UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE
Pedagogická fakulta
katedra didaktiky matematiky

GRAFY V DIDAKTICE MATEMATIKY
GRAPHS IN DIDACTICS OF MATHEMATICS

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce:	**Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.**
Autor diplomové práce:	**Kateřina Lacková**
Studijní obor:	**Učitelství pro 1. stupeň ZŠ**
Forma studia:	**prezenční**
Diplomová práce dokončena:	**květen, 2010**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Praze dne 31. 5. 2010 Podpis: ....

Poděkování:

Chtěla bych tímto velmi poděkovat vedoucímu své diplomové práce panu Prof. RNDr. Milanu Hejnému, CSc. za to, že se mne jako diplomantky ujal, za pomoc a podporu, odborné vedení, cenné rady a podnětné připomínky k práci, které mi umožnily posunout vlastní hranice.

Dále děkuji oběma paním učitelkám, které mi umožnily provést experimenty se žáky jejich třídy a poskytly mi o těchto žácích potřebné informace.

Anotace:

Diplomová práce má experimentální charakter s možným výstupem do učitelské praxe. Zabývá se aplikací teorie grafů do didaktiky matematiky. Stručně představuje různé typy úloh využívající teorie grafů a detailněji se zaměřuje na využití tzv. rovnicového šipkového grafu pro žáky mladšího školního věku. Těžištěm práce je experiment realizovaný ve 2. ročníku ZŠ. Experiment je popsán a analyzován. Hlavní pozornost je věnována řešitelským strategiím žáků. Získané výsledky je možné aplikovat ve vyučování nejen ve 2. druhém ročníku.

Annotation:

Thesis is of an experimental kind with the possible application to ordinary education. It deals with the implementation of graph theory into education. Using graphs theory it presents briefly different a set of problems and particularly elaborate so called equation-arrow graph aimed to early graders. The core of the thesis is experiment done with second graders. Experiment is described and analyzed. The main concern is given to solving strategies of pupils. The obtained results might be applied to education not only in grade 2.

Klíčová slova:

Graf, ohodnocený graf, grafy jako úlohová prostředí, žáci 2. ročníku, řešitelský proces, strategie, metoda pokus/omyl, sebereflexe.

Keywords:

Graph, evaluated graph, graphs as the environment for problems, second graders, solving process, strategies, try-error method, self – reflection.

OBSAH:

Úvod a cíle

Jedním z hlavních cílů učitele matematiky je i motivace žáků. Tím rozumíme zvyšování jejich zvědavosti v oblasti matematiky a potřeby řešit problémy. Z vlastní zkušenosti vím, že tradiční vyučování zde není příliš účinné. Měla jsem to štěstí setkávat se s úlohami, které motivují žáky více než úlohy tradiční. Tyto úlohy, které vznikají při koncipování vyučování orientovaného na budování schémat (Hejný 2007, Jirotková 2007, Slezáková 2007), propojují matematiku se životní zkušeností žáků a zasahují do různých oblastí matematiky.

Při volbě tématu diplomové práce jsem dostala možnost podílet se na tvorbě a testování takových úloh. Byla mi nabídnuta série úlohových oblastí, jejichž společným jmenovatelem je vazba na graf. Graf sám je v životě žáka přítomen v různých situacích, a proto je toto grafické prostředí žákům blízké. Z mnoha možných úlohových oblastí jsem si nakonec zvolila grafy orientované na schéma „rovnice“.

1. kapitola: Formulace problému

1.1 Základní pojmy

GRAF – nechť je v rovině dáno n různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$.. ($1 \leq n$). Tyto body nazýváme **vrcholy grafu.** Nechť je dále dáno k úseček $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ($1 \leq k$) tak, že oba koncové body každé úsečky jsou vrcholy grafu. Tyto úsečky nazýváme **hranami grafu**. Mají-li dvě hrany společný bod, pak je to **vrchol**. Hrana, u které je určeno, který ze dvou jejích vrcholů je počátek a který konec, se nazývá **orientovaná** a orientace je znázorněna šipkou běžným způsobem. Takto popsaný graf budeme označovat G = ($A_1, A_2, \ldots, A_n$; $h_1, h_2, \ldots, h_k$). Každou neprázdnou podmnožinu vrcholů grafu G společně s podmnožinou hran grafu G nazveme **podgrafem** grafu G, jestliže sama tato dvojice množin tvoří graf.

V této práci se zabýváme pouze grafy, v nichž neexistují současně orientované i neorientované hrany. Když jsou všechny hrany grafu orientované, mluvíme o **orientovaném grafu.** Když jsou všechny hrany grafu neorientované pak mluvíme o **neorientovaném grafu**.

Nechť $B_0, B_1, \ldots, B_u$ je $u + 1$ vrcholů grafu G (ne nutně vzájemně různých) takových, že každé dva sousední jsou spojeny hranou. Hranu grafu G spojující vrcholy B_{i-1} a B_i označíme g_i. Pro všechna i = 1, 2, …, u. Tento podgraf grafu G nazveme **trasou**.

Graf nazýváme **souvislým**, jestliže ke každým jeho dvěma vrcholům existuje trasa, která je spojuje.

Nechť je dán graf G = ($A_1, A_2, \ldots, A_n$; $h_1, h_2, \ldots, h_k$) a dvě zobrazení

$$f: \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \to \mathbf{N} \qquad \text{a} \qquad g: \{h_1, h_2, \ldots, h_k\} \to \mathbf{N},$$

kde **N** = {1, 2, 3, 4, …} je množina přirozených čísel. Pak zobrazení f nazveme **vrcholové ohodnocení grafu** G a číslo f(A_i), přiřazené vrcholu A_i, označíme a_i. Zobrazení g nazveme **hranové ohodnocení grafu** G. Graf u kterého je dáno vrcholové ohodnocení f se nazývá **vrcholově ohodnoceným grafem** a značí se pak (G,f). Graf u kterého je dáno hranové ohodnocení se nazývá **hranově ohodnoceným grafem** a značí se pak (G,g).

V případě, že materiál, který je dále probírán, bude adresován učitelům, není potřebné uvedenou náročnou matematickou terminologii uvádět. Bylo by to kontraproduktivní, neboť by to čtenáře spíše odradilo, než motivovalo. V dalším textu se snažím používat jednodušší (i když někdy snad ne zcela přesnou) dikci, na kterou jsou kladeny pouze dvě podmínky: musí být srozumitelná a musí případná nedorozumění se čtenářem omezit na minimum.

Tak například složitý pojem vrcholově ohodnocený graf je popsán srozumitelněji takto: Máme graf G a ke každému jeho vrcholu připíšeme jedno přirozené číslo. Takový graf nazveme vrcholově ohodnoceným. Místo dlouhého „číslo *a* je připsáno vrcholu *A*“ budeme mluvit stručně „*a* je v *A*“, nebo „v *A* je *a*“, nebo „*a* sedí v *A*“ apod. Dodejme, že některá z připsaných čísel mohou být i stejná. (Poslední podmínka není z hlediska matematické preciznosti potřebná, ale učitele může napadnout, že čísla musejí být různá, protože se setkal s podobnou úlohou, kde se tato různost požadovala.)

1.2 Typy grafů

Mým vedoucím diplomové práce mi byly nabídnuty a představeny různé aplikace teorie grafů v didaktice matematiky:

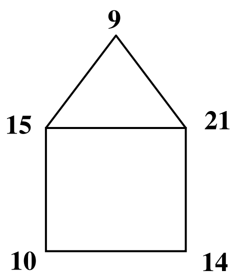
1) **Soudělný graf (vrcholově i hranově ohodnocený)**
2) **Rovnicový šipkový graf**
3) **Cyklostezky/ Linky**
4) **Rozdílový graf**

1) Soudělný graf

Vymezení. Nechť je dán vrcholově ohodnocený neorientovaný graf (G,f), ve kterém jsou vrcholy A_i a A_j spojeny hranou právě tehdy, když jejich čísla a_i, a_j jsou soudělná. Takový graf nazveme **soudělným**.

Například graf G, který má tři vrcholy, ve kterých sedí čísla 3, 3 a 6, má i tři hrany (tedy je to trojúhelník), je soudělný, protože každá dvě z daných čísel jsou soudělná.

Úloha 1. Sestroj soudělný graf přiřazený souboru pěti čísel 9, 10, 14, 15, 21.
[Řešení je dáno na obrázku 1.]



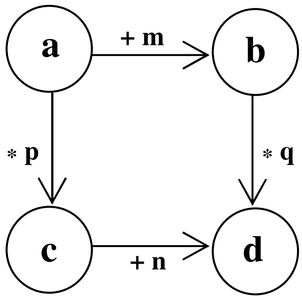
Obr.1) Soudělný graf
- vrcholy jsou ohodnoceny tak, že je s každým sousedním vrcholem pojí společný dělitel.
Součet vrcholů tohoto grafu = 69

Úloha 2. Najdi soubor pěti čísel, jehož soudělný graf má stejný tvar jako graf na obrázku 1 a součet těchto pěti čísel je a) menší než 69, b) nejmenší možný.
[Řešení. a) stačí v horním souboru změnit 9 na 3 a součet bude 63; b) soubor 2, 10, 14, 15, 21 se součtem 62. Důkaz tvrzení, že dané řešení je minimální, je uveden v kapitole *1.3 Zadaná úloha č. 1 – Soudělný graf „domeček“* na str. 13.]

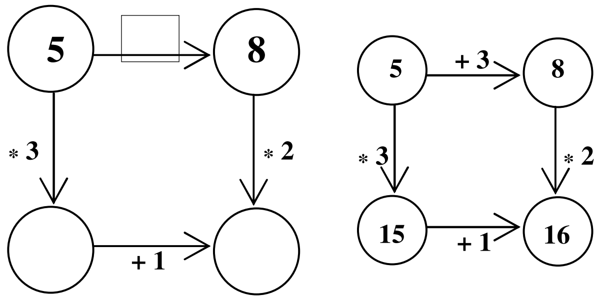
2) Rovnicový šipkový graf

Vymezení. Orientovaný graf, jehož vrcholy i hrany jsou ohodnoceny, nazveme **šipkovým grafem**. Tento typ grafu je znázorněn na obr. 2 nebo obr. 3a a 3b. Protože se jedná o situaci, která je vizuálně příbuzná ke známým úlohám z hadů, budou žáci vnímat čísla *a, b, c, d,* jako stavy, čísla *m, n* jako aditivní operátory a čísla *p, q* jako multiplikativní operátory. Ve shodě se zkušenostmi z hadů je žákům jasné, že $a + m = b$, $a * p = c$, atd.

Úloha 1. Doplň rovnicový šipkový graf na obrázku 3a.
[Řešení je dáno na obrázku 3b.]



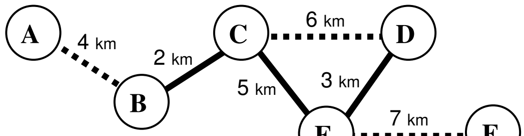
Obr.2) Obecný rovnicový šipkový graf



Obr. 3a) a 3b) Rovnicový šipkový graf.

3) Cyklostezky

Vymezení. Souvislý neorientovaný graf, jehož hrany jsou ohodnoceny a barveny alespoň dvěma různými barvami, nazveme **cykloareál**. Jeho vrcholy nazveme **stanoviště**, jeho hrany nazveme **stezky**. Ohodnocení hrany interpretujeme jako délku stezky v km. V úlohách vztahujících se k cykloareálu představují důležitý objekt **trasy**.



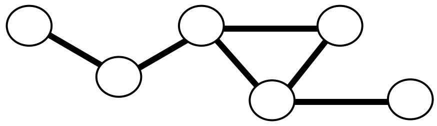
Obr.4) Cykoloztezky

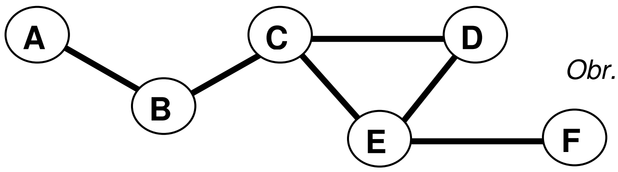
Úloha 1. Najdi trasu vedoucí ze stanoviště D do stanoviště B tak, aby nevedla žádnou přerušovaně vyznačenou stezkou. Kolik km tato trasa měří?
[Řešení: Trasa D – E – C – B, která měří 10 km.]

Linky

Vymezení. Neorientovaný souvislý graf s alespoň dvěma vyznačenými trasami, které se v tomto prostředí nazývají linky, nazveme grafem autobusových linek. Vrcholy grafu jsou obce, hrany grafu jsou silnice.

Úloha 1. Je dána trasa A – B – C – E a trasa F – E – D – C. Doplň do nákresu názvy jednotlivých stanovišť.
[Řešení je dáno na obrázku 5.]



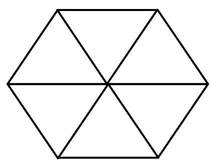


Obr.5) Autobusové linky

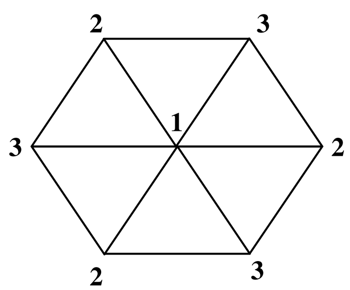
Úloha 2. Najdi k daném nákresu trasu, kterou projedeš všemi stanovišti právě jednou.
[Řešení: A – B – C – D – E – F nebo F – E – D – C – B – A.]

4) Rozdílový graf

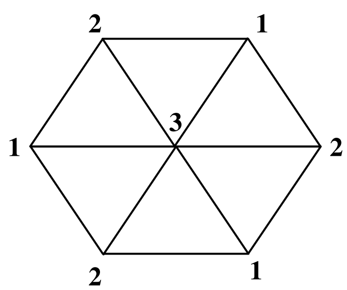
Vymezení. Vrcholově ohodnocený graf, ve kterém pro každou hranu je rozdíl hodnot vrcholů v absolutní hodnotě roven některému z čísel množiny M.
Úloha 1. Ohodnoť daný 1, 2 – rozdílový graf.
[Řešení je dáno na obrázku 6.]



Úloha 2. Ohodnoť daný 1, 2 – rozdílový graf tak, aby byl součet jeho vrcholů menší než 16. [Řešení je dáno na obrázku 7.]



Obr.6) 1, 2 – Rozdílový graf
Součet = 16



Obr.7) 1, 2 – Rozdílový graf
Součet = 12

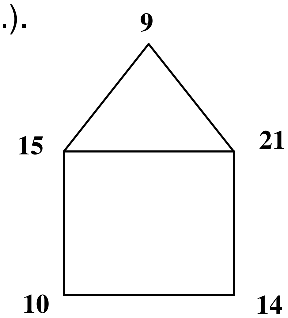
Mé seznamování se s jednotlivými typy grafů v didaktice matematiky probíhalo řešením úloh zadaných vedoucím mé diplomové práce. Protože jsem některé typy grafů již znala, měla jsem za úkol seznámit se s pro mne novými typy grafů právě tak, že se pokusím samostatně vyřešit úlohy s těmito grafy.

Řešení probíhalo ve dvou rovinách – samotným řešením úlohy a komentovaným řešením – tzn. okomentováváním jednotlivých kroků řešení a popisem použitých strategií, záznamem otázek a hypotéz, které během řešitelského procesu vznikaly, zápisem jejich potvrzení či vyvrácení a zdůvodněním dílčích postupů.

1.3 Zadaná úloha č. 1 – Soudělný graf „domeček“

1/ východisko = PROBLÉM

Je dán tento soudělný graf „domeček“ (viz. následující obr.). Nalezněte graf s co nejmenším součtem vrcholů.

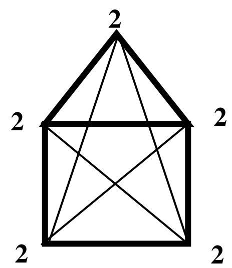


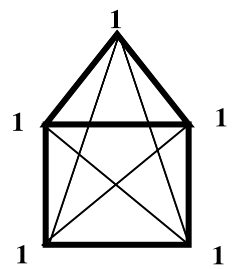
Pozn:
V soudělném grafu jsou vrcholy ohodnoceny tak, že je s každým sousedním vrcholem pojí společný dělitel.

2/ porozumění problému

- pokusy
- vyjasnění zcela špatných strategií (porozumění pravidlům)

Při řešení soudělného grafu („domeček“) jsem si nejprve nakreslila zadaný graf. Pak jsem zkusila místo zadaných vrcholů doplnit menší čísla a to nejprve všechna stejná, abych se nemusela zabývat pravidlem společného dělitele mezi vrcholy.

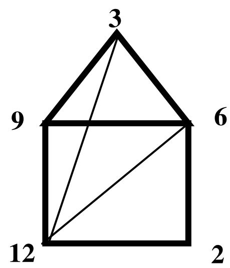


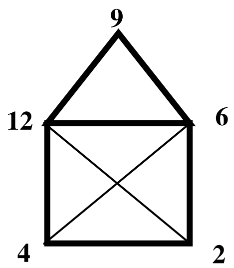


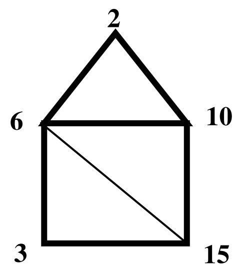
Vzápětí jsem si však uvědomila, že v takovém případě by musel být každý vrchol propojen s každým, se kterým má společného dělitele (viz. nákres) – tedy všechny se všemi – a takový graf už by neměl zadanou podobu („domeček“).

Uvědomila jsem si tedy podmínku: **„Vrcholy představují navzájem různá čísla.“** Čili, že každé číslo ve vrcholech grafu musí být jiné.

Zkusila jsem do prázdných grafů („domeček“) doplňovat náhodně různá čísla tak, aby měla s číslem v sousedním vrcholu grafu společného dělitele.







Bohužel po tomto víceméně náhodném oceňování došlo opět k situaci, že díky více společným dělitelům by se muselo propojit více vrcholů, a výsledný graf by zase neměl požadovanou podobu.

Vyvstaly otázky: „Může být v takovémto grafu číslo 1?“ a „Může se některé číslo přece jen opakovat/ smím použít některé číslo dvakrát?“

Několikerým dosazením do jednoduššího grafu jsem si na tyto otázky ihned odpověděla: Kdyby bylo v grafu číslo 1, muselo by být propojeno se všemi ostatními vrcholy, protože platí pravidlo společného dělitele.

Podobně jsou na tom i dvě shodná čísla – musela by být obě propojena se stejnými vrcholy i mezi sebou navzájem.

Pro potřeby tohoto grafu tedy nepřipadá ani jedna z variant v úvahu, protože by jimi byla porušena výsledná podoba grafu („domeček“).

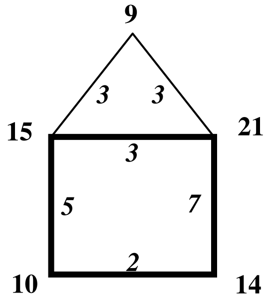
Po těchto prvních pokusech jsem úlohu odložila a vrátila se k ní za 5 dní.

3/ hledání strategií

– odhalení principů vedoucích k řešení úlohy

Dopředu jsem si zvolila postup práce: „Zkusím se nejprve podívat na společné dělitele v zadaném grafu („domeček“), použít je v jednodušším grafu („obdélník“) a najít nejmenší součet vrcholů nejdříve tam (v grafu „obdélník“).

Ocenila jsem si tedy hrany v zadaném grafu (viz. nákres).

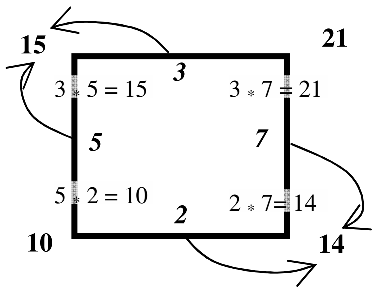


Nejdříve jsem zkoušela čísla daná ve vrcholech „obdélníku“ zmenšit – bezvýsledně. Vždy nastala ta situace, že zmenšené číslo ve vrcholu mělo buď více společných dělitelů s dalšími čísly ve vrcholech grafu, anebo již nemělo společného dělitele se sousedním číslem.

Smířila jsem se tedy s tím, že nejmenší součet vrcholů v součtovém grafu nenajdu tak, že budou ve vrcholech grafu co nejmenší čísla (nejlépe jednociferná).

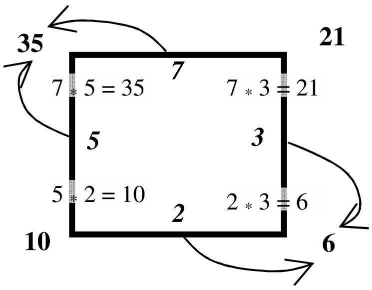
Podívala jsem se pozorněji, jak jsou tvořena čísla ve vrcholech vrcholově i hranově oceněného grafu „obdélník“.

Zjistila jsem, že číslo ve vrcholu grafu je součinem jeho dělitelů na obou stranách.

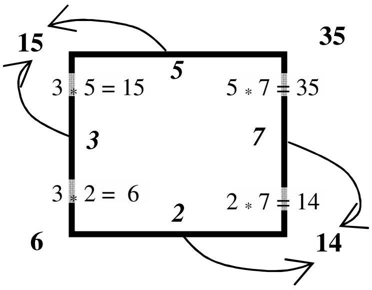


Hodnota tohoto grafu je *15 + 10 +14 + 21 =* 60.

Pak jsem zjišťovala, jak se změní hodnota tohoto grafu, když přesunu jeho jednotlivé dělitele a zároveň jsem hledala jejich nejmenší společné součiny.



Hodnota tohoto grafu je *35 + 10 + 6 + 21 =* 72.

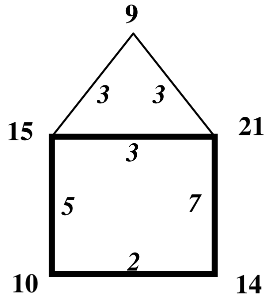


Hodnota tohoto grafu je *15 + 6 + 14 + 35 =* 70.

Po vyzkoušení všech možných variant – těchto tří – byla první varianta tou, která měla nejmenší výslednou hodnotu grafu.

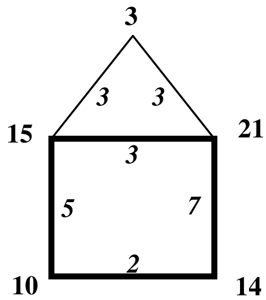
Rozhodla jsem se tedy, že nyní již budu hledat nejmenší možnou hodnotu grafu „domeček“ a základem pro ni bude graf „obdélník“ s nejmenší nalezenou hodnotou tj. s hodnotou 60.

K nalezenému grafu „obdélník“ jsem tedy opět připojila „střechu“, aby mi vznikl původní/zadaný graf „domeček“ (viz. následující obr.). Všimla jsem si, že společní dělitelé v připojené části „střecha“ musejí být shodní a to i s podstavou, na kterou se část „střecha“ napojí. Hledám ovšem nejmenší možná čísla ve vrcholech grafu tak, aby i výsledná hodnota grafu byla co nejmenší.



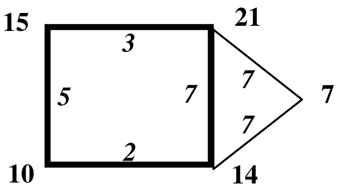
Původní graf „domeček“.

Proto jsem číslo ve vrcholu připojené části „střecha“ zmenšila na to nejmenší možné – na 3 (viz. následující obr.). Zjistila jsem tak zároveň, že **v grafu „domeček“ u části „střecha“ již nemusí platit pravidlo, že číslo ve vrcholu grafu je součinem jeho dělitelů na obou stranách**. Výsledná hodnota tohoto grafu je 60 + 3 (tedy nejmenší nalezená hodnota grafu „obdélník“ + číslo ve vrcholu části „střecha“).

