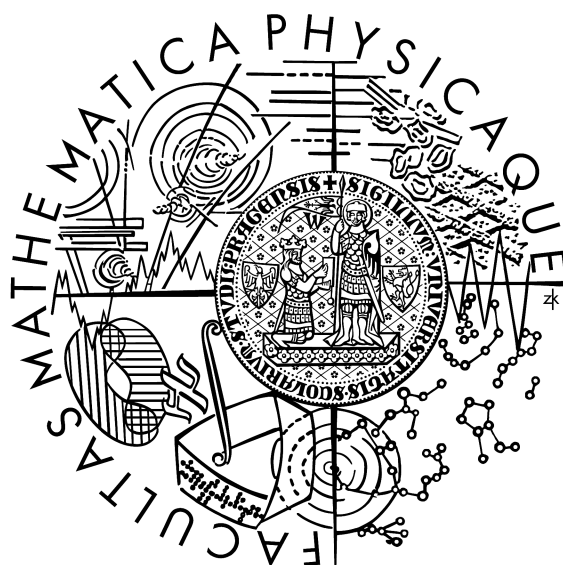


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## Diplomová práce



Hynek Bednář

### **Ensemblové experimenty s málo-dimenzionálními atmosférickými modely**

Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: meteorologie a klimatologie

2010

Rád bych poděkoval vedoucímu mé diplomové práce RNDr. Aleši Raidlovi, Ph.D. za poskytnutí informačního zázemí a za otevřený přístup při mém vedení.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 07. 08. 2010

Hynek Bednář



<b>1</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>ATMOSFÉRA</b> .....	<b>8</b>
2.1	NELINEARITA ATMOSFÉRY .....	8
2.2	POPIS ATMOSFÉRY .....	8
2.3	1-DIMENZIONÁLNÍ ATMOSFÉRICKÝ MODEL .....	10
2.4	MODEL KONVEKCE .....	11
<b>3</b>	<b>NUMERICKÉ ŘEŠENÍ</b> .....	<b>22</b>
3.1	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC .....	22
3.2	MODEL KONVEKCE .....	25
3.2.1	<i>Parametry</i> .....	25
3.2.2	<i>Spojitosť a omezenosť</i> .....	26
3.2.3	<i>Spojitosť a omezenosť 1. parciálních derivací</i> .....	27
3.2.4	<i>Stabilita metody</i> .....	28
3.3	1-DIMENZIONÁLNÍ ATMOSFÉRICKÝ MODEL .....	29
3.3.1	<i>Parametry</i> .....	30
3.3.2	<i>Spojitosť a omezenosť</i> .....	31
3.3.3	<i>Spojitosť a omezenosť 1. parciálních derivací</i> .....	32
3.3.4	<i>Stabilita metody</i> .....	32
<b>4</b>	<b>VYBRANÉ POJMY Z CHOVÁNÍ DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ</b> .....	<b>34</b>
4.1	DYNAMICKÝ SYSTÉM.....	34
4.2	FÁZOVÝ (STAVOVÝ) PROSTOR .....	34
4.3	PEVNÉ BODY .....	34
4.4	ATRAKTOR.....	34
4.5	CHAOTICKÝ ATRAKTOR .....	35
4.6	BIFURKACE.....	35
4.7	BIFURKAČNÍ DIAGRAM.....	35
4.8	KONVERGENTNÍ A DIVERGENTNÍ (CHAOTICKÝ) DYNAMICKÝ SYSTÉM .....	36
4.9	TRANZITIVNÍ, NETRANZITIVNÍ A PSEUDOTRANZITIVNÍ DYNAMICKÝ SYSTÉM.....	37
<b>5</b>	<b>METEOROLOGICKÉ MODELÝ</b> .....	<b>38</b>
5.1	STRUČNÝ ÚVOD DO METEOROLOGICKÝCH MODELŮ.....	38
5.2	LJAPUNOVY EXPONENTY .....	40
5.2.1	<i>Teoretický popis</i> .....	40
5.2.2	<i>Praktický výpočet</i> .....	43
5.3	ČASOVÝ VÝVOJ HUSTOTY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI .....	43
5.3.1	<i>Teoretický popis</i> .....	43
5.3.2	<i>Vztah řešení Liouvilleiho rovnice a Ljapunovových exponentů</i> .....	44
5.4	MODEL KONVEKCE.....	45
5.4.1	<i>Parametr (<math>r=28</math>)</i> .....	46
5.4.2	<i>parametr (<math>r=22</math>)</i> .....	55
5.5	1-DIMENZIONÁLNÍ ATMOSFÉRICKÝ MODEL .....	68
5.5.1	<i>Metoda</i> .....	68
5.5.2	<i>Parametr (<math>F=18</math>)</i> .....	69
5.5.3	<i>Parametr (<math>F = 16</math>)</i> .....	74
5.5.4	<i>Diskuze</i> .....	79
5.6	ZÁVĚR PRO METEOROLOGICKÉ MODELÝ .....	80

<b>6</b>	<b>KLIMATICKÉ MODELY .....</b>	<b>81</b>
6.1	STRUČNÝ ÚVOD DO KLIMATICKÝCH MODELŮ .....	81
6.2	TYPY PEVNÝCH BODŮ .....	83
6.2.1	<i>1-dimenzionální stavový prostor</i> .....	83
6.2.2	<i>2-dimenzionální stavový prostor</i> .....	85
6.2.3	<i>3-dimenzionální stavový prostor</i> .....	88
6.3	MODEL KONVEKCE .....	90
6.3.1	<i>Pevné body</i> .....	90
6.3.2	<i>Bifurkační diagram</i> .....	94
6.3.3	<i>Ukázky atraktorů</i> .....	97
6.4	ZÁVĚR PRO KLIMATICKÉ MODELY .....	101
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>105</b>
<b>8</b>	<b>LITERATURA .....</b>	<b>110</b>
<b>9</b>	<b>PŘÍLOHY .....</b>	<b>112</b>
9.1	RUNGE-KUTTOVA METODU 4. STUPNĚ PRO MODEL KONVEKCE .....	113
9.2	STABILITA RUNGE-KUTTOVY METODY PRO MODEL KONVEKCE .....	114
9.3	RUNGE-KUTTOVA METODU 4. STUPNĚ PRO 1-DIM. ATM. MODEL .....	116
9.4	STABILITA RUNGE-KUTTOVY METODY PRO 1-DIM. ATM. MODEL .....	117
9.5	LJAPUNOVY EXPONENTY PRO MODEL KONVEKCE .....	119
9.6	LJAPUNOVY EXPONENTY PRO 1-DIM. ATM. MODEL .....	121
9.7	POČÁTEČNÍ RŮST SMĚRODATNÉ ODCHYLKY .....	123
9.8	BIFURKAČNÍ DIAGRAM .....	124

Název práce: Ensemblové experimenty s málo-dimenzionálními atmosférickými modely

Autor: Hynek Bednář

Katedra: Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.

e-mail vedoucího: Ales.Raidl@mff.cuni.cz

#### Abstrakt

V předložené práci představíme Lorenzův 1-dimenzionální atmosférický model a Lorenzův model konvekce. Určíme numerické řešení a vhodné velikosti časového kroku. Při zobrazení a popisu využijeme metod pro dynamické systémy. Ozřejmíme důvod ensemblové předpovědi pro meteorologické modely na pojmech růst počáteční chyby a Ljapunovův exponent. Vysvětlíme pojem pevný bod a atraktor a jejich spojitost s klimatickým systémem a hodnoty vnějšího parametru ve vztahu k ensemblové předpovědi klimatu. Vše demonstrujeme na představených modelech.

Klíčová slova: model konvekce, 1-dimenzionální atmosférický model, Ljapunovův exponent, atraktor

Title: Ensemble experiments with low-dimensional atmospheric models

Author: Hynek Bednář

Department: Department of meteorology and environment protection

Supervisor: RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Ales.Raidl@mff.cuni.cz

#### Abstract

In the present work we introduce Lorenz one-dimensional atmospheric model and Lorenz convection model. We choose the numerical method and correct time step. For describing a displaying behavior we use methods for dynamical system. We explain reason for ensemble prediction with terms, initial error growth and Lyapunov exponent. We introduce stable point and attractor for explaining finite state of climatic system and external forcing for ensemble of climatic models. All we demonstrate with Lorenz models.

Keywords: convection model, one-dimensional atmospheric model, Lyapunov exponent, attractor

# 1 Úvod

Ensemblové neboli skupinové předpovědi vznikly z potřeby popsání možných scénářů časového vývoje. V této práci představíme příčiny nejednoznačnosti předpovědi jak pro meteorologické tak pro klimatické modely. Popíšeme způsoby analýzy a představíme dva málo-dimenzionální modely, na které poznatky aplikujeme.

V první kapitole popíšeme atmosféru jako systém parciálních diferenciálních rovnic a zaměříme se na důležitý prvek těchto rovnic. Dále odvodíme rovnice pro námi představené modely a ukážeme podobnost mezi nimi a atmosférou. Prvním je 1-dimenzionální atmosférický model představený E. Lorenzem v roce 2006. Druhým je model konvekce uvedený stejným autorem v roce 1963, který představoval důležitý systém v počátcích prokazování odvětví zvaného deterministický chaos.

Druhá kapitola se zaměří na potřebu numerického řešení těchto rovnic. Představíme Runge-Kuttovy metody 4. stupně a určíme všechny potřebné parametry pro oba modely a parametry, které by vedly k nepřesným a zavádějícím hodnotám. Vzhledem k tomu, že model slouží jako naše laboratoř, je určení co nejpřesnějších výsledků podstatné.

Třetí kapitola popíše dynamický systém, způsoby jeho zobrazování. Rozdělí jej do skupin podle jeho chování a naznačí, kam při časovém vývoji směřuje. Důvodem jeho představení je fakt, že i atmosféra a Lorenzovy modely spadají do definice dynamického systému, a tudíž získané poznatky jsou na ně aplikovatelné.

Čtvrtá kapitola se již zaměří na meteorologické modely. Po stručném představení přejdeme k vysvětlení Ljapunovova exponentu jako důležité hodnoty popisu systému a míry rozbíhání či přibližování dvou blízkých veličin, vyvíjejících se v čase. Tento exponent nám osvětlí důvod ensemblových předpovědí pro atmosférické modely. Ověříme též, zda pro zvolený model je splněna platnost představeného chování a dané výsledky okomentujeme.

Poslední kapitola se zabývá modely klimatu, přesněji důvody pro vytváření skupin možných scénářů klimatu. Uvedeme vnější parametry a jejich dopady na časový vývoj systému. Vyložíme analýzu konečného stavu (atraktor) v závislosti na tomto parametru a opět vše demonstrujeme na málo-dimenzionálním systému.

V závěru se pokusíme nastínit, jaké dopady představené poznatky mohou v oblasti modelování počasí a klimatu mít a podíváme se na nejnovější poznatky.

V příloze budeme prezentovat zdrojové kódy pro prostředí MAPLE.

## **2 Atmosféra**

### **2.1 Nelinearita atmosféry**

Jako ukázkou atmosférických procesů zvolme příklad vycházejícího slunce, které postupně zahřívá zemský povrch. Zahřívání povrch začne pomocí kondukce, konvekce a iradiance ohřívát vzduchovou hmotu nad sebou. Kdyby byla atmosféra dokonale suchá, čistá a v daném místě izolovaná od okolí, mohli bychom dospět k závěru, že teplota atmosféry v daném místě je úměrná množství dopadajícího slunečního záření. Zmíněné předpoklady však splněny nejsou a s nárůstem záření roste i výpar a transpirace. Vodní pára může v ochlazujícím se stoupajícím vzduchu formovat oblačnost, která společně s oblačností, kterou proudění „přiválo“ na prostor našeho zájmu, začne radiaci odrážet zpět, tudíž jí méně dosáhne zemského povrchu. Toto vede k poklesu zahřívání a může vést i k ochlazení. Zmíněnému procesu, který působí sám na sebe v negativním smyslu, se říká negativní zpětná vazba.

Pro příklad pozitivní zpětné vazby uvažujme otázku nárůstu teploty celé planety. Ten by vedl ke snížení zalednění, které má značnou odrazivost, což by mělo za následek snížení planetárního albeda a zesílení zahřívání Země (více např. [1]).

Tyto dva příklady ukazují na nelineární chování atmosféry, kdy výstup daného procesu není úměrný vstupu.

### **2.2 Popis atmosféry**

Rovnice popisující časový vývoj atmosféry jsou vyjádřeny na základě zákonů zachování. Zákon zachování hmoty je vyjádřen rovnicí kontinuity. Zákon zachování energie je vyjádřen první větou termodynamickou. Zákon zachování hybnosti je vyjádřen druhým Newtonovým fyzikálním zákonem. Dále se uplatňuje zákon zachování vody v atmosféře a zákon zachování různých příměsí v atmosféře.

Jak uvádí [2], jedná se o hyperbolický systém parciálních diferenciálních rovnic, které lze v divergentním tvaru popsat takto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.1)$$

$t$ ...čas,

$x_j$ ...prostorové souřadnice,

$u, f_j$ ...funkce.

Jako příklad uveďme x-ovou složku Newtonova pohybového zákona v horizontálním nerotujícím systému s nestlačitelnou tekutinou:

$$u = \rho v_x,$$

$$f_1 = \rho v_x^2 + p,$$

$$f_2 = \rho v_x v_y,$$

$$f_3 = 0,$$

$\rho$ ...hustota vzduchu,

$(v_x, v_y)$ ...vektor rychlosti horizontálního proudění,

$p$ ...tlak.

Kde dosazením do (2.1) dostáváme pohybovou rovnici:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

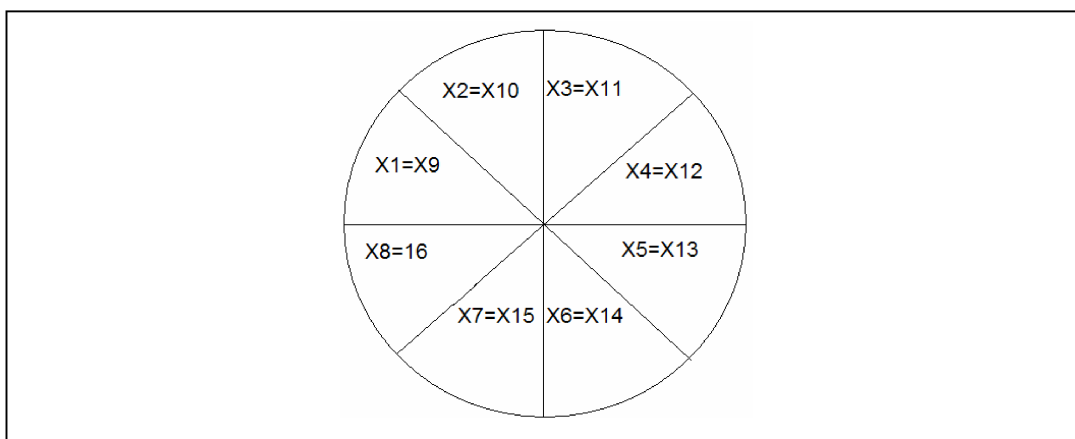
Na pravé straně rovnice (2.1) může být i funkce, takové funkci se říká parametrizace. Například pro zákon zachování energie to může být přítok nebo ztráta energie při radiačních procesech, vliv fázových procesů vody, nebo konvekce.

Parciální diferenciální rovnice se nazývá lineární, pokud neznámá funkce a všechny její derivace se v rovnici vyskytují v první mocnině. Rovnice také neobsahuje žádný součin derivace a funkce, ani žádný součin různých derivací.

Je patrné, že rovnice popisující atmosféru nejsou lineární (až na některé zjednodušené případy).

## 2.3 1-dimenzionální atmosférický model

Edward N. Lorenz představil (v článku [3]) jednoduchý 1-dimenzionální model atmosféry, kde se snaží simulovat chování atmosférické veličiny na libovolné zeměpisné šířce. Za předpokladu sférickosti Země určujeme  $n$  hodnot dané veličiny na kruhu vzniklém jako průnik Zeměkoule s rovinou v dané zeměpisné šířce (viz obr. č. 2.1).



obrázek č. 2.1: rozdělení veličiny na kruhu pro  $n = 8$

Pro časový vývoj  $n$  hodnot veličiny používáme  $n$  rovnic ve tvaru:

$$\frac{dX_k}{dt} = -X_{k-2}X_{k-1} + X_{k-1}X_{k+1} - X_k + F, \quad (2.3)$$

$X_k, X_{k-2}, X_{k-1}, X_{k+2} \dots$  atmosférická veličina  $k = 1, \dots, n$ ,

$t \dots$  čas,

$F \dots$  konstanta.

Abychom řešení rozšířili na všechny hodnoty, platí  $X_{k-n} = X_k = X_{k+n}$ .

Kvadratické členy v rovnici (2.3) mají simulovat advekci, lineární člen a konstanta simulují vnitřní disipaci a vnější síly. Smyslem diskutovaného modelu není věrné napodobování chování atmosféry, ale zkoumání časového vývoje proměnných v definovaných rovnicích, které svojí skladbou napodobují nelineárnost zákonů zachování v atmosféře.



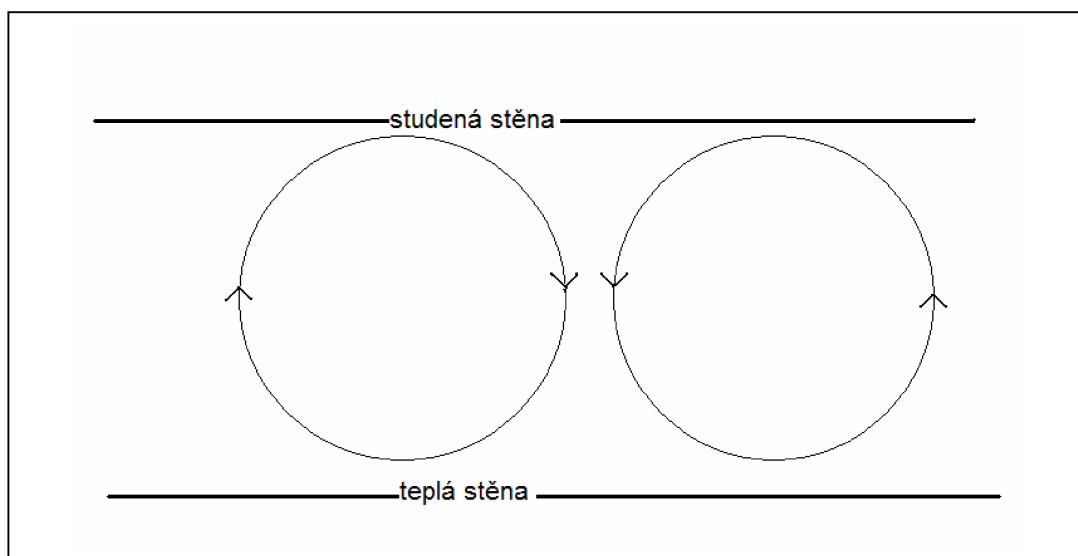
Z matematického hlediska má systém rovnic (2.3) následující vlastnosti (převzato z [6]):

- rovnice jsou autonomní, tj. pravá strana explicitně neobsahuje čas, koeficienty jsou konstantní
- obsahují pouze první časové derivace, společně s autonomií z toho vyplývá, že vývoj závisí pouze na okamžitých vlastnostech proměnných a nikoliv na jejich historii
- rovnice jsou nelineární
- systém je disipativní
- řešení soustavy rovnic je omezené v prostoru proměnných

## **2.4 Model konvekce**

Konvekce je jeden z důležitých zdrojů pohybu atmosféry. Uvažujme viskózní tekutinu mezi dvěma hranicemi v homogenním tíhovém poli, kde dolní hranice je zahřívána a vzniká tedy teplotní gradient mezi vrstvami. Chování dané tekutiny závisí na jejích fyzikálních vlastnostech, vlastnostech hranic (volná či pevná hranice) a na rozdílu teplot mezi hranicemi.

Při nastolení teplotního gradientu vzniká i gradient hustoty, kde lehčí tekutina se drží u spodního zahřátého okraje. Jedná se však o nestabilní stav, který, pokud pozorujeme pouze přenos tepla vedením, je udržován viskozitou tekutiny. Klesne-li hustota kapaliny pod určitou mez, překoná element kapaliny viskosní síly a je vytlačován Archimédovskou vztlakovou silou vzhůru. Ve vyšších hladinách je poté ochlazován a jeho hustota roste, čímž klesá zpět k dolním vrstvám. Tímto procesem vzniká konvektivní proudění, kterému se při pevných hranicích říká Rayleigh-Béřnardova konvekce (případ uspořádaného proudění ukazuje obr. č. 2.2).



obrázek č. 2.2: Rayleigh-Bérnardova buňka

Pro nás zajímavý tvar rovnic řídících konvekci odvodil v 60. letech minulého století Edwar Lorenz ([4]), který navázal na práci Saltzman ([5]). My se jej pokusíme nyní odvodit. Uvažujme Boussinesqovu aproximaci rovnic řídících atmosféru (dokonale suchou a čistou), nebo tekutinu obecně. Dle této aproximace definuje hustotu  $\rho$ :

$$\rho = \rho_0 + \rho' (x, y, z, t), \quad (2.4)$$

$$\rho' \ll \rho_0,$$

$\rho$ ...hustota tekutiny v daném bodě,

$\rho_0$ ...průměrná hustota zprůměrovaná přes celý objem,

$\rho'$ ...odchylka hustoty od průměrné hodnoty.

Pro tlak  $p$  platí obdobný vztah:

$$p = p_0(z) + p' (x, y, z, t), \quad (2.5)$$

$$p' \ll p_0,$$

$p$ ...tlak tekutiny v daném bodě,

$p_0$ ...zprůměrovaný tlak v dané horizontální rovině,

$p'$ ...odchylka tlaku od průměrné hodnoty.

Průměrný tlak  $p_0(z)$  v horizontální rovině vypočteme z rovnice hydrostatické rovnováhy:

$$\frac{\partial p_0(z)}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad (2.6)$$

$g$ ...gravitační zrychlení,  
 $z$ ...vertikální souřadnice.

Integrací (2.6) získáme:

$$p_0(z) = g\rho_0(z - H), \quad (2.7)$$

$H$ ...výška tekutiny.

Pro teplotu definujeme:

$$T = T_0(z, t) + T'(x, y, z, t), \quad (2.8)$$

$T$ ...teplota tekutiny v daném bodě,

$T_0$ ...zprůměrovaná teplota v dané horizontální rovině,

$T'$ ...odchylka teploty od průměrné hodnoty.

Pro zjednodušení uvažujme 2-dimensionální problém tj., vývoj konvekce pouze v rovině x-z. V takovémto případě nabudou řídicí rovnice v Boussinesqově aproximaci (aplikace rovnic (2.5), (2.6), (2.7) a zanedbání kvantitativně malých členů) tvar:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \nabla^2 v_x = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} - g\varepsilon T - \nu \nabla^2 v_z = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} - \kappa \nabla^2 T = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2.12)$$

$(v_x, v_z)$ ... vektor rychlosti proudění v dané rovině,

$t$ ... čas,

$x$ ... horizontální souřadnice,

$z$ ... vertikální souřadnice,

$\nu$ ... kinematická viskozita,

$P = p' / \rho_0$ ,

$g$ ... gravitační zrychlení,

$\varepsilon$ ... koeficient objemové roztažnosti,

$T$ ... teplota,

$\kappa$ ... koeficient teplotní vodivosti.

Kde pro hustotu  $\rho$  platí:

$$\rho^{-1} = \rho_0^{-1}(1 + \varepsilon T).$$

Předpokládejme nedivergentnost proudění a zavedme proudovou funkci  $\psi$ :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Určeme odchylku teploty od lineárního profilu  $\theta$  tj. od stavu bez konvekce. K tomu nejprve definujme rozdíl teplot dolní a horní hranice  $\Delta T_{HR}$ :

$$\Delta T_{HR} = T_{HR,0}(0) - T_{HR,0}(H), \quad (2.14)$$

$T_{HR,0}(0)$ ... zprůměrovaná teplota na teplejší spodní hranici,

$T_{HR,0}(H)$ ... zprůměrovaná teplota na chladnější horní hranici ve výšce  $H$ .

Poté vyjádříme průměrnou teplotu  $T_0(z,t)$  v hladině  $z$  z (2.8):

$$T_0(z,t) = [T_0(0,t) - \frac{\Delta T_{HR}}{H} z] + T_0''(z,t), \quad (2.15)$$

$T_0(0,t)$  ...průměrná teplota na spodní hranici,

$T_0''(z,t)$  ...odchylka od lineárního rozvrstvení.

Dosazením rovnice (2.15) do rovnice (2.8) získáme konečný tvar  $\theta$ :

$$\theta = T(x,z,t) - [T_0(0,t) - \frac{\Delta T_{HR}}{H} z] = T'(x,z,t) + T_0''(z,t). \quad (2.16)$$

Za předpokladu neměnnosti průměrné teploty na hranicích v čase, aplikací rovnic (2.13) a (2.16) do (2.9) až (2.12) a odečtením (2.10) od (2.9) (rovnice vorticity) získáme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi - g\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T_{HR}}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \theta = 0. \quad (2.18)$$

Kde:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\nabla^4 \psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2}.$$

$J(a,b)$  je operátor:

$$J(a,b) = \left( \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z} \right).$$

Můžeme rovnice (2.17) a (2.18) přepsat:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) - g\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\psi, \theta) - \frac{\Delta T_{HR}}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \theta = 0. \quad (2.20)$$

Přejdeme k nedimenzionálním proměnným úpravami:

$$\begin{aligned} x &= Hx^*, \\ z &= Hz^*, \\ t &= \left( \frac{H^2}{\kappa} \right) t^*, \\ \nabla^2 &= \left( \frac{1}{H^2} \right) \nabla^{*2}, \\ \psi &= \kappa \psi^*, \\ \theta &= \left( \frac{\kappa \nu}{g\varepsilon H^3} \right) \theta^*. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dosazením do rovnic (2.19) a (2.20) obdržíme tvar:

$$\nabla^{*2} \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} + J(\psi^*, \nabla^{*2} \psi^*) - \sigma \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} - \sigma \nabla^{*4} \psi^* = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + J(\psi^*, \theta^*) - R \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \nabla^{*2} \theta^* = 0, \quad (2.23)$$

Prantlovo číslo...  $\sigma = \frac{\nu}{\kappa},$

Rayleigho číslo...  $R = \frac{g\varepsilon H^3 \Delta T_{HR}}{\kappa \nu}.$

Uvažujme, že spodní a horní hranice jsou volné tj. vertikální rychlost a tečné napětí na hranicích vymizí, což vyjádříme:

$$\psi = \nabla^2 \psi = 0 \text{ pro } : z = 0, z = H .$$

$\Theta^*$  a  $\psi^*$  mohou být reprezentovány Fourierovou řadou (rovnice (2.24) a (2.25)) s koeficienty (rovnice (2.26) a (2.27)) o základních vlnových délkách  $L$  ve směru osy  $x$  a  $2H$  ve směru osy  $z$ :

$$\psi^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi Hi \left( \frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right], \quad (2.24)$$

$$\theta^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi Hi \left( \frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right], \quad (2.25)$$

$$\psi(m, n, t^*) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \psi^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[ -2\pi Hi \left( \frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] dx dz, \quad (2.26)$$

$$\theta(m, n, t^*) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \theta^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[ -2\pi Hi \left( \frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] dx dz, \quad (2.27)$$

$m$ ...vlnové číslo ve směru  $x$ ,

$n$ ...vlnové číslo ve směru  $z$ .

Posledně uvedené vztahy mohou poté reprezentovat konvekci Rayleigh-Béarnardova typu, avšak s volnými okrajovými podmínkami.

Pomocí rovnic (2.22) a (2.23) bychom poté získali řídicí rovnice pro Fourierovy koeficienty:

$$\frac{dX_i}{dt^*} = \sum_{j,k} C_{ijk} X_j X_k, \quad (2.28)$$

$$X_i, X_j, X_k \dots \psi_1(m, n), \psi_2(m, n), \theta_1(m, n), \theta_2(m, n),$$

$$\psi(m, n) = \psi_1(m, n) - i\psi_2(m, n),$$

$$\theta(m, n) = \theta_1(m, n) - i\theta_2(m, n),$$

$C_{ijk} \dots$  koeficienty.

K určení konečného počtu Fourierových koeficientů, využil Saltzman Rayleighova modelu, který vycházel z linearizovaných rovnic (2.22) a (2.23). Rayleigh zjistil, že stabilní řešení tvaru:

$$\psi^* = A \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^* \sin \pi z^*, \quad (2.29)$$

$$\theta^* = B \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^* \sin \pi z^*, \quad (2.30)$$

$A, B \dots$  konstanty.



nastane, pokud Rayleighovo číslo  $R$  přesáhne kritickou hodnotu  $R_c$ :

$$R_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2},$$

$$a = \frac{2H}{L}.$$

Nejmenší hodnota  $R_c = 27\pi^4/4$  nastane pro  $a^2 = 1/2$ , což znamená:

$$L = 2\sqrt{2}H.$$

Řešení tvaru rovnic (2.29) a (2.30), poté posloužila Saltzmanovi jako základní hodnoty při určování Fourierových koeficientů, kterých nakonec určil 52.

Lorenz ([5]) si všimnul, že pouze tři z 52 proměnných podstupovaly neuspořádané a částečně neperiodické fluktuace. Rozvoj Fourierových řad s těmito třemi koeficienty má poté tvar:

$$\psi = \frac{(1+a^2)\kappa}{a} X \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi a}{H} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H} z\right), \quad (2.31)$$

$$\theta = \frac{\Delta T}{\pi} \frac{R_c}{R} Y \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi a}{H} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H} z\right) - Z \sin\left(\frac{2\pi}{H} z\right), \quad (2.32)$$

$X, Y, Z \dots f(t)$ ,

$\Delta T = \Delta T_{HR}$ .

Pomocí vztahu (2.28) nebo dosazením (2.31) a (2.32) do rovnic (2.19) a (2.20) poté dostáváme námi hledaný tvar konvektivních rovnic:

$$\frac{dX}{d\tau} = -\sigma X + \sigma Y, \quad (2.33)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \quad (2.34)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ, \quad (2.35)$$

$$\tau = \frac{\pi^2 (1+a^2) \kappa t}{H^2} \dots \text{bezrozměrný čas,}$$

$$r = \frac{R}{R_c} \dots \text{redukované Rayleighovo číslo,}$$

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa} \dots \text{Prandtlovo číslo,}$$

$$b = \frac{4}{(1+a^2)} \dots \text{rozměr konvektivních útvarů.}$$

$X$  má význam intenzity konvektivních pohybů, nebo-li rychlost rotace pohybu částice tekutiny, kladná hodnota je ve směru hodinových ručiček.  $Y$  je teplotní rozdíl mezi stoupající a klesající tekutinou. Stejná znaménka  $X$  a  $Y$  znamenají, že teplá tekutina stoupá a studená klesá.  $Z$  představuje odchylku svislého profilu teploty od lineárního profilu, kladné hodnoty určují větší gradient u hranic.

Rovnice (2.33) až (2.35) dávají realistické výsledky pouze kolem kritického Rayleighova čísla. Pro silnou konvekci jsou již daná řešení nevhodná, díky značným zjednodušením. Z matematického hlediska má systém rovnic (2.33-2.35) následující vlastnosti (převzato z [6]):

- rovnice jsou autonomní, tj. pravá strana explicitně neobsahuje čas, koeficienty jsou konstantní
- obsahují pouze první časové derivace, společně s autonomií z toho vyplývá, že vývoj závisí pouze na okamžitých vlastnostech proměnných a nikoliv na jejich historii
- rovnice jsou nelineární
- systém je disipativní
- řešení soustavy rovnic je omezené v prostoru proměnných

### 3 Numerické řešení

#### 3.1 Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Rovnice obou uvedených modelů se dají charakterizovat jako Cauchyho úloha (s uvážením, že pravé strany explicitně neobsahují čas):

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, \dots, X_M), i = 1, \dots, M. \quad (3.1)$$

S počáteční podmínkou:

$$X_{i0} = f_i(X_{10}, \dots, X_{M0}, t_0), i = 1, \dots, M. \quad (3.2)$$

Hledáme jednoznačné řešení tvaru:

$$X_i = f_i(X_{10}, \dots, X_{M0}, t), i = 1, \dots, M. \quad (3.3)$$

Z věty o existenci řešení a z Lipschitzovy podmínky plyne, že jednoznačné řešení (3.3) problému (3.1) s počáteční podmínkou (3.2) existuje, pokud  $F_i(X_1, \dots, X_M), i = 1, \dots, M$  je spojitá a omezená na nějaké oblasti  $\Omega$  a má na této oblasti spojitě a omezeně všechny parciální derivace  $\partial F_i / \partial X_j, i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, M$ .

Vzhledem k nemožnosti analytického řešení rovnic (2.3) a (2.33-2.35) musíme přistoupit k některé z metod numerického řešení. Lorenz v [3] a ostatní autoři např. [6] volí explicitní Runge-Kuttovy metody a my se jich též přidržíme. K určení stupně metody vyjdeme z prací [7] a [8], zkoumajících chybu metody a zaokrouhlovací chybu v závislosti na stupni metody a délce časového kroku pro Lorenzův konvekční model. Na základě představených výsledků volíme Runge-Kuttovu metodu 4. stupně, která má tvar:

$$t_n = nh,$$

$$X_{i,n+1} = X_{i,n} + \frac{1}{6}(k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4}), i = 1, \dots, M, \quad (3.4)$$

$$k_{i,1} = hF_i(X_{1,n}, \dots, X_{M,n}), i = 1, \dots, M,$$

$$k_{i,2} = hF_i\left(X_{1,n} + \frac{k_{1,1}}{2}, \dots, X_{M,n} + \frac{k_{M,1}}{2}\right), i = 1, \dots, M,$$

$$k_{i,3} = hF_i\left(X_{1,n} + \frac{k_{1,2}}{2}, \dots, X_{M,n} + \frac{k_{M,2}}{2}\right), i = 1, \dots, M,$$

$$k_{i,4} = hF_i(X_{1,n} + k_{1,3}, \dots, X_{M,n} + k_{M,3}), i = 1, \dots, M,$$

$n$ ...počet časových kroků,

$h$ ...délka časového kroku,

$t_n$ ...časová hodnota.

Metoda (3.4) má diskretizační chybu  $O(h^5)$ , tedy pro krok  $h=0,1$  je chyba řádu  $10^{-5}$  (podrobněji viz [7]).

Prozkoumejme nyní stabilitu metody (3.4) (více v [9]). K tomu převedeme zkoumané modely (2.3) a (2.33-2.34) na lineární problém:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{X},$$

$\vec{X}$  ...vektor proměnných,

$\vec{J}$  ...Jacobiho matice v bodě počátečních podmínek.

Numerická metoda poté bude mít tvar:

$$\vec{X}_{n+1} = R(h\vec{J})\vec{X}_n,$$

$R(h\vec{J})$ ...stabilitní funkce.

Aby metoda byla stabilní, musí být  $|R(h\lambda_i)| \leq 1$  pro všechna vlastní čísla  $\lambda_i$  dané Jacobiho matice. Odvodíme  $R(h\lambda_i)$  pro Runge-Kuttovu metodu 4. stupně:

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n + h\vec{J} \left( \frac{1}{6}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2 + \frac{1}{3}Y_3 + \frac{1}{6}Y_4 \right), \quad (3.5)$$

$$Y_1 = \vec{X}_n, \quad (3.6)$$

$$Y_2 = \vec{X}_n + \frac{1}{2}h\vec{J}Y_1 = \left( 1 + \frac{1}{2}h\vec{J} \right) \vec{X}_n, \quad (3.7)$$

$$Y_3 = \vec{X}_n + \frac{1}{2}h\vec{J}Y_2 = \left( 1 + \frac{1}{2}h\vec{J} + \frac{1}{4}(h\vec{J})^2 \right) \vec{X}_n, \quad (3.8)$$

$$Y_4 = \vec{X}_n + h\vec{J}Y_3 = \left( 1 + h\vec{J} + \frac{1}{2}(h\vec{J})^2 + \frac{1}{4}(h\vec{J})^3 \right) \vec{X}_n. \quad (3.9)$$

Dosazením (3.6-3.9) do (3.5) dostáváme:

$$\vec{X}_{n+1} = \left( h\vec{J} + \frac{1}{2}(h\vec{J})^2 + \frac{1}{6}(h\vec{J})^3 + \frac{1}{24}(h\vec{J})^4 \right) \vec{X}_n. \quad (3.10)$$

S uvážením vztahu mezi vlastním číslem, maticí a vlastním vektorem dostáváme stabilitní funkci  $R(h\lambda_i)$  ve tvaru:

$$R(h\lambda_i) = \left( h\lambda_i + \frac{1}{2}(h\lambda_i)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda_i)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda_i)^4 \right). \quad (3.11)$$

## 3.2 Model konvekce

Pro model konvekce jsme v druhé kapitole definovali řídicí rovnice ve tvaru:

$$\frac{dX}{d\tau} = -\sigma X + \sigma Y, \quad (2.40)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \quad (2.41)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ, \quad (2.42)$$

$$\tau = \frac{\pi^2 (1+a^2) \kappa t}{H^2} \dots \text{bezrozměrný čas,}$$

$$r = \frac{R}{R_c} \dots \text{redukované Rayleighovo číslo,}$$

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa} \dots \text{Prandtlovo číslo,}$$

$$b = \frac{4}{(1+a^2)} \dots \text{rozměr konvektivních útvarů.}$$

### 3.2.1 Parametry

Parametr  $b = \frac{4}{(1+a^2)}$  vypočteme z hodnoty  $a^2 = 1/2$ , která je určena z nejmenší kritické hodnoty Rayleighova čísla  $R_c$  (viz kapitola 2.4 Rayleighův model). Získáme:

$$b = \frac{8}{3}.$$

Při určení Prandtlova čísla  $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$  se přidržíme [4] s hodnotou:

$$\sigma = 10,$$

což je hodnota pro chladnou vodu.

Redukované Rayleighovo číslo  $r$  budeme vyčíslovat s různými hodnotami, a proto tento parametr určíme jako proměnný řídicí parametr.

Rovnice (2.33) až (2.35) poté nabudou tvaru (kód viz přílohy kapitola 9.1):

$$\frac{dX}{d\tau} = -10.X + 10.Y, \quad (3.12)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \quad (3.13)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - \frac{8}{3}Z. \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Spojitost a omezenost

Pravé strany rovnic (3.12) až (3.14) mají tvar:

$$F_1 = -10.X + 10.Y, \quad (3.15)$$

$$F_2 = -XZ + rX - Y, \quad (3.16)$$

$$F_3 = XY - \frac{8}{3}Z. \quad (3.17)$$

Definujme oblast  $\Omega$  :

$$\Omega = \{(X, Y, Z) \in (-100; 100) \times (-100; 100) \times (-100; 100)\}.$$

$F_1$ ,  $F_2$  a  $F_3$  jsou spojité a omezené na  $\Omega$  pro  $r$  nabývající reálných fyzikálních hodnot.



