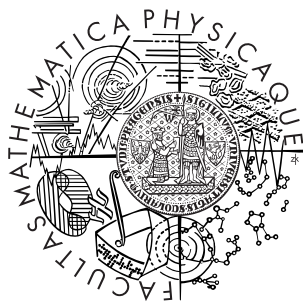


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Štěpán Gregor

### **Výpočetní prostředky stanovení IBNR rezerv neživotního pojištění**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Helga Krafferová

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

2010

Mé poděkování patří vedoucí této diplomové práce Mgr. Helze Krafferové, za trpělivé vedení a množství praktických rad. Dále bych rád poděkoval Radanu Vilímovi za trpělivost a morální podporu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 3. srpna 2010

Štěpán Gregor

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Metoda chain-ladder</b>	<b>8</b>
2.1	Značení a základní předpoklady . . . . .	8
2.2	Výpočet střední kvadratické chyby . . . . .	11
2.2.1	Rekurzivní výpočet střední kvadratické chyby . . . . .	17
2.2.2	Implementace tail faktoru . . . . .	18
2.3	Praktická ukázka . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Metoda mnichovský chain-ladder</b>	<b>21</b>
3.1	Úvod . . . . .	22
3.1.1	$(P/I)$ problém standardní metody chain-ladder . . . . .	22
3.1.2	Korelace mezi trojúhelníky . . . . .	25
3.1.3	Modelování závislosti . . . . .	26
3.1.4	Přechod k reziduálním hodnotám . . . . .	27
3.2	Teoretické základy . . . . .	30
3.2.1	Standardní chain-ladder metoda . . . . .	30
3.2.2	Metoda mnichovský chain-ladder . . . . .	31
3.3	Praktická implementace . . . . .	35
3.3.1	Odhady parametrů . . . . .	35
3.3.2	Elasticita projekcí v závislosti na parametru $\lambda$ . . . . .	38
3.3.3	Výpočet variability metody mnichovský chain-ladder . . . . .	40
3.3.4	Praktická ukázka . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>49</b>
	<b>Literatura</b>	<b>50</b>

Název práce: Výpočetní prostředky stanovení IBNR rezerv neživotního pojištění

Autor: Bc. Štěpán Gregor

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Helga Krafferová, UNIQA pojišťovna, a.s.

e-mail vedoucího: Helga.Krafferova@uniqa.cz

Abstrakt: Technické rezervy představují závazky pojišťovny vůči jejím klientům. V této práci se zaměříme na výpočetní metody rezervy na škody vzniklé do konce běžného účetního období, ale v tomto účetním období dosud nehlášené. Nejrozšířenější výpočetní metodou této rezervy je metoda chain-ladder, kterou v této práci detailně popíšeme. S využitím poznatků v této práci demonstrujeme výpočet rezervy na datech z pojistného trhu. Přílohou této práce je také samostatný výpočetní program.

Klíčová slova: Pojišťovnictví, IBNR rezerva, chain-ladder

Title: Computational tools for IBNR reserves calculation

Author: Bc. Štěpán Gregor

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Helga Krafferová, UNIQA pojišťovna, a.s.

Supervisor's e-mail address: Helga.Krafferova@uniqa.cz

Abstract: Technical provisions represent the liability of the insurance company to its clients. In this work we focus on the computational tools of incurred but not reported claims. The most popular calculation method is probably the chain-ladder method which will be in detail analyzed in this thesis. Finally, by applying the theory in this work we will demonstrate the calculation in the own developed software.

Keywords: Insurance, IBNR reserve, chain-ladder

# Kapitola 1

## Úvod

Pojištění je dlouhodobý obchod, při kterém se pojistné hraří dopředu, během pojistné doby mohou nastat pojistné události a některé závazky z pojistných smluv jsou hrazeny dlouho po skončení pojištění. Proto je nutné, aby pojišťovna vytvářela technické rezervy. Měly by být zárukou, že pojišťovna bude schopna dostát svým závazkům, které na sebe převzala uzavřením pojistné smlouvy.

Podle zákona č. 277/2009 Sb., o pojišřovnictví, je pojišřovna anebo zajišřovna povinna vytvářet technické rezervy k plnění závazků z poskytované pojišřovací, popřípadě zajišřovací činnosti, které jsou pravděpodobné anebo jisté, ale nejistá je jejich výška nebo okamžik, ke kterému vzniknou.

Je-li provozována pojišřovací činnost podle jednoho nebo více pojistných odvětví neživotních pojišření, které jsou vymezeny zákonem, vytváří pojišřovna tyto pojistně-technické rezervy:

- rezervu na nezasloužené pojistné,
- rezervu na pojistná plnění,
- rezervu na prémie a slevy,
- vyrovnávací rezervu<sup>1</sup>,
- rezervu pojistného neživotních pojišření
- rezervu na splnění závazků z ručení za závazky Kanceláře podle zákona upravujícího pojišření odpovědnosti z provozu vozidla,

---

<sup>1</sup>Podle prováděcí vyhlášky č.434/2009 Sb., se s účinností od 1.1.2010 tvoří vyrovnávací rezerva jen pro pojistná odvětví B14 a B15 podle zákona o pojišřovnictví.

- jinou rezervu.

Rezerva na pojistná plnění, která je co do výše ze všech shora zmíněných rezerv zpravidla nejvýznamnější, je určena ke krytí pojistných závazků z pojistných událostí:

- hlášených během účetního období, ale v tomto účetním období dosud nezlikvidovaných (v praxi označovaná jako RBNS - z angl. Reported But Not Settled)
- nastalých během účetního období, ale v tomto účetním období dosud nenahlášených (v praxi označovaná jako IBNR - z angl. Incurred But Not Reported)

Rezerva RBNS se určí jako součet jednotlivých odhadů hlášených pojistných událostí k rozvahovému dni provedených pojistným likvidátorem. Odhad rezervy IBNR už z její podstaty nelze stanovovat konkrétně k jednotlivým škodám, protože o těchto škodách k rozvahovému dni není nic známo. Proto se tato rezerva stanovuje souhrnně za všechny očekávané škody. K odhadu pojistných plnění z dosud nehlášených pojistných událostí je třeba užít matematických metod<sup>2</sup> vycházejících ze zkušeností s vývojem škod v daném odvětví v minulosti. Příslušné výpočetní metody však nelze používat mechanicky, pro správné stanovení výše rezerv je třeba dobré znalosti provozu pojišťovny (například postupu při likvidaci škod) a v úvahu je třeba brát i vnější vlivy (inflace, legislativní změny atd.).

Data potřebná k výpočtu rezervy IBNR na základě minulého škodního vývoje se často prezentují ve formě vývojových trojúhelníků (angl. run-off triangle). Jedná se o schéma, v němž hodnoty v jednom řádku jsou vztaheny k jednomu referenčnímu období (nejčastěji jeden rok), data uvedená v jednom sloupci pak mají společný údaj o zpoždění v úhradě anebo hlášení. V kumulativním trojúhelníku je vstupem hodnota vztahující se ke škodám zlikvidovaných nebo nahlášených do určité doby od vzniku. Jednotkou času, ve kterém je zpoždění udáváno, je nejčastěji jeden rok nebo čtvrtletí. Hovoříme pak o ročních nebo čtvrtletních kumulativních trojúhelnících.

Uvažujme kumulativní trojúhelník na obr. 1.1. Pokud  $X_{i,t}, t \leq n$ , označuje celkový úhrn škod, které vznikly v roce  $i$  (rok vzniku) a byly vyplaceny do konce roku  $i + t$  (vývojový rok), hovoříme o kumulativním trojúhelníku

---

<sup>2</sup>např. Mandl P., Mazurová L. (1994)

	<b>1</b>	<b>2</b>	...	<b>t</b>	...	<b>n</b>
<b>1</b>	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$		$X_{1,t}$		$X_{1,n}$
<b>2</b>	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$		$X_{2,t}$		
...						
<b>t</b>	$X_{t,1}$					
...						
<b>n</b>	$X_{n,1}$					

Obrázek 1.1: Trojúhelníkové schéma

pojistného plnění (angl. paid triangle). Pokud hodnota  $X_{i,t}, t \leq n$ , označuje celkový úhrn škod vzniklých v roce  $i$  a hlášených pojišťovně do konce roku  $i + t$ , hovoříme o kumulativním trojúhelníku celkového škodního závazku (angl. incurred triangle). Aktuální účetní rok je tvořen hodnotami na nejdelší známé diagonále  $X_{i,n+1-i}$ , kde  $i = 1, \dots, n$ . Metody, které budou v následujících kapitolách popsány, slouží k doplnění trojúhelníku na obr. 1.1 na čtverec, tedy k nalezení odhadů  $\hat{X}_{i,n}$ .

V první části této práce představíme metodu chain-ladder, která je jednou z nejpoužívanějších metod výpočtu IBNR. Ve druhé části se seznámíme s poměrně novou metodou mnichovský chain-ladder, kterou lze za určitých podmínek chápat jako zpřesnění předchozí metody. U obou metod zavedeme předpoklady a demonstrujeme výpočet bodového odhadu rezervy IBNR, směrodatné odchylky tohoto odhadu a bezpečnostní přírážky na dané hladině spolehlivosti. Veškeré výpočty pochází ze samostatně vytvořeného výpočetního programu, který je přílohou této práce.

# Kapitola 2

## Metoda chain-ladder

### 2.1 Značení a základní předpoklady

Nechť  $n \in N$  značí počet roků vzniku pojistných událostí a  $T = \{1, \dots, m\}$ ,  $m \in N$  a  $m = n$ , počet vývojových roků. Pro  $i, t = 1, \dots, n$  označme náhodnou veličinu  $X_{i,t}$  jako úhrn škod vzniklých v roce  $i$ , vyplacených anebo nahlášených do konce roku  $i + t$ . Hodnoty  $X_{i,t}$  jsou známé pro  $t \leq n + 1 - i$  a predikované pro  $t > n + 1 - i$ . Základní úlohou metody chain-ladder je odhadnout konečné předpovědi  $X_{i,n}$  a výši škodní rezervy

$$R_i = X_{i,n} - X_{i,n+1-i}$$

pro jednotlivé roky vzniku  $i = 2, \dots, n$ . Předpokládejme, že existují vývojové faktory  $f_1, \dots, f_{n-1} > 0$  takové, že

$$E(X_{i,t+1} | X_{i,1} \dots X_{i,t}) = X_{i,t} f_t, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq n-1, \quad (2.1)$$

pak můžeme  $f_t$  odhadnout jako vážený průměr

$$\hat{f}_t = \frac{\sum_{i=1}^{n-t} X_{i,t} f_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-t} X_{i,t}}, \quad 1 \leq t \leq n-1,$$

kde

$$f_{i,t} = \frac{X_{i,t+1}}{X_{i,t}}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq n-1,$$

značí individuální vývojové faktory. Konečné predikce  $X_{i,n}$  odhadneme výrazem

$$\hat{X}_{i,n} = X_{i,n+1-i} \prod_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{f}_j$$



a škodní rezervu  $R_i$  výrazem

$$\widehat{R}_i = X_{i,n+1-i} \left( \prod_{j=n+1-i}^{n-1} \widehat{f}_j - 1 \right).$$

Protože metoda chain-ladder neuvažuje žádnou závislost mezi jednotlivými škodními roky, můžeme navíc předpokládat, že náhodné veličiny  $X_{i,t}$  v různých letech vzniku, tj.

$$\{X_{i,1}, \dots, X_{i,n}\}, \{X_{j,1}, \dots, X_{j,n}\}, \quad i \neq j \quad (2.2)$$

jsou nezávislé. V praxi může být někdy tento předpoklad jistými sezónními vlivy porušen, například změnou metodiky rezervování.

Následující věta dokazuje, že 2.1 a 2.2 jsou implicitní předpoklady metody chain-ladder:

**Věta 2.1** *Označme  $D = \{X_{i,t} | t \leq n + 1 - i\}$  jako množinu všech dosud pozorovaných dat. Pak z 2.1 a 2.2 vyplývá*

$$\mathbb{E}(X_{i,n} | D) = X_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \dots f_{n-1}.$$

*Důkaz:* Pro jednoduchost zavedme značení

$$\mathbb{E}_i(X_{i,n}) = \mathbb{E}(X_{i,n} | X_{i,1} \dots X_{i,n+1-i})$$

Z 2.1 a opakované aplikace 2.2 pak vyplývá

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{i,n} | D) &= \mathbb{E}_i(X_{i,n}) \\ &= \mathbb{E}_i(\mathbb{E}(X_{i,n} | X_{i,1} \dots X_{i,n-1})) \\ &= \mathbb{E}_i(X_{i,n-1} f_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}_i(X_{i,n-1}) f_{n-1} \\ &= \text{atd.} \\ &= \mathbb{E}_i(X_{i,n+1-i}) f_{n+1-i} \dots f_{n-1} \\ &= X_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \dots f_{n-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

□

Tato věta dokazuje, že odhad  $\widehat{X}_{i,n} = X_{i,n+1-i}f_{n+1-i} \cdots f_{n-1}$  je ekvivalentní s výrazem  $E(X_{i,n}|D)$ , který představuje nejlepší odhad konečných škod  $X_{i,n}$  na základě pozorování  $D$ . Pomocí následující věty dokážeme, že odhady  $\widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{n-1}$  faktorů  $f_{n+1-i} \cdots f_{n-1}$  jsou nestranné a nekorelované.

