The model [...] is comprised of two nodes" nelze. Je možné použít buď "is composed of two nodes" anebo "comprises two nodes", ale ne to takhle zkombinovat.
- pod Cor. 3.20: "Let's" $\mapsto$ "Let us", kontrakce jsou v tomto druhu textu stylisticky značně nevhodné.
- str. 29 nahoře: "If we think of α as it was a classical structure" $\mapsto$ "as if it were" (subjunktiv).
- str. 50, ř. 9 a na několika dalších místech: "actual" znamená "skutečný". České "aktuální" by zde šlo vyjádřit třeba slovem "current".
- str. 50, ř. -13: "does not equal to a, but in the successor of α, q_a^α equals to a" $\mapsto$ "... equal a ... a successor ... equals a"
- str. 54, pod (AP): "x is comparable to y". Běžná terminologie je "apart". Požití "comparable" je matoucí, protože tím se běžně myslí $x \leq y \vee y \leq x$ (kde v daném kontextu se definuje $x \leq y$ jako $\neg(y \leq x)$).

Reference

[1] Nick Bezhanishvili and Dick de Jongh, *Intuitionistic logic*, 2005, ESSLLI'05 course notes.

[2] Alexander V. Chagrov and Michael Zakharyaschev, *Modal logic*, Oxford Logic Guides vol. 35, Oxford University Press, 1997.

[3] Craig Smoryński, *Applications of Kripke models*, in: Metamathematical investigations of intuitionistic arithmetic and analysis (A. S. Troelstra, ed.), Lecture Notes in Mathematics vol. 344, Springer, 1973, pp. 324–391.

[4] ———, *Elementary intuitionistic theories*, Journal of Symbolic Logic 38 (1973), no. 1, pp. 102–134.