Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Tomáš Němeček

Modelování rizikovosti úvěrových portfolií

Katedra pravděpodobnosti a matemetické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Gabriel Marosi
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Poděkování

Děkuji Mgr. Gabrielu Marosimu za výběr zajímavého tématu, za poskytnutí dat a za cenné rady, náměty a připomínky.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 15. prosince 2005 Tomáš Němeček

Obsah

Název práce: Modelování rizikovosti úvěrových portfolií
Autor: Tomáš Němeček
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Gabriel Marosi, Česká spořitelna, a.s.
E-mail vedoucího: gmarosi@csas.cz

Abstrakt: Úvěrové riziko je ve finančním sektoru stále největším zdrojem rizika a jeho špatné měření a řízení může vést k obrovským ztrátám. Tato diplomová práce se zabývá metodami modelování (měření) velikosti úvěrového rizika na portfoliové bázi. První část se zabývá regulatorním přístupem k měření úvěrového rizika, který vychází z posledních regulatorních opatření známých pod názvem Basel II. Věnuje se zejména pokročilejšímu IRB (Internal Rating Based) přístupu. Druhá část je věnována modelu CreditMetrics společnosti J.P. Morgan. Výsledky obou přístupů jsou demonstrovány na korporátním úvěrovém portfoliu jedné z největších českých bank (České spořitelny, a.s.). Veškerá potřebná data, výpočty a výsledky jsou uložena na přiloženém CD.
Klíčová slova: modelování úvěrového rizika, portfoliové modely, Basel II, CreditMetrics

Title: Portfolio credit risk modelling
Author: Tomáš Němeček
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Gabriel Marosi, Česká spořitelna, a.s.
Supervisor's e-mail address: gmarosi@csas.cz

Abstract: Credit risk still remains the largest risk in the financial sector and its incorrect measuring may lead to large losses. This graduation thesis deals with the methods of modelling (measuring) the size of credit risk on a portfolio basis. The first part addresses the regulatory approach to risk measuring based on the latest regulatory measures known as Basel II. It focuses mainly on the more progressive Internal Rating Based (IRB) approach. The second part is dedicated to the model CreditMetrics of the company J.P. Morgan. The results of both approaches are illustrated on the corporate credit portfolio of one of the largest Czech banks (Ceska sporitelna, a.s.). All necessary data, calculations and results are enclosed on the CD.
Keywords: credit risk modelling, portfolio models, Basel II, CreditMetrics

Úvod

Úvěrové (nebo též kreditní) riziko (*Credit Risk*) patří k základním a nejstarším finančním rizikům a ve finančním sektoru přináší toto riziko největší hrozby. Úvěrovému riziku jsou ale vystaveni všichni, kteří poskytují i nepřímo určitý úvěr (např. banky, leasingové společnosti, podniky poskytující zboží nebo služby na fakturu apod.). Měření a řízení tohoto rizika je nejen pro finanční instituce klíčové.

Cílem této práce je prezentovat metody a modely měření rizikovosti úvěrových portfolií (portfolií poskytnutých úvěrů). Konkrétně bude zkoumán model CreditMetrics společnosti J.P.Morgan k měření úvěrového rizika a regulatorní model měření úvěrového rizika (dle posledních regulatorních předpisů Evropské unie).

Práce je členěna na šest kapitol. První kapitola se zabývá významem a definicí pojmu „riziko“ a možnostmi jeho kvantifikace. Vysvětlíme základní členění a význam úvěrového rizika.

V kapitole druhé se čtenář seznámí s nejnovějšími regulatorními změnami v oblasti měření úvěrového rizika bank, zejména pak s regulatorními opatřeními známými pod názvem Basel II. V této kapitole je přiblížena historie, smysl, nejnovější návrhy a směřování regulatorních pravidel zabývajících se úvěrovým rizikem.

Jádrem práce jsou kapitoly tři, čtyři a pět. Ve třetí kapitole je vysvětlen regulatorní přístup k měření úvěrového rizika, odvozeny používané matematické formule (rizikové funkce). V kapitole čtvrté je představen model CreditMetrics (vyvinutý společností J.P.Morgan) na měření úvěrového rizika portfolia. V kapitole páté je pomocí rizikových funkcí vypočtena regulatorní výše tzv. kapitálového požadavku[1] k úvěrovému riziku, který by měl korespondovat s výší postupovaného rizika a je vypočtena výše tzv. ekonomického kapitálu[2] nutného ke krytí úvěrového rizika pomocí modelu CreditMetrics. Kapitola šestá obsahuje shrnutí výsledků, porovnání regulatorního kapitálu (dle Basel II) a ekonomického

[1]Kapitálový požadavek (*Capital Requirement*) představuje předepsaný objem vlastního kapitálu, který musí finanční instituce držet na krytí všech finančních rizik. V této práci se budeme zabývat pouze částí kapitálového požadavku, který slouží pro pokrytí úvěrového rizika.

[2]Ekonomický kapitál (*Economic Capital*) označuje výši kapitálu, který by měla banka držet, aby na zvolené pravděpodobnostní hladině byla schopná dostát všem svým závazkům.

kapitálu (dle modelu CreditMetrics) i v závislosti na výši korelací a závěr.

Pokud to bude možné, je v závorce kurzívou vždy uveden ekvivalentní anglický termín k danému pojmu. Je to proto, že anglické termíny se v mnoha případech používají i v neanglicky mluvících zemích a jsou mnohdy jediné, se kterými se pracuje. Navíc česká terminologie není ustálena (pokud vůbec existuje) a v některých oblastech se používá pouze terminologie anglická.

Kapitola 1

Úvěrové riziko

1.1 Pojem riziko a možnosti měření

S každou aktivitou je nevyhnutelně spojeno riziko. Definice a chápání rizika se od člověka k člověku, od instituce k instituci liší. Někdo chápe riziko jako hrozbu, jiný jako šanci, další jako nejistotu. V pojišťovnictví lze riziko chápat jako předmět pojištění (dům, automobil, ...), jako událost způsobující škodu (krádež, požár, povodeň, ...) nebo jako pravděpodobnost nastání takovéto události.

Aby bylo možno s rizikem pracovat, je třeba, aby byl pojem „riziko" definován. V praxi ovšem žádná všeobecně přijímaná definice rizika neexistuje. Proto neexistuje ani ucelená a jednotná teorie řízení (respektive měření) rizika. Abychom mohli s tímto pojmem pracovat, budeme pojem riziko definovat:

„*Riziko je měřitelná možnost, že budoucnost může být jiná než předpokládáme.*"

Tím, že riziko se dá měřit a je tudíž vyjádřitelné nějakým číslem, se liší od pojmu nejistota.

Existuje více možností jak riziko měřit. Většina z těchto kvantifikátorů je určitým způsobem založena na statistickém rozdělení ztrát a zisků.

Obvyklým kvantifikátorem rizika je směrodatatná odchylka. Ta udává, jak hodně budoucí nejistý výsledek kolísá kolem očekávané střední hodnoty výsledku. Větší směrodatná odchylka indikuje větší riziko. Závisí samozřejmě i na tvaru statistického rozdělení výsledku. Pokud je toto rozdělení nesymetrické, je směrodatná odchylka nevyhovující mírou rizika. Pokud by například byly ztráty omezeny, pak zvětšující se směrodatná odchylka přináší šanci na zisk větší než očekávaný bez hrozby vyšší ztráty.

Proto existují další kvantifikátory rizika, např. percentil daného rozdělení, pravděpodobnost ruinování (kvantifikátor používaný zejména v pojišťovnictví, udávající pravděpodobnost, že riziková rezerva klesne pod nulu), nebo citlivostní (též "what-if") analýza. Dalším kvantifikátorem je tzv. Value at Risk (VaR; hodnota v riziku). S tímto pojmem se pracuje dále (podrobnosti viz v Příloze A).

1.2 Úvěrové riziko a jeho kategorie

Úvěrové riziko je základním a zároveň nejstarším finančním rizikem a jeho řízení má rozhodující význam pro úspěch nebo neúspěch nejen finančních institucí. Poskytování úvěrů[3] je běžné u všech typů obchodů, u finančních institucí se často jedná o hlavní činnost.

Podstatou úvěrového rizika je riziko ztráty vyplývající ze selhání (*default*) partnera (dlužníka) tím, že nedostojí včas a v plné výši svým závazkům (není důležité proč) a tím způsobí držiteli pohledávky (věřiteli) ztrátu. Tyto závazky vznikají z úvěrových aktivit, obchodních a investičních aktivit, z platebního styku a vypořádání cenných papírů při obchodování na vlastní i cizí účet. Všechny transakce očekávající v nějaké fázi kontraktu platbu z vnějšího okolí podléhají úvěrovému riziku.

Úvěrové riziko se člení na několik kategorií:

- **Přímé úvěrové riziko** (*Direct Credit Risk*) ... je rizikem ztráty ze selhání partnera u tradičních rozvahových položek v plné nebo částečné hodnotě, tj. u úvěrů, půjček, vkladů (depozit), dluhopisů aj. Je způsobeno nespolehlivostí protistrany. V rámci kategorie přímého úvěrového rizika je nutno upozornit na tzv. **suverénní riziko** (*Sovereign Risk*). Jedná se o riziko selhání vlád či agentur podporovaných vládou.
- **Riziko úvěrových ekvivalentů** (*Credit Equivalent Exposure*) ... je rizikem ztráty ze selhání partnera u podrozvahových položek, tj. u poskytnutých úvěrových příslibů, poskytnutých záruk či dokumentárních akreditivů, derivátů[4] apod.
- **Vypořádací riziko** (*Settlement Risk*) ... je rizikem ztráty ze selhání transakcí v procesu vypořádání a to zejména v situaci, kdy hodnota protistraně byla dodána, ale hodnota od protistrany ještě není k dispozici (a to i v případě technických problémů, kdy je protistrana schopna a ochotna vypořádání provést). Specifickým rysem tohoto rizika je jeho poměrně krátké časové trvání (zpravidla jen několika málo dní, během nichž dochází k vypořádání obchodů).

[3] V české legislativě je úvěr definován v obchodním zákoníku. V §497 se píše: *„Smlouvou o úvěru se zavazuje věřitel, že na požádání dlužníka poskytne v jeho prospěch peněžní prostředky do určité částky, a dlužník se zavazuje poskytnuté peněžní prostředky vrátit a zaplatit úroky.“*

[4] Deriváty se tradičně účetně zachycovaly v podrozvaze. S platností mezinárodních účetních standardů se však deriváty navíc účetně zachycují v rozvaze (reálnou hodnotou).

- Riziko nadměrné úvěrové angažovanosti (*Large Credit Exposure Risk*) neboli riziko koncentrace portfolia (*Portfolio Concentration Risk*) ... je riziko ztráty plynoucí z nadměrné úvěrové angažovanosti a to zejména vůči:
  - jednotlivým partnerům,
  - skupinám partnerů a spřízněným osobám,
  - partnerům v jednotlivých zemích, což je tzv. riziko země[5] (*Country Risk*),
  - ekonomickým sektorům,
  - jednotlivým kontraktům apod.

  Toto riziko se řídí stanovením **úvěrových limitů** (tzv. **úvěrových linek**) protistraně. Celková úvěrová angažovanost vůči protistraně (úvěry, cenné papíry, deriváty, akreditivy apod.) pak nesmí překročit tento limit.

Struktura úvěrového rizika se skládá ze dvou složek. První je riziko nesplnění závazku protistranou (selhání), což je dáno odhadem pravděpodobnosti, že k tomuto selhání dojde - **pravděpododnost defaultu** (*Probability of Default - PD*). Druhou složkou je riziko velikosti ztráty, která nastane při selhání protistrany - **ztráta způsobená defaultem** (*Loss Given Default - LGD*).

[5] Riziko země může ovlivnit i riziko konkrétního dlužníka, kdy i „dobrému" dlužníkovi vláda dané země zakáže (znemožní) uhradit jeho závazky.

Kapitola 2

Finanční instituce a kapitálová přiměřenost

Jak již bylo řečeno, úvěrové riziko se týká mnoha subjektů. Nejvýznamnější je ale u finančních institucí, neboť poskytování úvěrů, úvěrových nástrojů (akreditivů, záruk atd.), obchodování s deriváty apod. je pro většinu z nich tou hlavní činností.

Většina pasiv finančních institucí je navíc tvořena přijatými vklady a přijatými úvěry, tj. cizími zdroji (v mnoha případech se jedná o vklady drobných střadatelů, které je třeba chránit).

Nezvládnutí úvěrového rizika pak může mít za následek bankovní a následně i ekonomickou krizi. Obrovské množství špatných úvěrů, které nejsou schopny banky pokrýt z vlastních zdrojů, se přenáší na stát a přeneseně na celou ekonomiku. Jen v České republice se ztráty plynoucí ze špatných úvěrů odhadují na 500 mld. Kč, což je výše aktiv jedné z třech největších českých bank. Příkladem nezvládnutí úvěrového rizika ve světě může být banka Crédit Lyonnais, která utrpěla ztráty vyšší než 20 mld. amerických dolarů, ztráty japonských bank a bank zemí východní Asie ze špatných úvěrů činily několik stovek miliard dolarů.

V této kapitole se budeme zabývat regulatorními pravidly bankovního sektoru, shrneme poslední změny, které v této oblasti nastaly a objasníme koncept kapitálové přiměřenosti, který je v oblasti finančních rizik zásadní.

2.1 Regulace finančních rizik

Vzhledem k obrovským problémům, které nezvládnutí řízení úvěrového rizika (i ostatních finančních rizik) může způsobit a dopadu, jaký hospodaření finančních institucí na ekonomiku má, je zapotřebí, aby byl finanční sektor regulován.

Cílem regulace finančních rizik je:

- zabránit selhání regulované finanční instituce a tím ochránit její věřitele (jejich vklady apod.),
- zajistit důvěru široké veřejnosti ve finanční systém,
- zajistit bezpečný a zdravý chod bankovního systému,
- podpořit účinný a konkurenceschopný finanční systém,
- podpořit měnovou stabilitu.

2.1.1 Historie regulace

Počátky moderní a koordinované regulace spadají do počátku 70. let minulého století. Tyto snahy byly zejména odpovědí na vážné poruchy na mezinárodním měnovém a bankovním trhu (významný byl např. pád západoněmecké banky Bankhaus Herstatt). Přispěla k tomu také snaha regulovat mezinárodně aktivní banky, u nichž vyvstávala otázka, kterému regulátorovi budou tyto banky podléhat. Mezinárodní banky navíc ovlivňovaly stabilitu finančního systému v několika zemích a problémy, které by vznikly odlišnými právními předpisy v jedné zemi, se mohly podepsat na finančním systému druhé země. Konečně požadavky na globální konkurenční rovnost bank a fakt, že tato konkurenceschopnost by mohla být omezena konkrétními národními předpisy, vedly k tomu, že vyspělé země pocítily nezbytnost mezinárodní koordinace svých opatření.

V roce 1975 proto vznikl stálý výbor bankovního dohledu, který se měl těmito otázkami zabývat. Záštitu nad tímto výborem převzala banka pro mezinárodní platby (*Bank for International Settlement* - BIS) se sídlem v Basileji. Podle toho se tento výbor nazývá Basilejský výbor pro bankovní dohled (*Basel Committee on Banking Supervision* - BCBS). Nyní se skládá z reprezentantů bankovních dohledů a centrálních bank zemí G-10 (tj. Belgie, Francie, Itálie, Japonska, Kanady, Lucemburska, Německa, Nizozemí, Španělska, Švédska, Švýcarska, USA a Velké Británie).

Za dobu své existence vydal výbor několik desítek doporučení. To zřejmě nejvýznamnější vydal v červenci roku 1988 pod názvem *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Pro tento dokument se vžil název „kapitálová dohoda“ (*Capital Accord*) nebo také **Basel I**. Tento dokument je v mnoha ohledech revoluční. Jedná se o první krok k celosvětové harmonizaci bankovních dohledů. Ačkoli doporučení BCBS nejsou závazná, jsou považována za tzv. *best practice* a byla implementována v mnoha zemích světa (např. ve směrnicích EU v roce 1993 - viz níže). V roce 1996 byl vydán dodatek k této kapitálové dohodě (*Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*) zabývající se výpočtem kapitálového požadavku k tržnímu riziku.

Tento dodatek povoluje pro měření kapitálového požadavku k tržnímu riziku používat i pokročilé statistické modely, které si banky vytvoří sama.

Tato doporučení byla převedena do evropského práva směrnicemi Evropské unie, které se regulací bankovního sektoru zabývají. Je to zejména směrnice Rady EU č. 93/6/EEC z roku 1993 a směrnice Evropského Parlamentu a Rady EU č. 2000/12/EC z roku 2000[6]. Směrnice 93/6/EEC upravuje požadavky na kapitálovou přiměřenost investičních firem a kreditních institucí a stanovuje pravidla pro dohled. Směrnice 2000/12/EC upravuje pravidla podnikání pro kreditní instituce a stanovuje pravidla pro dohled.

Jak již název napovídá, nejsou tyto směrnice určeny jen pro banky, ale pro kreditní instituce a investiční firmy:

- Kreditní instituce jsou definovány jako podnik, který na vlastní účet provozuje přijímání depozit (či jiných vratných zdrojů) od veřejnosti a poskytování úvěrů nebo tzv. *electronic money institutions.*

- Investiční firmy jsou definovány jako jakákoliv právnická osoba, jejímž předmětem podnikání je poskytování investičních služeb třetím stranám nebo profesionální výkon investičních aktivit.

Tabulka 2.1: Historie bankovní regulace podle BCBS a EU

BCBS	**EU**
1988 – International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards	1993 – Council Directive 93/6/EEC
1998 – Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks	2000 – Directive 2000/12/EC of the European Parliament and of the Council
2004 – International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A Revised Framework	**2004 – Recasting Directive 2000/12/EC of the European Parliament and Council Directive 93/6/EEC**

[6]Přesný název obou směrnic zní:
"Council Directive 93/6/EEC of 15 March 1993 on the capital adequacy of investment firms and credit institutions" a
"Directive 2000/12/EC of the European Parliament and of the Council of 20 March 2000 relating to the taking up and pursuit of the business of credit institutions."

2.1.2 Budoucnost regulace

Další krok na cestě k pokročilejším a sofistikovanějším metodám měření finančních rizik byl učiněn v roce 2004. V červnu toho roku vydal Basilejský výbor konečnou verzi dokumentu zvaného **Basel II**[7] (přesný název zní: *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards – A Revised Framework*). Na tento dokument opět navazují směrnice EU a to návrhem novelizací směrnice 93/6/EEC a směrnice 2000/12/EC (tyto návrhy novelizací jsou dále značeny pouze jako „*Směrnice*“). Tento návrh byl vydán v červenci 2004. V září roku 2005 bylo znění Směrnic schváleno v konečném znění[8]. Protože Česká republika je členskou zemí EU, jsou pro ni tyto Směrnice závazné.

Mimo regulaci ze strany Evropské unie existují v České republice na finančním trhu tři regulatorní orgány. Je to dohled Ministerstva financí, Česká národní banka (ČNB) a Komise pro cenné papíry. Z pohledu bank je nejdůležitější ČNB a její vyhlášky.

Potřeba jednotného regulatorního přístupu je v současné době prohlubována rychlou globalizací, snadností přístupu zahraničních bank na domácí bankovní trhy a provázaností bankovních systémů. Navíc nově používané nástroje (např. sekuritizace) mažou hranice mezi bankovnictvím a ostatními finančními službami. Toto stále se měnící prostředí způsobuje, že problém regulace nemůže být nikdy úplně vyřešen. Proces regulace musí být kontinuální.

Basilejský výbor na tuto situaci hodlá reagovat. Předseda výboru Jaime Caruana ve svém projevu dne 1. března 2004 ve Washingtonu prohlásil, že již nyní je jisté, že se některé dílčí opatření Basel II budou v mezidobí od vydání dokumentu do implementace roku 2007 měnit.

Lze předpokládat, že k nejdůležitějším dokumentům Basilejského výboru bude Evropská unie novelizovat relevantní směrnice.

2.2 Kapitálová přiměřenost

Významným nástrojem regulace bank je požadavek na **kapitálovou přiměřenost**. Podstatou koncepce kapitálové přiměřenosti je změření rizik daného subjektu a stanovení odpovídající minimální úrovně vlastního kapitálu společnosti. Tento kapitál, který jsou finanční instituce nuceny držet (užívá se pojem **minimální kapitálový požadavek**), má sloužit ke krytí případných ztrát z finančních rizik. Veškeré potenciální ztráty v budoucnosti by

[7] O tomto dokumentu se diskutuje již od roku 1999. Za tu dobu byly provedeno několik dopadových studií (celkem 5), které měly posoudit dopad těchto opatření na banky.

[8] Pro značnou rozsáhlost těchto dokumentů (čítají dohromady přes 800 stran) jsem v této práci vycházel z návrhu novelizací Směrnic vydaných v roce 2004. Podstatné skutečnosti uváděné v této práci se však v konečném znění Směrnic nezměnily.

tedy měly být pokryty vnitřními zdroji společnosti, tj. kapitálem akcionářů. Naopak již existující ztráty by měly být promítnuty do hospodářského výsledku (a tudíž i do kapitálu). Případné skutečné ztráty jdou pak na vrub akcionářů, aniž jsou ohroženy cizí zdroje, tj. věřitelé (např. vkladatelé).

Kapitál společnosti použitelný pro krytí úvěrového rizika se skládá ze dvou částí: Tier 1 (základní, jádrový kapitál) a Tier 2 (dodatkový kapitál).

Tabulka 2.2: Složky vlastního kapitálu použitelného ke krytí úvěrového rizika

Tier 1	**Tier 2**
Akciový kapitál	Nezveřejněné a skryté rezervy
Rezervní fondy	Rezervy z přecenění aktiv
Emisní ážio	Všeobecné rezervy na úhradu ztrát
Nerozdělený zisk	Hybridní dluhově-kapitálové instrumenty
	Podřízený dluh (se splatností min. 5 let)

Přitom musí platit, že objem kapitálu patřícího do Tier 2 nesmí být větší než objem kapitálu v Tier 1 (musí být tedy Tier 2 $\leq$ Tier 1). K tomutu kapitálu se dále připočítávají vytvořené opravné položky a odečítá se od něj očekávaná ztráta, která byla vypočtena dle regulatorních předpisů (podrobněji viz kap. 3.2).

Tento kapitál musí být větší než minimální kapitálový požadavek (*capital requirement*) (označíme jako KP).

Musí tedy platit:

$$\begin{aligned} Tier\ 1 &\geq Tier\ 2 \\ Tier\ 1 + Tier\ 2 &\geq KP_{\text{úvěrové riziko}} \end{aligned}$$

Minimální kapitálový požadavek pro úvěrové riziko se určí jako 8% z **rizikově vážených aktiv** (*Risk-Weighted Assets*) (označme jako *RWA*). Tato rizikově vážená aktiva se vypočítají jako součin hodnoty daného aktiva (u úvěrového rizika je tímto aktivem zjednodušeně řečeno úvěr) a určité rizikové váhy (*risk weight*). Způsob, jakým se riziková váha stanoví, je uveden v kapitole 3.

Snahou bankovní regulace je zřejmě snaha o dostatečnou kapitalizaci bank, neboť s tím souvisí stabilita banky a bankovního sektoru. Z pohledu ekonomické teorie by se mohlo zdát, že snahou bank je minimalizovat výši drženého kapitálu. Ten by totiž mohl být použit pro investice a mohl by tak být zhodnocen. Přesto banky mnohdy drží mnohem více kapitálu[9] než jim předepisuje regulátor. Je to dáno jednak tím, že v případě poklesu pod

[9]Průměrná kapitálová přiměřenost českých bank je podle údajů ČNB k 30.6.2005 12,99%. Např. Komerční banka, a.s. měla v roce 2004 kapitálovou přiměřenost 12,8%.

požadavanou hranici (např. v důsledku zhoršení ekonomické situace a zvýšení kapitálového požadavku) by bance vznikly problémy (navýšení kapitálu totiž není rychle proveditelné a banka by mohla mít problémy s bankovním regulátorem, který by jí mohl udělit sankce) a jednak nízká hodnota drženého kapitálu vysílá nepříznivý signál potenciálním věřitelům (klientům) banky o její rizikovosti. Vyšší hodnota kapitálu dává věřitelům vyšší jistotu, že ani v případě nepříznivého vývoje a ztrát banky nebudou ohroženy jejich prostředky.