**Věta 2.2** *Za platnosti 2.1 a 2.2 jsou odhady  $\widehat{f}_t, 1 \leq t \leq n-1$ , nestranné a nekorelované.*

*Důkaz:* Nechť

$$B_t = \{X_{i,j} | j \leq t, i + j \leq n + 1\}, \quad 1 \leq t \leq n.$$

Pak z 2.1 dostáváme

$$E(X_{i,t+1}|B_t) = E(X_{i,t+1}|X_{i,1}, \dots, X_{i,t}) = X_{i,t}f_t.$$

S využitím 2.2 můžeme psát

$$\begin{aligned} E(\widehat{f}_t|B_t) &= \frac{E(\sum_{i=1}^{n-t}(X_{i,t+1}|B_t))}{E(\sum_{i=1}^{n-t}X_{i,t})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-t}E(X_{i,t+1}|B_t)}{\sum_{i=1}^{n-t}X_{i,t}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-t}X_{i,t}f_t}{\sum_{i=1}^{n-t}X_{i,t}} = f_t \end{aligned} \quad (2.4)$$

z čehož díky vztahu

$$E(\widehat{f}_t) = E(E(\widehat{f}_t|B_t)) = f_t, \quad 1 \leq t \leq n-1,$$

vyplývá nestrannost odhadu  $\widehat{f}_t$ . Pro  $s < t$  dostáváme nekorelovanost

$$\begin{aligned} E(\widehat{f}_s\widehat{f}_t) &= E(E(\widehat{f}_s\widehat{f}_t|B_t)) \\ &= E(\widehat{f}_sE(\widehat{f}_t|B_t)) \\ &= E(\widehat{f}_s)f_t \\ &= E(\widehat{f}_s)E(f_t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

□

Shora uvedený důkaz můžeme jednoduše rozšířit na součin libovolných po dvou disjunktních  $\hat{f}_t$ , tj,

$$\mathbb{E} \left( \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1} \right) = f_{n+1-i} \cdots f_{n-1}.$$

z čehož mimo jiné vyplývá, že  $\hat{X}_{i,n} = X_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1}$  je nestranným odhadem  $\mathbb{E}(X_{i,n}|D) = X_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdots f_{n-1}$ . Stejně tak jako  $\hat{R}_i = \hat{X}_{i,n} - \hat{X}_{i,n+1-i}$  je nestranným odhadem rezervy  $R_i = X_{i,n} - X_{i,n+1-i}$ .

## 2.2 Výpočet střední kvadratické chyby

Střední kvadratickou chybu  $\text{mse}(\hat{X}_{i,n})$  odhadu  $\hat{X}_{i,n}$  definujme jako

$$\text{mse}(\hat{X}_{i,n}) = \mathbb{E} \left( \left( \hat{X}_{i,n} - X_{i,n} \right)^2 | D \right),$$

kde  $D = \{X_{i,t} | t \leq n+1-i\}$  značí množinu dosud pozorovaných hodnot rezervy. Pokud bychom použili nepodmíněný výraz  $\text{mse}(\hat{X}_{i,n}) = \mathbb{E} \left( \left( \hat{X}_{i,n} - X_{i,n} \right)^2 \right)$  dostaneme vztah  $\mathbb{E} \left( \left( \hat{X}_{i,n} - X_{i,n} \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \left( \hat{X}_{i,n} - X_{i,n} \right)^2 | D \right) \right)$ , kterým určíme kvadratickou odchylku všech dat, tj. jak predikce tak i již pozorovaných hodnot. V praxi nás spíše bude zajímat jen kvadratická chyba způsobená náhodným vývojem rezervy v budoucnu, proto budeme používat  $\mathbb{E} \left( \left( \hat{X}_{i,n} - X_{i,n} \right)^2 | D \right)$ , čímž eliminujeme vliv již dosud pozorovaných hodnot rezervy.

Můžeme snadno nahlédnout, že platí

$$\text{mse}(\hat{R}_i) = \mathbb{E} \left( \left( \hat{R}_i - R_{i,n} \right)^2 | D \right) = \mathbb{E} \left( \left( \hat{X}_{i,n} - X_{i,n} \right)^2 | D \right) = \text{mse}(\hat{X}_{i,n}).$$

Dále víme, že  $\mathbb{E}(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X) - a)^2$ . Díky tomu můžeme vzorec pro střední kvadratickou chybu

$$\text{mse}(\hat{X}_{i,n}) = \text{Var}(X_{i,n}|D) + \left( \mathbb{E}(X_{i,n}|D) - \hat{X}_{i,n} \right)^2$$

rozepsat jako součet rozptylu stochastického procesu (process error) a chybu odhadu (estimation error).

Abychom mohli pokračovat, potřebujeme vzorec pro výpočet rozptylu  $X_{i,n}$ . Vzhledem k tomu, že  $\hat{f}_t$  je váženým průměrem individuálních vývojových faktorů  $f_{i,t} = X_{i,t+1}/X_{i,t}$ ,  $1 \leq t \leq n-1$ , s váhami  $X_{i,t}$ , napadne nás, že  $\text{Var}(X_{i,t+1}|X_{i,1}, \dots, X_{i,t})$  by měl být v proporci s měřítkem objemu. Mack (1993) navrhl odhad

$$\text{Var}(X_{i,t+1}|X_{i,1}, \dots, X_{i,t}) = X_{i,t}\sigma_t^2, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq n-1, \quad (2.6)$$

kde  $\sigma_t^2$ ,  $1 \leq t \leq n-1$  je neznámý parametr. Vztah 2.6 je třetím předpokladem, který je v metodě chain-ladder implicitně obsažen. Stejným způsobem jako u  $\hat{f}_t$  se dá dokázat, že

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-t-1} \sum_{i=1}^{n-t} X_{i,t} (f_{i,t} - \hat{f}_t)^2, \quad 1 \leq t \leq n-2$$

je nestranným odhadem  $\sigma_t^2$ ,  $1 \leq t \leq n-2$  a  $f_{i,t} = X_{i,t+1}/X_{i,t}$ . Chybí nám však odhad pro  $\sigma_{n-1}$ . Je-li vývoj škod již ukončen, tj.  $\hat{f}_{n-1} = 1$ , můžeme položit  $\hat{\sigma}_{n-1} = 0$ . Pokud vývoj škod ještě ukončen není, rozšíříme posloupnost  $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n-3}, \hat{\sigma}_{n-2}$  o jeden člen. Pro jednoduchost můžeme zvolit takový, který, za předpokladu že  $\sigma_{n-3} > \sigma_{n-2}$ , splňuje

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}}{\hat{\sigma}_{n-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-1}}.$$

Tuto podmínku pak splňuje odhad

$$\sigma_{n-1}^2 = \min \left( \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right).$$

Nyní jsme již schopni vyslovit dokázat hlavní větu:

**Věta 2.3** *Za platnosti 2.1, 2.2 a 2.6 střední kvadratickou chybu  $\widehat{\text{mse}}(\hat{R}_i)$  odhadneme jako*

$$\widehat{\text{mse}}(\hat{R}_i) = \hat{X}_{i,n}^2 \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_t^2}{\hat{f}_t^2} \left( \frac{1}{\hat{X}_{i,t}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}} \right), \quad (2.7)$$

kde  $\hat{X}_{i,t} = X_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \dots \hat{f}_{t-1}$ ,  $t > n+1-i$ , jsou odhady budoucích hodnot rezervy s počáteční podmínkou  $\hat{X}_{i,n+1-i} = X_{i,n+1-i}$ .

*Důkaz:* Pro jednoduchost opět zavedeme značení

$$\mathbf{E}_i(X_{i,n}) = \mathbf{E}(X_{i,n}|X_{i,1} \dots X_{i,n+1-i})$$

$$\text{Var}_i(X_{i,n}) = \text{Var}(X_{i,n}|X_{i,1} \dots X_{i,n+1-i}).$$

a začneme již zmíněným vztahem

$$\text{mse}(\widehat{R}_i) = \text{mse}(\widehat{X}_{i,n}) = \text{Var}(X_{i,n}|D) + \left(\mathbf{E}(X_{i,n}|D) - \widehat{X}_{i,n}\right)^2. \quad (2.8)$$

Opakovanou aplikací 2.1 a 2.6 na  $\text{Var}(X_{i,n}|D)$  dostáváme

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{i,n}|D) &= \text{Var}_i(X_{i,n}) \\ &= \mathbf{E}_i(\text{Var}(X_{i,n}|X_{i,1} \dots X_{i,n-1})) + \\ &\quad + \text{Var}_i(\mathbf{E}(X_{i,n}|X_{i,1} \dots X_{i,n-1})) \\ &= \mathbf{E}(X_{i,n-1})\sigma_{n-1}^2 + \text{Var}(X_{i,n-1})f_{n-1}^2 \\ &= \mathbf{E}_i(X_{i,n-2})f_{n-2}\sigma_{n-1}^2 + \mathbf{E}_i(X_{i,n-2})\sigma_{n-1}^2f_{n-1}^2 \\ &\quad + \text{Var}(X_{i,n-2})f_{n-2}^2f_{n-1}^2 \\ &= \text{atd.} \\ &= X_{i,n+1-i} \sum_{t=n+1-i}^{n-1} f_{n+1-i} \dots f_{t-1} \sigma_t^2 f_{t+1}^2 \dots f_{n-1}^2, \quad (2.9) \end{aligned}$$

protože  $\text{Var}_i(X_{i,n+1-i}) = 0$ . S využitím věty 2.1 aplikované na druhou část 2.8 dostaneme

$$\left(\mathbf{E}(X_{i,n}|D) - \widehat{X}_{i,n}\right)^2 = X_{i,n+1-i}^2 \left(f_{n+1-i} \dots f_{n-1} - \widehat{f}_{n+1-i} \dots \widehat{f}_{n-1}\right)^2 \quad (2.10)$$

Při samotném numerickém výpočtu hledáme odhady pro oba dva členy vztahu 2.8. V rovnici 2.9 jednoduše nahradíme  $f_t$  a  $\sigma_t^2$  odhady  $\widehat{f}_t$  a  $\widehat{\sigma}_t^2$ .  $\text{Var}(X_{i,n}|D)$  odhadneme tedy jako

$$X_{i,n+1-i} \left( \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \widehat{f}_{n+1-i} \dots \widehat{f}_{t-1} \sigma_t^2 \widehat{f}_{t+1}^2 \dots \widehat{f}_{n-1}^2 \right).$$

Využijeme toho, že  $\widehat{X}_{i,n} = X_{i,n+1-i} \widehat{f}_{n+1-i} \dots \widehat{f}_{n-1}$  a vhodným roznásobením nám vyjde vztah

$$\widehat{X}_{i,n}^2 \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\sigma_t^2}{\widehat{X}_{i,t} \widehat{f}_t^2}.$$

Avšak na druhý člen 2.10 odhadu  $\widehat{\text{mse}}(\widehat{R}_i)$  tento přístup nelze aplikovat, protože výsledek by byl 0. Použijeme proto jiný postup. Zavedme proměnnou  $F$  definovanou jako

$$\begin{aligned} F &= f_{n+1-i} \cdots f_{n-1} - \widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{n-1} \\ &= S_{n+1-i} + \cdots + S_{n-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde

$$S_t = \widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{t-1} (f_t - \widehat{f}_t) f_{t+1} \cdots f_{n-1},$$

a proto

$$\begin{aligned} F^2 &= (S_{n+1-i} + \cdots + S_{n-1})^2 \\ &= \sum_{t=n+1-i}^{n-1} S_t^2 + 2 \sum_{s < t} S_s S_t \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nyní  $S_t^2$  nahradíme  $E(S_t^2|B_t)$  a  $S_s S_t$ ,  $s < t$ , nahradíme výrazem  $E(S_s S_t|B_t)$ . Jinými slovy, aproximujeme hodnoty  $S_t^2$  a  $S_s S_t$  průměrem přes všechna  $X_{i,t}$ , kde již dosud pozorovaná data jsou fixována. Protože  $E(f_t - \widehat{f}_t|B_t) = 0$  (viz důkaz věty 2.2), ihned můžeme nahlédnout, že pro  $s < t$  platí  $E(S_s S_t|B_t) = 0$ . S ohledem na 2.6 odvodíme

$$\begin{aligned} E\left(\left(f_t - \widehat{f}_t\right)^2 | B_t\right) &= \text{Var}\left(\widehat{f}_t | B_t\right) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n-t} \text{Var}(X_{j,t+1} | B_t)}{\left(\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}\right)^2} \\ &= \frac{\sigma_t^2}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

a dostáváme

$$E(S_t^2|B_t) = \frac{\widehat{f}_{n+1-i}^2 \cdots \widehat{f}_{t-1}^2 \sigma_t^2 f_{t+1}^2 \cdots f_{n-1}^2}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}}$$

Závěrem nahradíme proměnnou  $F^2 = \sum_{t=n+1-i}^{n-1} S_t^2$  výrazem  $\sum_{t=n+1-i}^{n-1} E(S_t^2|B_t)$ . Protože všechny sčítance jsou kladné, můžeme nyní parametry  $f_t$  a  $\sigma_t^2$  nahradit nestrannými odhady  $\widehat{f}_t$  a  $\sigma_t^2$ . Odhadneme tedy  $F^2 = (f_{n+1-i} \cdots f_{n-1})^2$

$\widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{n-1})^2$  jako

$$\begin{aligned} & \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \left( \frac{\widehat{f}_{n+1-i}^2 \cdots \widehat{f}_{t-1}^2 \sigma_t^2 f_{t+1}^2 \cdots f_{n-1}^2}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}} \right) \\ &= \widehat{f}_{n+1-i}^2 \cdots f_{n-1}^2 \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\frac{\widehat{\sigma}_t^2}{\widehat{f}_t^2}}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

čímž dostáváme odhad, který jsme uvedli na počátku věty 2.3. □

Kromě výpočtu kvadratické chyby jednotlivých roků vzniku pojistných událostí nás také může zajímat kvadratická chyba celkové škodní rezervy  $\widehat{R} = \widehat{R}_2 + \dots + \widehat{R}_n$ . V tomto případě nemůžeme jednoduše sečíst jednotlivé odhady mse  $(\widehat{R}_i)$ ,  $2 \leq i \leq n$ , protože sčítance jsou díky společným odhadům  $\widehat{f}_t$  a  $\sigma_t^2$  korelované.