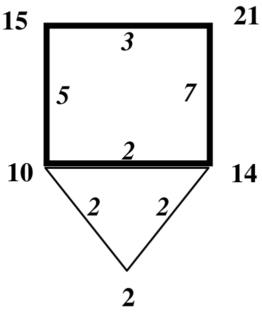


Hodnota tohoto grafu je **63**.

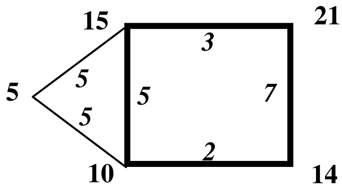
Připojila jsem postupně část „střecha“ na všechny zbylé strany grafu „obdélník“ s nejmenší nalezenou hodnotou 60, abych zjistila hodnoty všech takto nalezených možností.



Hodnota tohoto grafu je **67**.

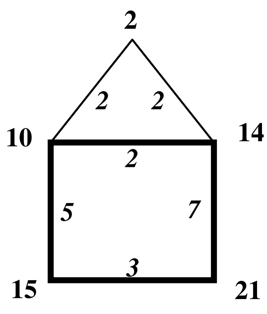


Hodnota tohoto grafu je **62**.



Hodnota tohoto grafu je **65**.

Nalezla jsem tedy řešení první zadané úlohy. **Graf „domeček“ s nejmenší výslednou hodnotou má hodnotu** *10 + 15 + 21 + 14 + 2 =* **62** (viz. následující obr.). Posilněna úspěchem jsem se ihned pustila do řešení další úlohy.

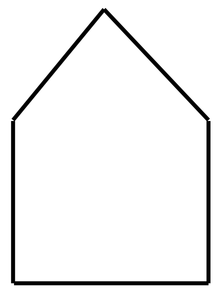


Hodnota tohoto grafu je **62**.

1.4 Zadaná úloha č. 2 – Soudělný graf „pětiúhelník“

1/ východisko = PROBLÉM

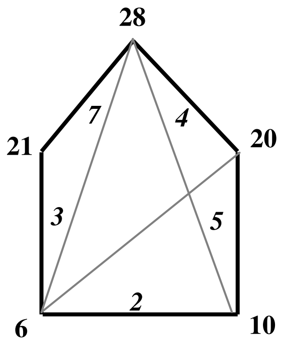
Nalezněte graf „pětiúhelník“ s co nejmenším součtem vrcholů.

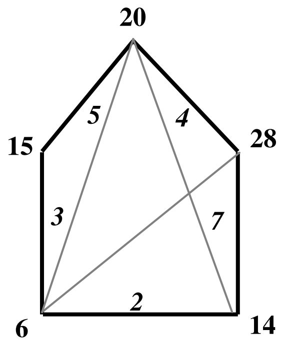


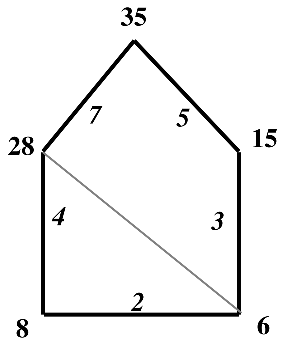
2/ porozumění problému

- pokusy
- vycházení z předchozích zkušeností

Zkusila jsem si načrtnout několik pětiúhelníků a ohodnotila si jejich hrany osvědčenými čísly z předchozí úlohy (2, 3, 5 a 7) v náhodném pořadí. Poslední hranu pětiúhelníku jsem ohodnotila náhodně zvoleným malým číslem. Zvolila jsem číslo 4.







Bohužel jsem zjistila, že kvůli náhodně zvolenému číslu mi dělá problém dodržet tvar grafu. Čísla ve vrcholech měla najednou navzájem více společných dělitelů a tvar grafu by tak neodpovídal. Zjistila jsem tedy, že **žádné číslo, kterým se ohodnocují hrany grafu, nemůže být násobkem jiného již použitého dělitele.**

Nicméně, po tomto neúspěšném hledání jsem tuto úlohu odložila a vrátila se k ní opět za několik dní.

3/ hledání strategií

- vycházení z předchozích zkušeností (z intuice)
- odhalení principů vedoucích k řešení úlohy

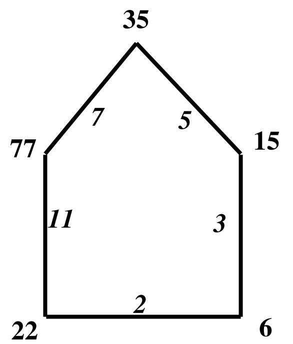
Nejprve jsem si pročetla své předchozí zápisky a prohlédla si, na co jsem již přišla dříve. Čísla v úloze 1 („domeček“), kterými se ohodnocovaly hrany grafu, mi začala být povědomá – 2, 3, 5, 7… takhle přeci začíná řada prvočísel!

Napadlo mne: **Co když bude řešením použít k ohodnocení hran grafů jen prvočísla?**

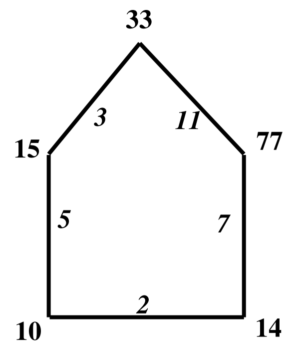
Měla jsem tušení, že by tato úvaha mohla opravdu vést k vyřešení úlohy. Prvočísla přeci mají tu výhodu, že rozhodně navzájem nemají žádného společného dělitele, tudíž se mezi nimi nenajde ani jedno, které by bylo násobkem jiného. Tak by se vyřešil problém s hledáním čísel, která nemají více společných dělitelů.

Okamžitě jsem si na kraj sešitu začala psát řadu čísel od 0 a podtrhávala si prvočísla: 0 1 <u>2</u> <u>3</u> 4 <u>5</u> 6 <u>7</u> 8 9 10 <u>11</u> 12 <u>13</u> 14 15 16 <u>17</u>

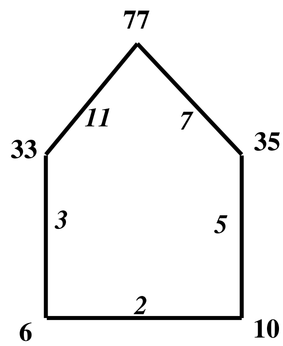
Ohodnotila jsem si tedy hrany prázdného „pětiúhelníku“ postupně pěti prvočísly (tolik prvočísel, kolik je hran). A protože mám stále na paměti, že chci výslednou sumu minimální – volím i prvočísla minimální.



Hodnota tohoto grafu je **155**.



Hodnota tohoto grafu je **149**.

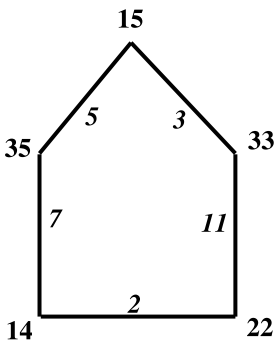


Hodnota tohoto grafu je **161**.

Po vyzkoušení těchto několika variant rozmístění prvočísel mi však ve vrcholech grafu stále vycházela docela vysoká čísla. Jak to udělat, abych docílila kombinací těchto pěti prvočísel co nejmenších součinů? Tento problém mi přišel povědomý… Už jsem jej určitě někdy řešila… No ano – řešili jsme ho během některého matematického semináře v rámci studia.

Hned se mi také vybavil postup řešení takové úlohy: **musím násobit vždy největší číslo s tím nejmenším a totéž pak platí i pro čísla zbývající.**

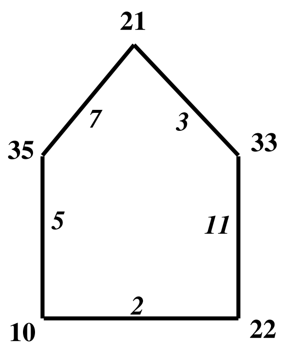
Ohodnotila jsem si tedy hrany „pětiúhelníku" dle tohoto pravidla. Vedle nejmenšího čísla – 2 jsem z jedné strany umístila číslo největší – 11 a z opačné strany to druhé nejvyšší – číslo 7. Prázdnou hranu vedle čísla 11 jsem ohodnotila druhým nejmenším číslem – 3. Pod poslední neohodnocenou hranu jsem si zapsala jediné zbývající číslo – 5.



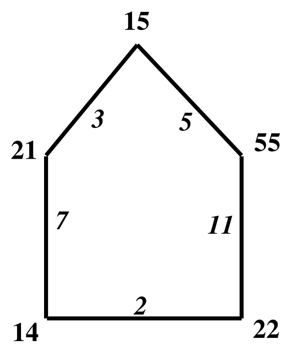
Hodnota tohoto grafu je **119**.

Konečná hodnota celého grafu po sečtení prvočíselných součinů ve vrcholech grafu byla opravdu mnohem nižší než hodnoty grafů předcházejících, kde jsem hrany ohodnocovala náhodně.

Ještě jsem chtěla vyzkoušet, o kolik se změní hodnota celého grafu, když prvočísla na hranách maličko vyměním.



Hodnota tohoto grafu je **121**.



Hodnota tohoto grafu je **127**.

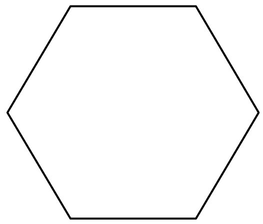
Po těchto pokusech jsem si již byla naprosto jistá, že jsem prve nalezla správné řešení této úlohy.

Graf „pětiúhelník" s nejmenší výslednou hodnotou má hodnotu *35 + 14 + 22 + 33 + 15 =* **119.**

1.5 Zadaná úloha č. 3 – Soudělný graf „šestiúhelník“

1/ východisko = PROBLÉM

Nalezněte graf „šestiúhelník“ s co nejmenším součtem vrcholů.

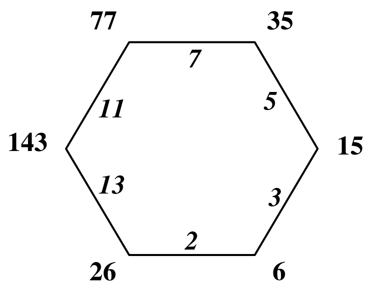


2/ vhled do problému, použití známých strategií vedoucích k řešení úlohy

– vycházení z předchozích zkušeností

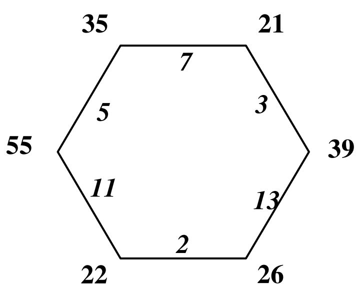
Po zkušenostech s předchozími úlohami a na základě již nalezených strategií jsem věděla, jakým způsobem je třeba úlohu řešit.

Nicméně jsem si nejprve ohodnotila hrany v „šestiúhelníku“ šesti nejmenšími prvočísly tak, aby šla prvočísla postupně. Chtěla jsem vidět rozdíl v hodnotě grafu, kde prvočísla nejsou uspořádaná tak, aby byly jejich součiny co nejmenší.

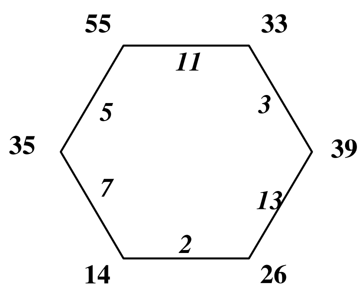


Hodnota tohoto grafu je **302**.

Pak jsem si načrtla ještě dva „šestiúhelníky“. Jeden s nejmenší výslednou hodnotou a druhý takový, u nějž jsem v uspořádání prvočísel udělala jednu změnu oproti tomu s nejmenší výslednou hodnotou (viz. následující obr.).



Hodnota tohoto grafu je **198**.

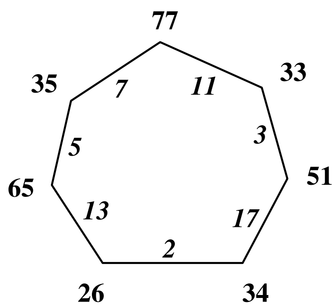


Hodnota tohoto grafu je **202**.

Graf „šestiúhelník“ s nejmenší výslednou hodnotou má hodnotu *35 + 55 + 22 + 26 + 39 + 21 =* **198.**

Zkusila jsem najít i graf „sedmiúhelník“ s nejmenší výslednou hodnotou. Abych se nespletla v ohodnocování hran grafu prvočísly tak, abych docílila nejmenších možných součinů, napsala jsem si sedm nejmenších prvočísel jdoucích po sobě do řady a postupně je při dosazování do grafu vyškrtávala (viz. následující obr.). Vždy jsem grupovala nejmenší číslo s největším. Tento postup jsem opakovala, dokud jsem nedosadila poslední číslo pod poslední neohodnocenou hranu grafu.

~~2~~, 3, 5, 7, 11, 13, ~~17~~



Hodnota tohoto grafu je **321**.

Shrnutí:

Čím více modelů jsem měla k dispozici (ať kladných či záporných), tím více jsem do dané problematiky pronikala. Strategii řešení jsem našla i na základě předchozích zkušeností a intuice. Myslím si, že nyní bych uměla vyřešit i o něco složitější úlohy v krátkém čase, protože jsem získala vhled do problematiky a vytvořila jsem si popsanou optimální strategii.

Jako pro pedagoga je s tímto pro mne spojeno další poznání, které se mi potvrzuje i u mých žáků. Platí pro ně totéž. Že totiž čím více zkušeností děti s nějakým typem úlohy mají, tím mají i větší vhled do daného problému. K řešení nových, třeba i složitějších úloh stejného typu, využívají předchozích zkušeností a hledají nejúčinnější strategie řešení, aby si usnadnily práci. Pokud mají s danou úlohou zkušeností dostatek, dokáží i její složitější variantu vyřešit v relativně krátkém čase.

2. kapitola: Příprava nástroje

Po seznámení se s několika různými typy grafů prostřednictvím řešení úloh s nimi, jsem měla za úkol zvolit si jeden typ grafu, který bude pro mou diplomovou práci klíčový.

Nakonec jsem se rozhodla pro **Rovnicový šipkový graf**, protože momentálně učím ve druhém ročníku základní školy, a již při bližším seznamování se s tímto matematickým prostředím mi na mysl vyplouvaly myšlenky pro jeho využití v mé třídě. Využila bych jej jednak jako standardní součást výuky (tyto grafy jsou ve zjednodušené podobě uvedeny i v učebnici pro druhý ročník, kterou využíváme[1]), takže bych mohla vytvořit jiné, další varianty učebnicí nabídnutých grafů. A pak také jako problémové úlohy pro tzv. „rychlíky“ (děti, které jsou v matematice bystřejší a jejich matematické myšlení jim dovoluje v hodinách matematiky zvládnout více práce, než jejich spolužákům – řeší pak různé úlohy navíc či se zabývají obtížnější variantou stejné úlohy, samy pro ostatní úlohy vytvářejí, hledají a snaží se pojmenovat či vysvětlit různé nalezené souvislosti, zákonitosti, hledají strategie řešení apod.).

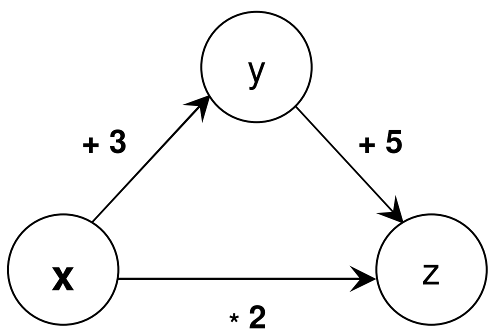
Dostala jsem tedy k řešení novou **sérii úloh v prostředí Rovnicového šipkového grafu**.

2.1 Série úloh v prostředí Rovnicového šipkového grafu

2.1.1 Zadaná úloha č. 1 – Rovnicový šipkový graf „trojúhelník“

1/ východisko = PROBLÉM

Je dán tento Šipkový graf „trojúhelník“.
Nalezněte jeho řešení.

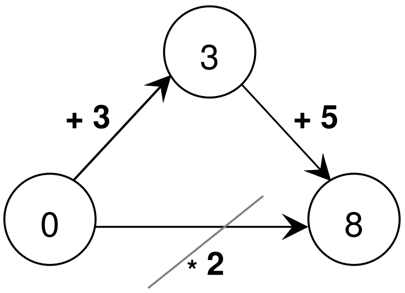


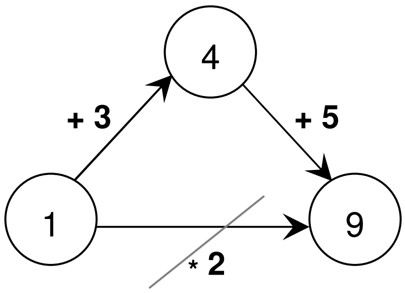
2/ porozumění problému

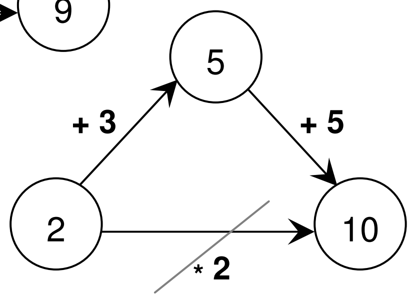
- pokusy
- vyjasnění zcela špatných strategií, postup řešení

[1] HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy. 1., 2. a 3. díl.* Plzeň : FRAUS, 2008

Zkoušela jsem si tedy dosazovat do pole ***x*** různá čísla od 0 výše (viz. následující obrázky). Vždy jsem předchozí neúspěšný pokus smazala a místo něj zkoušela další variantu. Měla jsem pocit, že se čísla ***x*** a ***z*** nemohou „potkat“ tak, aby bylo ***x*** dvojnásobkem ***z***. Rozdíl byl stále příliš velký.







Postup řešení:

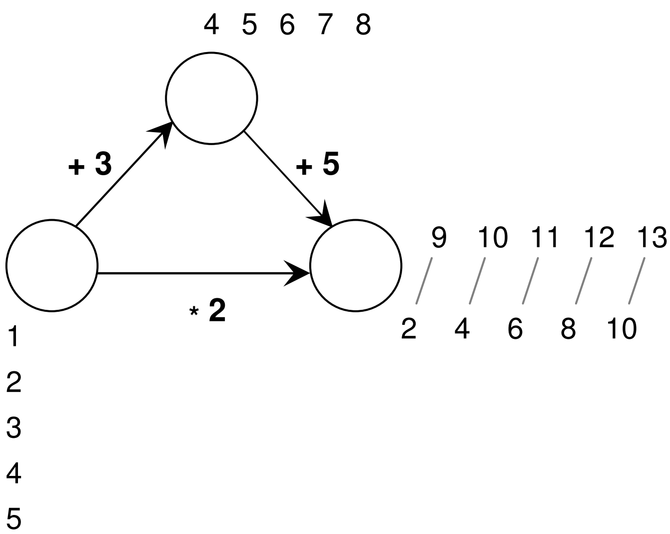
1) Malá čísla vedou ke skepsi.

2) Vnější zásah strategie systematiky.

Ani další pokusy s malými čísly nevedly k úspěchu; v mé mysli řešitele se objevila skepse. Zde jsem dostala radu: vést si přehledně evidenci všech neúspěšných pokusů.

3) Realizace – důležitá je grafika záznamu – evidence tabulkou – systematicky budujeme paměť.

Postupovala jsem tedy podle rady a zaznamenávala si všechna použitá i když neúspěšná řešení této úlohy (viz. následující obrázek).

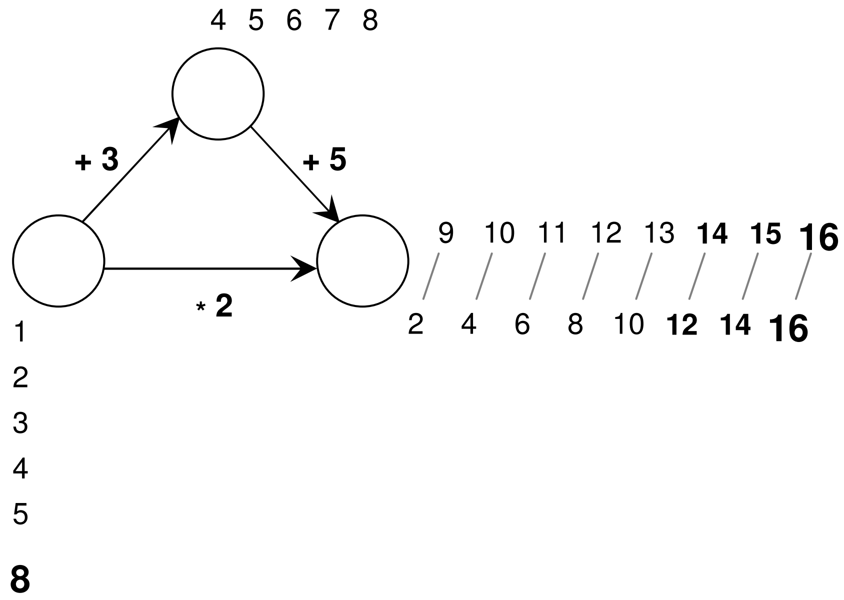


4) Uzření zákonitostí.

Najednou jsem objevila jistou pravidelnost. Čísla v horní řadě (***x*** + 3 + 5) rostou o 1, kdežto čísla v dolní řadě (***x*** * 2) narůstají po 2. Rozdíl mezi těmito čísly se tak postupně pravidelně zmenšuje.

5) Využití zákonitostí k řešení.

Podle této pravidelnosti jsem byla schopna jednoduše doplnit záznam a najít řešení této úlohy (viz. následující obrázek).



6) Zobecnění.

Podobně jako u soudělných grafů i zde bylo třeba zkušenost s jedním grafem zobecnit a formulovat jako pravidlo pro řešení všech podobných grafů. Ukázalo se, že se jedná o dvě úlohy. První spočívala v odhalení pravidla, druhá v jeho formulaci slovy. Nakonec jsem díky pomoci s formulací dospěla k jasnému pravidlu: **číslo *x* je součtem dvou přičtených čísel.**

Shrnutí:

U dětských řešitelů je tomu zrovna tak. Žák, který úlohu vyřeší, a je poté požádán, aby ji osvětlil spolužákům, začne své řešení vysvětlovat na příkladech. Obecné pravidlo, nebo-li myšlenku, pak nakonec většinou formuluje jiný žák.

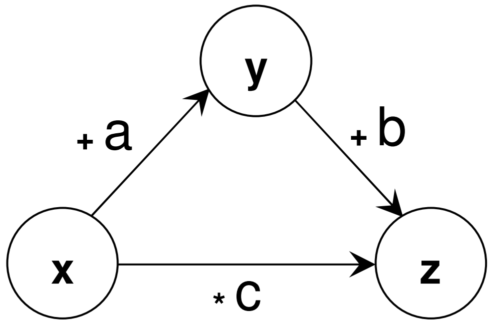
Myslím si, že je tomu tak, protože žák, který objev učinil, se při společné debatě snaží popsat ostatním svůj způsob řešení – krok za krokem odhaluje svou řešitelskou strategii, hovoří o konkrétních dílčích postupech a proto pro něj může být obtížné podívat se na problém s odstupem – abstraktně a obecně. Naproti tomu ten, komu je daný způsob řešení popisován, si vytváří obecnou představu, vidí problém zvnějšku, a proto jej dokáže obecněji pojmenovat (většinou, aby se ujistil, že kolegův výklad chápe správně, pojmenuje řešení obecně a jednoduše).

Proto je společná diskuse ve vyučování velmi přínosná, protože může vést k přesnějšímu a abstraktnějšímu pojmenování skutečnosti, kterého sám objevitel pro svou angažovanost není schopen. Kromě toho se při vzájemné debatě děti učí jeden od druhého, což je ještě přínosnější, protože vrstevníci si často porozumí lépe, než když se daný problém pokouší dětem objasnit dospělý. Tím, že na řešení přijdou sami nebo ho převezmou od spolužáka, je pro ně poznání trvalejší a mají pak do úloh podobného typu mnohem lepší vhled.