### 3.2.3 Spojitost a omezenost 1. parciálních derivací

Určeme parciální derivace rovnic (3.15 – 3.16):

$$F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial X} = -10,$$

$$F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial Y} = 10,$$

$$F_{13} = \frac{\partial F_1}{\partial Z} = 0,$$

$$F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial X} = -Z + r,$$

$$F_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial Y} = -1,$$

$$F_{23} = \frac{\partial F_2}{\partial Z} = -X,$$

$$F_{31} = \frac{\partial F_3}{\partial X} = Y,$$

$$F_{32} = \frac{\partial F_3}{\partial Y} = X,$$

$$F_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial Z} = -\frac{8}{3}.$$

Je patrné, že  $F_{11}, \dots, F_{33}$  jsou spojité a omezené na  $\Omega$  pro  $r$  nabývající reálných fyzikálních hodnot, a proto existuje jednoznačné řešení rovnic (3.12 – 3.14) na  $\Omega$ .

### 3.2.4 Stabilita metody

V kapitole 3.1 jsme určili, že metoda je stabilní, pokud  $|R(h\lambda_i)| \leq 1$  pro všechny vlastní čísla  $\lambda_i$  dané Jacobiho matice v bodě počátečních podmínek. Pro námi zvolenou Runge-Kuttovu metodu 4. stupně má stabilitní funkce  $R(h\lambda_i)$  tvar (3.11). Ověřovat budeme pro  $h = 0,005$ ,  $h = 0,001$  a  $h = 0,01$ . Pomocí numerického řešení (kód viz přílohy kapitola 9.2) vybereme největší hodnoty  $|R(h\lambda_i)|$  pro  $\lambda_i(X_0, Y_0, Z_0, r)$ ,  $i=1, \dots, 3$  systému (3.12 – 3.14) jako funkce počátečních podmínek  $(X_0, Y_0, Z_0) \in \Omega$  a parametru  $r \in (0, 500)$ .

Výsledné hodnoty  $|R_{\max}(0, 01, \lambda_i)|$  jsou:

$$|R_{\max}(0, 01, \lambda_1)| = 0,9 < 1,$$

$$|R_{\max}(0, 01, \lambda_2)| = 1,01 > 1,$$

$$|R_{\max}(0, 01, \lambda_3)| = 1,01 > 1.$$

Pro  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  je  $|R(h\lambda_i)| > 1$  a metoda s krokem  $h = 0,01$  není stabilní. Můžeme hledat stabilní podmnožinu  $(X_0, Y_0, Z_0) \in \Omega$ ,  $r \in (0, 500)$ , my však tento krok  $h$  zamítáme a nebudeme ho při numerické integraci používat.

$|R_{\max}(0, 005, \lambda_i)|$ :

$$|R_{\max}(0, 005, \lambda_1)| = 0,4 < 1,$$

$$|R_{\max}(0, 005, \lambda_2)| = 0,5 < 1,$$

$$|R_{\max}(0, 005, \lambda_3)| = 0,5 < 1.$$

Při  $h = 0,005$  je metoda stabilní.

$$\left| R_{\max}(0,001.\lambda_i) \right|:$$

$$\left| R_{\max}(0,001.\lambda_1) \right| = 0,08 < 1,$$

$$\left| R_{\max}(0,001.\lambda_2) \right| = 0,1 < 1,$$

$$\left| R_{\max}(0,001.\lambda_3) \right| = 0,1 < 1.$$

Pro  $h = 0,001$  je metoda stabilní.

### **3.3 1-dimenzionální atmosférický model**

V kapitole 2.3 jsme definovali pro tento model  $n$  rovnic ve tvaru:

$$\frac{dX_k}{dt} = -X_{k-2}X_{k-1} + X_{k-1}X_{k+1} - X_k + F, \quad (2.3)$$

$X_k, X_{k-2}, X_{k-1}, X_{k+2} \dots$  atmosférická veličina (teplota)  $k = 1, \dots, n$ ,

$t \dots$  čas,

$F \dots$  konstanta.

Abychom řešení rozšířili na všechny hodnoty, platí  $X_{k-n} = X_k = X_{k+n}$ .

### 3.3.1 Parametry

Volba parametru a počtu proměnných a rovnic je podřízena snaze přiblížit se co nejvíce době pro zdvojení chyby určené počátečními podmínkami pro globální cirkulační modely. Využijeme opět práce [3], kde byly určeny tyto hodnoty:

$$F = 18,$$

$$n = 4,$$

*jednotka  $t = 5$  dní.*

Dále též využijeme hodnot:

$$F = 16,$$

$$n = 4,$$

*jednotka  $t = 5$  dní.*

Ověření provedeme pouze pro  $F = 18$ , za předpokladu, že Jacobiho matice neobsahuje parametr  $F$ .

Rovnice (2.3) tedy poté nabude tvaru (kód viz příloha kapitola 9.3):

$$\frac{dX_1}{dt} = -X_3X_4 + X_4X_2 - X_1 + 18,$$

$$\frac{dX_2}{dt} = -X_4X_1 + X_1X_3 - X_2 + 18, \quad (3.18)$$

$$\frac{dX_3}{dt} = -X_1X_2 + X_2X_4 - X_3 + 18,$$

$$\frac{dX_4}{dt} = -X_2X_3 + X_3X_1 - X_4 + 18.$$

### 3.3.2 Spojitost a omezenost

Pravé strany rovnic (3.18) mají tvar:

$$F_1 = -X_3X_4 + X_4X_2 - X_1 + 18,$$

$$F_2 = -X_4X_1 + X_1X_3 - X_2 + 18,$$

$$F_3 = -X_1X_2 + X_2X_4 - X_3 + 18,$$

$$F_4 = -X_2X_3 + X_3X_1 - X_4 + 18.$$

Definujme oblast  $\Omega$  :

$$\Omega = \{(X_1, X_2, X_3, X_4) \in (-100;100) \times \dots \times (-100;100)\}.$$

$F_1$  až  $F_4$  jsou spojité a omezené na  $\Omega$ .

### 3.3.3 Spojitost a omezenost 1. parciálních derivací

Určeme Jacobiho matici pro systém (3.18)

$$J = \begin{pmatrix} -1 & X_4 & -X_4 & -X_3 + X_2 \\ -X_4 + X_3 & -1 & X_1 & -X_1 \\ -X_2 & -X_1 + X_4 & -1 & X_2 \\ X_3 & -X_3 & -X_1 + X_2 & -1 \end{pmatrix}$$

Z této Jacobiho matice je patrné, že rovnice 3.18 mají spojitě a omezeně první parciální derivace na  $\Omega$ , a proto existuje jednoznačné řešení rovnic (3.12 – 3.14) na  $\Omega$ .

### 3.3.4 Stabilita metody

V kapitole 3.1 jsme určili, že metoda je stabilní, pokud  $|R(h\lambda_i)| \leq 1$  pro všechny vlastní čísla  $\lambda_i$  dané Jacobiho matice v bodě počátečních podmínek. Pro námi zvolenou Runge-Kuttovu metodu 4. stupně má stabilitní funkce  $R(h\lambda_i)$  tvar (3.11). Ověřovat budeme pro  $h = 0,005$  a  $h = 0,01$ . Pomocí numerického řešení (kód viz přílohy kapitola 9.4) vybereme největší hodnoty  $|R(h\lambda_i)|$  pro  $\lambda_i(X_{1,0}, \dots, X_{4,0})$ ,  $i = 1, \dots, 4$  systému (3.18), jako funkce počátečních podmínek  $(X_{1,0}, \dots, X_{4,0}) \in \{(-30; 30) \times \dots \times (-30; 30)\}$  a obou parametrů  $F$ . Vzhledem k tvaru matice  $J$  předpokládáme shodný tvar vlastních čísel  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  a proto ukážeme pouze jednu hodnotu;  $|R_{\max}(0,005.\lambda)|$ :

$$|R_{\max}(0,005.\lambda)| = 0,6 < 1.$$

Pro krok  $h = 0,005$  je metoda stabilní.

$$|R_{\max}(0,01.\lambda_i)|:$$

$$|R_{\max}(0,01.\lambda)| = 1,5 > 1$$

$|R(h\lambda_i)| > 1$  a metoda s krokem  $h = 0,01$  není stabilní. Tento krok zamítáme.

.

## 4 Vybrané pojmy z chování dynamických systémů<sup>1</sup>

### 4.1 Dynamický systém

Dynamický systém je cokoli, co se v čase vyvíjí a jeho stav je jednoznačně určen počátečními podmínkami. Proto je patrné, že do této kategorie můžeme zařadit i atmosféru.

### 4.2 Fázový (stavový) prostor

K popisu daného systému se s úspěchem využívá fázový prostor. Fázový (stavový) prostor je abstraktní matematický prostor, ve kterém souřadnice reprezentují proměnné potřebné k jednoznačnému popisu fáze nebo stavu daného dynamického systému. Tento prostor obsahuje všechny možné stavy daného systému.

### 4.3 Pevné body

Mějme dynamický systém popsáný rovnicí 4.1 Pevný bod  $X_p$  je poté určen řešením 4.2.

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = f(\vec{X}), \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{d\vec{X}}{dt} \right|_{\vec{X}_p} = 0. \quad (4.2)$$

Pokud je ve stavovém prostoru trajektorie k  $X_p$  přitahována pro  $t \rightarrow \infty$  jedná se o atraktor. Pokud je  $X_p$  nestabilní, je trajektorie odpuzována a hovoříme o repeloru.

### 4.4 Atraktor

Nejjednodušším případem atraktoru je pevný bod či uzel. Systém k němu směřuje přímo, nebo po spirále. Dále může po ustálení oscilovat mezi několika stavy.

---

<sup>1</sup> převzato z [10]



Pokud osciluje s jednou periodou, jedná se o limitní cyklus, pokud se dvěma, jde o pohyb na povrchu toru. Pro nás nejzajímavější je tzv. chaotický atraktor.

#### 4.5 Chaotický atraktor

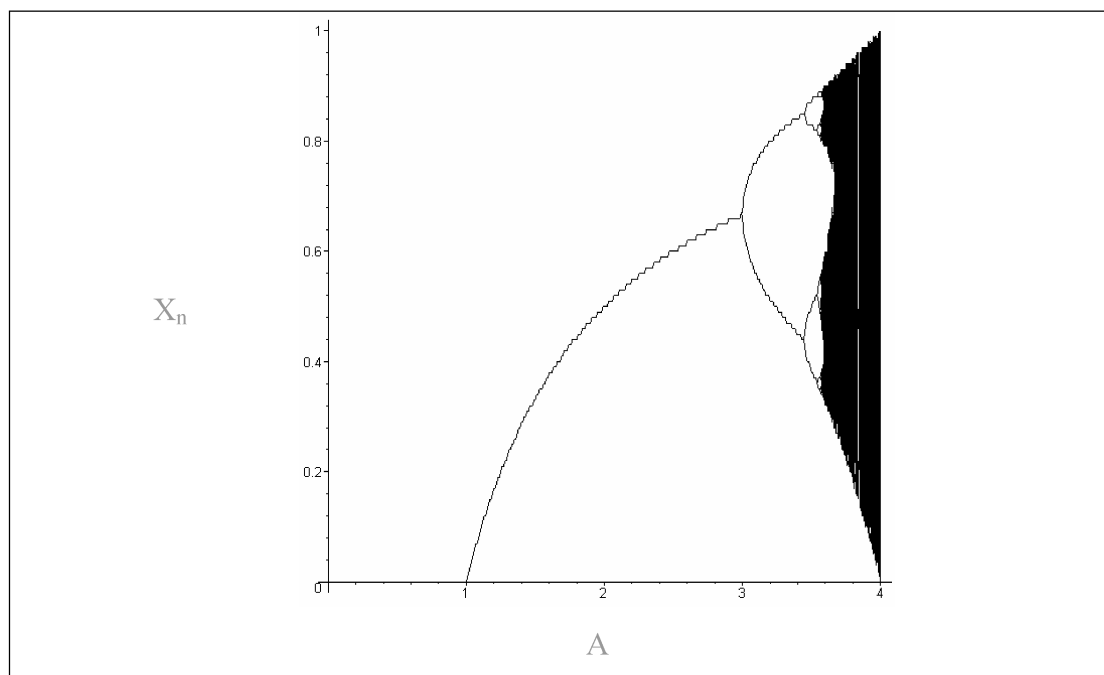
Tento atraktor je tvořen spojitou křivkou v prostoru. Protože chování na chaotickém atraktoru je asymptotický proces, při kterém se trajektorie neprotíná, můžeme říci, že chaotický atraktor má konečnou délku. Je určen neuspořádaně vypadajícím dlouhotrvajícím časovým vývojem, který splňuje jistá matematická kritéria a nastává v deterministickém nelineárním systému (deterministický chaos).

#### 4.6 Bifurkace

Charakter limitního chování může záviset na hodnotách řídicích parametrů. Při jejich změně dochází při určitých kritických hodnotách těchto parametrů k náhlé, kvalitativní změně v typu atraktoru a druhu pohybu.

#### 4.7 Bifurkační diagram

Pro ukázkou zvolme evoluční zobrazení  $x_{n+1} = A \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$  s řídicím parametrem  $A$ .



obrázek č. 4.1: bifurkační diagram pro evoluční zobrazení

Bifurkační diagram (obr. č. 4.1) ukazuje, při jaké hodnotě parametru nastane změna typu atraktoru, a též ukazuje hodnoty tohoto atraktoru. Z obr. č. 4.1 vidíme, že do hodnoty parametru  $A=3$  jde o bodový atraktor s různou hodnotou  $X_n$ . Pro parametr mezi 3 a 3,57 nastává zdvojování periody, čili bifurkace, od hodnot přibližně 3,57 poté nastává chování chaotické. Při detailnějším prozkoumání bifurkačního diagramu se ukazuje, že i pro hodnoty parametru větších než 4 může na nějaký čas nastat pravidelné chování.

#### **4.8 Konvergentní a divergentní (chaotický) dynamický systém**

Podívejme se na vývoj dvou blízkých trajektorií v 1-dimenzionálním stavovém prostoru. Mějme opět dynamický systém popsáný:

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad (4.3)$$

s počáteční podmínkou  $X_0$ . Taylorův rozvoj v blízkosti počátečního bodu  $X_0$  má tvar:

$$f(X) = f(X_0) + (X - X_0) \frac{df(X)}{dX} \Big|_{X_0} + \dots \quad (4.4)$$

Členy s vyšší derivací zanedbáme a uděláme substituci:

$$x = (X - X_0). \quad (4.5)$$

Přepíšeme rovnici (4.4) na tvar:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{df(X)}{dX} \Big|_{X_0} x. \quad (4.6)$$

Označíme-li nyní pod názvem lokální Lyapunovův exponent:

$$\lambda = \frac{df(X)}{dX} \Big|_{X_0}. \quad (4.7)$$

dostaneme řešení rovnice (4.6):

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t}, \quad (4.8)$$

$x(t)$  ... vzdálenost dvou trajektorií v 1-dimenzionálním stavovém prostoru,

$x(0)$  ... vzdálenost dvou křivek v počátečním čase.

Tento exponenciální vývoj lze rozšířit na  $n$ -dimenzionální stavový prostor:

$$\Delta d(t) = \Delta d_0 e^{\lambda t}, \quad (4.9)$$

$\Delta d(t)$  ... vzdálenost dvou trajektorií ve stavovém prostoru v čase  $t$ ,

$\Delta d_0$  ... vzdálenost dvou trajektorií v počátečním čase,

$t$  ... čas,

$\lambda$  ... největší Ljapunovův exponent.

Ze vztahu (4.8) popř. (4.9) je patrné, že pokud  $\lambda < 0$ , tak dva blízké stavy se stávají při vývoji bližšími a hovoříme o konvergentním dynamickém systému. Naopak divergentní (chaotický) dynamický systém nastává pro  $\lambda > 0$ , kde dvě blízké trajektorie se stávají vzdálenějšími (podrobněji viz další kapitola).

#### **4.9 Tranzitivní, netranzitivní a pseudotranzitivní dynamický systém**

Pokud trajektorie všech počátečních podmínek v daném stavovém prostoru směřují do stejného atraktoru, hovoříme o tranzitivním systému. Pokud jsou přitahovány trajektorie z různých oblastí do různých atraktorů, jedná se o netranzitivní systém. Pseudotranzitivnost nebo též téměř tranzitivní systém nastává v případě, když se systém chová tranzitivně, tj. směřuje do jednoho atraktoru a poté náhle změní chování a směřuje do atraktoru jiného. Jde tedy o přeskoky chování mezi několika metastabilními stavy.

## 5 Meteorologické modely

### 5.1 Stručný úvod do meteorologických modelů

Ve druhé kapitole jsme představili jednoduché modely, podívejme se nyní obecně na hlavní charakteristiky modelů, simulujících nějaký reálný systém, tak jak jsou shrnuty v [11].

- to, co se odehraje v reálném systému má svůj ekvivalent v modelu tj., je tu poměr jedna ku jedné mezi kvantitami v reálném systému a proměnnými v modelu
- u reálného systému se předpokládá možnost rozložení na základní procesy a interakce, které mohou být popsány jednotlivými rovnicemi
- simulace časového vývoje je získána numerickým řešením daných rovnic tj. diskrétním způsobem
- pomocí změn parametrů modelu můžeme vytvářet reálnou i nereálnou budoucnost a rekonstruovat minulost
- model může ověřovat platnost teoretických poznatků

Počasi je okamžitý stav atmosféry v daném místě charakterizovaný souborem všech meteorologických prvků a atmosférických jevů. Mezi meteorologické prvky patří například tlak, teplota a vlhkost atmosféry, srážky, oblačnost a směr a rychlost větru. Mezi jevy řadíme bouřku, náledí, jinovatku atd. Všechny tyto údaje jsou sbírány na meteorologických stanicích a na centrálách pro zpracování dat z radarů a družic po celém světě a slouží jako vstup a pojitko modelu a reality prostřednictvím počátečních a okrajových podmínek a vnějších sil.

Meteorologické modely modelují budoucí „počasí“ a to pomocí rovnic popisujících dynamiku atmosféry (2. kapitola o atmosféře). Ostatní subsystemy jako hydrosféra, litosféra, kryosféra a biosféra jsou meteorologickým modelem vnímány jako vnější prostředí skrz okrajové podmínky a vnější síly.

Díky nemožnosti analytického řešení řídicích rovnic jsme nuceni nahradit časové a prostorové kontinuum 3-dimenzionální souřadnicovou sítí a sekvencí diskrétních časových kroků. Pro každý časový krok jsou poté vyčísleny hodnoty v bodech této sítě. Proměnlivost veličin mezi dvěma hodnotami v síťových bodech tudíž nemůže být zaznamenána (rekonstrukce  $\sin(x)$  ve vzdálenostech  $\pi$ ) a naší snahou je, co nevíce se přiblížit kontinuitě, snižováním vzdáleností mezi body

(rozlišení modelu). Limitací nám je doba výpočtu, která musí odpovídat potřebám praktického využití (nemůže např. počítat dva dny předpověď na následující den). Pro globální modely je to kolem 50 km v horizontální rovině a 60 různě vzdálených hladin na 60 km ve vertikálním směru (v nižších vrstvách jsou blíže). Síť s rozlišením přibližně 10 km v horizontální rovině mají tzv. lokální modely, zahrnující pouze určitou vybranou oblast. Hodnoty na hranicích této oblasti však musí být určovány z globálních modelů. Ani rozlišení lokálního modelu však nezachytí meteorologické jevy, které ve výsledku hrají podstatnou roli při předpovědi. Například letní bouřkové mraky mají průměr většinou menší než 10 km a model, který nezaznamená z nich vypadlé srážky, vytvoří velmi špatnou předpověď. Tento problém se snaží vyřešit programové moduly, které vypočítávají hodnoty těchto měřítkově malých jevů, a ty pak parametrizují řídicí rovnice modelu (o parametrizacích jsme se již zmínili v kapitole nazvané Atmosféra).

K odstartování výpočtu nám zbývá dosazení počátečních podmínek změřených na stanicích do bodů dané sítě, to se však ukazuje jako nelehký úkol. Prostá interpolace není možná, protože nemáme dostatečně hustě a rovnoměrně rozmístěné stanice, radarová, satelitní a staniční měření nejsou časově synchronizována, a potřebujeme zachovat fyzikální povahu dat určenou daným prostředím. V praxi se však zjednodušeně řečeno místo matematické interpolace korigované fyzikálními zákony, využívá předpověděných hodnot z minulé předpovědi, která se koriguje nově naměřenými daty. Tomuto procesu se říká objektivní analýza, a pokud se do procesu ještě přidávají časově nesynchronizovaná data, jedná se 4-dimenzionální problém.

Máme vše potřebné pro spuštění modelu a po nějaké době vybalancování polí různých proměnných získáme první výsledky, jejichž platnost určíme porovnáním s reálnými daty při procesu validace. Simulace reality s realitou však koresponduje jen částečně. Už řídicí rovnice jsou jejím neúplným popisem a jejich používaná zjednodušení tento stav ještě zhorší. Diskretizace kontinua a nutnost parametrizací společně s vyjádřením subsystémů pomocí okrajových podmínek a vnějších sil dále chybu zvětšuje. Měřicí zařízení a metody výpočtu hodnot v bodech mohou odchylku od reality snížit, ale nikoliv odstranit. S nárůstem výpočetní kapacity můžeme zpřesňovat používané rovnice, parametrizace a snižovat rozlišení modelu. Nikdy však úplně neodstraníme chybu při určování okrajových podmínek a vnějších sil určovaných vnějšími parametry (předpovědatelnost druhého druhu) a při

určování počátečních podmínek (předpovídatelnost prvního druhu). Protože důsledky chyby určení vnějších podmínek nejsou pro meteorologický model tak velké ve srovnání s dopadem nejistot počátečních podmínek, budeme nyní předpokládat dokonalý model a zkoumat předpovídatelnost prvního druhu.

Atmosféra je z definice dynamickým systémem a můžeme na ní aplikovat poznatky z předešlé kapitoly. Jedna proměnná, určovaná na bodu, síť je jednou osou ve stavovém prostoru o dimenzi desítek milionů. Časový vývoj je pak určen trajektorií, přitahovanou do oblasti po většinu času chaotického atraktoru, který je určen aktuálními vnitřními a vnějšími parametry. Tyto parametry též určují míru exponenciálního rozbíhání dvou blízkých trajektorií (skutečný a naměřený stav) prostřednictvím Ljapunovových exponentů. My však máme pouze jednu naměřenou počáteční hodnotu, reprezentovanou bodem ve stavovém prostoru a objem nepřesnosti, určený isopovrchem funkce hustoty pravděpodobnosti. Sledovat časový vývoj tohoto objemu je možno pouze pro jednoduché modely. Pro zkoumání platnosti předpověděných hodnot meteorologických modelů využíváme určitého množství hodnot s malou výchytkou od počátečních podmínek (kolem 50ti) a na základě odchylek této skupinové (ansámblové) předpovědi určujeme limity předpovědi určené aktuálním počasím. Protože jsme opět omezeni výpočetní kapacitou, musíme pro tyto ansámblové předpovědi snížit rozlišení modelu.

## 5.2 Ljapunovovy exponenty

### 5.2.1 Teoretický popis

V tomto odstavci vyjdeme z prací [12] a [13].

Mějme naměřený stav atmosféry, který se liší od stavu skutečného o  $\Delta d_0$  časový vývoj této odchylky se vyvíjí podle:

$$\Delta d(t) = \Delta d_0 e^{\lambda t}, \quad (4.9)$$

$\Delta d(t)$  ... vzdálenost dvou trajektorií ve stavovém prostoru v čase  $t$ ,

$\Delta d_0$  ... vzdálenost dvou trajektorií v počátečním čase,

$t$  ... čas,

$\lambda$  ... největší Ljapunovův exponent.

Tuto rovnici jsme již představili v kapitole 4.8, kde jsme ji odvodili pro 1–dimenzionální problém, v tomto případě má globální Ljapunovův exponent  $\lambda$  ( $\lambda$  nadále budeme užívat výhradně pro globální Ljapunovův exponent) tvar:

$$\lambda = \left\langle \left\langle \frac{df(X)}{dX} \Big|_{X(t)} \right\rangle \right\rangle, \quad (5.1)$$

$f(X)$  ...pravá strana rovnice popisující dynamiku systému,  
 $X$ ...proměnná,

což je střední hodnota přes celou dynamiku vývoje.

Pro  $n$  – dimenzionální případ nyní existuje  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  Ljapunovových exponentů. Tvar  $e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}$  poté určuje míru růstu dané počáteční sféry, vyplněné možnými stavy. Jednotkové vektory, mířící v daném čase ve směru os vyvíjející se sféry v elipsoid, se nazývají Ljapunovy vektory a dlouhodobě zprůměrnovaný faktor změny velikosti těchto vektorů jsou definované Ljapunovy exponenty  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ .

Největší Ljapunovův exponent, používaný v rovnici (4.9), je tedy možno definovat jako logaritmus dlouhodobě zprůměrnovaného faktoru, podle kterého narůstá vzdálenost dvou trajektorií za jednotku času.

Mějme tedy opět dynamický systém  $d\vec{X}/dt = f(\vec{X})$ , jehož časový vývoj je zobrazen trajektorií ve fázovém prostoru. Označme odchylku od této „středové“ trajektorie:

$$\vec{\varepsilon}(t) = \delta\vec{X}(t). \quad (5.2)$$

Časový vývoj této odchylky je dán vztahem:

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \tilde{J}\vec{\varepsilon}, \quad (5.3)$$

$$\tilde{J} \dots \text{Jacobiho matice s prvky } J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{\vec{X}=\vec{X}(t)}.$$

Každá z  $n$  lineárních rovnic 5.3 představuje vývoj jednoho z  $n$  ortogonálních Ljapunovových vektorů, určujících vývoj sféry počátečních podmínek v  $n$ -dimenzionálním stavovém prostoru. V každém čase  $t$  tedy máme daný bod ve stavovém prostoru a k němu přiřazeno  $n$  ortogonálních vektorů. Dosazením poměru velikosti vektorů v  $i$ -tém směru  $\varepsilon_i(t)/\varepsilon_i(0)$  do rovnice (4.9) dostaneme:

$$\frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_i(0)} = e^{\lambda_{i,lok}t}, \quad (5.4)$$

$$\lambda_{i,lok} = \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_i(0)}, \quad (5.5)$$

$\lambda_{i,lok} \dots$  lokální Ljapunovův exponent v čase  $t$  a v  $i$ -tém směru.

Lokální Ljapunovy exponenty popisují lokální chování, přísluší dané trajektorii o určitých počátečních podmínkách a hodnotám parametrů, určujících změnu typu atraktoru. Dlouhodobou zprůměrnovanou hodnotu, popisující globální chování systému tj. globální Ljapunovy exponenty  $\lambda_i$ , určíme jako limitní případ  $\lambda_{i,lok}$ :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_i(0)} \quad (5.6)$$

Tyto exponenty nejsou pro tranzitivní systém závislé na počátečních podmínkách.



## 5.2.2 Praktický výpočet

Při výpočtu jsme limitováni:

1. Numerickou aproximací diferenciálních rovnic tj. musíme přejít od spojitého problému na problém diskrétní a to jak pro řídicí rovnice daného systému  $d\vec{X}/dt = f(\vec{X})$ , tak pro vývoj odchylky  $\vec{\varepsilon}(t) = \delta\vec{X}(t)$  popsany rovnicí 5.3. Jacobiho matice z rovnice 5.3 nabudou tvaru:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{\vec{X}=\vec{X}_m},$$

*m...m-tá iterace.*

2. Pokud neznáme asymptotické chování lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{i,lok}$  nemůžeme určit globální Ljapunovův exponent  $\lambda_i$  jinak, než výpočtem přes konečný čas  $t$ .
3. Prvky  $\varepsilon_{i,m}/\varepsilon_{i,0}$ ,  $i=1, \dots, n$  nejsou po  $m$  iteracích ortogonální a musíme je ortogonalizovat pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu.

## 5.3 Časový vývoj hustoty rozdělení pravděpodobnosti

### 5.3.1 Teoretický popis

Mějme dynamický systém popsany:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}, t), \quad (5.7)$$

s počáteční podmínkou  $\vec{X}_0$  určenou s hustotou pravděpodobnosti  $\rho(\vec{X}_0)$ . Časový vývoj  $\rho(\vec{X}_0)$  je určen řešením Liouvilleiho rovnice (viz [14]):

$$\frac{\partial \rho(\vec{X}, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial X_k} [\rho(\vec{X}, t) f_k(\vec{X}, t)] = 0, \quad (5.8)$$

$\vec{f}(\vec{X}, t)$  ...pravá strana rovnice 5.7,

$\rho(\vec{X}, t)$  ...hustota pravděpodobnosti v daném bodě stavového prostoru  $\vec{X}$  v čase  $t$ ,

$N$ ...počet prvků vektoru  $\vec{X}$  tj. dimenze stavového prostoru

Jedná se o rovnici kontinuity pro  $\rho$  a po proderivování pravého členu rovnice 5.8 dostaneme:

$$\frac{\partial \rho(\vec{X}, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N f_k(\vec{X}, t) \frac{\partial \rho(\vec{X}, t)}{\partial X_k} = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_k(\vec{X}, t)}{\partial X_k} \rho(\vec{X}, t). \quad (5.9)$$

Řešením (5.9) je dle [14]:

$$\rho(\vec{X}, t) = \rho(\vec{X}_0, t=0) \exp \left[ - \int_0^t \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_k(\vec{X}(\vec{X}_0, t'), t')}{\partial X_k} \right) dt' \right]. \quad (5.10)$$

### 5.3.2 Vztah řešení Liouvilleiho rovnice a Ljapunovových exponentů

Označme:

$$h(\vec{X}, t) = \exp \left[ - \int_0^t \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_k(\vec{X}(\vec{X}_0, t'), t')}{\partial X_k} \right) dt' \right]. \quad (5.11)$$

Dle [14] platí:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{i,lok} = \frac{1}{t} \ln[h(\vec{X}, t)]^{-1}, \quad (5.12)$$

$\lambda_{i,lok} \dots i$  – *tý lokální Ljapunovův exponent,*

$t$  ... *čas,*

$n$  ... *dimenze stavového prostoru.*

Pro globální Ljapunovův exponent  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  platí:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln h(\bar{X}, t). \quad (5.12)$$

## 5.4 Model Konvekce

Řídící rovnice uvedené Lorenzem v článku [4] jsou:

$$\frac{dX}{d\tau} = -10X + 10Y, \quad (3.12)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \quad (3.13)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - \frac{8}{3}Z, \quad (3.14)$$

$X, Y, Z \dots$  proměnné,

$\tau \dots$  bezrozměrný čas,

$r \dots$  parametr.

Pomocí programů (kód viz přílohy kapitola 9.5) budeme určovat hodnoty lokálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_{i,lok}$  pro dané počáteční podmínky a hodnoty parametru  $r$ . Z  $\lambda_{i,lok}$  pro různé počáteční podmínky a při stejném  $r$  se pokusíme odhadnout globální Ljapunovův exponent  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Ukážeme též časový vývoj dvou blízkých trajektorií, a to jak ve stavovém prostoru, tak v grafech časového vývoje. Správnost  $\lambda_{i,lok}$  ověříme dle:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,lok} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_i} = Tr \vec{J}, \quad (5.13)$$

$\lambda_{i,lok} \dots i$  –  $i$  – tý lokální Ljapunovův exponent,

$n \dots$  dimenze stavového prostoru,

$\frac{\partial f_i}{\partial X_i} \dots$  diagonální prvky Jacobiho matice  $\vec{J}$ ,

a dle skutečnosti, že pro systém se spojitým časem platí  $\lambda_2 = 0$ , protože příslušný Ljapunovův vektor je tečný k trajektorii.

Pro model 3.12 – 3.14 platí:

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial X} = -10,$$

$$f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Y} = -1,$$

$$f_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Z} = -\frac{8}{3},$$

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,lok} = -13,666. \quad (5.14)$$

## 5.4.1 Parametr (r=28)

### 5.4.1.1 Počáteční podmínky ( $X_0 = -2, Y_0 = 1, Z_0 = 0$ )

Obrázky č. 5.1 a 5.2 ukazují graficky vývoj lokálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_{1,lok}$  a  $\lambda_{3,lok}$  ( $\lambda_{2,lok} = 0$  nezobrazujeme). Výpočet pomocí programu (kód viz přílohy kapitola 9.5 ) určil hodnoty pro čas 5000 bezrozměrných časových jednotek. Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$  jsou:

$$\lambda_{1,lok} = 0,55, \quad (5.15)$$

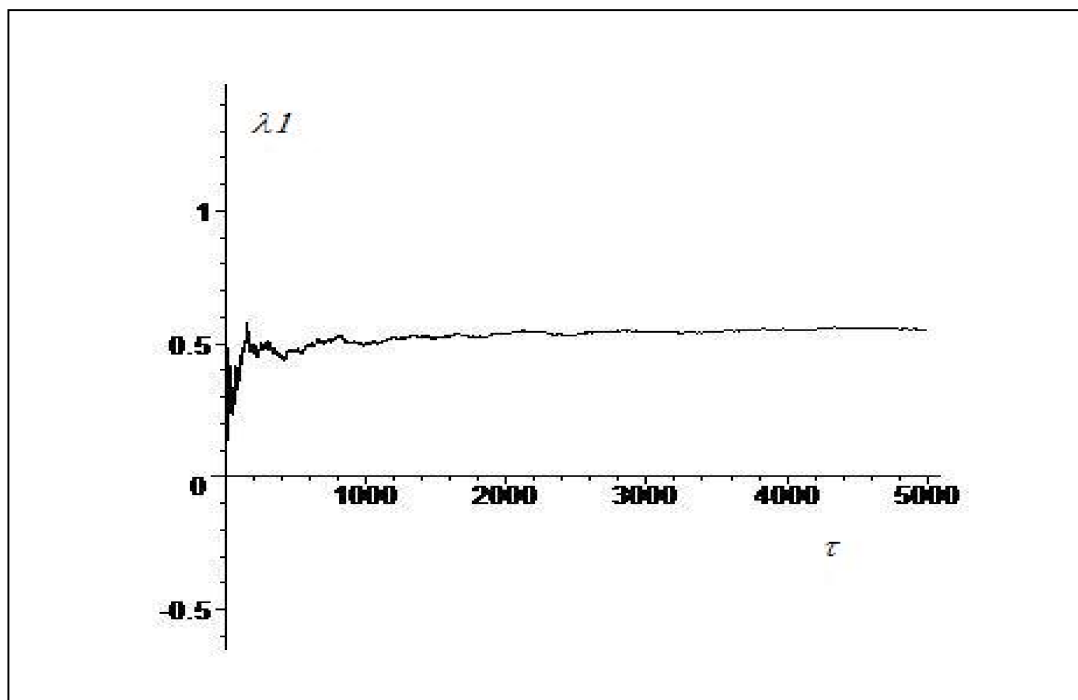
$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.16)$$

$$\lambda_{3,lok} = -14,25. \quad (5.17)$$

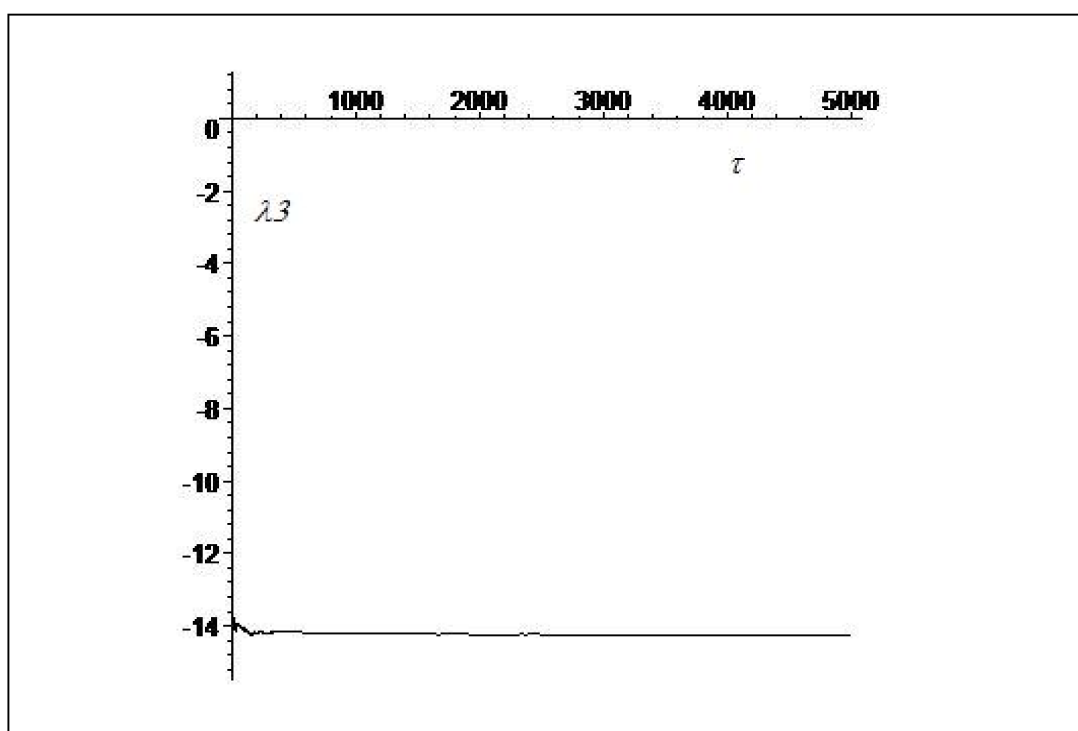
Součet  $\lambda_{i,lok}$ :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,lok} = -13,7 \approx -13,666,$$

což je v dobré shodě s  $Tr\vec{J}$  systému (3.12 – 3.14).