**Věta 2.4** *Označme opět  $D = \{X_{i,t} | t \leq n+1-i\}$  jako množinu až dosud pozorovaných dat. Za platnosti věty 2.3 odhadneme střední kvadratickou chybu celkové škodní rezervy  $\widehat{R} = \widehat{R}_2 + \dots + \widehat{R}_n$  jako*

$$\widehat{\text{mse}}(\widehat{R}) = \sum_{i=2}^n \left( \text{mse}(\widehat{R}_i) + \widehat{X}_{i,n} \left( \sum_{j=i+1}^n \widehat{X}_{j,n} \right) \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\frac{2\sigma_t^2}{\widehat{f}_t^2}}{\sum_{k=1}^{n-t} X_{k,t}} \right) \quad (2.15)$$

*Důkaz:* Využijeme vztahu  $E(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - a)^2$  a mse  $(\widehat{R})$  rozepíšeme jako

$$\begin{aligned} \text{mse} \left( \sum_{i=2}^n \widehat{R}_i \right) &= E \left( \left( \sum_{i=2}^n \widehat{R}_i - \sum_{i=2}^n R_i \right)^2 \middle| D \right) \\ &= E \left( \left( \sum_{i=2}^n \widehat{X}_{i,n} - \sum_{i=2}^n X_{i,n} \right)^2 \middle| D \right) \\ &= \text{Var} \left( \sum_{i=2}^n X_{i,n} \middle| D \right) + \left( E \left( \sum_{i=2}^n X_{i,n} \middle| D \right) - \sum_{i=2}^n \widehat{X}_{i,n} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Z nezávislosti jednotlivých roků vzniku pojistných událostí dále vyplývá, že

$$\text{Var} \left( \sum_{i=2}^n X_{i,n} | D \right) = \sum_{i=2}^n \text{Var} (X_{i,n} | D)$$

Odhady pro tyto sčítance jsme již odvodili v důkazu věty 2.3. Dále pak

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{i=2}^n X_{i,n} | D \right) - \sum_{i=2}^n \widehat{X}_{i,n} \right)^2 &= \left( \sum_{i=2}^n \left( \mathbb{E} (X_{i,n} | D) - \widehat{X}_{i,n} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{i,j} \left( \mathbb{E} (X_{i,n} | D) - \widehat{X}_{i,n} \right) \left( \mathbb{E} (X_{j,n} | D) - \widehat{X}_{j,n} \right) \\ &= \sum_{i,j} X_{i,n+1-i} X_{j,n+1-i} F_i F_j, \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde

$$F_i = f_{n+1-i} \cdots f_{n-1} - \widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{n-1}.$$

Můžeme tedy psát

$$\text{mse} \left( \widehat{R}_i \right) = \text{Var} (X_{i,n} | D) + (X_{i,n+1-i} F_i)^2$$

a využitím vztahu 2.10 odvodíme vztah

$$\text{mse} \left( \sum_{i=2}^n \widehat{R}_i \right) = \sum_{i=2}^n \text{mse} \left( \widehat{R}_i \right) + \sum_{2 \leq i < j \leq n} 2X_{i,n+1-i} X_{j,n+1-i} F_i F_j.$$

Aplikací analogického postupu jako v důkazu věty 2.3 na  $F^2$  dostaneme pro  $F_i F_j$ ,  $i < j$  vyjádření

$$\sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{t-1} \widehat{f}_{n+1-i}^2 \cdots \widehat{f}_{t-1}^2 \widehat{\sigma}_t^2 f_{t+1}^2 \cdots f_{n-1}^2}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}},$$

čímž dostáváme odhad pro druhý člen rovnice 2.16.

□



## 2.2.1 Rekurzivní výpočet střední kvadratické chyby

V předchozí kapitole jsme odvodili rovnici pro výpočet střední kvadratické chyby. V této kapitole demonstrujeme jednoduchý rekurzivní postup, který vychází z publikace T. Macka (1999). Tento algoritmus výpočet kvadratické odchylky značně urychluje. Jak ukážeme v závěru, výhodou tohoto přístupu také je, že umožňuje zahrnout tzv. tail faktor v případě, že vývoj škod není ještě ukončen.

V předcházející kapitole jsme odvodili vztah

$$\text{mse}(\widehat{R}_i) = \widehat{X}_{i,n}^2 \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\sigma_t^2}{\widehat{f}_t^2} \left( \frac{1}{\widehat{X}_{i,t}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}} \right). \quad (2.18)$$

Ze vztahu 2.6 víme, že  $\text{Var}(X_{i,t+1}|X_{i,1}, \dots, X_{i,t}) = X_{i,t}\sigma_t^2$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq t \leq n-1$ . Lehce nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{i,t+1}|X_{i,1}, \dots, X_{i,t}) &= X_{i,t}\sigma_t^2 \\ \text{Var}(X_{i,t}f_{i,t}|X_{i,1}, \dots, X_{i,t}) &= X_{i,t}\sigma_t^2 \\ \text{Var}(f_{i,t}|X_{i,1}, \dots, X_{i,t}) &= \frac{\sigma_t^2}{X_{i,t}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

a protože  $\text{Var}(f_{i,t}) = \text{E}(f_{i,t} - f_t)^2 - (\text{E}f_{i,t} - f_t)^2 = \text{E}(f_{i,t} - f_t)^2$  dostáváme výraz

$$\frac{\sigma_t^2}{X_{i,t}} = \text{E}(f_{i,t} - f_t)^2 = \text{mse}(f_{i,t}),$$

který dosadíme do shora uvedené rovnice. V 2.13 jsme odvodili

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t^2}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}} &= \frac{\sum_{j=1}^{n-t} \text{Var}(X_{j,t+1})}{\left(\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}\right)^2} \\ &= \text{Var}(\widehat{f}_t) \\ &= \text{E}(\widehat{f}_t - f_t)^2 \\ &= \text{mse}(\widehat{f}_t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nyní již můžeme rovnici pro  $\text{mse}(\widehat{R}_i)$  přepsat jako

$$\text{mse}(\widehat{R}_i) = \widehat{X}_{i,n}^2 \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\sigma_t^2}{\widehat{f}_t^2} \left( \frac{1}{\widehat{X}_{i,t}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-t} X_{j,t}} \right)$$

$$= \widehat{X}_{i,n}^2 \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\text{mse}(f_{i,t}) + \text{mse}(\widehat{f}_t)}{\widehat{f}_t^2}, \quad (2.21)$$

kteřou můžeme rekurzivně zapsat jako

$$\text{mse}(\widehat{X}_{i,t+1}) = \widehat{X}_{i,t}^2 \left( \text{mse}(f_{i,t}) + \text{mse}(\widehat{f}_t) \right) + \text{mse}(\widehat{X}_{i,t}) \widehat{f}_t^2 \quad (2.22)$$

s počáteční podmínkou  $\text{mse}(\widehat{X}_{i,n+1-i}) = 0$ . Toto vyjádření, které je ekvivalentní s 2.18, je velmi intuitivní: pomocí  $\text{mse}(f_{i,t})$  odhadneme střední kvadratickou chybu  $\text{Var}(f_{i,t}) = \text{E}(f_{i,t} - f_t)^2$ , tj. střední kvadratickou odchylku individuálních faktorů  $f_{i,t}$  od skutečných  $f_t$ , zatímco pomocí  $\text{mse}(\widehat{f}_t)$  určíme  $\text{Var}(\widehat{f}_t) = \text{E}(\widehat{f}_t - f_t)^2$ , tj. střední kvadratickou odchylku odhadovaných  $\widehat{f}_t$  od skutečných  $f_t$ .

## 2.2.2 Implementace tail faktoru

Pro některé skupiny pojištění je obvyklé, že doba od vzniku do nahlášení pojistné události přesáhne rozměr trojúhelníkového schématu, tj. že vývoj škod ještě není po  $n$  letech ukončen. V takovém případě je třeba odhad  $\widehat{X}_{i,n}$  opravit na konečný odhad  $\widehat{X}_{i,\infty}$ .

V předchozích kapitolách jsme  $\widehat{X}_{i,n}$  definovali jako

$$\widehat{X}_{i,n} = X_{i,n+1-i} \widehat{f}_{n+1-i} \cdots \widehat{f}_{n-1}.$$

Není-li vývoj škod po  $n$  letech ještě ukončen, pojistný matematik určí expertním odhadem tzv. tail faktor  $\widehat{f}_\infty > 1$ . Pak platí, že

$$\widehat{X}_{i,\infty} = \widehat{X}_{i,n} \widehat{f}_\infty.$$

Nyní můžeme rekurzivní formuli 2.22 bez problému rozšířit a implementovat tail faktor:

$$\text{mse}(\widehat{X}_{i,\infty}) = \widehat{X}_{i,t}^2 \left( \text{mse}(f_{i,\infty}) + \text{mse}(\widehat{f}_\infty) \right) + \text{mse}(\widehat{X}_{i,t}) \widehat{f}_\infty^2. \quad (2.23)$$

Pojistný matematik odhadující výši tail faktoru  $f_\infty$  by měl být také schopný určit  $\text{mse}(\widehat{f}_\infty)$ , tj. jak moc se bude  $\widehat{f}_\infty$  lišit od  $f_\infty$ , a  $\text{mse}(f_{i,\infty})$ , tj. jak moc se budou v průměru lišit individuální faktory  $f_{i,\infty}$  od  $\widehat{f}_\infty$ .

## 2.3 Praktická ukázka

V této kapitole demonstrujeme výpočet škodní rezervy metodou chain-ladder. Uvažujme kumulativní trojúhelník vyplaceného plnění úrazového pojištění:

	1	2	3	4	5	6	7
1	15 840	33 141	41 913	45 030	45 342	45 423	45 423
2	31 996	64 291	77 364	80 353	82 403	82 523	
3	42 414	83 799	92 800	102 822	103 723		
4	52 260	95 838	120 343	128 100			
5	54 256	114 339	136 840				
6	59 741	132 301					
7	56 950						

Obrázek 2.1: Kumulativní trojúhelník vyplaceného plnění

Spočítáme odhady vývojových faktorů  $\hat{f}_t, t = 1, \dots, 6$ , pomocí kterých doplníme trojúhelník na obrázku 2.1. na čtverec:

	1	2	3	4	5	6
f(t)	2,042	1,199	1,072	1,014	1,002	1,000

Obrázek 2.2: Odhady vývojových faktorů

	1	2	3	4	5	6	7
1	15 840	33 141	41 913	45 030	45 342	45 423	45 423
2	31 996	64 291	77 364	80 353	82 403	82 523	82 523
3	42 414	83 799	92 800	102 822	103 723	103 886	103 886
4	52 260	95 838	120 343	128 100	129 932	130 136	130 136
5	54 256	114 339	136 840	146 672	148 769	149 003	149 003
6	59 741	132 301	158 616	170 013	172 444	172 715	172 715
7	56 950	116 275	139 402	149 418	151 555	151 793	151 793

Obrázek 2.3: Projekce trojúhelníku vyplaceného plnění

Dále vypočítáme odhady rozptylu  $\hat{\sigma}_t^2, t = 1, \dots, 6$ . Protože vývoj škod v čase byl již ukončen, tj.  $\hat{f}_6 = 1$ , můžeme poslední odhad  $\hat{\sigma}_6^2$  stanovit jako 0:

	1	2	3	4	5	6
sigma(t)^2	907	289	71	8	0	0

Obrázek 2.4: Odhady rozptylu

Aplikací teorie popsané v předcházející kapitole dostáváme následující výsledky:

Rok vzniku	Konečná	Hodnota				
	predikce	Diagonála	rezervy	mse	mse^0,5	mse %
1	45 423	45 423	0	269	16	0%
2	82 523	82 523	0	566 718	753	0%
3	103 886	103 723	163	4 879 285	2 209	1353%
4	130 136	128 100	2 036	22 884 516	4 784	235%
5	149 003	136 840	12 163	47 645 925	6 903	57%
6	172 715	132 301	40 414	58 309 278	7 636	19%
7	151 793	56 950	94 843	139 284 604	11 802	12%
			149 620	337 398 064	18 368	12%

Obrázek 2.5: Výpočet mse - Výsledky

Vysoké hodnoty mse pro třetí a čtvrtý rok jsou dány tím, že rezerva pro tyto roky je poměrně nízká v porovnání s ostatními roky vzniku. Pokud se podíváme na sekvenci  $\hat{R}_7, \dots, \hat{R}_5$  tak platí, že  $\hat{R}_{i-i}$  je větší než  $\hat{R}_i/4$ , zatímco  $\hat{R}_4$  je menší než  $\hat{R}_5/6$  a  $\hat{R}_3$  je dokonce menší než  $\hat{R}_4/20$ . Tento fakt je dobře vyjádřen vysokými směrodatnými odchylkami 235% a 1353%.

Protože škodní rezerva je součtem mnoha náhodných pojistných událostí, můžeme předpokládat její normalitu. Za platnosti tohoto předpokladu a při znalosti střední kvadratické chyby celé rezervy  $\text{mse}(\hat{R})$  vypočítáme

škodní rezervu na hladině spolehlivosti  $\alpha$  jako  $\hat{R} + \sqrt{\text{mse}(\hat{R})}u(1 - \alpha)$ ,

kde  $u(1 - \alpha)$  značí příslušný kvantil normálního rozdělení. V našem případě například dostáváme na hladině spolehlivosti 95% odhad škodní rezervy  $149620 + 18368 \times 1,6444 = 179833$  a odhad bezpečnostní přírážky  $179833 - 149620 = 30213$ .

## Kapitola 3

# Metoda mnichovský chain-ladder

Pojišťovna obvykle disponuje oběma druhy vývojových trojúhelníků, tj. trojúhelníky pojistného plnění a trojúhelníky nastalých škod, ze kterých je na základě kvalifikovaného odhadu pojistného matematika kalkulována výše IBNR rezervy. Po dostatečně dlouhém období škodního vývoje objem pozdě dohlašovaných pojistných událostí klesá a rezerva RBNS je postupně čerpána na výplaty pojistného plnění. Po skončení škodního vývoje jsou všechny pojistné události zlikvidovány a rezerva RBNS je rozpuštěna. Poměr již vyplacených pojistných událostí a celkového škodním závazku by měl tedy v čase konvergovat ke 100% a konečná predikce vyplaceného plnění by se měla rovnat konečné predikci celkového škodního závazku.

Nicméně v praxi se ukazuje, že dva nezávislé výpočty z obou trojúhelníků často vedou k dosti odlišným výsledkům. Navíc hodnota konečné predikce celkového vyplaceného plnění může být v jednom roce vzniku vyšší než predikce celkového závazku, zatímco v jiném roce vzniku nižší.

Pojistní matematici Gerhard Quarg a Thomas Mack z mnichovské zajišťovny Munic Re se tímto problémem intenzivně zabývali a v roce 2004 navrhli modifikaci dosud nejrozšířenější výpočetní metody chain-ladder, která shora zmíněný problém zcela eliminuje. Tuto výpočetní metodu nazvali mnichovský chain-ladder a v následující kapitole se s ní podrobně seznámíme.