Kapitola 3

Regulatorní model rizikovosti úvěrového portfolia

Z pohledu regulatorního modelu je rizikovost úvěrového portfolia měřena výší kapitálového požadavku. V současnosti jsou pro výpočet kapitálového požadavku bank stále platná pravidla, jež stanovuje Basel I[10]. Protože však v nejbližších letech začnou platit předpisy založené na Basel II (popř. Směrnicích EU), je tato kapitola zaměřena na výpočet podle těchto nových pravidel.

3.1 Přístupy k výpočtu kapitálového požadavku (rizikové váhy)

Kapitálový požadavek lze počítat několika přístupy. Tyto přístupy se mohou lišit pro různé typy expozic (dle typu aktiva či protistrany). V zásadě se však rozlišují dvě metody výpočtu kapitálového požadavku: Standardizovaný přístup a přístup založený na bankovním interním ratingovém systému (IRB přístup).

3.1.1 Standardizovaný přístup

Při použití Standardizovaného přístupu (*Standardised Approach*) je výpočet kapitálového požadavku založen na jednoduhém principu. Každé úvěrové expozici (*exposure*) je přiřazena standardní (předdefinovaná) riziková váha. Tyto váhy se přidělují na základě externího kreditního hodnocení (externího ratingu) dlužníka.

[10]Zjednosušeně řečeno, kapitálový požadavek podle Basel I se vypočte jako 8% z velikosti expozice.

3.1.2 IRB přístup

IRB přístup (*Internal Rating Based Approach*) je založen na systému interního ratingu (hodnocení kreditní bonity klienta provádí sama banka). Banka u každé úvěrové expozice odhadne rizikové parametry protistrany (dlužníka) a na základě těchto parametrů se dle regulátorem předepsaného vzorce vypočte riziková váha expozice a kapitálový požadavek k dané expozici. Vytvořená metodologie odhadu rizikových parametrů podléhá schválení ze strany národního regulátora. Hlavní rizikové faktory vstupující do výpočtu rizikové váhy jsou:

1. Pravděpodobnost defaultu (*Probability of Default* - PD) ... pravděpodobnost defaultu dlužníka během daného časového intervalu.

2. Kreditní konverzní faktor (*Credit conversion factor - CCF* ... udává, jaká část v současnosti nečerpané pozice (podrozvahy) bude v případě defaultu čerpána.

3. Výše expozice v případě defaultu (*Exposure at Default*[11] - EAD) ... celková výše expozice za dlužníkem v době jeho defaultu.

4. Ztráta způsobená selháním (*Loss Given Default* - LGD) ... procentuální podíl z výše expozice ztracený v případě, že dojde k defaultu.

5. Splatnost expozice (*Maturity* - M) ... doba do splatnosti expozice vyjádřená v letech

V rámci IRB přístupu se rozlišuje[12]:

- **základní IRB přístup** (*Foundation IRB Approach*) ... při použití základního IRB přístupu musí banka odhadnout pravděpodobnost defaultu protistrany (PD). Ostatní rizikové parametry jsou stanoveny regulatorními pravidly.

- **pokročilý IRB přístup** (*Advanced IRB Approach*) ... při použití pokročilého IRB přístupu musí být bankou interně odhadnuta pravděpodobnost defaultu protistrany (PD), výše expozice v případě defaultu (EAD), ztráta způsobená selháním protistrany (LGD), efektivní splatnost expozice (M).

[11]Označení pro výši expozice v případě defaultu se v Basel II a ve Směrnicích liší. Ve Směrnicích je používán pojem *Exposure Value*. V této práci se přidržíme pojmu zavedeného Basel II.

[12]Takto jsou varianty IRB přístupu označeny v rámci Basel II. Směrnice EU také rozlišuje dva druhy IRB přístupu, nepoužívá ale toto označení a členění opisuje pojmy:
„*institutions not using own estimates of LGDs and/or conversion factors*“ pro základní IRB přístup a „*institutions using own estimates of LGDs and/or conversion factors*“ pro pokročilý IRB přístup.

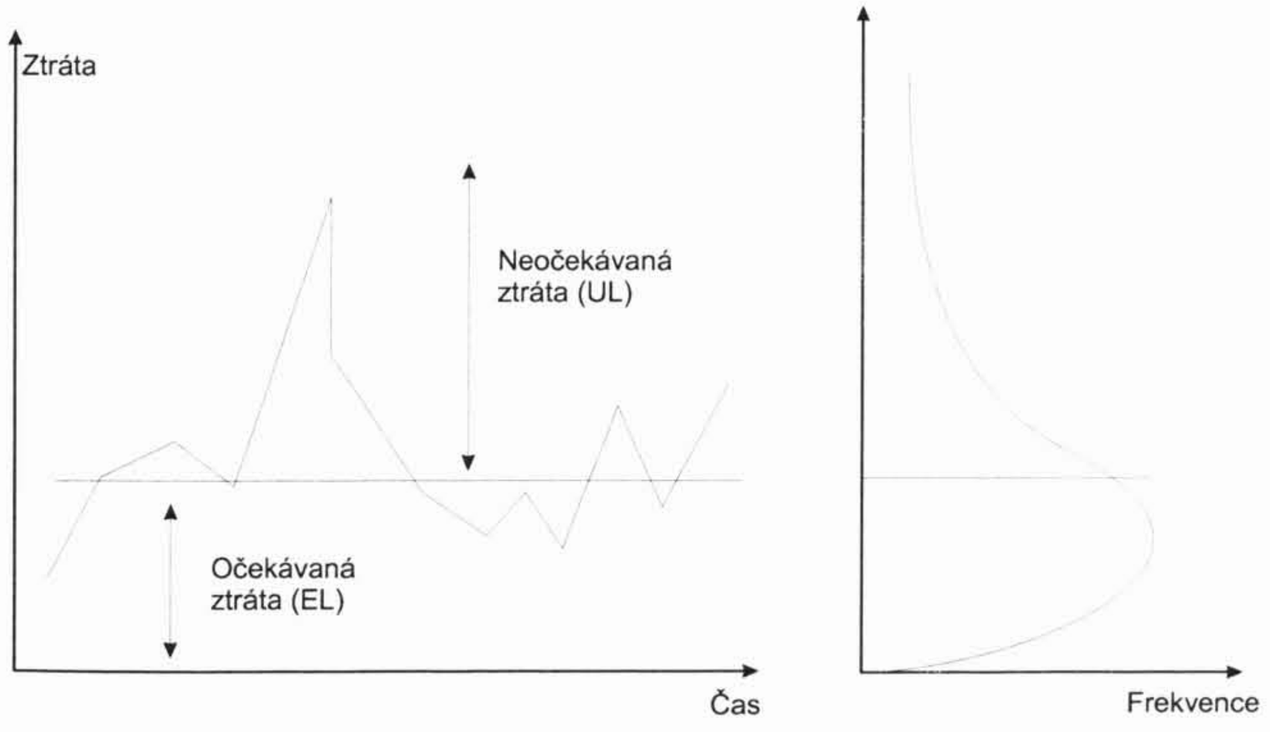
Bez ohledu na používaný přístup[13] je banka povinna rozčlenit své expozice do několika kategorií (např. vlády a centrální banky, podniky, instituce, retail apod.). Tyto kategorie jsou pro Standardizovaný a IRB přístup poněkud odlišné a jsou stanoveny regulátorem (pro podrobnosti viz Přílohu B).

Standardizovaný přístup k měření kapitálového požadavku je záležitostí poměrně mechanickou a z hlediska sofistikovanějších postupů k měření kreditního rizika nepřináší téměř nic nového. Zkoumání tohoto přístupu proto není náplní této práce.

Naproti tomu IRB přístup je založen na poměrně solidních teoretických základech. Jak již bylo řečeno, je kapitálový požadavek počítán na základě odhadnutých rizikových parametrů dané expozice. Tyto parametry jsou dosazeny do regulátorem předepsaného vzorce (funkce rizikové váhy - *risk weight function*) a vypočten kapitálový požadavek.

3.2 Ekonomické pozadí IRB přístupu

Při poskytování úvěrů vždy dochází k defaultům dlužníků. Ztráty, ke kterým dochází, se v čase mění a kolísají v závislosti na počtu defaultů a to i za předpokladu, že kvalita úvěrového portfolia je v čase konzistentní. Toto kolísání se projevuje ve tvaru rozdělení ztrát úvěrového portfolia, jak schmematicky ukazuje obrázek 3.1.

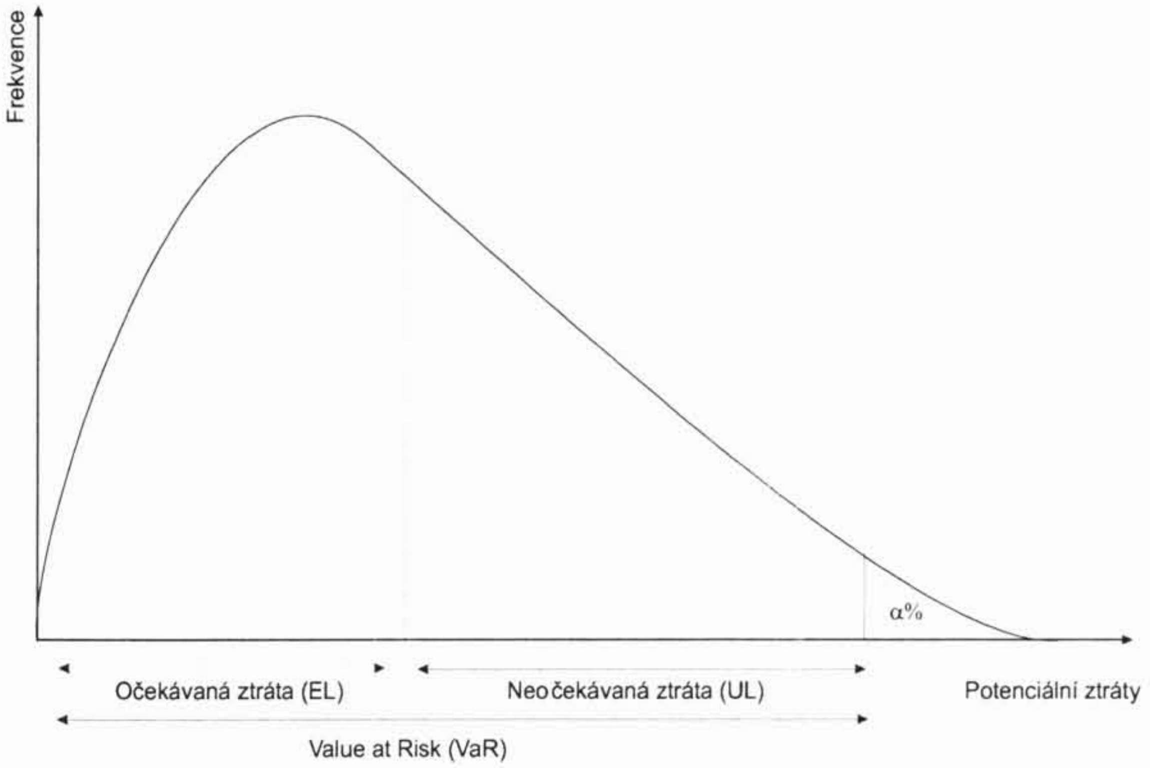


Obrázek 3.1: Ztráty portfolia

Očekávaná ztráta (*Expected Loss* - EL) je považována za přirozenou součást podnikání

[13] Pro některé expozice (např. pro akciové expozice a sekuritizovaná aktiva) se používají i jiné přístupy. Zde prezentované přístupy jsou používány pro výpočet kapitálového požadavku pro úvěry vůči státu, bankám, podnikům a retailu, které tvoří drtivou většinu úvěrových aktiv českých bank. Navíc ostatní přístupy vycházejí z podobných principů jako zde prezentované modely.

banky spojenou s poskytováním úvěrů a měla by tedy být řízena obvyklými prostředky. Jde zejména o nastavení cen úvěrů (výše kreditní prémie) a tvorbu opravných položek. Ztráty, které překračují očekávanou ztrátu bývají označovány jako **neočekávané ztráty** (*Unexpected Loss* - UL). Je zřejmé, že tyto ztráty se tu a tam vyskytnou, banka ale nemůže vědět kdy a jak velkou neočekávanou ztrátu utrpí. Jednou z funkcí regulatorního kapitálu je tvorba „polštáře", který by měl banky chránit před ztrátami z konce rozdělení a má tedy absorpční funkci. Nejhorší ztráta, jakou banka může za dané období utrpět, je default celého úvěrového portfolia. Tato událost je ale velmi nepravděpodobná a držet kapitál proti takové události je neefektivní. Je více přístupů jak určit výši kapitálu, který by měla banka držet. IRB přístup vychází z metodiky Value at Risk. Regulátor požaduje, aby neočekávaná ztráta, která nastane za období jednoho roku, překročila určitou hranici pouze s předem danou malou pravděpodobností (označme α). Tato pravděpodobnost pak vyjadřuje nebezpečí, že banka bude nesolventní. Graficky je tato situace znázorněna na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Rozdělení ztrát portfolia

Křivka na obrázku je hustota pravděpodobnosti rozdělení ročních ztrát. Toto rozdělení je zdola ohraničeno nulou a má kladnou šikmost, což je u ztrát z úvěrového rizika typické[14]. Ztráty s největší pravěpodobností výskytu jsou menší než očekávaná ztráta. Pravděpodobnost, že ztráta za jeden rok překročí součet očekávané a neočekávané ztráty je dána vyšrafovanou plochou pod grafem hustoty pravděpodobnosti a je rovna α. Konfidenční hladina (*confidence level*) je rovna 1 - α a odpovídající mez se nazývá Value at Risk (VaR) na dané hladině pravděpodobnosti a pro daný časový interval. Podrobnosti o konceptu Value at Risk jsou uvedeny v Příloze A.

[14]Při poskytnutí úvěru je poměrně velká pravděpodobnost relativně malého výnosu (úroků) a naproti tomu poměrně velká ztráta, která ovšem nastává s malou pravděpodobností (default dlužníka).

Pokud je vlastní kapitál roven odhadnuté výši neočekávané ztráty (= VaR - EL) a očekávaná ztráta je kryta opravnými položkami, pak pravděpodobnost, že banka bude po dobu jednoho roku solventní, je rovna dané konfidenční hladině, neboli 1 - α.

Očekávaná ztráta úvěrového portfolia za jeden rok je rovna míře defaultů za jeden rok násobené výší expozice v případě defaultu a ztrátou způsobenou defaultem. V rámci IRB přístupu je tedy očekávaná ztráta (v jednotkách dané měny) odhadnuta jako

$$EL = PD \cdot EAD \cdot LGD$$

nebo vyjádřená v procentech z EAD jako

$$EL = PD \cdot LGD$$

Basilejský výbor při odhadu neočekávané ztráty vycházel z požadavku, aby byl model portfolio invariantní, tj. aby odhad neočekávané ztráty u daného dluhu závisel pouze na riziku daného dluhu a nikoli na složení daného úvěrového portfolia. Tento požadavek nicméně vede k tomu, že je složité do modelu implementovat diverzifikační efekty portfolia. Proto byl vytvořený model kalibrován na dobře diverzifikovaná portfolia[15]. Portfolio invariantní alokace kapitálu se také nazývá *ratings-based* (je totiž založena pouze na vlastnostech daného dluhu).

Požadovanou vlastnost mají tzv. asymptotické jednofaktorové modely (*Asymptotic Single Risk Factor - ASRF*). V těchto modelech se uvažuje velký počet relativně malých úvěrů. Při rostoucím počtu úvěrů se idiosynkratické riziko jednotlivých úvěrů navzájem „vyruší“ a vliv na riziko portfolia má pouze systematické riziko. Toto riziko je pak modelováno pouze jedním rizikovým faktorem.

Basilejský výbor při odvozování použil Vašíčkův jednofaktorový model (viz kap. 3.3), přičemž rizikovým faktorem je stav makroekonomiky.

3.3 Odvození funkce rizikové váhy

Při odvozování funkce rizikové váhy se vychází z Mertonova a Vašíčkova modelu. Podle Mertonova modelu dojde k defaultu dlužníka, pokud ten nemůže dostát svým závazkům v určitém daném časovém horizontu (např. jeden rok), protože hodnota jeho aktiv poklesne pod hodnotu závazků.

[15]Banky, které nemají dobře diverzifikovaná portfolia by měly toto řešit v rámci tzv. Pilíře 2, ve kterém se říká, že by banky měly mít interní systém na měření všech rizik - tzv. *Internal Capital Adequacy Assessment Proces - ICAAP.*

Vašíček ukázal (viz [7]), že za jistých předpokladů lze tento model rozšířit na celé portfolio a odvodil analytické vyjádření rozdělení ztrát z tohoto portfolia.

3.3.1 Odvození distribuční funkce rozdělení ztrát – Vašíčkův model

Při odvozování distribuční funkce rozdělení ztrát se vychází z následujících předpokladů:

- úvěrové portfolio obsahuje n úvěrů;
- každý z těchto úvěrů je ve stejné výši;
- pravděpodobnost defaultu každého úvěru je stejná (označme ji PD);
- hodnota firmy i (i = 1 ... n) v čase t (t $\geq$ 0) se značí jako $A_i(t)$;
- default úvěru i nastane, pokud v čase T hodnota aktiv firmy i (tj. $A_i(T)$) klesne pod hodnotu závazků D_i.

Nechť je dále hodnota aktiv firmy i popsána logaritmickým Wienerovým procesem:

$$dA_i = r_i A_i dt + \sigma_i A_i dZ_i, \tag{3.1}$$

kde r_i, σ_i jsou konstanty a Z_i jsou náhodné procesy, definované vztahem[16]:

$$Z_i(t) = \sqrt{R}X(t) + \sqrt{1-R}\varepsilon_i(t)$$

Pro náhodné procesy (Z_i(t), t $\geq$ 0) předpokládáme, že

$$corr(Z_i(t), Z_j(t)) = R, i \neq j$$

a že (X(t), t $\geq$ 0) a (ε_i(t), t $\geq$ 0, i=1 ... n) jsou nezávislé Wienerovy procesy.

Z vlastností Wienerova procesu plyne, že náhodné veličiny

$$\frac{X(T)}{\sqrt{T}}, \frac{\varepsilon_i(T)}{\sqrt{T}}, \frac{Z_i(T)}{\sqrt{T}}, i = 1, \ldots, n$$

[16]Proces $X(t)$ může být interpretován jako simulace makroekonomických podmínek (stav ekonomiky, tržní prostředí), které jsou společné pro všechny firmy a procesy ε_i(t) pak jako simulace mikroekonomických podmínek relevantních pro firmu i. $X(t)$ je v tomto modelu systematickým rizikovým faktorem.
Korelace R pak vyjadřuje velikost závislosti jednotlivých firem na makroekonomických podmínkách

mají normované normální rozdělení N(0,1).

Pro logaritmický Wienerův proces definovaný rovnicí (3.1) platí:

$$\ln(A_i(t)) = \ln(A_i(0)) + \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i Z_i(t), \tag{3.2}$$

kde $A_i(0)$ je konstanta.

Platí tedy, že

$$corr(\ln(A_i(t)), \ln(A_j(t))) = corr(Z_i(t), Z_j(t)) = R$$

Pravděpodobnost defaultu části portfolia

Nyní se na základě výše uvedených předpokladů odvodí pravděpodobnost defaultu části portfolia. Z definice defaultu plyne, že pravděpodobnost defaultu i-té firmy lze vyjádřit jako:

$$PD = P(A_i(T) < D_i)$$

Tuto rovnost lze dále upravovat:

$$\begin{aligned} PD &= P(A_i(T) < D_i) = P(\ln(A_i(T)) < \ln(D_i)) = \\ &= P\left(\ln(A_i(0)) + \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sigma_i Z_i(T) < \ln(D_i)\right) = \\ &= P\left(\frac{Z_i(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left[\ln(D_i) - \ln(A_i(0)) - \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T\right]\right) \end{aligned}$$

Protože $\frac{Z_i(T)}{\sqrt{T}}$ mají normované normální rozdělení, lze psát:

$$PD = N\left(\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left[\ln(D_i) - \ln(A_i(0)) - \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T\right]\right), \tag{3.3}$$

kde N(x) je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Vzhledem k definici Z_i(T) je nerovnost $A_i(T) < D_i$ ekvivalentní nerovnosti[17]:

$$\frac{\varepsilon_i(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(G(PD) - \sqrt{R}\frac{X(T)}{\sqrt{T}}\right),$$

kde G(PD) je inverzní funkce k distribuční funkci N(x) (tedy tzv. kvantilová funkce).

Dalším předmětem zkoumání je pravděpodobnost defaultu více firem. Zajímá nás pravděpodobnost, že úvěry $1, \dots, k$ budou defaultovat a úvěry $k+1, \dots, n$ budou splaceny. Tato pravděpodobnost lze vyjádřit takto[18]:

$$\begin{aligned}
P_{1\dots k,k+1\dots n} &= P(A_1(T) < D_1, \dots, A_k(T) < D_k, A_{k+1}(T) > D_{k+1}, \dots, A_n(T) > D_n) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\varepsilon_1(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(G(PD) - \sqrt{R}\frac{X(T)}{\sqrt{T}}\right), \dots, \right. \\
&\qquad \left. \frac{\varepsilon_n(T)}{\sqrt{T}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(G(PD) - \sqrt{R}\frac{X(T)}{\sqrt{T}}\right) \middle| \frac{X(T)}{\sqrt{T}} = u\right) dN(u) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}(G(PD) - \sqrt{R}u)\right)\right]^k \cdot \left[1 - N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}(G(PD) - \sqrt{R}u)\right)\right]^{n-k} dN(u)
\end{aligned}$$

Označíme-li P_{nk} pravděpodobnost, že bude defaultovat právě k libovolných úvěrů, pak tato pravděpodobnost nezávisí na tom, kterých k úvěrů konkrétně defaultuje. Tato pravděpodobnost je dána vztahem:

$$P_{nk} = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}(G(PD) - \sqrt{R}u)\right)\right]^k \cdot \left[1 - N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}(G(PD) - \sqrt{R}u)\right)\right]^{n-k} dN(u)$$

[17] Důkaz:

$$\begin{aligned}
&A_i(T) < D_i \Rightarrow \ln(A_i(T)) < \ln(D_i) \Rightarrow \ln(A_i(0)) + \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) T + \sigma_i Z_i(T) < \ln(D_i) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sigma_i\left(\sqrt{R}X(T) + \sqrt{1-R}\varepsilon_i(T)\right) < \ln(D_i) - \ln(A_i(0)) - \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) T \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{R}X(T)}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{1-R}\varepsilon_i(T)}{\sqrt{T}} < \underbrace{\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left[\ln(D_i) - \ln(A_i(0)) - \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) T\right]}_{G(PD)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\varepsilon_i(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(G(PD) - \sqrt{R}\frac{X(T)}{\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

[18] Integrand je podmíněné pravděpodobnostní rozdělení ztrát z portfolia při daném stavu ekonomiky. Výslednou pravděpodobnost získáme vyintegrováním přes všechny možné stavy ekonomiky.