2.1.2 Zadaná úloha č. 2 – obecný šipkový graf „trojúhelník“

1/ východisko = PROBLÉM

Je dán tento obecný šipkový graf „trojúhelník“.
Experimentálním dosazováním do tohoto grafu zkuste odhalit jisté zákonitosti.



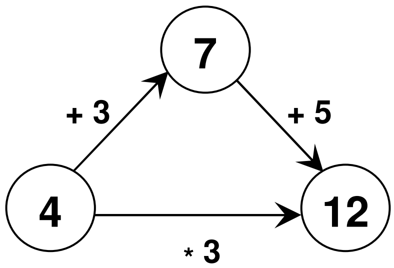
2/ porozumění problému

– pokusy
– vhled do problému díky předchozí úloze, využití známé strategie, zobecnění

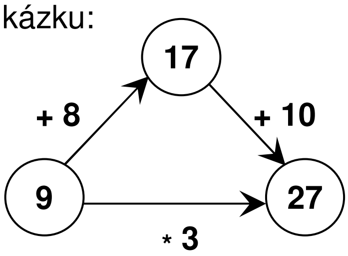
Nejprve jsem si nakreslila vyřešený trojúhelník z předchozí úlohy. Pod něj jsem si pak zakreslila stejný s tím, že jsem obměnila číslo *c*. V předchozí úloze bylo *x* součtem dvou přičtených čísel právě proto, protože se *c = 2*.

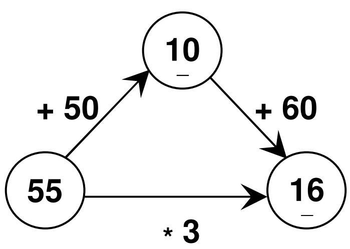
Moje domněnka je, že pokud se *c = 3*, bude *x = a + b / 2*.

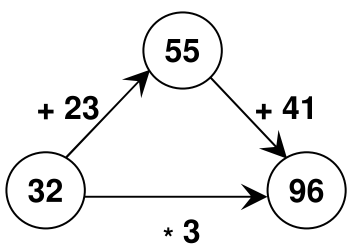
Na tomto trojúhelníku se má domněnka potvrdila 3 + 5 / 2 = 4 (viz. následující obr.)



Potvrdí se však i při dalších pokusech? Nakreslila jsem si tedy další trojúhelníky, u kterých *c = 3* s obměněnými *a, b*. Zde jen několik z nich na ukázku:



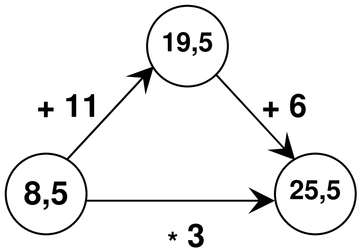




U všech těchto trojúhelníků platí: když *c = 3*, pak *x = a + b / 2*.

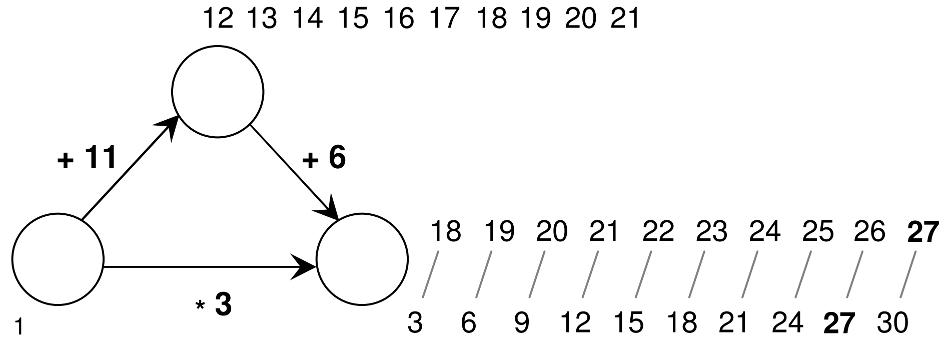
Co se ale stane, pokud *a + b* nebude beze zbytku dělitelné dvěma?

Zvolila jsem si tento trojúhelník (viz. následující obr.) tak, aby součet *a + b* byl liché číslo.



Jak je zřejmé, **trojúhelník, ve kterém *c = 3* a *a + b* není beze zbytku dělitelné dvěma, nemá v oboru přirozených čísel řešení.**

Podle předchozího řešitelského postupu se zakreslováním všech použitých možností i neúspěšných řešení, by tento trojúhelník vypadal takto:



Z nákresu je zřejmé, že nelze dospět k řešení. Horní čísla *x + a + b* narůstají po 1, kdežto dolní čísla *x * 3* narůstají po 3. Takže se tato nemohou „potkat“ a úloha tedy opravdu není řešitelná v oboru přirozených čísel.

Po vyřešení několika dalších trojúhelníků, kde *c = 4, 5, 6…* jsem se odvážila formulovat **obecnější pravidlo řešení obecného šipkovéh o grafu „trojúhelník“:**

když *c = 3*, pak *x = a + b / 2*

když *c = 4*, pak *x = a + b / 3*

když *c = 5*, pak *x = a + b / 4*

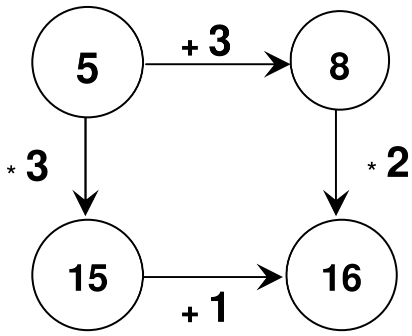
tedy **x = a + b / (c – 1).**

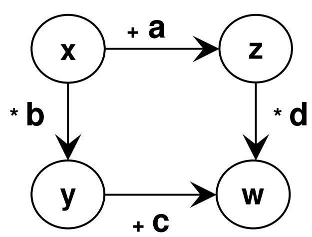
Samozřejmě platí, pokud *a + b* není beze zbytku dělitelné *(c – 1)*, pak úloha nemá v oboru přirozených čísel řešení.

2.1.3 Zadaná úloha č. 3 – Šipkový graf „čtyřúhelník“

1/ východisko = PROBLÉM

Je dán tento šipkový graf „čtyřúhelník“. Dosazováním jiných čísel za multiplikativní operátory *b, d* do tohoto grafu zkuste odhalit jisté zákonitosti.
Operátory *b, d* se mohou lišit o 0, 1, 5.
Smíte použít i záporná čísla.

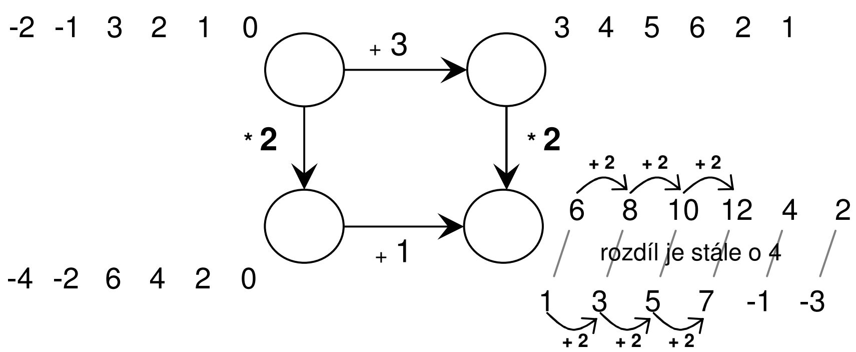




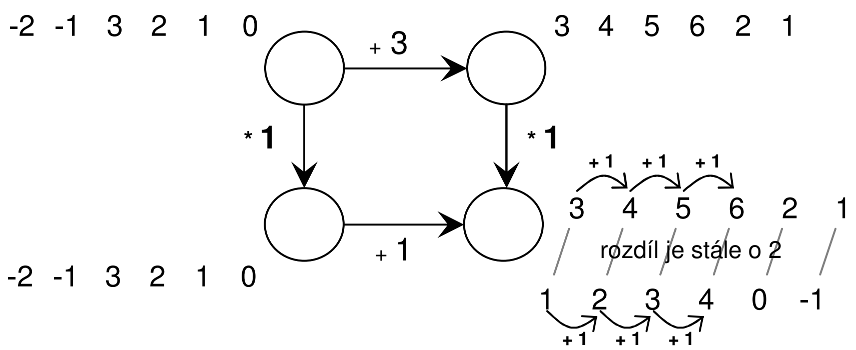
2/ porozumění problému

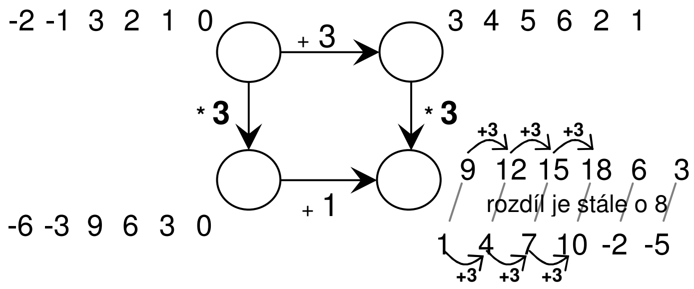
– pokusy
– vyjasnění zcela špatných strategií

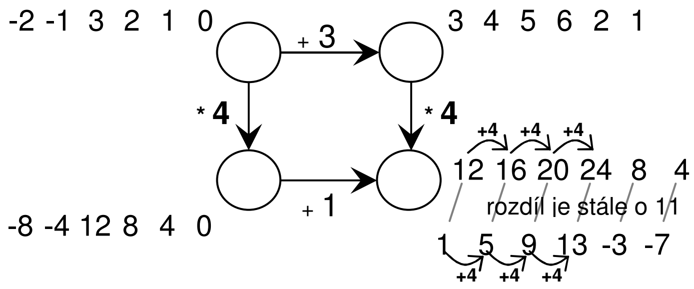
Na začátek, abych své pokusy nějak systematizovala, jsem zkusila dosadit <u>za oba multiplikativní operátory stejné číslo</u> a to 2 (viz. následující obr.). Zjistila jsem, že tato úloha nemá řešení. Rozdíl výsledků obou cest se stále lišil o 4.



Měla jsem tušení, že všechny úlohy tohoto typu nebudou mít řešení, ale pro jistotu jsem ještě zkusila za oba operátory postupně dosadit 1, 3, 4 (viz. následující obr.).

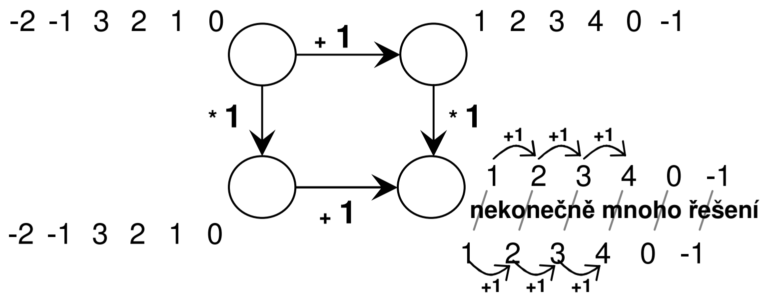




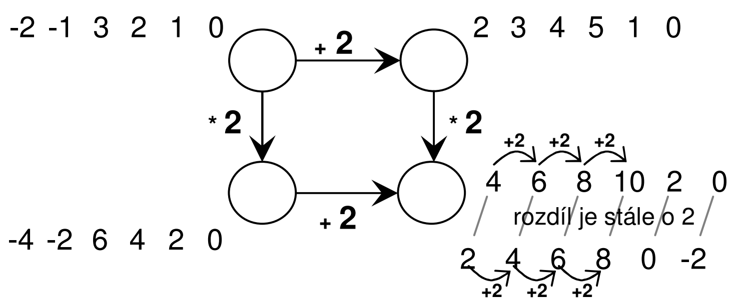


Díky takovýmto záznamům jsem si nejen potvrdila, že úloha, kde jsou oba multiplikativní operátory stejné, ale aditivní operátory jsou +3 a +1 nemohou mít řešení, navíc jsem uviděla jistou zákonitost – že totiž **hodnota výsledků obou cest $x * b + c$ a $x + a * d$ vždy rovnoměrně narůstá přesně o tolik, kolik je hodnota multiplikativních operátorů.**

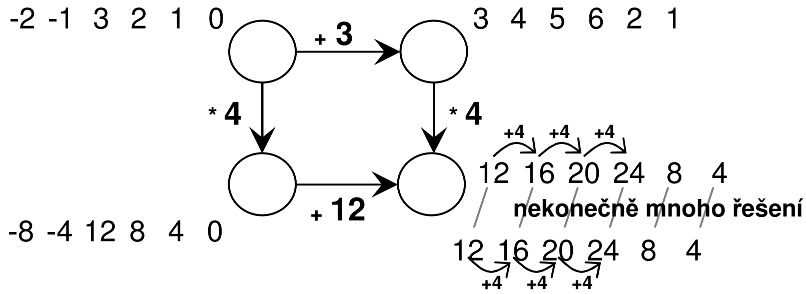
Napadlo mne, zda může mít úloha, kde jsou oba multiplikativní operátory stejné, řešení, když změním hodnotu aditivních operátorů. Vyzkoušela jsem to (viz. následující obr.) a za oba aditivní operátory dosadila postupně také stejná čísla 1, 2, 3, 4.



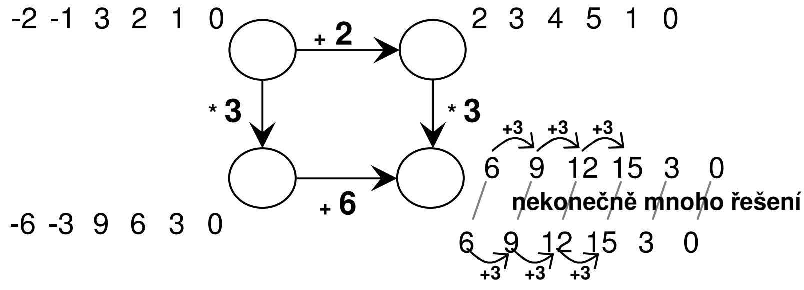
Úloha $x * 1 + 1 = x + 1 * 1$, má samozřejmě nekonečně mnoho řešení. U ostatních úloh, kdy jsem za *a, c* dosadila postupně 2, 3, 4 už to ovšem neplatí.

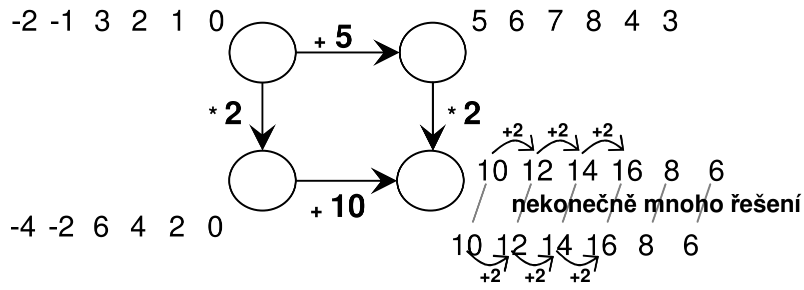


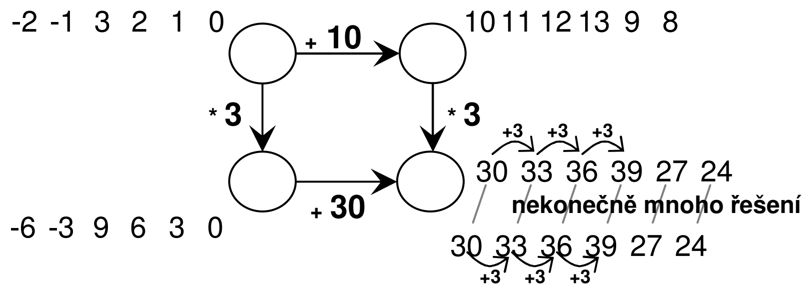
Byla jsem si jistá tím, že existují úlohy, kde jsou oba multiplikativní operátory stejné. Chtěla jsem přijít na to, jak to udělat, aby takové úlohy řešení měly. Napadlo mě, že **aditivní operátory nějak musejí „vyrovnat rozdíl", který způsobují operátory multiplikativní.** Nakreslila jsem si tedy tento „čtyřúhelník" (viz. následující obr.) a postupně jej doplnila tak, aby měl řešení.



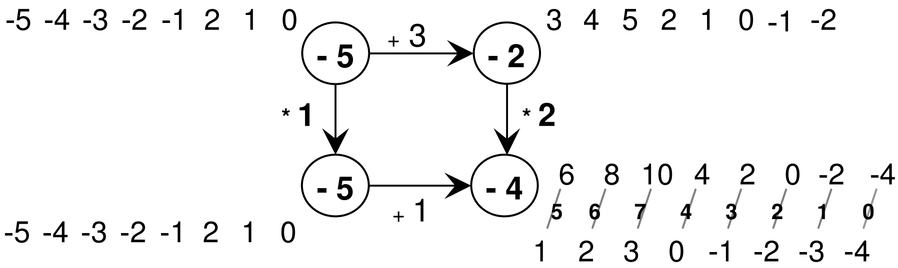
Pak jsem zkusila za *x* doplnit i jiná čísla a zjistila jsem, že má nekonečně mnoho řešení. Po té jsem se podívala na oba aditivní operátory. Okamžitě mi bylo jasné, že **pokud operátor *a* vynásobím hodnotou operátoru *d* získám tak operátor *c* a tím i návod na přípravu „čtyřúhelníků" se stejnými multiplikativními operátory: (*x + a*) * *d* = *x* * *d + ad***. Zde je několik dalších příkladů takových „čtyřúhelníků":

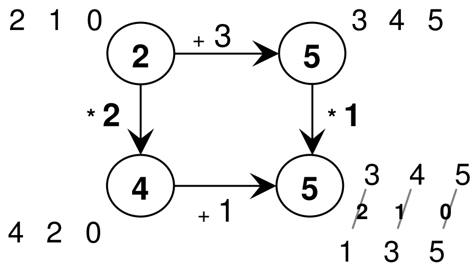




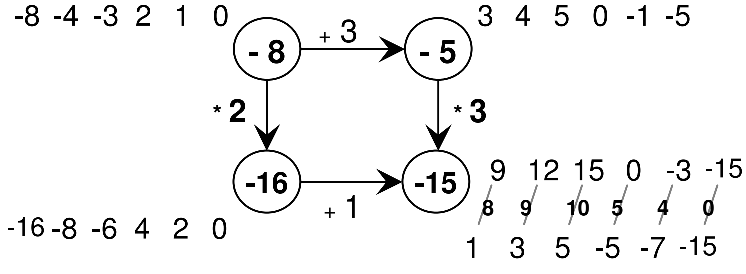


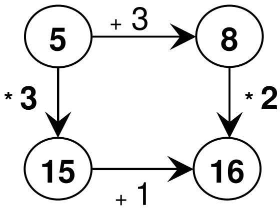
Nyní jsem zkusila <u>za multiplikativní operátory dosadit různá čísla lišící se o 1,</u> aditivní operátory *a = + 3, c = + 1* jsou přesně dle původního zadání. Nejprve jsem zkusila dosadit b = 1, d = 2 a pak obráceně b = 2, d = 1, abych viděla rozdíl ve výsledcích. Opravdu je jistá souvislost zřejmá – **výsledná čísla obou „čtyřúhelníků“ jsou „zrcadlově obrácená“, a to i co se týče jejich umístění na číselné ose.**



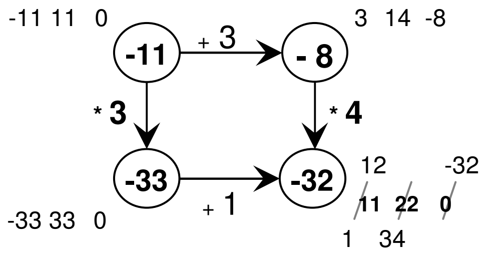


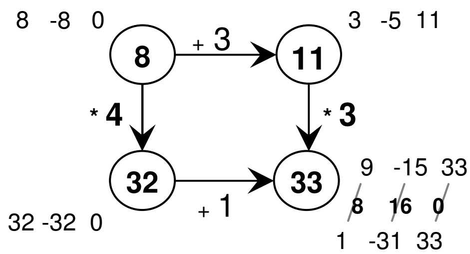
Zkusila jsem za *b, d* dosadit jiná čísla, abych mohla porovnat, co se stalo. Přemýšlela jsem, jak si počítání zjednodušit, aby to nebylo tak zdlouhavé. Začala jsem pracovat s rozdílem ve výsledcích obou cest. Jelikož rozdíl pravidelně narůstal, začala jsem za *x* dosazovat čísla záporná, aby naopak klesal. Pak jsem si také spočítala, za kolik „kroků“ bude rozdíl 0 a dosadila jsem za *x* rovnou číslo - 8. Díky „zrcadlovému“ obrácení čísel jsem mohla ihned vyřešit i druhou úlohu.



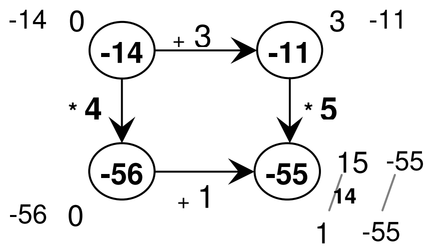


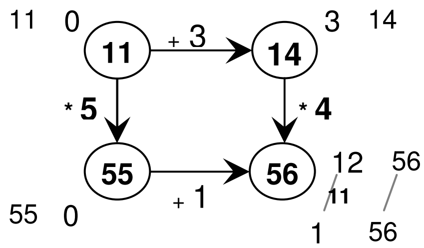
Ještě jsem si chtěla nějakým způsobem zjednodušit řešení prvních úloh. Napadlo mne, **zda se na řešení nedá usoudit z prvního pokusu, kdy za *x* dosazuji 0.** Všimla jsem si totiž, že **rozdíl obou cest vedoucích od *x* k *w* je podstatě řešením úloh**, jen se z něj nepozná, zda se toto číslo za *x* dosazuje jako kladné či záporné. Udělala jsem tedy pár pokusů na toto téma.

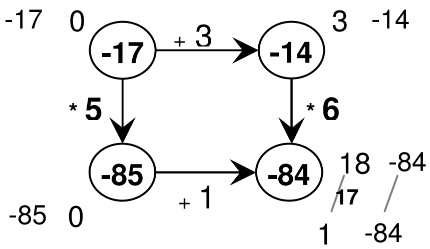


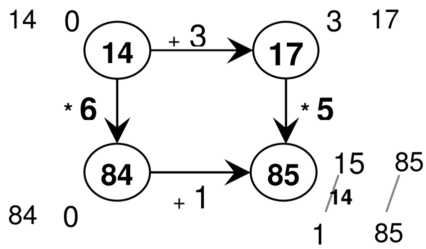


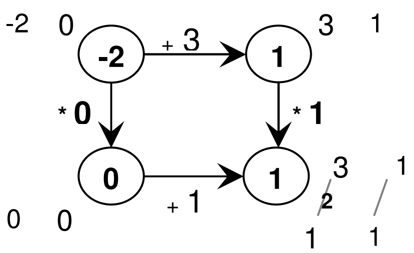
Postřehla jsem, že **když je na levé straně „čtyřúhelníku“ menší z obou čísel *b/d*, hledané číslo *x* je záporné, a když je na levé straně větší z obou čísel, je *x* kladné.** Ihned jsem tuto svou další teorii vyzkoušela. Tato teorie nevyšla jen v případě 1 a 0. Ale teorie „zrcadlové“ výměny čísel včetně kladného a záporného znaménka se potvrdila.