V první části odvodíme systematickou limitaci metody chain-ladder aplikované samostatně na oba typy vývojových trojúhelníků. V dalších částech navrhneme postup na odstranění této limitace, formulujeme předpoklady metody mnichovský chain-ladder a na závěr demonstrováme výpočet na re-

álních datech. Vzhledem k relativně krátké době od publikace této metody a nedostatku dalších následných odborných publikací na toto téma, budeme převážně vycházet z materiálu Quarg, Mack (1993), včetně použitého značení.

## 3.1 Úvod

### 3.1.1 $(P/I)$ problém standardní metody chain-ladder

Uvažujme dva vývojové trojúhelníky na obr. 1.1. Pro  $i, t = 1, 2 \dots n$  označme  $P_{i,t}$  a  $I_{i,t}$  jako úhrn vyplacených a nastalých škod náležící škodnímu roku  $i$  a vývojovému roku  $t$ . Aktuální účetní rok je tvořen diagonálou  $n + 1 - i$  a tedy hodnoty  $P_{i,t}$  a  $I_{i,t}$  jsou pro  $1 \leq t \leq n + 1 - i$  známé a pro  $n + 1 - i < t \leq n$  predikované. Dále zavedme podíl  $(P/I)_{i,t}$  již zaplacených škod na výši celkového závazku náležící škodnímu roku  $i$  a vývojovému roku  $t$  pro  $i, t = 1, 2 \dots n$ , tj.

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}}. \quad (3.1)$$

Průměrný poměr  $(P/I)_t$  vývojového roku  $t$  dále definujeme jako

$$\left(\frac{P}{I}\right)_t = \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,t}}{\sum_{j=1}^n I_{j,t}} \quad (3.2)$$

Standardní vývojové faktory metody chain ladder budeme pro  $t = 1, 2 \dots n - 1$  značit jako

$$f_t^P = \frac{\sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t+1}}{\sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t}} \quad \text{a} \quad f_t^I = \frac{\sum_{j=1}^{n-t} I_{j,t+1}}{\sum_{j=1}^{n-t} I_{j,t}}. \quad (3.3)$$

Pro hodnoty predikované metodou chain ladder dále platí

$$P_{j,t+1} = P_{j,t} f_t^P \quad (3.4)$$

a stejně tak i

$$I_{j,t+1} = I_{j,t} f_t^I. \quad (3.5)$$

Pro další úvahy si vývojové koeficienty převedeme na vhodnější tvar. Pro faktory vyplaceného plnění platí, že

$$f_t^P \sum_{j=1}^n P_{j,t} = f_t^P \left( \sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t} + \sum_{j=n-t+1}^n P_{j,t} \right)$$

což můžeme pomocí vztahu 3.3 a aplikací 3.4 na zbytky sloupců  $t, t + 1$  rozepsat jako

$$\begin{aligned} f_t^P \sum_{j=1}^n P_{j,t} &= \frac{\sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t+1}}{\sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t}} \left( \sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t} + \sum_{j=n-t+1}^n P_{j,t} \right) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t+1}}{\sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t}} \sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t} + \frac{\sum_{j=n-t+1}^n P_{j,t+1}}{\sum_{j=n-t+1}^n P_{j,t}} \sum_{j=n-t+1}^n P_{j,t} \\ &= \sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t+1} + \sum_{j=n-t+1}^n P_{j,t+1} \\ &= \sum_{j=1}^n P_{j,t+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pomocí této rovnice můžeme faktory vyplaceného plnění, resp. celkového závazku, přepsat do tvaru

$$f_t^P = \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,t+1}}{\sum_{j=1}^n P_{j,t}} \quad \text{a} \quad f_t^I = \frac{\sum_{j=1}^n I_{j,t+1}}{\sum_{j=1}^n I_{j,t}}, \quad (3.7)$$

kde jsou všechny sumy indexovány od 1 do  $n$ . Pro predikce  $(P/I)$  poměrů platí

$$\left( \frac{P}{I} \right)_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{P_{i,n+1-i} f_{n+1-i}^P \cdots f_{n-1}^P}{I_{i,n+1-i} f_{n+1-i}^I \cdots f_{n-1}^I} \quad n+1-i < t \leq n$$

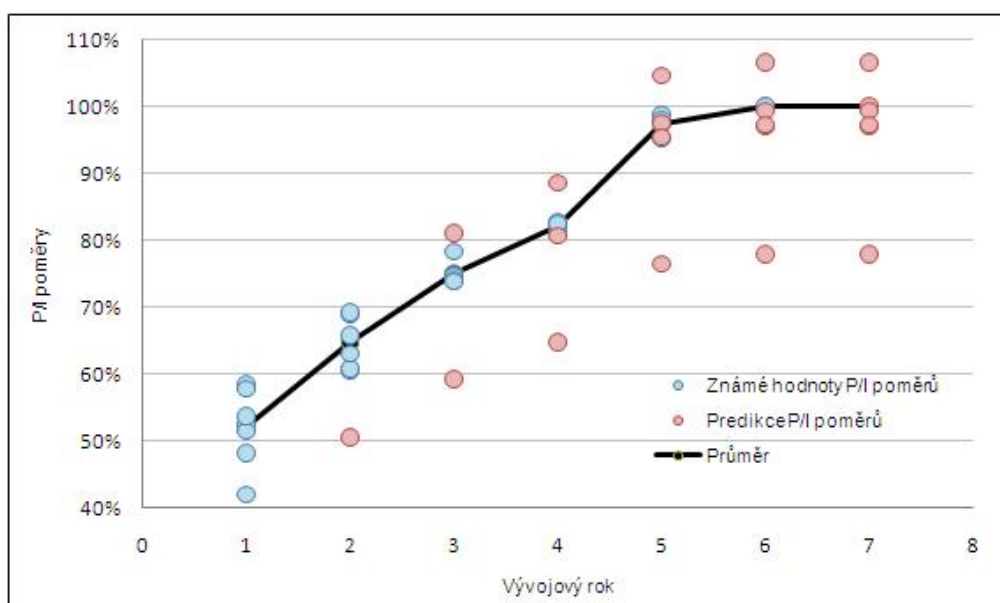
dosadíme-li do tohoto vztahu odvození 3.7 vyjde nám

$$\frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{P_{i,n+1-i} \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,t}}{\sum_{j=1}^n P_{j,n+1-i}}}{I_{i,n+1-i} \frac{\sum_{j=1}^n I_{j,t}}{\sum_{j=1}^n I_{j,n+1-i}}} \quad (3.8)$$

Po finální úpravě dostaneme pro  $t > n + 1 - i$  rovnici

$$\frac{(P/I)_{i,t}}{(P/I)_t} = \frac{(P/I)_{i,n+1-i}}{(P/I)_{n+1-i}}. \quad (3.9)$$

Vidíme, že poměr dat na diagonále  $(P/I)_{i,n+1-i}$  a jejich průměru  $(P/I)_{n+1-i}$  je shodný s poměrem predikcí  $(P/I)_{i,t}$  a jejich průměrem  $(P/I)_t$ . Jinými slovy, je-li pro nějaký rok vzniku  $i = 1, 2, \dots, n$  aktuální poměr  $(P/I)_{i,n+1-i}$  podprůměrný, bude i výsledná předpověď  $(P/I)_{i,t}$  podprůměrná. Důsledkem toho vznikají nekonzistence v jednotlivých konečných predikcích, což vede k systematické limitaci standardní metody chain-ladder aplikované nezávisle na oba typy trojúhelníků.



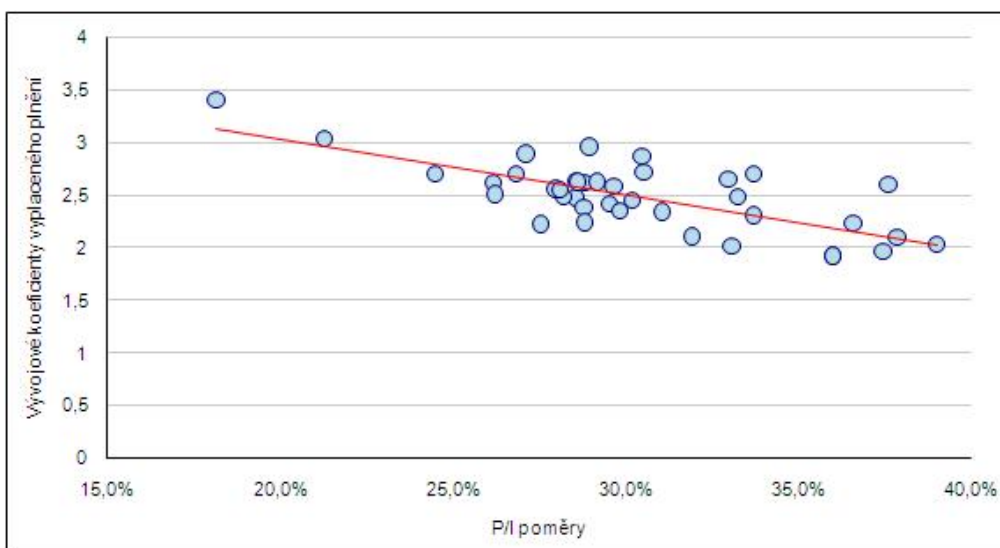
Obrázek 3.1: P/I trojúhelník predikcí

Shora zmíněný problém graficky znázorňuje obrázek 3.1. Na ose  $x$  jsou zobrazeny jednotlivé vývojové roky  $t$  a na ose  $y$   $(P/I)_{i,t}$  poměry. Modře jsou vyznačeny známé hodnoty  $(P/I)_{i,t}$ , červeně hodnoty predikcí spočítané dvojí aplikací metody chain-ladder na oba trojúhelníky. Graf jasně indikuje, že konečné předpovědi  $(P/I)_{i,n}$  fluktuují mezi 80% a 110%. Jak jsme uvedli v úvodu této kapitoly, v praxi bychom spíše očekávali, že po určité době vývoje bude úhrn vyplaceného plnění přibližně roven úhrnu celkového závazku, tj. že  $(P/I)_{i,t}$  budou konvergovat ke 100%.



### 3.1.2 Korelace mezi trojúhelníky

Při detailnější analýze objevíme mezi faktory vyplaceného plnění, resp. hlášených škod, a  $(P/I)$  poměry jistou formu korelace, jejíž nezahrnutí do výpočtu způsobuje většinou nepřijatelné výsledky kalkulace IBNR. Následující obrázek znázorňuje závislost faktorů vyplaceného plnění úrazového pojištění z vývojového roku 1 do vývojového roku 2, tj. závislost  $f_{i,1}^P = \frac{P_{i,2}}{P_{i,1}}$ , na příslušných  $(P/I)_{i,1}$ .

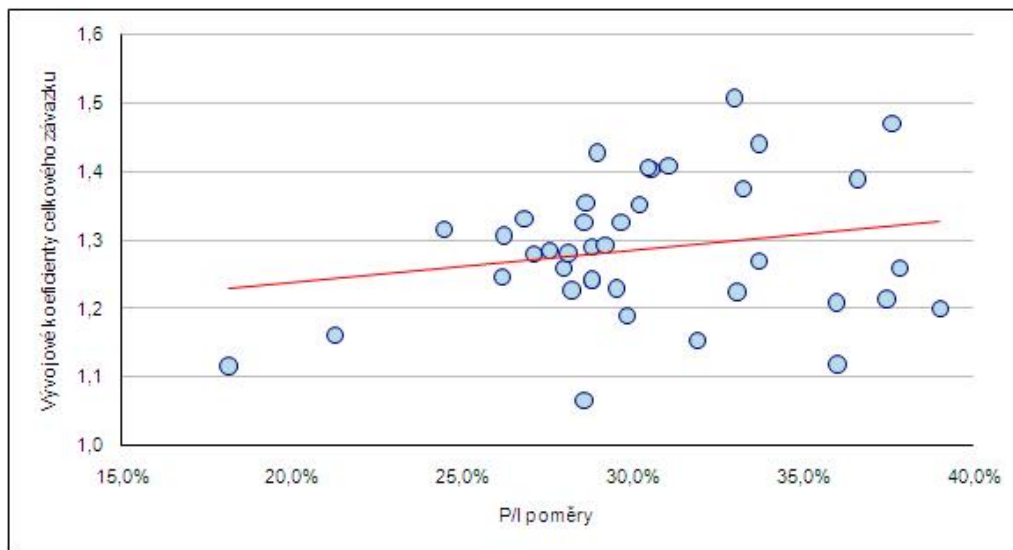


Obrázek 3.2: Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech

Obrázek 3.2 potvrzuje zřetelný klesající trend s korelací -73%. Na obrázku 3.3 je zobrazena závislost koeficientů hlášených škod z vývojového roku 1 do vývojového roku 2, tj.  $f_{i,1}^I = \frac{P_{i,2}}{P_{i,1}}$ , na příslušných  $(P/I)_{i,1}$ . Z grafu je vidět rostoucí trend s korelací 21%. Z pozorovaných hodnot vyplývá, že podprůměrný poměr  $(P/I)_{i,1}$  byl následován buď nadprůměrným faktorem  $f_{i,1}^P$  trojúhelníku vyplacených škod anebo podprůměrným faktorem  $f_{i,1}^I$  trojúhelníku nastalých škod. Jestliže byl  $(P/I)_{i,1}$  nadprůměrný, nastala opačná situace. Standardní metoda chain-ladder tuto korelaci ve výpočtu nijak nezohledňuje.

Toto zjištění nás přirozenou cestou dovede k formulování základní myšlenky metody mnichovský chain-ladder: V závislosti na posledním známém poměru  $(P/I)_{i,j}$  upravíme následné vývojové faktory. Je-li  $(P/I)_{i,j}$  podprů-

měrný (nadprůměrný), navýšíme (ponížíme)  $f_j^P$  nebo ponížíme (navýšíme)  $f_j^I$ . To lze analogicky formulovat tak, že při dosud nízké úrovni zlikvidovaných škod (podprůměrný  $(P/I)_{i,j}$ ) lze v budoucnu očekávat, že dojde k jejímu zrychlení (vyšší  $f_j^P$  nebo nižší  $f_j^I$ ). Naproti tomu při vysoké úrovni likvidace pojistných událostí (nadprůměrný  $(P/I)_{i,j}$ ) lze očekávat menší nárůst pro další období (nižší  $f_j^P$  nebo vyšší  $f_j^I$ ).