Provedeme-li substituci:

$$s = N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}(G(PD) - \sqrt{R}u)\right)$$

můžeme psát:

$$P_{nk} = \binom{n}{k}\int_0^1 s^k(1-s)^{n-k}dW(s), \tag{3.4}$$

kde

$$W(s) = N\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\left(G(s)\sqrt{1-R} - G(PD)\right)\right), \; 0 \leqq s \leqq 1$$

Limitní rozdělení ztráty z portfolia

Pro portfolio o n úvěrech označme označme symbolem C_n náhodnou veličinu vyjadřující podíl úvěrů, které budou defaultovat, tedy:

$$C_n = \frac{k}{n}, \; k = 0, \ldots, n$$

Označíme dále distribuční funkci náhodné veličiny C_n jako:

$$F_n(\theta) = P(C_n \leqq \theta)$$

Pak zřejmě platí:

$$\begin{aligned} F_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{[n\theta]} P_{nk} = & (3.5) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} s^k(1-s)^{n-k}\right) dW(s), \; 0 \leqq \theta \leqq 1 & (3.6) \end{aligned}$$

Nyní budeme zkoumat, zda existuje $\lim_{n\to\infty} F_n(\theta)$. Abychom mohli tuto limitu vypočítat, je třeba ověřit podmínky nutné pro to, abychom mohli prohodit limitu a integrál.

Pomocí zákona velkých čísel lze dokázat, že:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} s^k(1-s)^{n-k} &= 0, \; \theta < s \\ &= 1, \; \theta > s \end{aligned}$$

Také platí, že:

$$\sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} s^k(1-s)^{n-k} \leqq 1,\ 0 \leqq s \leqq 1$$

Nyní tedy lze vypočítat:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \lim_{n\to\infty} F_n(\theta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} s^k(1-s)^{n-k} \right) dW(s) = \\ &= \int_0^\theta 1dW(s) + \int_\theta^1 0dW(s) = 1\cdot(W(\theta)-W(0)) + 0\cdot(W(1)-W(\theta)) = \\ &= W(\theta) \end{aligned}$$

Označíme-li C náhodnou veličinu vyjadřující podíl defaultujících úvěrů v portfoliu s $n = \infty$ („velmi velkém" portfoliu), pak C je limita náhodné veličiny C_n a $F(\theta)$ je její distrubuční funkce.

Limitní rozdělení procentní ztráty z portfolia o „velmi velkém" počtu úvěrů ($n = \infty$) má tedy distribuční funkci:

$$W(\theta) = N\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\left(G(\theta)\sqrt{1-R} - G(PD)\right)\right),\ 0 \leqq \theta \leqq 1 \tag{3.7}$$

Rozdělení s touto distribuční funkcí se nazývá **Vašíčkovo rozdělení**.

Vlastnosti rozdělení ztrát

Pokud $R \to 0$, pak rozdělení konverguje k jednobodovému rozdělení koncentrovanému u $C = PD$. Pokud $R \to 1$, pak konverguje k alternativnímu rozdělení s pravděpodobností p, respektive $1-p$.

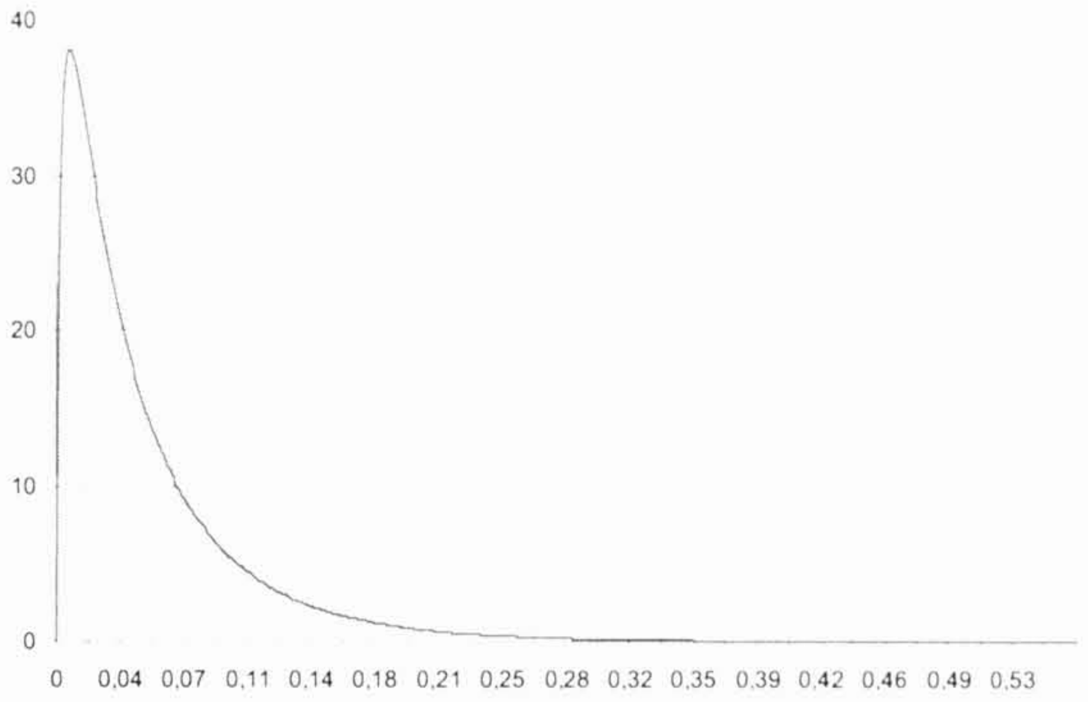
Pokud $PD \to 0$ (nebo $PD \to 1$), pak se rozdělení koncentruje u $C = 0$ (resp. $C = 1$).

Hustota Vašíčkova rozdělení (pro $0 \leqq \theta \leqq 1$) je dána následujícím vztahem:

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{1-R}{R}} exp\left[\frac{1}{2}G^2(\theta) - \frac{1}{2R}\left(G(\theta)\sqrt{1-R} - G(PD)\right)^2\right] \tag{3.8}$$

Střední hodnota Vašíčkova rozdělení je:

$$E(C) = PD$$



Obrázek 3.3: Hustota Vašíčkova rozdělení (R=20% a PD=5%)

Rozdělení vykazuje následující symetrickou vlastnost:

$$W(\theta, PD, R) = 1 - W(1-\theta, 1-PD, R)$$

Inverzní funkce k distribuční funkci Vašíčkova rozdělení (tzv. kvantilová funkce Vašíčkova rozdělení) je dána vztahem:

$$\begin{aligned} W^{-1}(\theta, PD, R)) &= W(\theta,\ 1-PD,\ 1-R) \\ &= N\left(\sqrt{\frac{R}{1-R}}\,G(\theta) + \frac{1}{\sqrt{1-R}}\,G(PD)\right), 0 \leqq \theta \leqq 1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

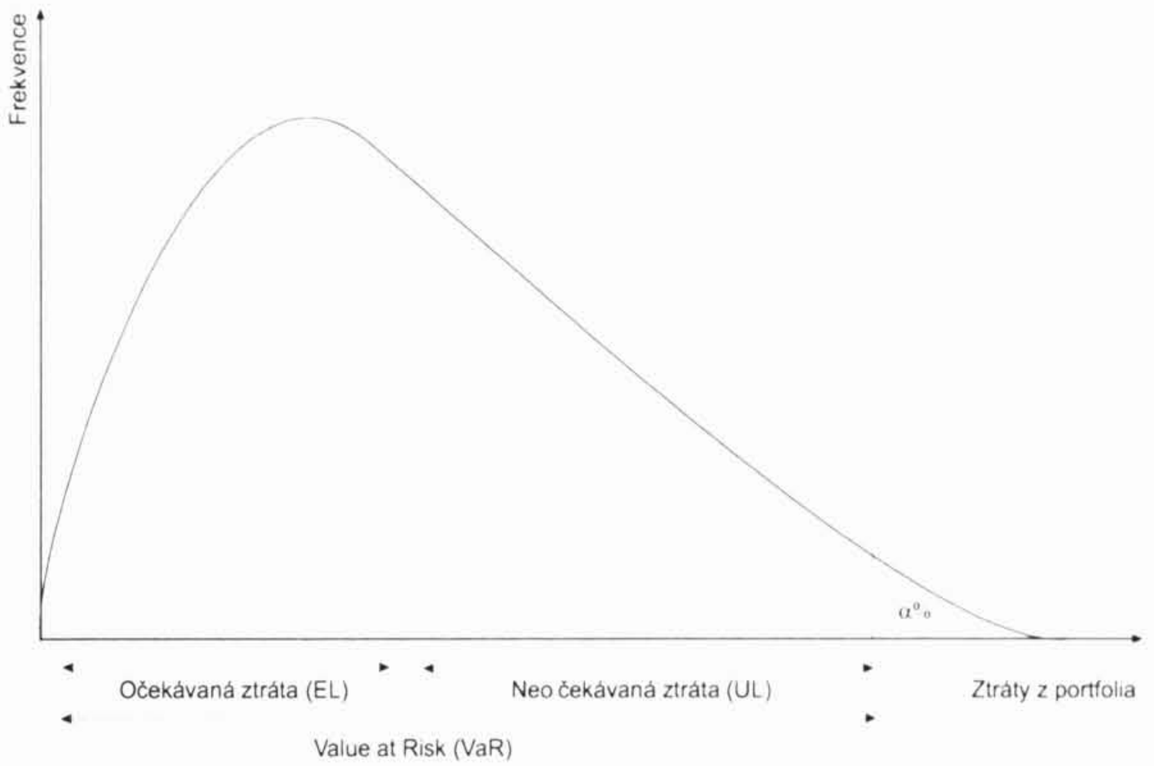
Vašíčkovo rozdělení je výrazně zešikmené.

3.3.2 Aplikace Vašíčkova modelu při výpočtu kapitálového požadavku

Jak již bylo řečeno v kap. 3.2, vychází koncept Basel II z myšlenky, že očekávaná ztráta je kryta opravnými položkami a kapitálový požadavek by tedy měl krýt pouze neočekávanou ztrátu na období jednoho roku (s určitou pravděpodobností). Označíme-li L náhodnou veličinu, která vyjadřuje ztrátu z portfolia úvěrů, pak by tedy měl být kapitálový požadavek vyjádřen tímto vztahem:

$$KP = VaR(\alpha, 1) - EL(L, 1), \tag{3.10}$$

kde $VaR(\alpha, 1)$ je hodnota Value at Risk portfolia na období jednoho roku na hladině α a $EL(L, 1)$ je očekávaná ztráta daného portfolia na období jednoho roku.



Obrázek 3.4: Určení KP

Předpokládejme nyní následující (některé předpoklady jsou stejné jako v kap. 3.3.1):

- úvěrové portfolio obsahuje n úvěrů;
- každý z těchto úvěrů je ve stejné výši, označme výši úvěru EAD;
- pravděpodobnost defaultu každého úvěru je stejná (označme ji PD);
- ztráta z jednoho úvěru v případě defaultu je stejná pro všechny úvěry (označme ji LGD).

Vyjdeme-li z označení zavadeného v kap. 3.3.1, vypočítáme celkovou ztrátu způsobenou defaulty takto:

$$L_n = n \cdot C_n \cdot LGD \cdot EAD$$

a průměrnou ztrátu z jednoho úvěru vyjádřenou v procentech z EAD jako:

$$\overline{L_n} = C_n \cdot LGD$$

Uvažujme nyní portfolio o „velmi velkém“ počtu úvěrů ($n \to \infty$). Potom je celková ztráta portfolia způsobená defaulty daná vztahem:

$$L = C \cdot LGD \cdot EAD, \tag{3.11}$$

a průměrná ztráta z jednoho úvěru v procentech z EAD je dána vztahem:

$$\overline{L} = C \cdot LGD, \tag{3.12}$$

kde C má Vašíčkovo rozdělení s parametry PD a LGD.

Koncept Basel II vyžaduje krýt neočekávanou ztrátu na hladině spolehlivosti 99,9%[19]. Vypočteme tedy VaR na hladině na období jednoho roku jako:

$$VaR(0,999;\ 1) = N\left(\sqrt{\frac{R}{1-R}}G(0,999) + \frac{1}{\sqrt{1-R}}G(PD)\right) \cdot LGD \cdot EAD$$

a očekávanou ztrátu jako:

$$EL(L) = PD \cdot LGD \cdot EAD$$

Poznamenejme, že vypočtené VaR je 99,9% kvantil rozdělení L[20].

Kapitálový požadavek se tedy vypočte jako:

$$\begin{aligned} KP &= VaR - EL \\ &= EAD \cdot LGD \cdot \left[N\left(\sqrt{\frac{R}{1-R}}G(0,999) + \frac{1}{\sqrt{1-R}}G(PD)\right) - PD\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.4 Funkce rizikové váhy

Výpočet kapitálového požadavku v rámci IRB přístupu vychází z rovnice 3.14. Není však pro všechny typy expozic (úvěrů, dlužníků) stejný. Pro jednotlivé typy je třeba specifikovat hodnoty korelací R. U některých typů expozic navíc ve funkci rizikové váhy vystupuje také tzv. koeficient úpravy splatnosti[21] (*maturity adjustment coefficient*).

3.4.1 Korelace aktiv

Rizikovým faktorem ve Vašíčkově modelu je stav makroekonomických podmínek. Míru závislosti hodnoty aktiv dlužníků na těchto podmínkách popisuje korelace R. Hodnota

[19] To znamená, že k překročení neočekávané ztráty dojde v průměru jednou za 1000 let.

[20] Protože rozdělení L je Vašíčkovo rozdělení, které je výrazně zešikmené (viz obr. 3.3), je i 99,9% kvantil smysluplná hodnota.

[21] Tento koeficient upravuje výši kapitálového požadavku pro expozice s různou splatností (maturitou).

této korelace se liší pro jednotlivé typy dlužníků. Obecně platí, že míra vzájemné závislosti stavu ekonomiky a stavu firmy roste s velikostí firmy. Ukazuje se také, že u korporátních subjektů klesá tato závislost s rostoucí pravděpodobností defaultu. Je to zřejmě dáno tím, že s rostoucím PD začínají převažovat idiosynkratické (individuální, mikroekonomické) riziké faktory a klesá vliv makroekonomický.

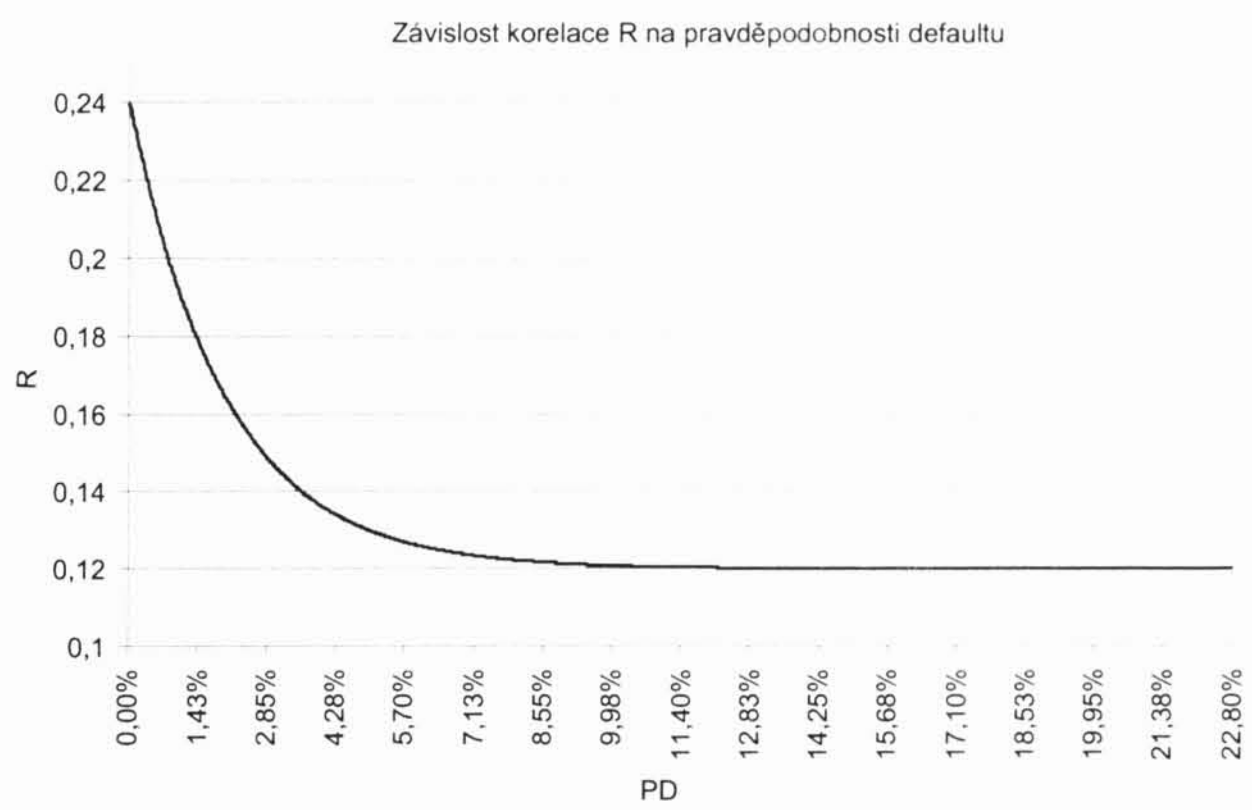
Při odhadu korelace R pro jednotlivé typy expozic vycházel Basilejský výbor z dat jednotlivých národních regulátorů.

Korelace pro expozice vůči vládám, centrálním bankám, institucím a korporátům

Pro expozice vůči vládám a centrálním bankám, institucím a vůči podnikům byl pro hodnotu korelace odvozen následující vztah[22]:

$$R = 0,12 \cdot \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}} + 0,24 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}}\right) - \underbrace{0,04 \cdot \left(1 - \frac{S - 5}{45}\right)}_{\text{Úprava pro SME}} \tag{3.14}$$

kde PD je pravděpodobnost defaultu a S je roční konsolidovaný obrat dlužníka udávaný v milionech EUR[23].



Obrázek 3.5: Závislost korelace R na PD

[22]Poslední člen (úprava pro malé a střední podniky (*Small and Medium Enterprises - SME*)) – se vztahuje pouze na korporátní expozice.
[23]Pokud je obrat S menší než 5 mil.EUR, počítá se s touto krajní hodnotou.

Pro $PD = 100\%$ je korelace $R = 0.12$ a pro $PD = 0\%$ je $R = 0.24$. Mezi těmito dvěma krajními hodnoty korelace s rostoucím PD exponenciálně klesá. U korporátních expozic je hodnota korelace závislá i na ročním obratu. Pokud se jedná o malý podnik, jehož obrat nepřesáhne 5 mil.EUR, sníží se hodnota korelace o 0.04. S rostoucím obratem se tato redukce snižuje, až pro obrat 50 mil.EUR je toto snížení nulové.

Korelace pro retailové expozice

Při odhadu korelací u retailových expozic se vycházelo nejen z historických dat národních regulátorů o ztrátách, ale také z výše ekonomického kapitálu pro retailové expozice velkých mezinárodně aktivních bank. Tento ekonomický kapitál se považoval za výsledek funkce rizikové váhy stanovené Basel II se vstupními známými hodnotami PD a LGD a byly dopočítány přibližné hodnoty korelace R, s jejichž použitím by se dospělo k zadaným hodnotám ekonomického kapitálu.

Časové řady národních regulátorů o ztrátách byly analyzovány podobně.

Obě analýzy ukázaly signifikantní rozdíly v hodnotách korelací pro různé typy retailových expozic. Hodnota korelace R se proto liší v závislosti na typu retailové expozice.

Pro rezidenční hypotéky[24] (*Residential Mortgages*):

$$R = 0,15 \tag{3.15}$$

Pro kvalifikované revolvingové retailové expozice[25] (*Qualifying Revolving Retail Exposures*):

$$R = 0,04 \tag{3.16}$$

Pro ostatní retailové expozice (*Other Retail Exposures*):

$$R = 0,03 \cdot \frac{1 - e^{-35 \cdot PD}}{1 - e^{-35}} + 0,16 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-35 \cdot PD}}{1 - e^{-35}}\right) \tag{3.17}$$

Vysoká hodnota korelace R u rezidenčních hypoték je dána jejich výraznou závislostí na trhu s nemovitostmi a na výši úrokových sazeb. U revolvingových expozic (např. kreditních karet) je závislost na makroekonomických podmínkách várazně menší. U ostatních retailových expozic pak kolísá v závislosti na PD dlužníka (a zřejmě i na typu produktu, což ovšem není dále členěno).

---

[24]Hypotéky určené k financování bydlení a zajištěné touto rezidenční nemovitostí.

[25]Jedná se o retailové expozice, které se pravidelně a automaticky opakují – např. kreditní karty, povolené debety apod.

3.4.2 Úprava splatnosti

Úvěrové portfolio sestává z úvěrů z různými splatnostmi. Intuice i empirické výsledky ukazují, že dlouhodobé úvěry jsou rizikovější než krátkodobé. Možnost zhoršení kvality dluhu (poklesu ratingu) u dlouhodobějších úvěrů je totiž větší než u krátkodobých. Kapitálový požadavek pro dlouhodobější úvěry by tedy měl být větší. Míra možného zhoršení kvality dluhu však závisí i na počáteční kvalitě dluhu (ratingu) a tedy i na pravděpodobnosti defaultu tohoto dluhu (protože čím horší počáteční rating, tím větší PD). U dlouhodobějších dluhů, které mají větší PD, je možnost zhoršení ratingu v příštích letech menší, než u těch s menším PD (dalo by se říci, že úvěry s menším PD mají větší „potenciál" se zhoršit).

Při odvozování funkční závislosti (podrobněji viz [1]) kapitálového požadavku na splatnosti (tedy při odvozování funkce úpravy splatnosti (*maturity adjustment function*)) se vycházelo z komerčního mark-to-market modelu[26], konkrétně modelu založeného na modelu KMV Portfolio Manager^{TM}. Tímto modelem bylo vypočteno VaR pro úvěry s různými splatnostmi a pravděpodobnostmi defaultu (viz tabulku 3.1).

Tabulka 3.1: Schéma výpočtu úpravy splatnosti

Stupeň PD	Maturita				
	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky	5 let
1	VaR(1,1)	VaR(1,2)	VaR(1,3)	VaR(1,4)	VaR(1,5)
2	VaR(2,1)	VaR(2,2)	VaR(2,3)	VaR(2,4)	VaR(2,5)
3	VaR(3,1)	VaR(3,2)	VaR(3,3)	VaR(3,4)	VaR(3,5)
...	VaR(...,1)	VaR(...,2)	VaR(...,3)	VaR(...,4)	VaR(...,5)

Poté byl pro každou buňku vypočten podíl dané hodnoty VaR a hodnoty VaR vypočtené pro „standardní" splatnost, která je v rámci konceptu Basel II nastavena na 2,5 roku.

Konečně s využitím regresních metod byla vypočtena funkce úpravy splatnosti a to za těchto požadavků:

- funkce úpravy splatnosti je lineární a rostoucí ve splatnosti,
- s rostoucí PD je sklon funkce úpravy splatnosti menší (viz obr. 3.6),
- pro splatnost rovnou jednomu roku je funkce úpravy splatnosti rovna jedné.