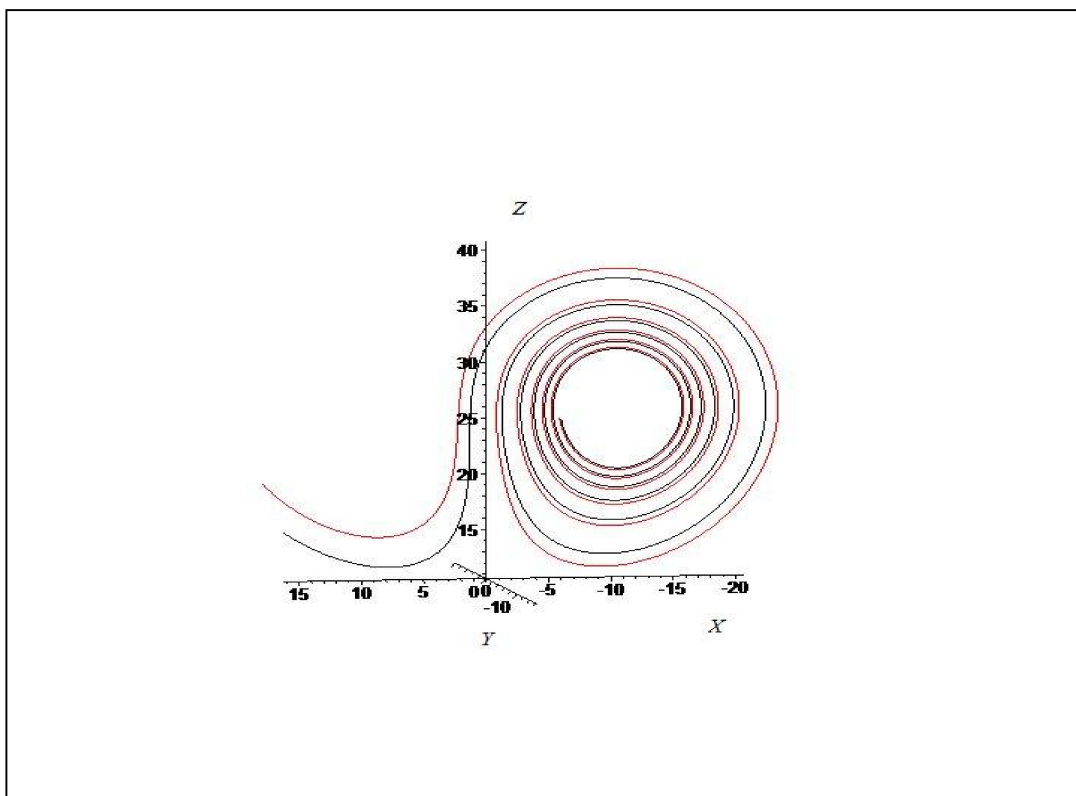


obrázek 5.1: časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{1,lok}$

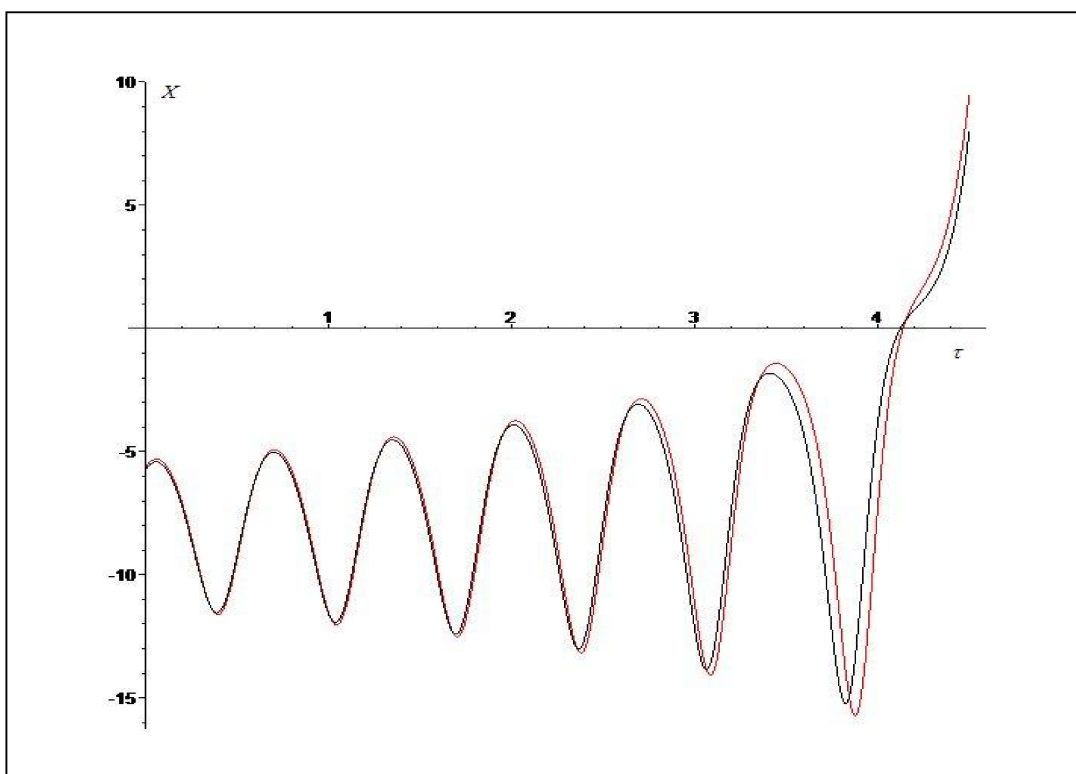


obrázek 5.2: časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{3,lok}$

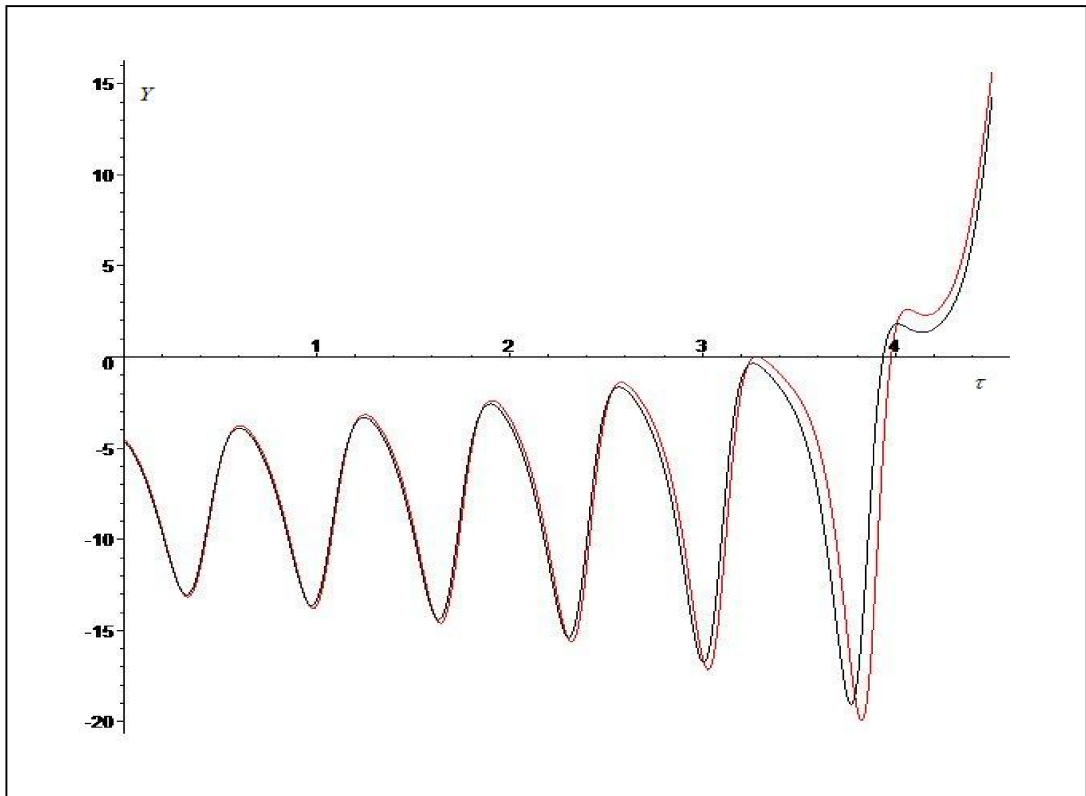
Vzhledem k tomu, že  $\lambda_{1,lok}$  má kladnou hodnotu, očekáváme divergentní (chaotický) systém s rozbíhavostí dvou trajektorií ve stavovém prostoru dle rovnice (4.9). Obrázky č. 5.3 – 5.6 ukazují chování dvou blízkých trajektorií, které námi očekávaný průběh potvrzují.



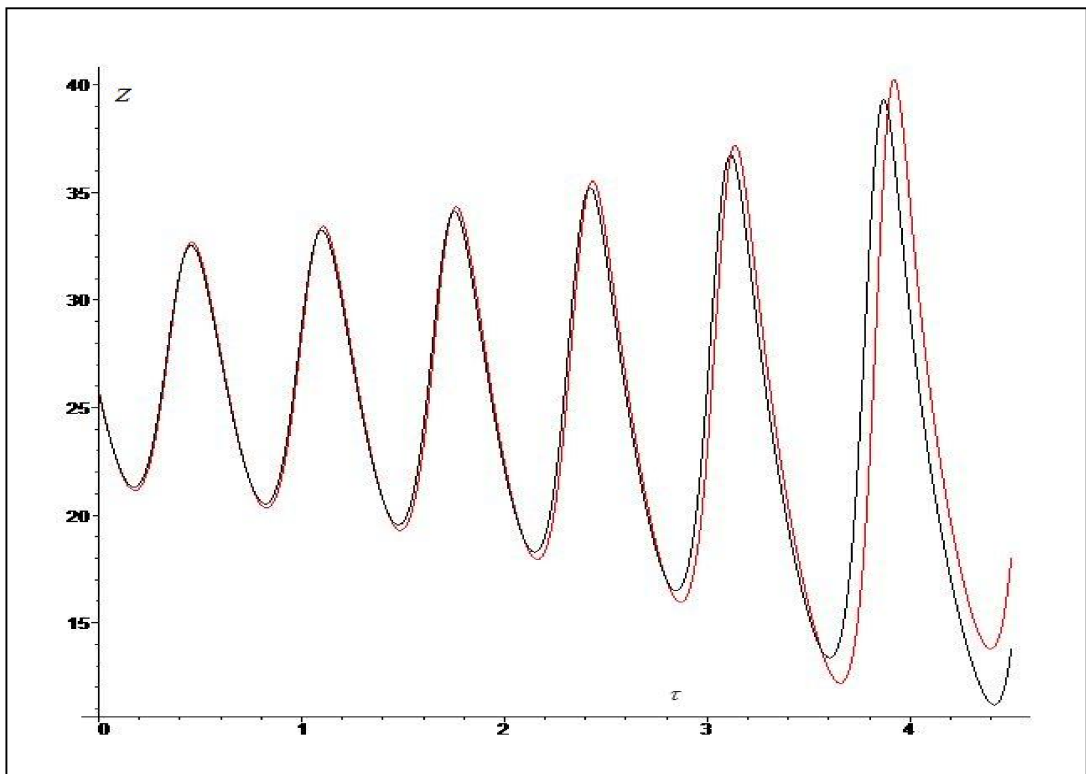
obrázek 5.3: Vývoj dvou blízkých trajektorií zobrazených ve stavovém prostoru



obrázek 5.4: Časový vývoj proměnné  $X$  pro dvě blízké trajektorie



obrázek 5.5: Časový vývoj proměnné  $Y$  pro dvě blízké trajektorie



obrázek 5.6: Časový vývoj proměnné  $Z$  pro dvě blízké trajektorie

Z obrázků č. 5.3 – 5.6 vyplývá, že pro zobrazený úsek je hlavním přispívatelem rozbíhavosti blízkých trajektorií proměnná  $Z$ .

#### 5.4.1.2 Počáteční podmínky ( $X_0 = 1, Y_0 = 2, Z_0 = 0$ )

Obrázky č. 5.7 a 5.8 ukazují graficky vývoj lokálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_{1,lok}$  a  $\lambda_{3,lok}$ . Výpočet pomocí programu (kód viz přílohy kapitola 9.5) ukázal hodnoty pro čas 5000 bezrozměrných časových jednotek. Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$  jsou:

$$\lambda_{1,lok} = 0,55, \quad (5.18)$$

$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.19)$$

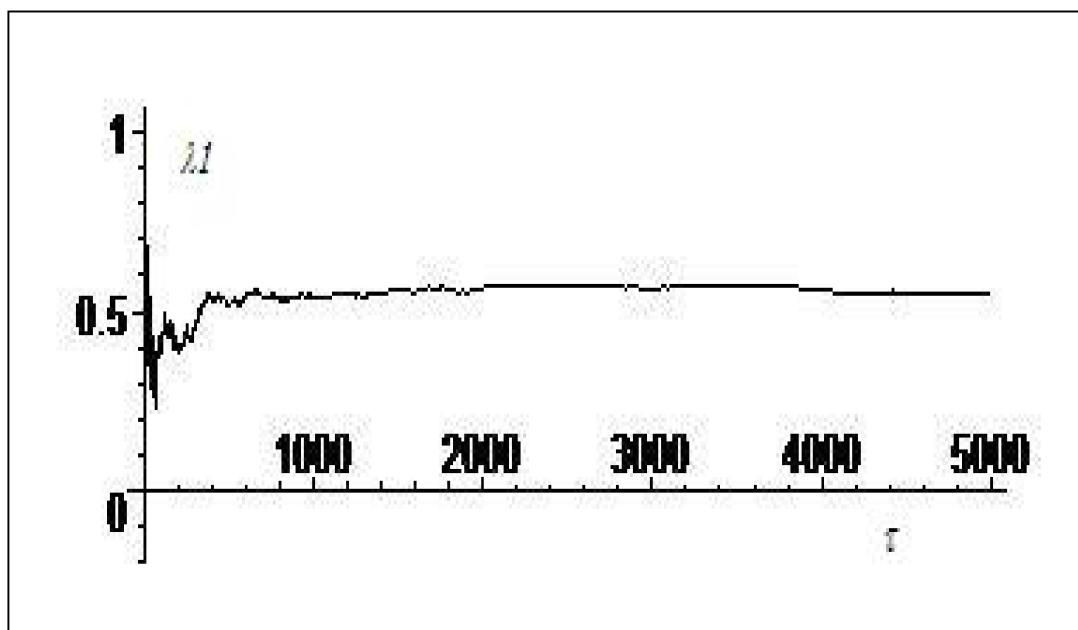
$$\lambda_{3,lok} = -14,25. \quad (5.20)$$

Součet  $\lambda_{i,lok}$ :

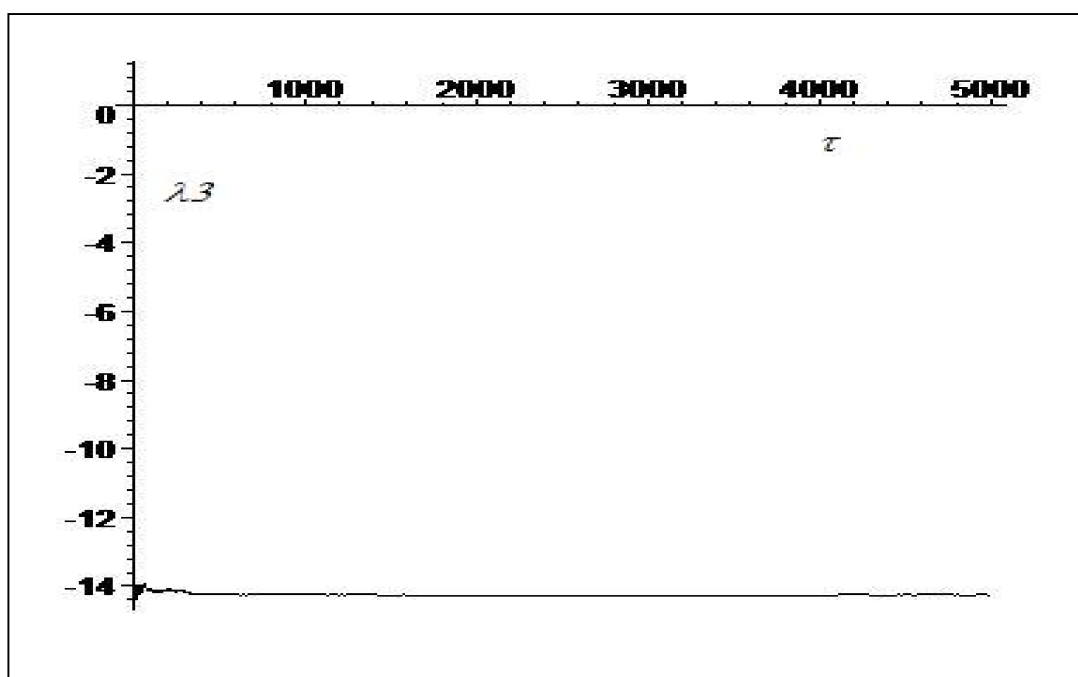
$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,lok} = -13,7 \approx -13,666,$$

což je v dobré shodě s  $Tr\vec{J}$  systému (3.12 – 3.14).



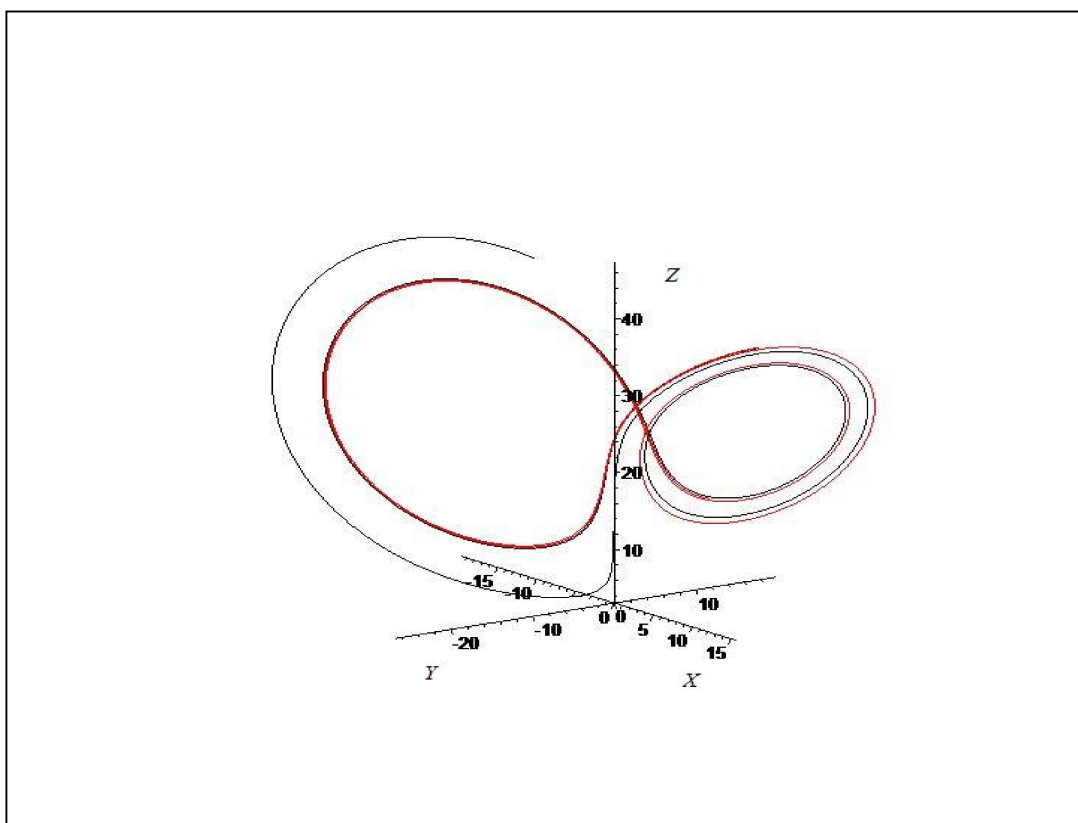


obrázek 5.7: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{1,lok}$

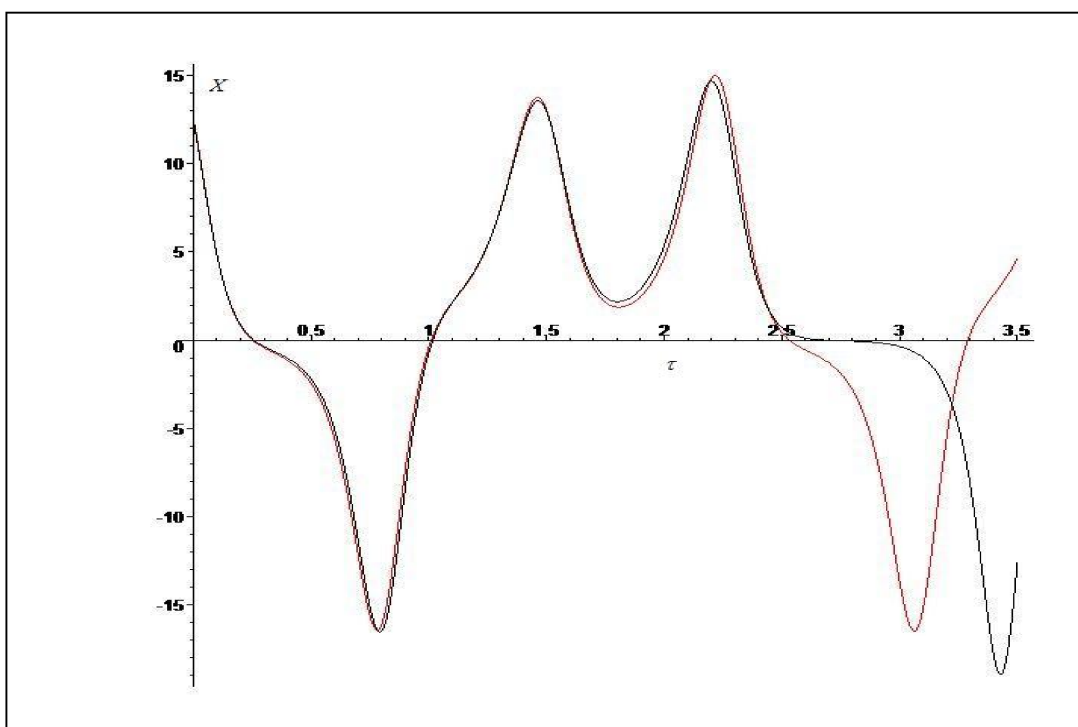


obrázek 5.8: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{3,lok}$

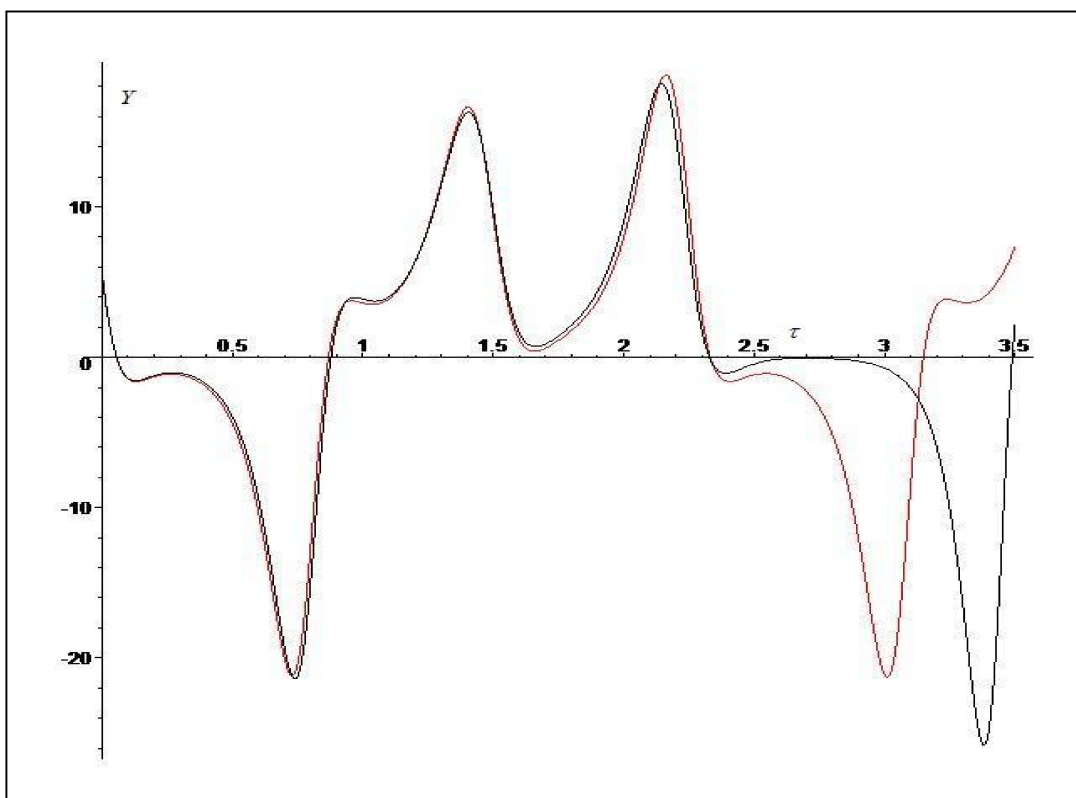
Vzhledem k tomu, že  $\lambda_{1,lok}$  má kladnou hodnotu, očekáváme divergentní (chaotický) systém s rozbíhavostí dvou trajektorií ve stavovém prostoru dle rovnice (4.9). Obrázky č. 5.9 – 5.12 ukazují chování dvou blízkých trajektorií, které námi očekávaný průběh potvrzují.



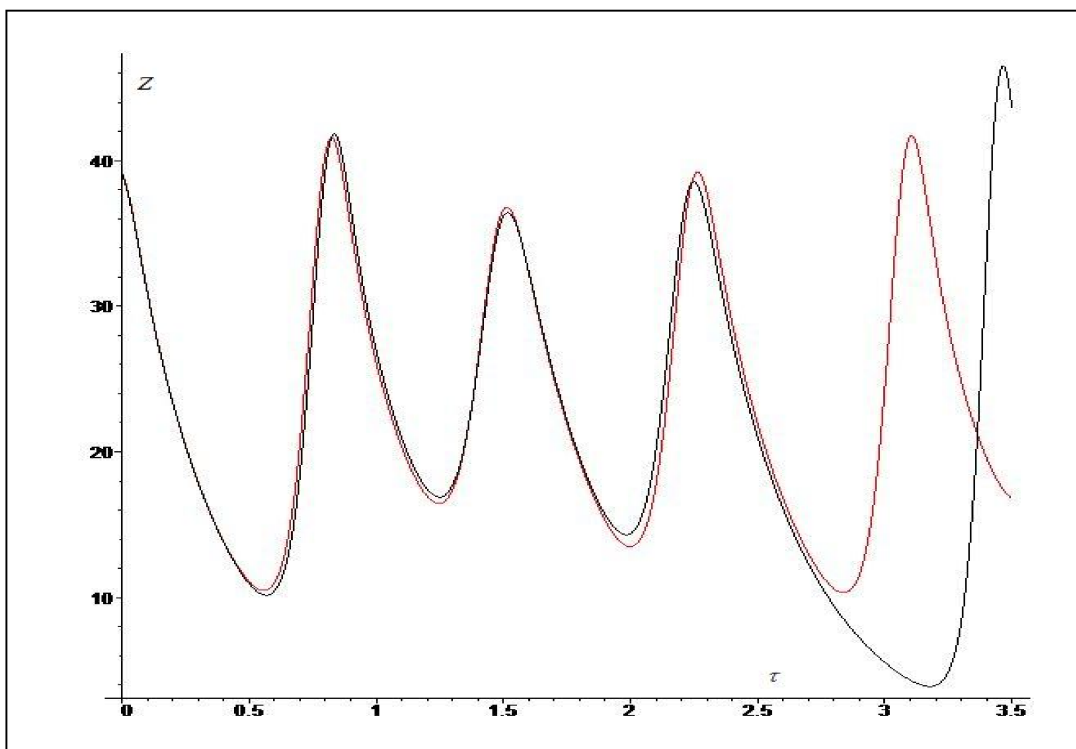
obrázek 5.9: Vývoj dvou blízkých trajektorií zobrazených ve stavovém prostoru



obrázek 5.10: Časový vývoj proměnné  $X$  pro dvě blízké trajektorie



obrázek 5.11: Časový vývoj proměnné  $Y$  pro dvě blízké trajektorie



obrázek 5.12: Časový vývoj proměnné  $Z$  pro dvě blízké trajektorie

Z obrázků č. 5.9 – 5.12 vyplývá, že pro zobrazený úsek není žádná z proměnných dominantním přispívatelem rozbíhavosti.

### 5.4.1.3 Globální Ljapunovovy exponenty

Pro model popsaný rovnice (3.12 – 3.14) s  $r = 28$  jsme určili pro počáteční podmínky  $(-2, 1, 0)$  hodnoty  $\lambda_{i,lok}$ :

$$\lambda_{1,lok} = 0,55, \quad (5.15)$$

$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.16)$$

$$\lambda_{3,lok} = -14,25, \quad (5.17)$$

a pro počáteční podmínky  $(1, 2, 0)$ :

$$\lambda_{1,lok} = 0,55, \quad (5.18)$$

$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.19)$$

$$\lambda_{3,lok} = -14,25. \quad (5.20)$$

Hodnoty (5.15 – 5.20) splňují předpoklad nezávislosti hodnot Globálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_i$  na počátečních podmínkách, proto určíme hodnoty  $\lambda_i$  jako:

$$\lambda_1 = 0,55, \quad (5.21)$$

$$\lambda_2 = 0, \quad (5.22)$$

$$\lambda_3 = -14,25. \quad (5.23)$$

Obrázky č. 5.10 – 5.12 dále potvrdily nerovnoběžnost os Ljapunovových vektorů s osami stavového prostoru díky přírůstku k rozbíhavosti od všech proměnných daného systému

## 5.4.2 parametr (r=22)

### 5.4.2.1 Počáteční podmínky ( $X_0 = -2, Y_0 = 1, Z_0 = 0$ )

Obrázky č. 5.13 a 5.14 ukazují graficky vývoj lokálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_{1,lok}$  a  $\lambda_{3,lok}$ . Výpočet pomocí programu (kód viz přílohy kapitola 9.5) ukázal hodnoty pro čas 5000 bezrozměrných časových jednotek. Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$  jsou:

$$\lambda_{1,lok} = -1,3, \quad (5.24)$$

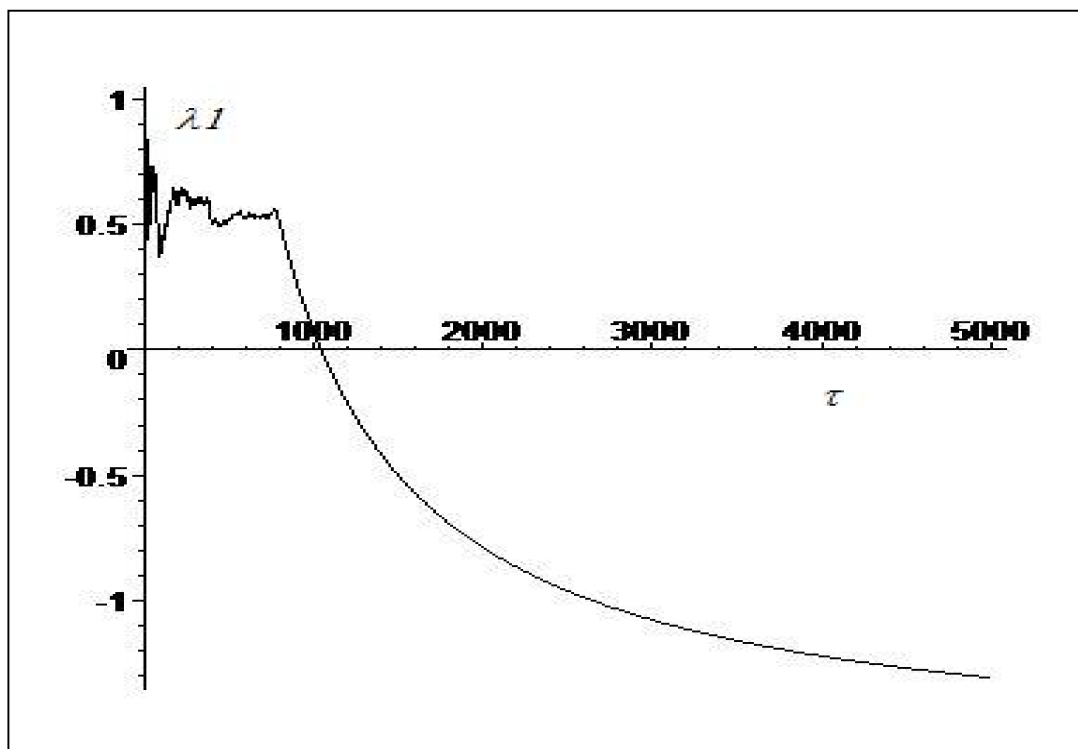
$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.25)$$

$$\lambda_{3,lok} = -12,34. \quad (5.26)$$

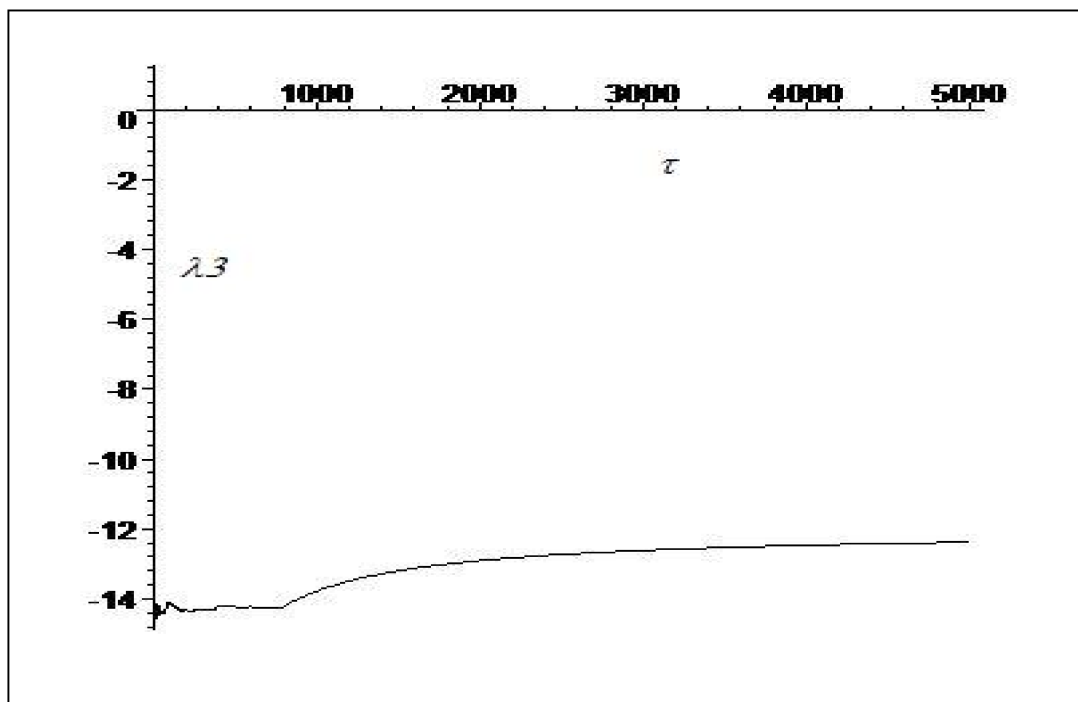
Součet  $\lambda_{i,lok}$ :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,lok} = -13,64 \approx -13,666,$$

což je v dobré shodě s  $Tr\vec{J}$  systému (3.12 – 3.14).

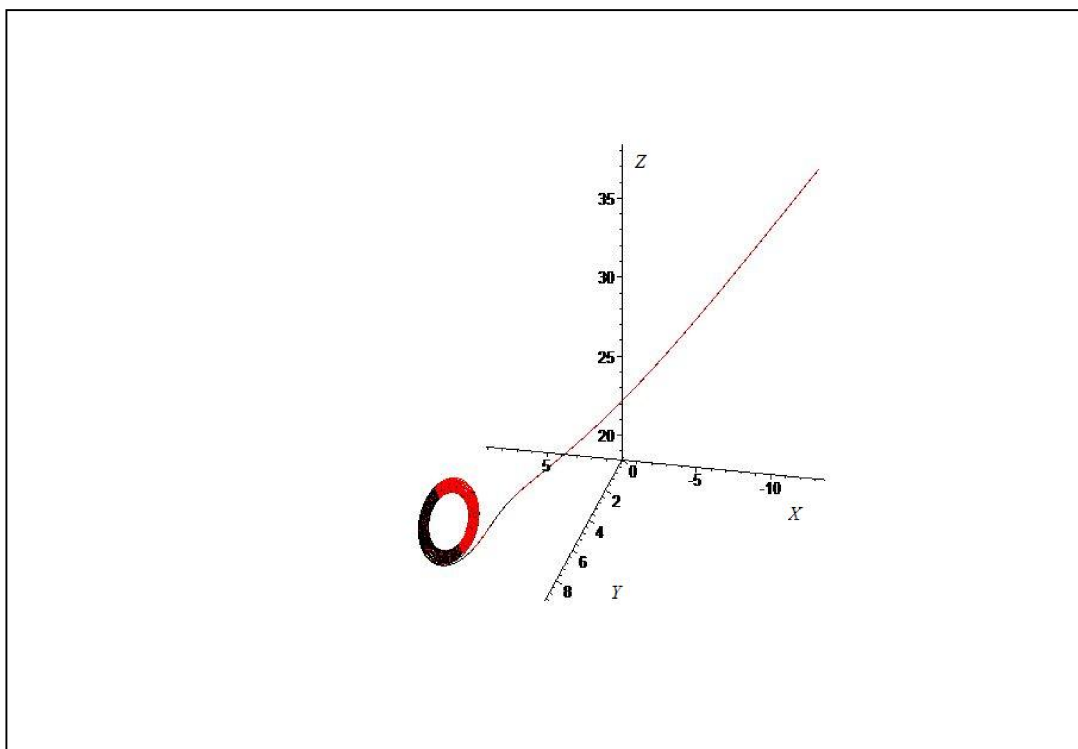


obrázek 5.13: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{1,lok}$

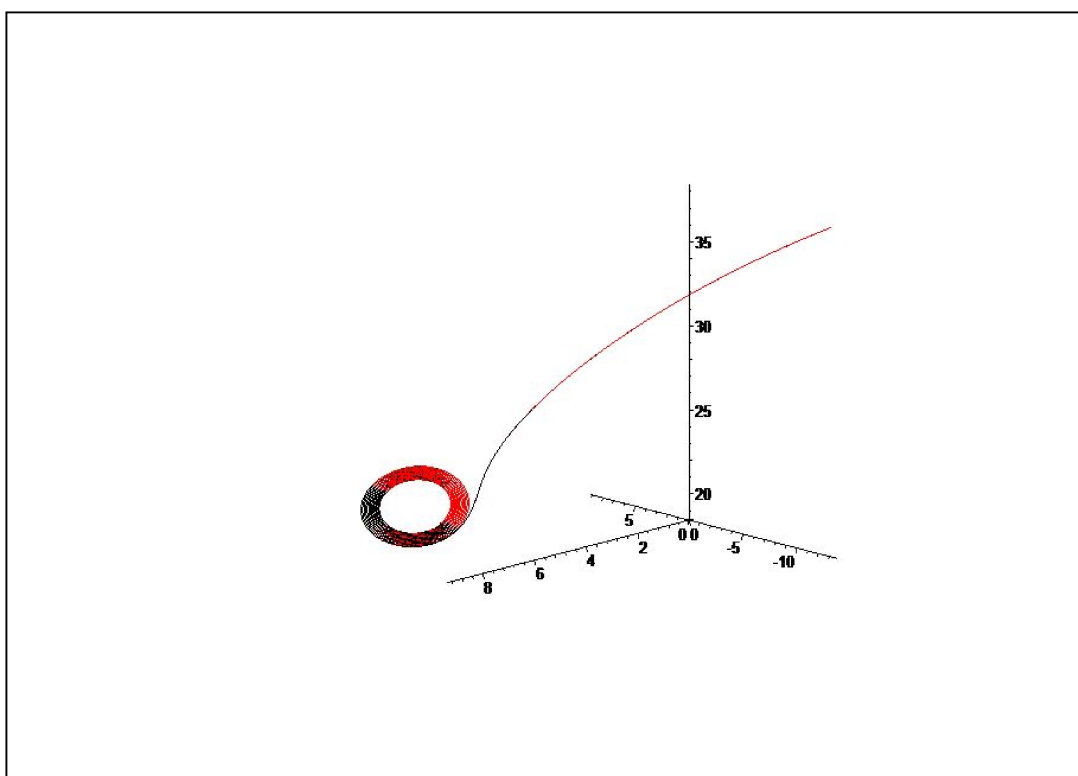


obrázek 5.14: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{3,lok}$

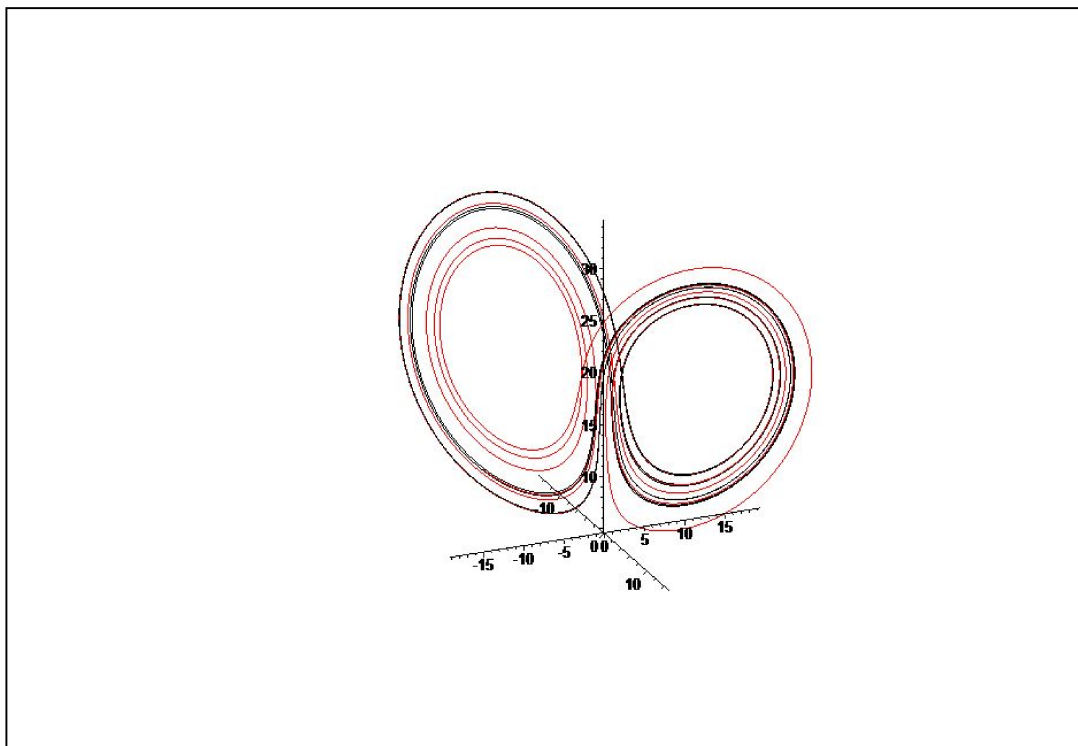
Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$   $i=1,\dots,3$  (vztahy (5.24 – 5.26)) nemají kladnou hodnotu. Očekáváme tedy konvergentní systém se sbíhavostí dvou trajektorií ve stavovém prostoru dle rovnice (4.9). Průběh grafů (obrázek č. 5.13-5.14) vykazuje chování, kde přibližně kolem hodnoty 800 bezrozměrných časových jednotek (dále jen bčj) najednou systém změní své chování a přejde z chaotického ( $\lambda_{1,lok} > 0$ ) na konvergentní, v tomto případě můžeme hovořit o metastabilním chaosu. Krátký časový vývoj dvou blízkých trajektorií ve stavovém prostoru ukazují pro různé časy  $\tau$  a počáteční odchylky  $\Delta d_0$  obrázky č. 5.15 – 5.21.