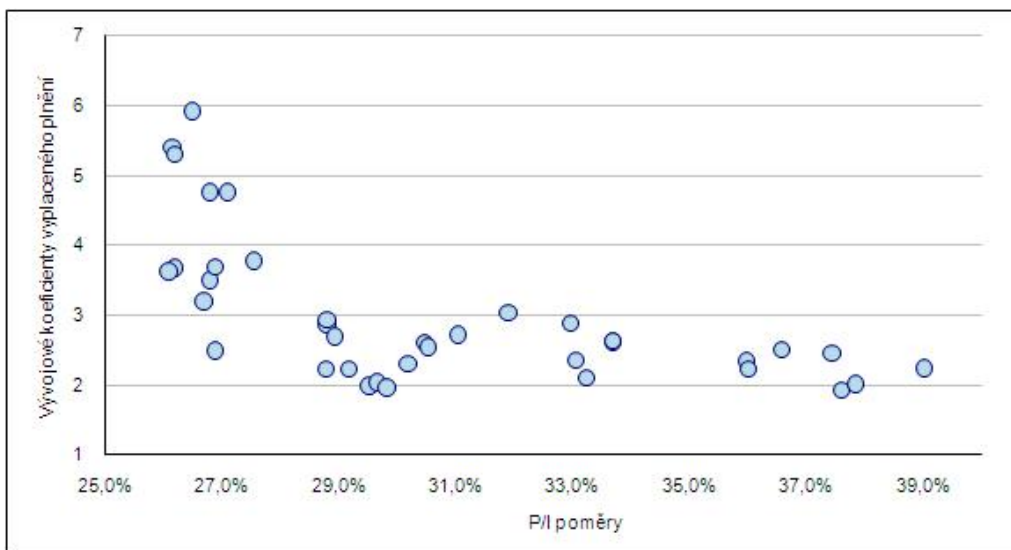


Obrázek 3.3: Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech

### 3.1.3 Modelování závislosti

V některých specifických případech není pro měření závislosti mezi koeficienty vyplaceného plnění a  $(P/I)_{i,j}$  poměry lineární model vhodný. Tato situace nastává, jsou-li faktory rozptýlené. Obrázek 3.4 zobrazuje závislost faktorů  $f_{i,1}^P$  námořního pojištění na příslušných  $(P/I)_{i,1}$ . V praxi jsou hodnoty koeficientů v drtivé většině vyšší než 1, hodnoty menší než 1 jsou netypické a hodnoty menší než 0 jsou nepřijatelné. Proto by bylo použití lineární regrese v tomto případě nevhodné, ale jako vhodnější se jeví zvolit hyperbolický regresní model. Jak se píše v Quarg, Mack (1993), k vyřešení tohoto problému stačí přejít od  $(P/I)$  k převráceným hodnotám, tj. k  $(I/P)$ .

Při přechodu od  $(P/I)$  k  $(I/P)$  byla hyperbolická regrese transformována na regresi lineární. Navíc, po aplikaci na nerozptýlené vyplacené faktory zůstala linearita zachována i po transformaci. Proto v případě faktorů vyplaceného plnění je výhodnější předpokládat lineární závislost na poměrech  $(I/P)$ . Naproti tomu u koeficientů hlášených škod zůstaneme u původního předpokladu, že vývojové faktory jsou lineárně závislé na  $(P/I)$ .

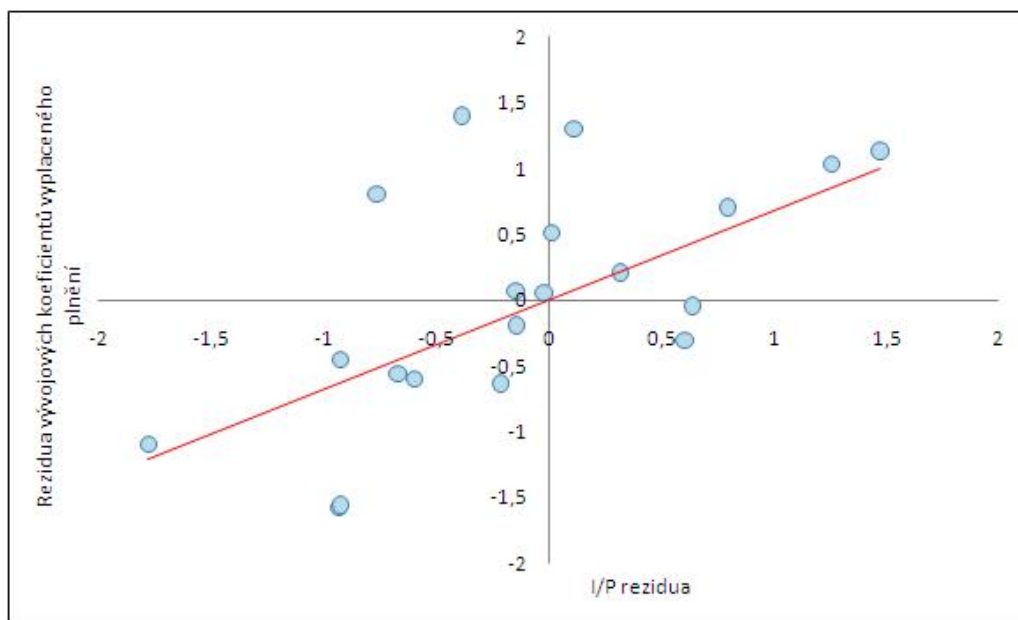


Obrázek 3.4: Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech

### 3.1.4 Přechod k reziduálním hodnotám

Až doposud jsme zkoumali závislost mezi jednotlivými faktory pouze v rámci jednoho vývojového roku. Při hlubší úvaze nás ale napadne, že je-li např. nějaký vývojový faktor podprůměrný, měl by být modifikován nejen faktor přímo následující, ale všechny následující faktory příslušející danému roku vzniku. Při výpočtu lineární regrese pro jednotlivé vývojové roky samostatně narazíme na problém s podkladovými daty. Výpočet sklonu regresní přímky je často velmi nestálý, uvažujeme-li jen několik roků vzniku. Tento problém často nastává u posledních vývojových roků, kde již máme málo známých hodnot. Důležitým krokem k odstranění tohoto problému je uvažovat všechny vývojové faktory dohromady. K tomu, abychom mohli s

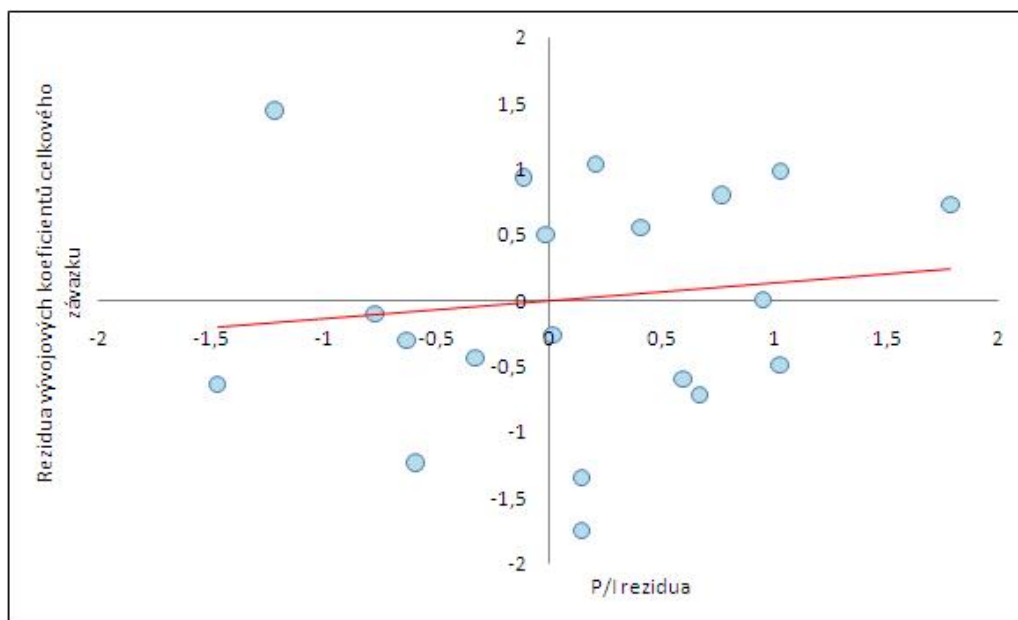
vývojovými koeficienty nadále pracovat jako s celkem, je potřeba je vhodně normovat. Toho dosáhneme přejdeme-li od vývojových faktorů k jejich reziduálním hodnotám. Tento postup bude detailně popsán v následující kapitole.



Obrázek 3.5: Závislost vývojových faktorů na příslušných I/P poměrech

Stejně jako na obrázcích 3.2 a 3.3, chceme graficky znázornit závislost vývojových koeficientů na poměrech ( $P/I$ ), resp. ( $I/P$ ), avšak místo samotných vývojových faktorů použijeme jim příslušná rezidua. Vzhledem k tomu, že rezidua jsou normovaná, můžeme je zakreslit do jednoho grafu. Na obrázku 3.5 jsou zobrazena rezidua vývojových faktorů trojúhelníku vyplacených škod úrazového pojištění v závislosti na ( $I/P$ ). Pozorujeme zřetelný lineární trend s několika odlehlými body.

Směrnice regresní přímky procházející počátkem je 0,67. Má-li například nějaký rok vzniku ( $I/P$ ) reziduum rovno 1,00, odhadneme koeficient plnění pro následující vývojový rok vzhledem k směrnici regresní přímky tak, aby jeho reziduum bylo 0,67.



Obrázek 3.6: Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech

Obdobnou situaci můžeme vidět na grafu závislosti reziduí vývojových koeficientů trojúhelníku nastalých škod úrazového pojištění na ( $P/I$ ). Bodový graf opět vykazuje lineární trend. Směrnice regresní přímky procházející počátkem je 0,14. Jestliže v daném roce vzniku uvažujeme ( $I/P$ ) s reziduem 1,00, odhadneme faktor celkového závazku pro následující vývojový rok vzhledem k směrnici regresní přímky tak, aby jeho reziduum bylo 0,14.

Tento postup demonstruje hlavní myšlenku metody mnichovský chain-ladder:

- Sestrojíme dva grafy zachycující závislost reziduí vývojových faktorů na ( $P/I$ ), resp. ( $I/P$ ) poměrech, pro všechny vývojové roky současně.
- Určíme směrnice obou regresních křivek.

- Pro daný  $(P/I)$ , resp.  $(I/P)$  poměr spočítáme jeho reziduum a z regresní přímky odvodíme reziduum příslušného faktoru vyplaceného plnění, resp. celkového závazku.
- Z takto získaného rezidua zpětně vypočítáme konkrétní hodnotu modifikovaného vývojového koeficientu.

## 3.2 Teoretické základy

### 3.2.1 Standardní chain-ladder metoda

V předcházející kapitole jsme uvedli základní výpočetní algoritmus. V této kapitole se zaměříme na rezidua vývojových koeficientů, formulujeme předpoklady modelu a odvodíme některé jeho vlastnosti.

#### Značení

Nechť  $n \in N$  značí počet roků vzniku pojistných událostí a  $T = \{1, \dots, m\}$ ,  $m \in N$  a  $m = n$ , počet vývojových roků. Pro  $i = 1, \dots, n$ , označme  $P_i = (P_{i,t})_{t \in T}$  jako proces kumulativních úhrnů vyplacených škod příslušejících roku vzniku  $i$  a stejně tak  $I_i = (I_{i,t})_{t \in T}$  jako proces kumulativních úhrnů nastalých škod příslušejících roku vzniku  $i$ . Dále nechť  $P_i(t) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,t}\}$ ,  $t = 1, \dots, n$ , značí podmínku, že kumulativní úhrny vyplaceného plnění roku vzniku  $i$  jsou známy až do vývojového roku  $t$ . Analogicky zdefinujeme i  $I_i(t) = \{I_{i,1}, \dots, I_{i,t}\}$ ,  $t = 1, \dots, n$ , pro kumulativní úhrny nastalých škod.

#### Předpoklady standardní metody chain-ladder

Na úvod připomeňme tři základní předpoklady standardní metody chain-ladder (viz kapitola 2.1) pro trojúhelníky vyplaceného plnění a nastalých škod:

**Věta 3.1 (O střední hodnotě)** *Pro  $t \in T$  existuje vývojový koeficient  $f_t^P$ , resp.  $f_t^I$ , takový, že pro každé  $i = 1, \dots, n$  platí*

$$\mathbb{E} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} \mid P_{i,t} \right) = f_t^P, \quad (3.10)$$

a analogicky

$$\mathbb{E} \left( \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} | I_{i,t} \right) = f_t^I. \quad (3.11)$$

**Věta 3.2 (O rozptylu)** Pro  $t = 1, \dots, n-1$  existuje  $\sigma_t^P > 0$ , resp.  $\sigma_t^I > 0$ , tak, že pro každé  $i = 1, \dots, n$  platí

$$\text{Var} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_{i,t} \right) = \frac{(\sigma_t^P)^2}{P_{i,t}} \quad (3.12)$$

a

$$\text{Var} \left( \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} | I_{i,t} \right) = \frac{(\sigma_t^I)^2}{I_{i,t}} \quad (3.13)$$

pro trojúhelník nastalých škod.

**Věta 3.3 (O nezávislosti)** Jednotlivé roky vzniku jsou nezávislé, tj. množiny  $\{P_{1,t} | t \in T\}, \dots, \{P_{n,t} | t \in T\}$ , resp.  $\{I_{1,t} | t \in T\}, \dots, \{I_{n,t} | t \in T\}$ , jsou nezávislé.

Výše uvedené předpoklady jsou formulovány pro výpočet rezervy IBNR pouze z jednoho trojúhelníku a neberou na zřetel vztah mezi trojúhelníky vyplaceného plnění a nastalých škod. V praxi jsou oba dva vývojové trojúhelníky známe a proto nás místo 3.10 a 3.11 bude zajímat podmíněná střední hodnota

$$\mathbb{E} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | B_i(t) \right) \quad \text{a} \quad \mathbb{E} \left( \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} | B_i(t) \right), \quad (3.14)$$

kde podmínka  $B_i(t) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,t}, I_{i,1}, \dots, I_{i,t}\}$  znamená, že oba procesy známe až do vývojového roku  $t$ . Obdobně modifikujeme předpoklad nezávislosti. Dále předpokládejme, že množiny  $\{P_{1,t}, I_{1,t} | t \in T\}, \dots, \{P_{n,t}, I_{n,t} | t \in T\}$  jsou nezávislé.