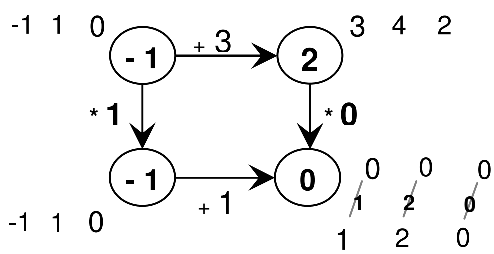




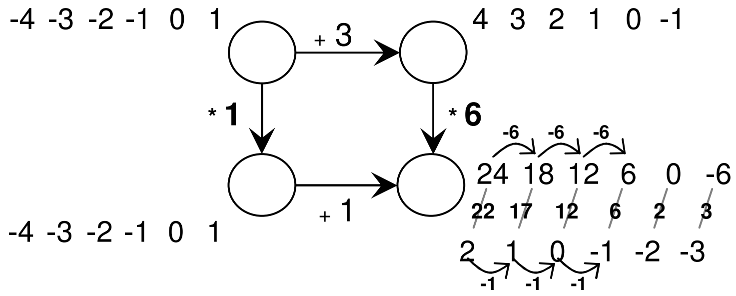


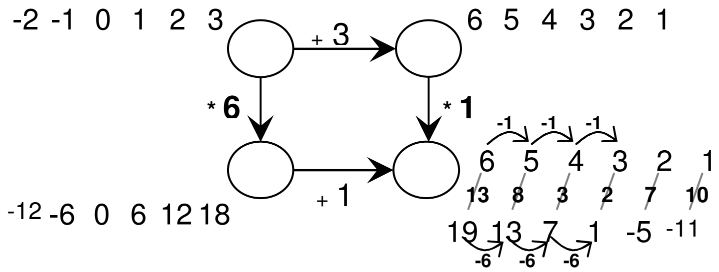




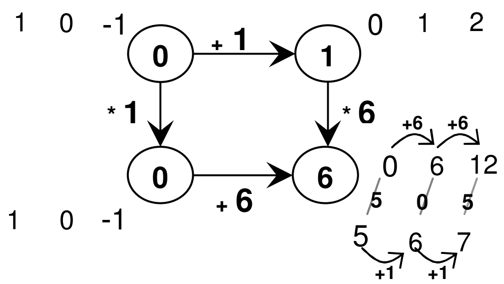


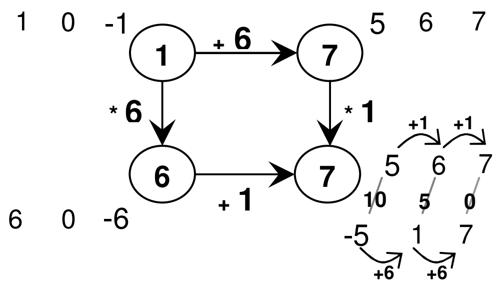
Nyní mi tedy zbývalo zaměřit se na multiplikativní operátory s rozdílem 5. Začala jsem kombinací 1/6. Aditivní operátory jsem ponechala +3/+1. Bohužel, rozdíl výsledků obou cest neklesá pravidelně, tím pádem nedospěje k 0, tudíž tyto úlohy v oboru přirozených čísel nemají řešení (viz. následující obr.).



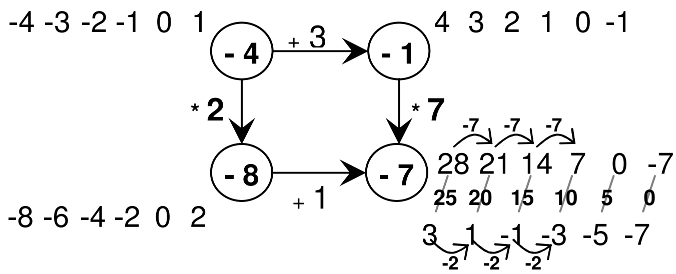


Napadlo mne, zda se dá změnou aditivních operátorů docílit řešení těchto úloh, kdy je mezi *b* a *d* rozdíl 5. Operátory *a/c* jsem zvolila náhodně, možná s jistým tušením, a tak se mi hned podařilo nalézt dvě úlohy, kde se *b* a *d* liší o 5, které mají řešení, ovšem se změněnými aditivními operátory.

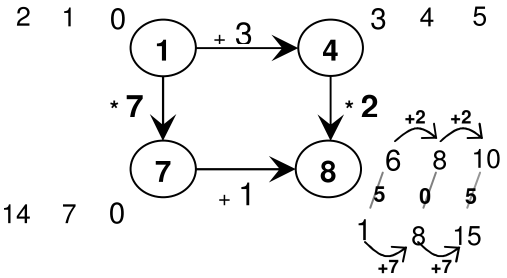




Dále jsem zkusila ponechat základní „čtyřúhelník" se změnou multiplikativních operátorů, kde b = 2 a d = 7, aby se zase lišily o 5. Jak je vidět na obrázku, rozdíl obou cest vedoucích k *w* pravidelně klesá o 5, takže je možné dojít k řešení.

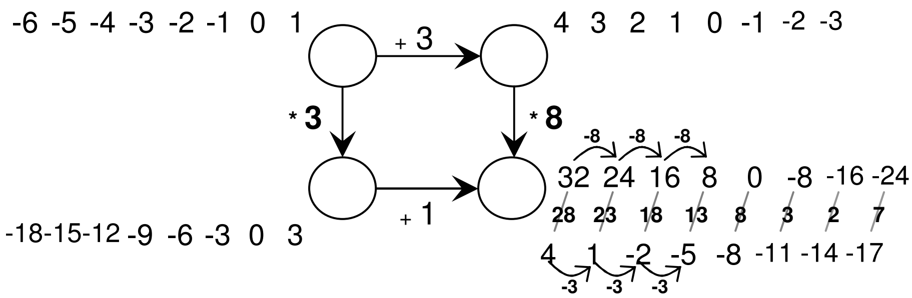


U obrácené varianty, kdy b = 7 a d = 2 je řešení ještě rychlejší.

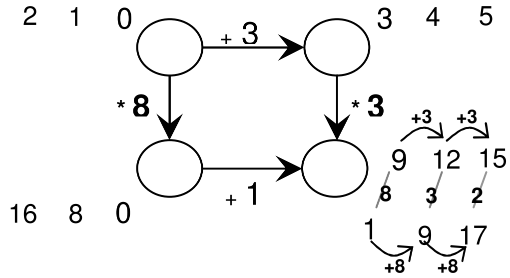


Domnívám se, že lze dopředu usoudit, zda úloha bude mít řešení, či ne. **Pokud se *rozdíl* obou cest vedoucích k *w* tedy *(x + a)* ⋆ *d* a *xb + c* pravidelně snižuje či zvyšuje dle volby dosazovaných *x*, a to o hodnotu *[b – d]* a první *rozdíl* je tímto beze zbytku dělitelný, pak úloha má řešení. Pokud se však v tomto vyskytuje jakákoliv nepravidelnost, úloha, podle mého názoru, řešení v oboru přirozených čísel nemá.**

Tuto svou teorii jsem vyzkoušela na dalším „čtyřúhelníku“, kde b = 3 a d = 8. Již po prvním dosazení mi (dle mé hypotézy) bylo jasné, že by tato úloha neměla být řešitelná, protože *rozdíl* by se měl měnit o hodnotu *[b – d]* tedy [3 – 8] čili o 5 a první *rozdíl* je v tomto případě 28 – číslo, které není beze zbytku pěti dělitelné. Dle následujícího obrázku je zřejmé, že úloha opravdu nemá řešení.



Řešení v oboru přirozených čísel nemá ani obrácená varianta této úlohy, kdy b = 3 a d = 8. Po dosazení 0 za *x* nám totiž vyjde *rozdíl* obou cest 8 a protože číslo 8 není beze zbytku dělitelné 5, úlohu nelze vyřešit. Důkaz tohoto tvrzení viz. následující obrázek.



A řešení nemají ani kombinace *b/d* = 4/9, 9/4, 5/10, 10/5. Pokaždé je rozdíl obou cest nedělitelný 5 beze zbytku a proto se obě cesty *(x + a)* ⋆ *d* a *xb + c* nemohou „potkat“. Aby takové „čtyřúhelníky“ měly řešení, musely by se změnit aditivní operátory *a/c*, ale takové zkoumání nebylo předmětem této úlohy.

Shrnutí:

Některé úlohy, kterými jsem se zabývala v této části své diplomové práce, by se podle mne daly využít již od 2. ročníku ZŠ. Samozřejmě by záleželo na tom, kolik informací bychom dětem k řešení těchto úloh ponechali a na kolik by musely přijít samy. Postupným „odebíráním/ zatajováním" některých údajů (stavů či operátorů) by se dala vytvořit kaskáda úloh se stoupající náročností. Náročnost úloh samozřejmě stoupá i s použitím záporných čísel. Troufám si tvrdit, že některé snazší úlohy se zápornými čísly by však nadanější žáci druhého ročníku vyřešit dokázali. Jinak bych takové úlohy předložila spíše žákům 3. a 4. ročníků, kteří jsou vedeni dle učebnic matematiky vydaných nakladatelstvím Fraus. Žáci, kteří však nemají zkušenost se zápornými čísly např. z prostředí krokování, by, podle mého předpokladu, takové úlohy vyřešili možná až na 2. stupni ZŠ.

2.2 Kaskáda úloh v prostředí Rovnicového šipkového grafu „trojúhelník“

2.2.1 Kaskáda úloh – kategorie typů úloh dle náročnosti

Protože jsem při vlastním řešení úloh a při zkoumání zákonitostí v obecném rovnicovém šipkovém grafu „trojúhelník“ přišla na obecné pravidlo tvorby takovýchto úloh, rozhodla jsem se vytvořit stupňovanou kaskádu úloh pro žáky právě v tomto prostředí.

Náročnost odstupňuji dle množství údajů, které budou pro žáky neznámé – které budou muset doplnit. Samozřejmě, obtížnost se pak dá zvyšovat ještě použitím větších (např. dvojciferných) čísel apod.

Při řešení zadaných úloh jsem dospěla ke dvěma důležitým pravidlům:

Důležité pravidlo č.1 pro tvorbu úloh šipkového grafu „trojúhelník“:

Je důležité říci, že pokud chybí 3 údaje, nikdy to nesmějí být dva operátory a stav mezi nimi, protože pak by úloha neměla jednoznačné řešení, existovalo by více různých možností, co do prázdných polí doplnit.

Důležité pravidlo č.2 pro tvorbu úloh šipkového grafu „trojúhelník“:

Více než tři údaje z rovnicového šipkového grafu „trojúhelník“ vypustit nelze, protože pak by úloha neměla jednoznačné řešení. Pokud tedy nechceme, aby žáci mohli doplnit v podstatě cokoliv, nesmíme zatajit více než tři údaje grafu.

Abych mohla vytvořit stupňovaně náročné úlohy, nakreslila jsem si nejprve základní šipkový graf „trojúhelník“, ze kterého budu vycházet. Z něj jsem pak postupně odebírala jednotlivé údaje tak, abych vyčerpala všechny možnosti, jak lze ubrat jeden údaj, dva, tři. Po té jsem si úlohy rozdělila podle náročnosti jejich řešitelnosti – vzniklo mi pět kategorií. Velmi snadné úlohy jsou hodnoceny č. 1, nejnáročnější úlohy č. 5. Mezi tím je několik přechodů v náročnosti jako náročnost 1/2 nebo 3/4, které budou konkretizovány u jednotlivých kategorií.

1. kategorie: VELMI SNADNÉ úlohy[2]

– označení náročnosti úloh 1 – 1/2

Do této kategorie spadají úlohy, ve kterých je zatajen pouze jeden údaj. Žák si vlastně ani nepotřebuje prohlédnout celý šipkový graf, aby chybějící údaj doplnil. Úlohy tohoto typu pro svůj experiment používat nebudu, protože jsou až příliš snadné.

Dva typy úloh jsou označeny jako přechodové mezi 1. a 2. kategorií – mají označení 1/2 – protože k jejich vyřešení žák potřebuje použít opačnou operaci, než která je v grafu nabídnuta či musí mít znalost násobení (a to bývá pro mladší žáky přece jen obtížnější).

2. kategorie: SNADNÉ úlohy[3]

– označení náročnosti úloh 2 – 2/3

Do druhé kategorie jsem zařadila úlohy, ve kterých je třeba doplnit dva údaje. Pokud tato dvě prázdná pole neleží hned vedle sebe, označila jsem je stupněm náročnosti 2.

Jako o něco náročnější vnímám úlohy, kde jsou dvě neznámá pole hned vedle sebe a také ty, ve kterých chybí počátek šipkového grafu – tedy údaj, od kterého pouze vedou šipky k dalším údajům, žádná šipka nesměřuje k němu – protože k jeho nalezení je třeba použít operaci opačnou, než kterou nabízí šipka. Takové typy úloh jsem označila 2/3.

3. kategorie: STŘEDNĚ OBTÍŽNÉ úlohy[4]

– označení náročnosti úloh 3 – 3/4

Do třetí kategorie patří jednak úlohy, kde chybí všechny tři operátory. A dále úlohy, kde chybí tři údaje, z nichž dvě nebo tři neznámá pole leží vedle sebe, ale stále jsou možné dva způsoby, odkud lze začít úlohu řešit – tyto úlohy jsou označeny jako přechodové 3/4. Nebo je možný jen jeden způsob, odkud se dá

[2] Všechny typy úloh spadající do této kategorie viz. Příloha č. 1.
[3] Všechny typy úloh spadající do této kategorie viz. Příloha č. 2.
[4] Všechny typy úloh spadající do této kategorie viz. Příloha č. 3.

úloha začít řešit, ale ten jde od počátku grafu. Počátek grafu je u těchto úloh vždy znám.

4. kategorie: OBTÍŽNÉ úlohy[5]

– označení náročnosti úloh 4- – 4

Do této kategorie náleží úlohy, kde jsou neznámé tři údaje, z nichž jeden je počátkem grafu. Dva, či všechny tři neznámé údaje leží vedle sebe a existuje jen jedno místo v grafu, odkud je možno úlohu začít řešit. Jako o něco snazší jsou hodnoceny úlohy, kde je přece jen možné doplnit údaje hned na dvou místech, ty jsou označeny jako 4-. Přesto, počátek grafu je vždy neznámý.

5. kategorie: VELMI OBTÍŽNÉ úlohy[6]

– označení náročnosti úloh 5

Tato kategorie obsahuje vlastně jen jeden typ úloh a to jsou ty, ve kterých chybí všechny tři stavy. Takové úlohy budou žáci řešit metodou pokus-omyl.

[5] Všechny typy úloh spadající do této kategorie viz. Příloha č. 4.
[6] Všechny typy úloh spadající do této kategorie viz. Příloha č. 5.

2.2.2 Konkrétní kaskáda úloh koncipovaná pro žáky 2. ročníku 1. stupně ZŠ v prostředí Rovnicového šipkového grafu „trojúhelník" – příprava experimentu, scénář

Příprava experimentu:

Rozhodla jsem se provést experiment v prostředí Rovnicového šipkového grafu „trojúhelník" se žáky 2. ročníku ZŠ. Pro tento účel jsem vytvořila konkrétní kaskádu úloh s odstupňovanou náročností.[7]

Pro samostatnou práci žáků jsem zvolila celkem šest úloh – dvě z kategorie 3, dvě z kategorie 3/4, jednu náročnější úlohu z kategorie 4- a chtěla jsem vyzkoušet i to, jak budou žáci řešit úlohu z 5. kategorie.

Naplnění zvolených typů úloh konkrétními čísly jsem volila s ohledem na věk žáků, na jejich předchozí zkušenosti z podobných prostředí a také s ohledem na to, že ačkoliv jim dané prostředí šipkových grafů může připomínat již známé úlohy z prostředí jiných (např. pavučiny), je pro ně zcela nové a já se při experimentu nechci zaměřit na to, zda vypočítají úlohu náročnou z hlediska velikosti zvolených čísel, ale na to, jakým způsobem budou konkrétní typy úloh řešit.

Ze své předchozí zkušenosti s tím, jak žáci řeší úlohy, při kterých musí k řešení použít metodu pokus/omyl, jsem předpokládala, že do úlohy typu 5. kategorie začnou (ne třeba úplně postupně) ale doplňovat čísla od 1 výše. Proto jsem jako řešení úlohy zvolila číslo 6, aby jejich zkoumání muselo trvat určitou dobu, ale zase ne moc dlouho a to proto, aby příliš zdlouhavé hledání neodradilo žáky, kteří např. špatně nesou neúspěch.

Experiment provedu s dětmi ze 2. ročníku a to ve třech paralelních třídách – 2.A, 2.B a 2.C. – z jedné ZŠ. Aby byly výsledky experimentu lépe porovnatelné, budu pokus provádět vždy pouze se dvěma dětmi současně - chlapcem a dívkou z jedné třídy.

[7] Kaskádu úloh, která byla předložena žákům k vyřešení, naleznete v Příloze č. 6

Výběr konkrétních dětí jsem ponechala na jejich třídních učitelkách, kterým jsem objasnila, o co se jedná, a požádala je, aby mi vybraly děti, které spíše budou schopny úlohy vyřešit a ještě o nich následně se mnou hovořit.

Scénář průběhu experimentu:

Nejprve žáky uvedu do prostředí Rovnicového šipkového grafu typu „trojúhelník“ úlohou z 2. kategorie, kterou vyřešíme společně. Pak již bude každý žák řešit úlohy samostatně.

Každý z žáků dostane pracovní list, na kterém bude tatáž úloha vícekrát, aby při neúspěchu své nesprávné řešení neškrtal či nesmazal, ale současně mohl pracovat dále a hledat řešení oné úlohy znovu.

Abych mohla lépe zaznamenat různé způsoby žákovských řešení, dostane každý žák tři různobarevné fixy – červenou, modrou a zelenou – a pokyn, aby první doplněné číslo každé nové úlohy zaznamenal červeně, druhé modře a třetí zeleně.

U poslední, nejnáročnější úlohy budou žáci upozorněni, že musí řešení tipovat a zkoušet různé možnosti, jak graf doplnit.

Po vypracování všech šesti úloh bude následovat krátký rozhovor s řešitelem o tom, jak při řešení postupoval, jak dospěl k danému číslu, jak si počínal při doplňování jednotlivých polí grafu apod. Pokud budou jednotliví řešitelé potřebovat ke své práci na úlohách různý čas, bude rozhovor probíhat s každým zvlášť a to tak, aby při něm nebyl rušen žák, který dosud pracuje. Pokud se ale stane, že budou oba řešitelé hotovi zhruba ve stejný čas, bude rozhovor s nimi probíhat současně.

Po dobu experimentu budou mít děti k dispozici i další prázdný list papíru, na který si mohou psát poznámky nebo provádět potřebné výpočty. Také budou mít neomezený počet pracovních listů s požadovanými úlohami, aby se nebály nechat i špatné/chybné řešení tak a nemazat či neškrtat ho. Pokud nebudou něčemu rozumět, budou se samozřejmě moci na cokoliv zeptat.

3. kapitola: Experimenty s dětmi

Na úvod je třeba říci, že všechny provedené experimenty byly realizovány v ZŠ Kunratice, ul. Předškolní 420/5, Praha 4, 148 00. Žáci, kteří experiment podstoupili, využívají k výuce matematiky již od první třídy pracovní učebnice nakladatelství Fraus.[8] Zákonní zástupci žáků, kteří se zkoumání účastnili, podepsali souhlas se zveřejněním použitých materiálů v této diplomové práci.

3.1 Popis průběhu 1. experimentu

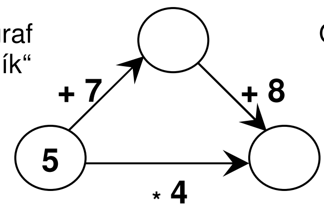
První experiment probíhal ve čtvrtek 13. 5. 2010 první vyučovací hodinu – tedy od 8:00 – s chlapcem Danielem a dívkou Májou ze třídy 2.C.

Obě děti jsem posadila do jedné menší prázdné třídy před tabuli. Každý ze žáků seděl v lavici sám a to tak, aby druhý spolužák neseděl hned vedle něj, ale ob jedno místo, aby měly děti klid na práci a nikdo z nich neměl tendence opisovat nebo si řešení kontrolovat se sousedem.

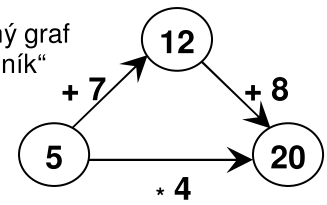
Po usazení jsem dětem vysvětlila, že se seznámíme s novým typem úloh, které jim možná připomenou jiné úlohy, které běžně v matematice řeší. Děti opravdu přirovnaly předloženou úlohu k úlohám z matematického prostředí pavučin, hadů a násobilkových obdélníků. Takové úlohy tyto děti řeší již od první třídy.

Na tabuli před děti jsem tedy nejprve nakreslila šipkový graf „trojúhelník" náročnosti 2 (viz. následující Obr. a)). Pak jsem se zeptala, které z prázdných polí bychom mohli doplnit. Přihlásily se obě děti. Vyvolala jsem Máju a ta řekla, že bychom mohli doplnit spodní pole protože víme, že 5 x 4 je 20. Dan poté doplnil horní pole, řekl, že 5 + 7 je 12. Zeptala jsem se, zda nám funguje celý trojúhelník. Děti nahlas potvrdily, že ano, protože 12 + 8 je 20 (viz. Obr. b)).

Obr. a) Řešený graf „trojúhelník"



Obr. b) Doplněný graf „trojúhelník"



[8] HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy. 1. a 2. díl.* Plzeň : FRAUS, 2007
HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy. 1.,2. a 3. díl.* Plzeň : FRAUS, 2008

Prozradila jsem dětem, že podobné úlohy, jako tato, je čekají i v pracovním listě, který za chvíli dostanou jako samostatnou práci. V trojúhelnících však nebudou chybět pouze dvě pole, ale pokaždé mají doplnit pole tři. Někdy bude prázdné pole „v kolečku" (stav), ale může se stát, že bude třeba doplnit i pole, kde se přičítá či násobí (operátor). Při tomto vysvětlování jsem vše zároveň ilustrovala na námi již vyřešeném trojúhelníku. Děti daly najevo, že tomuto rozumí.

Dále jsem je informovala, že pro ně mám připraveny nejprve čtyři snazší úlohy na jednom listě papíru a po jejich dokončení dostanou druhý list se dvěma úlohami o něco složitějšími.

Ukázala jsem jim tedy první stránku připraveného pracovního listu. Řekla jsem jim, že na první straně jsou pouze čtyři úlohy, ale každá je tam několikrát proto, aby, pokud se náhodou spletou či přepíšou, neškrtali chybné řešení, protože i to, je pro mne důležité, a mohli pracovat dál a zkoušet úlohu řešit znovu. Pokud by jim místo na jednom pracovním listě nestačilo, byli seznámeni s tím, že mohou dostat stejný pracovní list znovu nebo si mohou dělat průběžné výpočty na prázdný list papíru.

Abych mohla lépe zaznamenat různé způsoby žákovských řešení, požádala jsem děti, aby první číslo, které do úlohy doplní, napsaly červeně, druhé modře a třetí zeleně. Tento požadavek jsem ilustrovala na tabuli. Doslova jsem řekla: „V našem trojúhelníku by bylo červeně napsané číslo 20, protože jsme ho doplnili jako první. Modře bychom napsali číslo 12. Pokud bychom doplňovali další číslo, napsali bychom ho zelenou barvou." Při tomto jsem postupně obtahovala čísla v trojúhelníku nakresleném na tabuli požadovanými barvami a zároveň jsem pod trojúhelník dětem nakreslila z leva doprava tři barevné kruhy – červený, modrý a zelený, aby měly pořadí barev i při následné práci stále před očima. Vysvětlila jsem jim, že potřebuji vidět, jakým způsobem a odkud začínají úlohy řešit, a jak při řešeních dále postupují. Pro tyto účely dostal každý tři barevné fixy. Trochu jsem se obávala toho, aby tento způsob zaznamenávání žáky nebrzdil či neodváděl od samotného řešení, ale k mému překvapení děti s tímto požadavkem neměly větší problém, a když si náhodou někdo z nich zapomněl vzít další barvu, hned si to sám uvědomil a dané číslo správnou barvou přepsal. Také jsem toto barevné značení uviděla jako výhodu při následném rozhovoru s dětmi, kdy mi popisovaly, jak úlohu řešily. Samy si tak lépe vzpomněly, kde úlohu začaly řešit a jak pokračovaly.