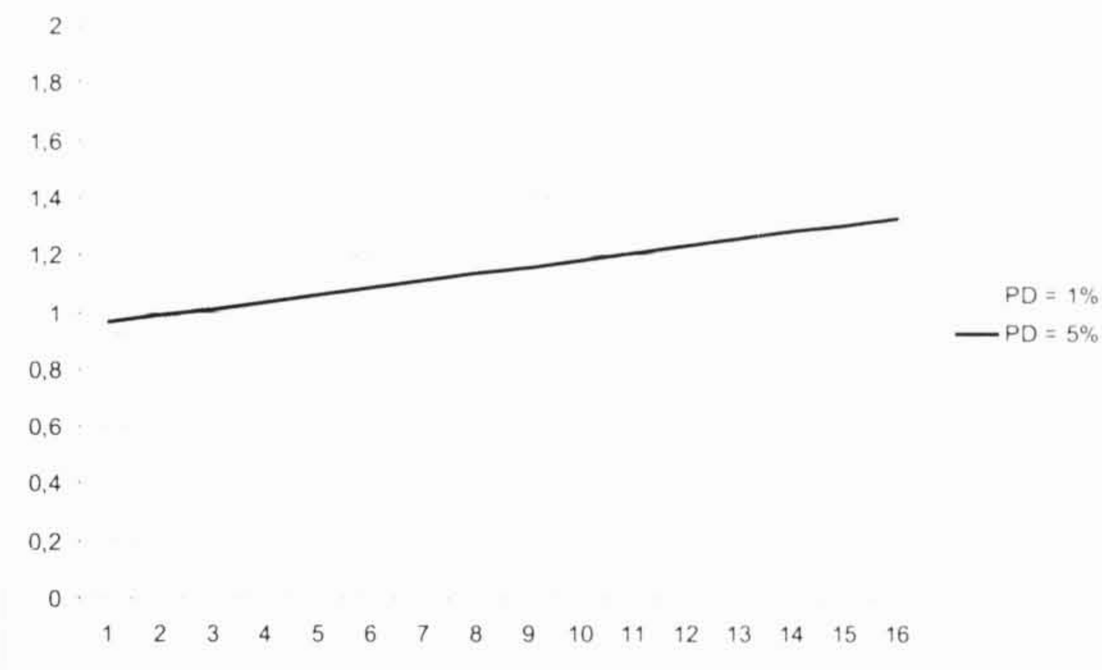
Na základě těchto požadavků a dat, která byla k dispozici, byla odvozena následující funkce úpravy splatnosti:

$$MA = \frac{1 + (M - 2,5) \cdot b(PD)}{1 - 1,5 \cdot b(PD)},$$

[26]Vysvětlení tohoto pojmu je uvedeno v kap. 4.1.

kde M je počet let do splatnosti dluhu a

$$b(PD) = [0,11852 - 0,05478 \cdot ln(PD)]^2$$



Obrázek 3.6: Funkce úpravy splatnosti v závislosti na PD

3.4.3 Výpočet kapitálového požadavku

Funkce rizikové váhy je pro různé kategorie expozic odlišná. Liší se např. pro expozice, jež byly zařazeny mezi podniky a pro retailové expozice. Zde prezentovaný postup výpočtu je platný pro expozice vůči podnikům.

Kapitálový požadavek se vypočte v několika krocích:

1. Vypočte se tzv. „korelace“:

$$R = 0,12 \cdot \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}} + 0,24 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}}\right)$$

2. Vypočte se koeficient úpravy splatnosti (*maturity adjustment coefficient*):

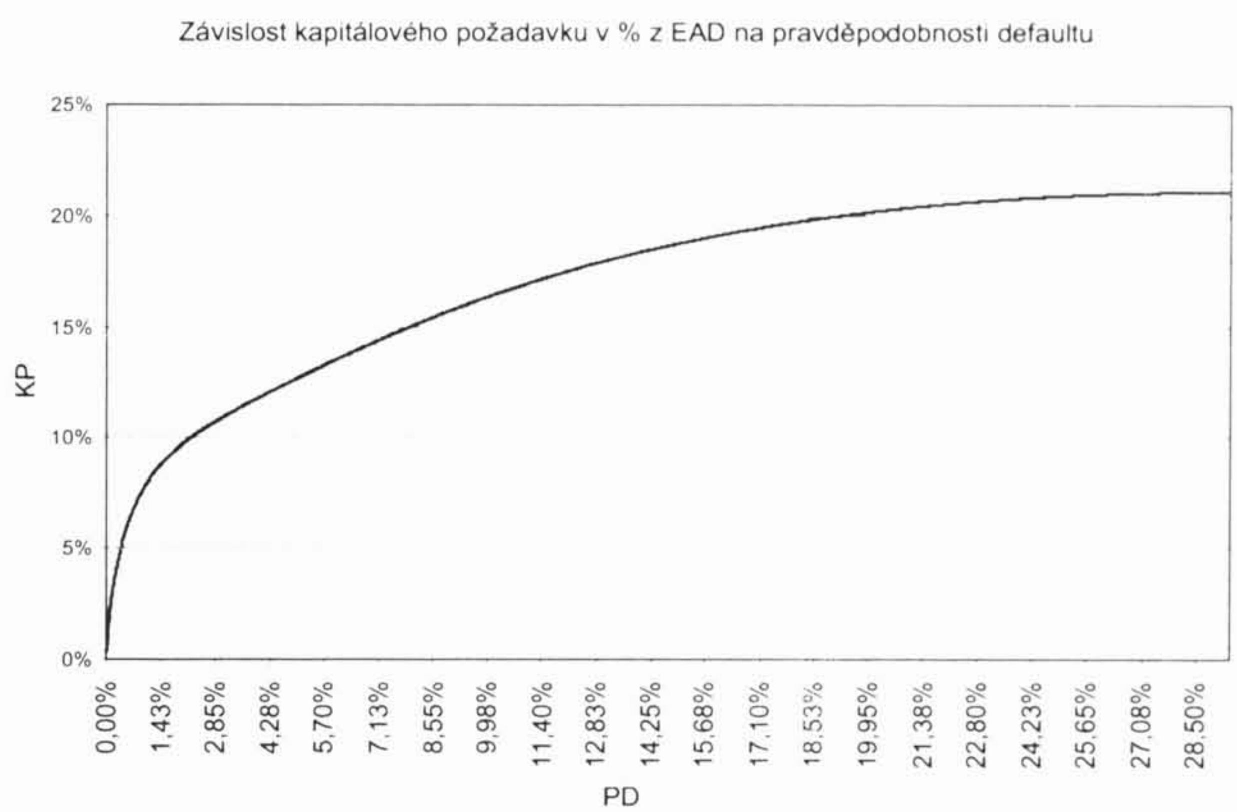
$$b(PD) = [0,11852 - 0,05478 \cdot ln(PD)]^2$$

3. Vypočte se riziková váha[27]:

$$RW = \frac{LGD}{0,08} \cdot \left\{ N \left[\frac{G(PD)}{\sqrt{1-R}} + \sqrt{\frac{R}{1-R}} G(0,999) \right] - PD \right\} \cdot \frac{1 + (M - 2,5) \cdot b(PD)}{1 - 1,5 \cdot b(PD)} \cdot SF$$

4. Vypočte se kapitálový požadavek:

$$KP = 0,08 \cdot \underbrace{RW \cdot EAD}_{RWA}$$



Obrázek 3.7: Závislost kapitálového požadavku (v % z EAD) na PD

Výpočet rizikové váhy pro retailové expozice se od výše uvedeného liší ve výpočtu koeficientu korelace R:

$$R = 0,03 \cdot \frac{1 - e^{-35 \cdot PD}}{1 - e^{-35}} + 0,16 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-35 \cdot PD}}{1 - e^{-35}}\right)$$

Při výpočtu rizikové váhy se pak neprojevuje úprava splatnosti (ve vztahu se tedy neobjevuje ani b(PD) ani M) a vztah pro výpočet rizikové váhy proto vypadá následovně:

$$RW = \frac{LGD}{0,08} \cdot \left\{ N \left[\frac{G(PD)}{\sqrt{1-R}} + \sqrt{\frac{R}{1-R}} G(0,999) \right] - PD \right\} \cdot SF$$

[27]SF je symbol používaný v této práci pro *Scaling Factor*. Jeho hodnota je v současném návrhu novelizací Směrnic stanovena na SF = 1,06. Tato hodnota byla stanovena „politickou dohodou" na základě výsledků dopadové studie Basel II (tzv. QIS 3 - Quantitative Impact Study 3 z roku 2002) na výši kapitálového požadavku bank tak, aby jeho výše nebyla ve srovnání s konceptem Basel I příliš odlišná.

Kapitola 4

Simulační model rizikovosti úvěrového portfolia - CreditMetrics

V této kapitole jsou nejprve krátce charakterizovány v současnosti používané komerční modely. Poté se tato kapitola věnuje obšírněji jednomu z nich, konkrétně modelu CreditMetrics. Je podrobně vysvětleno matematické pozadí tohoto modelu a způsob jeho použití v praxi. V další kapitole je pomocí tohoto modelu vypočtena velikost úvěrového rizika pro konkrétní úvěrové portfolio.

4.1 Portfoliové modely úvěrového rizika

Modely měřící úvěrové riziko se obecně dělí na dvě skupiny:

- Dvoustavové modely (*Default Model - DM*) ... modely, které zohledňují pouze dva stavy splácení dluhu a to stav, ve kterém dlužník svůj dluh splácí a stav, ve kterém je v defaultu. Tyto modely nereflektují změny v bonitě dlužníka. V případě, že dlužník selže, ztrácí věřitel část hodnoty dluhu (LGD), jinak je splacena celá dlužná částka.
- Vícestavové modely (*Mark-to-Market Model - MTM*) ... modely, které zohledňují i změny kreditní kvality dlužníka (vyjádřené např. kolísáním hodnoty majetku dlužníka nebo zlepšením a zhoršením jeho ratingu).

V současné době je známo několik komerčně využívaných modelů kvantifikujících úvěrové riziko. Mezi nejznámější a nejvíce diskutované patří:

- Portfolio Manager od společnosti KMV (mark-to-market model)
- CreditRisk + od společnosti Credit Suisse First Boston (default model)

- CreditPortfolioView od společnosti McKinsey (mark-to-market model)
- CreditMetrics od společnosti J.P.Morgan (mark-to-market model)

Všechny tyto modely měří velikost podstupovaného úvěrového rizika. Svým matematickým pozadím, předpoklady a zaměřením se však v některých případech dosti liší. V této práci bude dále podrobněji analyzován MTM model CreditMetrics.

4.2 Filosofie CreditMetrics

Model CreditMetrics měří velikost úvěrového rizika na základě metody Value at Risk. Při počítání úvěrového VaR se však musíme vypořádat s několika obtížemi. Jde zejména o to, že rozdělení výnosů z úvěrového portfolia není normální[28] a pak jde o diverzifikační efekt jednotlivých úvěrů. Protože však rozdělení úvěrových výnosů není známé a ani se nedá empiricky pozorovat (úvěry většinou nejsou obchodované na trhu), musí být rozdělení hodnoty dluhu určeno jinak. Při řešení těchto obtíží CreditMetrics vychází zejména z:

- informací o dlužníkově ratingu,
- pravděpodobností přechodu mezi ratingovými stupni[29] (včetně defaultu) během daného časového horizontu (většinou 1 rok),
- určení míry návratnosti[30] (*recovery rate*) defaultujících úvěrů,
- výše kreditního spreadu (přirážky) pro jednotlivé ratingové stupně a
- odhadu korelací mezi všemi dvojicemi dlužníků.

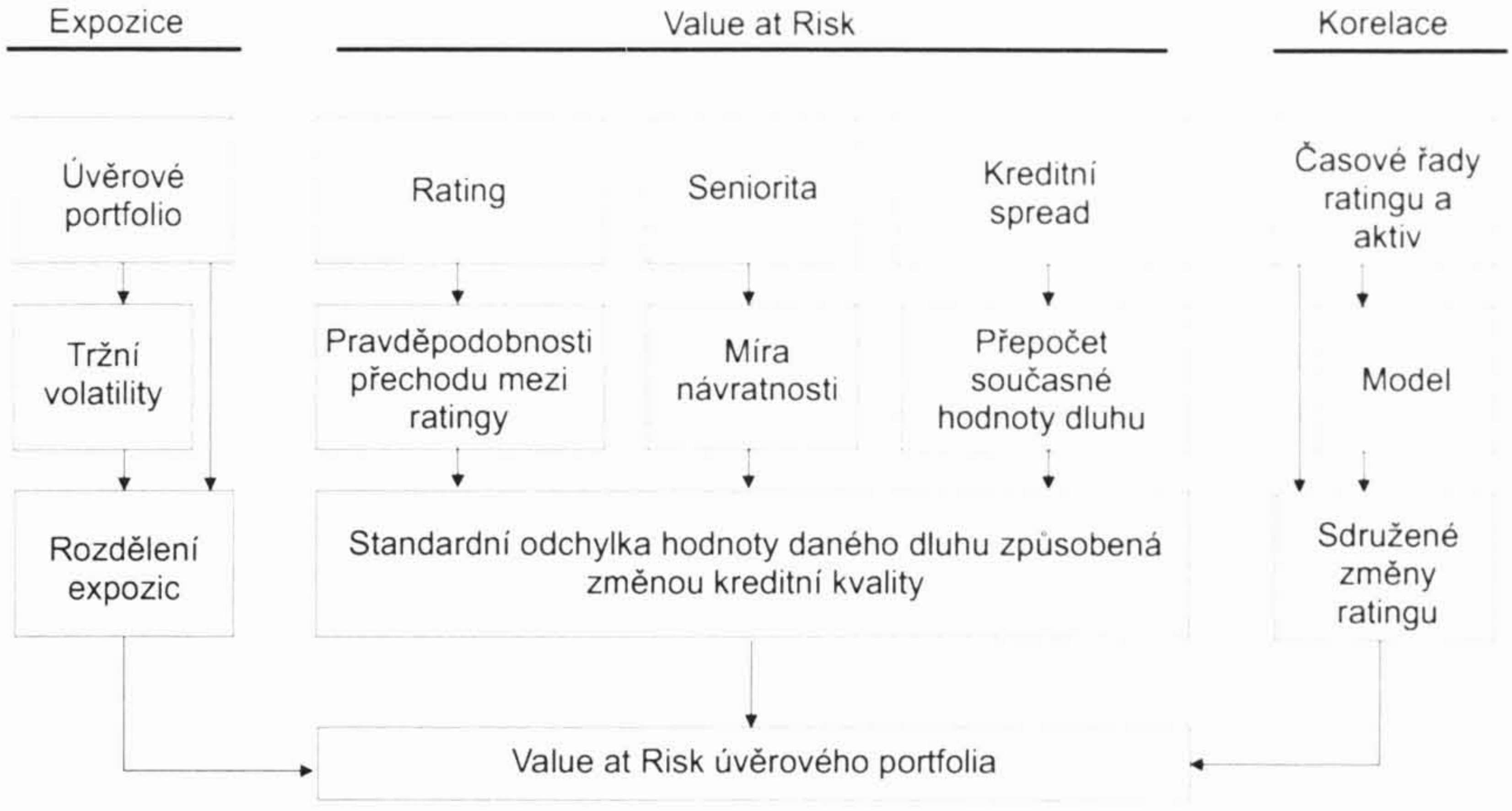
Na základě těchto informací je odhadnuto forwardové rozdělení změny hodnoty portfolia v daném časovém horizontu (většinou 1 rok).

Schematicky je postup výpočtu Value at Risk pro úvěrové portfolio znázorněn na obrázku 4.1, který znázorňuje jednotlivé kroky výpočtu. Nejpve se vypočtou potřebné charakteristiky pro jednotlivé úvěry (prostřední část schématu) a při zohlednění diverzifikačních efektů (pravá část schématu) se vypočte Value at Risk portfolia. Kromě toho je zde i část „Expozice“, ve které se počítá budoucí expozice derivátů (např. swapů). Touto třetí částí se však tato práce nezabývá.

[28]K určení VaR tedy nestačí vypočítat střední hodnotu a směrodatnou odchylku, ale musí být určeno celé rozdělení.

[29]„Ratingovým stupněm“ se rozumí každé seskupení dlužníků s podobnou kreditní kvalitou. To zahrnuje také (ale nejen) ratingové stupnice známých ratingových agentur jako je Standard & Poor's, Moody's nebo Fitch. Ratingovým stupněm může být ale také skupina úvěrů majících stejný interní rating banky.

[30]Míra návratnosti se většinou udává v procentech s nominální hodnoty dluhu.



Obrázek 4.1: Rámec CreditMetrics (zdroj: J.P.Morgan)

V následující kapitole je vysvětlen způsob výpočtu VaR modelem CreditMetrics pro jeden úvěr.

4.3 Úvěrové VaR pro jeden úvěr

Výpočet VaR probíhá v následujících krocích:

1. Nejprve je třeba specifikovat použitý ratingový systém, ratingové stupně a pravděpodobnosti přechodu mezi těmito stupni během daného časového horizontu. Model CreditMetrics předpokládá, že všichni dlužníci v rámci jednoho ratingového stupně jsou homogenní v tom smyslu, že mají stejné pravděpodobnosti přechodu do jiných ratingových stupňů a stejnou pravděpodobnost defaultu.

2. Dále je třeba určit časový horizont, který budeme uvažovat při výpočtu VaR. Většinou se uvažuje 1 rok, mohou být ale použity i jiné časové období. Volba časového horizontu se většinou odvíjí od struktury dat o pravděpodobnostech přechodu mezi ratingy, jež jsou k dispozici.

3. V další fázi se pro každý ratingový stupeň určí forwardová diskontní křivka k danému časovému horizontu. Pro případ defaultu se na základě seniority dluhu určí míra návratnosti.

4. Nakonec je na základě těchto informací určeno forwardové rozdělení hodnoty úvěru.

Nastíněný postup je demonstrován na příkladu převzatém z *Technical Document* CreditMetrics (viz [4]).

Příklad 1. Vypočítáme kreditní VaR pro dluhopis (výpočet pro úvěr je obdobný) o nominální hodnotě 100$ mající rating BBB[31] s maturitou 5 let, který nese roční kupón ve výši 6%. Tento dluhopis je „senior unsecured".

Krok 1: Nejprve specifikujme používaný ratingový systém a ratingové stupně. S&P's používá sedm ratingových stupňů; ten s nejvyšší kreditní kvalitou se značí AAA, s nejnižší CCC. Posledním stupněm je default. Defaultem je zde chápána každá situace, kdy dlužník nemůže splatit buď kupón nebo jistinu[32]. Údaje o pravděpodobnostech přechodu jsou uvedeny v tabulce 4.1 (pro počáteční rating BBB jsou údaje zvýrazněny kurzívou).

Tabulka 4.1: Přechodová matice: Pravděpodobnosti přechodu z jednoho ratingového stupně do jiného během jednoho roku[a]

	Rating na konci roku							
Počáteční rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Def
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	*0,02*	*0,33*	*5,95*	*86,93*	*5,30*	*1,17*	*0,12*	*0,18*
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

[a]Zdroj: Standard&Poor's CreditWeek (15.dubna 1996)

Podobná data zveřejňují i ostatní ratingové agentury. Uváděné pravděpodobnosti jsou u těchto renomovaných ratingových agentur založeny na mnohaletých historických pozorováních firem ve všech možných průmyslových odvětvích, u kterých se během jednoho roku změnil rating. Tato data musí být tedy obezřetně interpretována, zejména protože reprezentují heterogenní vzorek firem (často amerických) pozorovaných přes více hospodářských cyklů. Proto by banky měly upřednostňovat interní ratingový systém a interní historická data, která jsou relevantní pro jejich úvěrové portfolio. Protože pravděpodobnosti přechodu nejsou v čase konstantní a mění se zejména z fázemi hospodářského cyklu, měly by banky odhadnuté průměrné pravděpodobnosti přechodu přizpůsobit ekonomické situaci, tedy tomu, zda je v době výpočtu ekonomika ve fázi recese nebo konjunktury.

Krok 2: Nyní je třeba stanovit časový horizont. Většinou se uvažuje jeden rok, protože se

[31]V *Technical Document* CreditMetrics se používá ratingová stupnice S&P's.

[32]Default může být definován i jinak. Definice defaultu by měla odpovídat historickým datům, které má banka k dispozici a ratingovému systému, který banka používá.

sledují pravděpodobnosti přechodu pro jeden rok. Je nicméně možné použít i jiné časové horizonty. Pak je ovšem třeba sledovat pravděpodobnosti přechodu pro tyto požadované horizonty nebo je nějakým způsobem vypočítat. Ratingové agentury víceleté pravděpodobnosti přechodu zveřejňují, nicméně často se při stanovování víceletých pravděpodobností přechodu vychází z předpokladu, že náhodný proces určující rating je stacionární a Markovský. Pak je n-letá matice pravděpodobností přechodu jednoduše n-tou mocninou matice jednoleté.

Krok 3: Ocenění dluhopisu vychází z forwardových zero křivek pro každý ratingový stupeň, které se od sebe liší kreditním spreadem. Pro všechny dlužníky v rámci jednoho ratingového stupně platí stejná forwardová zero křivka. V tabulce 4.2 jsou jednoleté forwardové zero křivky[33] na dobu 4 let.

Tabulka 4.2: Jednoleté forwardové zero křivky pro všechny ratingové stupně[a]

Rating	**Rok 1**	**Rok 2**	**Rok 3**	**Rok 4**
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,02	14,03	13,52

[a]Zdroj: Technical Document, CreditMetrics

Krok 4: Na základě daných údajů se vypočte forwardové rozdělení hodnoty dluhopisu. Pokud bude za rok rating dluhopisu BBB, je jeho forwardová cena rovna:

$$V_{BBB} = 6 + \frac{6}{1,0410} + \frac{6}{(1,0467)^2} + \frac{6}{(1,0525)^3} + \frac{106}{(1,0563)^4} = 107,53$$

Podobně se určí hodnoty pro všechny ratingové stupně. Pokud dluhopis během roku defaultuje, není ztracena celá jeho hodnota, ale pouze část (LGD). Věřiteli se v závislosti na senioritě dluhu vrátí jeho část vyjádřená mírou návratnosti. V případě senior unsecured dluhu je její odhad 51,13%[34], pro uvažovaný dluhopis tedy 51,13$. Forwardové hodnoty dluhopisu pro všechny ratingy a pro default jsou uvedeny v tabulce 4.3.

[33]Empirické výsledky ukazují, že u vyšších ratingových stupňů spread s časem roste, zatímco u nižších ratingových stupňů (např. CCC) je forwardová křivka spíše klesající.

[34]Odhady míry návratnosti v čase poměrně výrazně kolísají. Při výpočtu VaR pro úvěrové portfolio jsou tedy míry návratnosti považovány za náhodné veličiny s beta rozdělením.

Tabulka 4.3: Forwardové hodnoty dluhopisu s ratingem BBB

Rating na konci roku	Hodnota ($)
AAA	109.40
AA	109.17
A	108.64
BBB	107.53
BB	102.01
B	98.10
CCC	83.63
Default	51.13

Nyní pomocí známých pravděpodobností přechodu a na základě vypočtených forwardových hodnot určíme forwardové rozdělení hodnoty dluhopisu. Rozdělení je zešikmené a vykazuje levý těžký chvost. Hodnoty jsou uvedeny v tabulce 4.4 a na obr. 4.2.