### 3.2.2 Metoda mnichovský chain-ladder

Pro další výpočty označíme  $(P/I)$  proces jako

$$Q_i = \frac{P_i}{I_i} = \left( \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} \right)_{t \in T}$$

a analogicky ( $I/P$ ) proces jako

$$Q_i^{-1} = \frac{I_i}{P_i} = \left( \frac{I_{i,t}}{P_{i,t}} \right)_{t \in T}.$$

Abychom mohli pokračovat, zadefinujeme pojem reziduum, který jsme zmiňovali v kapitole 3.1.4. Je-li  $X$  náhodná veličina,  $C$  je podmínka a

$$\sigma(X|C) = \sqrt{\text{Var}(X|C)}$$

směrodatná odchylka náhodné veličiny  $X$  za podmínky  $C$ , pak reziduum veličiny  $X$  za podmínky  $C$  definujeme jako

$$\text{Res}(X|C) = \frac{X - \text{E}(X|C)}{\sigma(X|C)}. \quad (3.15)$$

Podmíněná rezidua jsou normované veličiny vzhledem ke své podmíněné střední hodnotě a podmíněnému rozptylu. Platí totiž, že

$$\begin{aligned} \text{E}(\text{Res}(X|C) | C) &= \text{E}\left(\frac{X - \text{E}(X|C)}{\sigma(X|C)} | C\right) \\ &= \frac{\text{E}(X - \text{E}(X|C) | C)}{\sigma(X|C)} \\ &= \frac{\text{E}(X|C) - \text{E}(X|C)}{\sigma(X|C)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

a

$$\begin{aligned} &\text{Var}(\text{Res}(X|C) | C) \\ &= \text{Var}\left(\frac{X - \text{E}(X|C)}{\sigma(X|C)} | C\right) \\ &= \frac{\text{Var}(X - \text{E}(X|C) | C)}{\text{Var}(X|C)} \\ &= \frac{\text{Var}(X|C) - 2\text{Cov}(X, \text{E}(X|C) | C)}{\text{Var}(X|C)} + \\ &\quad + \frac{\text{Var}(\text{E}(X|C) | C)}{\text{Var}(X|C)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tj. platí, že

$$\text{E}(\text{Res}(X|C) | C) = 0 \quad \text{a} \quad \text{Var}(\text{Res}(X|C) | C) = 1.$$



### Předpoklady metody Mnichovský chain-ladder

Následující předpoklady, které byly odvozeny v Quarg, Mack (1993), navazují na výpočetní algoritmus metody mnichovský chain-ladder, který jsme uvedli v kapitole 3.1.4, a zavádí lineární závislost mezi rezidui koeficientů vyplaceného plnění a celkového závazku

$$\mathbb{E} \left( \text{Res} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) | B_i(t) \right) \quad \text{a} \quad \mathbb{E} \left( \text{Res} \left( \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} | I_i(t) \right) | B_i(t) \right)$$

a rezidui  $(I/P)$  a  $(P/I)$  poměrů

$$\text{Res} (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t)) \quad \text{a} \quad \text{Res} (Q_{i,t} | I_i(t)).$$

**Věta 3.4** *Existuje konstanta  $\lambda^P$  tak, že pro všechna  $t \in T$  a  $i = 1, \dots, n$  platí*

$$\mathbb{E} \left( \text{Res} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) | B_i(t) \right) = \lambda^P \text{Res} (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t)). \quad (3.18)$$

Tuto rovnici můžeme s užitím 3.10 a 3.15 ekvivalentně zapsat jako

$$\mathbb{E} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | B_i(t) \right) = f_t^P + \lambda^P \frac{\sigma \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(s) \right)}{\sigma (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t))} (Q_{i,t}^{-1} - \mathbb{E} (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t))). \quad (3.19)$$

**Věta 3.5** *Existuje konstanta  $\lambda^I$  tak, že pro všechna  $t \in T$  a  $i = 1, \dots, n$  platí*

$$\mathbb{E} \left( \text{Res} \left( \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} | I_i(t) \right) | B_i(t) \right) = \lambda^I \text{Res} (Q_{i,t} | I_i(t)). \quad (3.20)$$

Stejně jako v předešlém případě rovnici s užitím 3.11 a 3.15 ekvivalentně zapíšeme jako

$$\mathbb{E} \left( \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} | B_i(t) \right) = f_t^I + \lambda^I \frac{\sigma \left( \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} | I_i(t) \right)}{\sigma (Q_{i,t} | I_i(t))} (Q_{i,t} - \mathbb{E} (Q_{i,t} | I_i(t))). \quad (3.21)$$

Konstanty  $\lambda^P$  a  $\lambda^I$ , které představují směrnice lineárních regresních přímk na obrázcích 5 a 6, jsou nezávislé na vývojovém roku  $s$ . Můžeme navíc předpokládat, že  $\lambda^P$  a  $\lambda^I$  jsou vždy  $\geq 0$ . Rovnice 3.19 a 3.21 vyjadřují modifikované vývojové faktory metody mnichovský chain-ladder jako součet vývojového faktoru standardní metody chain-ladder a korekčního výrazu. Na tento korekční faktor se blíže podíváme v následující kapitole.

## Analýza předpokladů metody Mnichovský chain-ladder

Tři složky korekčního faktoru v rovnicích 3.19 a 3.21 lze vysvětlit následovně:

- Konstanta  $\lambda^I$ , jak dokážeme níže, reprezentuje korelační koeficient (nezávislý na  $i$  a  $s$ ) mezi rezidui vývojových koeficientů a rezidui jim příslušných  $(P/I)$  poměrů. Hodnota  $\lambda^I$  je zpravidla mezi 0 a 1 a měří sílu závislosti vývojových faktorů na  $(P/I)$  poměrech. Pokud je hodnota  $\lambda^I$  blízká nule, je výsledný modifikovaný koeficient stejný jako v metodě chain-ladder.
- Další člen je podíl směrodatné odchylky vývojového koeficientu a aktuálního  $(P/I)$  poměru. Čím větší je směrodatná odchylka vývojového koeficientu, tím pravděpodobnější je jeho vychýlení od průměru  $(P/I)$  a tím větší je i korekční koeficient.
- Poslední člen je  $Q_{i,t} - E(Q_{i,t}|I_i(t))$ . Podprůměrný aktuální  $(P/I)$  poměr koriguje vývojový koeficient  $f_t^I$  směrem dolů a nadprůměrný poměr  $(P/I)$  směrem nahoru. Čím větší je jeho vzdálenost od průměru, tím větší je korekční efekt.

Výše uvedené závěry platí analogicky i pro vývojové faktory vyplaceného plnění a  $(I/P)$  poměry.

Konstanty  $\lambda^P$  a  $\lambda^I$  představují míru korelace mezi trojúhelníky vyplaceného plnění a celkového závazku. Nyní se detailněji podíváme na první bod a dokážeme ho. Chceme tedy spočítat

$$\text{Cov} \left( Q_{i,t}^{-1}, \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right).$$

S užitím vztahů 3.14 a 3.19 dostáváme

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left( Q_{i,t}^{-1}, \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) \\ = & \text{Cov} \left( Q_{i,t}^{-1}, E \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | B_i(t) \right) | P_i(t) \right) \\ = & \text{Cov} \left( Q_{i,t}^{-1}, f_t^P + \lambda^P \frac{\sigma \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right)}{\sigma(Q_{i,t}^{-1} | P_i(t))} (Q_{i,t}^{-1} - E(Q_{i,t}^{-1} | P_i(t))) | P_i(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^P \frac{\sigma\left(\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}|P_i(t)\right)}{\sigma(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t))} \text{Var}(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t)) \\
&= \lambda^P \sigma\left(\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}|P_i(t)\right) \sigma(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t)).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Nakonec celou rovnicí vydělíme směrodatnými odchylkami na pravé straně rovnice a z definice korelace dostaneme finální výraz

$$\text{Corr}\left(Q_{i,t}^{-1}, \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}|P_i(t)\right) = \lambda^P, \quad \text{resp.} \quad \text{Corr}\left(Q_{i,t}, \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}}|I_i(t)\right) = \lambda^I. \tag{3.23}$$

Analogickým způsobem odvodíme vztah pro rezidua:

$$\text{Corr}\left(\text{Res}(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t)), \text{Res}\left(\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}|P_i(t)\right)\right) = \lambda^P$$

a

$$\text{Corr}\left(\text{Res}(Q_{i,t}|I_i(t)), \text{Res}\left(\frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}}|I_i(t)\right)\right) = \lambda^I.$$

Korelace mezi vývojovými koeficienty a jim příslušnými rezidui je tedy shodná. Důsledkem toho, v případě že z reziduálních grafů vychází jen slabá korelace, je výpočet pomocí metody mnichovský chain-ladder téměř shodný s výpočtem podle standardní metody chain-ladder.

## 3.3 Praktická implementace

### 3.3.1 Odhady parametrů

V této kapitole nejdříve detailně popíšeme jednotlivé parametrové odhady, které jsou k výpočtu metodou mnichovský chain-ladder potřeba. Na závěr demonstrujeme výpočet na konkrétních datech z pojistného trhu.

#### Chain-ladder parametry

K odhadu vývojových faktorů  $f_t^P$  a  $f_t^I$  použijeme stejné odhady jako ve standardní metodě chain-ladder, tj. vztah 3.3:

$$\widehat{f}_t^P = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-t} P_{i,t}} \sum_{i=1}^{n-t} P_{i,t} \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-t} P_{i,t+1}}{\sum_{i=1}^{n-t} P_{i,t}} \quad t = 1, \dots, n-1$$

a

$$\widehat{f}_t^I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-t} I_{i,t}} \sum_{i=1}^{n-t} I_{i,t} \frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-t} I_{i,t+1}}{\sum_{i=1}^{n-t} I_{i,t}} \quad t = 1, \dots, n-1.$$

Pro  $t = 1, \dots, n-2$  parametry  $\sigma$  odhadneme rovněž standardním způsobem jako

$$\left(\widehat{\sigma}_t^P\right)^2 = \frac{1}{n-t-1} \sum_{i=1}^{n-t} P_{i,t} \left(\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} - f_t^P\right)^2$$

a

$$\left(\widehat{\sigma}_t^I\right)^2 = \frac{1}{n-t-1} \sum_{i=1}^{n-t} I_{i,t} \left(\frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} - f_t^I\right)^2,$$

resp. jako  $\widehat{\sigma}_t^P = \sqrt{(\sigma_t^P)^2}$  a  $\widehat{\sigma}_t^I = \sqrt{(\sigma_t^I)^2}$ .

### Parametry metody mnichovský chain-ladder

K výpočtu reziduí  $(P/I)$  a  $(I/P)$  poměrů je potřeba odhadnout střední hodnoty  $E(Q_{i,t}|I_i(t))$  a  $E(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t))$  a směrodatné odchylky  $\sigma(Q_{i,t}|I_i(t))$  a  $\sigma(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t))$ . Odhady středních hodnot spočteme obdobně jako odhady standardních vývojových koeficientů uvedených v předcházející kapitole. Pro  $(I/P)$  poměry dostáváme tedy odhad  $E(Q_{i,t}|I_i(t))$  jako

$$\hat{q}_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-t+1} I_{i,t}} \sum_{i=1}^{n-t+1} I_{i,t} Q_{i,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n-t} P_{i,t+1}}{\sum_{i=1}^{n-t} I_{i,t}} \quad t = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

který je, stejně jako koeficienty standardní metody chain-ladder, nezávislý na roku vzniku  $i$ . Obdobným způsobem odhadneme i směrodatnou odchylku  $\sigma(Q_{i,t}|I_i(t))$  jako

$$\frac{\widehat{\rho}_t^I}{\sqrt{I_{i,t}}},$$

kde pro  $t = 1, \dots, n-1$  definujeme  $\widehat{\rho}_t^I$  jako

$$\widehat{\rho}_t^{I^2} = \frac{1}{n-t} \sum_{i=1}^{n-t+1} I_{i,t} (Q_{i,t} - \hat{q}_t)^2$$

Pro  $(P/I)$  poměry dostáváme analogický odhad  $E(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t))$

$$\hat{q}_t^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-t+1} P_{i,t}} \sum_{i=1}^{n-t+1} P_{i,t} Q_{i,t}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-t} I_{i,t+1}}{\sum_{i=1}^{n-t} P_{i,t}},$$

a pro  $\sigma(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t))$  výraz

$$\frac{\widehat{\rho}_t^P}{\sqrt{P_{i,t}}},$$

kde pro  $t = 1, \dots, n-1$  definujeme  $\widehat{\rho}_t^P$  jako

$$\widehat{\rho}_t^P{}^2 = \frac{1}{n-t} \sum_{i=1}^{n-t+1} P_{i,t} (Q_{i,t}^{-1} - \hat{q}_t^{-1})^2.$$

S užitím těchto rovnic jsme již schopni vyjádřit vztahy pro odhady reziduí

$$\text{Res}\left(\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}|P_i(t)\right), \quad \text{Res}\left(\frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}}|I_i(t)\right), \quad \text{Res}(Q_{i,t}^{-1}|P_i(t)) \quad \text{a} \quad \text{Res}(Q_{i,t}|I_i(t)),$$

kteří budeme pro jednoduchost dále značit jako

$$\widehat{\text{Res}}(P_{i,t}), \quad \widehat{\text{Res}}(I_{i,t}), \quad \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}^{-1}) \quad \text{a} \quad \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}).$$

Podle 3.15 dostáváme odhady reziduí jako

$$\widehat{\text{Res}}(P_{i,t}) = \frac{\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} - \hat{f}_t^P}{\widehat{\sigma}_t^P} \sqrt{P_{i,t}} \quad \widehat{\text{Res}}(I_{i,t}) = \frac{\frac{I_{i,t+1}}{I_{i,t}} - \hat{f}_t^I}{\widehat{\sigma}_t^I} \sqrt{I_{i,t}}$$

a

$$\widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}^{-1}) = \frac{Q_{i,t}^{-1} - \hat{q}_t^{-1}}{\widehat{\rho}_t^P} \sqrt{P_{i,t}} \quad \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}) = \frac{Q_{i,t} - \hat{q}_t}{\widehat{\rho}_t^I} \sqrt{I_{i,t}}.$$