Dan s Májou tedy dostali každý svůj pracovní list, podepsali se, napsali do záhlaví listu třídu, do které chodí, a začali pracovat.

Při práci jsem je sledovala a několikrát i vyfotografovala (na což byli předem upozorněni) a to vždy v momentě, který mi připadal nějakým způsobem zajímavý, cenný pro následnou analýzu.

Po skončení první části byl každý z žáků požádán, aby při řešení poslední, nejnáročnější úlohy nejprve zkoušel tuto úlohu řešit v menších trojúhelnících a až po nalezení správného řešení toto zapsal do velkého trojúhelníku.

Dan při řešení úloh posupoval o něco rychleji než Mája. Nakonec byl s oběma částmi pracovního listu hotov za 20 minut. Mája na řešení potřebovala celkem 30 minut.

Po každém vypracování všech šesti úloh následoval individuální rozhovor s jejich řešitelem, kdy jsme s dětmi hovořili o tom, jak při řešení úloh postupovaly. Buď jsem si jejich doslovné komentáře zapisovala k sobě nebo přímo ke komentovaným úlohám, nebo jsem si způsob jejich řešení zaznamenávala k těmto úlohám různými značkami, které se mi v tu chvíli jevily jako vhodné a výstižné. V popisu rozhovoru s řešitelem pak dané zápisy rozvinu a vysvětlím.

Rozhovor s řešitelem: „Daniel“[9]

uč 1: „Jak jsi, Dane, řešil první úlohu?“

Dan 1: „Začal jsem tím, že jsem si řekl 8 plus 10 je 18 a zapsal jsem to. *(pauza)*“ (Dan zároveň ukazuje na místa trojúhelníku, o kterých mluví. Díky barevnému zápisu čísel je vidět, jak postupoval.) „Pak jsem spočítal 18 plus 6, to je 24. Teď jsem hledal 8 krát něco je 24. Z hlavy vím, že je to 3.“

uč 2: „Vidím, že jsi jako první doplnil číslo 18. Mohl bys do tohoto trojúhelníku jako první doplnit číslo na jiném místě?“

[9] Danovy vyplněné pracovní listy naleznete v Příloze č. 7

Dan 2: „Ne, nemohli bysme začít jinde, protože by to nevyšlo." (Začala jsem si k jednotlivým úlohám dělat poznámky tužkou.)

uč 3: „Druhou úlohu jsi řešil jak?"

Dan 3: „Vypočítal jsem si napřed 5 krát 5, to je 25. Pak jsem si řekl, 18 plus něco je 25 a věděl jsem, že je to 7. A pak jsem spočítal 18 mínus 5 a to je 13." *(pauza)* (Daniela ani nemusím pobízet, s vysvětlováním pokračuje sám.) „Tuhle úlohu šlo začít i odsud." (Ukazuje na operátor *a* (+13). Všechna místa, která Dan označil jako možné začátky pro řešení úloh jsem označila tečkou.)

„Další úloha byla lehká, napřed jsem si spočítal 7 plus 3, to je 10, pak jsem doplnil, že 10 plus 4 je 14 a nakonec to krát 2, protože vím, že 7 krát 2 je 14. *(pauza)* Mohl jsem začít i od toho krát 2, tam by to taky šlo hned."

uč 4: „Takže tys nepočítal 14 mínus 10, ale rovnou jsi doplnil 4." (Začala jsem si směr způsobu řešení značit šipkami – pokud žák přičítal, má šipka jde stejným směrem jako šipka v úloze. Pokud žák při řešení úlohy postupoval proti směru dané šipky, zaznamenala jsem to zakreslením šipky v opačném směru k šipce, která je daná.)

Dan 4: „Jo, to je lehký. U další jsem začal tady." *(pauza)* (Ukazuje na číslo 24) „24 mínus 4 je 20 a 20 mínus 4 je 16. Pak jsem věděl, že na poslední místo mám doplnit 6, protože vím, že 2 krát 12 je 24 a když to rozdělím, tak je to 4 krát 6. *(pauza)* Od toho jsem taky mohl začít počítat." (Přecházíme k další části pracovního listu, k druhé stránce.)

uč 5: „A jak sis poradil s těmi složitějšími úlohami?"

Dan 5: „No, ta první vůbec nebyla složitá. Řekl jsem si, že 9 mínus 5 je 4. Pak vím, že 3 krát 3 je 9. No a 3 plus 1 jsou 4. *(pauza)* A ta se dala počítat i odsud." (Ukazuje na jiné místo v úloze – na hledané číslo 3 ve vztahu (?) $\cdot$ 3 = 9.)

uč 6: „A co ta poslední úloha?" (Už během jejího řešení jsem Dana sledovala a teď jsem byla zvědavá, jak mi svůj postup řešení popíše.)

Dan 6: „Začal jsem tady. *(pauza)*" (Trojúhelník, který Dan zkoušel řešit jako první jsem označila jedničkou v kroužku.) „Do růžku jsem zkusil dát 5, pak jsem spočítal, že 5 a 5 je 10 plus 1 je 11. Tady. *(pauza)*" (Ukazuje.) „A tady jsem zapomněl vyměnit fixu, *(pauza)* ale pak jsem to přepsal. *(pauza)*" (Dan ukazuje na oba stavy v prvním trojúhelníku, který zkoušel řešit. V jeho doplněném pracovním listě je tento postup zřejmý.) „Jenže dole to nevychází, 5 krát 2 je 10 a ne 11." (Napsala jsem tužkou za lomítko i toto řešení.)

uč 7: „Pak jsi pokračoval tady?" (Ukazuji na další malý trojúhelník „na zkoušku".)

Dan 7: „Jo. *(pauza)*" (K tomuto trojúhelníku jsem dopsala dvojku v kroužku, aby bylo jasné, jak šla Danova řešení za sebou.) „Zkusil jsem tam dát 2, pak krát 2 to je 4. 2 plus 5 je 7, ale 7 plus 1 je 8 a ne 4, takže to zase nevyšlo. *(pauza)* Pak jsem pokračoval tady." (Zase jsem trojúhelník označila, tentokrát trojkou v kroužku.) „6 mínus 5 je jedna a 6 plus 1 je 7. To ale nevychází dole, protože 1 krát 2 jsou 2."

uč 8: „Proč jsi tentokrát jako první doplnil číslo na špičku trojúhelníku?"

Dan 8: „No, chtěl jsem to zkusit jinak, ale je to blbý, protože pak se musí odčítat. Tak už jsem pak pořád začínal v růžku."

uč 9: „A podle čeho jsi vybíral čísla, která do růžku doplníš?"

Dan 9: „No, řekl jsem si, že zkusím do růžku doplnit čísla od 1 dál. *(pauza)* 1, 2 a 5 už jsem zkusil, tak teď jsem vyzkoušel větší číslo – 8. Ale to taky nevyšlo, protože 8 krát 2 je 16. *(pauza)* Tady bude 15, protože 16 mínus 1. No a z druhý strany to nevychází, protože 8 plus 5 je 13 a ne 15."

uč 10: „Proč jsi jako další doplnil 3?"

Dan 10: „Už jsem chtěl jít po pořádku, 3 mi chyběla. *(pauza)* Takže jsem doplnil, že 3 plus 5 je 8 a to plus 1 je devět. Bylo mi jasný, že to nevychází, 3 krát 2 je totiž 6. *(pauza)* Pak jsem ještě nezkusil 4. *(pauza)*" (Danův šestý pokus jsem označila šestkou v kroužku.) „4 krát 2 je 8, 4 plus 5 je 9, ale tady to zase nesedí, 9 plus 1 je 10. *(pauza)* No a konečně jsem zkusil 6 a to už mi vyšlo, protože 6 a 5 je 11 plus 1 je 12 a 6 krát 2 je taky 12. *(pauza)*" (Dan se usmívá, má evidentně radost, že k řešení dospěl.) „Tohle jsem ani nepotřeboval.

(pauza)“ (Ukazuje na prázdný, poslední nevyužitý trojúhelník.) „Jo a to správný řešení jsem pak napsal sem.“ (Dokresluji velkou šipku, aby bylo jasné, že řešení posledního pokusu Dan přepsal do velkého trojúhelníku přesně dle zadání.)

uč 11: „Daníku, děkuji ti za to, jak skvěle jsi mi popsal svůj postup řešení, i za práci na úlohách.“

Dan 11: „Není zač, mě to bavilo.“

Rozhovor s řešitelem: „Mája“[10]

uč 1: „Tak, Májo, jak jsi řešila první úlohu?“

Mája 1: „Napřed jsem si spočítala 8 plus 10, to je 18, pak plus 6 je 24. *(pauza)* Pak jsem si musela napsat tohle. *(pauza)*“ (Mája během počítání využila pomocný list papíru, kam si napsala: $8 \cdot 1 = 8$, $8 \cdot 2 = 16$, $8 \cdot 3 = 24$[11]) „Abych to viděla. *(pauza)* Pak už jsem věděla, že tam bude 3.“

uč 2: „Co myslíš, šlo by jako první doplnit i jiné políčko než to horní s 18?“

Mája 2: „ Šlo by doplnit i jiné políčko, ale to bych tipovala.“

uč 3: „Co druhá úloha?“

Mája 3: „Jako první jsem doplnila 25, protože 5 krát 5 je 25 – to si pamatuju. *(pauza)* Pak jsem věděla, že musím k 18 přidat číslo, aby to bylo 25. Věděla jsem, že to bude 7, protože to když si rozdělím na 2 a 3 a na 5 a 5, tak je to 15, plus těch 10 od 18 a je to 25. *(pauza)* A nakonec jsem si spočítala 18 mínus 5 a to je 13.“

uč 4: „Bezva. A tahle úloha by šla začít počítat i jinde, než jsi začala?“

Mája 4: „Ano, šla by od té 13.“ (Označila jsem opět obě pomyslná počáteční pole v Májině listu puntíkem.)

uč 5: „U další úlohy jsi postupovala jak?“

Mája 5: „Začala jsem dole – 7 krát 2 je 14 – to vím z hlavy. *(pauza)* Pak jsem se ale spletla, protože jak jsem u téhle úlohy (ukazuje na předchozí) počítala 7 plus 8 a rozdělila jsem si to na 2 a 3 a na 5 a 5, tak jsem to

[10] Májiny vyplněné pracovní listy naleznete v Příloze č. 8

[11] Májin pomocný list papíru je v Příloze č. 9

spočítala stejně a napsala tam 15. Hned jsem ale viděla, že tam je vlastně jenom 3, tak jsem to přepsala znova. *(pauza)*“ (Mája dle mého přání chybu neškrtla, ale celou úlohu zapsala znovu od začátku do volného trojúhelníku.)

„Takže jsem tam (ukazuje na horní pole) napsala 10, protože 7 plus 3 je 10. *(pauza)* No a zbývalo doplnit 4, protože 10 plus 4 je 14.“

uč 6: „Výborně. Co ten další trojúhelník?“

Mája 6: „To jsem si zase musela napsat, jak to jde za sebou. *(pauza)*“ (Mája mi ukazuje pomocný list papíru, kde má napsáno: $4 * 1 = 4$, $4 * 2 = 8$, $4 * 3 = 12$, $4 * 4 = 16$, $4 * 5 = 20$, hledaný násobek už do řady ani nedopsala.) „Já to vidím, až když si to takhle napíšu.“

uč 7: „To je v pořádku, na tom není nic špatného. A jak jsi postupovala pak?“

Mája 7: „Potom jsem si řekla, že 20 plus 4 je 24 a pak jsem se zase spletla. *(pauza)* Jak jste u mě zrovna stála, tak jsem místo 20 mínus 4 počítala 40 mínus 4 a napsala jsem tam 36.“ (Snaží se vysvětlit, proč musela i tuto úlohu přepsat znovu.)

uč 8: „Tak to mě, Májo, moc mrzí, že jsem tě znervóznila.“

Mája 8: „To nevadí, já jsem si to hned zas opravila. Už jsem tam správně napsala 16, protože 20 mínus 4 je 16.“

uč 9: „To jsem ráda, že jsem ti to nezkazila. Co ta další úloha na novém listě?“

Mája 9: „Ta byla lehká. Spočítala jsem, že 9 mínus 5 je 4, pak 3 krát 3 je devět – to vím podle básničky.“

uč 10: „Podle jaké básničky?“

Mája 10: „Přece, 3 krát 3 je devět, kdo bručí je medvěd. Jak jste nám říkala.“

uč 11: „No vidíš, to je fajn, že ti to pomohlo. Já už na to málem zapomněla.“

Mája 11: „A pak jsem spočítala zbytek, že 3 plus 1 je 4.“

uč 12: „Tak, a co ta poslední?“

Mája 12: „Uf, ta mi teda dala zabrat. *(pauza)*“

uč 13: „Začala jsi tady?“ (Ukazuji na trojúhelník, kde je doplněné jen číslo 3 a to v horním vrcholu trojúhelníku.)

Mája 13: „Jo.“ (K tomuto trojúhelníku jsem tedy dopsala 1 v kroužku, aby bylo jasné, kde Mája začala.)

uč 14: „A proč jsi nepokračovala?“

Mája 14: „No, protože by to bylo 3 mínus 5 a to by nešlo. *(pauza)* Tak jsem tu 3 doplnila do dalšího trojúhelníku do prvního rohu a pak už jsem to první číslo vždycky doplňovala tam. Počítala jsem 3 plus 5 je 8 plus 1 je 9. *(pauza)* Tam jsem zapomněla vyměnit fixu. *(pauza)*“

uč 15: „To nevadí.“

Mája 15: „Pak jsem to obtáhla. Ale stejně to nešlo, protože dole vyjde 3 krát 2 a to je 6.“ (Napsala jsem tužkou za lomítko i tento výsledek.)

uč 16: „Kde jsi pokračovala dál?“

Mája 16: „Pod tím, zkusila jsem do rohu doplnit 1. 1 plus 5 je 6, 6 plus 1 je 7, ale dole to zase nevychází, protože 1 krát 2 není 7 ale 2. *(pauza)* Pak jsem si dala 4. 4 plus 5 je 9, 9 a 1 je 10, ale 4 krát 2 je jen 8. *(pauza)* Jako další jsem zkusila 2. 2 plus 5 je 7 plus 1 je 8, ale dole je zas moc malý číslo – 2 krát 2 jsou 4. Tak jsem raději zkusila větší čísla. Dala jsem si tam 10, ale to bylo moc. Zase to nevyšlo. *(pauza)* Tak jsem zmenšovala. S 9 to taky nešlo, protože 9 krát 2 není 15. S 8 taky ne, 8 krát 2 není 14. A pak už jsem si musela vzít další papír *(pauza).*“

uč 17: „To je úplně pořádku, hledala jsi a hledala.“

Mája 17: „To jo, u toho nahoře jsem si nevšimla, že už to tam mám. *(pauza)*“ (Mája vysvětluje, proč znovu za stav *y* dosadila 3 a ten samý trojúhelník tak řešila po druhé.)

uč 18: „Jak jsi pokračovala? Jaká čísla jsi vyzkoušela teď a proč?“

Mája 18: „5 a 6 jsem ještě nezkusila, tak jsem napřed dala 5. *(pauza)* Teď jsem šla napřed spodem. 5 krát 2 je 10, ale 5 plus 5 je 10 a plus ještě ta 1 je 11. Ale už to bylo blízko. Tak jsem tam dala 6. 6 krát 2 je 12 a 6 plus 5 plus 1 je taky 12. A bylo to.“

uč 19: „Paráda, Májo, to jsem ráda, že se to hledání nakonec vyplatilo. Ještě mi prozraď, proč jsi znovu vyplnila i tu předchozí, pátou úlohu do toho nového listu, když už jsi ji měla před tím vyřešenou?“

Mája 19: „No, aby to tam nebylo prázdný.“

uč 20: „Aha, tak to je prima. (Obě jsme se smály.) Děkuji ti moc za spolupráci.“

Mája 20: „Mě tyhlety úlohy docela bavily, tohle asi budeme mít ve 3. třídě, viďte?“

uč 21: „Popravdě, Májo, nejsem si jistá, jestli jsou takovéhle úlohy v učebnici pro třeťáky – možná, že ano. Ale kdybyste chtěli, tak vám je můžu dát i mimo učebnici.“

Mája 21: „Tak jo, už se těším.“

3.2 Popis průběhu 2. experimentu

Druhý experiment proběhl také ve čtvrtek 13. května 2010 v době druhé vyučovací hodiny – tedy od 8:55 – s chlapcem Ondřejem a dívkou Petrou ze třídy 2.A.

Úvod tohoto experimentu byl podobný jako u předchozího. Vlastně jsem se snažila, aby byl téměř totožný, aby měli všichni řešitelé shodnou výchozí situaci.

Při společném řešení onoho vzorového šipkového trojúhelníku na tabuli, se nejprve přihlásil Ondra a doplnil horní pole: 5 + 7 je 12. Petra pak dopočítala 12 + 8 je 20 a společně jsme zkontrolovali, zda i dolní část trojúhelníku nám vychází. Shodli jsme se, že 5 x 4 je 20.

I Ondrovi s Petrou tato úloha připomněla známé prostředí pavučin a Petra se zmínila, že pavučiny ji velmi baví.

Zadání instrukcí, jakým způsobem používat barevné fixy apod., proběhlo zase stejným způsobem jako v případě prvního experimentu.

Po tom, co si Ondra a Petra podepsali každý svůj pracovní list, začali řešit dané úlohy.

Při práci jsem děti opět sledovala a udělala několik málo fotografií.

Při řešení úloh postupoval zpočátku o něco rychleji Ondřej než Petra, ale nakonec byli oba hotovi téměř ve stejnou dobu (asi za 20 - 25 minut od začátku samostatné práce), takže rozhovor nad úlohami proběhl s oběma naráz, děti se při komentování úloh střídaly – nejprve popsal svůj způsob řešení úlohy Ondra a pak popsala svůj způsob Petra. Zajímavé bylo jejich vzájemné srovnání, když stejnou úlohu řešili každý jiným způsobem, nebo podobný způsob řešení jedné úlohy alespoň různě popsali.

Rozhovor s řešiteli: „Ondra a Petra“[12]

uč 1: „Ondro, pověz mi, jak jsi řešil tu první úlohu.“

Ondra 1: „Já jsem si spočítal 8 plus 10, že je 18, pak plus 6 je 24. No a 8 krát 3 je taky 24.“ (Při tom ukazuje na jednotlivá pole ve své úloze.)

uč 2: „A ty, Péťo? Počítala jsi to stejně?“

Petra 1: „Celkem ano. Od té 18 jsem postupovala tak, že jsem si tu 6 rozdělila na 2 a 4. Když k 18 přidáte 2, tak je to 20, plus ty 4 je to 24. Dole to pak bylo snadné, když umím násobilku osmi. Ale jen do 10 krát 8.“

uč 3: „Když se podíváte, tak vidíme, že jste tuhle úlohu oba začali řešit na stejném místě. Co myslíte, šlo by začít i jinde?“

Ondra 2: „Já nevím. Asi ne.“

Petra 2: „Šlo by to, ale pak by ses spíš netrefil.“

uč 4: „Co druhá úloha? Už vidím, že tu jste stejně neřešili.“

Ondra 3: „Já jsem si nejdřív řekl, kolik mi od 5 chybí do 18 a jako první doplnil tu 13. *(pauza)* Pak jsem si řekl, 5 krát 5 je 25. A jako poslední mám 18 plus nějaké číslo je 25 a vyšlo mi 7.“

Petra 3: „Já začala tím 5 krát 5. Pak jsem se vrátila na začátek a řekla si, že 5 plus 3 je 8 a plus ještě 10 je těch 18, takž musím doplnit 13. A od 18 pak plus 2 je 20 a ještě plus 5 je 25, takže doplním 7.“

uč 5: „Paráda, každý jste postupoval úplně jinak. Co mi povíte ke třetí úloze?“

Ondra 4: „Hned jsem věděl, že 7 plus 3 je 10. Pak 10 a 4 je 14. A pak *(pauza)* tady vlastně mělo být 2, já se spletl. *(pauza)* Někdy se spletu, že napíšu jiné číslo, než chci.“

uč 6: „Proč myslíš, že se to stalo teď?“

Ondra 5: „Já asi počítal místo krát plus, tak jsem tam napsal 7 jako plus 7.“

Petra 4: „Já tuhle úlohu počítala úplně stejně, ale nespletla jsem se.“

uč 7: „Dobrá, každý se někdy zmýlí. Teď se podíváme na další úlohu, poslední na této stránce. Petro, chceš začít?“

---

[12] Vyplněné pracovní listy Ondry naleznete v Příloze č. 10 a Petřiny pracovní listy v Přílozeč. 11

Petra 5: „Třeba. Tak já začala tím, že jsem si řekla 20 plus 4 je 24 a doplnila tu 20. Pak jsem si doplnila 6, protože 4 krát 6 je 24. Nakonec jsem počítala 4 a 6 je 10 a ještě 10 je 20, takže musím doplnit 16.“

Ondra 6: „To já začal trochu jinak. Počítal jsem 24 mínus 4 a dopsal jsem 20. Pak jsem přemýšlel, kolik mi chybí do 20, když mám 4 a zjistil jsem, že 16. A pak jsem si začal vedle psát tohle. *(pauza)*“ (Ukazuje list papíru, kde má poznamenáno pouze $4 \cdot 4 =$ - bez výsledku) „Protože jsem si nemohl vzpomenout, ale hned jsem si vzpomněl, že je to 6 krát 4.“

uč 8: „Prima. Jak jste si poradili s tou další úlohou, pátou?“

Petra 6: „Já vím z násobilky, že 3 krát 3 je 9, to jsem doplnila jako první. Pak jsem hledala něco plus 5 je 9 a našla 4. No a 3 plus 1 bylo lehký.“

Ondra 7: „Já jsem šel zase opačně. Napřed 9 mínus 5 jsou 4, pak 3 krát 3 a pak jsem doplnil tu 1.“

uč 9: „A co ta poslední úloha, byla náročnější?“ (Obrátila jsem se na Petru.)

Petra 7: „No *(pauza)*, já jsem ten začátek zkazila. *(pauza)* Zkusila jsem dát na začátek 3 a pak jsem tady dala blbě tohle číslo. *(pauza)*“ (Ukazuje na 15 v horním poli.) „Spletla jsem se z násobilky a počítala jsem místo 3 plus 5, 3 krát 5. Takže tam mělo být 8, pak plus 1 je 9. Ale 3 krát 2 stejně není 9. A pak jsem měla štěstí, jen tak náhodně jsem zkusila 6 a ono to vyšlo.“

uč 10: „Jen tak tě to napadlo?“

Petra 8: „Ano, úplně náhodou.“

Ondra 8: „To já jsem tam zkusil dát napřed 4. 4 plus 5 je 9 a to už jsem viděl, že to nevyjde, protože ještě plus 1 by bylo 10 a tam dole je 4 krát 2 a to je 8. *(pauza)* Tak jsem zkusil 5 a zase jsem už viděl, že to nepůjde, protože plus 5 už by bylo 10, jako dole, ale ještě je tam to plus 1 a tady by to nešlo. Pak jsem to napsal do toho velkýho. *(pauza)*“

uč 11: „To nevadí.“

Ondra 9: „Takže jsem zkusil menší, dal jsem tam 3. 3 plus 5 je 8 plus 1 by bylo 9, ale dole by bylo ještě míň. Tak jsem zkusil 6 a hned na začátku jsem už viděl, že to půjde. 6 plus 5 je 11 plus 1 je 12 a dole je 6 krát 2, taky 12.“

uč 12: „Skvěle, oba dva. Moc vám děkuji za to, jak jste dokázali popsat, svůj postup řešení a taky, že jste se nenechali ovlivnit a i když jste řešili něco stejně, každý z vás to dokázal popsat po svém.“

3.3 Popis průběhu 3. experimentu

Třetí experiment probíhal v pátek 14. 5. 2010 od 10:00 s chlapcem Kryštofem a dívkou Markétou ze třídy 2.B.