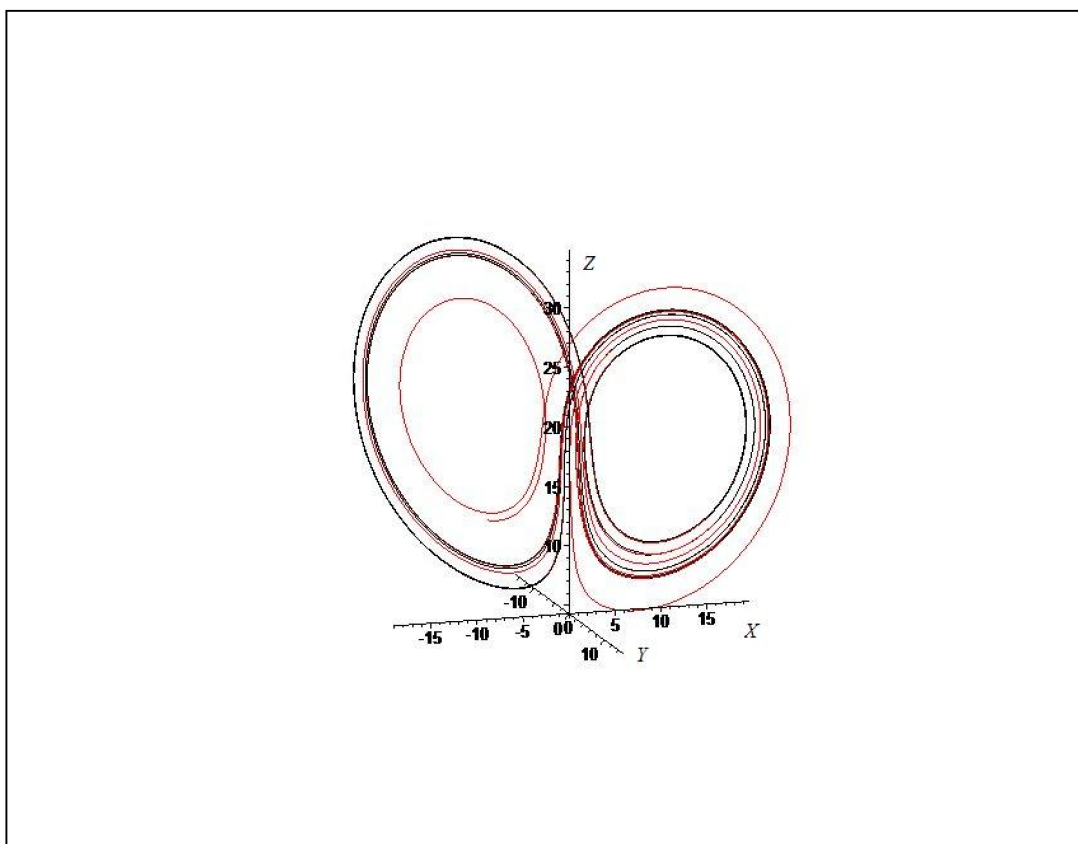
obrázek č. 5.15:  $\tau = 0,5$ ,  $\Delta d_0 = 0,01$



obrázek č. 5.16:  $\tau = 0,5$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$

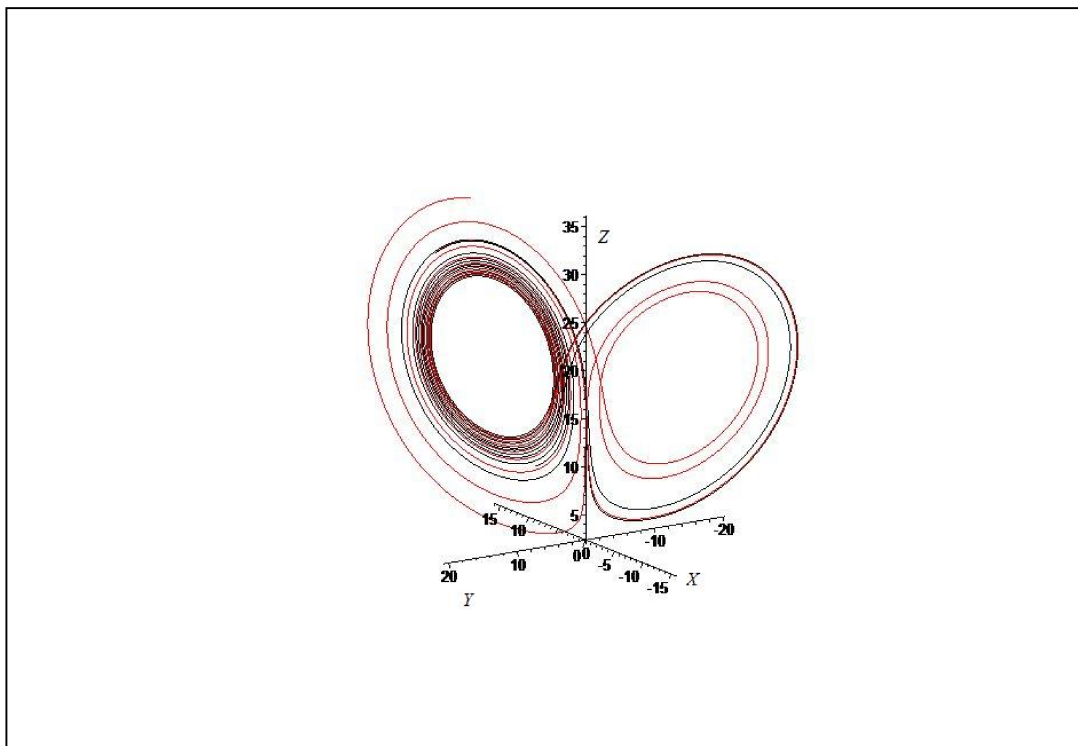


obrázek č. 5.17:  $\tau = 50$ ,  $\Delta d_0 = 0,01$

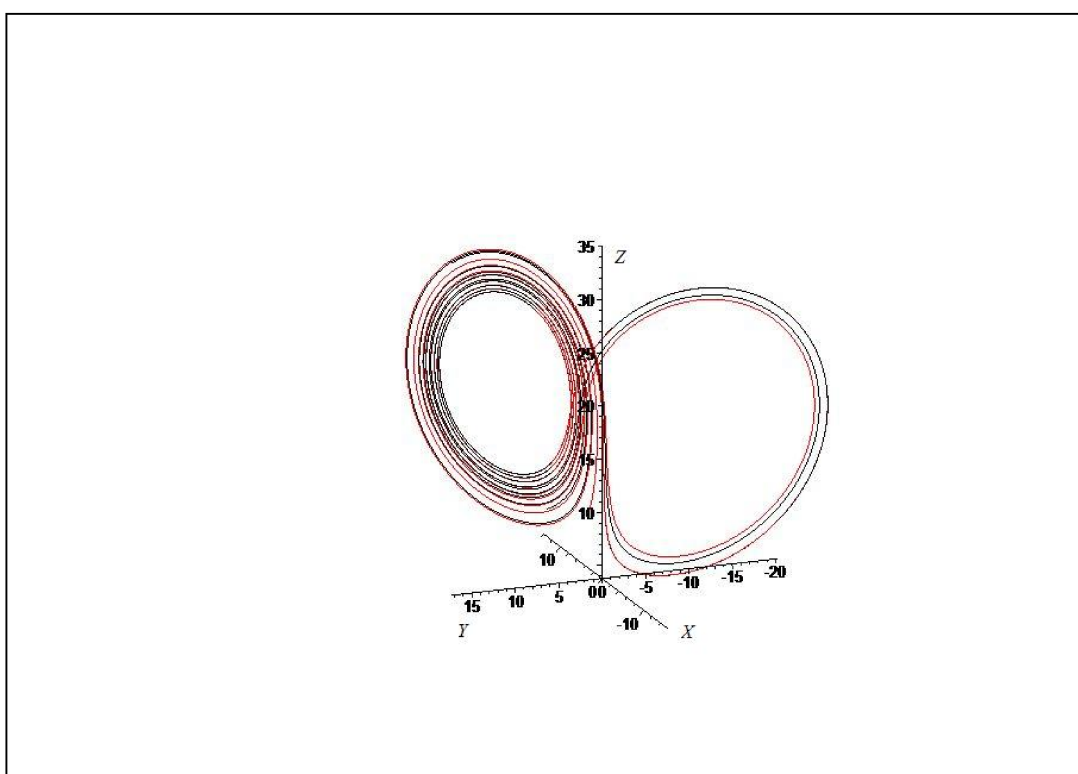


obrázek č. 5.18:  $\tau = 50$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$

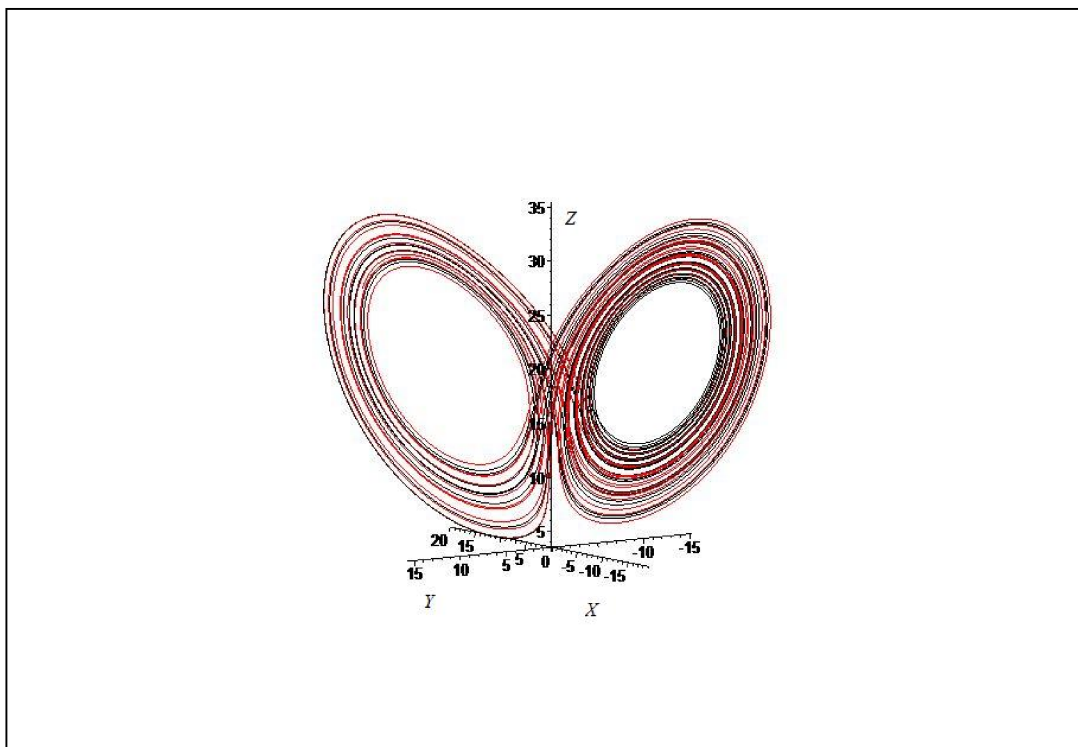




obrázek č. 5.19:  $\tau = 4000$ ,  $\Delta d_0 = 0,01$



obrázek č. 5.20:  $\tau = 4000$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$



obrázek č. 5.21:  $\tau = 10000$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$

Obrázky 5.15-5.16 ukazují, že pro obě počáteční podmínky směřuje trajektorie do postupně se zvětšujícího cyklu. Pro delší časový vývoj ukazují obrázky 5.17 – 5.21 rozbíhavost dvou blízkých trajektorií podobnou chaotickému chování. Poté se stav ustálí (viz kapitola klimatické modely).

#### 5.4.2.2 Počáteční podmínky ( $X_0 = 1$ , $Y_0 = 2$ , $Z_0 = 0$ )

Obrázky č. 5.22 a 5.23 ukazují graficky vývoj lokálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_{1,lok}$  a  $\lambda_{3,lok}$ . Výpočet pomocí programu (kód viz přílohy kapitola 9.5) vypočítal hodnoty pro čas 5000 bezrozměrných časových jednotek. Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$  jsou:

$$\lambda_{1,lok} = -1,4, \quad (5.27)$$

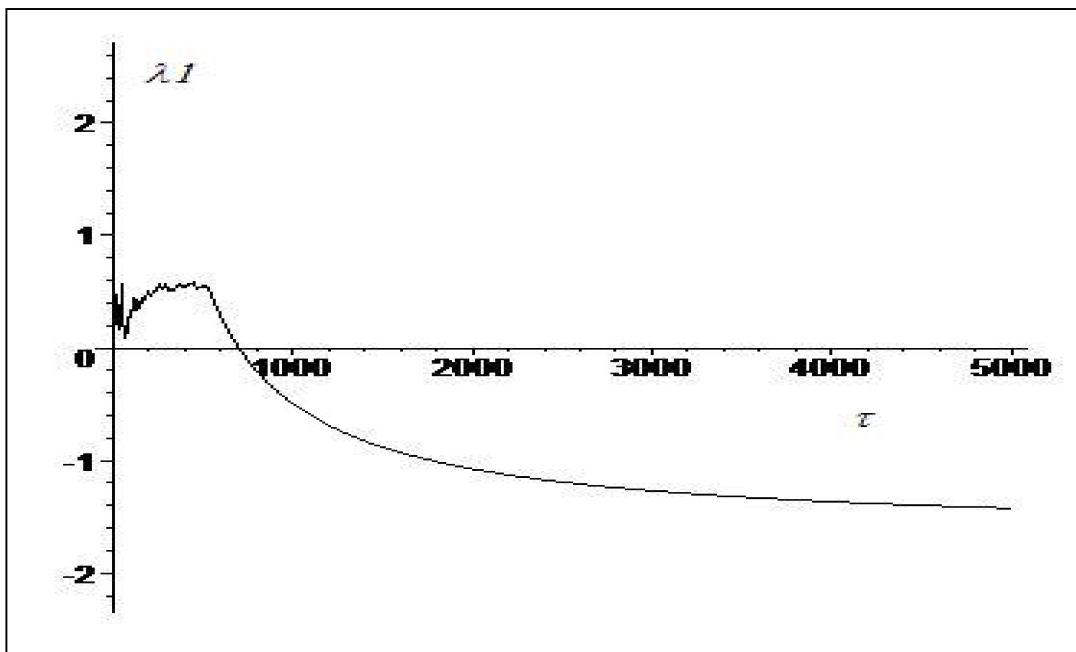
$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.28)$$

$$\lambda_{3,lok} = -12,26. \quad (5.29)$$

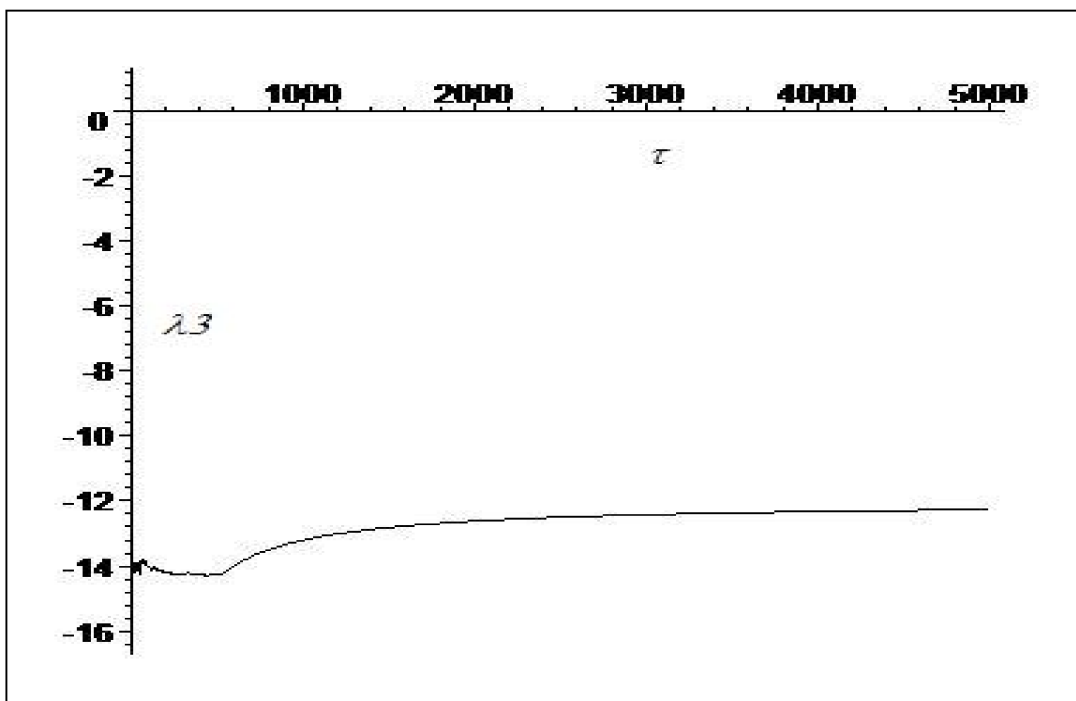
Součet  $\lambda_{i,lok}$  :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,lok} = -13,66 \approx -13,666,$$

což je v dobré shodě s  $Tr\tilde{J}$  systému (3.12 – 3.14).

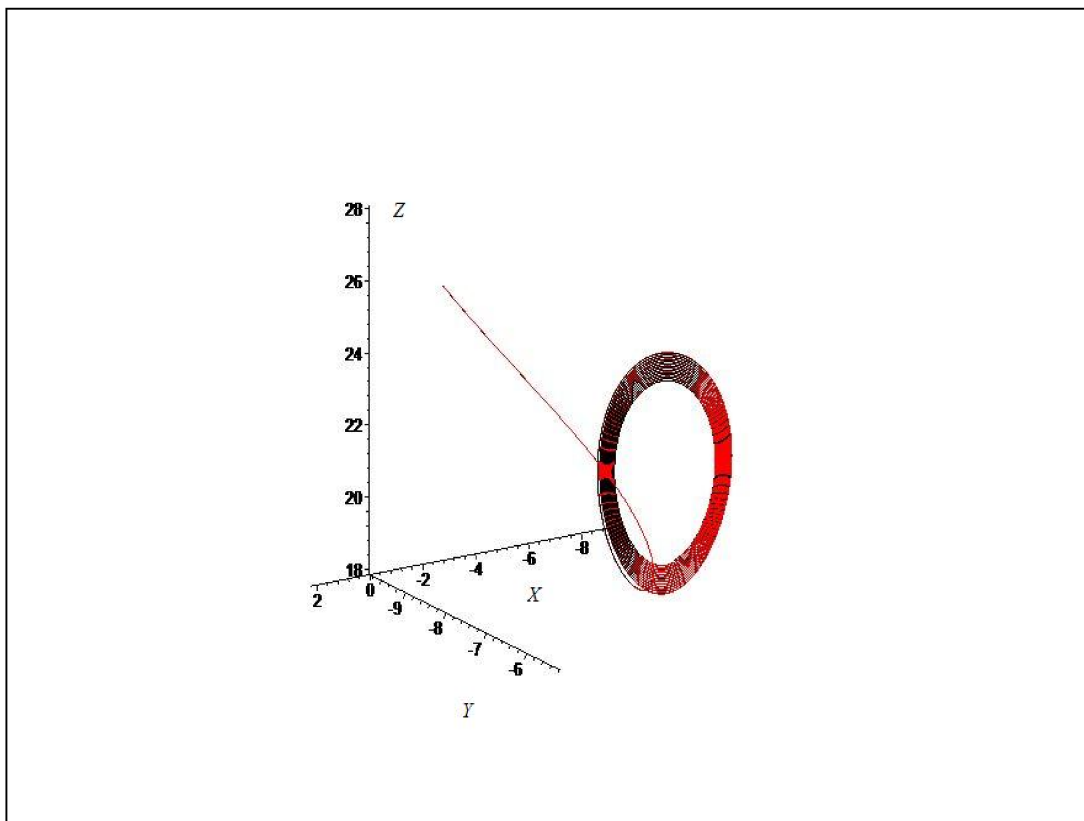


obrázek 5.22: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{1,lok}$

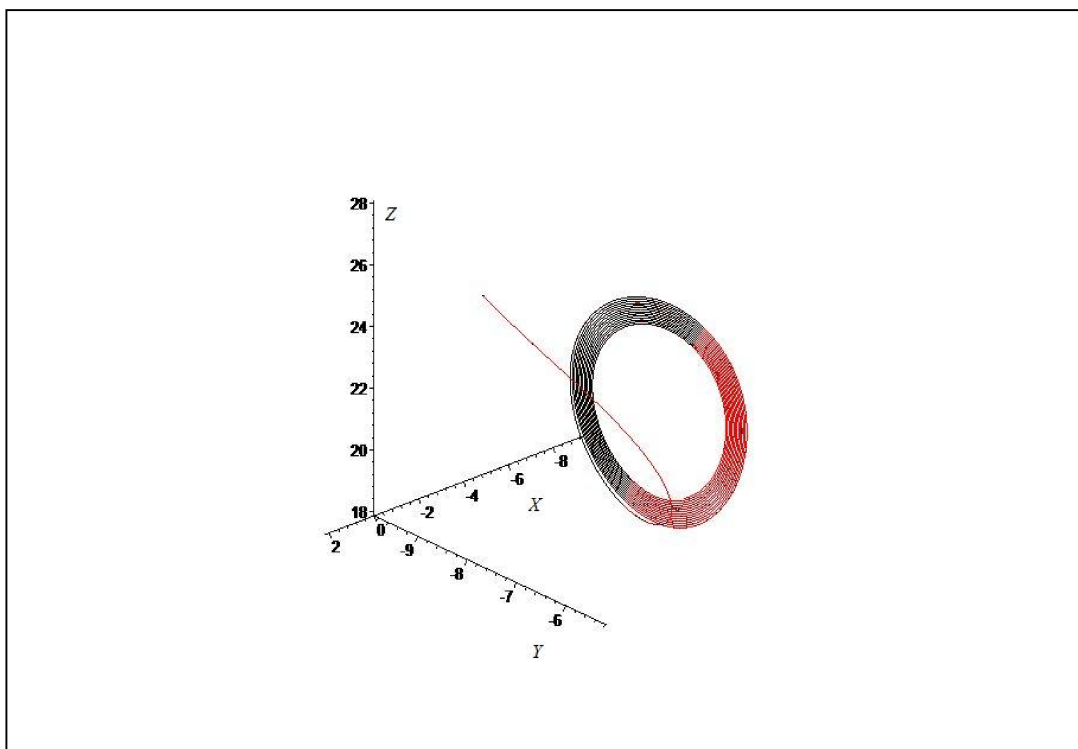


obrázek 5.23: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{3,lok}$

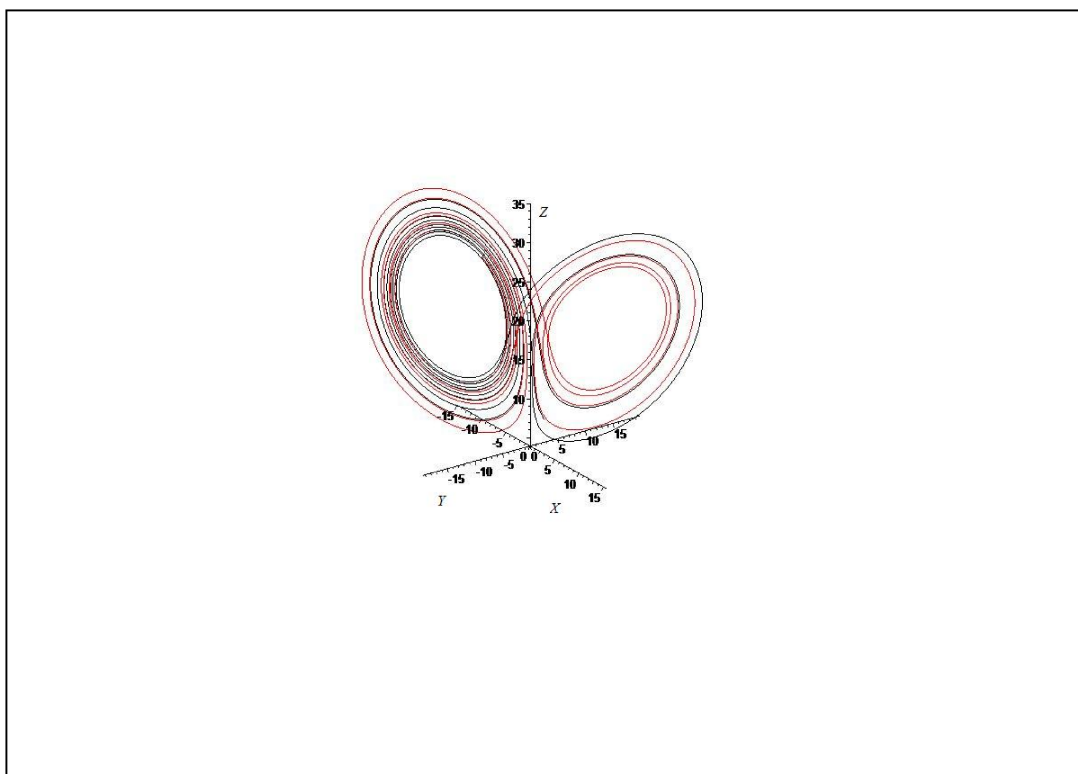
Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$   $i=1,\dots,3$  (vztahy (5.27 – 5.29)) nemají kladnou hodnotu. Očekáváme tedy konvergentní systém se sbíhavostí dvou trajektorií ve stavovém prostoru dle rovnice (4.9). Průběh grafů (obrázek č. 5.22-5.23) vykazuje chování, kde přibližně kolem hodnoty 600 bčj najednou systém změni své chování a přejde z chaotického ( $\lambda_{1,lok} > 0$ ) na konvergentní (metastabilní chaos). Krátký časový vývoj dvou blízkých trajektorií ve stavovém prostoru ukazují pro různé časy  $\tau$  a počáteční odchylky  $\Delta d_0$  obrázky č. 5.24 – 5.30.



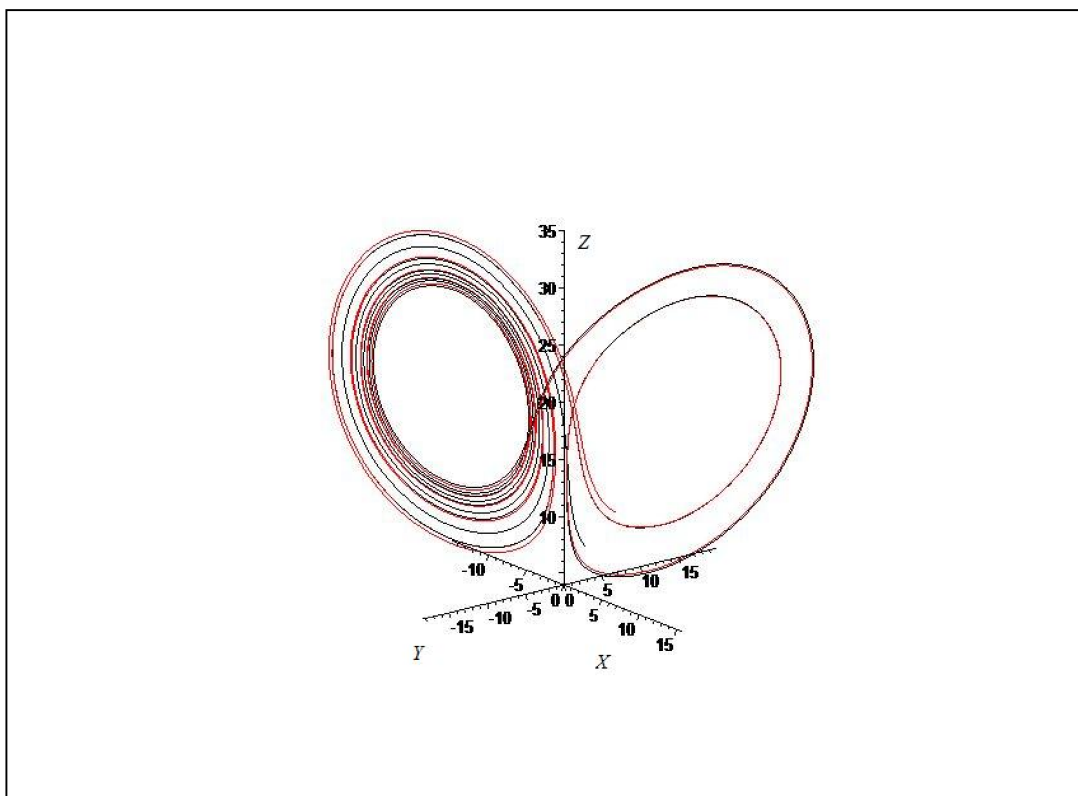
obrázek č. 5.24:  $\tau = 0,5$ ,  $\Delta d_0 = 0,01$



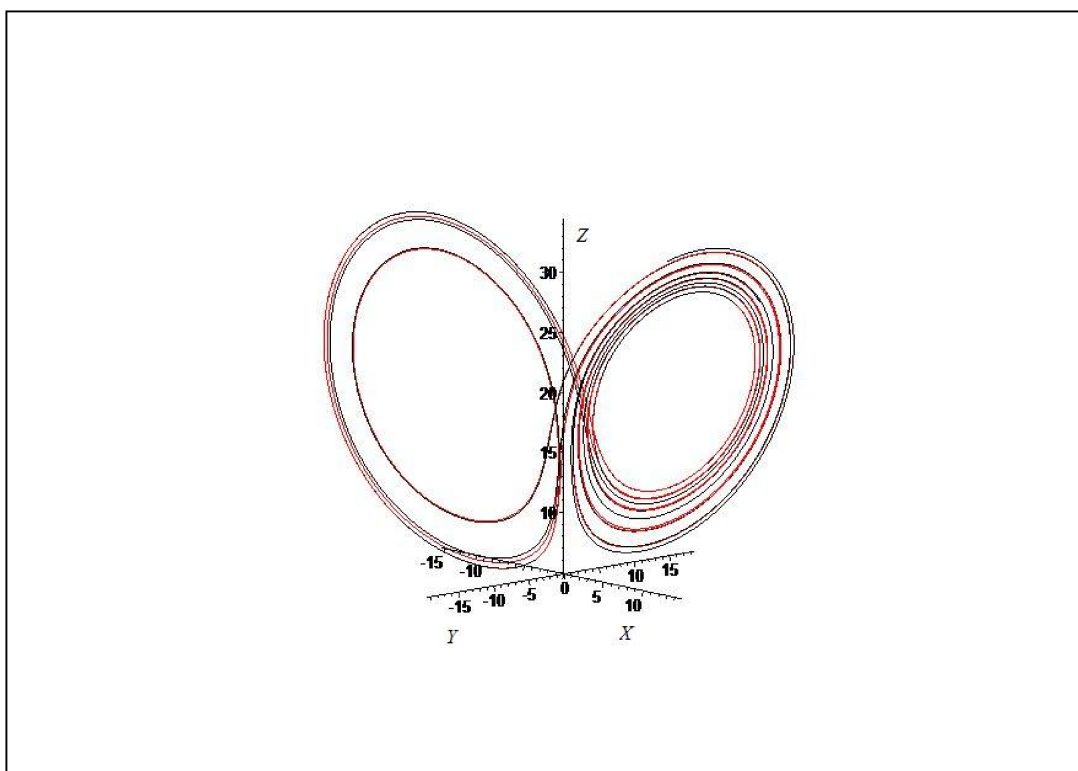
obrázek č. 5.25:  $\tau = 0,5$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$



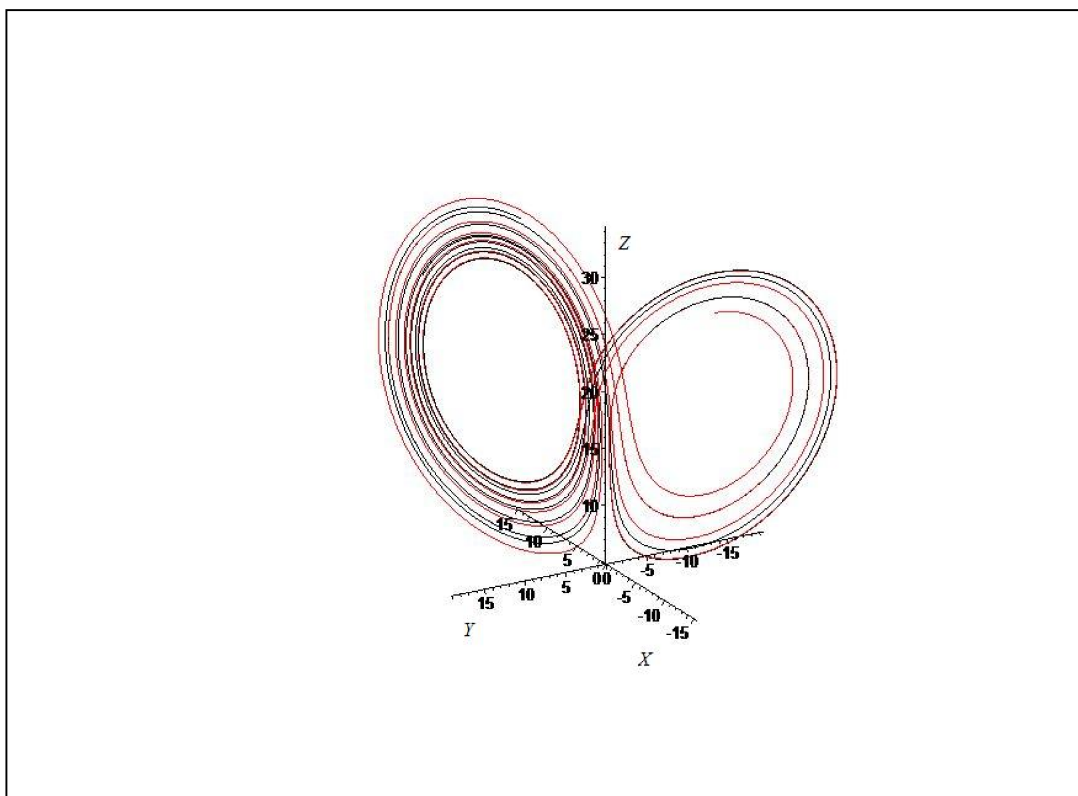
obrázek č. 5.26:  $\tau = 50$ ,  $\Delta d_0 = 0,01$



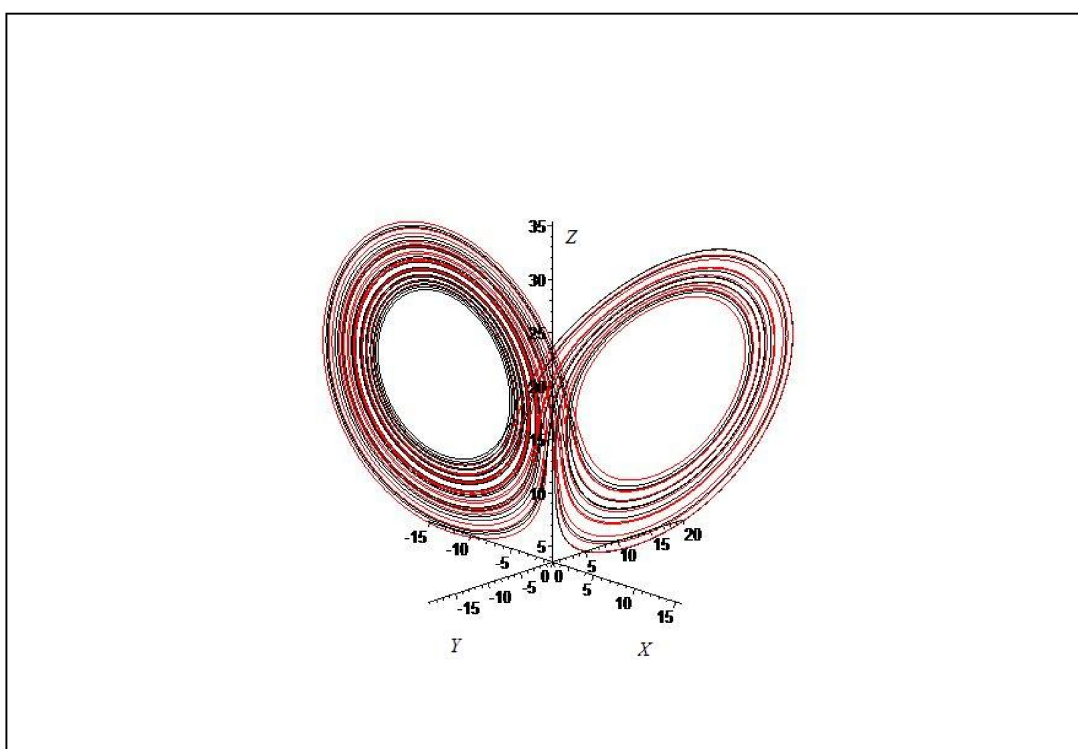
obrázek č. 5.27:  $\tau = 50$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$



obrázek č. 5.28:  $\tau = 4000$ ,  $\Delta d_0 = 0,01$



obrázek č. 5.29:  $\tau = 4000$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$



obrázek č. 5.30:  $\tau = 10000$ ,  $\Delta d_0 = 0,001$

Obrázky 5.24-5.25 ukazují, že pro obě počáteční podmínky směřuje trajektorie do postupně se zvětšujícího cyklu. Pro delší časový vývoj ukazují obrázky 5.25 – 5.30 rozbíhavost dvou blízkých trajektorií podobnou chaotickému chování. Poté se stav ustálí (viz kapitola klimatické modely).