Podle Jedlička, Kočvara, Strnad (2004) dostaneme pro korelační koeficienty  $\lambda^P$  a  $\lambda^I$  odhady metodou nejmenších čtverců

$$\widehat{\lambda}^P = \frac{1}{\sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}^{-1})^2} \sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}^{-1})^2 \cdot \frac{\widehat{\text{Res}}(P_{i,t+1})}{\widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}^{-1})} = \frac{\sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}^{-1}) \widehat{\text{Res}}(P_{i,t+1})}{\sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}^{-1})^2}$$

a

$$\widehat{\lambda}^I = \frac{1}{\sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t})^2} \sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t})^2 \cdot \frac{\widehat{\text{Res}}(I_{i,t+1})}{\widehat{\text{Res}}(Q_{i,t})} = \frac{\sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t}) \widehat{\text{Res}}(I_{i,t+1})}{\sum_{i,t} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,t})^2}.$$

Vzhledem k 3.19 a 3.21 nakonec dostáváme rekurzivní formule

$$\widehat{P}_{i,t+1} = \widehat{P}_{i,t} \left( \widehat{f}_t^P + \widehat{\lambda}^P \frac{\widehat{\sigma}_t^P}{\widehat{\rho}_t^P} \left( \frac{\widehat{I}_{i,t}}{\widehat{P}_{i,t}} - \widehat{q}_t^{-1} \right) \right) \quad t \geq n - i + 1, \quad (3.25)$$

a

$$\widehat{I}_{i,t+1} = \widehat{I}_{i,t} \left( \widehat{f}_t^I + \widehat{\lambda}^I \frac{\widehat{\sigma}_t^I}{\widehat{\rho}_t^I} \left( \frac{\widehat{P}_{i,t}}{\widehat{I}_{i,t}} - \widehat{q}_t^{-1} \right) \right) \quad t \geq n - i + 1,$$

s počátečními hodnotami  $\widehat{P}_{i,t} = P_{i,t}$  a  $\widehat{I}_{i,t} = I_{i,t}$  pro  $t = n - i + 1$ .

### 3.3.2 Elasticita projekcí v závislosti na parametru $\lambda$

Jak jsme již předeslali v kapitole 3.1.4, výpočet sklonu regresní přímky metodou nejmenších čtverců je velmi citlivý na podkladová data. Vyloučením některých odlehlých pozorování, které jsou v kontradikci s naším modelem, často dostaneme zcela odlišné odhady parametrů  $\lambda^P$  a  $\lambda^I$ . Jak se píše v Jedlička (2007), při použití více robustních statistických metod dostaneme odhady, které se od původních  $\lambda^P$  a  $\lambda^I$  poměrně výrazně liší. Proto se v této kapitole budeme podrobně zabývat elasticitou predikované rezervy v závislosti na parametrech  $\lambda^P$  a  $\lambda^I$ . Míru závislosti odvodíme pro trojúhelník vyplaceného plnění, pro trojúhelník celkového závazku je postup analogický.

Míru závislosti konečné predikce  $\widehat{P}_{i,n}$  na změně parametru  $\widehat{\lambda}^P$  určíme jako derivaci

$$\mathbb{E} \left( \frac{\partial \widehat{P}_{i,n}}{\partial \widehat{\lambda}^P} \middle| B_i(n+1-i) \right)$$

Již víme, že

$$\widehat{P}_{i,n} = P_{i,n+1-i} \widehat{f}_{i,n+1-i}^P \cdots \widehat{f}_{i,n-1}^P, \quad (3.26)$$

kde  $\widehat{f}_{i,t}^P = \frac{\widehat{P}_{i,t+1}}{\widehat{P}_{i,t}}$ ,  $t \leq n - 1$ , značí individuální faktory metody mnichovský chain-ladder. Tuto rovnici zderivujeme podle  $\widehat{\lambda}^P$ . Vyjdeme ze vztahu pro derivaci vícenásobného součinu  $(a, b, c, \dots)' = a'bc + ab'c + abc' + \dots$ , který při vhodném roznásobení  $a'bc + ab'c + abc' + \dots = \frac{a'abc}{a} + \frac{b'abc}{b} + \frac{c'abc}{c} + \dots$  můžeme zapsat jako sumu

$$\left( \widehat{P}_{i,n} \right)' = \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{P_{i,n+1-i}}{\widehat{f}_{i,t}^P} \left( \widehat{f}_{i,t}^P \right)' \widehat{f}_{i,n+1-i}^P \cdots \widehat{f}_{i,n-1}^P \quad (3.27)$$

a podle 3.26 tedy máme

$$\left(\widehat{P}_{i,n}\right)' = \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{P_{i,n+1-i}}{\widehat{f}_{i,t}^P} \left(\widehat{f}_{i,t}^P\right)' \widehat{f}_{i,n+1-i}^P \cdots \widehat{f}_{i,n-1}^P = \widehat{P}_{i,n} \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\left(\widehat{f}_{i,t}^P\right)'}{\widehat{f}_{i,t}^P},$$

respektive

$$\frac{\left(\widehat{P}_{i,n}\right)'}{\widehat{P}_{i,n}} = \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\left(\widehat{f}_{i,t}^P\right)'}{\widehat{f}_{i,t}^P}. \quad (3.28)$$

Ze vztahů 3.25 a 3.26 dostáváme vyjádření

$$\widehat{f}_{i,t}^P = \widehat{f}_t^P + \lambda^P \frac{\widehat{\sigma}_t^P}{\widehat{\rho}_t^P} \left( \frac{\widehat{I}_{i,t}}{\widehat{P}_{i,t}} - \widehat{q}_t^{-1} \right).$$

Derivace této rovnice podle  $\lambda^P$  je rovna  $\frac{\widehat{\sigma}_t^P}{\widehat{\rho}_t^P} \left( \frac{\widehat{I}_{i,t}}{\widehat{P}_{i,t}} - \widehat{q}_t^{-1} \right)$ , rovnice je totiž lineární funkcí parametru . Nyní již snadno nahlédneme, že platí

$$\widehat{f}_{i,t}^P = \widehat{f}_t^P + \lambda^P \left( \widehat{f}_{i,t}^P \right)'. \quad (3.29)$$

Nakonec dosadíme 3.29 do 3.28 a dostaneme finální výraz

$$\frac{\left(\widehat{P}_{i,n}\right)'}{\widehat{P}_{i,n}} = \frac{1}{\lambda^P} \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \left( 1 - \frac{\widehat{f}_t^P}{\widehat{f}_{i,t}^P} \right).$$

Nyní tedy zbývá spočítat

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{\lambda^P} \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \left( 1 - \frac{\widehat{f}_t^P}{\widehat{f}_{i,t}^P} \right) \middle| B_i(n+1-i) \right]. \quad (3.30)$$

Z 3.24 víme, že  $\mathbb{E} \left( \frac{\widehat{I}_{i,t}}{\widehat{P}_{i,t}} \middle| B_i(n+1-i) \right) = \widehat{q}_t^{-1}$  a proto také platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \widehat{f}_{i,t}^P \right) &= \mathbb{E} \left( \widehat{f}_t^P \right) + \lambda^P \mathbb{E} \left( \left( \widehat{f}_{i,t}^P \right)' \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \widehat{f}_t^P \right) + \lambda^P \mathbb{E} \left( \frac{\widehat{\sigma}_t^P}{\widehat{\rho}_t^P} \left( \frac{\widehat{I}_{i,t}}{\widehat{P}_{i,t}} - \widehat{q}_t^{-1} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left( \widehat{f}_t^P \right) + \lambda^P \frac{\widehat{\sigma}_t^P}{\widehat{\rho}_t^P} \left( \mathbb{E} \left( \frac{\widehat{I}_{i,t}}{\widehat{P}_{i,t}} \right) - \widehat{q}_t^{-1} \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \widehat{f}_t^P \right) + \lambda^P \frac{\widehat{\sigma}_t^P}{\widehat{\rho}_t^P} \left( \widehat{q}_t^{-1} - \widehat{q}_t^{-1} \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \widehat{f}_t^P \right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Vezmeme-li v úvahu předpoklad 3.3 o nezávislosti jednotlivých roků vzniku  $i$ , dojmeme k poněkud překvapivému výsledku:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \frac{\partial \widehat{P}_{i,n}}{\partial \widehat{\lambda}^P} \right) &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\lambda^P} \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \left( 1 - \frac{\widehat{f}_t^P}{\widehat{f}_{i,t}^P} \right) |B_i(n+1-i) \right] \\
&= \frac{1}{\lambda^P} \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \left( 1 - \mathbb{E} \left( \frac{\widehat{f}_t^P}{\widehat{f}_t^P} \right) |B_i(n+1-i) \right) \\
&= \frac{1}{\lambda^P} \sum_{t=n+1-i}^{n-1} (1 - 1) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Tento výsledek lze interpretovat tak, že systematická závislost mezi odhadem rezervy a vhodnou volbou parametrů  $\widehat{\lambda}^P$  a  $\widehat{\lambda}^I$  neexistuje. Nicméně při různých hodnotách  $\widehat{\lambda}^P$  a  $\widehat{\lambda}^I$  je poněkud obtížné říci, který bodový odhad rezervy je správný. V důsledku této nejistoty je nutný výpočet bezpečnostní přírážky. Potřebné parametry k jejímu výpočtu odvodíme v následující kapitole.

### 3.3.3 Výpočet variability metody mnichovský chain-ladder

Až doposud jsme se zabývali pouze bodovým odhadem rezervy. Abychom byli schopni spočítat na dané hladině spolehlivosti bezpečnostní přírážku, k bodovému odhadu potřebujeme ještě znát směrodatnou odchylku. Jak se píše v Jedlička (2008), pomůže nám k tomu teorie lineárního modelu.

#### Lineární model

Mějme náhodné veličiny  $Y_1, \dots, Y_n$  a matici daných čísel  $X = (x_{ij})$  typu  $n \times k$ , přičemž  $k < n$ . Dále předpokládejme, že pro náhodný vektor  $(Y_1, \dots, Y_n)' =$



$X\beta + e$ , kde  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$  je vektor neznámých parametrů a  $e = (e_1, \dots, e_n)'$  je chybový vektor splňující podmínky  $Ee = 0$  a  $e = \sigma^2 I$ , kde  $I$  značí jednotkovou matici. Přitom  $\sigma^2 > 0$  je také neznámý parametr. Je třeba si uvědomit, že vektor  $X\beta$  je nenáhodný. Proto platí  $EY = X\beta$  a  $\text{Var } Y = \sigma^2 I$ .

Parametry  $\beta_1, \dots, \beta_k$  se odhadují metodou nejmenších čtverců, tj. z podmínky, že výraz  $(Y - X\beta)'(Y - X\beta)$  jakožto funkce parametru  $\beta$  má být minimální. Tyto odhady označíme jako  $b = (b_1, \dots, b_k)'$ . Metodou nejmenších čtverců odhady  $b$  spočteme jako  $b = (X'X)^{-1} X'Y$ . K výpočtu variability využijeme vztah  $\hat{Y} = Xb = X(X'X)^{-1} X'Y$ , který aplikujeme na podkladovou regresi

$$\text{Res} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) = \lambda^P \text{Res} (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t)) + e_{i,t},$$

přičemž  $\hat{Y} = (y_{i,j}) = \widehat{\text{Res}} \left( \frac{P_{i,j}}{P_{i,j}} | P_i(t) \right)$ ,  $X = (x_{i,j}) = \widehat{\text{Res}} \left( \frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} | P_i(t) \right)$  a  $b = (\hat{\lambda}^P, \dots, \hat{\lambda}^P)$ . Uvědomíme-li si, že  $\text{Var} (X(X'X)^{-1} X'Y) = X(X'X)^{-1} X' \times \text{Var} (Y)$ , odvodíme

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \text{Res} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) | B_i(s) \right) &= (\sigma_t^P)^2 \frac{\text{Res}^2 (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t))}{\sum_i \sum_{t,i+t \leq n} \text{Res}^2 (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t))} \\ &= \text{Var} (\hat{\lambda}^P) \text{Res}^2 (Q_{i,t}^{-1} | P_i(t)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nejprve si připomeneme rovnici 2.6

$$\begin{aligned} \text{Var} (X_{i,t+1} | X_{i,1}, \dots, X_{i,t}) &= X_{i,t} \sigma_t^2 \\ \text{Var} \left( \frac{X_{i,t+1}}{X_{i,t}} | X_{i,1}, \dots, X_{i,t} \right) &= \frac{\sigma_t^2}{X_{i,t}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

a tedy

$$\text{Var} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) = \frac{(\sigma_{i,t}^P)^2}{P_{i,t}}.$$

Z vlastností rezidua a 3.33 pak vyplývá

$$\text{Var} \left( \text{Res} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) | B_i(t) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= P_{i,t} \frac{\text{Var} \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right)}{\sigma^2 \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right)} = \text{Var} \left( \widehat{\lambda}^P \right) \text{Res}^2 \left( Q_{i,t}^{-1} | P_i(t) \right) \\
&= \left( \sigma_{i,t}^P \right)^2 = \sigma^2 \left( \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} | P_i(t) \right) \text{Var} \left( \widehat{\lambda}^P \right) \text{Res}^2 \left( Q_{i,t}^{-1} | P_i(t) \right) \\
&= \left( \sigma_{i,t}^P \right)^2 = \left( \sigma_t^P \right)^2 \text{Var} \left( \widehat{\lambda}^P \right) \text{Res}^2 \left( Q_{i,t}^{-1} | P_i(t) \right). \tag{3.35}
\end{aligned}$$

a takto získaný odhad již jenom stačí dosadit do rovnice pro výpočet střední kvadratické chyby

$$\text{mse} \left( \widehat{R}_i \right) = \widehat{P}_{i,n}^2 \sum_{t=n+1-i}^{n-1} \frac{\left( \widehat{\sigma}_{i,t}^P \right)^2}{\left( \widehat{f}_{i,t}^P \right)^2} \left( \frac{1}{\widehat{P}_{i,t}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-t} P_{j,t}} \right). \tag{3.36}$$