Snažila jsem se, aby byl úvod tohoto experimentu stejný, jako u obou předcházejících, aby mohlo proběhnout následné porovnání všech tří experimentů.

Při společném řešení vzorového šipkového trojúhelníku, ještě než jsem ho celý nakreslila, už děti hlásily, že jim připomíná pavučiny.

Také jeho společné doplnění proběhlo velmi rychle, protože ještě než jsem se stačila zeptat, které z prázdných polí bychom dokázali doplnit, Kryštof už mi hlásil, že 5 + 7 je 12 a Markéta rychle doplnila, že 5 x 4 je 20. Kryštof pak sám od sebe nahlas zkontroloval, že 12 + 8 je 20, takže nám to vychází.

Zadání instrukcí, jakým způsobem používat barevné fixy apod., proběhlo zase stejným způsobem jako v případě předešlých experimentů.

Kryštof i Markéta si pak podepsali každý svůj pracovní list a začali hledat řešení daných úloh.

Při práci jsem děti opět sledovala a zas pořídila několik málo fotografií.

Při řešení úloh posupoval Kryštof znatelně rychleji než Markéta, i když u poslední, nejnáročnější úlohy se po prvním neúspěšném pokusu najít řešení dlouze a bez hnutí skláněl nad papírem a vypadalo to, že je zcela konsternován. Děti byly předem upozorněny, stejně jako předešlí řešitelé, že poslední úloha je náročnější a bude vyžadovat to, aby do trojúhelníku zkoušely doplňovat různá čísla, a pokud jim trojúhelník nebude vycházet, budou hledat znovu a znovu. Upozornila jsem je na to, že bude možná třeba spousty pokusů, než na řešení přijdou, a že právě to hledání je cenné a správné. Markéta to komentovala tím, že tu poslední úlohu mají řešit „pokusem – omylem“. I když mne to trochu překvapilo, uvědomila jsem si, že jejich paní učitelka tento výraz často užívá a zřejmě tedy i před dětmi, které ho tím pádem vzaly za své.

Kryštof byl nakonec hotov za 25 minut a Markéta za 35 minut. Po tom, co některý z řešitelů skončil s prací, následoval krátký individuální rozhovor s ním, kdy jsem zjišťovala, jakým způsobem dané úlohy řešil.

Rozhovor s řešitelem: „Kryštof“[13]

uč 1: „Kryštofe, zkus mi vysvětlit, jak jsi řešil tu první úlohu.“

Kryštof 1: „8 plus 10 je 18, 18 plus 6 je 24. 8 krát 3 je 24.“ (Když hovoří, ukazuje na jednotlivá místa v úloze.)

uč 2: „Dobrá, takže ty sis jako první spočítal tuhle část, pak tuhle a nakonec jsi doplnil to násobení.“

Kryštof 2: (Kývne.)

uč 3: „Jak jsi věděl, že při násobení máš doplnit 3? To není úplně snadné.“

Kryštof 3: „To vím z hlavy.“

uč 4: „Díky barevnému zaznamenávání je vidět, žes začal tuhle úlohu řešit v horním poli. Myslíš, že by se dalo začít i jinde?“

Kryštof 4: „Nevím. Šlo by to zkoušet.“

uč 5: „Dobrá, tak se podíváme na druhou úlohu. Jak jsi řešil tu.“

Kryštof 5: *(pauza) (pauza)* (I když je z barevného značení zřejmé, jak při řešení postupoval, vypadá to, jako kdyby si nemohl vybavit sled jednotlivých kroků své práce. Hovoří pomaleji, ne moc hlasitě, je poněkud skoupý na slovo.) „Spočítal jsem 5 krát 5 a pak…“

uč 6: „Opravdu jsi začal tam?“

Kryštof 6: „Teda ne. Napřed jsem spočítal že 5 plus 13 je 18.“

uč 7: „A jak jsi to spočítal? Odčítal jsi 18 mínus 5?“

Kryštof 7: „Ne. Prostě jsem věděl, že tam bude 13.“

uč 8: „Dobrá, a pak jsi tedy spočítal těch 5 krát 5 je 25, jak vidím. Jak víš, že je to právě 25?“

Kryštof 8: „To si pamatuju.“

uč 9: „Prima. A jak jsi zjistil, že do posledního prázdného políčka máš dopsat 7?“

Kryštof 9: „No, 18 plus 7 je 25.“

[13] Kryštofovy vyplněné pracovní listy naleznete v Příloze č. 12

uč 10: „Zase jsi to věděl rovnou? Neodečítal jsi třeba 25 mínus 18 nebo nedopočítal jsi, kolik je od 18 do 25? 19, 20, 21…“ (Předvádím na prstech, jak to myslím.)

Kryštof 10: „Ne.“

uč 11: „Tak dobře. Co ta třetí úloha?“

Kryštof 11: „7 krát 2 je 14, 7 plus 3 je 10 a plus 4 je 14.“

uč 12: „Spočítal jsi to skvěle, Kryštofe. Já bych ale ještě potřebovala od tebe slyšet, jak jsi to zjistil, jestli jsi třeba přičítal nebo odečítal…*(pauza)* Rozumíš mi?“

Kryštof 12: (Přikývne.)

uč 13: „Ty se přede mnou nějak stydíš?“

Kryštof 13: (Kývá, že ne, ale do očí se mi nepodíval.)

uč 14: „Tak to zkusíme u další úlohy, ano? Jak jsi přišel na její řešení? Co jsi doplnil jako první?“

Kryštof 14: „Že 24 mínus 4 je 20.“

uč 15: „No výborně, takže tady jsi odečítal, abys to zjistil?“

Kryštof 15: „Jo. *(pauza)* Pak jsem napsal 16, protože 4 plus 16 je 20.“

uč 16: „A to už jsi neodečítal?“

Kryštof 16: „Ne, to vím z hlavy.“

uč 17: „A to poslední, že 4 krát 6 je 24, to víš taky zpaměti?“

Kryštof 17: „Jo.“

uč 18: „Ty si pamatuješ zpaměti celou násobilku?“

Kryštof 18: „Skoro jo.“

uč 19: „No, to je pro tebe výhoda, viď? *(pauza)* Jak těžká ti připadala ta další úloha na novém listě?“

Kryštof 19: „Střední.“

uč 20: „Aha. A jak jsi ji řešil?“

Kryštof 20: „Vím, že 3 krát 3 je 9, *(pauza)* pak, že 4 plus 5 je taky 9…“

uč 21: „Počkej, a jak jsi věděl, že to je zrovna 4?“

Kryštof 21: „Jsem to zkusil.“

uč 22: „Aha. Tak to asi to poslední, že 3 plus 1 je 4, pro tebe byla brnkačka.“

Kryštof 22: „To jo.“

uč 23: „Ta poslední úloha ale tak snadná nebyla, dlouho jsi přemýšlel, což je dobře. Copak se stalo?“

Kryštof 23: „Prostě to nevyšlo.“

uč 24: „Myslíš, hned na první pokus?“

Kryštof 24: „Hm.“

uč 25: „To přece vůbec nevadí. Upozorňovala jsem vás, že tahle úloha je jiná, než ty předchozí, že se musejí nejprve zkoušet různá čísla, a až pak možná přijdete na její řešení.“

Kryštof 25: „Já vím.“

uč 26: „Tak mi pověz, co jsi zkusil doplnit napřed.“

Kryštof 26: „No tu 2.“

uč 27: „A proč jsi to ani nedopsal?“

Kryštof 27: „To by nevyšlo. 7 plus 1 je 8, ale 2 krát 2 jsou 4.“

uč 28: „Výborně. Tohle byl tvůj druhý pokus? Proč jsi zvolil takhle vysoké číslo – 11?“

Kryštof 28: „Potom jsem to chtěl zkoušet dolů.“

uč 29: „Myslíš, žes pak chtěl zkusit 10, 9, 8 a tak dále?“

Kryštof 29: „Jo. Ale s tou 11 to taky nevyšlo. 11 plus 5 je 16, plus 1 je 17. Ale dole vychází 22.“

uč 30: „Pak jsi tedy zkusil doplnit 9? Proč jsi nezkusil i 10, když jsi chtěl jít od 11 níž?“

Kryštof 30: „Jsem si říkal, že by to bylo stejně velký.“

uč 31: „Aha, to je dobrá úvaha. Co dál?“

Kryštof 31: „U tý 9 to taky nevyšlo, ale už to bylo jenom o 3.“

uč 32: „Pak jsi zkusil na začátek doplnit 8.“

Kryštof 32: „No, ale snížilo se to jen o 1.“ *(pauza)* (Kryštof hovoří o rozdílu výsledků obou cest.) „Takže jsem rovnou zkusil 6, protože to je o 3 od 9.“

uč 33: „Skvěle! A ty jsi něco vykřikl, když jsi tam tu 6 doplňoval a ještě jsi tu úlohu neměl ani celou vyplněnou, co to bylo?“

Kryštof 33: „Řekl jsem: Už to bude!“

uč 34: „Takže jsi měl radost, žes na to přišel?"

Kryštof 34: (Kývnul, že ano, a nepatrně se usmál.)

uč 35: „Bezva! Kryštofe, ty o tom moc dobře přemýšlíš. Jen se neboj víc o tom mluvit, o tom, co se ti honí hlavou. To není ostuda nebo tak něco. Děkuji ti za spolupráci."

Rozhovor s řešitelem: „Markéta"[14]

uč 1: „Tak, Markétko, zkus mi popsat, jak jsi postupovala při řešení první úlohy."

Markéta 1: „Takže, napřed jsem si řekla, kolik je 8 plus 10. (Mluví pomaleji, přemýšlí) To je jednoduchý – 18. Pak 18 plus 6, *(pauza)* to jsem si musela spočítat na prstech."

uč 2: „To je pořádku. Takže jsi počítala 19, 20, 21… a u toho sis ukazovala prsty?" (Názorně předvádím.)

Markéta 2: „Přesně tak, až do 24. Pak jsem to tam napsala. *(pauza)* A nakonec 8 krát 3, to je 24 – tohle vím z hlavy. Ale neumím všechny násobky, jen některý."

uč 3: „To přijde časem, uvidíš. Markétko, tys tuhle úlohu začala počítat od toho 8 plus 10. Myslíš, že by se dalo začít počítat i od jinud?"

Markéta 3: „Já si myslím, že je lepší začít tím lehčím číslem, zvlášť pro malé dětičky, které to neumí."

uč 4: „Dobrá. Jak jsi řešila tu druhou úlohu?"

Markéta 4: „Začala jsem tím 5 krát 5 je 25."

uč 5: „To si taky pamatuješ?"

Markéta 5: „Ano. Pak jsem spočítala tohle. *(pauza)* (Ukazuje.) To jsem si počítala tady po 1." (Markéta mi ukazuje pomocný list papíru, kam si napsala čísla od 6 do 18.[15])

uč 6: „Takže sis tady vlastně vytvořila takovou osičku, viď." (Děti mají totiž v hodinách matematiky možnost počítat pomocí číselné osy, kterou mají přilepenou na desce lavice.)

[14] Markétiny vyplněné pracovní listy naleznete v Příloze č. 13
[15] Markétin pomocný list papíru naleznete v Příloze č. 9

Markéta 6: „Přesně. *(pauza)* A pak jsem to dopočítala takhle: 19, 20, 21…“ (Markéta mi předvádí, jak dopočítala poslední část úlohy (18 + 7 = 25) na prstech.)

uč 7: „Paráda. Jak sis poradila s třetí úlohou?“

Markéta 7: „Z hlavy jsem doplnila 2, protože si pamatuju, že 7 krát 2 je 14. Pak 7 plus 3, to je 10 – to je snadný. A k 10 musím přidat 4, aby to bylo 14, to taky umím z hlavy.“

uč 8: „Popisuješ to úplně skvěle. Co další úloha?“

Markéta 8: „No, i když je to těžký – 4 krát 6 je 24, tak to si zrovna taky pamatuju.“

uč 9: „Tak to už si toho pamatuješ docela dost.“

Markéta 9: „Pak musím doplnit 20, protože 20 plus 4 je 24. A pak mám 4 a to plus 6 plus ještě 10 je 20, takže dopíšu 16.“

uč 10: „Perfektní. Co ta další úloha, nepřišla ti těžká?“

Markéta 10: „Ani ne, skoro všechny byly lehký. To jsem napřed doplnila 4, pak…“

uč 11: „Počkej, jak jsi věděla, že tam bude 4?“

Markéta 11: „No, protože 4 plus 5 je 9.“

uč 12: „Nepočítala jsi náhodou 9 mínus 5 jsou 4?“

Markéta 12: „Ne. Pak 3 krát 3, to si taky pamatuju a 3 plus 1 jsou 4 a bylo to.“

uč 13: „A ta poslední? Napřed jsi zkusila dosadit 7, proč?“

Markéta 13: *(pauza)* „Já nevím, tak mě to napadlo. *(pauza)* A když 7 krát 2 je 14, tak jsem si myslela, že by to mohlo vyjít i nahoře, ale pak jsem si vlastně spočítala, že 7 plus 5 je jenom 12 a pak to nevyšlo. *(pauza)* Kdyby to bylo 13, tak by to vyšlo.“

uč 14: „Proč jsi u toho druhého pokusu o tolik zmenšila to první číslo?“

Markéta 14: „Protože jsem si myslela, že to bude lepší. Ale nebylo, protože 3 krát 2 není 9.“

uč 15: „A pak jsi zkusila 8 – zase velké číslo. Proč?“

Markéta 15: „Myslela jsem, že to větší by se líp dělalo a bylo by přece jen blíž. Ale zase to nevyšlo.“

uč 16: „A proto jsi se pak vrátila k menším číslům?“ (Kývá, že ano.) „A proč už jsi pak šla postupně – 4, 5, 6?“

Markéta 16: „Protože jsem si myslela, že to pak bude lepší?“

uč 17: „Co bude lepší?“

Markéta 17: „Že se můžu líp orientovat v těch číslech.“

uč 18: „Paráda. A nakonec jsi tedy zkusila 6. Kdy jsi poznala, že už jsi natrefila na správné řešení?“

Markéta 18: „Spočítala jsem na prstech 6 plus 5 je 11, plus 1 je 12, a pak dole 6 krát 2 a až pak jsem to viděla. *(pauza)* A pak jsem to přepsala nahoru.“

uč 19: „Markétko, používáš ve třídě k násobení tabulku násobků?“

Markéta 19: „Nepoužívám. Snažím se to dělat sama, ale občas se spletu.“

uč 20: „No, to se může stát každému. Moc ti děkuji za to, žes tu byla a žes mi to svoje počítání tak hezky popsala. Úplně přesně tak vím, jak jsi postupovala.“

4. kapitola: Analýzy jednotlivých experimentů

V této kapitole se budu snažit zanalyzovat průběh jednotlivých experimentů – z pedagogického hlediska rozebrat a vyhodnotit zajímavé momenty jednotlivých pokusů. Rozhodla jsem se, pro lepší přehlednost a také kvůli názorné ilustraci, připojit k textu jednotlivých analýz vždy rovnou konkrétní fotografii, pokud je na ní zachycen popisovaný moment experimentu.

4.1 Analýza 1. experimentu

1/ Daniel

Stručná charakteristika řešitele: Daniel je hoch z mé třídy, 2.C. Je přátelský, komunikativní, pozorný, bystrý a pracovitý. Při jakékoliv práci (nejen v matematice) postupuje většinou svižně, bez problémů a se vzácným nadšením jemu vlastním. Daníka totiž opravdu baví téměř cokoliv – je nadšen i z psaní diktátů – většinou svou radost projevuje větami jako: „Hurá diktát." apod. Když je s určenou prací hotov, ihned se zajímá, co může dělat dál. S úsměvem pak hlásí, kolik toho stihl. Velmi rád při společné kontrole (třeba nějaké matematické úlohy u tabule) vysvětluje, jak ke svému řešení dospěl. Opravdu dobře a srozumitelně dokáže ostatním spolužákům přetlumočit svou strategii tak, aby ji bez problémů pochopili. Dovede také pomoci spolužákům, kterým se právě nedaří a to tak, aby si na konečné řešení mohli přijít sami. Při vlastním neúspěchu býval zpočátku poněkud zklamaný, ale velmi rychle pochopil, že „chyba" ho posune o krok kupředu, a nyní, když nějakou úlohu nemůže dlouho vyřešit, bere to jako výzvu, popřípadě, pokud daná úloha řešení nemá, dokáže přijít s obstojným důkazem, proč tomu tak podle něj je. Dan patří v mé třídě k několika málo dětem, které mají, dle mého názoru, jisté matematické nadání.

Úvod: Když se Dan dozvěděl, že bude mít za úkol řešit nové, pro něj zatím neznámé, matematické úlohy, byl velmi rád. Usmíval se a dokonce radostně zatleskal. Při seznamováním s těmito úlohami pak dával přikyvováním najevo, že zadání rozumí a byl dokonce trochu netrpělivý, aby už mohl začít. – Z toho jsem usoudila, že absolutně nemá z ničeho obavy, spíše naopak, jako při většině toho, co je Danovi předkládáno, se na to těší.

Při samotném řešení zadaných úloh se pokaždé vyřešené úloze široce usmál a doslova se „zatetelil“.

Analýza: Z rozhovoru experimentátorky s žákem Danielem je cítit vzájemné porozumění v oblasti komunikační – přenos informací probíhal zcela bez problémů.

U druhé úlohy (ve vstupu Dan 3) se můžeme přesvědčit, že Daniel v rámci jedné úlohy použil dvě různé strategie na vyřešení podobné situace – číslo 7 našel dopočítáváním a číslo 13 odčítáním. Z toho je evidentní, že je schopen pracovat oběma způsoby a volba jednoho či druhého závisí zřejmě na jeho momentálním rozhodnutí – volí takovou kalkulaci, která je pro něj v dané situaci jednodušší či výhodnější. O edukačním přístupu Danovy učitelky mohu říci, že často se žáky ve vzájemné diskusi vyhledává různé postupy, jak lze např. k výsledku jedné úlohy dospět. Tyto způsoby, vzešlé od žáků samotných, pak systematizuje a shrnuje a nechává na nich, který si pro sebe zvolí jako výhodnější. Žáci tak mají možnost disponovat více strategiemi a mohou se sami rozhodovat, jak budou úlohu řešit.

Zajímavým momentem je jeho postup při řešení poslední úlohy. Na malém prostoru má tyto čtyři strategie. Za prvé, využití malých čísel (vstup Dan 6 – Dan 7). Dan začal náhodně zvoleným menším číslem, které doplnil do „růžku“ trojúhelníku, jak to sám popsal. Když ani na druhý pokus nedospěl k řešení, zkusil pak první číslo do trojúhelníku doplit na jiné místo – do „špičky“ trojúhelníku (vstup Dan 7) – tady je patrná druhá strategie – změna v počátku řešení úlohy. Zkusil první doplňované číslo zapsat jinam. Vzápětí si ale, jak sám řekl, uvědomil, že by si tím situaci jen zkomplikoval (vstup Dan 8). Řekl si, že tato strategie je příliš kalkulativně náročná, a proto se vrátil ke svému původnímu postupu – jako první doplňovat čísla do levého vrcholu trojúhelníku.

Třetí strategií je využití větších čísel (vstup Dan 9). Při dalším pokusu vyzkoušel větší číslo (8), zřejmě proto, protože předešlá, menší čísla (1, 2, 5) nevedla k úspěšnému řešení. Pak nastupuje čtvrtá strategie - potřeba své pokusy nějakým způsobem více systematizovat a zpřehlednit. Proto, kromě svého plánu, že bude do úloh doplňovat čísla od 1 výše, začal dosazovat čísla postupně – tedy ta, která ještě nevyzkoušel (3, 4, 6,…), aby byla jeho řada 1, 2, 3, 4, 5, 6…úplná (vstup Dan 10).

Je zřejmé, že tento žák má velmi vyspělou úroveň myšlení v rovině exekutivní – z využití jednotlivých popsaných strategií je evidentní silná flexibilita strategického myšlení, což vypovídá o celkové inteligenci dítěte.

Dále je z rozhovoru s ním patrné, že kromě toho má velmi vyvinutou i úroveň myšlení v rovině evidenční. Dan sám a bez pobízení dokáže srozumitelně a názorně popsat, jak přesně postupoval, dovede vysvětlit, proč udělal přesně tento krok, co ho k tomu vedlo, a navíc rád řekne vše, co by ještě mohlo být důležité – u každé úlohy, aniž už jsem se pak ptala, uvedl všechny možné způsoby, odkud lze úlohu začít řešit. Pokud Dan během svého řešení udělá nějakou „chybu“, dovede ji kriticky využít, poučit se z ní, zahrne ji do svého postupu řešení jako krok, který ho posunul kupředu.

Dan při experimentu za celou dobu nevyužil pomocný list papíru a jeho tempo počítání bylo plynulé (nikde se dlouho nezastavil, „nezasekl se“). Z toho usuzuji, že všechny triády, které byly v použitých šipkových grafech (ať se jedná o sčítání/odčítání či násobení), jsou pro něj osvojenou záležitostí. Je pravda, že ani ve třídě při výuce už např. tabulku násobků nevyužívá a většinu dalších výpočtů také provádí bez pomůcek, zpaměti.

2/ Mája

Stručná charakteristika řešitele: Martina je dívka z mé třídy, 2.C. Je sympatická, milá, komunikativní, celkem pozorná i bystrá. Často se nabízí, zda může nějak pomoci – při čemkoliv – aniž by za to čekala odměnu. Zpočátku, zvláště v první třídě, se u ní projevovala při samostatné činnosti určitá lenost a při neúspěchu bývala otrávená a demotivovaná pro pokračování v začaté práci. Toto ale již vcelku překonala a nyní, zřejmě posilněná převažujícími úspěchy, už dokáže mnohem déle hledat řešení, i když je její hledání doprovázeno mnohými pokusy, které končí omyly. Pokud se Mája dopouští chyb, je to převážně z nepozornosti. Matematika ji, dle jejích vlastních slov, hodně baví, i když si asi nemyslí, že by byla nějak výjimečná. Bývá trochu nejistá, co se týče vlastních schopností, občas si zbytečně málo věří. Ve srovnání s ostatními dívkami je však, podle mé zkušenosti, její matematické uvažování mnohem rychlejší a přesnější – předčí i většinu hochů ve třídě. Často přijde s jedinečným řešením úlohy, na které málokdo jiný vůbec přišel a také zvládne udělat během daného času více práce, než je požadováno. Také dovede lépe než většina spolužáků popsat svůj způsob řešení dané úlohy a vysvětlit ho tak, aby jej pochopili i slabší spolužáci. Při práci v matematice používá jako pomůcku číselnou osu i tabulku násobků.

Úvod: Mája se mi svěřila, že nečekala, že ji pro experiment vyberu, a proto z toho měla velkou radost. Řekla mi, že se bude snažit. Při experimentu pracovala soustředěně a pečlivě. Při práci se párkrát zmýlila, ale svou chybu si vždy sama vzápětí uvědomila a opravila. Také v následném rozhovoru dovedla objasnit, co bylo jejich příčinou.

Analýza: Z rozhovoru experimentátorky s žákyní Májou je cítit vzájemné porozumění v oblasti přenosu informací i soulad v oblasti interakční.

Zajímavý moment při Májině práci nastal již u první úlohy (vstup Mája 1). Když pomocí sčítání doplnila první dvě ze tří prázdných polí, zbývalo jí zjistit, co doplní do třetího prázdného pole 8 (· ?) = 24. Aby toto mohla zjistit, vzala si na pomoc prázdný list papíru, kam si postupně napsala: 8 · 1 = 8, 8 · 2 = 16, 8 · 3 = 24[16] (viz. foto). Při následném rozhovoru mi k tomu pověděla toto: „Pak jsem si musela napsat tohle… Abych to viděla.“ (vstup Mája 1).