### 5.4.2.3 Globální Ljapunovovy exponenty

Pro model popsany rovnicemi (3.12 – 3.14) s  $r = 22$  jsme určili pro počáteční podmínky  $(-2, 1, 0)$  hodnoty  $\lambda_{i,lok}$ :

$$\lambda_{1,lok} = -1,3, \quad (5.24)$$

$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.25)$$

$$\lambda_{3,lok} = -12,34, \quad (5.26)$$

a pro počáteční podmínky  $(1, 2, 0)$ :

$$\lambda_{1,lok} = -1,4, \quad (5.27)$$

$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.28)$$

$$\lambda_{3,lok} = -12,26. \quad (5.29)$$

Zkoumání systému s parametrem  $r=22$  ukázalo potřebu určení růstu chyby v počátku časového vývoje, a to jak pro chaotický, tak pro nechaotický systém. Tento růst, jak je patrné z  $\lambda_{i,lok}$  pro tento systém, může být velmi odlišný od růstu daného největším globálním Ljapunovovým exponentem. Dále nás toto zkoumání přimělo k potřebě určení tranzitivity nebo netranzitivity daného systému, protože v počátku nebylo jasné, v jaké části stavového prostoru se systém ustálí. Tyto vyřčené problémy, se pokusíme v dalších kapitolách hlouběji analyzovat.



Hodnoty ze vztahů (5.24 – 5.29) se z průběhů  $\lambda_{i,lok}$  nezdají být ve svých limitních hodnotách, a proto globální Ljapunovovy exponenty  $\lambda_i$  pouze hrubě odhadneme z předpokládaných trendů:

$$\lambda_1 = -0,5, \quad (5.30)$$

$$\lambda_2 = 0, \quad (5.31)$$

$$\lambda_3 = -13,2. \quad (5.32)$$

## 5.5 1-dimenzionální atmosférický model

Pro zkoumání růstu chyby určení počátečních podmínek v počátečních časového vývoje respektive počátečního vývoje odchylky dvou blízkých stavů jednoho skutečného a druhého naměřeného zvolíme 1-dimenzionální atmosférický model představený E. Lorenzem v [3]. Tuto volbu učiníme s odůvodněním, že abychom získali relevantní představu o růstu zmíněné odchylky, budeme muset průměrovat přes značný počet hodnot v každém čase a tento model nám to svojí symetrií resp. statistickou nezávislostí proměnných umožňuje.

Řídící rovnice jsou :

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= -X_3X_4 + X_4X_2 - X_1 + F, \\ \frac{dX_2}{dt} &= -X_4X_1 + X_1X_3 - X_2 + F, \\ \frac{dX_3}{dt} &= -X_1X_2 + X_2X_4 - X_3 + F, \\ \frac{dX_4}{dt} &= -X_2X_3 + X_3X_1 - X_4 + F.\end{aligned}\tag{5.33}$$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \dots$  atmosférická veličina (např. teplota)

$t \dots$  čas (jednotka = 5 dní)

$F \dots$  konstanta ( $F=16, F=18$ )

### 5.5.1 Metoda

Mějme počáteční směrodatnou odchylku pro všechny proměnné  $e_{k_0} = 0,001, k = 1, \dots, 4$ , což určuje naměřenou hodnotu  $X_{k_0}$  a skutečnou hodnotu  $X'_{k_0} = X_{k_0} + e_{k_0}$ . Provedeme výpočet rovnic (5.33) nejprve pro dostatečně dlouhou dobu, abychom se zbavili všech přechodných jevů, a poté od jisté hodnoty  $\vec{X}_0$  zvlášť pro  $X_{k_0}$  a  $X'_{k_0}$  s krokem  $h = 0,005$  počtem kroků  $N = 150$  tedy pro 3,75 dní. Získáme 4. sekvence  $X_{k_0}, \dots, X_{k_N}$  a  $X'_{k_0}, \dots, X'_{k_N}$ , z nich určíme  $e_{kn} = X'_{kn} - X_{kn}$  pro

všechny hodnoty  $k$  a  $n = 1, \dots, 150$ . Tento proces opakujeme  $M = 1000$  krát s tím, že nová hodnota  $X_{k0,m} = X_{kN,m-1}$ ,  $m = 1, \dots, M$ .

Abychom získali přehled o průměrném růstu směrodatné odchylky, určíme v každém kroku  $e_{n,m}^2 = \frac{1}{4}(e_{1n}^2 + e_{2n}^2 + e_{3n}^2 + e_{4n}^2)$  a výslednou hodnotu  $E_n^2 = \frac{1}{M}(e_{n,1}^2 + e_{n,2}^2 + \dots + e_{n,M}^2)$ . Pro srovnání s Ljapunovovým exponentem budeme graficky vynášet  $E_n$  a  $\ln(E_n / E_0)$  (kód viz přílohy kapitola 9.7).

### 5.5.2 Parametr ( $F=18$ )

Nejprve systém analyzuje pomocí Ljapunovových exponentů. Obrázky č. 5.31 – 5.33 ukazují graficky vývoj lokálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_{i,lok}$   $i=1, \dots, 4$ . Jak již bylo přestaveno dříve  $\lambda_{2,lok} = 0$ , a proto jeho grafický časový vývoj nebudeme zobrazovat. Výpočet pomocí programu (kód viz přílohy kapitola 9.6) ukázal hodnoty pro časový úsek 25 dní. Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$  jsou:

$$\lambda_{1,lok} = 2,4, \quad (5.34)$$

$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.35)$$

$$\lambda_{3,lok} = -2, \quad (5.36)$$

$$\lambda_{4,lok} = -4,2. \quad (5.37)$$

Jacobiho matice systému (5.33) má tvar:

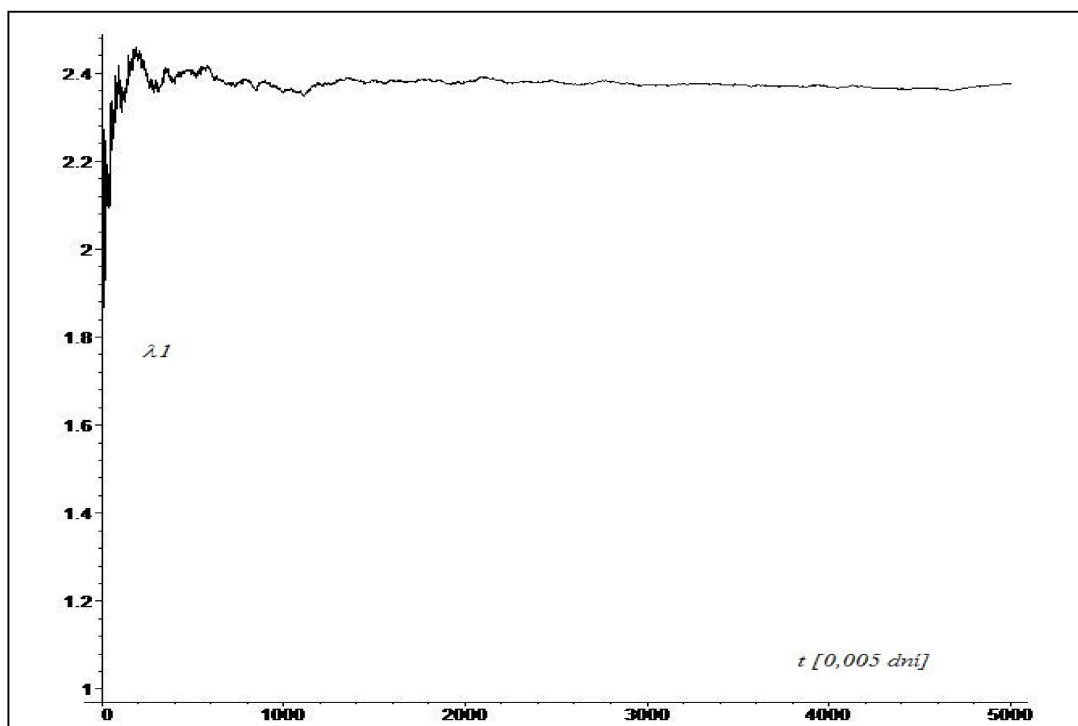
$$J = \begin{pmatrix} -1 & X_4 & -X_4 & -X_3 + X_2 \\ -X_4 + X_3 & -1 & X_1 & -X_1 \\ -X_2 & -X_1 + X_4 & -1 & X_2 \\ X_3 & -X_3 & -X_1 + X_2 & -1 \end{pmatrix},$$

s  $Tr\tilde{J} = -4$

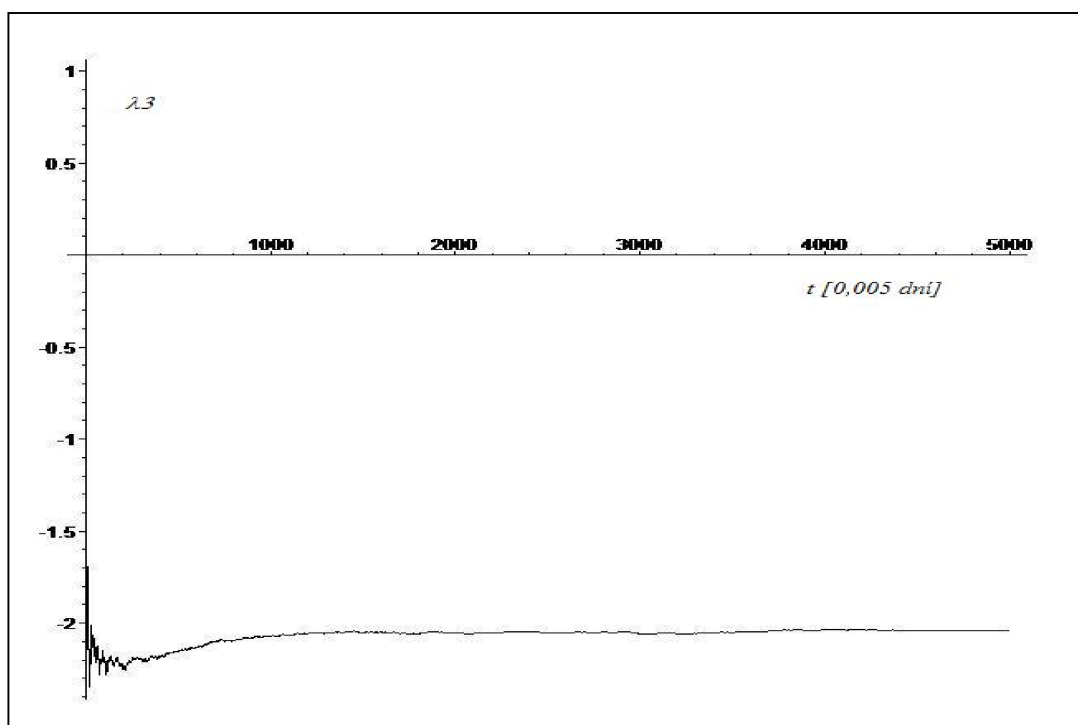
Součet  $\lambda_{i,lok}$ :

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_{i,lok} = -3,8 \approx -4,$$

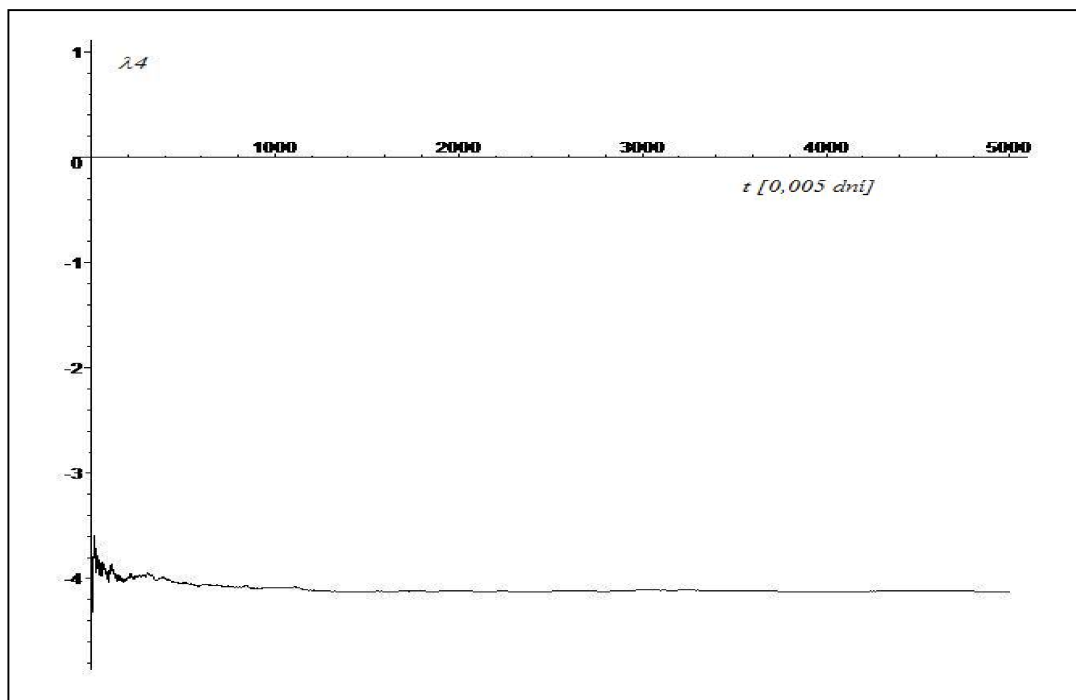
což je v dobré shodě s  $Tr\tilde{J} = -4$  systému (5.33).



obrázek 5.31: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{1,lok}$



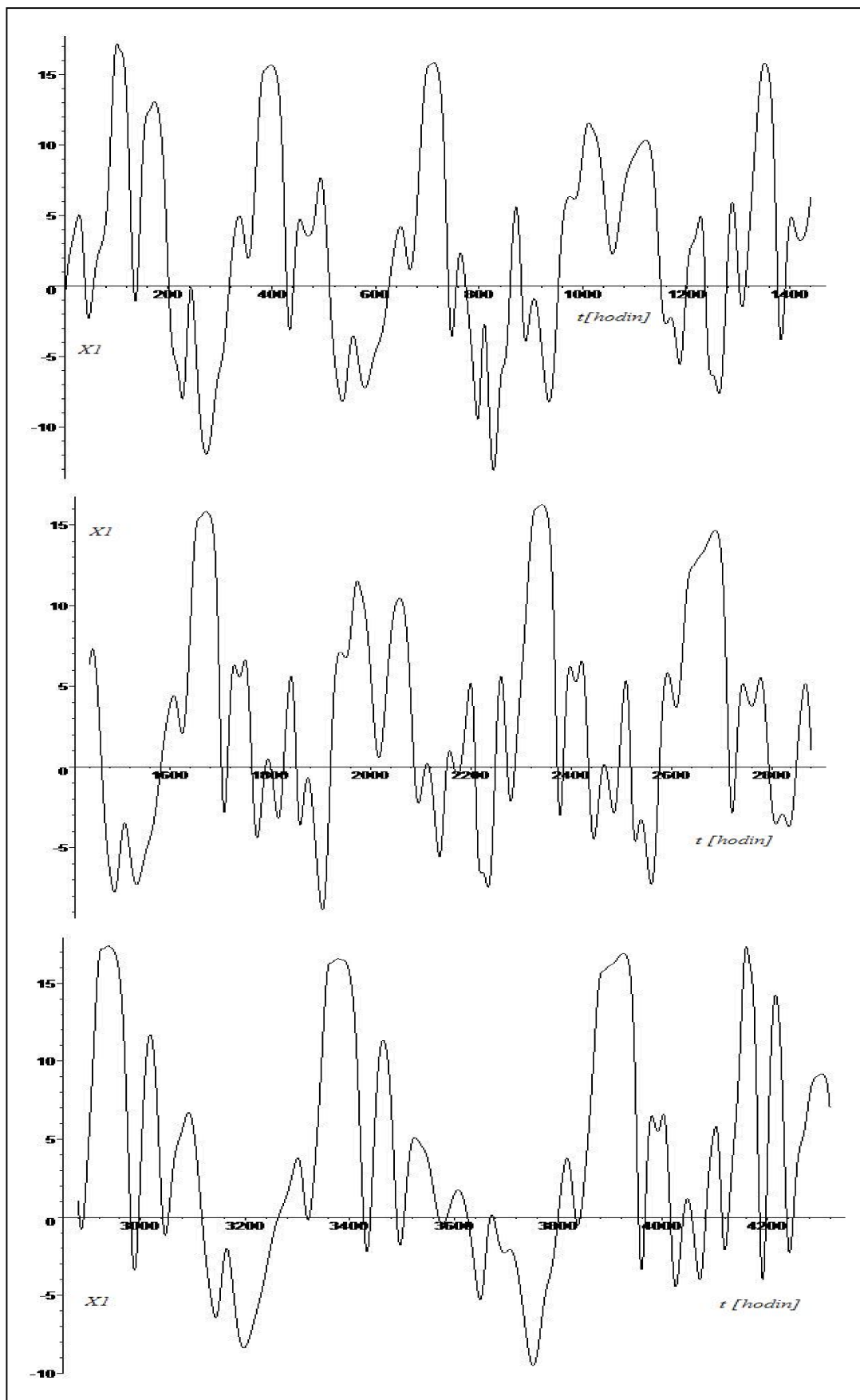
obrázek 5.32: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{3,lok}$



obrázek 5.33: časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{4,lok}$

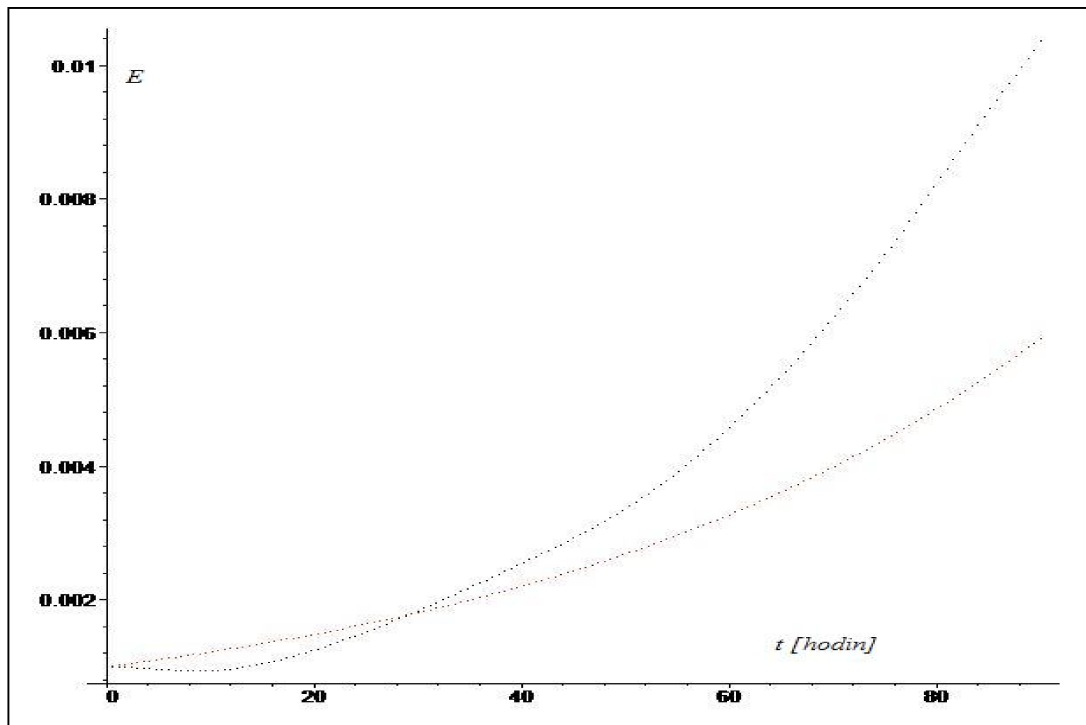
Protože budeme hodnoty srovnávat s růstem odchylky do 4 dnů, nebudeme hledat globální Ljapunovův exponent  $\lambda$ , ale použijeme zjištěné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$ . Protože  $\lambda_{1,lok} = 2,4$  jedná se o divergentní (chaotický) systém.

Obrázek č. 5.34 ukazují časový vývoj proměnné  $X_1$  pro 180 dní (4320) ve třech sekvencích po 60 dnech nad sebou. Hodnoty leží převážně mezi  $-12$  až  $+17$ , proto přirovnání atmosférické veličiny  $X$  s teplotou. Existuje přibližně 14 maxim a 14 minim, pro každých 60 dní, ale žádná periodičita.

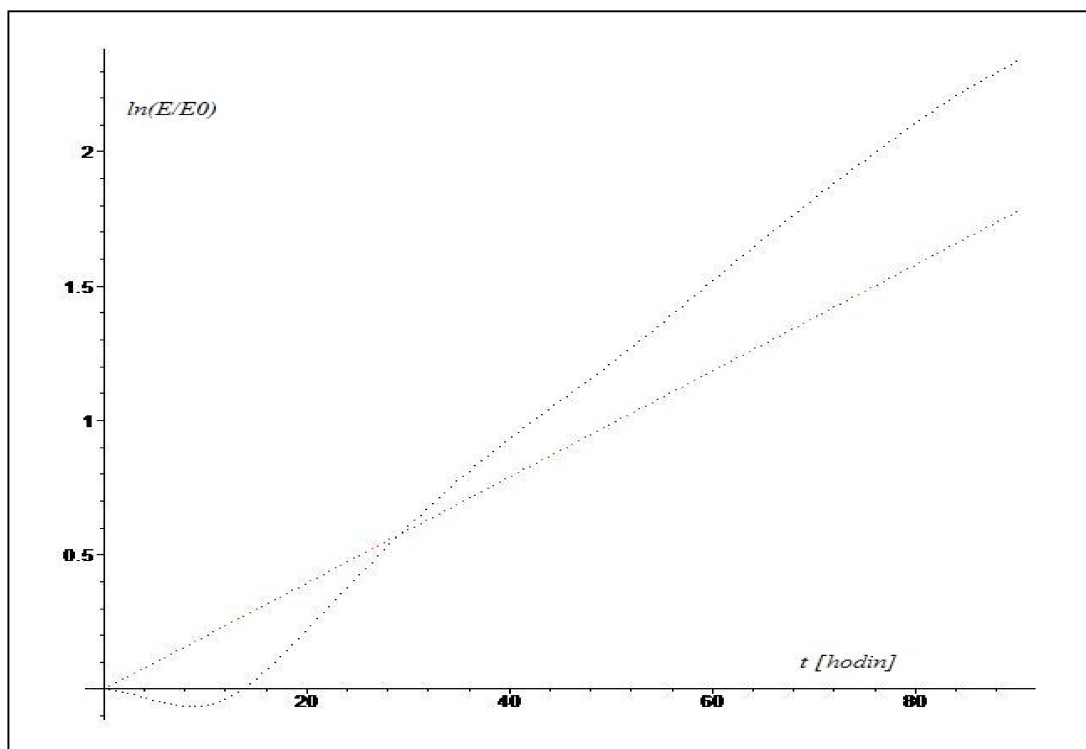


obrázek 5.34: Časový průběh proměnné  $X_1$

Na obrázku č. 5.35 vidíme hodnoty  $E_n, n=1, \dots, 150$  společně s  $\Delta d_n = 0,001 \cdot e^{\lambda_1 n h}$  a na obrázku č. 5.36  $\ln(E_n / E_0)$  s  $\ln(\Delta d_n / 0,001) = \lambda_1 \cdot h \cdot n$ .



obrázek 5.35: Srovnání  $E_n$  (černá) a  $\Delta d_n$  (červená)



obrázek 5.36: Srovnání  $\ln(E_n / E_0)$  (černá) a  $\ln(\Delta d_n / 0,001)$  (červená)

Obrázek č. 5.35 ukazuje větší nárůst chyby, než ukazuje největší Ljapunovův exponent  $\lambda_{i,lok}$  a obrázek č. 5.36 toto díky způsobu zobrazení zvýrazňuje. Podrobněji si problém rozebereme v podkapitole Diskuze.

### 5.5.3 Parametr ( $F = 16$ )

Systém opět analyzuje pomocí Ljapunovových exponentů. Obrázky č. 5.37 – 5.39 ukazují graficky vývoj lokálních Ljapunovových exponentů  $\lambda_{i,lok}$   $i=1, \dots, 4$ . Výpočet pomocí programu (kód viz přílohy kapitola 9.6) ukázal hodnoty pro časový úsek 25 dní. Výsledné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$  jsou:

$$\lambda_{1,lok} = 2,18, \quad (5.38)$$

$$\lambda_{2,lok} = 0, \quad (5.39)$$

$$\lambda_{3,lok} = -2, \quad (5.40)$$

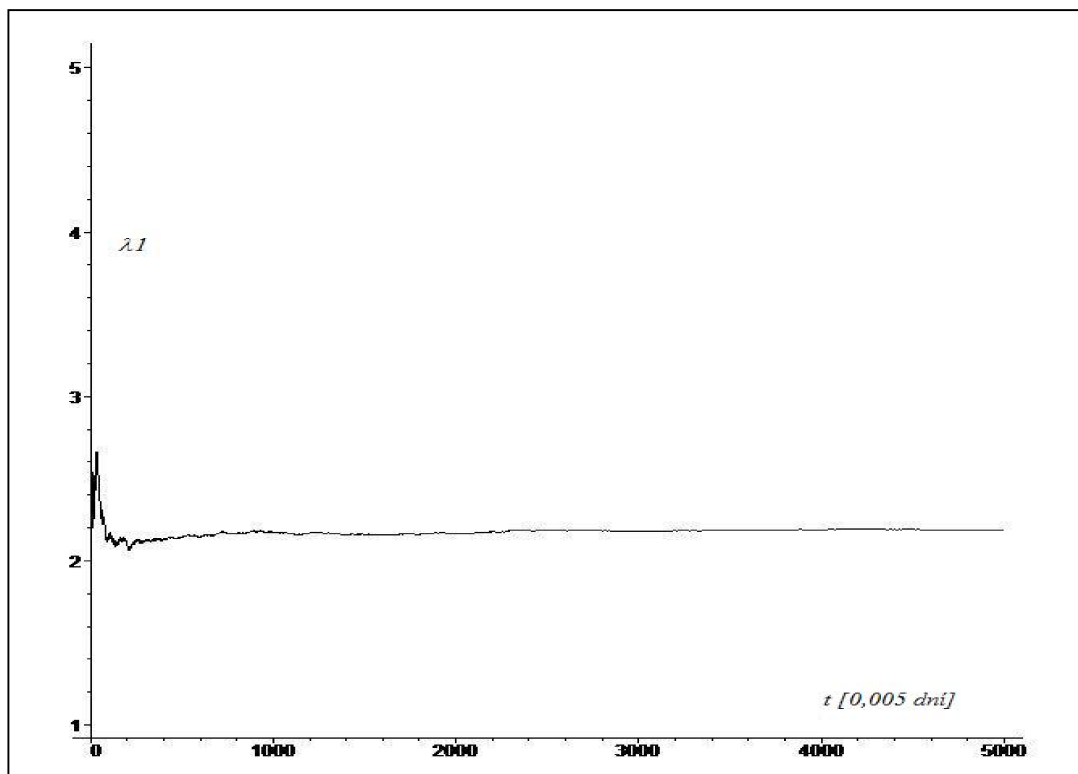
$$\lambda_{4,lok} = -4. \quad (5.41)$$

Součet  $\lambda_{i,lok}$  :

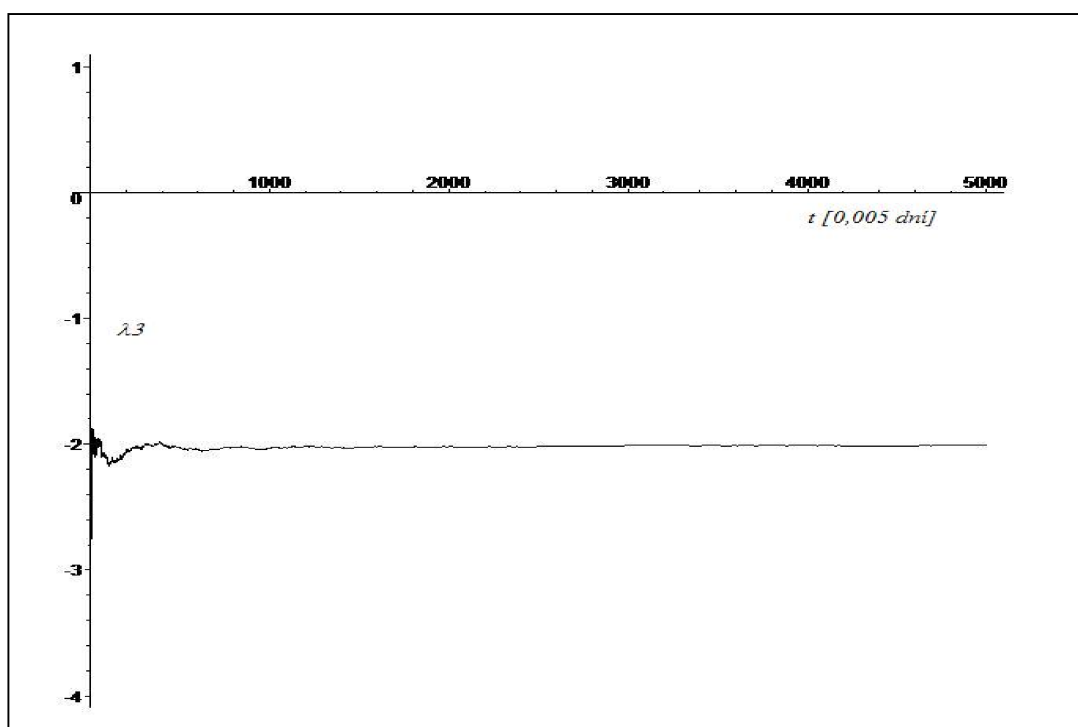
$$\sum_{i=1}^4 \lambda_{i,lok} = -3,8 \approx -4,$$

což je v dobré shodě s  $Tr\vec{J} = -4$  systému (5.33).

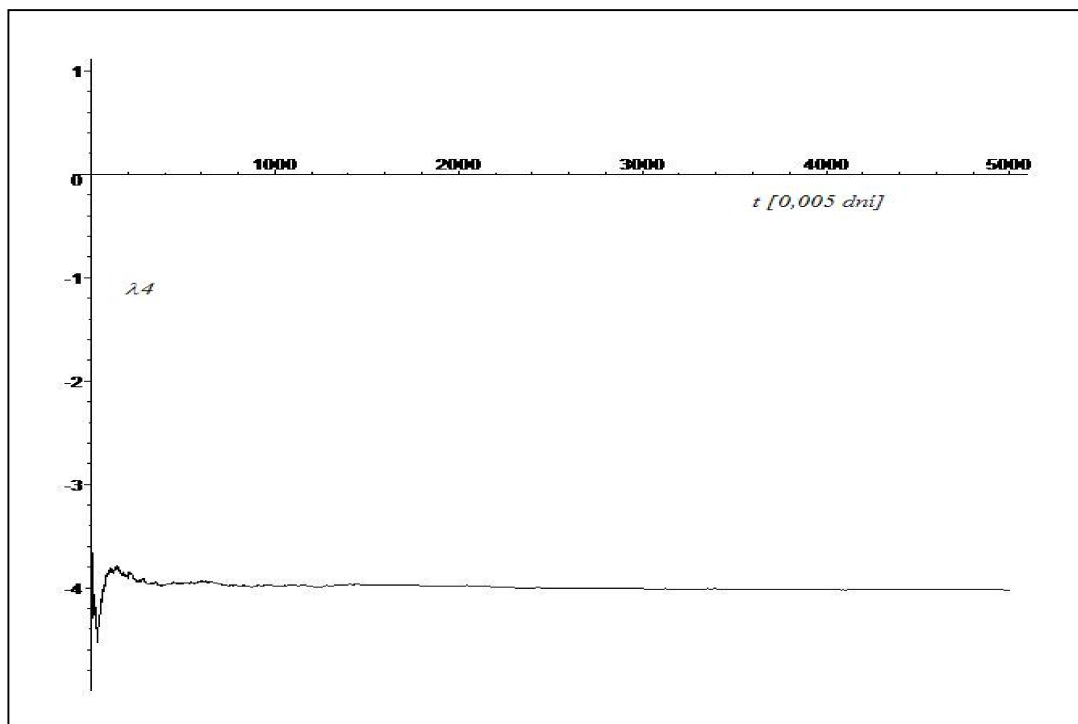




obrázek 5.37: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{1,lok}$



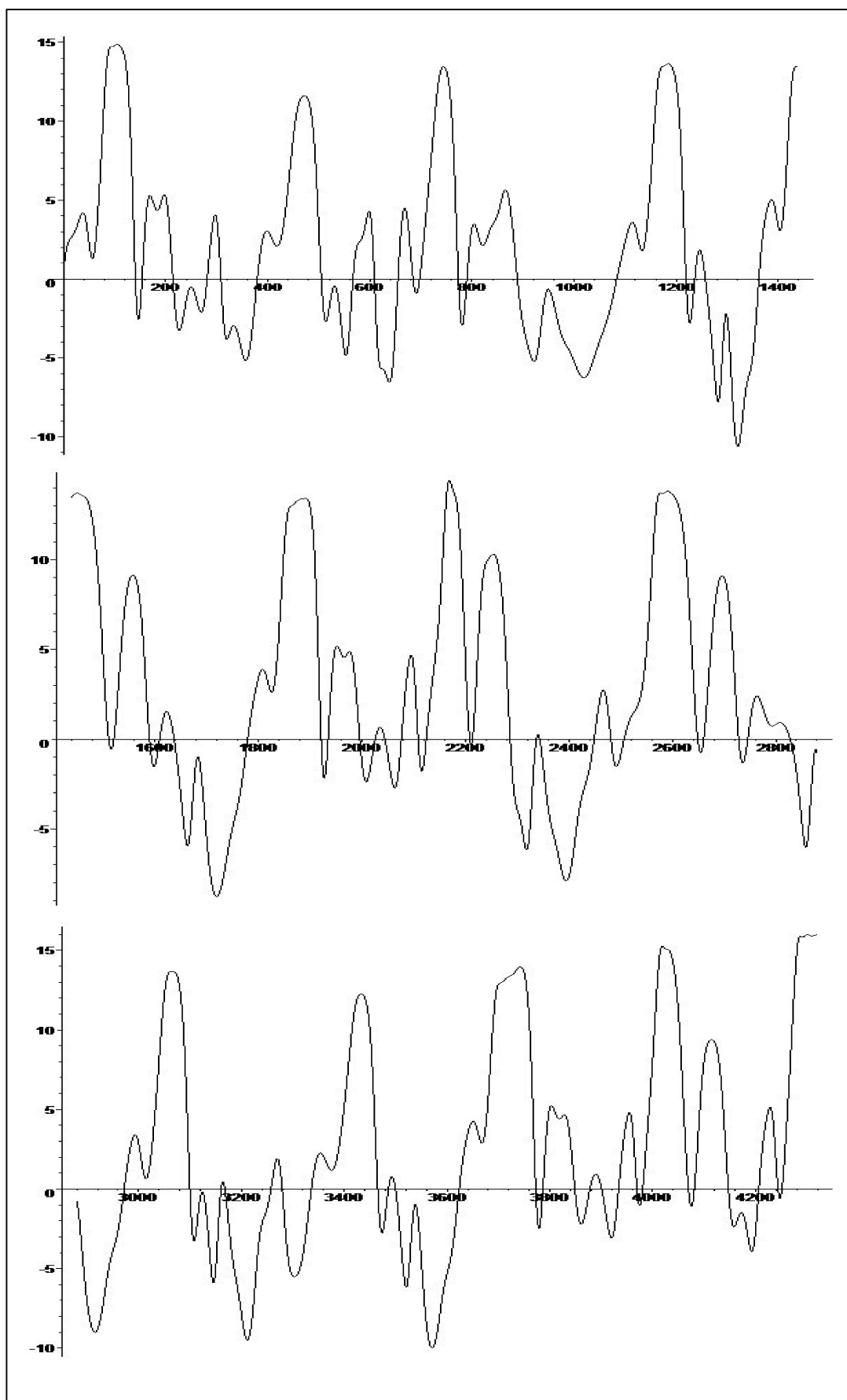
obrázek 5.38: Časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{3,lok}$



obrázek 5.39: časový vývoj lokálního Ljapunovova exponentu  $\lambda_{4,lok}$

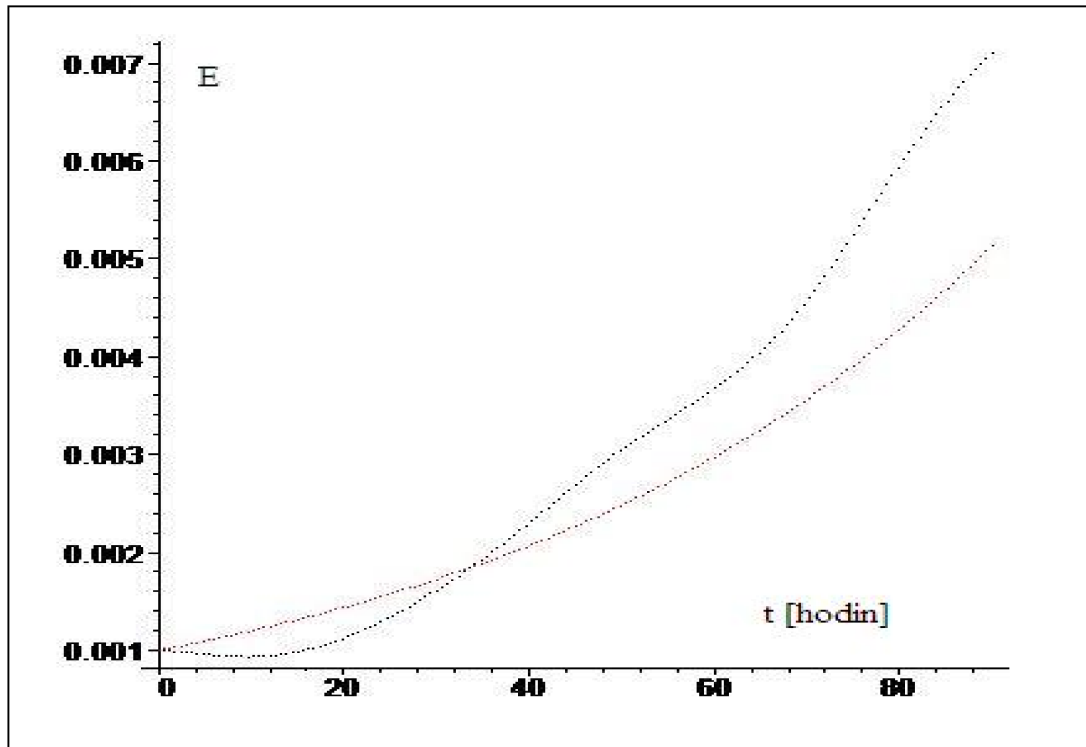
Protože budeme hodnoty srovnávat s růstem odchylky do 4 dnů, nebudeme hledat globální Ljapunovův exponent  $\lambda$ , ale použijeme zjištěné hodnoty  $\lambda_{i,lok}$ . Protože  $\lambda_{1,lok} = 2,18$ , jedná se o divergentní (chaotický) systém.