Tabulka 4.4: Rozdělení hodnoty dluhopisu, střední hodnota a odchylka

Rating na konci roku	**Pravděpodobnost:** $p(\%)$	**Forwardová hodnota:** $V(\$)$	**Odchylka od E(V):** $\triangle V(\$)$
AAA	0,02	109.40	2.33
AA	0,33	109.17	2.10
A	5,95	108,64	1,57
BBB	86,93	107,53	0,46
BB	5,30	102,01	-5,06
B	1,17	98,10	-8,97
CCC	0,12	83,63	-23,44
Default	0,18	51,13	-55,94
		E(V)=107,07	

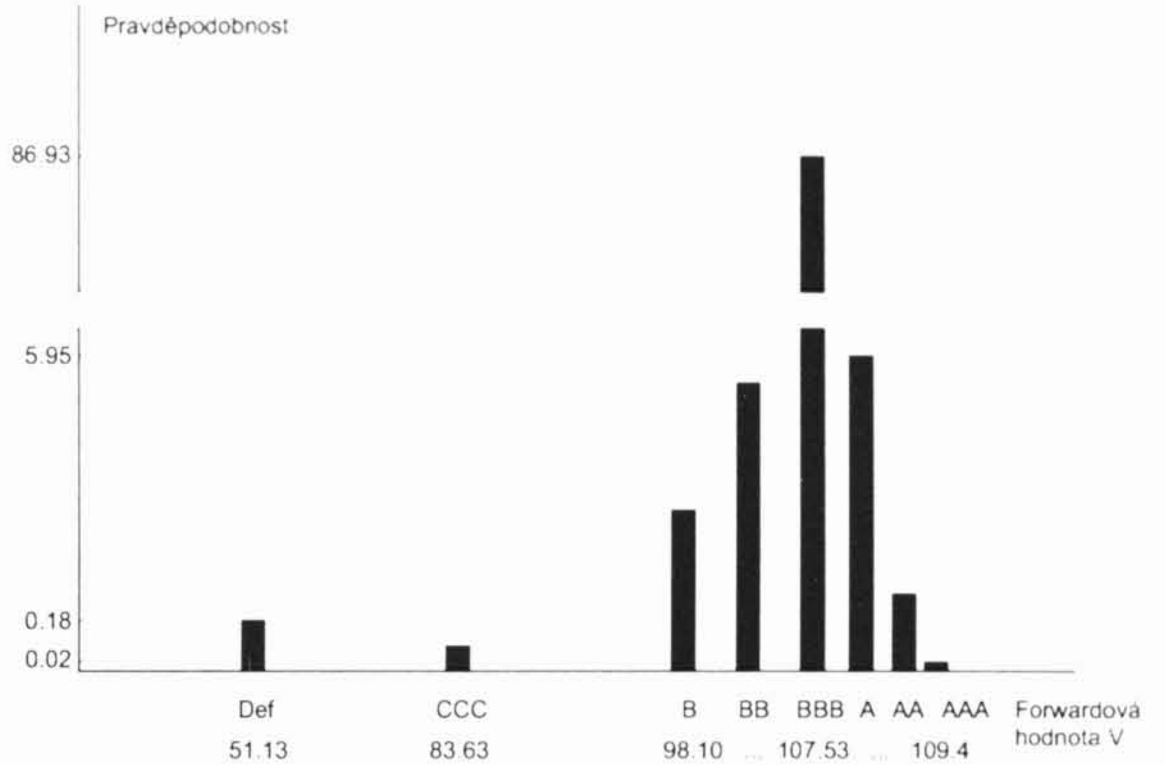
Směrodatná odchylka hodnoty dluhopisu se vypočte jako:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{Def}^{AAA} p \cdot (\triangle V)^2} = 2,99\$$$

Hodnota VaR pro tento dluhopis na hladině 98,53%[35] je:

$$VaR(1rok, 98,53\%) = 98,10\$ \Longrightarrow E(V) - VaR = 8,97\$$$

[35]Hladina 98,53% je dána součtem pravděpodobností pro přechod na rating B, CCC a default, tedy 1,17% + 0,12% + 0,18%.



Obrázek 4.2: Histogram forwardové hodnoty dluhopisu s ratingem BBB

Pokud bychom předpokládali normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 2,99\$, byl by 98,53% kvantil roven 6,51\$, což je méně než vypočtených 8,97\$. Je to dáno tím, že forwardové rozdělení hodnoty dluhopisu je zešikmené.

4.4 Úvěrové VaR pro portfolio dvou úvěrů

V této kapitole je na příkladu dvou úvěrů demonstrován přístup CreditMetrics ke zohlednění korelací mezi úvěry. Uvažujme dva dluhopisy s počátečním ratingem A respektive BB. Abychom mohli určit rozdělení tohoto portolia, musíme znát sdruženou matici pravděpodobností přechodu pro tyto dva dluhopisy. Při dané matici pravděpodobností přechodu reprezentované tabulkou 4.1 a za předpokladu, že dlužníci jsou nezávislí, dostaneme sdruženou pravděpodobnost součinem pravděpodobností marginálních. Tzn. že například pravděpodobnost, že oba dluhopisy budou mít na konci roku stejný rating jako na začátku roku je:

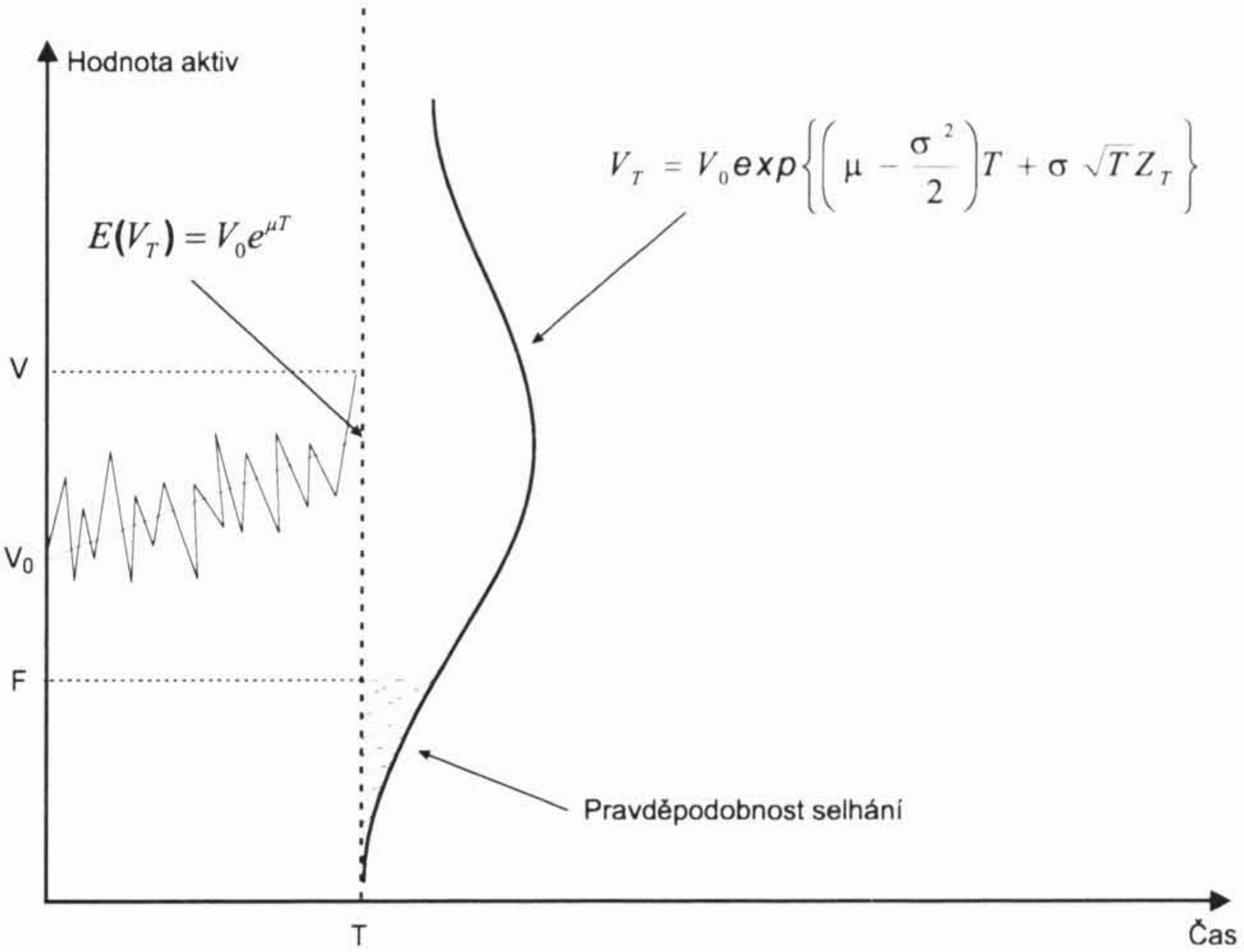
$$
\begin{aligned}
P(A \rightarrow A, BB \rightarrow BB) &= P(A \rightarrow A) \cdot P(BB \rightarrow BB) \\
&= 80,53\% \cdot 91,05\% \\
&= 73,32\%
\end{aligned}
$$

Předpoklad o nezávislosti kreditní kvality dlužníků je nicméně v praxi neudržitelný. Kreditní kvalita dlužníků je na sobě vzájemně závislá už jenom proto, že všichni podléhají daným makroekonomickým podmínkám. Proto jsou korelace kladné. Tyto korelace se navíc v závislosti na hospodářském cyklu mění. V recesi jsou korelace větší (a pravděpodobnost zhoršení kreditní kvality roste), kdežto v konjunktuře klesají. Nemůžeme tedy očekávat, že pravděpodobnosti přechodu budou v čase stacionární. Je tedy třeba strukturální model, který by používal veličiny, jejichž korelace jsou v čase stabilní.

CreditMetrics používá jako tento strukturální model Mertonův opční model z roku 1974, ve kterém se používá jako podkladové veličiny hodnoty aktiv a korelace mezi nimi. Předpokládá se, že hodnota firemních aktiv (označme V_t) následuje standardní geometrický Brownův pohyb, tedy:

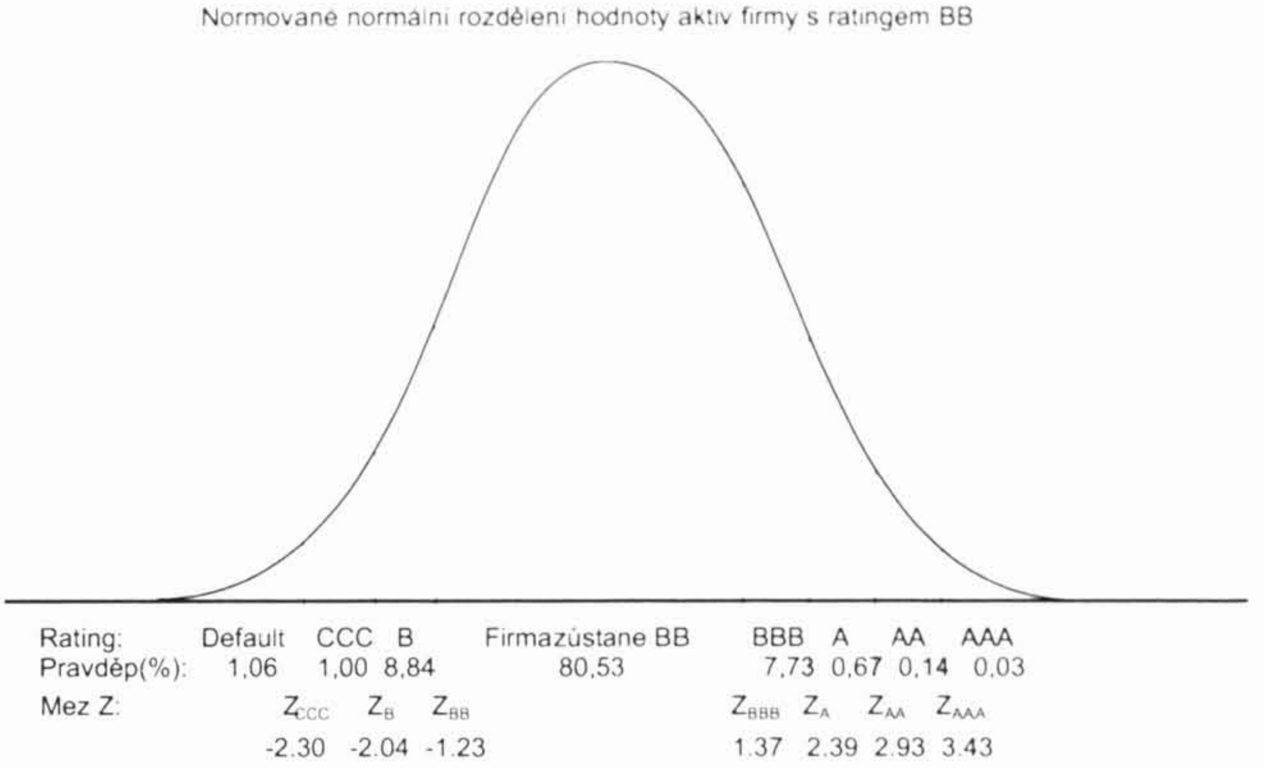
$$V_t = V_0 exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z_t\right] \tag{4.1}$$

kde $Z_t \sim N(0, 1)$, μ a σ jsou střední hodnota a směrodatná odchylka míry výnosnosti aktiv firmy $\frac{dV_t}{V_t}$. V_t je lognormálně rozdělené se střední hodnotou v čase t: $E(V_t) = V_0 e^{\mu t}$.



Obrázek 4.3: Rozdělení hodnoty aktiv firmy v době maturity dluhu a pravděpodobnost defaultu

Default v době maturity dluhu nastane, pokud hodnota aktiv firmy poklesne pod hodnotu dluhu (označme F). Obrázek 4.3 ukazuje rozdělení hodnoty aktiv firmy v době maturity dluhu a pravděpodobnost defaultu, což je vyšrafovaná plocha pod F. CreditMetrics tento model rozšiřuje zahrnutím možnosti migrace do jiných ratingových stupňů, nejen defaultu. Rozdělení hodnoty aktiv firmy na konci časového horizontu se rozdělí do pásem tak, aby daná pásma odpovídala pravděpodobnostem přechodu. Vše je znázorněno na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Zobecnění Mertonova modelu zahrnutím změn ratingu

Meze jednotlivých ratingů odpovídají pravděpodobnostem přechodu pro firmu s ratingem BB, jak jsou uvedeny v tabulce 4.1. Např. plocha pod křivkou normálního rozdělení nad mezí Z_{AAA}[36] je 0,03%. Plocha mezi mezemi Z_{BB} a Z_{BBB} odpovídá 80,53% (tj. rating firmy zůstane na konci daného časového horizontu BB). Tabulka 4.5 ukazuje pravděpodobnosti přechodu a meze ratingů Z pro firmy s ratingem BB a A.

[36]Meze Z_{xxx} jsou uvedeny jako násobky směrodatné odchylky míry výnosnosti aktiv firmy σ.

Tabulka 4.5: Pravděpodobnosti přechodu a meze ratingů pro dlužníky s ratingem BB a A

	Dlužník s ratingem A		Dlužník s ratingem BB	
Rating po 1. roku	Pravděpodobnost(%)	Mez $Z(\sigma)$	Pravděpodobnost(%)	Mez $Z(\sigma)$
AAA	0.09	3.12	0.03	3.43
AA	2.27	1.98	0.14	2.93
A	91.05	-1.51	0.67	2.39
BBB	5.52	-2.30	7.73	1.37
BB	0.74	-2.72	80.53	-1.23
B	0.26	-3.19	8.84	-2.04
CCC	0.01	-3.24	1.00	-2.30
Default	0.06		1.06	

Je poměrně jednoduché implementovat tento zobecněný Mertonův model. Předpokládá, že normalizované logaritmické výnosy během daného časového období mají normované normální rozdělení. Pokud p_{Def} značí pravděpodobnost defaultu pro firmu s ratingem BB, pak kritická hodnota aktiv firmy V_{Def} je dána vztahem:

$$p_{Def} = P[V_t \leq V_{Def}],$$

který může být transformován do hodnoty meze Z_{CCC} tak, že plocha nalevo od této meze pod křivkou rozdělení je právě p_{Def}. S přihlédnutím k rovnici (4.1) default nastane, pokud pro Z_t platí:

$$p_{Def} = P\left[Z_t \leq \frac{ln(V_{Def}/V_0) - (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}}\right] \tag{4.2}$$

$$= P\left[Z_t \leq -\frac{ln(V_0/V_{Def}) + (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}}\right] \equiv N(-d_2), \tag{4.3}$$

kde normalizovaný výnos

$$r = \frac{ln(V_t/V_0) - (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}}$$

má normované normální rozdělení. Z_{CCC} je pak mez odpovídající p_{Def}, v tomto případě $Z_{CCC} = -d_2$, kde

$$d_2 = \frac{ln(V_0/V_{Def}) + (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}}$$

a je to tzv. mez defaultu (někdy též „vzdálenost do defaultu“).

Předpokládejme nyní, že jsou známy korelace mezi výnosy aktiv dvou firem, z nichž jedna má rating A a druhá BB. Označme tuto korelaci ρ a nechť je rovna 0.20. Normalizované výnosy mají sdružené normální rozdělení:

$$f(r_{BB}, r_A; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(r_{BB}^2 - 2\rho r_{BB} r_A + r_A^2\right)\right].$$

Můžeme jednoduše vypočítat pravděpodobnost, že oba dlužníci budou mít na konci daného období stejný rating jako na začátku, tedy BB a A:

$$P\left[-1,23 < r_{BB} < 1,37; -1,51 < r_A < 1,98\right] =$$
$$= \int_{-1,23}^{1,37}\int_{-1,51}^{1,98} f(r_{BB}, r_A; \rho) dr_{BB} dr_A = 0,7365$$

Podobným způsobem lze vypočítat dalších 63 možných pravděpodobností přechodu. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 4.6.

Tabulka 4.6: Sdružené pravděpodobnosti přechodu (%) pro dlužníky s ratingem BB a A za předpokladu korelace 20%[a]

Rating firmy BB	Rating firmy A								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Def	Total
AAA	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03
AA	0,00	0,01	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14
A	0,00	0,04	0,61	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67
BBB	0,02	0,35	7,10	0,20	0,02	0,01	0,00	0,00	7,69
BB	0,07	1,79	73,65	4,24	0,56	0,18	0,01	0,04	80,53
B	0,00	0,08	7,80	0,79	0,13	0,05	0,00	0,01	8,87
CCC	0,00	0,01	0,85	0,11	0,02	0,01	0,00	0,00	1,00
Default	0,00	0,01	0,90	0,13	0,02	0,01	0,00	0,00	1,07
Total	0,09	2,29	91,06	5,48	0,75	0,26	0,01	0,06	100

[a]Zdroj: Technical Document, CreditMetrics

Protože můžeme považovat náhodnou veličinu defaultu za alternativně rozdělenou[37] (dlužník buď selže nebo ne) je korelace mezi defaulty dvou dlužníků dána vztahem[38]:

$$corr(DEF_1, DEF_2) = \frac{cov(DEF_1, DEF_2)}{\sigma_{DEF_1}\sigma_{DEF_2}} = \frac{P_{1,2} - P_1 \cdot P_2}{\sqrt{P_1(1-P_1)\cdot P_2(1-P_2)}},$$

[37]Střední hodnota alternativně rozdělené náhodné veličiny je rovna pravděpodobnosti úspěchu (zde defaultu), rozptyl pak součinu pravděpodobnosti úspěchu a neúspěchu.

[38]Přechod z korelace mezi výnosy aktiv, pomocí níž je možné vypočítat $P_{1,2}$, ke korelaci mezi defaulty snižuje korelace významně. Korelace mezi výnosy aktiv v rozmezí 40%-60% se typicky transformují do korelací mezi defaulty v rozmezí 2%-4%.

kde P_1 (resp. P_2) je pravděpodobnost defaultu prvního (resp. druhého) dlužníka a $P_{1,2}$ je sdružená pravděpodobnost defaultu obou dlužníků.

Na základě sdružených pravděpodobností přechodu a forwardových křivek se nejprve určí forwardové hodnoty daného portfolia dvou úvěrů pro všechny možné kombinace ratingu a poté také rozdělení portfolia. Nakonec se vypočte směrodatná odchylka a VaR.

Příklad 2. Uvažujme například, že dluhopis s ratingem A (označme emitenta jako Firmu 1) je tříletý s nominálem 100$ a nese kupón 5% p.a. Dluhopis BB (označme emitenta jako Firmu 2) je pětiletý s nominálem také 100$ a s kupónem 7% p.a. Pro jednoduchost uvažujme jednoletou frekvenci vyplácení kupónů. Oba dluhopisy jsou senior unsecured.

Na základě forwardových zero křivek uvedených v tabulce 4.2 vypočteme forwardové rozdělení obou dluhopisů. Souhrnné výsledky jsou uvedeny v tabulce 4.7.

Tabulka 4.7: Forwardové hodnoty dluhopisů firmy 1 a firmy 2 (kurzívou) a sdružené forwardové hodnoty

Firma 2	Firma 1							
	AAA *106,59*	AA *106,49*	A *106,30*	BBB *105,64*	BB *103,15*	B *101,39*	CCC *88,71*	Def *51,13*
AAA *113,93*	220,52	220,42	220,23	219,57	217,08	215,32	202,64	165,06
AA *113,74*	220,33	220,24	220,05	219,39	216,90	215,14	202,46	164,87
A *113,20*	219,79	219,70	219,51	218,85	216,36	214,60	201,92	164,33
BBB *112,07*	218,65	218,56	218,37	217,71	215,22	213,46	200,78	163,20
BB *106,42*	213,01	212,91	212,72	212,06	209,57	207,81	195,13	157,55
B *102,42*	209,00	208,91	208,72	208,06	205,57	203,81	191,13	153,55
CCC *87,53*	194,12	194,02	193,83	193,17	190,68	188,92	176,24	138,66
Def *51,13*	157,72	157,62	157,43	156,77	154,28	152,52	139,84	102,26

Nyní s pomocí sdružených pravděpodobností přechodu uvedených v tabulce 4.6 vypočteme střední hodnotu a směrodatnou odchylku hodnoty portfolia:

$$\begin{aligned} E(V) &= 211,98\$ \\ \sigma &= 6,49\$ \end{aligned}$$

Hodnota VaR pro toto portfolio na hladině 98,93% je[39]:

$$VaR(1rok; 98,93\%) = 157,43\$ \Longrightarrow E(V) - VaR = 54,55\$.$$

[39] Forwardové hodnoty portfolia uspořádáme sestupně. Hodnota 157,43$, které odpovídá default Firmy 2 a setrvání na ratingu A pro Firmu 1, je právě taková, u níž součet pravděpodobností přechodu překročí 1% (konkrétně je 1,07% pravděpodobnost, že hodnota portfolia klesne pod uvedenou hodnotu).

4.5 Úvěrové VaR pro portfolio o více úvěrech

Výpočet VaR pro úvěrové portfolio způsobem, jaký byl nastíněn v minulé kapitole, není v realitě možný. Tento analytický výpočet se s rostoucím počtem úvěrů neúměrně prodlužuje (pro N úvěrů by bylo např. nutné odhadnout sdruženou matici pravděpodobností přechodu, která má 8^N hodnot). Proto v realitě využívá model CreditMetrics simulační metody Monte Carlo. Pomocí této metody se generuje celkové rozdělení hodnot úvěrového portfolia v časovém horizontu, který nás zajímá (1 rok). Výpočet probíhá v následujících krocích:

1. Určení mezí hodnot výnosů aktiv pro každou ratingovou kategorii.
2. Odhad korelací mezi všemi páry dlužníků.
3. Generování scénářů hodnot výnosů aktiv na základě jejich sdruženého normálního rozdělení[40]. Každý scénář je charakterizován N výnosy aktiv, jeden pro každého z N dlužníků.
4. Pro každý scénář a každého dlužníka je hodnota výnosů aktiv „namapována" na rating podle mezí, které byly určeny v kroku 1.
5. S pomocí známých forwardových zero křivek se přecení hodnota portfolia. Pro případ defaultu je nutné vyjít ze seniority dluhu a určit s pomocí míry návratnosti hodnotu dluhu. Míry návratnosti však v čase poměrně významně kolísají. Proto se v modelu CreditMetrics modelují pomocí beta rozdělení se střední hodnotou a směrodatnou odchylkou, které jsou určeny empirickým pozorováním z historie. Příklad těchto hodnot pro dluhopisy je uveden v tabulce 4.8.
6. Tato procedura se mnohokrát zopakuje a vznikne pravděpodobnostní rozdělení budoucí hodnoty úvěrového portfolia.
7. Nakonec se určí hledaná hodnota VaR jako daný percentil z rozdělení portfolia.