Z toho je zřejmé, že Martina nemá v paměti uloženy samotné násobky čísla 8, a to ani jako řadu čísel, protože to by si, podle mne, napsala pouze 8, 16, 24,… Takové řady čísel se děti zpaměti ani učit nemusí, jako pomůcku mohou využívat tabulku násobků, ve které si příslušné výsledky hledají. Jelikož Mája nyní tuto tabulku k dispozici neměla, poradila si tak, že si postupně spočítala, kolik je jedenkrát, dvakrát a třikrát osm – došla k hledanému číslu postupně, logicky. Májina dlouhodobá paměť se organizuje do schémat. Schéma násobků osmi je podpořeno jasnou představou, ke které může Martina dojít, kdykoliv ji bude potřebovat.

Dalším zajímavým momentem v Májině práci bylo sečtení čísel 18 a 7. Vylíčila mi, jakým způsobem to udělala. Číslo 10 si pamatovala a čísla 7 a 8 si rozdělila takto: (2 + 3) + (5 + 5) = 5 + 10 = 15, pak přidala onu 10 a zapsala výsledek 25 (vstup Mája 3). Jak je vidět, snaží se co nejvíce si počítání usnadnit, využít nějaké úsporné způsoby, aby se jí vše dobře počítalo. U této strategie ovšem hrozí to, že řešitel zapomene určitou část, kterou musí na moment podržet v krátkodobé paměti, přičíst či odečíst.

---

[16] Májin pomocný list papíru je v Příloze č. 9

Tento postup se jí vymstil hned v následující úloze, kdy měla sečíst pouze 7 + 3. Ovlivněna předchozí úlohou však znovu zopakovala celý proces: (2 + 3) + (5 + 5) = 5 + 10 = 15. Po zapsání čísla 15 si však svůj omyl uvědomila a do vedlejšího volného místa tuto úlohu spočítala již správně.

Ve čtvrté úloze Mája nejdříve zjišťovala, co doplnit ve vztahu 4 (· ?) = 24. Využila svou, z předchozí úlohy již osvědčenou, strategii a zase použila pomocný list papíru, kam si zapsala: 4 · 1 = 4, 4 · 2 = 8, 4 · 3 = 12, 4 · 4 = 16, 4 · 5 = 20. Hledaný násobek už do řady ani nedopsala, zapsala si jej rovnou do úlohy (fotografie ilustrující tento postup jsou níže).


Při další chybě zapracovala tréma. Mája správně zjistila a doplnila dvě první čísla čtvrté úlohy, pak ale místo 20 – 4 počítala 40 – 4. Po zapsání chybného výsledku 36 se ihned opravila a zapsala úlohu znovu již se správným číslem 16. Když jsem se pak Máji ptala, co se stalo, řekla mi, že jsem si v tu chvíli zrovna stoupla před ni a ji to tak znervóznilo, že chvíli nevěděla, co vlastně počítá (vstup Mája 7).

Myslím si, že kromě toho, že si Mája zbytečně málo věří, navíc chtěla přede mnou udělat vše správně, dokázat, že na ni můžu být hrdá. Paradoxně však právě tato snaha byla, podle mne, příčinou onoho selhání. V její touze nezklamat mne a dokázat mi, že jsem si ji pro svůj experiment vybrala po právu, spatřuji prvky sociální inteligence.

Při řešení páté úlohy (vstup Mája 10) Martině jako pomůcka posloužil verš, který jsem jim jednou pověděla – vlastně jen tak, abych je trochu pobavila a řekla jim, podle čeho jsem si toto zapamatovala já, když jsem byla malá. Jak je vidět, zapamatovala si to tak i Mája, což mě překvapilo a utvrdilo v tom, že různé rytmické a mnemotechnické pomůcky podporují zapamatování. Myslím si, že pokud po dětech nechci, aby si pouze pamětně a bez porozumění osvojovaly vše, co se učíme, tak malá rytmická pomůcka, navíc podpořená porozuměním, nemusí uškodit.

Poslední úlohu Mája označila jako vyčerpávající (vstup Mája 12). Zřejmě ji tak vyhodnotila proto, protože musela vyzkoušet 11 možností, než dospěla k jejímu řešení.

Hned první moment byl zajímavý (vstup Mája 14). Martina zkusila jako první doplnit číslo 3 a zapsala jej do horního vrcholu trojúhelníku. Pak už ale v počítání nepokračovala. Postup, kdy by od menšího čísla musela odečíst číslo větší, se jí zdál nereálný.

Nemyslím si, že by Mája neuměla spočítat 3 – 5 zvlášť, pokud by měla k dispozici číselnou osu, protože již mnohokrát dokázala, že tohle zvládá (např. v prostředí Krokování). Spíš mám dojem, že si pak už neuměla představit, že by násobila se záporným číslem. Proto se rozhodla pro příště už začínat s čísly v levém vrcholu trojúhelníku, aby už žádná podobná situace nemusela nastat. Což je pro ni, jako řešitele, rozhodně výhodné. Zvolila si pro sebe kalkulativně nezatěžující strategii.

Po tom, co Martina zkusila neúspěšně vyřešit tuto úlohu pomocí strategie malých čísel (3, 1, 4, 2), se rozhodla pro opačnou strategii – dosadit číslo mnohem větší (10) (vstup Mája 16). Myslím, že tady ale intuitivně cítila, že rozdíl obou cest vedoucích ke stavu z je příliš velký. Pak tedy vyzkoušela další strategii – postupně čísla zmenšovat. Po dalších dvou neúspěšných pokusech zkusila doplnit čísla 5 a 6, protože, jak sama řekla, ještě je nezkusila (vstup Mája 18). Tady se, myslím, stejně jako u Dana, objevil jistý smysl pro přehled a systematičnost. Její řada čísel, která postupně zkoušela doplnit, totiž opravdu čísla 5, 6 postrádala.

Zkusila tedy počítat nejprve s číslem 5. Zde také poprvé nejdříve násobila a pak až sčítala (vstup Mája 18). Buď je to proto, protože chtěla trochu narušit jistý stereotyp, ve kterém až doposud úlohy řešila, nebo možná takhle dříve viděla, zda jí úloha vyjde či ne. Po neúspěšném pokusu s číslem 5 už ale tušila, že má řešení nadosah (vstup Mája 18). Proto nakonec zkusila doplnit číslo 6 a konečně k vytouženému řešení dospěla.

Jak je vidět, Martina také dokázala při řešení úloh pracovat s velkým množstvím strategií – její strategické myšlení je taktéž flexibilní, což opět ukazuje i na míru její inteligence. Navíc se u ní objevuje jistá intuice či citlivost pro odhadování dalšího průběhu řešení.

Co se týká úrovně evidenční, je také velmi vysoká. Mája se dokázala v myšlenkách vrátit k jednotlivým krokům řešení a zpětně je detailně popsat.

Jako její třídní učitelka jsem ráda, že Mája při tolika neúspěšných pokusech poslední úlohu nevzdala. Myslím, že je to i jistý důkaz, že už ušla určitý kus cesty od toho, kdy ji každý neúspěch odradil. Podle mne je to proto, protože si zažila spousty situací, kdy se jí namáhavé hledání vyplatilo a k řešení se nakonec probojovala. Proto dnes už řešení poctivě a možná i poněkud systematicky hledá, dokud ho nenajde. Případně ji napadne, že úlohu řešit nelze, ale potom je schopna i vysvětlit, proč tomu tak podle ní je.

A nakonec je vidět, že i když se s poslední úlohou docela natrápila, celkově zhodnotila, že ji úlohy bavily a že se na ně dokonce těší. To je další důkaz toho, že když má žák spoustu zkušeností s tím, že lze dojít k řešení i tehdy, když se s něčím dlouho potýká, pak u další úlohy hledání nevzdá, dokud řešení nenajde a celkově pak pociťuje i dlouhodobé pátrání jako příjemné.

4.2 Analýza 2. experimentu

1/ Ondra

Stručná charakteristika řešitele: (od třídní učitelky 2.A, Mgr. Jany Kopecké)

Ondra je klidný a hodný žák, nemá žádné kázeňské problémy. Do školy je vždy dobře připraven, spolupráce s rodinou je výborná. V českém jazyce se objevují dyslektické problémy - je zaslán na vyšetření do PPP, výsledky zatím nemám. V matematice se zpočátku jevil jako průměrný žák, nevěřil si, váhavě navrhoval řešení. V tomto školním roce udělal velký pokrok, získal na jistotě, přichází s neobvyklým řešením, pokud není správné, nenechá se odradit, ale zkouší znovu. Rád pomáhá s řešením i ostatním spolužákům, pomohlo mu to i v postavení mezi dětmi, neumí se totiž moc prosazovat a cítí se nejistý i kvůli obtížím v ČJ. Matematika mu tak pomohla i v sociálních kontaktech.

Úvod: Dozvěděla jsem se, že paní učitelka Kopecká dala dětem ve své třídě možnost volby. Vysvětlila celé třídě, o co se jedná a nechala děti, aby se samy rozhodly, kdo by se chtěl počítání s semnou účastnit. Z dětí, které se přihlásily, pak vybrala právě Ondru a Petru.

S Ondřejem se blíže neznám. V průběhu experimentu působil klidně a soustředěně. Pokud jsem cokoli vysvětlovala, dával najevo, že rozumí. Snažil se, pracoval plynule, nenechal se ničím vyrušit. Během experimentu udělal jedinou numerickou chybu a pak dokázal vysvětlit, proč se mu to přihodilo. Při následném rozhovoru uměl celkem dobře zrekapitulovat své postupy řešení jednotlivých úloh.

Analýza: V rozhovoru experimentátorky s Ondřejem je patrná shoda při přenosu informací, v oblasti interakční se nic závažnějšího nestalo.

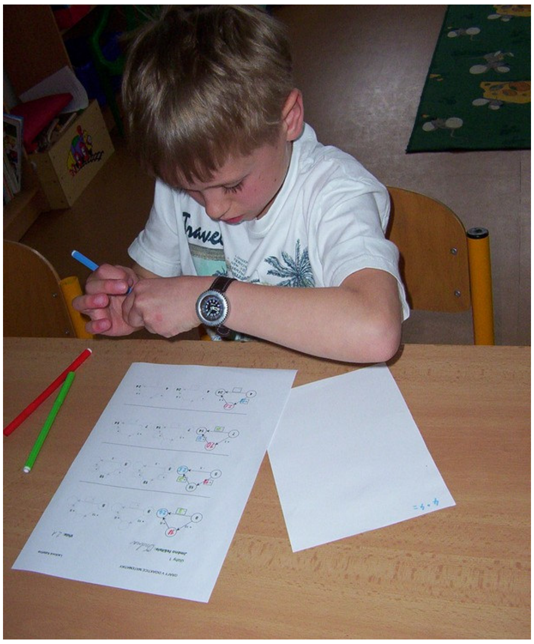
Pozastavila bych se jen u místa, kde udělal chybu. Měl doplnit vztah 7 (* ?) = 14. Doplnil jej takto: 7 (* 7) = 14. Svůj omyl si uvědomil teprve při společném rozhovoru nad úlohami, když popisoval, jak tuto úlohu řešil (vstup Ondra 4). Zeptala jsem se, proč si myslí, že se spletl nyní. Zhodnotil to tak, že nejspíš místo násobení sčítal a tak (vlastně správně) doplnil jiný vztah 7 (+ 7) = 14 (vstup Ondra 5).

Toto je klasická chyba z nepozornosti, kdy je řešitel navíc ovlivněn předchozími kroky, kdy např. musel stále sčítat – nevšimne si pak často, že se znaménko změnilo a žádá se od něj jiná matematická operace.

Myslím, že se Ondry v tomto momentě trochu dotklo, když mu jeho spolužačka, dala najevo, že ona žádnou chybu, na rozdíl od něj, neudělala. Ale nenechal se vyvézt z míry a pokračoval v popisu konkrétních kroků své práce.

Je evidentní, že oba spolužáci přistupují k chybě rozdílně. Ondra se učí chybu kriticky využívat. Po tom, co se opravil a vysvětlil, jak u něj k mýlce došlo, už bral celou záležitost za ukončenou. Chybu bere jako součást řešitelského postupu. Když se u něj nějaká náhodou objeví, dokáže se nejen opravit, ale je schopen přijít i na to, proč vůbec chyboval, což je velmi cenná dovednost pro klíčovou kompetenci učení sebe sama.

Dalším zajímavým momentem v Ondrově práci bylo použití pomocného listu papíru u úlohy čtyři (vstup Ondra 6). Potřeboval si něco zaznamenat vlastně téměř ve stejném okamžiku jako Mája z 1. experimentu (vstup Mája 6). Ve čtvrté úloze bylo třeba doplnit vztah 4 (⋆ ?) = 24. Ondřej ještě před tím, než se zaměřil na toto místo, vyřešil zbytek celé úlohy, což mu ale k řešení tohoto vztahu nijak nepomohlo. Na pomocný list papíru si zapsal pouze: 4 ⋆ 4 = - bez výsledku. (Tento moment je zachycen na následující fotografii.) Jak řekl v rozhovoru (vstup Ondra 6), nemohl si hned vzpomenout.



Troufám si tvrdit, že u Ondřeje se v tuto chvíli odehrávalo něco jiného, než u Máji. Martina potřebovala postupně k tomuto výsledku dojít. Kdežto Ondra se, podle mne, pouze rozhodoval, zda platí vztah 4 (⋆ 4) = 24 nebo jiný, např. 4 (⋆ 6) = 24. Usuzuji jednak z toho, že si nevypočítal, tak jako Martina, postupně všechny násobky čísla 4. A také řekl, že si „vzpomněl“, to znamená, že má již v mysli uloženy násobky čísla 4, jen se mu asi zrovna pletou možná právě tyto dva vztahy 4 ($\cdot$ 4) = 16 a 4 ($\cdot$ 6) = 24 – třeba z důvodu toho, že oba obsahují dvě číslice 4 a číslici 6 (to ovšem pouze hádám).

Poslední moment, který bych u Ondřeje zmínila, je ten, že si u poslední úlohy nezaznamenával čísla do konečného pole šipkového grafu, pokud výsledky obou cest vedoucí k tomuto poli nebyly shodné. Všichni ostatní řešitelé, se kterými jsem tento experiment provedla, si do posledních polí šipkového grafu „trojúhelník“ napsali vždy jeden z výsledků obou cest a až pak zkusili, zda jim toto číslo sedí i v případě, že se k němu od počátku grafu vydají tou druhou cestou. Ondřej podle mne absolvoval také vždy jednu z cest, a to tu horní ($x + a = y + b = z$), zapsal x, které si sám zvolil, y, které mu vyšlo, ale pak podržel výsledek této cesty (z) v paměti, rychle vyřešil kratší z cest ($x \cdot c = z$) a když viděl, že se z v tomto případě liší od toho předchozího, vůbec jej do prázdného pole nedopisoval.

Tento postup ukazuje na několik věcí. Jednak má Ondřej nejspíš o něco větší kapacitu krátkodobé paměti než ostatní řešitelé, když dovede určité číslo podržet v mysli i přes to, že pak ještě řeší další, odlišnou matematickou operaci. Za druhé má již v mysli zřejmě ukotvenou většinu spojů malé násobilky, takže na vyřešení úloh s nimi nepotřebuje tolik času, jako ostatní, za který by na předchozí číslo, které si chtěl udržet v paměti, zapomněl. A pak se zde také nabízí to, že Ondra možná vůbec nechtěl zaznamenávat nesprávná řešení této úlohy. Možná chtěl prostě zapsat to jediné správné, až ho objeví. To může být ovšem právě u podobných úloh nevýhodou, protože, jak jsem se sama poučila při řešení zadaných úloh, systematické budování paměti všech použitých pokusů může odkrýt cestu k řešení. Takovému žákovi, který by třeba přímo odmítal zápis nesprávných řešení, bych schválně připravila úlohu, kterou je těžké bez všech záznamů vyřešit. Možná by pak, při konfrontaci se spolužáky, kteří by díky záznamům všech pokusů (i těch nesprávných) došli k řešení rychleji, pochopil, že takový zápis má smysl.

Ondřej vyřešil poslední úlohu na čtvrtý pokus díky tomu, že si šťastně zvolil první číslo, které zkusil do trojúhelníku zapsat – bylo to číslo 4. Pak již postupoval velmi systematicky. Jako další zvolil číslo 5. Viděl, že mu řešení uniklo o jednu. Když tedy toto nevyšlo, zkusil pro změnu číslo o 1 menší od původního dosazeného – číslo 3. Všiml si ale, že rozdíl obou cest se začíná ještě více prohlubovat (vstup Ondra 9). Pak tedy pokračoval v dosazování větších čísel. Šel postupně a použil číslo 6, které bylo řešením úlohy.

Ondřej tedy využíval strategii systematického a postupného dosazování čísel. Dokázal zpětně své použité postupy popsat, což ukazuje na výšku úrovně jeho evidenčního myšlení. Také v rozhovoru často použil slovní spojení, že „už viděl, že to půjde/nepůjde“. To mi říká, že má do úloh vhled a dokáže odhadovat a představit si, jak a kam se bude řešení úlohy dále ubírat.

2/ Petra

Stručná charakteristika řešitele: (od třídní učitelky 2.A, Mgr. Jany Kopecké)

Petra je rovněž klidná žákyně, velmi oblíbená mezi spolužáky. S matematikou neměla nikdy vážnější problémy. Úkoly vždy dokázala řešit samostatně, raději než před všemi vysvětlí své řešení individuálně, nebo jen v užším okruhu dětí, ráda pomáhá ostatním a má v tomto úžasné nadání, napovědět jen to opravdu nezbytně nutné, aby si každý mohl k řešení dojít sám. Děti si ji rády vybírají do skupiny, protože pracuje systematicky. Počítá výborně i pamětně, bez potřeby názoru. Její zdůvodnění je jasné, stručné, jde vždy po podstatě problému.

Úvod: Petra se tedy, stejně jako Ondřej, pro účast na experimentu rozhodla dobrovolně. V jeho průběhu působila velmi uzavřeným a soustředěným dojmem – bylo vidět, že jí velmi záleží na tom, aby byla úspěšná. Při rozhovoru nad úlohami několikrát zmínila, že toto už „ví, umí“ zpaměti. Ani s ní se nijak blíže neznám.

Rozhovor s řešiteli Petrou a Ondrou probíhal současně, protože oba svou práci ukončili zhruba ve stejný čas.

Analýza: Rozhovor s Petrou pro mne téměř zcela postrádal interakční úroveň. Z nějakého důvodu se nažila své pocity skrývat a jen málokdy dala najevo radost či jinou emoci. Hlavně při kontaktu se mnou. Možná je introvertní typ a nebo to bylo tím, že se skoro neznáme. Napadá mne, že to mohlo být ještě posíleno tím, že „experiment“ pro ni může být něco závažného a ona působila velmi zodpovědně, takže nechtěla takový (pro ni) vážný moment narušovat projevy, které mohou působit nepatřičně.

Na začátek bych chtěla zmínit Petřin způsob počítání. Při sčítání či odčítání postupuje tak, aby si práci co nejvíce usnadnila – používá kalkulativně úspornou strategii. Pokud přidává či ubírá, snaží se rozdělit si tato čísla tak, aby jí po přičtení či odečtení od základu vyšlo nějaké „pěkné, kulaté“ číslo, se kterým se lépe pracuje, a k němu pak teprve přidává, nebo od něj ubírá zbytek. Tento způsob je velmi výhodný pro svou přehlednost, řešitel si však musí dávat pozor na to, aby nezapomněl připočítat i onen vzniklý „zbytek“.

Po rozboru první úlohy jsem se obou řešitelů zeptala, zda by šla tato úloha počítat i z jiného místa, než kde oba začali. Petra, zřejmě ovlivněna zkušeností z poslední úlohy, kdy musela řešení vypátrat, odpověděla, že ano, ale že by se nám nemuselo podařit úlohu vypočítat (vstup Petra 2).

Myslela tím, že pokud bychom úlohu začali řešit z jiného místa, museli bychom doplněná čísla tipovat a hrozilo by, že bychom řešení nenašli. Uvědomuje si tedy, že úlohy, u kterých jsou dány dva sousední údaje (např. stav a sousední operátor) je rozumné řešit právě z tohoto místa. Tím, že postupujeme od minimálně dvou známých údajů k neznámým, minimalizujme případný omyl. Začínat v místech, kde je znám pouze jeden údaj, je riskantní. Pokud ale nemáme jinou možnost (jako např. u úloh z 5. kategorie) ani předchozí zkušenost se stejným typem úloh, musíme řešení hledat metodou pokus/ omyl.

Když při společné debatě o třetí úloze vyšlo najevo, že se spolužák Ondra zmýlil, dala najevo, že ona chybu neudělala (vstup Petra 4). Nevím, zda to mělo být pouhé konstatování, mírná zlomyslnost či projev úlevy, na to ji dobře neznám a z jejího výrazu se nedalo mnoho poznat. V momentě, kdy však musela odkrýt, že v průběhu svého počítání u jiné úlohy taktéž chybovala, byla tímto odhalením mírně zahanbená a snažila se raději vyzdvihnout jiný svůj úspěch, kterým zřejmě chtěla odvést pozornost od svého předchozí zaváhání (vstup Petra 7).

Petra k chybě, podle mne, přistupuje poněkud jinak než její spolužák. Neumí s chybou kriticky pracovat. Chyba je pro ni něco, co by se raději nemělo stávat. Řešení, které bylo zcela „bezchybné“, je pro ni cennější než to, kde řešitel chyboval, i když se po tom dokázal zcela opravit a vysvětlit, jak k omylu došlo.

Petra měla, jak sama zmínila, u poslední úlohy štěstí, když již při druhém pokusu náhodně zvolila číslo 6, které bylo řešením úlohy (vstup Petra 7 a 8). Nestihla tedy, tak jako její spolužáci, při pátrání poodhalit jisté souvislosti, kdy cílenou volbou větších či menších čísel v počátku trojúhelníku a díky tomu postupným zmenšováním rozdílů obou cest, dospěli postupně k řešení.

U Petry se díky tomu, že poslední úlohu vyřešila velmi záhy, bohužel nedaly vypozorovat žádné další řešitelské strategie, které využívá.

Nicméně, v oblasti evidenční je tato dívka velmi zdatná. Dokázala své postupy popsat do nejmenších detailů. Odpovídala vždy precizně.

4.3 Analýza 3. experimentu

1/ Kryštof

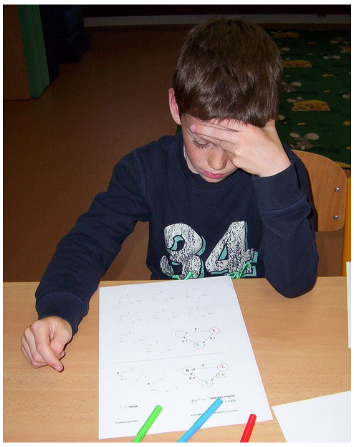
Stručná charakteristika řešitele: (od třídní učitelky 2.B, Mgr. Evy Jenšíkové)

Kryštof je přátelský, ctižádostivý chlapec, v neznámém prostředí zamlklý. Rychleji myslí, než mluví, někdy je zbrklý, v úsudku bystrý. V matematice chybuje málo, protože ji miluje. Vždy první odpovídá, má dobré kombinační myšlení a logický úsudek. Při zbrklém čtení udělá chybu i v matematice. Pokud řešení hledá, osvojil si a používá výraz pokus/omyl. Velmi často řekne správný výsledek, ale už hůře popisuje cestu řešení.

Úvod: Když jsem si pro děti z 2.B přišla, paní učitelka svůj výběr doprovodila slovy, že mi posílá „matematikáře" Kryštofa. Chtěla tím asi zdůraznit, že Kryštof je v matematice opravdu dobrý a možná ho i trochu povzbudit, aby se ničeho nebál, když přece ve třídě patří k těm, kteří bývají povětšinou úspěšní. Kryštofa neznám vůbec, ani od vidění ze školní družiny, tak jako znám ostatní děti z jiných tříd.