Obrázky č. 5.40 ukazují časový vývoj proměnné  $X_1$  pro 180 dní (4320 hodin) ve třech sekvencích po 60 dnech nad sebou. Hodnoty leží převážně mezi  $-10$  až  $+15$ . Existuje přibližně 12 maxim a 12 minim pro každých 60 dní, ale žádná periodicitá.

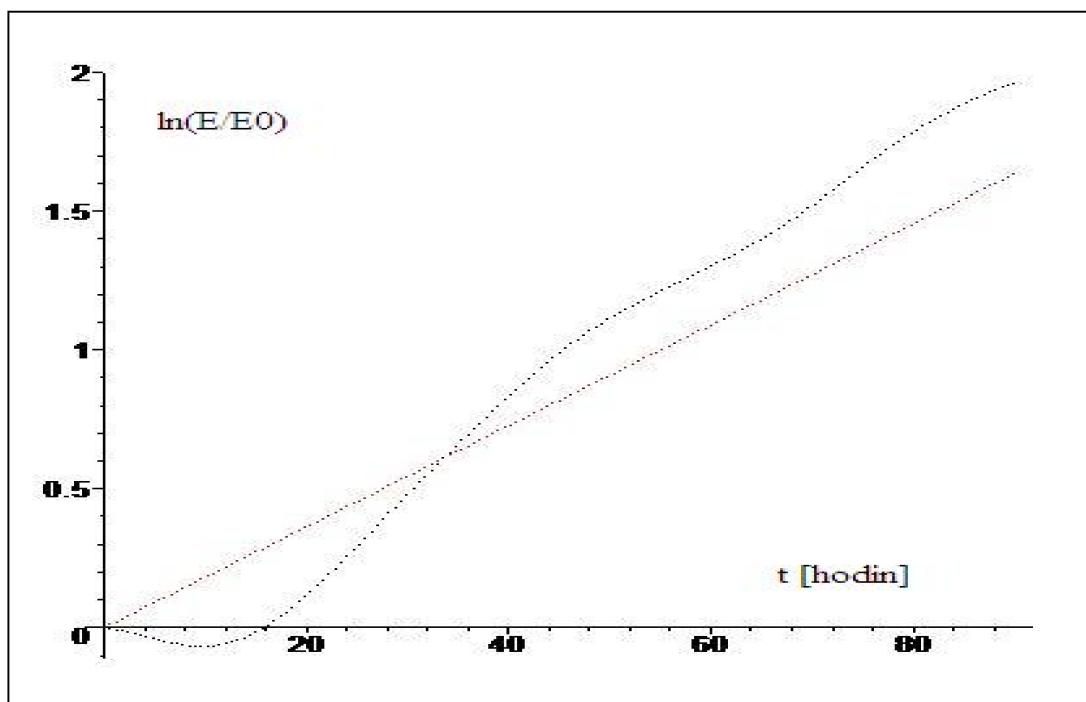


obrázek 5.40: Časový průběh proměnné  $X_1$

Na obrázku č. 5.41 vidíme hodnoty  $E_n, n=1, \dots, 150$  společně s  $\Delta d_n = 0,001 \cdot e^{\lambda_1 n h}$  a na obrázku č. 5.42  $\ln(E_n / E_0)$  s  $\ln(\Delta d_n / 0,001) = \lambda_1 \cdot h \cdot n$ .



obrázek 5.41: Srovnání  $E_n$  (černá) a  $\Delta d_n$  (červená)



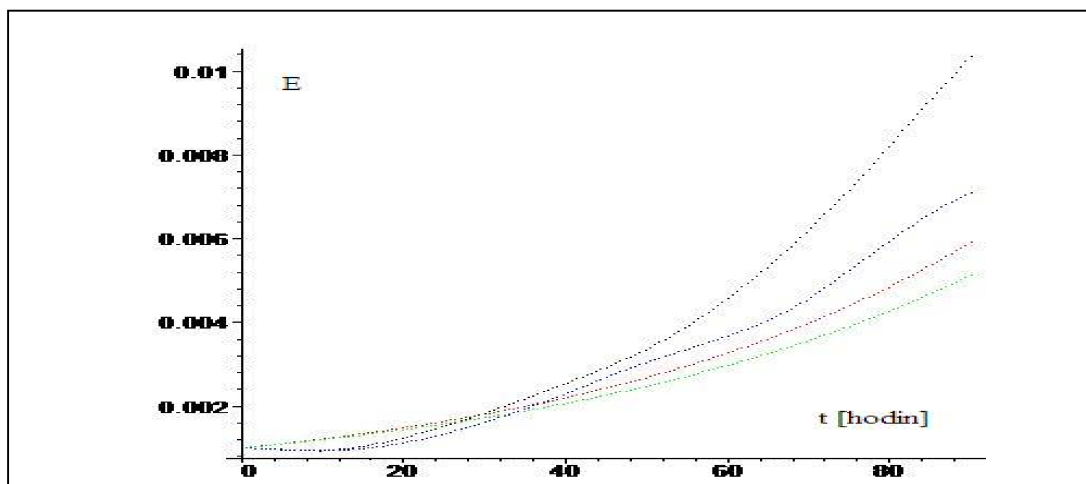
obrázek 5.42: Srovnání  $\ln(E_n / E_0)$  (černá) a  $\ln(\Delta d_n / 0,001)$  (červená)

Obrázek č. 5.41 ukazuje větší nárůst chyby, než ukazuje největší Ljapunův exponent  $\lambda_{1,lok}$  a obrázek č. 5.42 toto díky způsobu zobrazení zvýrazňuje. Podrobněji problém rozebereme v podkapitole Diskuze.

### 5.5.4 Diskuze

Vysvětlení jiného chování, než předpokládaného růstu či poklesu počáteční chyby hledejme v definici Ljapunova exponentu, jako průměrné míry růstu malé chyby. Podle [3] je právě počáteční a konečná fáze růstu chyby odlišná od růstu daného Ljapunovým exponentem, a to jak pro málo-dimenzionální modely, tak pro globální cirkulační modely. Pokud nás zajímá růst chyby v těchto oblastech, nemůže již využít hodnot plynoucích z Ljapunových exponentů a ani nemůžeme očekávat pokles chyby pro konvergentní systémy již od počátku vývoje.

Pro obě hodnoty parametru  $F$  pozorujeme v prvních 30 hodinách menší nárůst směrodatné odchyly  $E_n$  ve srovnání s nárůstem daným Ljapunovým exponent  $\Delta d_n$  (viz obrázky č. 5.41 a 5.35). Po uplynutí 72 hodin je směrodatná odchyly  $E_n$  pro  $F = 18$  dvojnásobná (pro  $F = 16$  je rozdíl nižší). Dvojnásobnou hodnotu dokládá i práce [3]. Obrázek č. 5.42 posledně zmiňované potvrzuje. Pro nižší hodnotu největšího Ljapunova exponentu je patrná nižší hodnota zjištěné směrodatné odchyly  $E_n$ .



Obrázek č. 5.42: Srovnání  $E_n^{F=18}$  (čern.),  $\Delta d_n^{F=18}$  (červ.),  $E_n^{F=16}$  (modr.),  $\Delta d_n^{F=16}$  (zel.)

## **5.6 Závěr pro meteorologické modely**

Definovali jsme růst vzdálenosti dvou trajektorií ve stavovém prostoru pomocí Ljapunovova exponentu. Tyto dvě trajektorie pro nás představují časový vývoj skutečného a naměřeného stavu. Následně jsme pak ukázali, že Ljapunovův exponent je jen prvním přiblížením a existují oblasti časového vývoje, kde pozorujeme odlišný růst vzdálenosti předpokládaný ze zavedení Ljapunovových exponentů. Demonstrovali jsme tuto odlišnost pro počáteční růst chyby (rozdílu mezi skutečným a naměřeným stavem). Další odlišnosti (dle [3]) nastávají pro pozdější vývoj chyby, předtím než dosáhne stavu „nasyčení“. Je třeba též zmínit, že Ljapunovův exponent je definován pro růst malé chyby. V případě chyb větších je (dle [3]) pozorován opět jiný vývoj.

## 6 Klimatické modely

### 6.1 *Stručný úvod do klimatických modelů*

Klima (dle [15]) je podle Světové klimatické konference (WCC) z roku 1979 syntézou počasí přes celé období dostatečně dlouhé pro určení statistických vlastností (průměr, rozptyl, pravděpodobnost extrémů atd.) a je nezávislé na nějakém okamžitém stavu. Tímto obdobím je podle WCC 30 let. Mezivládní panel pro klimatické změny připravuje zprávy po 5ti letech.

U meteorologických modelů uvažujeme interakci atmosféry s okolím pouze pomocí okrajových podmínek a vnějších sil. Tento jednosměrný nedynamický vztah bez možnosti zpětné vazby atmosféry na ostatní subsystémy podmiňujeme skutečností, že ve srovnání s atmosférou jsou tyto změny zpravidla mnohem pomalejší a v porovnání s chybou vzniklou citlivostí na počáteční podmínky je chyba vzniklá z tohoto zjednodušení mnohem menší. Z definice klimatu je však patrné, že pro klimatické modely toto již možné nebude a rovnice popisující atmosféru budou jen jednou z částí popisu celého systému, složeného z daných subsystémů.

V předešlé kapitole jsme ukázali, že nemůžeme běžně provádět seriózní meteorologickou předpověď delší než přibližně 10 dní. Důvod, proč se nyní snažíme předpovídat jisté hodnoty na desítky a stovky let dopředu leží v definici počasí a klimatu. U předpovědi aktuálního stavu počasí se jedná o přesný deterministický časový vývoj co nejpřesněji definovaného stavu (s omezeními plynoucími z deterministického chaosu). U určování časového vývoje klimatu vycházíme z průměrných veličin a jejich proměnlivosti, a proto se nesnažíme určit přesný stav atmosféry, ale spíše určujeme vývoje možných hodnot těchto průměrných veličin a jejich proměnlivosti.

Stejně jako v předcházející kapitole můžeme opět charakterizovat stav atmosféry jako bod v mnohdimenzonálním stavovém prostoru a sledovat její vývoj jako křivku, určenou řídicími rovnicemi a směřující do atraktoru, jehož poloha a tvar se může měnit vlivem vnějších podmínek. Jakýkoliv atraktor i přes sebesložitější vnitřní strukturu vymezuje přesně určený objem fázového prostoru a je možné ho popsat statistickými metodami jako jednu hodnotu a její variabilitu. Můžeme též hledat prostor s větší hustotou bodů a tedy s větší pravděpodobností výskytu tohoto stavu. Díky tomu, že pouze přibližně sto let získáváme klimatické údaje a získané informace o klimatu v hlubší minulosti popisují systém neúplně, máme v současnosti

k dispozici pouze pár bodů stavového prostoru. Přínos klimatického modelu může tedy být též v určení atraktoru a jeho statistických parametrů pro zkoumaný systém. Abychom mohli plně využít charakteristik atraktoru, musíme požadovat jeho co největší neměnnost v čase. Takovýto autonomní systém získáme pouze za předpokladu neměnnosti vnějších podmínek, což znamená snahu zahrnout „dovnitř“ co nejvíce subsystémů, procesů a cyklů.

Dnešní klimatické modely modelují klima pomocí mnoha modelů, např. tomu, co vychází z rovnic, popisujících dynamiku atmosféry, oceánů, zemského povrchu a kryosféry s přidáním interagujících modulů, popisujících chování aerosolů a uhlíkového cyklu se říká AOGCM (Atmosphere-Ocean General Circulation Models). Z důvodů nutnosti dlouhé časové integrace musíme snížit rozlišení, v oblasti atmosféry se jedná o desítky a stovky km horizontálně a jednotky km vertikálně (u povrchu se vrstvy zhušťují) a pro oceán od 125 do 250 km horizontálně a od 200 do 400 m vertikálně, což vede opět k nutnosti zavedení parametrizací.

První věc, co od klimatických modelů požadujeme, je adekvátní rekonstrukce minulosti (validace). Řešení problému citlivosti počátečních podmínek jsme již nastínili a za předpokladu konstantnosti vnějších vlivů hledáme atraktor. Díky vysoké dimenzi problému musíme pro statistický popis zvolit jen základní proměnné. Smyslem ansámblových předpovědí s různými počátečními podmínkami je nyní možnost detailnějšího a úplnějšího vykreslení atraktoru a též možnost určení, zda skutečná data, popisující minulost, spadají do jedné z tříd (určené vnějšími vlivy) klimatických hodnot simulovaných modelem. Během validace je též možné zkoumat citlivost na změny v řídicích rovnicích a parametrizacích, nebo porovnávat výsledky mezi různými modely. Poté, co jsme zvalidovali konzistentní model, zkoumáme dopady změn okrajových podmínek a vnějších sil a hledáme ty, které mají velký dopad na klimatické změny.

Při určování možných budoucích scénářů, děláme některé předpovědi pro vnější podmínky modelu shodné s přítomnými (kontrolní běh), některé s podmínkami v extrémních hodnotách. Pomocí tohoto ansámblu určíme změny v statistickém popisu atraktorů, které nastanou. Je třeba poznamenat, že se pohybujeme na poli statistiky a pokud perturbované podmínky spadají do nejistoty kontrolního běhu, tak ještě nemůžeme hovořit o změně klimatu na základě této změny počátečních vnějších parametrů modelu.



Zatím jsme se zabývali pouze autonomními systémy s atraktory jako statickými obrazci ve stavovém prostoru. Jak při validaci, tak pro budoucí scénáře tato podmínka není splněna. Systém nemůže být vždy zkoumán v rovnovážném stavu, ale jako stále se měnící trajektorie směřuje do atraktoru a při změně vnějších podmínek může změnit náhle směřování do atraktoru jiného (pseudotranzitivnost).

Cíle našeho zkoumání tedy bude popsat metody pro určení typů atraktorů a vytvořit úplný výčet, kam zvolený model může směřovat při měnících se vnějších vlivech a přiřadit těmto druhům atraktoru hodnoty vnějšího parametru.

## 6.2 Typy pevných bodů

Zabývejme se typy pevných bodů v 1-dim., 2-dim. a 3-dimenzionálním stavovém prostoru pro disipativní systémy. Tato problematika již byla představena v práci [10]

### 6.2.1 1-dimenzionální stavový prostor

Dynamický systém je popsán dynamickou rovnicí:

$$\frac{dX}{dt} = f(X). \quad (6.1)$$

*X...proměnná*

*t...čas*

Pevný bod  $X_p$  je takový bod, v němž se proměnná hodnota s časem již nevyvíjí tj., když se trajektorie dostane do tohoto bodu, zůstane tam :

$$\left. \frac{dX}{dt} \right|_{X_p} = 0. \quad (6.2)$$

Taylorův rozvoj v blízkosti  $X_p$  má tvar :

$$f(X) = f(X_p) + (X - X_p) \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X_p} + \dots, \quad (6.3)$$

a po substituci  $x = (X - X_p)$  a zanedbání vyšších derivací přejde na tvar:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X_p} x. \quad (6.4)$$

První člen pravé strany rovnice 6.4 je již představený lokální Ljapunovův exponent  $\lambda = (df(X)/dX)|_{X_p}$  a po jeho zavedení dostaneme řešení rovnice 6.4 v tvaru:

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t}, \quad (6.5)$$

$x(0)$  ...počáteční vzdálenost  $x = (X - X_p)$ .

Z této rovnice je patrné i určení typů pevných bodů, které závisí na  $\lambda$ . Pokud je  $x(t) < x(0)$  trajektorie je do tohoto bodu přitahována a mluvíme o stabilním pevném bodu (**Uzel**). Pokud je  $x(t) > x(0)$  trajektorie je odpuzována a hovoříme o nestabilním pevném bodu (**Repelor**). Pokud je trajektorie z jedné strany přitahována a z druhé odpuzována jedná se o **Sedlový bod**. Podrobný výčet ukazuje obrázek č. 6.1.

$\lambda$	$\frac{d\lambda}{dx}$	$\frac{d\lambda}{dx}$	typ
	vlevo od $X_0$	vpravo od $X_0$	
< 0			uzel
> 0			repelor
0	> 0	< 0	uzel
	< 0	> 0	repelor
	> 0	> 0	sedlový bod 1
	< 0	< 0	sedlový bod 2

obrázek 6.1: tabulka typů pevných bodů v závislosti na  $\lambda$

## 6.2.2 2-dimenzionální stavový prostor

Dynamický systém je popsán dynamickými rovnicemi:

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y), \quad (6.6)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y). \quad (6.7)$$

S pevným bodem  $(X_p, Y_p)$ :

$$\left. \frac{dX}{dt} \right|_{X_p} = 0, \quad (6.8)$$

$$\left. \frac{dY}{dt} \right|_{X_p} = 0. \quad (6.9)$$

Opět nás zajímá Taylorův rozvoj blízko  $(X_p, Y_p)$ :

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y) = (X - X_p) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X} \right|_{X_p} + (Y - Y_p) \left. \frac{\partial f_1}{\partial Y} \right|_{Y_p} + \dots, \quad (6.10)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y) = (X - X_p) \left. \frac{\partial f_2}{\partial X} \right|_{X_p} + (Y - Y_p) \left. \frac{\partial f_2}{\partial Y} \right|_{Y_p} + \dots, \quad (6.11)$$

a stejně jako v předešlém případě provedeme substituci  $x = (X - X_0)$ ,  $y = (Y - Y_0)$ , zanedbáme vyšší derivace a s uvědoměním si faktu, že  $dx/dt = dX/dt$ ,  $dy/dt = dY/dt$  přejdou rovnice (6.10 – 6.11) na tvar:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x} x + \frac{\partial f_1}{\partial y} y, \quad (6.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x} x + \frac{\partial f_2}{\partial y} y. \quad (6.13)$$

Z matematického hlediska se jedná o soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty, kterou převedeme na jednu diferenciální rovnici druhého řádu. Nejprve rovnici (6.12) derivujeme podle času  $t$ :

$$\ddot{x} = f_{11}\dot{x} + f_{22}\dot{y}, \quad (6.14)$$

kde tečka znamená derivaci podle času,  $f_{i1} = \partial f_i / \partial x$  a  $f_{i2} = \partial f_i / \partial y$ . Dále dosadíme za  $\dot{y}$  z rovnice (6.13):

$$\ddot{x} = f_{11}\dot{x} + f_{12}(f_{21}x + f_{22}y), \quad (6.15)$$

a z rovnice (6.13) opět dosadíme, nyní však za  $y$ :

$$\ddot{x} = (f_{11} + f_{22})\dot{x} + (f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22})x. \quad (6.16)$$

Řešení rovnice (6.16) spočívá v substituci  $x = e^{\lambda t}$  a převedení na tzv. charakteristickou rovnici pro  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = 0, \quad (6.17)$$

jejíž kořeny mají tvar:

$$\lambda_{\pm} = \frac{f_{11} + f_{22} \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2}. \quad (6.18)$$

Obecné řešení tedy vypadá:

$$x(t) = Ce^{\lambda_+ t} + De^{\lambda_- t}, \quad (6.19)$$

kde  $C$  a  $D$  získáme z počátečních podmínek  $x(0)$  a  $y(0)$ .

Kořeny rovnice (6.18) patří do oboru komplexních čísel, a proto rovnici (6.19) můžeme přepsat:

$$x(t) = e^{Rt} [Ce^{i\Omega t} + De^{-i\Omega t}], \quad (6.20)$$

kde  $\lambda = R \pm i\Omega$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $R = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22})$  a  $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{|(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})|}$ .

Dále předpokládáme  $C = -D$ ,  $e^{\pm i\phi} = \cos \phi \pm i \sin \phi$  a získáme finální tvar:

$$x(t) = Fe^{Rt} \sin(\Omega t). \quad (6.21)$$

*F...integrační konstanta*

Obdobně bychom dostaly i tvary pro  $y(t)$ , ale jejich konkrétní hodnota není pro náš další postup důležitá.

Definujme nyní Jacobiho matici  $J$ :

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

kde  $f_{ij}$  je  $f_{i1} = \partial f_i / \partial x$  a  $f_{i2} = \partial f_i / \partial y$ ,  $i = 1, 2$ . Vlastní čísla této matice poté určíme:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (6.23)$$

$$\lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = 0, \quad (6.24)$$

což je výraz určený rovnicí (6.17) a vede k výsledku (6.21). Definujme stopu Jacobiho matice  $Tr J$ :

$$Tr J = f_{11} + f_{22}. \quad (6.25)$$

Jak je patrné z rovnice (6.23),  $Tr J$  je rovno součtu charakteristických hodnot:

$$\lambda_+ + \lambda_- = Tr J = f_{11} + f_{22} = 2R. \quad (6.26)$$

Opět je pro určení typu pevného bodu důležitý exponenciální růst (**Repelor**) nebo pokles (**Atraktor**) rovnice (6.21) vyjádřený vztahem (6.26). Označme

determinant matice  $J$  symbolem  $\Delta$ . Pevné body poté určíme dle obr. 5.2. Novým je zde spirální chování trajektorie, kde trajektorie obtáčí při směřování pevný bod.

		$Tr J < 0$	$Tr J > 0$
	$\Delta > (1/4)(Tr J)^2$	spirální uzel	spirální repelor
	$0 < \Delta < (1/4)(Tr J)^2$	uzel	repelor
	$\Delta < 0$	sedlový bod	sedlový bod

obrázek 6.2: tabulka typů pevných bodů v závislosti na  $\Delta$  a  $Tr J$

Ještě jsme nezmínili možnost, kdy v rovnici (6.21) je  $R = 0$ , poté ve dvou- a vícedimenzionální fázových prostorech pozorujeme cyklické či periodické chování, které je reprezentované *limitním cyklem*. Trajektorie, která se dostane na dráhu tohoto cyklu, se po něm nadále pohybuje.

### 6.2.3 3-dimenzionální stavový prostor

Dynamický systém je popsán dynamickými rovnicemi:

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y, Z), \quad (6.27)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y, Z), \quad (6.28)$$

$$\frac{dZ}{dt} = f_3(X, Y, Z). \quad (6.29)$$

Pevný bod  $(X_P, Y_P, Z_P)$  je definován:

$$\left. \frac{dX}{dt} \right|_{X_P} = 0, \quad (6.30)$$

$$\left. \frac{dY}{dt} \right|_{Y_P} = 0, \quad (6.31)$$

$$\left. \frac{dZ}{dt} \right|_{Z_P} = 0. \quad (6.32)$$

Při určování pevných bodů bychom opět vyšli z Jacobiho matice a z charakteristické rovnice bychom určili kořeny  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$ . Tyto kořeny mají opět komplexní tvar a jejich reálná a imaginární část určuje konkrétní typ pevného bodu (viz obr. 6.3).

	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$	
	Reálná	Imaginární	Reálná	Imaginární	Reálná	Imaginární
	část	část	část	část	část	část
uzel	< 0	0	< 0	0	< 0	0
spirální uzel	< 0	0	< 0	< 0	< 0	> 0
repelor	> 0	0	> 0	0	> 0	0
spirální repelor	> 0	0	> 0	> 0	> 0	< 0
sedlový bod I	< 0	0	< 0	0	> 0	0
sedlový bod II	< 0	0	> 0	0	> 0	0
spirální sedlový bod I	< 0	< 0	< 0	< 0	> 0	0
spirální sedlový bod II	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0	0

obrázek 6.3: tabulka typů pevných bodů charakterizovaných kořeny charakteristické rovnice

Vedle limitního cyklu, který se objevil již ve 2-dim. stavovém prostoru, vznikají ve 3-dim. a více dim. stavovém prostoru dva nové limitní tvary. První je tvořen dvěma různými periodickými pohyby a vytváří se tak ve stavovém prostoru limitní pohyb na povrchu toru. Druhý popisuje chaotické chování systému. Tento atraktor vybočuje z konceptu předchozích případů, protože se neustálí ani po velmi dlouhé době a ve stavovém prostoru vzniká nekonvergující křivka. (o vlastnostech chaotického atraktoru jsme již mluvili ve 4. kapitole)

### 6.3 Model konvekce

Ukažme si představené poznatky pro již známý model, popsany rovnicemi:

$$\frac{dX}{d\tau} = -10.X + 10.Y, \quad (3.12)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \quad (3.13)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - \frac{8}{3}Z. \quad (3.14)$$

$X, Y, Z \dots$  proměnné,

$\tau \dots$  bezrozměrný čas,

$r \dots$  parametr.

#### 6.3.1 Pevné body

Nejprve určíme pevné body  $(X_P, Y_P, Z_P)$  tj. řešení rovnic:

$$-10.X + 10.Y = 0, \quad (6.33)$$

$$-XZ + rX - Y = 0, \quad (6.34)$$

$$XY - \frac{8}{3}Z = 0, \quad (6.35)$$



s výslednými hodnotami 3. pevných bodů:

$$(X_{P,1}, Y_{P,1}, Z_{P,1}) = (0, 0, 0), \quad (6.36)$$

$$(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}) = \left( \sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), \sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), r-1 \right), \quad (6.37)$$

$$(X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3}) = \left( -\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), -\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1), r-1 \right). \quad (6.38)$$

Jacobiho matice  $J_{P,1}$  v pevném bodu  $(X_{P,1}, Y_{P,1}, Z_{P,1})$ ,  $J_{P,2}$  v  $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2})$  a  $J_{P,3}$  v  $(X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$  mají tvar:

$$J_{P,1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

$$J_{P,2} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1) \\ \sqrt{\frac{8}{3}}(r-1) & \sqrt{\frac{8}{3}}(r-1) & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad (6.40)$$

$$J_{P,3} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{\frac{8}{3}}(r-1) \\ -\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1) & -\sqrt{\frac{8}{3}}(r-1) & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Jak plyne z obrázku č. 6.3, je pro určení typu pevného bodu rozhodné, kdy hodnoty  $\lambda = R \pm i\Omega$  resp. jejich reálná část a imaginární část mění znaménko. Obrázek č. 6.4 ukazuje typy pevného bodu  $(X_{p,1}, Y_{p,1}, Z_{p,1})$ . Obrázek č. 6.5 pro  $(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$  a obrázek č. 6.6 pro  $(X_{p,3}, Y_{p,3}, Z_{p,3})$ .

$(X_{p,1}, Y_{p,1}, Z_{p,1})$	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$	
	reálná část	imaginární část	reálná část	imaginární část	reálná část	imaginární část
$r < 1$	<0	0	<0	0	<0	0
$r > 1$	<0	0	<0	0	>0	0
$r < 1$	uzel					
$r > 1$	sedlový bod					

obrázek 6.4: Typy pevného bodu  $(X_{p,1}, Y_{p,1}, Z_{p,1})$

$(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$	
	reálná část	imaginární část	reálná část	imaginární část	reálná část	imaginární část
$r < 1$	<0	0	>0	0	<0	0
$1 < r < 1,346$	<0	0	<0	0	<0	0
$1,346 < r < 24,74$	<0	0	<0	>0	<0	<0
$r > 24,74$	>0	0	<0	>0	<0	<0
$r < 1$	sedlový bod					
$1 < r < 1,346$	uzel					
$1,346 < r < 24,74$	spirální uzel					
$r > 24,74$	chaotický atraktor					

obrázek 6.5: Typy pevného bodu  $(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$

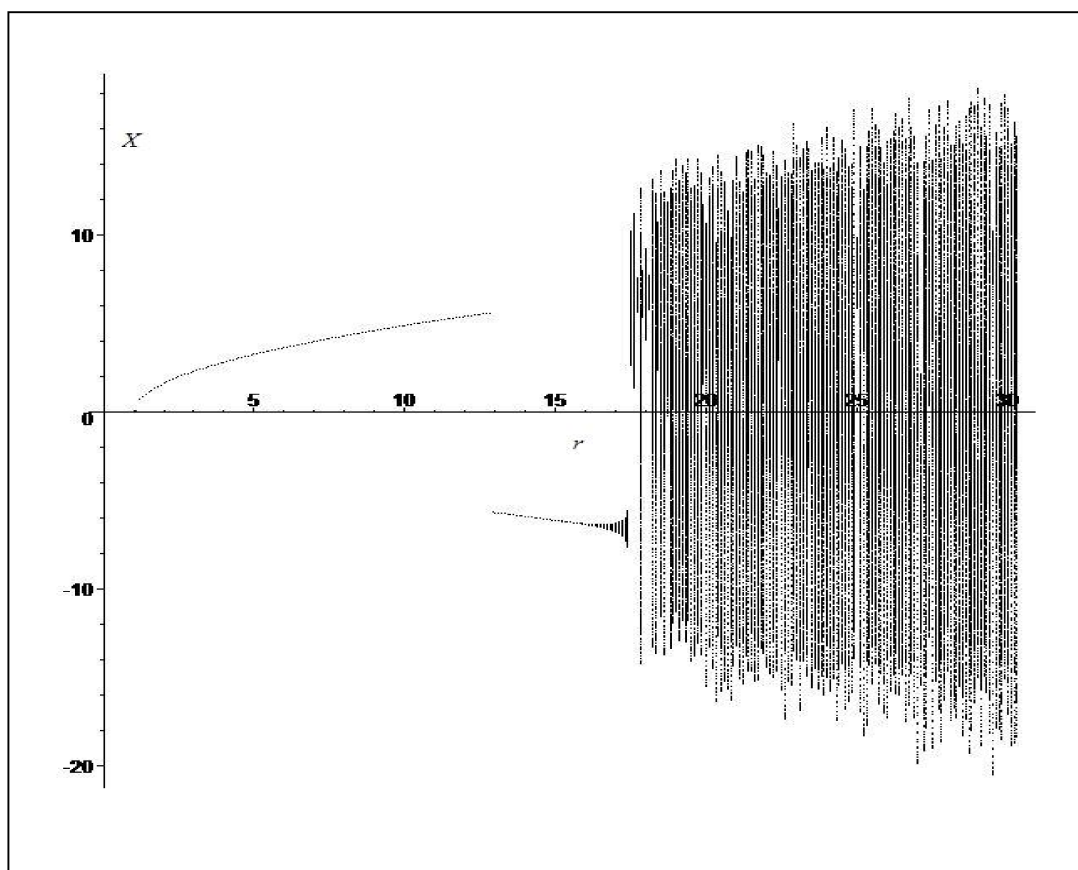
$(X_{p,3}, Y_{p,3}, Z_{p,3})$	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$	
	reálná část	imaginární část	reálná část	imaginární část	reálná část	imaginární část
$r < 1$	<0	0	>0	0	<0	0
$1 < r < 1,346$	<0	0	<0	0	<0	0
$1,346 < r < 24,74$	<0	0	<0	>0	<0	<0
$r > 24,74$	>0	0	<0	>0	<0	<0
$r < 1$	sedlový bod					
$1 < r < 1,346$	uzel					
$1,346 < r < 24,74$	spirální uzel					
$r > 24,74$	chaotický atraktor					

obrázek 6.6: Typy pevného bodu  $(X_{p,3}, Y_{p,3}, Z_{p,3})$

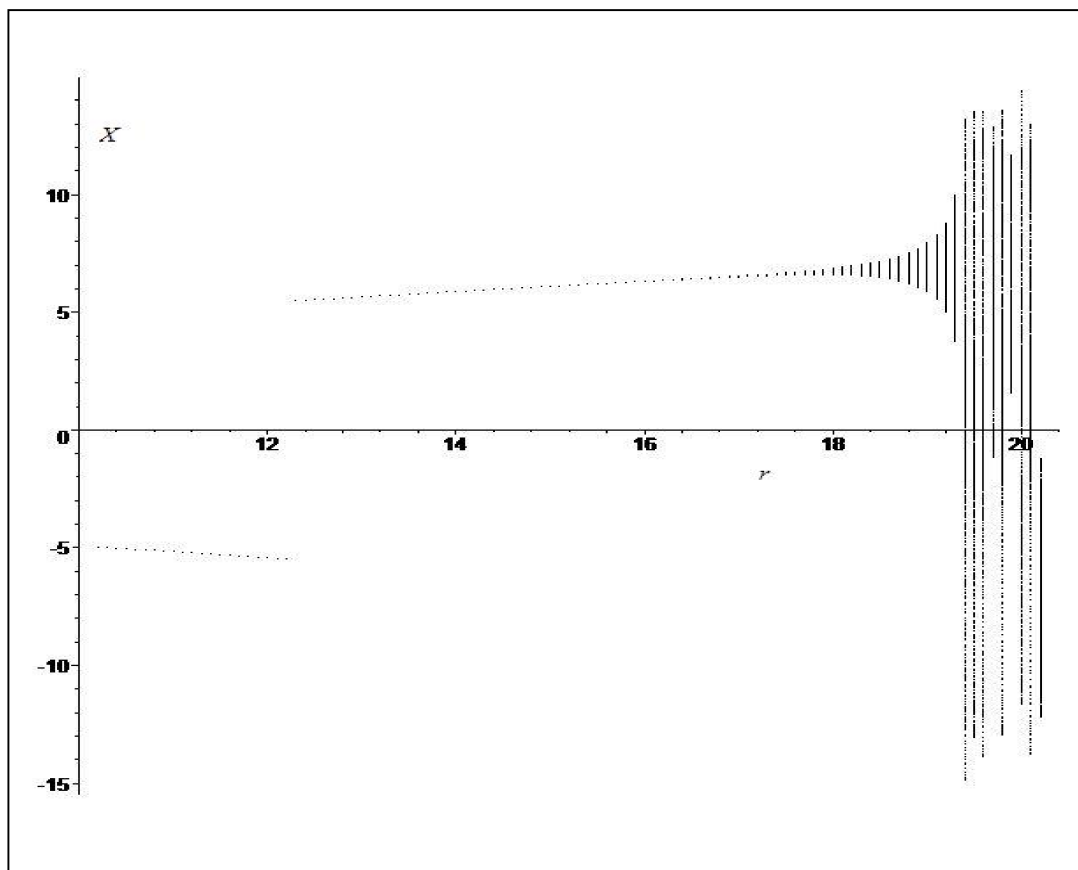
Pro  $r < 1$  trajektorie z celého stavového prostoru směřují do uzlu  $(X_{p,1}, Y_{p,1}, Z_{p,1})$  a jedná se tedy o tranzitivní systém. Pro  $r > 24,74$  jsou trajektorie přitahovány do chaotického atraktoru, který vymezuje přesně daný podprostor ve stavovém prostoru, jehož centry jsou pevné body  $(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$ ,  $(X_{p,3}, Y_{p,3}, Z_{p,3})$  a též se jedná o tranzitivní systém. Při  $1 < r < 24,74$  zde máme  $(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$ ,  $(X_{p,3}, Y_{p,3}, Z_{p,3})$ , které různým způsobem přitahují trajektorie. K tomu, abychom rozhodli, za jakých hodnot  $r$  směřuje trajektorie z daného podprostoru stavového prostoru k jednomu z pevných bodu, využijeme již představeného bifurkačního diagramu.