Demostrujme uvedený postup na příkladu:

Příklad 3. Uvažujme[41] úvěrové portfolio tří dluhopisů, které všechny vyplácí kupóny ročně a jsou senior unsecured. První je pětiletý s ratingem BBB s nominální hodnotou 4 mil. \$ (emitenta označíme jako Firmu 1) a s kupónem 6% p.a. Druhý dluhopis

[40] Jednou z možností, jak generovat korelované veličiny s normálním rozdělením, je Choleského dekompozice.

[41] Příklad převzat z *Technical Document* CreditMetrics.

Tabulka 4.8: Míry návratnosti podle třídy seniority[a]

Třída seniority	Počet pozorování	Průměr(%)	Směrodatná odchylka(%)
Senior secured	115	53.80	26.86
Senior unsecured	278	51.13	25.45
Senior subordinated	196	38.52	23.81
Subordinated	226	32.74	20.18
Junior subordinated	9	17.09	10.90

[a]Zdroj: Technical Document, CreditMetrics

(emitenta označíme jako Firmu 2) je tříletý s ratingem A s nominálem 2 mil. $ a kupónem 5% p.a. a třetí dluhopis (emitenta označíme jako Firmu 3) je dvouletý s ratingem CCC s nominálem 1 mil. $ a kupónem 10% p.a. Pravděpodobnosti přechodu pro takto ratované dluhopisy jsou v tabulce 4.9.

Tabulka 4.9: Pravděpodobnosti přechodu(%)

Rating	Firma 1	Firma 2	Firma 3
AAA	0,02	0,09	0,22
AA	0,33	2,27	0,00
A	5,95	91,05	0,22
BBB	86,93	5,52	1,30
BB	5,30	0,74	2,38
B	1,17	0,26	11,24
CCC	0,12	0,01	64,86
Default	0,18	0,06	19,79

Těmto pravděpodobnostem odpovídají meze uvedené v tabulce 4.10.

Meze jsou označeny tak, že po překročení výnosů aktiv odpovídá rating danému indexu. Je-li například výnos aktiv větší než Z_{AAA}, je rating AAA.

Tabulka 4.10: Meze výnosů aktiv

Mez	Firma 1	Firma 2	Firma 3
Z_{AAA}	3.54	3.12	2.86
Z_{AA}	2.78	1.98	2.86
Z_{A}	1.53	-1.51	2.63
Z_{BBB}	-1.49	-2.30	2.11
Z_{BB}	-2.18	-2.72	1.74
Z_{B}	-2.75	-3.19	1.02
Z_{CCC}	-2.91	-3.24	-0.85

Abychom mohli popsat sdružené změny hodnot aktiv pro uvažované tři firmy, předpokládáme, že rozdělení výnosů aktiv je normální[42]. Korelace pro tento příklad jsou v tabulce 4.11.

Tabulka 4.11: Korelační matice

	Firma 1	Firma 2	Firma 3
Firma 1	1.0	0.3	0.1
Firma 2	0.3	1.0	0.2
Firma 3	0.1	0.2	1.0

Nyní vygenerujeme 10 scénářů pro výnos aktiv uvažovaných tří dlužníků. Je to jednoduše generování korelovaných, normálně rozdělených veličin. Výsledky generovaných hodnot spolu s příslušným mapováním na ratingové stupně jsou uvedeny v tabulce 4.12.

Přecenění portfolia probíhá stejným způsobem jako u portfolia s jedním nebo dvěma úvěry (tedy stejným způsobem jako v kapitolách 4.3 a 4.4). Pomocí forwardových zero křivek se přepočítá hodnota každého dluhopisu po jednom roce. V případě, že v daném scénáři dojde k defaultu dlužníka je hodnota tohoto defaultujícího dluhu určena pomocí míry návratnosti. Protože ty ale v čase poměrně významně kolísají, jsou modelovány pomocí beta rozdělení[43]. Toto modelování probíhá pro každý defaultující úvěr zvlášť. Předpokládá se tedy, že míra návratnosti daného dlužníka je nezávislá na hodnotě všech ostatních instrumentů v portfoliu.

[42]Předpoklad vlastně říká, že sdružené rozdělení výnosů aktiv jakékoli kombinace firem je mnohorozměrně normální.

[43]Proto je také hodnota dluhopisu Firmy 3 pro případ defaultu v tabulce 4.13 vždy jiná.

Tabulka 4.12: Scénáře výnosů aktiv a jim odpovídající ratingové stupně

	Scénář výnosů aktiv			Nový rating		
Scénář	Firma 1	Firma 2	Firma 3	Firma 1	Firma 2	Firma 3
1	-0.7769	-0.8750	-0.6874	BBB	A	CCC
2	-2.1060	-2.0646	0.2996	BB	BBB	CCC
3	-0.9276	0.0606	2.7068	BBB	A	A
4	0.6454	-0.1532	-1.1510	BBB	A	Default
5	0.4690	-0.5639	0.2832	BBB	A	CCC
6	-0.1252	-0.5570	-1.9479	BBB	A	Default
7	0.6994	1.5191	-1.6503	BBB	A	Default
8	1.1778	-0.6342	-1.7759	BBB	A	Default
9	1.8480	2.1202	1.1631	A	AA	B
10	0.0249	-0.4642	0.3533	BBB	A	CCC

Jednotlivým scénářům a namapovaným ratingovým stupňům v tomto příkladu odpovídají hodnoty uvedené v tabulce 4.13.

Tabulka 4.13: Rating dle scénářů a odpovídající hodnota dluhopisu

	Rating			Hodnota (mil. $)			
Scénář	Firma 1	Firma 2	Firma 3	Firma 1	Firma 2	Firma 3	Portfolio
1	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484
2	BB	BBB	CCC	4.081	2.063	1.056	7.200
3	BBB	A	A	4.302	2.126	1.161	7.589
4	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.657	7.085
5	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484
6	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.754	7.182
7	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.269	6.697
8	BBB	A	Default	4.302	2.126	0.151	6.579
9	A	AA	B	4.346	2.130	1.137	7.613
10	BBB	A	CCC	4.302	2.126	1.056	7.484

Chceme-li určit na základě těchto scénářů hodnotu VaR na hladině 10%[44], najdeme takovou hodnotu, pro kterou je 10% pozorování menší a 90% pozorovování větší. Pro tento příklad je taková hodnota mezi 6,579 mil.$ a 6,697 mil.$ (scénář číslo 8 a 7). S ohledem na konzervativnost výsledku je tedy VaR(10%, 1 rok) = 6,579 mil.$.

Střední hodnota portfolia je μ_p = 7,2397 mil.$ a rozptyl σ_p = 0,365 mil.$.

Pak tedy μ_p - VaR = 0,66 mil.$.

[44] VaR na hladině 5% ani 1% určit nejde, neboť je nasimulováno pouze 10 scénářů.

4.5.1 Korelace

Na závěr této teoretické části se ještě zmíníme o tom, jakým způsobem jsou v modelu CreditMetrics odhadnovány korelace mezi aktivy jednotlivých dlužníků. Pro výpočet VaR je třeba, aby byly odhadnuty korelace mezi všemi dvojicemi dlužníků. To však pro portfolio úvěrů, které obsahuje N dlužníků, znamená odhadnout $\frac{N\cdot(N-1)}{2}$ korelací. Pro portfolio o 1000 dlužnících je tedy třeba odhadnout 499500 korelací! Reálné portfolia obsahují několik tisíc dlužníků. Proto je téměř nemožné odhadovat korelace mezi všemi dlužníky zvlášť.

Jednou z možností jak tento problém obejít, je uvažovat jednu konstantní korelaci pro všechny páry dlužníků v portfoliu. Empirické výzkumy ukazují (viz [4]), že průměrné korelace aktiv v portfoliu se pohybují v rozmezí 20%-35%. Tento způsob je velmi jednoduchý, ztrácí se tím nicméně schopnost odhalit riziko vyplývající z nadměrné koncentrace např. v průmyslém odvětví.

Jinou možností je odhad korelací mezi aktivy dlužníků na základě korelací mezi rentabilitou vlastního kapitálu jednotlivých dlužníků, což je mnohdy pozorovatelná veličina. I přesto je ale někdy nedostatek dat a navíc odhad a práce s tak obrovskými korelačními maticemi je v praxi velmi složitě proveditelná.

CreditMetrics proto používá metodu založenou na korelacích mezi indexy. Použijí se průmyslové indexy v jednotlivých zemích ke konstrukci korelační matice mezi těmito průmyslovými odvětvími. Odhadne se také volatilita každého indexu. Pokud jsou indexy průmyslových odvětví v jednotlivých zemích pozorovatelné, použijí se přímo tyto indexy k odhadu korelací mezi nimi. Pokud nejsou pozorovatelné, použije pro odhad indexu průmyslového odvětví kombinace celkového indexu burzy daného státu a světového indexu daného odvětví.

Pokud jsou k dispozici informace o např. týdenních výnosech indexu k, vypočte se průměrný týdenní výnos tohoto indexu jako:

$$\overline{R}^{(k)} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t^{(k)}$$

kde T je počet pozorování a $R_t^{(k)}$ je výnos k-tého indexu v týdnu t. Volatilita týdenních výnosů je

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t^{(k)} - \overline{R}^{(k)}\right)^2}$$

Pro všechny páry indexů se vypočte kovariance týdenních výnosů

$$COV(k,l) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t^{(k)} - \overline{R}^{(k)}\right)\left(R_t^{(l)} - \overline{R}^{(l)}\right)$$

a korelace týdenních výnosů indexů

$$\rho_{k,l} = \frac{COV(k,l)}{\sigma_k \, \sigma_l}.$$

Na základě těchto korelací mezi indexy průmyslových odvětví jednotlivých zemí se vypočtou korelace mezi jednotlivými dlužníky. Výpočet se provádí v následujících krocích:

1. Určí se váhy dlužníka vzhledem k podílu dané země a odvětví (firma např. může být z 80% německá a z 20% americká, podnikající ze 70% v chemickém průmyslu a ze 30% v zemědělství, z čehož vyplývá, že firma je činná z 56% v německém chemickém průmyslu, z 24% v německém zemědělství, ze 14% v americkém chemickém průmyslu a ze 6% v americkém zemědělství) a určí se, nakolik není pohyb jeho aktiv vysvětlen relevantními indexy.
2. Vyjadří se normalizované výnosy pro každého dlužníka jako vážený součet výnosů indexů a členu specifického pro danou firmu.
3. Váhy spolu s korelacemi mezi indexy se použijí k výpočtu korelací mezi dlužníky.

Nejdříve se pro daného dlužníka (označme A a předpokládejme, že je závislý na třech indexech) vypočte volatilita pohybu relevantních indexů:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 + 2w_2w_3\rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 + 2w_1w_3\rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3}\,,$$

kde w_i jsou váhy jednotlivých indexů pro daného dlužníka, σ_i jsou volatility jednotlivých indexů a $\rho_{i,j}$ jsou korelace mezi indexy i a j.

Předpokládejme nyní, že pouze α% volatility aktiv je vysvětleno uvažovanými indexy. Váhy jednotlivých indexů se tedy musí přepočítat:

$$w_1 = \alpha\frac{w_1\sigma_1}{\hat{\sigma}}, \quad w_2 = \alpha\frac{w_2\sigma_2}{\hat{\sigma}}, \quad w_3 = \alpha\frac{w_3\sigma_3}{\hat{\sigma}}.$$

Normalizovaný výnos aktiv firmy je dán váženým součtem výnosů indexů a členu specifického pro danou firmu (o němž předpokládáme, že je nezávislý na všech indexech i na členech specifických pro ostatní firmy):

$$r = w_1r_1 + w_2r_2 + w_3r_3 + w_sr_s,$$

kde r_1, r_2, r_3 jsou výnosy uvažovaných indexů, w_1, w_2, w_3 jsou k nim příslušné váhy a r_s je výnos specifický pro firmu a w_s je pro firmu specifická váha. Protože se jedná o normalizovaný výnos, je volatilita $\sigma(r) = 1$. Z toho ovšem plyne, že váha $w_s = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

Zobecnění na více indexů je zřejmé.

Pro druhou firmu (označme B a nechť je závislá na dvou indexech) je normalizovaný výnos dán vztahem:

$$\bar{r} = \bar{w}_1 \bar{r}_1 + \bar{w}_2 \bar{r}_2 + \bar{w}_s \bar{r}_s.$$

Protože členy specifické pro firmu jsou nezávislé na ostatních, je korelace mezi oběma firmami dána vztahem:

$$\rho(A, B) = w_1 \bar{w}_1 \rho_{1,\bar{1}} + w_2 \bar{w}_1 \rho_{2,\bar{1}} + w_3 \bar{w}_1 \rho_{3,\bar{1}} + w_1 \bar{w}_2 \rho_{1,\bar{2}} + w_2 \bar{w}_2 \rho_{2,\bar{2}} + w_3 \bar{w}_2 \rho_{3,\bar{2}}.$$

kde w_i jsou váhy indexů pro firmu A, $\bar{w}_i$ jsou váhy indexů pro firmu B a $\rho_{i,\bar{j}}$ jsou korelace mezi i-tým indexem ovlivňujícím firmu A a j-tým indexem ovlivňujícím firmu B.

Uvažujme nyní obecně n různých firem s váhami na m indexech. Cílem je vypočítat korelaci aktiv mezi těmito firmami. Označme korelační matici indexů jako C (symetrická matice s rozměry $m \times m$). Protože výnos aktiv firmy je ovlivněn i členem specifickým pro firmu, rozšíříme korelační matici o tyto členy a získáme matici $\bar{C}$, která má tento tvar:

$$\bar{C} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \\ C \\ \\ \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \end{array} \right)$$

Horní levá čtvercová matice v matici $\bar{C}$ je matice C, dolní pravá matice je jednotková matice o rozměrech $n \times n$ reprezentující korelační matice členů specifických pro firmu, které jsou navzájem nezávislé (proto jsou jedničky jen na diogonále). Všude jinde jsou nuly, které reflektují, že členy specifické pro firmu jsou nezávislé i na všech indexech.

Vytvoříme také matici vah $\mathcal{W}$ o rozměrech $(m + n) \times n$, v níž každý sloupec reprezentuje danou firmu a každý řádek jeden index nebo člen specifický pro firmu.

Pro uvažované firmy A a B matice C vypadá následovně:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{1,\bar{1}} & \rho_{1,\bar{2}} & 0 & 0 \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,\bar{1}} & \rho_{2,\bar{2}} & 0 & 0 \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 & \rho_{3,\bar{1}} & \rho_{3,\bar{2}} & 0 & 0 \\ \rho_{\bar{1},1} & \rho_{\bar{1},2} & \rho_{\bar{1},3} & 1 & \rho_{\bar{1},\bar{2}} & 0 & 0 \\ \rho_{\bar{2},1} & \rho_{\bar{2},2} & \rho_{\bar{2},3} & \rho_{\bar{2},\bar{1}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice vah $\mathcal{W}$ má pak tento tvar:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ w_2 & 0 \\ w_3 & 0 \\ 0 & \bar{w}_1 \\ 0 & \bar{w}_2 \\ w_s & 0 \\ 0 & \bar{w}_s \end{pmatrix}$$

Výsledná matice $n \times n$ udávající korelace mezi všemi firmami je dána vztahem $\mathcal{W}^T \, C \, \mathcal{W}$.

Kapitola 5

Aplikace

V této části je na datech demonstrován výpočet regulatorního kapitálového požadavku pomocí IRB přístupu a výpočet ekonomického kapitálu pomocí metod popsaných v části zabývajících se modelem CreditMetrics.

Data

Pro ukázku aplikace výše probíraného IRB přístupu a modelu CreditMetrics byla použita historická data z České spořitelny, a.s. (dále jen „ČS“). Jedná se o výběr z korporátního portfolia (expozice vůči podnikům a to i malým a středním), celkem 2905 expozic. Pro výpočet kapitálového požadavku a ekonomického kapitálu byly vyňaty ty expozice, které nemají rating a pak ty, které jsou v současné době již v defaultu. K těm by totiž měly být bankou vytvořeny opravné položky, které kryjí ztrátu z defaultu. Zbylo 2826 expozic, z toho je 2339 expozic vůči malým a středním podnikům (*Small and Medium Enterprises - SME*) a 487 vůči korporátům (*General Corporate - GC*).

Dlužníci jsou z různých odvětví průmyslu, všechny expozice mají interní rating, který je namapován na ratingovou stupnici Moody's. Ke každé expozici je známa úroková sazba, za kterou byl úvěr poskytnut. Údaje o výši expozic byly normalizovány tak, aby celkový objem expozic (prostý součet rozvahových a podrozvahových částí expozic před vyloučením defaultů) byl 100 mld. Kč. Součet EAD všech expozic je tak menší, protože podrozvahové části expozic se násobí kreditním konverzním faktorem[45] a výsledné EAD je pak rovno:

$$EAD = rozvahová\ část + (podrozvahová\ část \cdot CCF).$$

Kreditní konverzní faktor byl stanoven na 75%[46], tedy $CCF = 0,75$.

[45]Kreditní konverzní faktor (*Credit Conversion Factor - CCF*) udává, jaká část v současnosti nečerpané pozice (podrozvahy) bude v případě defaultu čerpána.

[46]Hodnota stanovená ve Směrnici v rámci Základního IRB přístupu, viz Annex VII, Part 3 Směrnic.

Součet EAD pro SME expozice (po vynechání expozic v defaultu) je:

$EAD_{SME} = 25\ 430\ 637\ 394$ Kč

a součet EAD pro GC (po vynechání expozic v defaultu) je:

$EAD_{GC} = 65\ 366\ 469\ 536$ Kč.

Ke všem SME expozicím je zadána výše konsolidovaného obratu dlužníka v mil. EUR.

Sumarizované informace o údajích k expozicím jsou uvedeny v tabulce[47] 5.1.

Pravděpodobnosti defaultu a pravděpodobnosti přechodu vychází z historických pozorování Moody's mezi lety 1983-2002 a jsou rovny průměrným pravděpodobnostem přechodu příslušným danému ratingovému stupni za toto období. Všechny hodnoty jsou uvedeny v tabulce 5.2.

[47]Průmyslové odvětví z kódem č. 13 chybí, protože se jedná o privátní klienty, kteří nejsou ve zkoumaném portfoliu zahrnuti.

Tabulka 5.1: Objem expozic podle průmyslového odvětví (v závorce je uveden číselný kód daného průmyslového odvětví) a ratingu (v mil. Kč)

Průmysl	Rating														
	Aaa	A2	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa	C	D	Celkem
zemědělství a lesnictví (1)	8	0	192	319	79	323	462	389	61	51	237	10	12	8	2151
hornictví a těžební prům. (2)			32	149		14	3	32	8	41	47	4			329
výroba (3)	468	25	1138	4487	2074	2345	2486	3539	1118	2520	1314	290	731	72	22606
energetika (4)	543		29	20		23	714	10	1977	53	220	11		1	3602
stavebnictví (5)	209	411	374	508	303	852	1454	832	693	602	125	28	2	10	6404
obchod. údržba a oprava (6)	520	19	1643	1623	340	1854	3591	1859	785	647	620	162	425	105	14195
telekomunikace (7)	1438	3	1401	403	39	354	379	71	27	250	242			87	4692
pojišťovnictví a úvěrování (8)	3381	0	391	96	63	786	3819	647	205	1945	5543	144		14	17034
reality (9)	166	86	237	9621	565	533	322	1301	17	1459	10	30	29	130	14508
věřejný sektor (10)	31	186	162	589	189	188	474	125	767	4155	61			1	6927
zdravotnictví, veterinářství (11)		6	1	37		33	286				32		2		397
služby (12)	222	0	114	378	36	254	245	80	117	99	32	10	1	16	1604
ostatní (14)	14	3	1008	336	267	612	361	150	86	73	2299	2		11	5224
hotelnictví a restaurace (15)		0	65	77	13	17	75	8	2	6	20	4	41		326
Celkem	7000	740	6787	18643	3968	8188	14672	9041	5864	11900	10801	695	1243	457	100000

Tabulka 5.2: Průměrné pravděpodobnosti přechodu

	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa-C	D
Aaa	89,92	6,11	2,73	0,40	0,56	0,20	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Aa1	2,29	80,67	8,28	6,64	1,59	0,29	0,06	0,12	0,00	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Aa2	0,64	3,18	82,22	8,62	3,21	1,31	0,53	0,11	0,07	0,00	0,00	0,00	0,04	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00
Aa3	0,11	0,64	3,72	81,77	9,35	3,09	0,75	0,23	0,11	0,09	0,02	0,02	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05
A1	0,02	0,11	0,47	5,52	81,59	7,64	3,04	0,69	0,23	0,08	0,28	0,17	0,04	0,08	0,04	0,00	0,00	0,00
A2	0,05	0,05	0,34	0,79	4,94	81,53	7,40	2,78	0,89	0,44	0,32	0,08	0,15	0,10	0,08	0,00	0,03	0,03
A3	0,08	0,12	0,06	0,22	1,14	7,55	77,52	7,07	3,70	1,30	0,54	0,14	0,18	0,20	0,04	0,06	0,04	0,04
Baa1	0,05	0,05	0,15	0,20	0,25	1,99	6,79	76,58	7,70	3,33	1,06	0,53	0,23	0,61	0,05	0,10	0,13	0,20
Baa2	0,07	0,12	0,05	0,19	0,22	0,75	3,61	5,98	77,43	7,16	1,73	0,58	0,65	0,51	0,36	0,14	0,31	0,14
Baa3	0,06	0,00	0,03	0,06	0,18	0,46	0,82	2,49	8,51	74,42	6,20	2,64	1,88	0,76	0,33	0,24	0,43	0,49
Ba1	0,03	0,00	0,00	0,03	0,24	0,17	0,61	0,74	2,94	8,21	73,23	4,87	4,16	1,52	1,18	0,88	0,51	0,68
Ba2	0,00	0,00	0,04	0,04	0,04	0,21	0,12	0,37	0,78	2,09	8,53	72,15	7,50	2,50	3,24	1,03	0,74	0,62
Ba3	0,00	0,03	0,03	0,00	0,05	0,16	0,13	0,21	0,24	0,61	2,55	5,17	73,23	6,55	5,28	2,39	1,09	2,28
B1	0,02	0,00	0,02	0,00	0,07	0,12	0,10	0,07	0,26	0,19	0,48	2,46	5,64	71,66	8,57	4,35	2,79	3,20
B2	0,00	0,00	0,04	0,08	0,04	0,00	0,15	0,27	0,12	0,27	0,31	0,85	1,89	6,63	68,66	7,63	6,28	6,78
B3	0,00	0,00	0,09	0,00	0,05	0,09	0,09	0,09	0,14	0,18	0,14	0,41	0,72	3,30	4,56	68,23	10,48	11,43
Caa-C	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,06	0,26	0,00	0,58	0,71	0,97	4,40	70,44	22,52

5.1 Výpočet kapitálového požadavku IRB přístupem

Výpočet kapitálového požadavku probíhá postupem uvedeným v kap. 3.4, Foundation IRB přístupem. Rizikové faktory vstupující do výpočtu jsou tyto[48]:

- Pravděpodobnost defaultu (PD) ... určená na základě ratingu expozice podle tabulky 5.2.
- Ztráta způsobená defaultem (LGD) ... je dána Směrnicí ve výši 45%.
- Kreditní konverzní faktor (CCF) ... určen Směrnicí ve výši 75%.
- Maturita (M) ... zadána Směrnicí. Standardně se počítá s M = 2,5 roku.
- Obrat (S) ... součást informací o expozicích.
  Musí platit, že $S \in \langle 5$ mil. EUR, 50 mil. EUR$\rangle$, tzn. že pokud je zadané S menší než 5 mil. EUR, počítá se s hodnotou 5 mil. EUR a pokud je zadané S větší než 50 mil. EUR, počítá se s hodnotou 50 mil. EUR.
- „Korelace“ (R) ... vypočtena podle typu expozice na základě vzorců uvedených v kapitole 3.4.1.