### 3.3.4 Praktická ukázka

V této kapitole demonstrujeme kompletní výpočet škodní rezervy pomocí metody mnichovský chain-ladder na datech z pojistného trhu. Uvažujme kumulativní trojúhelníky vyplaceného plnění a celkového závazku úrazového pojištění:

	1	2	3	4	5	6	7
1	15 840	33 141	41 913	45 030	45 342	45 423	45 423
2	31 996	64 291	77 364	80 353	82 403	82 523	
3	42 414	83 799	92 800	102 822	103 723		
4	52 260	95 838	120 343	128 100			
5	54 256	114 339	136 840				
6	59 741	132 301					
7	56 950						

Obrázek 3.7: Kumulativní trojúhelník vyplaceného plnění

	1	2	3	4	5	6	7
1	32 828	54 707	55 930	54 331	45 874	45 414	45 414
2	60 797	97 616	98 793	98 974	84 044	82 367	
3	72 500	121 375	124 232	124 833	108 745		
4	90 438	157 391	162 614	155 147			
5	105 455	181 130	185 042				
6	111 097	190 999					
7	135 254						

Obrázek 3.8: Kumulativní trojúhelník celkového závazku

Užitím teorie v kapitole 3.3.1 dostáváme následující odhady parametrů

	1	2	3	4	5	6
f(P)	2,042	1,199	1,072	1,014	1,002	1,000
f(I)	1,698	1,024	0,981	0,858	0,984	1,000
$\sigma(P)^2$	907,080	288,931	71,145	7,851	0,003	
$\sigma(I)^2$	169,071	7,068	78,805	19,690	2,924	
$q(t)^{-1}$	194%	153%	134%	122%	103%	100%
$q(t)$	52%	65%	75%	82%	97%	100%
$\rho(P)^2$	2673,147	714,316	83,527	9,112	29,211	
$\rho(I)^2$	334,357	197,271	36,254	5,029	26,613	

Obrázek 3.9: Odhady parametrů

pomocí kterých spočteme rezidua vývojových faktorů

	1	2	3	4	5
1	0,2112	0,7045	0,0611	-0,5582	0,8032
2	-0,1921	0,0662	-1,0953	1,1345	-0,5958
3	-0,4510	-1,5581	1,3054	-0,6335	
4	-1,5775	1,0343	-0,3041		
5	0,5081	-0,0420			
6	1,4030				

Obrázek 3.10: Rezidua vývojových faktorů vyplaceného plnění

	1	2	3	4	5
1	-0,4354	-0,1014	-0,2618	-0,7213	0,8043
2	-1,7468	-1,3457	0,7291	-0,6325	-0,5942
3	-0,4884	0,0040	0,9369	1,0391	
4	0,9852	1,4441	-1,2337		
5	0,4965	-0,3058			
6	0,5508				

Obrázek 3.11: Rezidua vývojových faktorů celkového závazku

a rezidua  $I/P$  a  $P/I$  poměrů

	1	2	3	4	5	6
1	0,3204	0,7971	-0,0199	-0,6678	-0,7624	0,8031
2	-0,1408	-0,1458	-1,7751	1,4733	-0,5933	-0,5958
3	-0,9221	-0,9239	0,1130	-0,2105	1,0329	
4	-0,9298	1,2573	0,6049	-0,5823		
5	0,0127	0,6381	0,6854			
6	-0,3838	-1,2254				
7	2,0038					

Obrázek 3.12: Rezidua  $I/P$  poměrů

	1	2	3	4	5	6
1	-0,3243	-0,7697	0,0195	0,6730	0,7702	-0,8029
2	0,1488	0,1468	1,7856	-1,4695	0,5969	0,5962
3	1,0275	0,9525	-0,1110	0,2115	-1,0250	
4	1,0298	-1,2173	-0,5915	0,5857		
5	-0,0133	-0,6291	-0,6700			
6	0,4101	1,2653				
7	-1,8943					

Obrázek 3.13: Rezidua  $P/I$  poměrů

Známe-li již všechna rezidua, jsme schopni sestavit grafy závislosti reziduí vývojových faktorů na reziduích  $I/P$ , resp.  $P/I$  poměrů. Pro trojúhelníky na obr. 3.7 a 3.8 jsme tyto grafy již sestavili v kapitole 3.1.4. Pro trojúhelník vyplacených škod dostáváme korelační koeficient  $\lambda^P = 67\%$  a pro trojúhelník celkového závazku  $\lambda^I = 14\%$ .

V následujících tabulkách jsou zobrazeny finální projekce obou trojúhelníků:

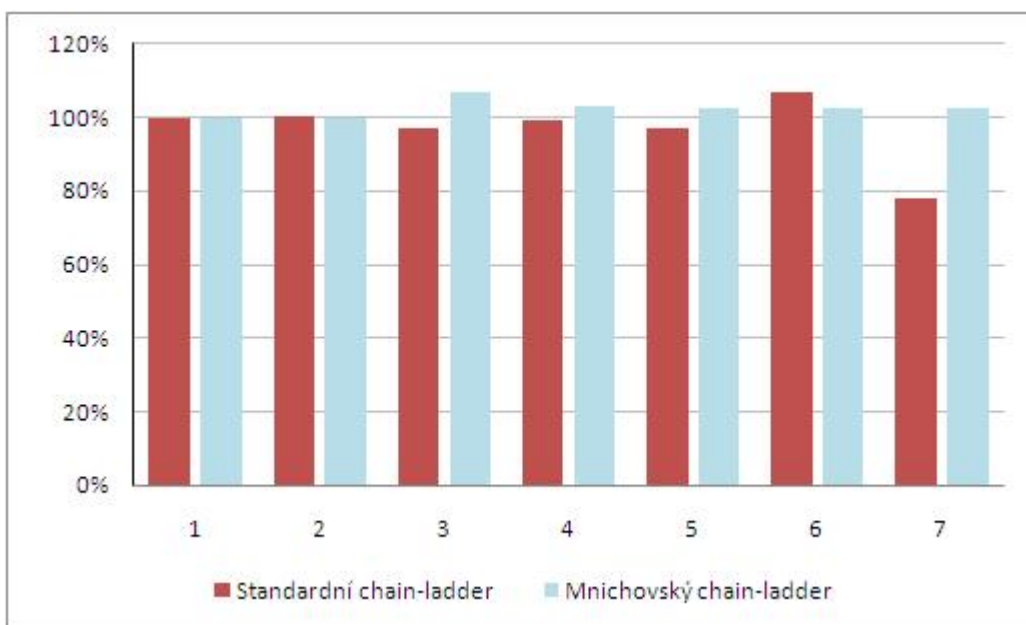
	1	2	3	4	5	6	7
1	15 840	33 141	41 913	45 030	45 342	45 423	45 423
2	31 996	64 291	77 364	80 353	82 403	82 523	82 415
3	42 414	83 799	92 800	102 822	103 723	103 899	110 695
4	52 260	95 838	120 343	128 100	129 535	129 736	133 064
5	54 256	114 339	136 840	148 126	150 928	151 163	154 969
6	59 741	132 301	153 464	158 699	161 261	161 512	165 606
7	56 950	126 068	166 281	185 183	188 993	189 287	194 035

Obrázek 3.14: Finální projekce trojúhelníku vyplaceného plnění

	1	2	3	4	5	6	7
1	32 828	54 707	55 930	54 331	45 874	45 414	45 414
2	60 797	97 616	98 793	98 974	84 044	82 367	82 420
3	72 500	121 375	124 232	124 833	108 745	106 875	103 542
4	90 438	157 391	162 614	155 147	133 271	131 092	129 460
5	105 455	181 130	185 042	181 212	155 247	152 710	150 843
6	111 097	190 999	195 695	193 450	165 889	163 177	161 170
7	135 254	228 356	233 119	227 033	194 392	191 215	188 887

Obrázek 3.15: Finální projekce trojúhelníku celkového závazku

Na obrázku 3.16 vidíme porovnání  $P/I$  poměrů konečných predikcí spočtených standardní a mnichovskou metodou chain-ladder pro jednotlivé roky vzniku. Vidíme, že projekce standardní metodou chain-ladder v sedmém roce vzniku je o 21% nižší než projekce celkového závazku, zatímco mnichovský chain-ladder vykazuje obě projekce ve všech letech vzniku téměř shodně, což je v souladu s předpokladem, který jsme vyslovili v úvodu této kapitoly. Nutno také podotknout, že poslední (tj. aktuální) rok vzniku má na celkovou výši škodní rezervy největší vliv.



Obrázek 3.16: Porovnání standardního a mnichovského chain-ladderu

Na závěr vypočítáme míru variability metody mnichovský chain-ladder aplikované na trojúhelník vyplaceného plnění a porovnáme výsledky s mírou variability standardního chain-ladderu aplikovaného na stejný trojúhelník (viz kapitola 2.3). S pomocí teorie v kapitole 3.3.4 dostáváme následující numerické výsledky:

Rok vzniku	Diagonála	Standardní chain-ladder				Mnichovský chain-ladder			
		Konečná predikce	Hodnota rezervy	mse <sup>0,5</sup>	mse %	Konečná predikce	Hodnota rezervy	mse <sup>0,5</sup>	mse %
1	45 423	45 423	0	16	0%	45 423	0	0	0%
2	82 523	82 523	0	753	0%	82 415	0	51	0%
3	103 723	103 886	163	2 209	1353%	110 695	6 972	12	0%
4	128 100	130 136	2 036	4 784	235%	133 064	4 964	143	3%
5	136 840	149 003	12 163	6 903	57%	154 969	18 129	508	3%
6	132 301	172 715	40 414	7 636	19%	165 606	33 305	1 808	5%
7	56 950	151 793	94 843	11 802	12%	194 035	137 085	4 688	3%
			149 620	18 368	12%		200 455	7 211	4%

Obrázek 3.17: Porovnání mse

Naše výsledky jasně indikují, že v důsledku znalosti obou dvou trojúhelníků míra variability v porovnání se standardní metodou výrazně poklesla. Celková hodnota rezervy je také vyšší v důsledku korekce podhodnocené konečné předpovědi v sedmém vývojovém roce (viz obr. 3.16).

Jak již víme, hodnotu rezervy na hladině spolehlivosti  $\alpha$  spočítáme jako  $\hat{R} + \sqrt{\text{mse}(\hat{R})} u(1 - \alpha)$ , kde  $u(1 - \alpha)$  značí příslušný kvantil normálního rozdělení. Například na hladině spolehlivosti 95% dostáváme hodnotu rezervy  $200455 + 7211 \times 1,6444 = 212312$  a odhad bezpečnosti přírážky  $212312 - 200455 = 11857$ .



# Kapitola 4

## Závěr

V první kapitole této práce jsme se zaměřili na metodu chain-ladder, která je díky své jednoduchosti jednou z nejpoužívanějších metod výpočtu rezervy IBNR. Popsali jsme základní předpoklady této metody a odvodili jsme některé jejich vlastnosti. Na konci této kapitoly jsme také demonstrovali odhad škodní rezervy na reálných datech z pojistného trhu. Součástí této kalkulace byl i výpočet variability a bezpečnostní přírážky na dané hladině spolehlivosti.

Ve druhé kapitole jsme odvodili některé limitace shora uvedené metody a seznámili se s poměrně novou výpočetní metodou mnichovský chain-ladder, kterou lze za jistých okolností chápat jako zpřesnění metody první. Opět jsme zavedli předpoklady této metody, odhady jednotlivých parametrů a provedli jsme analýzu citlivosti na tyto parametry. Na závěr jsme touto metodou odhadli škodní rezervu a výsledky porovnali s metodou chain-ladder. Veškeré výpočty byly provedeny vytvořeným výpočetním programem, který je samostatnou přílohou této práce.

# Literatura

- [1] Quarg G., Mack T.: *Munic chain-ladder*, Blatter DGVMF 26, Mnichov, 1993.
- [2] Jedlička P.: *Actuarial mathematics in non-life insurance*, Dizertační práce, Praha, 2008.
- [3] Jedlička P.: *Mnichovské metody chain-ladder*, Konference ASTIN, Orlando, 2007.
- [4] Jedlička P., Kočvara J., Strnad J.: *Techniky výpočtu IBNR a jejich aplikace v pojištění odpovědnosti z provozu vozidla*, Seminář z aktuárských věd, MFF UK, Praha, 2004.
- [5] Mack T.: *Distribution free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates*, Astin bulletin, 1993.
- [6] Mack T.: *The standard error of chain-ladder reserve estimates. Recursive calculation and inclusion of a tail factor*, Astin bulletin, 1999.
- [7] Mandl, P., Mazurová, L.: *Matematické základy neživotního pojištění*, Matfyzpress, Praha, 1999

# Seznam obrázků

1.1	Trojúhelníkové schéma . . . . .	7
2.1	Kumulativní trojúhelník vyplaceného plnění . . . . .	19
2.2	Odhady vývojových faktorů . . . . .	19
2.3	Projekce trojúhelníku vyplaceného plnění . . . . .	19
2.4	Odhady rozptylu . . . . .	20
2.5	Výpočet mse - Výsledky . . . . .	20
3.1	P/I trojúhelník predikcí . . . . .	24
3.2	Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech . . . . .	25
3.3	Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech . . . . .	26
3.4	Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech . . . . .	27
3.5	Závislost vývojových faktorů na příslušných I/P poměrech . . . . .	28
3.6	Závislost vývojových faktorů na příslušných P/I poměrech . . . . .	29
3.7	Kumulativní trojúhelník vyplaceného plnění . . . . .	43
3.8	Kumulativní trojúhelník celkového závazku . . . . .	43
3.9	Odhady parametrů . . . . .	44
3.10	Rezidua vývojových faktorů vyplaceného plnění . . . . .	44
3.11	Rezidua vývojových faktorů celkového závazku . . . . .	44
3.12	Rezidua $I/P$ poměrů . . . . .	45
3.13	Rezidua $P/I$ poměrů . . . . .	45
3.14	Finální projekce trojúhelníku vyplaceného plnění . . . . .	46
3.15	Finální projekce trojúhelníku celkového závazku . . . . .	46
3.16	Porovnání standardního a mnichovského chain-ladderu . . . . .	47
3.17	Porovnání mse . . . . .	48