### 6.3.2 Bifurkační diagram

Obrázek č. 6.7 ukazuje bifurkační diagram pro počáteční podmínky  $(0,01;0,01;0,01)$  a obrázek č. 6.8 pro  $(-0,01;-0,01;-0,01)$  (kód viz příloha kapitola 9.8).



obrázek č. 6.7: Bifurkační diagram při počátečních podmínkách  $(0,01;0,01;0,01)$



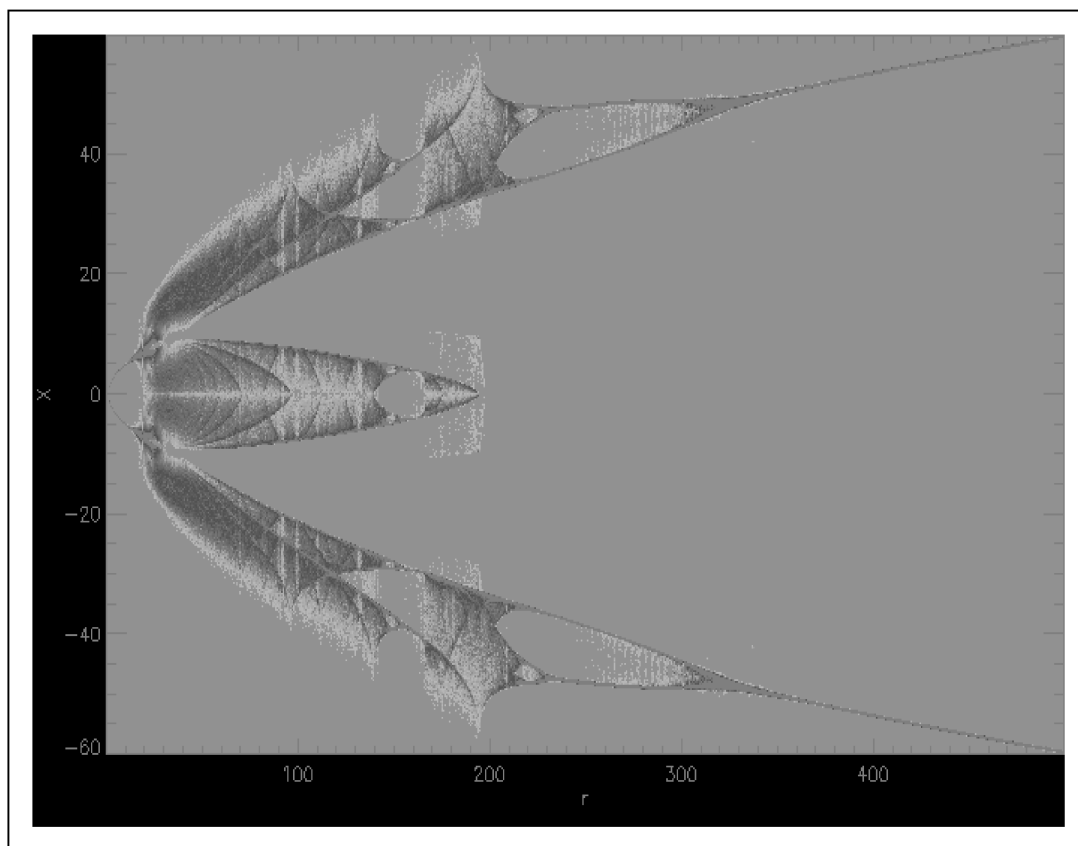
obrázek č. 6.8: Bifurkační diagram při poč. podmínkách  $(-0,01; -0,01; -0,01)$

Z přestavených diagramů je patrné, že pro  $r > 1$  trajektorie z různých podprostorů stavového prostoru směřují k různým atraktorům a systém není tranzitivní. Za povšimnutí stojí přibližná hodnota  $r \approx 13$  (v [16] je uváděna hodnota 13,926), kde dochází k změně podprostorů, ze kterých jsou trajektorie k daným atraktorům přitahovány. V této oblasti může nepřesné určení parametru  $r$  vést k odlišnému výsledku budoucího scénáře.

Pro  $r > 24,74$  nastává chaotické chování. V této oblasti se nepřesné určení parametru  $r$  může též projevit špatným odhadem vývoje.

Z obrázku 6.7 se zdá, že chaotické chování nastává již pro menší hodnoty  $r$ . Jak jsme však ukázali pomocí Ljapunovových exponentů a hodnot vlastních čísel, jedná se o ustálené chování a tato podobnost je zapříčiněna dlouhou dobou, potřebnou pro zmíněné ustálení daného systému.

Obrázek č. 6.9 ukazuje bifurkační diagram pro všechny počáteční podmínky.



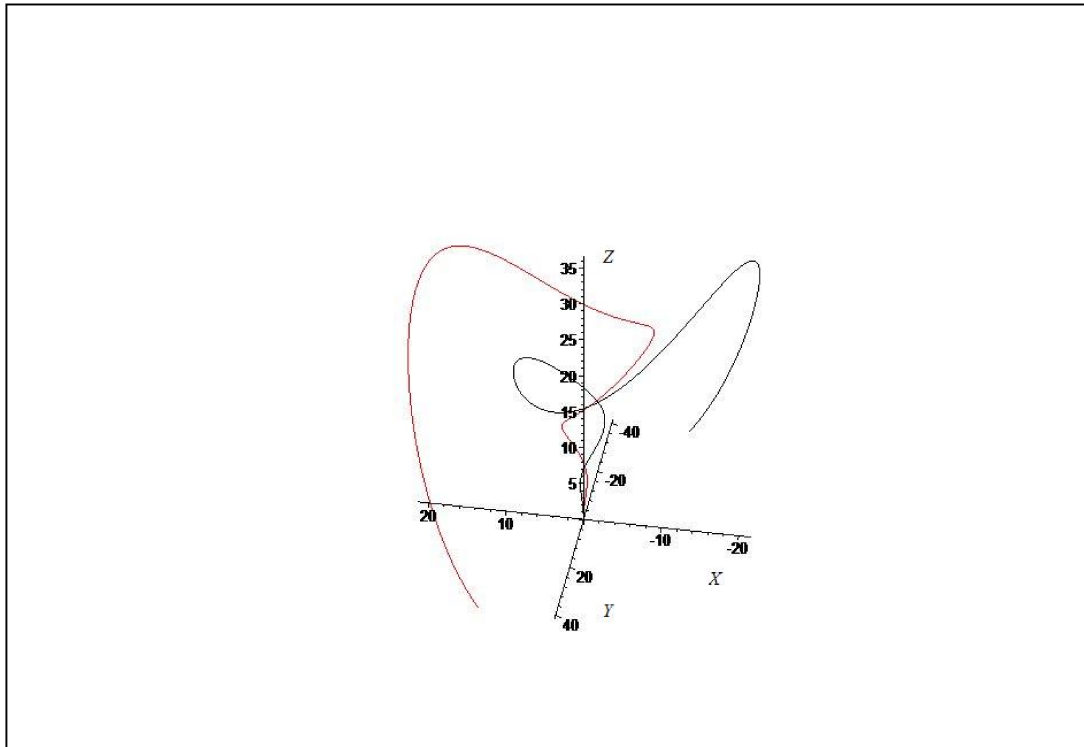
obrázek 6.9: Bifurkační diagram (převzato z [17])

U tohoto diagramu stojí za povšimnutí, že až pro velká  $r$  nastává periodické chování.

### 6.3.3 Ukázky atraktorů

#### 6.3.3.1 Uzel $(X_{P,1}, Y_{P,1}, Z_{P,1})$

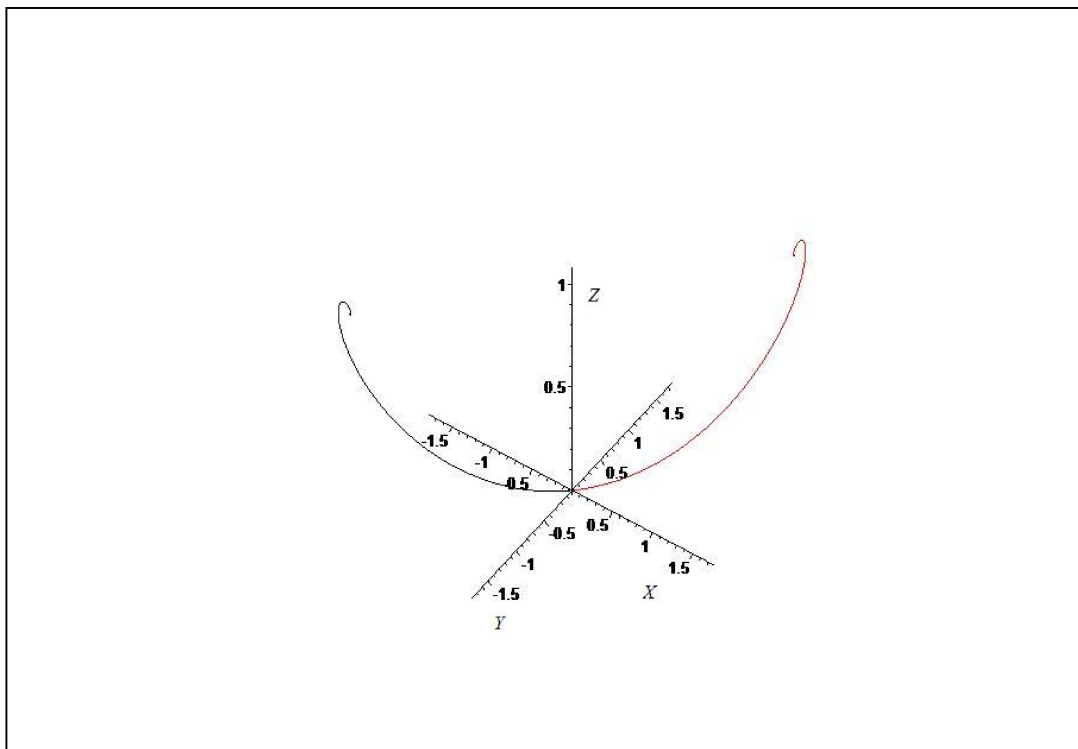
Tento atraktor nastává pro  $r < 1$ . Popisuje stav bez konvekce.



obrázek 6.10: Uzel  $(X_{P,1}, Y_{P,1}, Z_{P,1})$

### 6.3.3.2 Uzly $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$

Tyto atraktory nastávají pro  $1 < r < 1,346$ . Jedná se o konvekci s neproměnnými konvektivními útvary

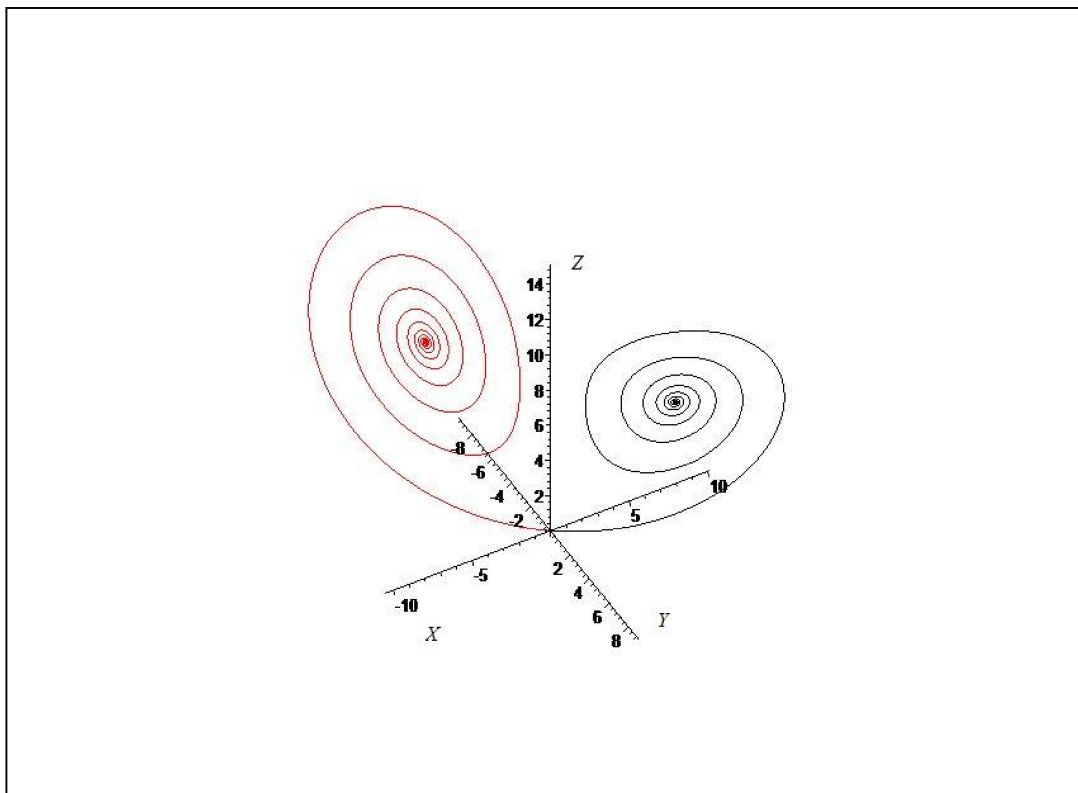


Obrázek 6.11: Uzel  $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$



### 6.3.3.3 Spirální uzel $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$

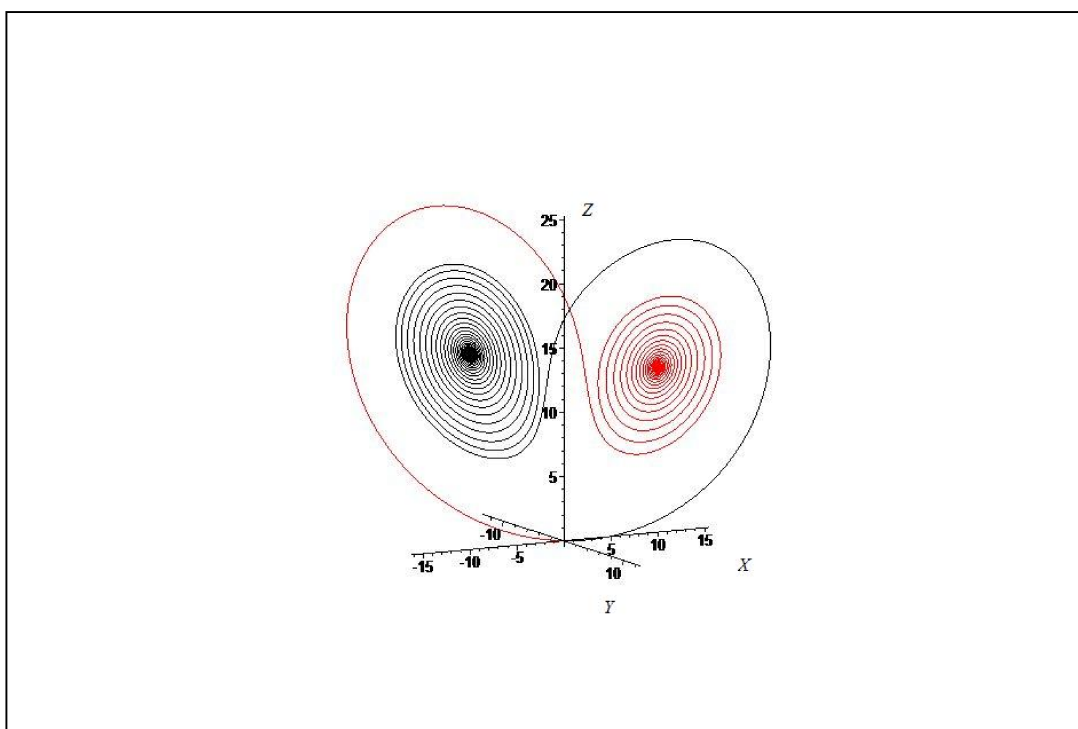
Tyto atraktory nastávají pro  $1,346 < r < 13,926$ . Jedná se opět o ustálenou konvekci s neproměnnými konvektivními útvary.



obrázek 6.12: Spirální uzel  $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$

### 6.3.3.4 Spirální uzel $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$

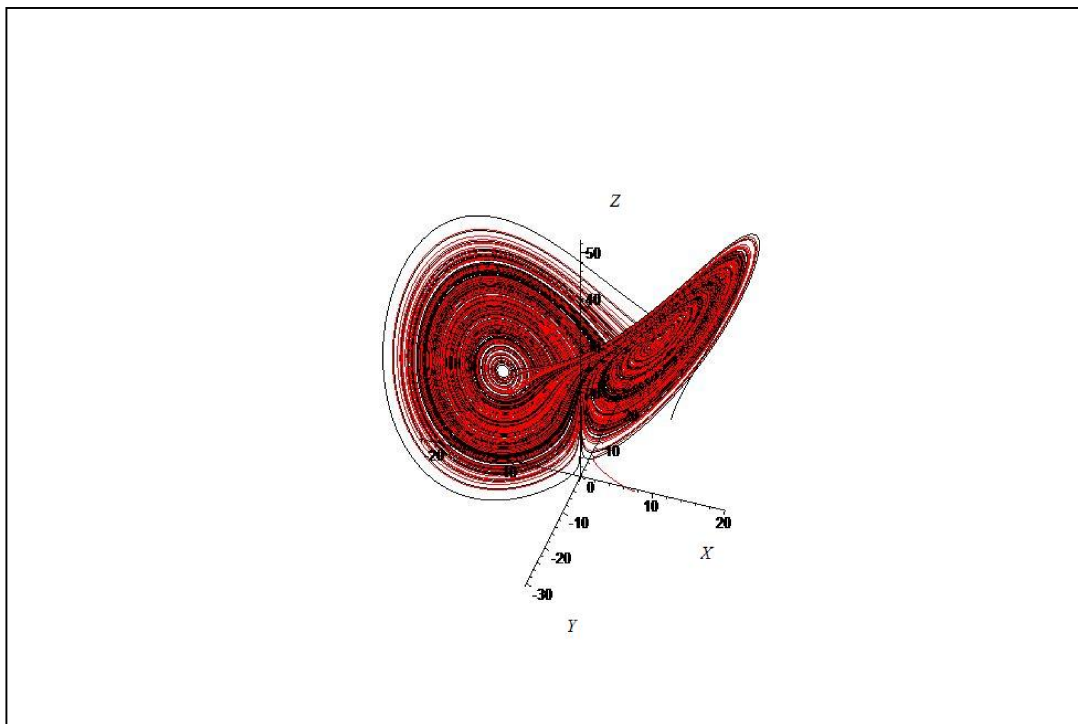
Tyto atraktory nastávají pro  $13,926 < r < 24,74$ . Jedná se opět o ustálenou konvekci s neproměnnými konvektivními útvary. Rozdíl ve srovnání se spirálním uzlem 6.3.3.3 je v průběhu trajektorie, která nejprve obtočí bližší pevný bod.



obrázek 6.12: Spirální uzel  $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$

### 6.3.3.5 Chaotický atraktor $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$

Tyto atraktory nastávají pro  $r > 24,74$ . Jedná se o neustálenou stále proměnnou konvekce.



Obrázek 6.14: Chaotický atraktor  $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2}), (X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$

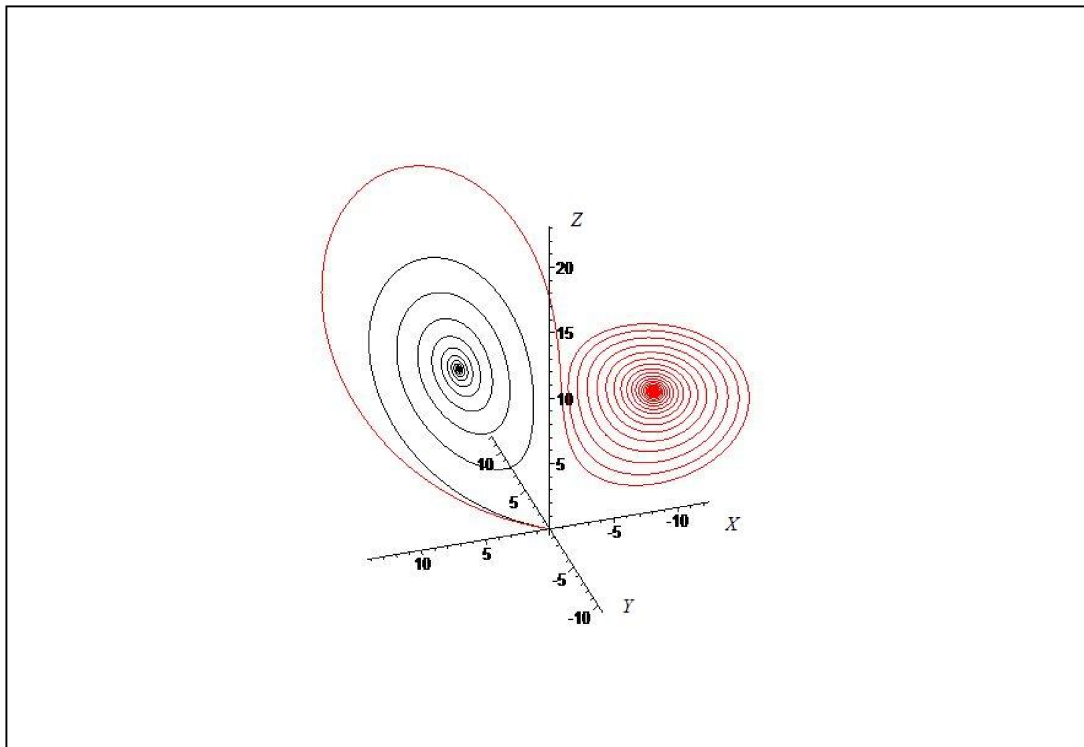
## 6.4 Závěr pro klimatické modely

Pro Lorenzův konvektivní model jsme pomocí představené analýzy a pomocí bifurkačního diagramu představili úplný výčet možných typů atraktorů v závislosti na parametru  $r$ , který v tomto modelu charakterizuje vnější parametr. Pokud by nám šlo o dlouhodobý průměrný stav, mohli bychom pro každé  $r$  určit jednu hodnotu (např. aritmetický průměr) a její variabilitu (např. směrodatná odchylka), které charakterizují daný stav. Ukažme si aritmetický průměr  $a$  a směrodatnou odchylku  $s$  pro hodnotu parametru  $r=29$ . Výpočet byl proveden pro několik počátečních podmínek a představená hodnota je jich průměrem:

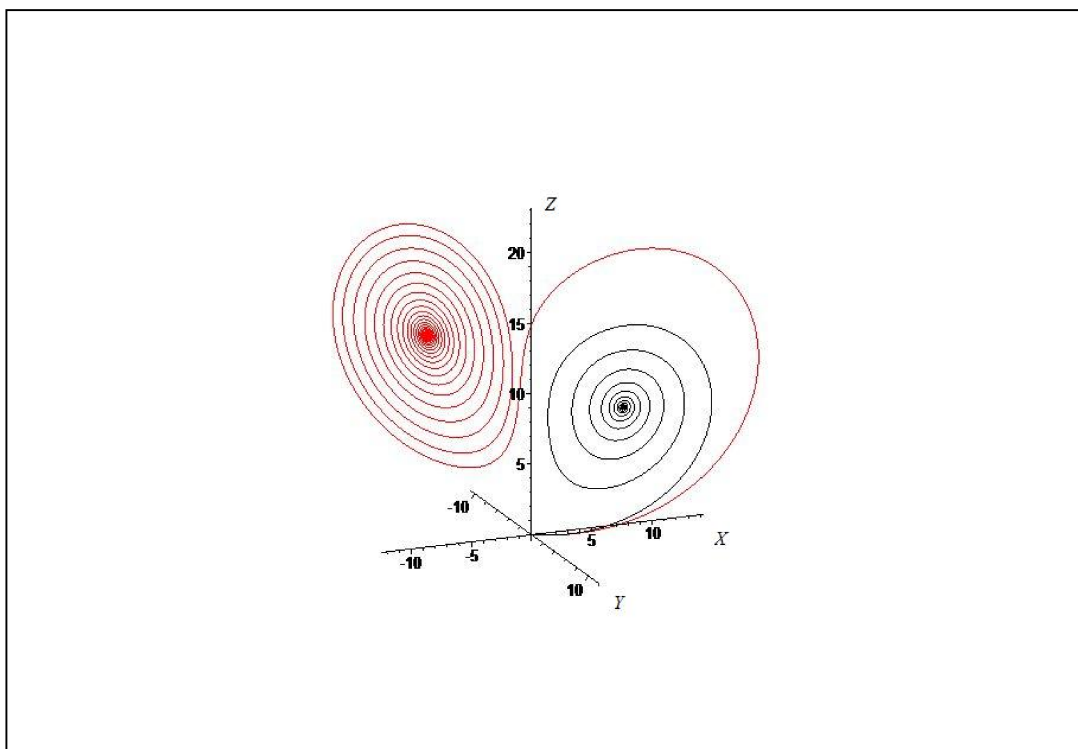
$$a = (0; 0; 25),$$
$$s = (8; 9; 8),$$

Je též patrné, že tato hodnota je závislá na polohách pevných bodů  $(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$ ,  $(X_{p,3}, Y_{p,3}, Z_{p,3})$  jejichž průměrná hodnota je  $(0; 0; 28)$ .

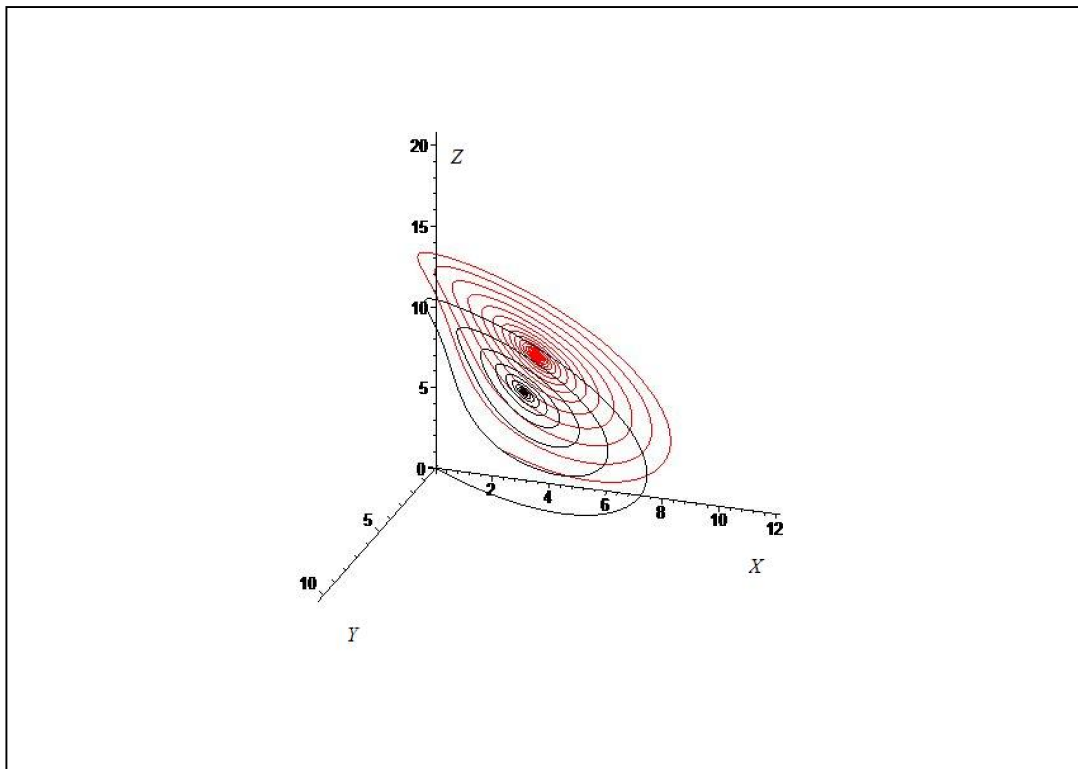
Pro určité hodnoty  $r$  je systém tranzitivní a pro určité tranzitivní není. Pokud by se v průběhu časového vývoje měnil parametr  $r$ , jednalo by se o téměř tranzitivní systém. Například pro určité počáteční podmínky při malé změně kolem přibližné hodnoty  $r \approx 13,926$  by systém změnil výrazně své chování. Na obrázcích číslo 6.15 – 6.17 vidíme časový vývoj trajektorie při hodnotě  $r = 12$  (černá), kdy v různý čas se náhle změní hodnota parametru na  $r = 14$  (červená).



obrázek 6.15: Vývoj dvou trajektorií ze stejných počátečních podmínek pro různé hodnoty  $r$  ( $\tau = 0$ )



obrázek 6.16: Vývoj dvou trajektorií ze stejných počátečních podmínek pro různé hodnoty  $r$  ( $\tau = 0,5$ )



obrázek 6.17: Vývoj dvou trajektorií ze stejných počátečních podmínek pro různé hodnoty  $r$  ( $\tau = 10$ )

Z obrázků č. 6.15 – 6.17 vyplývá, že pokud jsme v oblasti odpuzování pevného bodu  $(X_{p,1}, Y_{p,1}, Z_{p,1})$  různé hodnoty parametru  $r$  vedou k jinému pevnému bodu, pokud jsme však již v oblasti přitahování pevného bodu  $(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$ , vedou obě trajektorie do podobné oblasti, pouze posunuté o hodnotu danou z výpočtu polohy  $(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$  dle vztahu (6.37).

Smyslem ansámblových předpovědí pro různé hodnoty vnějších parametrů je pak právě odhalování hodnot parametrů, vyvolávajících změnu atraktoru dané trajektorie a určování možných scénářů vývoje a to i s vědomím, že se hodnoty vnějších parametrů mohou v průběhu vývoje měnit a systém tak vlastně žádného atraktoru nedosáhne. Vždy však bude do některého směřovat.

## 7 Závěr

Jako málo-dimenzionální atmosférické modely jsme představili Lorenzův konvektivní model z roku 1963 (viz [4]) a Lorenzův 1-dimenzionální atmosférický model, který byl publikován v článku [3].

Pro numerické řešení jsme zvolili Runge-Kuttovu metodu 4. stupně s diskretizační chybou  $O(h^5)$  a určili jsme vhodný krok  $h$ , který zajišťuje stabilitu metody. Obrázek č. 7.1 ukazuje použité a zamítnuté kroky pro oba představené modely.

model konvekce		1-dim. atm. model	
krok $h$	stabilita	krok $h$	stabilita
0,01	NE	0,01	NE
0,005	ANO	0,005	ANO

obrázek 7.1: Volba kroku  $h$

Uvedli jsme důvody pro ensemblové předpovědi meteorologických modelů a jako charakteristiku míry rozbíhavosti dvou blízkých trajektorií ve stavovém prostoru (skutečný a naměřený stav) jsme definovali Ljapunovův exponent. Obrázek č. 7.2 ukazuje určené hodnoty pro konvektivní model a obrázek č. 7.3 pro 1-dimenzionální atmosférický model.

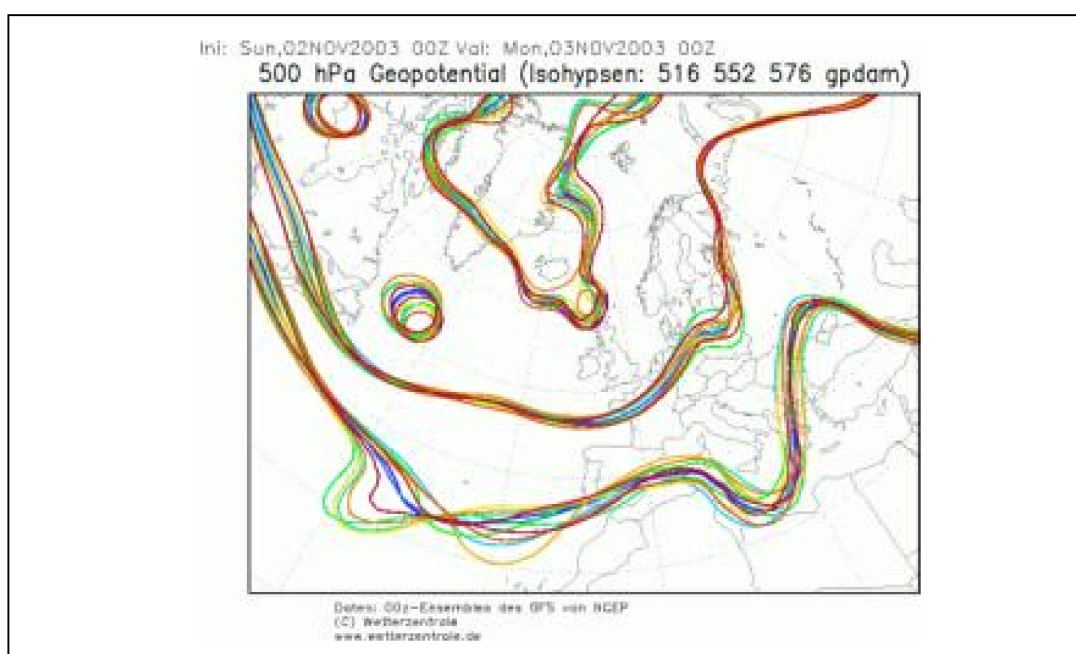
parametr	globální Ljapunovovy exponenty		
$r$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
28	0,55	0	-14,25
22	-1,66	0	-12

Obrázek 7.2: Globální Ljapunovovy exponenty pro model konvekce

parametr	Globální Ljapunovovy exponenty			
	$\lambda_{1,lok}$	$\lambda_{2,lok}$	$\lambda_{3,lok}$	$\lambda_{4,lok}$
$F$				
18	2,18	0	-2	-4
16	2,37	0	-2,04	-4,13

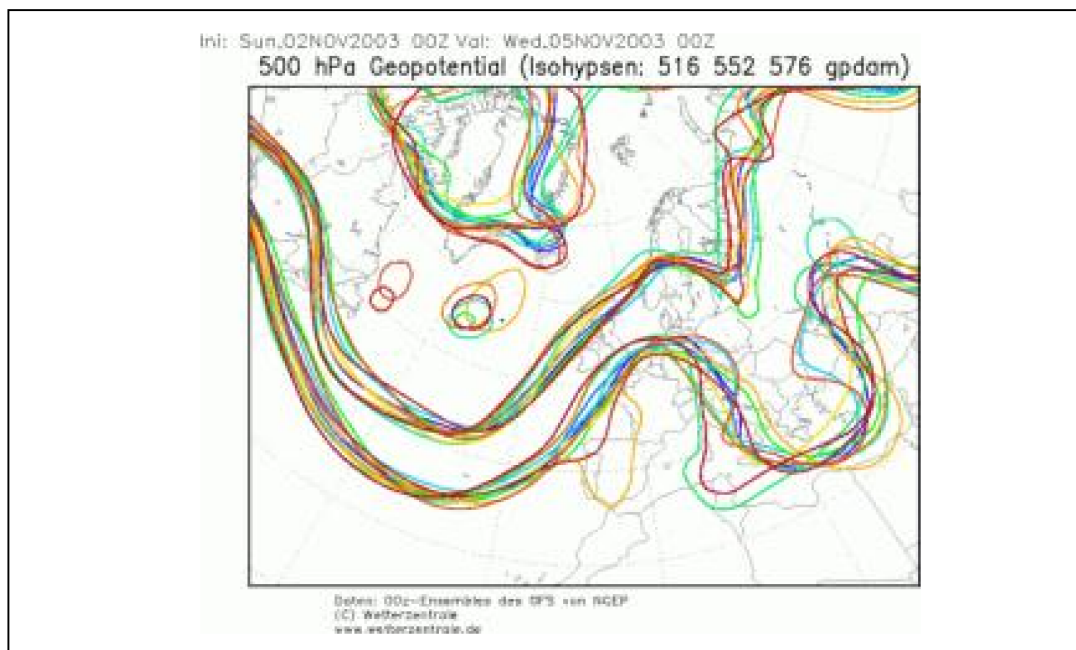
Obrázek 7.3: Lokální Ljapunovovy exponenty pro 1-dim. atm. model

Podle [3] jsou hodnoty Ljapunovových exponentů modelu Evropského centra pro střednědobou předpověď (ECMWF) mezi 2,1 až 2,4 pro chybu určení hodnot v hladině 500 hPa. Na obrázcích č. 7.4 – 7.7 je zobrazen vývoj pertrubovaných isohyps ve zmíněné hladině 500 hPa v čase 24, 72, 120 a 168 hodin.

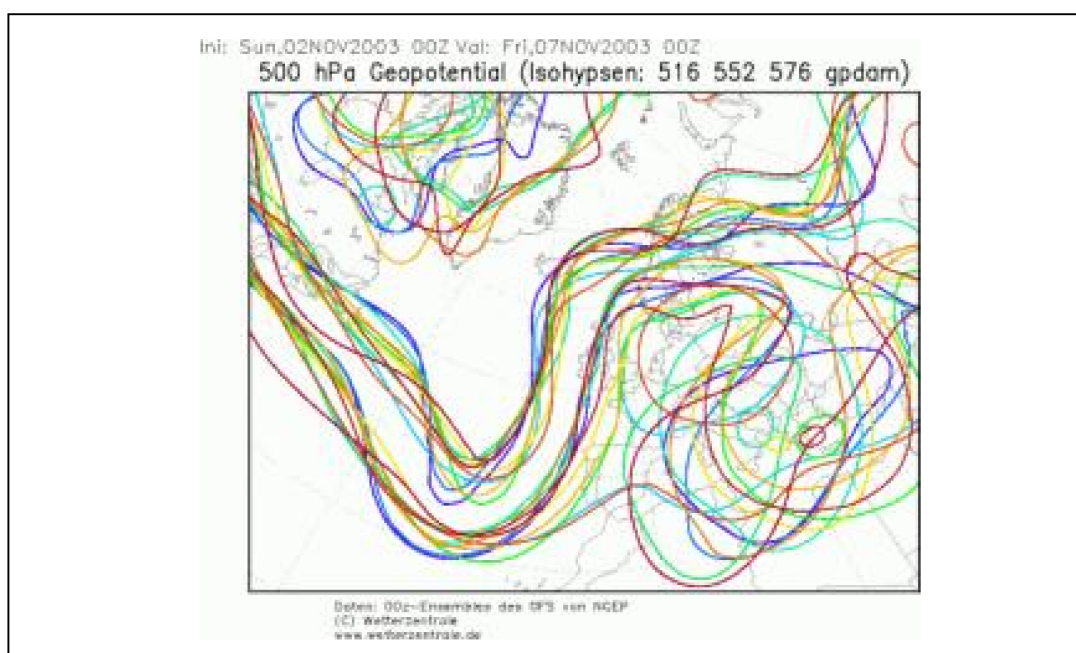


obrázek 7.4: Vývoj pertrubovaných isohyps po 24 hodinách (převzato z [18])

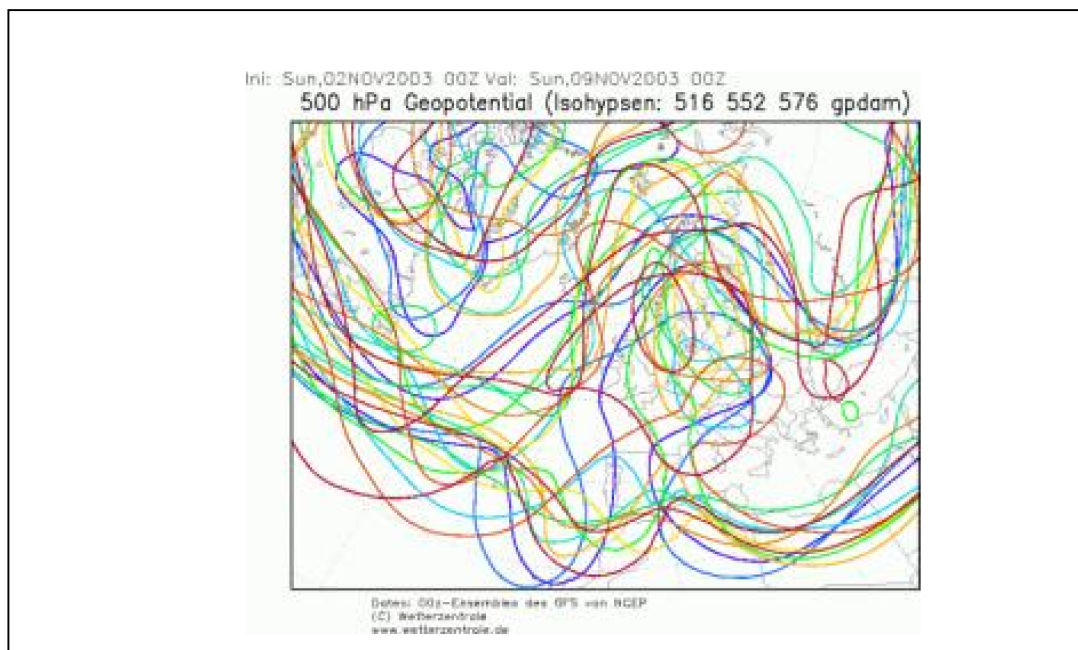




obrázek 7.5: Vývoj pertrubovaných isohyps po 48 hodinách (převzato z [18])



obrázek 7.6: Vývoj pertrubovaných isohyps po 120 hodinách (převzato z [18])



obrázek 7.7: Vývoj pertrubovaných isohyps po 168 hodinách (převzato z [18])

Dále jsme uvedli oblasti časového vývoje (počáteční a pozdní fáze), kde exponenciální růst počáteční chyby daný Ljapunovovým exponentem nepopisuje skutečné chování a na obrázcích č. 7.4 – 7.7 je patrné, že průběh vývoje odchylek je též daný konkrétní synoptickou situací. Obrázky 7.4 – 7.7 však též ukazují podstatnější úkaz, a to že od jistého času předpovědi bude vhodnější přejít od deterministické předpovědi k ensemblové, a to jak k výpočtu průměrné hodnoty, tak k určení statistické pravděpodobnosti, zda daný jev nastane, či nikoliv. Využijme informací z [18] a podívejme se na závěr na konkrétní hodnoty. Do přibližně 72 hodin je lepší použít deterministickou předpověď (používá lepší rozlišení modelu). Poté je vhodné využít poznatků ansámblové předpovědi. Předpovědní délka použitelnosti se uvádí 7 dní. Vše je však opět průměr a závisí na konkrétní situaci.