Při výpočtu kapitálového požadavku se postupuje takto:

1. Pro každou expozici se na základě údajů o výši rozvahové a podrozvahové pozice spočte velikost EAD podle vztahu:
   $$EAD = \mathit{rozvahová\ část} + (\mathit{podrozvahová\ část} \cdot CCF).$$
2. Vypočte se tzv. „korelace“ R, podle vztahu uvedeného v kap. 3.4.1.
3. Vypočte se koeficient úpravy splatnosti $b(PD)$ podle vztahu uvedeného v kap. 3.4.2.
4. Vypočte se riziková váha RW podle vztahu uvedeného v kap. 3.4.3.
5. Vypočtou se rizikově vážená aktiva RWA jako součin RW a EAD, tzn.:
   $$RWA = RW \cdot EAD$$
6. Vypočte se kapitálový požadavek jako 8% z rizikově vážených aktiv, tzn.:
   $$KP = 0,08 \cdot RWA$$
7. Vypočte se očekávaná ztráta EL jako:
   $$EL = PD \cdot LGD \cdot EAD$$

[48]V případě použití Foundation IRB přístupu je LGD, CCF a M dáno Směrnicí, při použití Advanced IRB přístupu se musí tyto parametry odhadovat interně.

Ukázka výpočtu

Uvedený postup demonstrujeme na příkladu expozice vůči malému a střednímu podniku (SME), který má interní rating B2, velikost rozvahové části je 3,7 mil. Kč, podrozvahová část je nulová. Konsolidovaný obrat je 48,08 mil. EUR. Rizikové faktory vstupující do výpočtu jsou tedy:

- $PD = 6,78\%$,
- $LDG = 45\%$,
- $M = 2,5\ roku$,
- $CCF = 75\%$,
- $S = 48,08$ mil. EUR.

a výpočet probíhá následovně:

1. $EAD = 3,7$ mil. Kč $+ (0$ mil. Kč $\cdot\, 75\%) = 3,7$ mil. Kč,
2. $R = 0,12 \cdot \frac{1-e^{-50 \cdot PD}}{1-e^{-50}} + 0,24 \cdot \left(1 - \frac{1-e^{-50 \cdot PD}}{1-e^{-50}}\right) - 0,04 \cdot \left(1 - \frac{S-5}{45}\right) = 0,1223$,
3. $b(PD) = [0,11852 - 0,05478 \cdot ln(PD)]^2 = 0{,}0707$,
4. $RW = \frac{LGD}{0{,}08} \cdot \left\{N\left[\frac{G(PD)}{\sqrt{1-R}} + \sqrt{\frac{R}{1-R}}\, G(0,999)\right] - PD\right\} \cdot \frac{1+(M-2{,}5)\cdot b(PD)}{1-1{,}5\cdot b(PD)} \cdot SF = 175\%$,
5. $RWA = RW \cdot EAD = 6,5$ mil. Kč,
6. $KP = 0,08 \cdot RWA = 0,52$ mil. Kč.
7. $EL = PD \cdot LGD \cdot EAD = 0,0678 \cdot 0,45 \cdot 3,7$ mil. Kč $= 112.887$ Kč

Výsledky

Takto se vypočtou rizikově vážená aktiva a kapitálový požadavek ke všem expozicím, které obsahuje zkoumaný datový vzorek ČS. Výpočet byl prováděn v Microsoft Excel 2002 a je uložen na CD přiloženém k této práci pod názvem BASEL.XLS (v adresáři *Basel*).

Kapitálový požadavek pro subportfolio SME je:

$$KP_{SME} = 1\ 942\ 537\ 371\ Kč,$$

což je 7,64% z EAD_{SME}. To je pod 8% hranicí platnou dle Basel I. Podle Basel II je tedy kapitálový požadevek na SME portfolio menší než podle dosud platné regulace Basel I.

Kapitálový požadavek pro subportfolio GC je:

$KP_{GC} = 5\ 368\ 731\ 390\ Kč,$

což je 8,21% z EAD_{GC}. To je nad 8% hodnotou, kterou musí banky držet podle Basel I.

Celková rizikově vážená aktiva za zkoumané portfolio jsou:

$\boldsymbol{RWA_{Tot} = 91\ 390\ 859\ 517\ Kč},$

celkový kapitálový požadavek pro zkoumané portfolio je:

$\boldsymbol{KP_{Tot} = 7\ 311\ 268\ 761\ Kč},$

a celková očekávaná ztráta činí:

$\boldsymbol{EL_{Tot} = 1\ 169\ 611\ 407\ Kč}.$

5.2 Výpočet ekonomického kapitálu modelem CreditMetrics

Výpočet ekonomického kapitálu metodou VaR s pomocí modelu CreditMetrics probíhá postupem uvedeným v kap. 4.

Pro výpočet ekonomického kapitálu jsou potřebné tyto údaje:

1. Údaje o pravděpodobnostech přechodu pro všechny ratingové stupně.
2. Na základě pravděpodobností přechodu vypočtené meze Z změny hodnoty aktiv (dle kap. 4.4).
3. Hodnoty cashflow, které z daného úvěru v budoucnosti plynou.
4. Informace o forwardových zero sazbách pro dané ratingové stupně.
5. Korelace mezi pohybem aktiv pro jednotlivé dlužníky.
6. Výše míry návratnosti pro defaultující úvěry.

Nyní zrekapitulujeme, zde máme uvedené informace k dizpocici a pokud ne, vysvětlíme, jakým způsobem je získáme.

Pravděpodobnosti přechodu

K dispozici jsou údaje o pravděpodobnostech přechodu pro všechny ratingové stupně[49]. Hodnoty jsou uvedeny v tab. 5.2.

Meze změny hodnoty aktiv

Na základě postupu uvedeného v kap. 4.4 vypočteme pro každý ratingový stupeň meze pro pohyb hodnoty aktiv, po jejichž překročení dojde k přechodu mezi ratingovými stupni. Např. pro ratingový stupeň Baa3 jsou pravděpodobnosti přechodu uvedeny v tab. 5.3. V této tabulce jsou také uvedeny pravděpodobnosti přechodu zapsané pomocí distribuční funkce normálního rozdělení v hodnotách mezí, ve kterých se rating mění. Na základě těchto informací vypočítat hodnoty těchto mezí. Výsledky jsou uvedené v tab. 5.4.

Tabulka 5.3: Jednoleté pravděpodobnosti přechodu pro dlužníka s ratingem Baa3

Rating	**Pravděpodobnost z přechodové matice(%)**	**Pravděpodobnost podle modelu pohybu aktiv**
Aaa	0,06	1-$\phi(Z_{Aaa})$
Aa1	0,00	$\phi(Z_{Aaa})$ - $\phi(Z_{Aa1})$
Aa2	0,03	$\phi(Z_{Aa1})$ - $\phi(Z_{Aa2})$
Aa3	0,06	$\phi(Z_{Aa2})$ - $\phi(Z_{Aa3})$
A1	0,18	$\phi(Z_{Aa3})$ - $\phi(Z_{A1})$
A2	0,46	$\phi(Z_{A1})$ - $\phi(Z_{A2})$
A3	0,82	$\phi(Z_{A2})$ - $\phi(Z_{A3})$
Baa1	2,49	$\phi(Z_{A3})$ - $\phi(Z_{Baa1})$
Baa2	8,51	$\phi(Z_{Baa1})$ - $\phi(Z_{Baa2})$
Baa3	74,42	$\phi(Z_{Baa2})$ - $\phi(Z_{Baa3})$
Ba1	6,20	$\phi(Z_{Baa3})$ - $\phi(Z_{Ba1})$
Ba2	2,64	$\phi(Z_{Ba1})$ - $\phi(Z_{Ba2})$
Ba3	1,88	$\phi(Z_{Ba2})$ - $\phi(Z_{Ba3})$
B1	0,76	$\phi(Z_{Ba3})$ - $\phi(Z_{B1})$
B2	0,33	$\phi(Z_{B1})$ - $\phi(Z_{B2})$
B3	0,24	$\phi(Z_{B2})$ - $\phi(Z_{B3})$
Caa-C	0,43	$\phi(Z_{B3})$ - $\phi(Z_{Caa-C})$
Def	0,49	$\phi(Z_{Caa-C})$

[49]Expozice ČS v datovém vzorku, který je k dispozici, neobsahují všechny ratingy, které jsou uvedeny v tab. 5.2, ale jen ratingy *Aaa, A2, Baa1, Baa2, Baa3, Ba1, Ba2, Ba3, B1, B2, B3, Caa* a *C*.

Tabulka 5.4: Meze výnosů aktiv pro dlužníka s ratingem Baa3

Mez	Hodnota
Z_{Aaa}	3,24
Z_{Aa2}	3,12
Z_{Aa3}	2,97
Z_{A1}	2,72
Z_{A2}	2,41
Z_{A3}	2,14
Z_{Baa1}	1,74
Z_{Baa2}	1,15
Z_{Baa3}	-1,13
Z_{Ba1}	-1,49
Z_{Ba2}	-1,74
Z_{Ba3}	-2,00
Z_{B1}	-2,17
Z_{B2}	-2,27
Z_{B3}	-2,36
Z_{Caa-C}	-2,58

Pokud výnos aktiv překročí danou mez, dojde k přechodu na rating, který odpovídá danému indexu. Překročí-li tedy např. výnos aktiv pro dlužníka s ratingem Baa3 hodnotu 2,14, bude nový rating dlužníka A3. Naopak, poklesne-li pod -2,58, dojde k defaultu.

Cashflow plynoucí z úvěrů

Cashflow pro poskytnuté uvěry se určí na základě informací o úrokových sazbách, za které byly úvěry poskytnuty. Údaje o těchto úrokových mírách jsou k dispozici ze zdrojů ČS. Na základě těchto úrokových sazeb vypočteme cashflow, které z daného úvěru v budoucnosti plynou.

Předpokládejme, že úrok je fixní, úroky jsou spláceny jednou ročně a jistina je jednorázově splacena na konci doby splatnosti (předpokládejme, že jistina je rovna EAD a že ke splatnosti dojde poslední den daného roku). Pokud je tedy jistina ve výši 1 000 000 Kč, úročená 4% p.a. a zbývající splatnost je 2 roky, bude na konci prvního roku splaceno 40 000 Kč na úrocích, na konci druhého roku také 40 000 Kč na úrocích a navíc 1 000 000 Kč jistina.

Forwardové zero sazby

Protože nemáme k dispozici údaje o tržních forwardových zero sazbách, vypočteme pro všechny ratingové stupně hypotetické úrokové sazby, které by pro daný ratingový stupeň (s danou pravděpodobností defaultu) a danou maturitu (dobu do splatnosti) měly platit. Výpočet je založen na úvaze, že částka, kterou pravděpodobně díky defaultům ztratím, musí být kompenzována tím, co zaplatí ostatní klienti (ti co nezdefaultují). Tedy, že očekávaná ztráta je rovna očekávanému příjmu.

Tabulka 5.5: Forwardové zero sazby pro jednotlivé ratingy (%)

Rating	**Forwardová sazba**
Aaa	2,03000
Aa1	2,03000
Aa2	2,03000
Aa3	2,05001
A1	2,03000
A2	2,03000
A3	2,04001
Baa1	2,20020
Baa2	2,14010
Baa3	2,49120
Ba1	2,68232
Ba2	2,62193
Ba3	4,30639
B1	5,25232
B2	9,02079
B3	14,13770
Caa	27,51500
C	27,51500

Označme T dobu do defaultu. Pak je tedy pravděpodobnost defaultu rovna:

$$PD = P[T \leqq 1]$$

Předpokládejme, že úvěr je k-letý a jednorázově splatný. Označme výši úvěru X. Očekávaná ztráta je:

$$EZ = P[T \leqq k]X$$

a očekávaný příjem je:

$$\begin{aligned} EP &= i\,E\int_0^{min[T;\ k]} X dt = \\ &= i\,X\left(P[T > k]k + P[T \leqq k]\int_0^k t\frac{f(t)}{P[T \leqq k]}dt\right) \end{aligned}$$

a podle naší úvahy by se měl očekávaný příjem rovnat očekávané ztrátě. Pak je tedy:

$$i = \frac{P[T \leqq k]}{P[T > k]k + \int_0^k tf(t)dt}$$

kde i je riziková přirážka k úvěru, T je doba do defaultu, $f(t)$ je hustota rozdělení doby do defaultu a k je počet let do splatnosti úvěru.

Předpokládejme[50], že rozdělení doby do defaultu je exponenciální s parametrem λ. Pro ten pak zjevně platí, že $\lambda = -ln(1-PD)$. Hustota exponenciálního rozdělení je $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.

Na základě údajů o pravděpodobnosti defaultu a doby do splatnosti vypočteme pro každý úvěr požadovanou rizikovou přirážku i. K ní pak připočteme bezrizikovou úrokovou míru, kterou předpokládáme ve výši 2%. Pro daný úvěr pak budeme pro celou dobu do splatnosti uvažovat plochou forwardovou křivku (označme f) ve výši součtu bezrizikové úrokové míry a rizikové přirážky. Výsledné sazby jsou uvedené v tabulce 5.5.

Korelace

Údaje o úvěrech poskytnuté ČS obsahují i údaje o korelacích mezi jednotlivými průmyslovými odvětvími, ve kterých dlužníci působí. Předpokládáme, že normalizovaný výnos aktiv dlužíka je dán vztahem:

$$r = \sqrt{0,4}r_p + \sqrt{0,6}r_s,$$

kde r_p je normalizovaný výnos daného průmyslu a r_s je výnos specifický pro daného dlužíka. Tento vztah znamená, že 40% volatility aktiv dlužníka je způsobeno volatilitou výnosů daného průmyslu (neboli volatilitou průmyslového indexu) a 60% volatility je dáno volatilitou specifickou pro daného dlužníka. Platí, že volatilita $\sigma(r) = 1$.

Korelace mezi dlužníky je pak dána korelací mezi vývojem výnosů jednotlivých průmyslových odvětví. Tento předpoklad je zjednodušující, ovšem požadavek na přesnější určení korelací mezi jednotlivými dlužníky by vyžadoval mnohem více informací o dlužnících a daných úvěrech. Postup určení přesnějších odhadů korelací byl popsán v kap. 4.5.1.

Korelace mezi průmyslovými indexy je uvedena v tabulce 5.6.

[50] Je možné uvažovat i jiné rozdělení, např. rovnoměrné.

Tabulka 5.6: Korelační matice mezi průmyslovými odvětvími (%)

Průmyslové odvětví	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	100	18	0	0	7	10	6	8	0	0	0	0	0	0	0
2	18	100	0	0	0	0	0	8	0	0	100	0	0	0	12
3	0	0	100	10	20	42	36	39	38	27	9	43	50	38	32
4	0	0	10	100	0	0	0	17	0	0	2	60	0	12	19
5	7	0	20	0	100	40	24	30	19	28	23	15	11	13	19
6	10	0	42	0	40	100	57	54	57	61	49	55	51	63	61
7	6	0	36	0	24	57	100	51	53	45	43	39	11	51	50
8	8	8	39	17	30	54	51	100	42	49	41	52	59	45	54
9	0	0	38	0	19	57	53	42	100	57	36	49	46	66	63
10	0	0	27	0	28	61	45	49	57	100	33	50	70	56	66
11	0	100	9	2	23	49	43	41	36	33	100	35	16	41	58
12	0	0	43	60	15	55	39	52	49	50	35	100	37	56	69
13	0	0	50	0	11	51	11	59	46	70	16	37	100	51	49
14	0	0	38	12	13	63	51	45	66	56	41	56	51	100	71
15	0	12	32	19	19	61	50	54	63	66	58	69	49	71	100

Míra návratnosti v případě defaultu

Míra návratnosti pro defaultující úvěry se určuje z interních dat o historii vymožených částek v případě defaultu úvěru. Tyto údaje bohužel nejsou k dispozici. Proto předpokládáme, že míra návratnosti je pro všechny úvěry stejná a položíme ji rovnu průměrné míře návratnosti dle konceptu Basel II, tedy

$$\text{míra návratnosti} = 1 - LGD = 55\%.$$

5.2.1 Výpočet

K výpočtu byl použit software Mathematica 4.1, Microsoft Excel 2002 a programovací jazyk Borland Delphi 7.0. Výpočet probíhá spuštěním programu vytvořeného v Borland Delphi 7.0 (tento program je pojmenován MonteCarlo.exe). Vstupní soubory obsahující potřebná data pro výpočet jsou uloženy v souborech formátu CSV[51]. Některé předvýpočty byly prováděny v softwaru Mathematica 4.1.

[51] Textový formát obsahující text oddělený středníky.

Vstupní soubory

Vstupní soubory jsou čtyři a obsahují všechny potřebné údaje o úvěrech. Soubor EXPOZICE.CSV obsahuje po sloupcích postupně údaj o pořadovém čísle expozice, počáteční rating expozice, rok splatnosti, úrokovou míru (označme r) a výši expozice (označme EAD). Soubor PD.CSV obsahuje informace o pravděpodobnosti defaultu pro všechny uvažované ratingové stupně. Soubor RATING.CSV obsahuje informace o mezích Z pro všechny uvažované ratingové stupně a spolu s mezemi obsahuje údaje o tom, na jaký ratingový stupeň expozice po překročení dané meze přejde. Soubor FORWARD.CSV pak obsahuje vypočtené hypotetické úrokové sazby, které by pro daný rating a danou dobu do splatnosti měly platit. Tyto údaje byly předvypočítány v softwaru Mathematica 4.1. Všechny vstupní soubory jsou součástí přiloženého CD (adresář *Vstupni data*). Soubor s výpočtem ze softwaru Mathematica 4.1 je uložen pod názvem FORWARD.NB v adresáři *Mathematica* na přiloženém CD.

Simulace

Samotný výpočet probíhá tak, že po načtení uvedených souborů vytvořený program MONTECARLO.EXE nasimuluje korelovaná náhodná čísla z mnohorozměrného normálního rozdělení s korelační maticí, která je zadána. Program jako vstup používá dekompozici této korelační matice (označme tuto matici Σ). Dekompozice je provedena metodou *Singular Value Decomposition*[52]. Tato metoda dekomponuje matici Σ na matice $\mathbf{U}$, $\mathbf{D}$ a $\mathbf{V}$, kde $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou ortogonální matice (tzn. $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{V} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice) a $\mathbf{D}$ je diagonální matice. Všechny matice jsou čtvercové rozměrů $N \times N$. Pro tyto matice platí, že

$$\Sigma = \mathbf{U}\,\mathbf{D}\,\mathbf{V}^{\mathrm{T}}.$$

Poté se nageneruje vektor velikosti $N \times 1$ obsahující náhodná čísla z jednorozměrného normovaného normálního rozdělení. Tento vektor označíme ε. Položme $\mathbf{Q}{=}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{V}^{\mathbf{T}}$. Potom součin $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\varepsilon$ má mnohorozměrné normální rozdělení s korelační maticí Σ[53].

Zadaná korelační matice byla dekomponována metodou *Singular Value Decomposition* v programu Mathematica 4.1 a vytvořená matice $\mathbf{Q}$ pak byla použita jako vstup do programu MONTECARLO.EXE, který sám generuje vektor ε a násobí ho s maticí $\mathbf{Q}$. Program MONTECARLO.EXE včetně zdrojového kódu je součástí přiloženého CD (adresář *MonteCarlo*). Soubor s dekompozicí z programu Mathematica 4.1 je uložen pod názvem DEKOMPOZICE.NB v adresáři *Mathematica* na přiloženém CD.

[52]Jednoduší by bylo simulovat korelovaná náhodná čísla s využitím Choleského dekompozice. Zadaná korelační matice ale není „dostatečně“ pozitivně semidefinitní, aby Choleského dekompozice proběhla smysluplně přesně. Proto použijeme metodu *Singular Value Decomposition*.

[53]Pro podrobnější popis a vysvětlení metody viz [11].

Přepočítání hodnoty portfolia

Na základě této simulace a údajů (mezí Z) ze souboru RATING.CSV se určí nový rating expozice. Za předpokladu, že expozice nepřejde do defaultu a rok splatnosti není nejbližší následující (tedy 2005), se na základě tohoto nového ratingu vypočte nová hodnota expozice jako současná hodnota budoucích cashflow z expozice plynoucích, přičemž diskontní mírou je hypotetická forwardová sazba (f) načtená ze souboru FORWARD.CSV. Nová hodnota expozice je pak:

$$EAD^{*} = r \cdot EAD + \frac{r \cdot EAD}{(1+f)} + \frac{r \cdot EAD}{(1+f)^{2}} + \ldots + \frac{(1+r) \cdot EAD}{(1+f)^{n}},$$

kde n je počet let do splatnosti expozice.

Pokud expozice přejde do defaultu, je nová hodnota expozice rovna:

$$EAD^{*} = EAD \cdot 0,55,$$

kde 0,55 je zvolená míra návratnosti (=1-LGD).

Pokud je datum splatnosti úvěru rovno roku 2005 a expozice nepřešla do defaultu, je nová hodnota expozice vypočtena jako:

$$EAD^{*} = EAD \cdot (1+r),$$

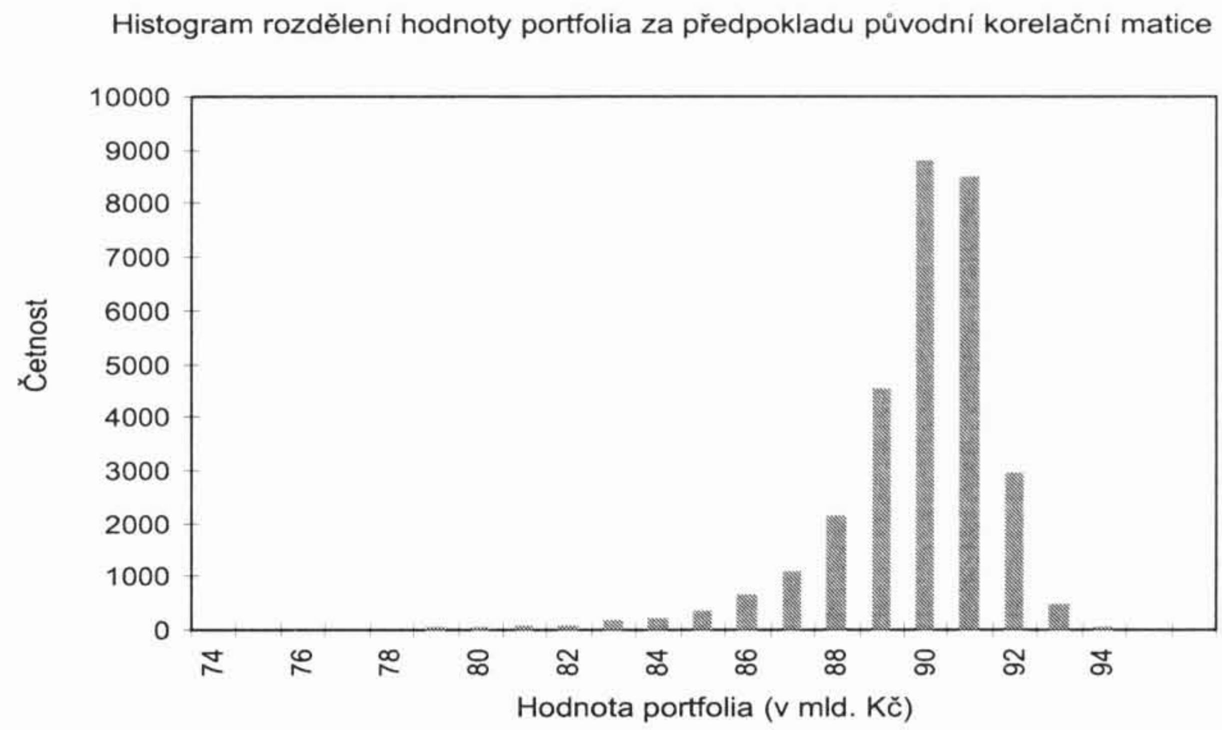
kde r je úroková sazba, za kterou byl úvěr poskytnut.