Při zkoumání klimatických modelů jsme vycházeli ze skutečnosti, že hledáme průměrné hodnoty. Význam ansámblových předpovědí jsme určili v hledání typů a polohy atraktorů (budoucí scénáře) pro dané hodnoty vnějšího parametru ovlivňujícího daný systém a v určování kritických hodnot tohoto parametru, kdy nastává přechod k jinému atraktoru. Obrázek č. 7.8 ukazuje zjištěné hodnoty pro pevné body  $(X_{P,1}, Y_{P,1}, Z_{P,1})$ ,  $(X_{P,2}, Y_{P,2}, Z_{P,2})$  a  $(X_{P,3}, Y_{P,3}, Z_{P,3})$  určené výrazy (6.36 – 6.38) pro model konvekce.

pevný bod	parametr	typ
$(X_{p,1}, Y_{p,1}, Z_{p,1})$	$r < 1$	uzel
	$r > 1$	sedlový bod
$(X_{p,2}, Y_{p,2}, Z_{p,2})$	$r < 1$	sedlový bod
	$1 < r < 1,346$	uzel
	$1,346 < r < 24,74$	spirální uzel
	$r > 24,74$	chaotická atraktor
$(X_{p,3}, Y_{p,3}, Z_{p,3})$	$r < 1$	sedlový bod
	$1 < r < 1,346$	uzel
	$1,346 < r < 24,74$	spirální uzel
	$r > 24,74$	chaotická atraktor

Obrázek 7.8: Typy pevných bodů v závislosti na parametru  $r$  pro model konvekce

V dnešní době je snaha ukázat, že dělení na předpovědi v měřítkách dnů a roků je umělé a je potřeba vytvářet časové kontinuum. Též se uvažuje skutečnost, že klima velkých měřítek vytváří prostředí pro měřítko synoptická a pro jevy malého měřítko, a ty opět ovlivňují klima tj. prostorové kontinuum. Citujme práci [19], kde je představeno „seamless prediction paradigma“: „Měřítková interakce, a to jak časová tak prostorová, je hlavním rysem atmosférické a oceánské předpovědi“. Práce [19] též zpochybňuje neuvažování chyby určené počátečními podmínkami pro klimatické modely. Citujme:“ Pro klimatickou předpověď není přesné určení počátečních podmínek atmosféry rozhodující. Počáteční podmínky ostatních subsystémů klimatického systému, které nebyly podstatné pro meteorologickou předpověď, získávají na důležitosti. Jedná se například o povrchovou teplotu moří a oceánů, množství tepla obsaženého ve směšovací vrstvě oceánů a rozlohu pokrytí sněhem a vegetací“. Je patrné, že možnost zkoumání větší komplexity systému je odvislá od výpočetní kapacity počítačů.

## 8 Literatura

- [1] Hartmann D. L. *Physical Climatology*. 1. vyd. San Diego: Academic Press, 1994. 411 s. ISBN 0-12-328530-5
- [2] Bařka M. *Prognostické modely pro předpověď počasí*. (přednáška) Praha: MFF, 12. 10. 2008
- [3] Lorenz E. N. Predictability – a problem partly solved. In Palmer T., Hagedorn R. *Predictability of Weather and Climate*. 1 vyd. Cambridge: Cambridge University Press, 2006, s. 40–58. ISBN-13 978–0-0521–84882-4
- [4] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric science*, 1963, roč. 20, s. 130–141
- [5] Saltzman B. Finite amplitude free convection as an initial value problem-1. *Journal of the Atmospheric Science*, 1962, roč. 19, s. 329–341
- [6] Gross M. California Institute of Technology. Los Angeles: Vystaveno roku 2000 [cit. 30.06.2010] <[http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos\\_Course/Lesson1/Lorenz.pdf](http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Lesson1/Lorenz.pdf)>
- [7] Emre S. Comparison of Runge – kutta Method of order 4 and 5 on Lorenz equation. *Journal of art and science*, May 2004, roč. 1, s. 61 - 69
- [8] Martinek P. Západočeská Univerzita v Plzni. Plzeň: Vystaveno roku 2009 [cit. 25.07.2010] <[num.kma.zcu.cz/galerie/MM-prace/.../Martinek-Lorenzuv%20atraktor.pdf](http://num.kma.zcu.cz/galerie/MM-prace/.../Martinek-Lorenzuv%20atraktor.pdf)>
- [9] Jason F. University of Amsterdam. Amsterdam: Vystaveno roku 2008 [cit. 28.07.2010] <[homepages.cwi.nl/~jason/Classes/numwisk/ch10.pdf](http://homepages.cwi.nl/~jason/Classes/numwisk/ch10.pdf)>
- [10] Bednář H.: Zajímavé vlastnosti chování dynamických systémů simulované v prostředí MAPLE V. Bakalářská práce. Praha, MFF UK, 2007.
- [11] Pasini A. 1. vyd. London: World scientific Publishing, 2005. 192 s. ISBN 981-256-475-6
- [12] Pokorný P.: Deterministický chaos - plod počítačové fyziky. *Čs. časopis pro fyziku*, 2008, roč.58, s 328 – 338
- [13] Gross M. California Institute of Technology. Los Angeles: Vystaveno roku 2000 [cit. 30.07.2010] <[http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos\\_Course/Lesson7/Lyapunovexponent.pdf](http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Lesson7/Lyapunovexponent.pdf)>

- [14] Ehrendorfer M. The Liouville equation and atmospheric predictability. In Palmer T., Hagedorn R. Predictability of Weather and Climate. 1 vyd. Cambridge: Cambridge University Press, 2006, s. 59–98. ISBN-13 978–0-0521–84882-4
- [15] Kalvová J. Všeobecná klimatologie. (přednáška) Praha: MFF, 10. 5. 2007
- [16] Sparrow C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractor, 1.vyd. Springer Verlag, 1982.269 s.
- [17] Raidl A. Matematicko Fyzikální Fakulta Univerzita Karlova. Praha [cit. 09.08.2010] < <http://www.chaos.estranky.cz/archiv/uploaded/15>>
- [18] Vašíček J. Český hydrometeorologický ústav. Praha: Vystaveno roku 2004 [cit. 15.08.2010] < <http://www.chmi.cz/meteo/olm/Archiv/Ansambly.htm>>
- [19] Hurrell J., Bader D., Delworth T., Kirtman B., Meehl J., Pan H.L., Wielick B. White Paper on Seamless Prediction. DRAFT, 2006
- [20] Žák V. Fakulta strojního inženýrství VUT. Brno [cit. 10.08.2010] <<http://www.vladimirzak.com/maple/systemmaple/systemmaple.html>>

## 9 Přílohy

Numerické výpočty a grafická zobrazení byla vytvořena v prostředí MAPLE. „MAPLE je počítačové prostředí, které bylo vyvinuto na univerzitě Waterloo v Kanadě, pro zjednodušení a zrychlení výpočtů v matematice. Na rozdíl od klasických programů pro numerické výpočty (např. *MATLAB* - také obsahuje nástroj pro symbolické výpočty) modeluje matematické operace se symbolickými výrazy. MAPLE umožňuje provádět jak symbolické a numerické výpočty, tak vytvářet grafy funkcí, programovat vlastní funkce či procedury, ukládat data v několika formátech (např. *LaTeX*, *HTML*, *RTF*, *MATHML*, ...) a dokonce provádět export do programovacích jazyků (např. *C*, *Fortran 77*, ...).

Funkce implementované v MAPLE pokrývají širokou oblast matematiky od základů lineární algebry, diferenciálního a integrálního počtu, přes diferenciální rovnice, geometrii až k logice.“ (převzato z [20])

## 9.1 Runge-Kuttova metodu 4. stupně pro model konvekce

```
> restart;
with(LinearAlgebra) :
with(plots) :
with(plottools) :
with(DEtools) :

ourrk4 := proc(f1::procedure, f2::procedure, f3::procedure,
inits::[numeric,numeric,numeric], h::numeric, N::nonnegint)

local k, F11, F12, F13, F21, F22, F23, F31, F32, F33, F41, F42,
F43, pointlist, x, y, z;

x := inits[1];
y := inits[2];
z := inits[3];
pointlist := inits;

for k from 0 to N-1 do

F11 := evalf(h*f1(x, y, z));
F21 := evalf(h*f1(x + F11/2, y + F11/2, z + F11/2));
F31 := evalf(h*f1(x + F21/2, y + F21/2, z + F21/2));
F41 := evalf(h*f1(x + F31, y + F31, z + F31));

F12 := evalf(h*f2(x, y, z));
F22 := evalf(h*f2(x + F12/2, y + F12/2, z + F12/2));
F32 := evalf(h*f2(x + F22/2, y + F22/2, z + F22/2));
F42 := evalf(h*f2(x + F32, y + F32, z + F32));

F13 := evalf(h*f3(x, y, z));
F23 := evalf(h*f3(x + F13/2, y + F13/2, z + F13/2));
F33 := evalf(h*f3(x + F23/2, y + F23/2, z + F23/2));
F43 := evalf(h*f3(x + F33, y + F33, z + F33));

x := evalf(x + (F11 + 2*F21 + 2*F31 + F41)/6);
y := evalf(y + (F12 + 2*F22 + 2*F32 + F42)/6);
z := evalf(z + (F13 + 2*F23 + 2*F33 + F43)/6);

pointlist := pointlist,[x,y,z];
od;

[pointlist];

end:

f1 := (X,Y,Z) -> -10*X+10*Y:
f2 := (X,Y,Z) -> -Z*X+(r)*X-Y:
f3 := (X,Y,Z) -> Y*X-(8/3)*Z:

ourrk4(f1,f2,f3,[-10,-10,0],0.001,50000) :
```

obrázek 9.1: Runge-Kuttova metodu 4. stupně pro model konvekce

## 9.2 Stabilita Runge-Kuttovy metody pro model konvekce

```
> restart:
with(LinearAlgebra) :

pr:=proc(x::numeric,y::numeric,z::numeric,h::numeric)

local J, vlcis,R, A,B,C, r, RL;

A[1]:=0;
A[2]:=0;
A[3]:=0;

for r from 0 to 50 do

J := <<-10,-z+0.1+10*r,y>|<10,-1,x>|<0,-x,-8/3>>;
vlcis:=evalf(Eigenvalues(J));

R[1]:=h*vlcis[1]+((1/2)*(h*vlcis[1])^2)+((1/6)*(h*vlcis[1])^3)+
(1/24)*(h*vlcis[1])^4);
R[2]:=h*vlcis[2]+((1/2)*(h*vlcis[2])^2)+((1/6)*(h*vlcis[2])^3)+
(1/24)*(h*vlcis[2])^4);
R[3]:=h*vlcis[3]+((1/2)*(h*vlcis[3])^2)+((1/6)*(h*vlcis[3])^3)+
(1/24)*(h*vlcis[3])^4);

RL[1]:=Re((R[1]*conjugate(R[1]))^(1/2));
RL[2]:=Re((R[2]*conjugate(R[2]))^(1/2));
RL[3]:=Re((R[3]*conjugate(R[3]))^(1/2));

if A[1] < RL[1] then
A[1]:=RL[1] fi;

if A[2] < RL[2] then
A[2]:=RL[2] fi;

if A[3] < RL[3] then
A[3]:=RL[3] fi;

od;
A;
end;
```

obrázek 9.2: Stabilita Runge-Kuttovy metody model konvekce (1. část)



```

pX:=proc(YX::numeric,ZX::numeric,hX::numeric)
local XX, AX, KX;
AX[1]:=0;
AX[2]:=0;
AX[3]:=0;
for XX from 0 to 20 do
KX:=eval(pr(10*XX-100,YX,ZX,hX));
if AX[1] < KX[1]then
AX[1]:=KX[1] fi;
if AX[2] < KX[2]then
AX[2]:=KX[2] fi;
if AX[3] < KX[3]then
AX[3]:=KX[3] fi;
od;
AX;
end:

pY:=proc(ZY::numeric,hY::numeric)
local YY, AY, KY;
AY[1]:=0;
AY[2]:=0;
AY[3]:=0;
for YY from 0 to 20 do
KY:=eval(pX(10*YY-100,ZY,hY));
if AY[1] < KY[1]then
AY[1]:=KY[1] fi;
if AY[2] < KY[2]then
AY[2]:=KY[2] fi;
if AY[3] < KY[3]then
AY[3]:=KY[3] fi;
od;
AY;
end:

pZ:=proc(hZ::numeric)
local ZZ, AZ, KZ;
AZ[1]:=0;
AZ[2]:=0;
AZ[3]:=0;
for ZZ from 0 to 20 do
KZ:=eval(pY(10*ZZ-100,hZ));
if AZ[1] < KZ[1]then
AZ[1]:=KZ[1] fi;
if AZ[2] < KZ[2]then
AZ[2]:=KZ[2] fi;
if AZ[3] < KZ[3]then
AZ[3]:=KZ[3] fi;
od;
AZ;
end:

eval(pZ(0.001));
eval(pZ(0.005));
eval(pZ(0.01));

```

obrázek 9.3: Stabilita Runge-Kuttovy metody model konvekce (2. část)

### 9.3 Runge-Kuttova metodu 4. stupně pro 1-dim. atm. model

```
> restart;
with(LinearAlgebra) :
with(plots) :
with(plottools) :
with(DEtools) :
with(Statistics) :

ourrk4 := proc(f1::procedure, f2::procedure,
f3::procedure, f4::procedure,
inits::[numeric,numeric,numeric,numeric], h::numeric,
N::nonnegint)
local k, F11, F12, F13, F21, F22, F23, F31, F32, F33, F41, F42,
F43, F14, F24, F34, F44, pointlist, x, y, z, v;
x := inits[1];
y := inits[2];
z := inits[3];
v := inits[4];
pointlist := inits;
for k from 0 to N-1 do

F11 := evalf(h*f1(x, y, z, v));
F21 := evalf(h*f1(x + F11/2, y + F11/2, z + F11/2, v + F11/2));
F31 := evalf(h*f1(x + F21/2, y + F21/2, z + F21/2, v + F21/2));
F41 := evalf(h*f1(x + F31, y + F31, z + F31, v + F31));

F12 := evalf(h*f2(x, y, z, v));
F22 := evalf(h*f2(x + F12/2, y + F12/2, z + F12/2, v + F12/2));
F32 := evalf(h*f2(x + F22/2, y + F22/2, z + F22/2, v + F22/2));
F42 := evalf(h*f2(x + F32, y + F32, z + F32, v + F32));

F13 := evalf(h*f3(x, y, z, v));
F23 := evalf(h*f3(x + F13/2, y + F13/2, z + F13/2, v + F13/2));
F33 := evalf(h*f3(x + F23/2, y + F23/2, z + F23/2, v + F23/2));
F43 := evalf(h*f3(x + F33, y + F33, z + F33, v + F33));

F14 := evalf(h*f4(x, y, z, v));
F24 := evalf(h*f4(x + F14/2, y + F14/2, z + F14/2, v + F14/2));
F34 := evalf(h*f4(x + F24/2, y + F24/2, z + F24/2, v + F24/2));
F44 := evalf(h*f4(x + F34, y + F34, z + F34, v + F34));

x := evalf(x + (F11 + 2*F21 + 2*F31 + F41)/6);
y := evalf(y + (F12 + 2*F22 + 2*F32 + F42)/6);
z := evalf(z + (F13 + 2*F23 + 2*F33 + F43)/6);
v := evalf(v + (F14 + 2*F24 + 2*F34 + F44)/6);
pointlist := pointlist, [x, y, z, v];
od;
[pointlist];
end:

ourrk4(f1, f2, f3, f4, [2, -3, 4, 0], 0.005, 10000);
```

obrázek 9.4: Runge-Kuttova metodu 4. stupně pro 1-dim. atm. model

## 9.4 Stabilita Runge-Kuttovy metody pro 1-dim. atm. model

```
> restart:
with(LinearAlgebra) :

pr:=proc(x::numeric,y::numeric,z::numeric,h::numeric)

local J, vlcis,R, A,B,C, r, RL;

A[1]:=0;
A[2]:=0;
A[3]:=0;

for r from 0 to 20 do

J := <<-1,-(-10+r)+z,-y,z>|<(-10+r),-1,-x+(-10+r),-z>|<-(-10+r),x,-1,-y+x>|<-z+(-10+r),-x,-y,-1>>;
vlcis:=evalf(Eigenvalues(J));

R[1]:=h*vlcis[1]+((1/2)*(h*vlcis[1])^2)+((1/6)*(h*vlcis[1])^3)+((1/24)*(h*vlcis[1])^4);
R[2]:=h*vlcis[2]+((1/2)*(h*vlcis[2])^2)+((1/6)*(h*vlcis[2])^3)+((1/24)*(h*vlcis[2])^4);
R[3]:=h*vlcis[3]+((1/2)*(h*vlcis[3])^2)+((1/6)*(h*vlcis[3])^3)+((1/24)*(h*vlcis[3])^4);

RL[1]:=Re((R[1]*conjugate(R[1]))^(1/2));
RL[2]:=Re((R[2]*conjugate(R[2]))^(1/2));
RL[3]:=Re((R[3]*conjugate(R[3]))^(1/2));

if A[1] < RL[1] then
A[1]:=RL[1] fi;

if A[2] < RL[2] then
A[2]:=RL[2] fi;

if A[3] < RL[3] then
A[3]:=RL[3] fi;

od;
A;
end;
```

obrázek 9.5: Stabilita Runge-Kuttovy metody pro 1-dim. atm. Model (1.část)

```

> pX:=proc(YX::numeric,ZX::numeric,hX::numeric)
local XX, AX, KX;
AX[1]:=0;
AX[2]:=0;
AX[3]:=0;
for XX from 0 to 20 do
KX:=eval(pr((-10+XX),YX,ZX,hX));
if AX[1] < KX[1]then
AX[1]:=KX[1] fi;
if AX[2] < KX[2]then
AX[2]:=KX[2] fi;
if AX[3] < KX[3]then
AX[3]:=KX[3] fi;
od;
AX;
end:

pY:=proc(ZY::numeric,hY::numeric)
local YY, AY, KY;
AY[1]:=0;
AY[2]:=0;
AY[3]:=0;
for YY from 0 to 20 do
KY:=eval(pX((-10+YY),ZY,hY));
if AY[1] < KY[1]then
AY[1]:=KY[1] fi;
if AY[2] < KY[2]then
AY[2]:=KY[2] fi;
if AY[3] < KY[3]then
AY[3]:=KY[3] fi;
od;
AY;
end:

pZ:=proc(hZ::numeric)
local ZZ, AZ, KZ;
AZ[1]:=0;
AZ[2]:=0;
AZ[3]:=0;
for ZZ from 0 to 20 do
KZ:=eval(pY((-10+ZZ),hZ));
if AZ[1] < KZ[1]then
AZ[1]:=KZ[1] fi;
if AZ[2] < KZ[2]then
AZ[2]:=KZ[2] fi;
if AZ[3] < KZ[3]then
AZ[3]:=KZ[3] fi;
od;
AZ;
end:

eval(pZ(0.01));
eval(pZ(0.005));

```

obrázek 9.6: Stabilita Runge-Kuttovy metody pro 1-dim. atm. Model (2.část)

## 9.5 Ljapunovovy exponenty pro model konvekce

```
> pole1::[numeric,numeric]:
pole2::[numeric,numeric]:
pole3::[numeric,numeric]:
pole1:=[0,1]:
pole2:=[0,1]:
pole3:=[0,1]:
pomocnaL[1]:=1:
pomocnaL[2]:=1:
pomocnaL[3]:=1:
Gr1:=pole1:
Gr2:=pole2:
Gr3:=pole3:

r:=28:
f1 := (X,Y,Z) -> -10*X+10*Y:
f2 := (X,Y,Z) -> -Z*X+(r)*X-Y:
f3 := (X,Y,Z) -> Y*X-(8/3)*Z:
PR := ourrk4(f1,f2,f3,[-2,1,0],0.005,49999):
X:=PR[50000]:
for j from 1 to 10000 do
dX1:=[[0.001,0,0],[0.001,0,0]]:
dX2:=[[0,0.001,0],[0,0.001,0]]:
dX3:=[[0,0,0.001],[0,0,0.001]]:

Pr := ourrk4(f1,f2,f3,[X[1],X[2],X[3]],0.001,499):
for i from 1 to 500 do

f10 := (dX,dY,dZ) -> -10*dX+10*dY:
f20:= (dX,dY,dZ) -> r*dX-dY-dX*Pr[i,3]-Pr[i,1]*dZ:
f30:= (dX,dY,dZ) -> dX*Pr[i,2]+Pr[i,1]*dY-(8/3)*dZ:

dX1 :=ourrk4(f10,f20,f30,[dX1[2,1],dX1[2,2],dX1[2,3]],0.001,1);
dX2 := ourrk4(f10,f20,f30,[dX2[2,1],dX2[2,2],dX2[2,3]],0.001,1);
dX3 := ourrk4(f10,f20,f30,[dX3[2,1],dX3[2,2],dX3[2,3]],0.001,1);
od;

O1:= <dX1[2,1],dX1[2,2],dX1[2,3]>:
O2:= <dX2[2,1],dX2[2,2],dX2[2,3]>:
O3:= <dX3[2,1],dX3[2,2],dX3[2,3]>:
```

obrázek 9.7: Ljapunovovy exponenty pro model konvekce (1.část)

```

L[j,1]:=(O1[1]^2+O1[2]^2+O1[3]^2)^(0.5):
NO1[1]:= O1[1]/L[j,1]:
NO1[2]:= O1[2]/L[j,1]:
NO1[3]:= O1[3]/L[j,1]:
NO1:=<NO1[1],NO1[2],NO1[3]>:

NO20:=O2 - (O2[1]*NO1[1]+O2[2]*NO1[2]+O2[3]*NO1[3])*NO1:
L[j,2]:=(NO20[1]^2+NO20[2]^2+NO20[3]^2)^(0.5):
NO2[1]:= NO20[1]/L[j,2]:
NO2[2]:= NO20[2]/L[j,2]:
NO2[3]:= NO20[3]/L[j,2]:
NO2:=<NO2[1],NO2[2],NO2[3]>:

NO30:=O3 - (O3[1]*NO1[1]+O3[2]*NO1[2]+O3[3]*NO1[3])*NO1 -
(O3[1]*NO2[1]+O3[2]*NO2[2]+O3[3]*NO2[3])*NO2:
L[j,3]:=(NO30[1]^2+NO30[2]^2+NO30[3]^2)^(0.5):
NO3[1]:= NO30[1]/L[j,3]:
NO3[2]:= NO30[2]/L[j,3]:
NO3[3]:= NO30[3]/L[j,3]:
NO3:=<NO3[1],NO3[2],NO3[3]>:

Lmax[1]:=(L[j,1]/0.001)*pomocnaL[1]:
Lmax[2]:=(L[j,2]/0.001)*pomocnaL[2]:
Lmax[3]:=(L[j,3]/0.001)*pomocnaL[3]:

pomocnaL[1]:=Lmax[1]:
pomocnaL[2]:=Lmax[2]:
pomocnaL[3]:=Lmax[3]:

t:=0.5*j:
Lj1:=ln(Lmax[1])/t:
Lj2:=ln(Lmax[2])/t:
Lj3:=ln(Lmax[3])/t:

Gr1:= Gr1,[t,Lj1]:
Gr2:= Gr2,[t,Lj2]:
Gr3:= Gr3,[t,Lj3]:

X:=Pr[500]:
od:
A:=[Gr1]:
B:=[Gr2]:
C:=[Gr3]:
pointplot(A,axes=normal, colour=black, connect=true);
pointplot(B, axes=normal, colour=black, connect=true);
pointplot(C, axes=normal, colour=black, connect=true);

Gr1[10001];
Gr2[10001];
Gr3[10001];

```

obrázek 9.8: Ljapunovy exponenty pro model konvekce (2.část)

## 9.6 Ljapunovovy exponenty pro 1-dim. atm. Model

```

> pole1::[numeric,numeric]:
pole2::[numeric,numeric]:
pole3::[numeric,numeric]:
pole4::[numeric,numeric]:
pole1:=[0,1]:
pole2:=[0,1]:
pole3:=[0,1]:
pole4:=[0,1]:
pomocnaL[1]:=1:
pomocnaL[2]:=1:
pomocnaL[3]:=1:
pomocnaL[4]:=1:
Gr1:=pole1:
Gr2:=pole2:
Gr3:=pole3:
Gr4:=pole4:
r:=15:
f1 := (X,Y,Z,V) -> -Z*V+V*Y-X+r:
f2 := (X,Y,Z,V) -> -V*X+X*Z-Y+r:
f3 := (X,Y,Z,V) -> -X*Y+Y*V-Z+r:
f4 := (X,Y,Z,V) -> -Y*Z+Z*X-V+r:
PR := ourrk4(f1,f2,f3,f4,[-2,1,0,1],0.005,49999):
X:=PR[50000]:
for j from 1 to 10000 do
dX1:=[[0.001,0,0,0],[0.001,0,0,0]]:
dX2:=[[0,0.001,0,0],[0,0.001,0,0]]:
dX3:=[[0,0,0.001,0],[0,0,0.001,0]]:
dX4:=[[0,0,0,0.001],[0,0,0,0.001]]:
Pr := ourrk4(f1,f2,f3,f4,[X[1],X[2],X[3],X[4]],0.001,499):
for i from 1 to 500 do
f10 := (dX,dY,dZ,dV) -> -dX+Pr[i,4]*dY-Pr[i,4]*dZ+(-
Pr[i,3]+Pr[i,2])*dV:
f20:= (dX,dY,dZ,dV) -> (-Pr[i,4]+Pr[i,3])*dX-dY+Pr[i,1]*dZ-
Pr[i,1]*dV:
f30:= (dX,dY,dZ,dV) -> -Pr[i,2]*dX+(-Pr[i,1]+Pr[i,4])*dY-
dZ+Pr[i,2]*dV:
f40:= (dX,dY,dZ,dV) -> Pr[i,3]*dX-Pr[i,3]*dY+(-
Pr[i,2]+Pr[i,1])*dZ-dV:
dX1 :=
ourrk4(f10,f20,f30,f40,[dX1[2,1],dX1[2,2],dX1[2,3],dX1[2,4]],0.0
01,1);
dX2 :=
ourrk4(f10,f20,f30,f40,[dX2[2,1],dX2[2,2],dX2[2,3],dX2[2,4]],0.0
01,1);
dX3 :=
ourrk4(f10,f20,f30,f40,[dX3[2,1],dX3[2,2],dX3[2,3],dX3[2,4]],0.0
01,1);
dX4 :=
ourrk4(f10,f20,f30,f40,[dX4[2,1],dX4[2,2],dX4[2,3],dX4[2,4]],0.0
01,1);
od;

O1:= <dX1[2,1],dX1[2,2],dX1[2,3],dX1[2,4]>:
O2:= <dX2[2,1],dX2[2,2],dX2[2,3],dX2[2,4]>:
O3:= <dX3[2,1],dX3[2,2],dX3[2,3],dX3[2,4]>:
O4:= <dX4[2,1],dX4[2,2],dX4[2,3],dX4[2,4]>:

```

obrázek 9.9: Ljapunovovy exponenty pro 1-dim. atm. model (1.část)

```

L[j,1]:=(O1[1]^2+O1[2]^2+O1[3]^2+O1[4]^2)^(0.5):
NO1[1]:=O1[1]/L[j,1]:
NO1[2]:=O1[2]/L[j,1]:
NO1[3]:=O1[3]/L[j,1]:
NO1[4]:=O1[4]/L[j,1]:
NO1:=<NO1[1],NO1[2],NO1[3],NO1[4]>:
NO20:=O2 -
(O2[1]*NO1[1]+O2[2]*NO1[2]+O2[3]*NO1[3]+O2[4]*NO1[4])*NO1:
L[j,2]:=(NO20[1]^2+NO20[2]^2+NO20[3]^2+NO20[4]^2)^(0.5):
NO2[1]:=NO20[1]/L[j,2]:
NO2[2]:=NO20[2]/L[j,2]:
NO2[3]:=NO20[3]/L[j,2]:
NO2[4]:=NO20[4]/L[j,2]:
NO2:=<NO2[1],NO2[2],NO2[3],NO2[4]>:
NO30:=O3 -
(O3[1]*NO1[1]+O3[2]*NO1[2]+O3[3]*NO1[3]+O3[4]*NO1[4])*NO1 -
(O3[1]*NO2[1]+O3[2]*NO2[2]+O3[3]*NO2[3]+O3[4]*NO2[4])*NO2:
L[j,3]:=(NO30[1]^2+NO30[2]^2+NO30[3]^2+NO30[4]^2)^(0.5):
NO3[1]:=NO30[1]/L[j,3]:
NO3[2]:=NO30[2]/L[j,3]:
NO3[3]:=NO30[3]/L[j,3]:
NO3[4]:=NO30[4]/L[j,3]:
NO3:=<NO3[1],NO3[2],NO3[3],NO3[4]>:
NO40:=O4 -
(O4[1]*NO1[1]+O4[2]*NO1[2]+O4[3]*NO1[3]+O4[4]*NO1[4])*NO1 -
(O4[1]*NO2[1]+O4[2]*NO2[2]+O4[3]*NO2[3]+O4[4]*NO2[4])*NO2 -
(O4[1]*NO3[1]+O4[2]*NO3[2]+O4[3]*NO3[3]+O4[4]*NO3[4])*NO3:
L[j,4]:=(NO40[1]^2+NO40[2]^2+NO40[3]^2+NO40[4]^2)^(0.5):
NO4[1]:=NO40[1]/L[j,4]:
NO4[2]:=NO40[2]/L[j,4]:
NO4[3]:=NO40[3]/L[j,4]:
NO4[4]:=NO40[4]/L[j,4]:
NO4:=<NO4[1],NO4[2],NO4[3],NO4[4]>:
Lmax[1]:=(L[j,1]/0.001)*pomocnaL[1]:
Lmax[2]:=(L[j,2]/0.001)*pomocnaL[2]:
Lmax[3]:=(L[j,3]/0.001)*pomocnaL[3]:
Lmax[4]:=(L[j,4]/0.001)*pomocnaL[4]:
pomocnaL[1]:=Lmax[1]:
pomocnaL[2]:=Lmax[2]:
pomocnaL[3]:=Lmax[3]:
pomocnaL[4]:=Lmax[4]:
t:=0.5*j:
Lj1:=ln(Lmax[1])/t:
Lj2:=ln(1)/t:
Lj3:=ln(Lmax[3])/t:
Lj4:=ln(Lmax[4]*Lmax[2])/t:
Gr1:=Gr1,[t,Lj1]:
Gr2:=Gr2,[t,Lj2]:
Gr3:=Gr3,[t,Lj3]:
Gr4:=Gr4,[t,Lj4]:
X:=Pr[500]:
od:
A:=[Gr1]: B:=[Gr2]: C:=[Gr3]: E:=[Gr4]:
pointplot(A,axes=normal,colour=black,connect=true);
pointplot(B,axes=normal,colour=black,connect=true);
pointplot(C,axes=normal,colour=black,connect=true);
pointplot(E,axes=normal,colour=black,connect=true);

Gr1[10001]; Gr2[10001]; Gr3[10001]; Gr4[10001];

```

obrázek 9.10: Ljapunovovy exponenty pro 1-dim. atm. model (2.část)



## 9.7 Počáteční růst směrodatné odchylky

```

> ch := proc( N::numeric, S::numeric, K::numeric,
inits::[numeric,numeric,numeric,numeric] )
local m,e,r,f1,f2,f3,f4,x1,x2,pomocna:
r:=18:
f1 := (X,Y,Z,V) -> -Z*V+V*Y-X+r:
f2 := (X,Y,Z,V) -> -V*X+X*Z-Y+r:
f3 := (X,Y,Z,V) -> -X*Y+Y*V-Z+r:
f4 := (X,Y,Z,V) -> -Y*Z+Z*X-V+r:
x1[0][K+1]:=inits:
pomocna:=0:
for m from 1 to S do
x1[m] := ourrk4(f1,f2,f3,f4,x1[m-1][K+1],0.005,K):
x2[m]:=
[x1[m][1,1]+0.001,x1[m][1,2]+0.001,x1[m][1,3]+0.001,x1[m][1,4]+0.
001]:
x2[m] := ourrk4(f1,f2,f3,f4,x2[m],0.005,K):
e[m][N]:=((x1[m][N,1]-x2[m][N,1])^2 + (x1[m][N,2]-x2[m][N,2])^2
+ (x1[m][N,3]-x2[m][N,3])^2 + (x1[m][N,4]-
x2[m][N,4])^2)/4)^(0.5):
e[N]:=(e[m][N]+pomocna*(m-1))/(m):
pomocna:=e[N]
od;
e[N]
end:

r:=18:
f1 := (X,Y,Z,V) -> -Z*V+V*Y-X+r:
f2 := (X,Y,Z,V) -> -V*X+X*Z-Y+r:
f3 := (X,Y,Z,V) -> -X*Y+Y*V-Z+r:
f4 := (X,Y,Z,V) -> -Y*Z+Z*X-V+r:

s:=1000:
k:=150:
X1[2]:=[1,2,3,4]:
for j from 1 to 50000 do
X1:= ourrk4(f1,f2,f3,f4,X1[2],0.005,1):
od:

for n from 1 to k+1 do
e[n]:=ch(n,s,k,X1[2]):
od:

A:=pointplot({seq([0.6*(n-1),e[n]],n=1..151)},axes=normal,
colour=black,symbol=point,symbolsize=100):
B:=pointplot({seq([0.6*(n-1),0.001*exp(2.37*0.6*(n-
1)/120)],n=1..151)},axes=normal,
colour=red,symbol=point,symbolsize=100):
display([A,B]);

C:=pointplot({seq([0.6*(n-
1),ln(e[n]/0.001)],n=1..151)},axes=normal,
colour=black,symbol=point,symbolsize=100):
E:=pointplot({seq([0.6*(n-1),2.37*0.6*(n-
1)/120],n=1..151)},axes=normal,
colour=red,symbol=point,symbolsize=100):
display([C,E]);

```

obrázek 9.11: Počáteční růst směrodatné odchylky

## 9.8 Bifurkační diagram

```
> restart;
with(LinearAlgebra) :
with(plots) :
with(plottools) :
with(DEtools) :

ourrk4 := proc(f1::procedure, f2::procedure, f3::procedure,
inits::[numeric,numeric],Y0::numeric,Z0::numeric, h::numeric,
N::nonnegint)
local k, F11, F12, F13, F21, F22, F23, F31, F32, F33, F41, F42,
F43, pointlist,zobraz, x, y, z,r0;

r0 := inits[1];
x := inits[2];
y := Y0;
z := Z0;
pointlist := inits;

for k from 0 to N-1-1000 do

F11 := evalf(h*f1(x, y, z));
F21 := evalf(h*f1(x + F11/2, y + F11/2, z + F11/2));
F31 := evalf(h*f1(x + F21/2, y + F21/2, z + F21/2));
F41 := evalf(h*f1(x + F31, y + F31, z + F31));

F12 := evalf(h*f2(x, y, z));
F22 := evalf(h*f2(x + F12/2, y + F12/2, z + F12/2));
F32 := evalf(h*f2(x + F22/2, y + F22/2, z + F22/2));
F42 := evalf(h*f2(x + F32, y + F32, z + F32));

F13 := evalf(h*f3(x, y, z));
F23 := evalf(h*f3(x + F13/2, y + F13/2, z + F13/2));
F33 := evalf(h*f3(x + F23/2, y + F23/2, z + F23/2));
F43 := evalf(h*f3(x + F33, y + F33, z + F33));

x := evalf(x + (F11 + 2*F21 + 2*F31 + F41)/6);
y := evalf(y + (F12 + 2*F22 + 2*F32 + F42)/6);
z := evalf(z + (F13 + 2*F23 + 2*F33 + F43)/6);

od;
```

obrázek 9.11: Počáteční růst směrodatné odchylky (1.část)

```

for k from N-1000 to N-1 do

F11 := evalf(h*f1(x, y, z));
F21 := evalf(h*f1(x + F11/2, y + F11/2, z + F11/2));
F31 := evalf(h*f1(x + F21/2, y + F21/2, z + F21/2));
F41 := evalf(h*f1(x + F31, y + F31, z + F31));

F12 := evalf(h*f2(x, y, z));
F22 := evalf(h*f2(x + F12/2, y + F12/2, z + F12/2));
F32 := evalf(h*f2(x + F22/2, y + F22/2, z + F22/2));
F42 := evalf(h*f2(x + F32, y + F32, z + F32));

F13 := evalf(h*f3(x, y, z));
F23 := evalf(h*f3(x + F13/2, y + F13/2, z + F13/2));
F33 := evalf(h*f3(x + F23/2, y + F23/2, z + F23/2));
F43 := evalf(h*f3(x + F33, y + F33, z + F33));

x := evalf(x + (F11 + 2*F21 + 2*F31 + F41)/6);
y := evalf(y + (F12 + 2*F22 + 2*F32 + F42)/6);
z := evalf(z + (F13 + 2*F23 + 2*F33 + F43)/6);

pointlist := pointlist,[r0,x];

od;

[pointlist];

end:

for i from 0 to 100 do
f1 := (X,Y,Z) -> -10*X+10*Y:
f2 := (X,Y,Z) -> -Z*X+(0.1+1*i)*X-Y:
f3 := (X,Y,Z) -> Y*X-(8/3)*Z:

P := ourrk4(f1,f2,f3,[0.1+1*i,0.001],0.001,0.001,0.005,10000):
A[i]:=pointplot(P, axes=normal,
colour=black,symbol=point,symbolsize=5):

od:

display([seq(A[i],i=0..100)]);

```

obrázek 9.12: Počáteční růst směrodatné odchylky (2.část)