Pro každou simulaci se tedy přepočte hodnota všech expozic a jejich součtem získáme hodnotu celého portfolia. Pokud simulací provedeme dostatečné množství, získáme přehled o rozdělení hodnoty portfolia. Na základě rozdělení pak získáme hodnotu VaR jako míru rizikovosti úvěrového portfolia.

5.2.2 Výsledky

Simulace MonteCarlo byla provedena třikrát. První simulace byla provedena s korelační maticí mezi průmyslovými odvětvími jak je uvedena v tabulce 5.6. Druhá simulace byla pro porovnání provedena za předpokladu, že korelace mezi všemi průmyslovými odvětvími jsou stejné a to ve výši 5%. Třetí simulace proběhla za předpokladu, že tato korelace je 20%. Všechny simulace byly provedeny v 30.000 bězích. Výsledky simulace s původní korelační maticí jsou uloženy v souboru OUTPUT.XLS, výsledky simulací pro 5% korelační matici jsou uloženy v souboru OUTPUT5%.XLS a výsledky simulací pro 20% korelace jsou uloženy v souboru OUTPUT20%.XLS. Všechny soubory jsou uloženy v adresáři *Vysledky simulaci* na přiloženém CD. Hodnoty portfolia pro jednotlivé běhy simulace jsou v těchto souborech uloženy vzestupně od nejmenší po největší. Soubory kromě toho obsahují i list s histogramem rozdělení hodnot portfolia. Histogramy jsou také na obr. 5.1, 5.2 a 5.3.

Je zřejmé, že výsledné rozdělení je zešikmené.



Obrázek 5.1: Histogram rozdělení nasimulovaných hodnot portfolia(původní korelace)

Výsledky výpočtů za předpokladu původní korelační matice

Nejprve vypočteme hodnotu portfolia na konci prvního roku za předpokladu, že se nezmění rating žádné expozice:

$$VP = 90\ 977\ 972\ 394 \text{ Kč}$$

Výsledky[54] simulace jsou následující:

Střední hodnota rozdělení hodnoty portfolia je rovna:

$$\mu_O = 89\ 338\ 697\ 122 \text{ Kč}$$

Hodnota očekávané ztráty je tedy:

$$EL_O = VP - \mu_O = 1\ 639\ 275\ 273 \text{ Kč}$$

Výsledný 99,9% kvantil hodnoty portfolia je roven:

$$kvantil_O(99,9\%) = 78\ 002\ 357\ 700 \text{ Kč}$$

Výsledná velikost neočekávané ztráty na hladině 99,9 % je tedy:

$$UL_O(99,9\%) = \mu_O - kvantil_O(99,9\%) = 11\ 336\ 339\ 422 \text{ Kč}$$

[54] Výsledky pro originální korelační matici označujeme s indexem O.

Výsledky výpočtů za předpokladu 5% korelace mezi průmyslovými odvětvími

Předpokládejme nyní, že korelace mezi všemi průmyslovými odvětvími je stejná a to ve výši 5 %. Provedeme výpočet MonteCarlo pro tuto korelační matici.

Střední hodnota rozdělení hodnoty portfolia je rovna:

$$\mu_{5\%} = 89\ 301\ 409\ 490 \text{ Kč}$$

Hodnota očekávané ztráty je tedy:

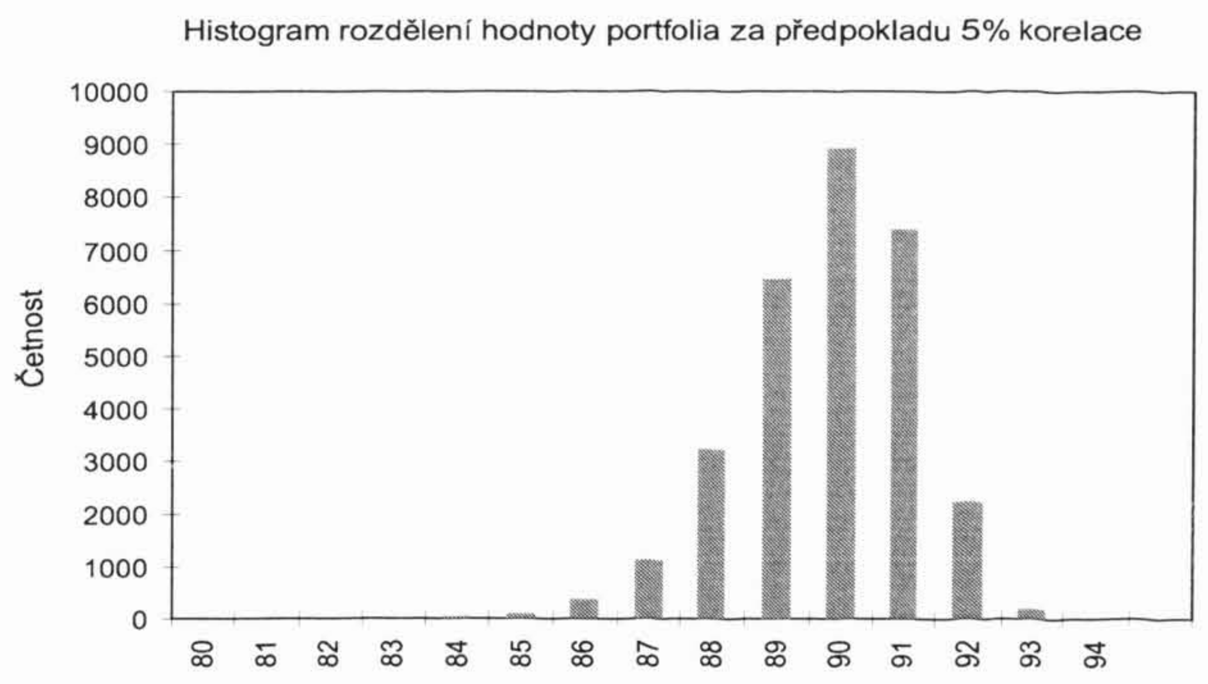
$$EL_{5\%} = VP - \mu_{5\%} = 1\ 676\ 562\ 905 \text{ Kč}$$

Výsledný 99,9% kvantil za předpokladu 5% korelace mezi výnosy jednotlivých průmyslových odvětví je roven:

$$kvantil_{5\%}(99,9\%) = 84\ 067\ 459\ 465 \text{ Kč}$$

Výsledná velikost neočekávané ztráty na hladině 99,9 % je tedy:

$$UL_{5\%}(99,9\%) = \mu_{5\%} - kvantil_{5\%}(99,9\%) = 5\ 233\ 950\ 025 \text{ Kč}$$



Obrázek 5.2: Histogram rozdělení nasimulovaných hodnot portfolia (5% korelace)

Výsledky výpočtů za předpokladu 20% korelace mezi průmyslovými odvětvími

Pokud předpokládáme, že korelace mezi výnosy jednotlivých průmyslových odvětví je 20 %, pak jsou výsledky simulací následující:

Střední hodnota rozdělení hodnoty portfolia je rovna:

$$\mu_{20\%} = 89\ 267\ 754\ 110 \text{ Kč}$$

Hodnota očekávané ztráty je tedy:

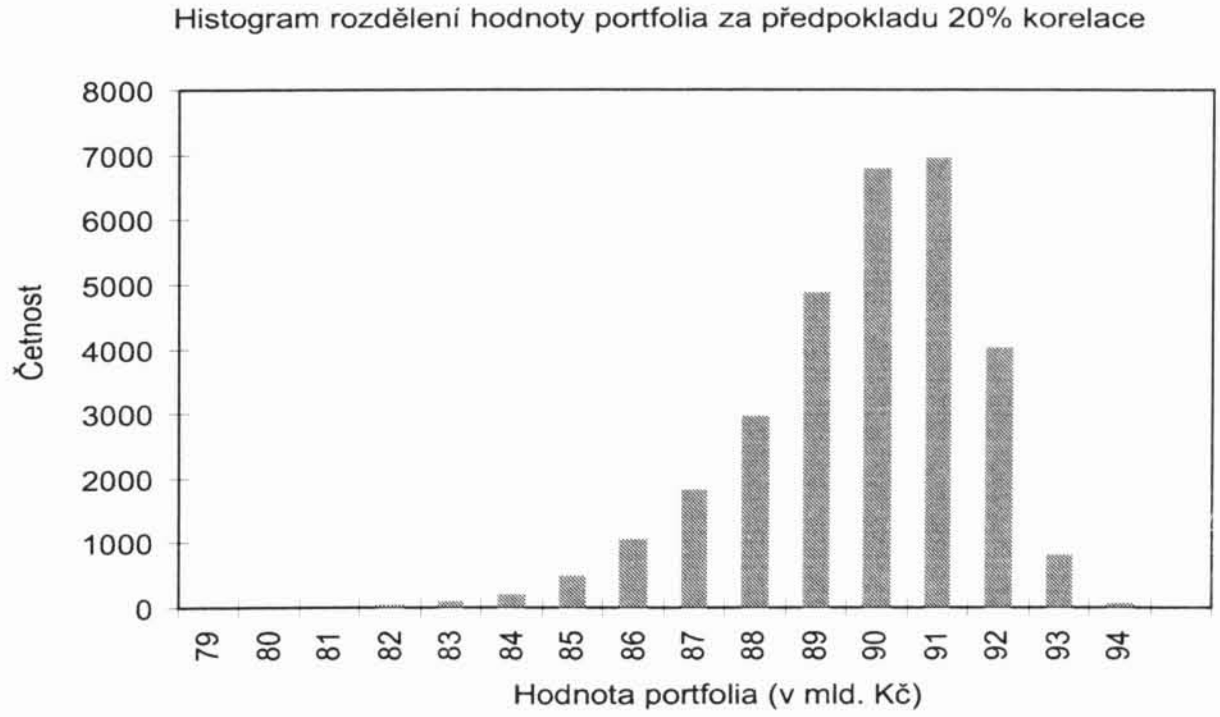
$$EL_{20\%} = VP - \mu_{20\%} = 1\ 710\ 218\ 284 \text{ Kč}$$

Výsledný 99,9% kvantil za předpokladu 20% korelace mezi výnosy jednotlivých průmyslových odvětví je roven:

$$kvantil_{20\%}(99,9\%) = 82\ 011\ 609\ 780 \text{ Kč}$$

Výsledná velikost neočekávané ztráty na hladině 99,9 % je tedy:

$$UL_{20\%}(99,9\%) = \mu_{20\%} - kvantil_{20\%}(99,9\%) = 7\ 256\ 144\ 330 \text{ Kč}$$



Obrázek 5.3: Histogram rozdělení nasimulovaných hodnot portfolia (20% korelace)

Výsledky pro všechny simulace jsou shrnuty v tabulce 5.7.

Tabulka 5.7: Výsledky simulací (v Kč)

	5% korelace	20% korelace	Původní korelace
Hodnota portfolia (VP)	90 977 972 394		
Střední hodnota (μ)	89 301 409 490	89 267 754 110	89 338 697 122
Očekávaná ztráta (EL)	1 676 562 905	1 710 218 284	1 639 275 273
Kvantil 99,9%	84 067 459 465	82 011 609 780	78 002 357 700
Neočekavaná ztráta (UL)	5 233 950 025	7 256 144 330	11 336 339 422

5.3 Komentář k výsledkům

Z výsledků je zřejmé, že střední hodnota hodnoty portfolia je stabilní a nezávisí na korelaci. Odchylky, ke kterým dochází, jsou marginální a jsou způsobeny volatilitou generovaných scénářů. Z toho také plyne, že očekávaná ztráta je stabilní a nezávislá na výši korelací mezi výnosy průmyslových odvětví, které dlužníky ovlivňují, a pohybuje se kolem 1,65 mld. Kč.

Neočekávaná ztráta (respektive 99,9% kvantil) portfolia je oproti tomu na korelaci poměrně významně závislá a se zmenšující se korelací se zmenšuje, což ovšem lze očekávat. Z toho vyplývá, že oceňovací model, který jsme zvolili, funguje v souladu s očekáváním a ekonomickou logikou.

Očekávaná ztráta z portfolia vypočtená modelem CreditMetrics je vyšší než očekávaná ztráta vypočtená na základě konceptu Basel II. Je to dáno tím, že ztráta v interním modelu je počítána jinak, než v Basel II. V modelu CreditMetrics se splátky úvěru diskontují forwardovými sazbami. Pokles do horších ratingových stupňů pak způsobuje ztráty.

Kapitálový požadavek podle Basel II se neliší příliš od kapitálového požadavku vypočteného dle Basel I. To ovšem byla snaha Basilejského výboru při kalibrování rizikových funkcí v IRB přístupu a naše výsledky ukazují, že se tato snaha podařila. Rozdíl je v tom, jak je kapitálový požadavek alokován na jednotlivé typy aktiv. Tyto funkce byly totiž kalibrovány tak, aby u lépe diverzifikovaných portfolií byl kapitálový požadavek menší než u portfolií nediverzifikovaných. Výsledky našich výpočtů ukazují, že tomu tak skutečně je. Pro SME subportfolio je kapitálový požadavek vzhledem k objemu expozic pod 8% hranicí a vzhledem k Basel I tak kapitálový požadavek poklesl. U GC subportfolia je naopak kapitálový požadavek nad 8% hranicí.

Ekonomický kapitál (daný výší neočekávané ztráty) vypočtený modelem CreditMetrics je u originální korelační matice větší než regulatorní kapitálový požadavek a to i za toho předpokladu, že hodnota aktiv firmy je pouze ze 40% závislá na kondici průmyslového odvětví, do kterého patří. Na empirických datech lze dokázat, že pokud by tato závislost byla silnější, byl by ekonomický kapitál ještě větší.

Za předpokladu, že korelace mezi všemi průmyslovými odvětvími je blízká 20%, je ekonomický kapitál srovnatelný s kapitálovým požadavkem dle Basel II. Pokud by byla korelace mezi průmyslovými odvětvími pouze 5 %, byl by ekonomický kapitál dokonce menší než kapitálový požadavek.

Kapitola 6

Závěr

V této práci byl představen jak poslední regulatorní přístup k měření velikosti úvěrového rizika (Basel II), tak jeden z interních komerčních modelů (CreditMetrics). Byla odvozena funkce rizikové váhy, která se používá v IRB přístupu Basel II, byl popsán způsob výpočtu ekonomického kapitálu modelem CreditMetrics včetně praktické realizace tohoto modelu. V rámci této realizace byl dle popsané teorie vyvinut nástroj na empirické testování a užívání modelu.

Oba prezentované přístupy byly demonstrovány na vzorku historického korporátního úvěrového portfolia České spořitelny, a.s. (viz kap. 5).

IRB přístup Basel II vychází z jednofaktorového Vašíčkova modelu, který je založen na předpokladu dobře diverzifikovaných úvěrových portfolií a není schopen zohlednit korelace mezi úvěry (granularitu portfolia). Pro různé typy úvěrů se navíc používá stejná riziková funkce. Přesto se jedná v oblasti regulatorního měření úvěrového rizika o dosud nejsofistikovanější přístup.

Kvalitativní požadavky Basel II by měly banky přimět ke zlepšení interních procesů, ke sledování svého rizikového profilu, ke kvalitnějšímu sběru informací o rizicích a o svých klientech. Kvantitativní požadavky (zejména při používání IRB přístupu) banky přimějí k vytvoření modelů na interní ohodnocení kreditní kvality dlužníků (interní rating) a na sledování historických hodnot a tím i trendů v této oblasti. Informace o ztrátách způsobených defaultem zase přinášejí informace o kvalitě zajištění a kvalitě vymáhacích procesů.

Výsledný ekonomický kapitál vypočtený modelem CreditMetrics je za předpokladu skutečné korelační matice větší než kapitálový požadavek dle Basel II. Za předpokladu stejné 20% korelace mezi všemi průmyslovými odvětvími, které dlužníky ovlivňují, je výše ekonomického kapitálu srovnatelná s kapitálovým požadavkem.

Výsledky této práce ukazují, že Basel II je kalibrován na dobře diverzifikovaná portfolia, že rizikové funkce a jejich parametry jsou nastaveny tak, aby kapitálový požadavek podle

Basel II nebyl příliš odlišný od výsledků Basel I, ale rozdíl je v alokaci kapitálu dle typu aktiv. U lépe diverzifikovaných portfolií je kapitálový požadavek menší než u portfolií nediverzifikovaných.

Z výsledků této práce vyplývá, že Basel II u reálných portfolí, které nejsou dostatečně diverzifikované[55], podhodnocuje skutečnou rizikovost a podhodnocuje potřebu kapitálu ke krytí tohoto rizika. Národní regulátor by tedy měl klást velký důraz na požadavek vůči bankám, aby interními modely prokazovaly výši skutečného rizika. Basel II jim k tomu v Pilíři 2 dává možnost[56].

Interní modely (včetně CreditMetrics) mají ovšem také svá omezení. Výsledky těchto modelů jsou závislé na vstupních parametrech, které do nich vstupují. Tyto parametry jsou dány historickými pozorováními, které ovšem nemusí odrážet dnešní riziko portfolia a už vůbec nejsou schopny předvídat budoucí vývoj. Měly by proto být doplněny zkoumáním stresových scénářů, které by simulovaly možný budoucí negativní vývoj těchto parametrů.

[55]Dostatečnou diverzifikací se rozumí to, aby v portfoliu nedocházelo ke koncentraci dlužníků, kteří patří do ekonomicky spjaté skupiny. To může být situace, kdy v portfoliu jsou dlužníci sice z více průmyslových odvětví, ale ta jsou mezi sebou vysoce pozitivně korelována.

[56]Pilíř 2 je část Basel II, která předepisuje bankám povinnost interně sledovat svůj skutečný rizikový profil.

Literatura

[1] Basel Commitee on Banking Supervision (2004): *An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions.* Bank for International Settlements.

[2] Basel Commitee on Banking Supervision (2004): *History of the Basel Committee and its Membership.* Bank for International Settlements.

[3] Basel Commitee on Banking Supervision (2004): *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards – A Revised Framework.* Bank for International Settlements.

[4] CreditMetrics (1997): *Technical Document.* J.P. Morgan, New York.

[5] Crouhy M., Galai D., Mark R. (2000): *A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models.* Journal of Banking & Finance 24, 59-117.

[6] Derviz A., Kadlčáková N. (2001): *Methodological Problems of Quantitative Credit Risk Modeling in the Czech Economy.* Working Paper No. 39, ČNB, Praha.

[7] Moody's (2003): *Default & Recovery Rates of Corporate Bond Issuers. A Statistical Review of Moody's Ratings Performance, 1920-2002.* Moody's Investors Service, New York.

[8] Ong M. K. (2005): *The Basel Handbook. A Guide for Financial Practitioners.* Risk-Books, London.

[9] Proposal for directives of the European Parliament and of the Council (2004): *Recasting Council Directive 93/6/EEC of 15 March 1993 on the capital adequacy of investment firms and credit institutions.* Commission of the European Communities, Brussels.

[10] Proposal for directives of the European Parliament and of the Council (2004): *Recasting Directive 2000/12/EC of the European Parliament and of the Council of 20 March 2000 relating to the taking up and pursuit of the business of credit institutions.* Commission of the European Communities, Brussels.

[11] RiskMetrics (1996): *RiskMetrics^{TM} – Technical Document*. Fourth Edition. J.P. Morgan, New York.

[12] Vašíček O. (1987): *Probability of Loss on Loan Portfolio*. KMV Corporation.

[13] Vašíček O. (2002): *The Distribution of Loan Portfolio Value*. KMV Corporation.

Příloha A

Value at Risk

Definice A.1. Value at Risk[57] na hladině pravděpodobnosti α a pro časový interval T je taková hodnota, která splňuje:

$$P(\textit{ztráta za období } T \leq VaR_\alpha(T)) = 1 - \alpha.$$

Pokud je tedy známo rozdělení ztráty a F je distribuční funkce tohoto rozdělení, lze psát:

$$P(\textit{ztráta za období } T \leq VaR_\alpha(T)) = F(VaR_\alpha(T)) = 1 - \alpha$$

Z toho vyplývá, že

$$VaR_\alpha(T) = F^{-1}(1 - \alpha)$$

neboli, že

$$VaR_\alpha(T) = (1 - \alpha)\textit{-kvantil rozdělení ztráty}$$

[57]Slovně lze Value at Risk definovat jako míru rizika vyjadřující maximální možnou finanční ztrátu za určité časové období, která může nastat s danou pravděpodobností

Příloha B

Členění expozic

B.1 Členění expozic při použití Standardizovaného přístupu

Expozice se člení pro různé okruhy dlužníků, druhů pohledávek a ratingu (viz Article 79 Směrnic) takto:

1. Expozice vůči vládám nebo centrálním bankám (*claims on central governments or central banks*)
2. Expozice vůči regionálním a územním samosprávám (*claims on regional governments or local authorities*)
3. Expozice vůči správním orgánům, nekomerčním podnikům a orgánům veřejného sektoru (*claims on administrative bodies and non-commercial undertakings*)[58] – řadí se sem i náboženské komunity a církve
4. Expozice vůči multilaterálním rozvojovým bankám (*claims or contingent claims on multilateral development banks*)
5. Expozice vůči mezinárodním organizacím (*claims on international organisations*)
6. Expozice vůči institucím (*claims or contingent claims on institutions*) – např. expozice vůči bankám
7. Expozice vůči korporátním (podnikovým) dlužníkům (*claims on corporates*)
8. Expozice vůči retailovým dlužníkům (*retail claims*)

[58] Tzv. Public Sector Entities – PSE

9. Pohledávky zajištěné nemovitostmi (*claims secured on real estate property*)
10. Nesplacené pohledávky (*past due items*)
11. Regulatorně rizikové pohledávky (*items belonging to regulatory high-risk categories*) – např. investice do podniků rizikového kapitálu (venture capital firms)
12. Expozice ve formě krytých dluhopisů (*claims in the form of covered bonds*)
13. Sekuritizace (*securitisation positions*) – investice do sekuritizovaných cenných papírů
14. Krátkodobé pohledávky za institucemi a korporacemi (*short-term claims on institutions and corporate*)
15. Pohledávky za podniky kolektivního investování (*claims in the form of collective investment undertakings – CIU*) – např. investice do podílových fondů
16. Ostatní položky (*other items*) – např. hmotná aktiva, platby předem apod.

B.2 Členění expozic při použití IRB přístupu

V rámci IRB je přístupu se expozice člení do následujících kategorií (viz Article 86 Směrnic):

1. Expozice vůči vládám nebo centrálním bankám (*claims on central governments or central banks*)
2. Expozice vůči institucím (*claims or contingent claims on institutions*) – např. expozice vůči bankám
3. Expozice vůči korporátním (podnikovým) dlužníkům (*claims on corporates*). V rámci této kategorie se vyčleňují expozice, které jsou určeny k financování speciálních projektů a splňující určité požadavky – tzv. Specialised Lending
4. Expozice vůči retailovým dlužníkům (*retail claims*). Rozlišují se tři druhy retailových expozic:
   (a) Expozice zajištěné nemovitostmi
   (b) Opakující se (revolvingové) retailové expozice
   (c) Ostatní
5. Akciové expozice (*equity claims*) – investice do akcií

6. Sekuritizace (*securitisation positions*) – investice do sekuritizovaných cenných papírů

7. Jiná aktiva bez kreditního závazku (*other non credit-obligation assets*)