Kryštof opravdu po celou dobu pracoval poměrně rychle, bez nejmenšího zaváhání dokud nedospěl k poslední úloze.

Před tím, než ji začal řešit, jsem jej znovu upozornila, že tato úloha je trochu jiná, než ty předchozí, že možná nepůjde vyřešit tak snadno. Připomněla jsem mu, ať zkouší doplňovat čísla nejprve do malých trojúhelníků, a až když najde řešení, ať ho pak přepíše do trojúhelníku velkého. V podstatě mi dal najevo, že to nemusím znovu opakovat a abych ho nerušila. Nechala jsem ho tedy pracovat a jen ho pozorovala.



Než se Kryštof do úlohy pustil, dlouho se nad ní skláněl a přemýšlel, aniž by si cokoliv zapsal. Pak se usmál, vzal červenou fixu a přímo do levého vrcholu velkého trojúhelníku zapsal číslo 2. Po té si vzal modrou fixu, do horního vrcholu zapsal číslo 7 a pak se přestal usmívat a zůstal na úlohu nevěřícně koukat. Opřel si čelo a v této pozici (viz. následující fotografie) zůstal bez hnutí sedět několik minut.

Po chvíli, která mi připadala už docela dlouhá, jsem k němu opět přistoupila a řekla mu, že na další pokusy, jak tuto úlohu řešit tam má ještě spoustu místa.

Aniž by se na mě podíval, přikývl a po další chvilce přemýšlení začal zkoušet do úlohy doplňovat i jiná čísla.

Z rozhovoru pak vyplynulo, že opravdu čekal, že hned napoprvé úlohu vyřešil, a proto určitě i svůj první pokus zapsal hned do velkého trojúhelníku.

<u>Analýza:</u> Kryštof má nižší schopnost sebekritičnosti. V situaci, kdy poznal, že se zmýlil a správné řešení ihned nenašel, vypadal velice šokovaný. Myslím, že tak dlouho strnule seděl proto, protože hledal důvod, proč mu úloha nevyšla, když si ji před tím nejspíše zkusil vyřešit v hlavě a při tom měl pocit, že je vše v pořádku, a pak také uvažoval nad tím, jak se mu to vůbec mohlo stát. Je zřejmě svým okolím hnán kupředu, podporován za každou cenu a každý jeho případný neúspěch se bagatelizuje. Nejspíše proto žije v domnění, že je neomylný či nejlepší ze třídy. Když byl nyní vystaven napospas své vlastní chybě navíc před cizí osobou, ženou, potřeboval velmi dlouhý čas na emotivní vyrovnání se se svým selháním.

Nicméně potom, co jsem se mu snažila dát najevo, že to nevadí, že neúspěšné řešení zapsal tam, kde mělo být to správné, a že má možnost dalších pokusů, se trochu zkoncentroval a pracoval dál.

K jeho „šoku“ mohlo přispět i zdůraznění jeho kvalit v době těsně před experimentem jeho třídní paní učitelkou. Možná, že tato pro něj velmi nepříjemná a nečekaná zkušenost vedla k tomu, že v rozhovoru pak téměř vůbec nedokázal popsat, jak při řešení úloh postupoval.

Zajímavý je proto až závěr našeho společného rozhovoru, kdy jsme se bavili právě o poslední úloze. Po svém prvním neúspěšném pokusu, kdy Kryštof zkusil doplnit číslo 2, tedy ještě dlouho uvažoval, a pak začal doplňovat vysoká čísla – začal 11. Podle svých slov proto, aby pak mohl postupovat k nižším číslům. Jeho strategie tedy byla určit si jakousi hranici, kterou vymezil své příští pokusy. Jako další číslo ovšem nevyzkoušel 10, ale až 9. K tomu v podstatě řekl, že rozdíl obou cest vedoucích ke konci grafu by byl stejně příliš velký (vstup Kryštof 30). Objevil se tu tedy jakýsi odhad následující skutečnosti.

Z rozboru pokusu s číslem 9 je jasně vidět, že už opravdu začal uvažovat o velikosti rozdílu obou cest, který se v tuto chvíli lišil o 3 (vstup Kryštof 31). Dokládá to i jeho další komentář k jeho pokusu s číslem 8 (vstup Kryštof 32), kdy si všiml, že nyní se rozdíl snížil jen o 1. Díky tomuto svému postřehu - souvislosti rozdílu obou cest a prvního dosazeného čísla - dospěl rychleji ke správnému řešení (vstup Kryštof 32).

Kryštof asi nejlépe ze všech řešitelů pronikl do strategie řešení této úlohy. Uvědomil si, že rozdíl obou cest na konci grafu nesmí být žádný, a proto musí první doplňované číslo zvýšit právě o velikost onoho rozdílu, aby jej vyrovnal.

Tento žák má opravdu velmi dobré matematické myšlení, jeho exekutivní úroveň myšlení je velmi vysoká. Naproti tomu, úroveň evidenční značně zaostává. Téměř nebyl schopen zpětně doložit a vzpomenout si, jak při řešení postupoval, a to ani podle barevného značení.

Kryštof by potřeboval častěji rozebírat situace, kdy se zmýlí – měl by zkoušet popsat, co se stalo a proč. Pokud se však jeho neúspěchy zlehčují a jsou zatlačovány do pozadí vyzdvihováním úspěchů, půjde to těžko.

Tomuto žáku by prospělo, kdyby měl rovnocenného konkurenta, který by mu ukázal, že nemusí být pořád „na špici" a že ti „nejlepší" nejsou nejlepší proto, že nikdy nechybují a že zmýlit se není něco nepřípustného. Jinak bude totiž nepříjemná vystřízlivění z pocitu své neomylnosti zažívat často a ta jej pak mohou úplně odradit (nejen) od matematického zkoumání.

2/ Markéta

Stručná charakteristika řešitele: (od třídní učitelky 2.B, Mgr. Evy Jenšíkové)

Markéta je veselá kamarádská holčička, otevřená domluvě. Není tak rychlá a pohotová v myšlení jako Kryštof. Nalézt řešení jí trvá déle, ale nevzdává se a většinou dokáže popsat, jak k řešení došla. Má velmi dobré orientační schopnosti a ráda řeší v matematice linky autobusů. V ČJ chybuje častěji, ale jsou to chyby z nepozornosti. Matematiku má ráda a z každého úspěchu se raduje.

Úvod: Markétina třídní paní učitelka chtěla původně pro experiment vybrat jinou žákyni ze své třídy – podle jejích slov zkušenou „matikářku“, ale ta zrovna onemocněla a tak ke mně přišla Markétka.

S Markétkou se znám od vidění z anglické družiny, která je v odpoledních hodinách umístěna v mé kmenové třídě. Takže, když se po vyučování připravuji na další den, vídáme se a Markéta se občas vyptává, co dělám a proč, zajímá se, co připravuji a k čemu to budeme s dětmi používat.

Markéta si při počítání často pomáhala dopočítáváním na prstech, což je v metodice matematiky, kterou používáme povoleno.[17] Při řešení úloh proto nepostupovala tak svižně jako Kryštof, na rozdíl od něj však dokázala zcela přesně říci i názorně předvést, jakým způsobem konkrétní úlohy řešila.

Analýza: Z rozhovoru experimentátorky s Markétou je znát silný souzvuk v interakční rovině.

Při rozboru první úlohy jsem se ujišťovala, jestli správně chápu její způsob dopočítávání. Názorně jsem předvedla, jak to mohlo vypadat, ale neukázala jsem celý proces dopočítávání součtu (18 + 6), ale pouze jeho začátek. Markétka měla potřebu v dalším vstupu (Markéta 2) tuto informaci o svém výpočtovém postupu doplnit do konce. Také mne informovala, že následující výpočet (8 $\cdot$ 3) si pamatuje zpaměti. Ale hned vzápětí dodala, že ještě neumí všechny násobky. Její reakce tedy měla dvě části – část informační, kdy

[17] HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: příručka učitele pro 2. ročník základní školy*. Plzeň : FRAUS, 2008

referovala o svém výpočtovém procesu. A část sociální – upozornila mne, že nesmím mít příliš velké očekávání, co se týče její znalosti násobilky.

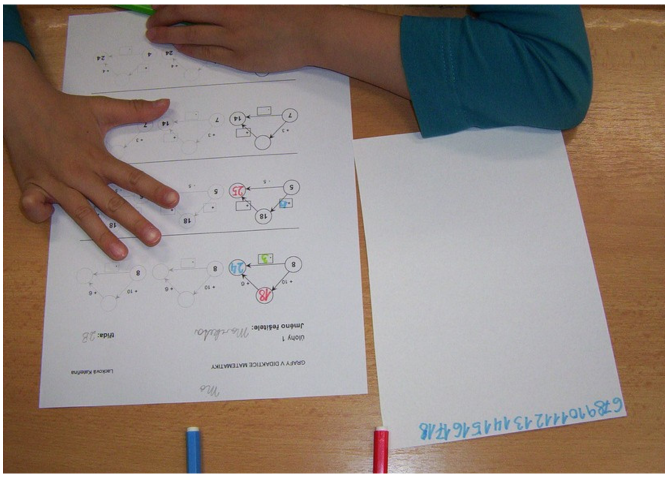
Markéta mne tedy nechtěla zklamat, což ukazuje na sociální prvek její inteligence.

Po rozboru první úlohy jsem se Markéty, stejně jako ostatních řešitelů, zeptala, zda by ji mohla počítat i odjinud. Myslím, že Markéta neuvažovala o tom, zda by se úloha dala řešit odjinud (vstup Markéta 3), ale čistě ze svého pohledu usuzuje, že je lepší začít těmi jednoduššími (menšími) čísly, se kterými je přece jen snazší počítání a až pak se soustředit na čísla větší. Možná, že toto je její obecně preferovaná strategie – začínat lehkým.

U druhé úlohy Markéta využila pomocný list papíru, na který si postupně napsala čísla od 6 do 18 (viz. následující fotografie). Měla totiž vyřešit vztah 5 (+ ?) = 18.

Je zřejmé, že Markéta si ještě není úplně jistá v početních operacích sčítání do 20, ale na druhou stranu si pamětně osvojila některé spoje násobilky, což dokázala i v dalších úlohách.

Jako učitelka bych ocenila, že si dokázala poradit a k výsledku se dobrat. Nepanikařila, nebylo jí úzko, že u sebe nemá pomůcky, na které je v matematice zvyklá – prostě si číselnou osu sama vytvořila. Navíc pracovala i úsporně – zhotovila si pouze tu konkrétní část, kterou zrovna potřebovala.



Zbytek úlohy (vztah 18 (+ ?) = 25) dopočítala na prstech (ilustrace tohoto je na fotografii).

Je zajímavé, jak se Markéta na čísla dívá. U poslední úlohy (vstup Markéta 13) popisuje vztah 7 + 5: „Kdyby 7 + 5 bylo 13, tak by to vyšlo“ zní, jako kdyby se čísla mohla rozhodnout, jaký součet spolu dají podle toho, jak by se nám to hodilo. Markéta v mysli ještě nemá ukotvenou představu vztahu 7 + 5 = 12.

I když Markétě řešení této úlohy na první pokus uteklo jen o 1, k následujícímu řešení to nijak nevyužila. V průběhu zamýšlení se nad touto úlohou se u ní však přece jen objevila jistá potřeba své pokusy systematizovat a zpřehlednit. Čísla 4, 5, 6 už použila v tomto pořadí. Když jsem se zeptala proč, odpověděla, že kvůli lepší orientaci v číslech (vstup Markéta 17). Tím, myslím, chtěla vyjádřit, že tak bude mít lepší přehled o tom, jaká čísla už použila. Takže se objevuje strategie systematického doplňování čísel.

Markéta sice nemá vyvinutou exekutivní úroveň myšlení tak, jako její spolužák, ale v oblasti evidenční jej naopak jasně předčí.

Tato žákyně zná své limity a nedělá si o sobě nereálné představy. I když ví, že nezná všechno, snaží se udělat maximum, co jí její mozek dovolí. Navíc je praktická - umí si poradit a je velmi sociálně zdatná – v oblasti interakční svého spolužáka taktéž převyšuje.

Shrnutí:

Většina řešitelů dokázala, že umí (někdy i velmi dopodrobna) zpětně popsat své postupy a myšlenky, které je při řešení úloh doprovázely.

Je to díky tomu, že popis postupu svého řešení učiteli či všem ostatním je každodenní součástí vyučování matematiky těchto dětí. Díky tomuto „tréninku“ je tak většina žáků schopna více či méně podrobně referovat, jak ke konkrétnímu řešení dospěli. Dovedou říci, co se jim povedlo a co ne a proč, co je posunulo a co naopak přibrzdilo, jakou strategii použili nebo jaká je zavedla na scestí. Umí zhodnotit, co je dobré mít na paměti pro příště a na co si dát pozor.

Tato schopnost je velice důležitá a cenná, protože jednak učí řešitele samotné – umět se ohlédnout, zhodnotit použité postupy a vybrat ty, které se mohou hodit pro příště. A pak – dovednost popsat svou účinnou strategii je velmi přínosná i pro ostatní spolužáky, které může při společné diskuzi posunout a jejich vlastní cestě při hledání nějakého řešení.

Téměř u všech řešitelů se také u poslední úlohy dříve či později objevila potřeba své pokusy nějak zpřehlednit, postupovat více či méně systematicky.

To je, podle mého názoru, důsledek předchozích zkušeností, kdy tito žáci při matematice musí hledat řešení různých úloh metodou pokus/omyl. Vytvořili si tak základy jistých návyků či strategií, které jim mají pomoci při řešení a usnadnit práci. Myslím si, že to je také známka jejich jisté pokročilosti či vyspělosti coby řešitelů.

Závěrečné shrnutí:

Při svých vlastních pokusech proniknout do úloh tohoto typu jsem se stále snažila najít něco složitého a kombinovala různé souvislosti čísla x s operátory a a b. Nakonec jsem sice přišla na řešení obecných rovnicových šipkových grafů „trojúhelník“ a na pravidlo jejich tvorby, ale šla jsem na to velkou „oklikou“, příliš složitě a přitom stačilo v podstatě to, co udělal Kryštof – vzít rozdíl obou cest a přidat jej k právě zkoušenému číslu.

Díky Kryštofovi jsem se na úlohy podívala znovu, tentokrát jeho očima, a došla k dalším zjištěním, která mohou být cenná jako strategie pro řešitele úloh šipkového grafu „trojúhelník“, a to těmto:

Při prvním pokusu je třeba zjistit rozdíl obou cest vedoucích ke konci grafu. Tento rozdíl pak stačí přidat k prve zkoušenému číslu a tak získáte řešení grafu.

Pokud je výsledek „dolní“ cesty ($x \cdot 2$) vyšší než výsledek „horní“ cesty ($x + a + b$) rozdíl těchto cest je nutné od zkoušeného čísla naopak odečíst.

Takto to platí pouze u grafu trojúhelník, ve kterém je operátor c roven 2. Pokud je operátor c vyšší, musí se daný rozdíl obou cest nejdříve vydělit ($c - 1$) a až po té k číslu x přičíst či od něj odečíst dle předchozího pravidla.

Myslím si, že pokud by úlohy tohoto typu byly náplní matematiky ve 3. ročníku a pokud bychom se jejich řešení věnovali v průběhu dostatečně dlouhého času, děti by mohly tyto strategie ještě jednodušším způsobem formulovat samy.

5. kapitola: Sebereflexe

Abych mohla přehledně zreflektovat celý průběh vzniku své diplomové práce, rozhodla jsem se následující sebereflexi rozdělit do tří oddílů:

1/ Já jako řešitel – kde bych chtěla popsat vývoj této své role v kontextu ke svému vztahu k matematice a shrnout své pocity a úvahy při řešení zadaných úloh a při psaní následných komentářů k nim,

2/ Já jako učitel – zde zhodnotím sebe sama v roli pedagoga při provádění popsaných experimentů s dětmi,

3/ Já jako student – a v tomto oddíle bych ráda uvedla své nálady a stavy, které mne provázely při psaní této diplomové práce.

1/ Já jako řešitel

Než se vyjádřím ke svým řešitelským úspěchům a neúspěchům, měla bych nastínit vývoj svého vztahu k matematice, protože ten s rolí řešitele neodmyslitelně souvisí.

Svůj vztah k této vědě od raných počátků svého dětství až po nástup na VŠ jsem detailně popsala ve své eseji z prvního ročníku Můj postoj k matematice[18]. Těsně po nástupu na VŠ byl tedy můj vztah k matematice na úrovni tiché nenávisti a trpění nutného zla. Stav, který je naprosto nevhodný pro člověka, který jednou bude muset matematiku učit a zajistit, aby z ní jeho žáci nepropadali a pokud možno ji ne přímo nenáviděli. Byla jsem opravdu zvědavá, jakým způsobem nás chtějí na VŠ přimět, abychom matematiku zvládali a ještě pokud možno s nadšením, které bychom poté přenášeli na své žáky, protože matematika je vesměs nejméně oblíbeným předmětem ze všech.

Přístupem většiny matematiků na zdejší katedře jsem byla opravdu překvapená – příjemně překvapená. Nejen, že nás nikdo nenutil do počítání nesmyslných úloh, kterým bychom nerozuměli, my jsme si hráli!

Od prvního matematického kurzu Úvod do studia matematiky 1 a 2, který celkově nový vztah a přístup k matematice nastartoval, přes Aritmetiku a

---

[18] Esej **Můj postoj k matematice** je přiložena v Příloze č. 14

Geometrii, Metody řešení matematických úloh, až po Didaktiku matematiky 1, 2, 3, včetně nepovinných kurzů jako Hry v matematice na 1. st. a Individuální přístupy k žákům v matematice a kurzů homogenní varianty studia matematiky jsme dostali možnost matematice porozumět a nalézt k ní kladný vztah. Při všech těchto seminářích nám byly předloženy úlohy takové obtížnosti, abychom se necítili hloupě, že na ně nestačíme, ale zároveň to nebyly úlohy primitivní, abychom se s nimi přece jen trochu potrápili. Úlohy byly zábavné i méně zábavné, ale vždy takové, na kterých jsme si uvědomili, jak cenné je přijít si na jejich řešení sám. Poznali jsme, jaký to má pro nás význam – logicky jsme uchopili úlohy, které nám celé předchozí studium činily potíže.

Musím ocenit, že z nás tito kantoři a vedoucí kurzů nechtěli mít matematické génie a nenutili nás zabývat se problémy, se kterými se na prvním stupni ZŠ stejně nikdy nepotkáme. O to víc se zaměřovali právě na problematiku matematiky v rámci mladšího školního věku.

Za sebe musím říci, že se můj postoj k matematice od nástupu na VŠ zcela změnil. V průběhu postupného proplouvání studiem matematiky jsem pochopila, co nám chtějí vyučující o matice sdělit, v čem je její smysl a podstata, jako vyučovacího předmětu, a jak by se měla učit a také jak rozhodně ne. Také jsem během těch pěti let zjistila, že jsem si matematiku velice oblíbila. A to dokonce natolik, že z didaktiky matematiky píši diplomovou práci. Myslím, že je to hlavně velký úspěch zdejších pedagogů a důkaz jejich učitelského mistrovství.

S proměnou mého postoje k matematice samotné se tedy měnila i má role řešitele. Dříve, při počítání úloh (na ZŠ i SŠ), bych sama sebe takto ani nenazvala. Nebyla jsem řešitel – byla jsem stroj. Stroj, který nabiflovaným způsobem, jenž nám žákům někdo předložil, vyplňuje čísla do daných vzorců, kterým jsem ale vůbec nerozuměla. Vyřešit úlohu pro mne znamenalo ji bezchybně vypočítat a dostat jedničku. Nikdy před tím jsem nemusela hledat více možností řešení a už vůbec nepřicházelo v úvahu najít jiný způsob, jakým je možné stejnou úlohu vypočítat.

V eseji z 1. ročníku si mj. můžete přečíst, jak mne naopak jiný způsob řešení, kterým mi coby malé školačce chtěl můj tatínek rozšířit obzory, vyváděl z konceptu, jak jsem se mu bránila a nechtěla o tom ani slyšet. Bylo to jednak proto, protože jsem na hledání a objevování různých cest nebyla absolutně zvyklá a pak také, postup, kterým jsem byla schopná něco spočítat, jsem měla naučený (čili pouze pamětně osvojený), a když mi chtěl tatínek ukázat jiný, bála jsem se, že bych ten původní zapomněla nebo by se mi oba spletly dohromady a pak už bych tu jedničku určitě nedostala.

Až na VŠ (což je na jednu stanu velmi smutné) jsem zažila ono hledání řešení, zkoušení různých možností, objevování, zažila jsem si, co to znamená pátrat metodou pokus/omyl – konečně jsem začala fungovat v roli řešitele. Toho, kdo díky svému vlastnímu zkoumání a úsilí dokáže nejen najít řešení jedné úlohy, ale právě díky tomu procesu, který nalezení řešení předchází, si dokáže v mysli formovat jisté řešitelské strategie a systematické postupy, jež může využít i pří dalších úkolech.

Jak je zřejmé, role řešitele se mi velmi zalíbila. Najednou jsem zjistila, že se matematiku nemusím učit zpaměti, ale že ji mohu pochopit a díky tomu mne začala bavit. Zjistila jsem, že mi přináší radost zkoumat a zkoušet vypočítat nějaký záludný matematický problém a nedá mi to, dokud nepřijdu na to, jak na něj.

I řešení zadaných úloh pro tuto diplomovou práci jsem si užívala – tedy ve chvílích, kdy se něco začalo rýsovat, kdy jsem měla nějaký objev nadosah. Pokud jsem však měla dojem, že dlouho nemohu na nic přijít (jako u první zadané úlohy v prostředí rovnicového šipkového grafu), objevila se jistá skepse a pocit méněcennosti. Jak může někdo, kdo nevyřeší ani takovouhle úlohu, psát diplomovou práci z matematiky? Co jsem si to myslela?

Když se ale naopak dařilo a zvlášť, když jsem měla pocit, že jsem kromě objevu jistých zákonitostí dokázala toto pravidlo i „matematicky“ zapsat – v podobě čísel a vzorců – měla jsem dobrý pocit a byla jsem sama na sebe pyšná. Samozřejmě, každý matematik by mne hned usadil a vrátil na zem, ale já se alespoň pro ten okamžik cítila jako úspěšný řešitel.

Uvědomuji si totiž, že právě s obecnou formulací mám problém. Umím vysvětlit, na co jsem přišla a myslím, že dobře – i tak, aby tomu porozuměly malé děti – ale většinou prostě nedokážu objevenou zákonitost převést do jazyka matematiky.

Tento můj problém má, podle mého, kořeny již na ZŠ. Když nám tehdy někdo z učitelů (zvláště pak na 2. stupni) ukazoval nějaký vzoreček a předváděl, jak ho vyplnit, měla jsem pocit, že to vymyslel nějaký velmi chytrý člověk někde nahoře a já nemám za úkol mu porozumět (to by ani nešlo a ani se to ode mne nečeká), ale jen se ho naučit zpaměti a umět do něj dosadit.

Takže, když jsem nyní, během řešení úkolů pro tuto diplomovou práci, pro sebe objevila něco, co už sice někdo mnohem moudřejší dávno vymyslel, ale já si na totéž přišla sama a ještě to matematicky zapsala, měla jsem pocit vítězství sama nad sebou.

Všechny tyto mé zkušenosti v roli žáka a řešitele jsou mi velkým poučením do vlastní praxe. Myslím, že „moje děti", kterým nyní dělám paní učitelku, ten pocit, že něčemu nemusejí rozumět a učit se něco zpaměti, nemají (hlavně v matematice) téměř šanci zažít. Stále něco zkoumáme, hledáme různé způsoby řešení, strategie, jak si práci usnadnit – jak počítat „chytře". Často se setkáváme s tím, že má úloha více různých či žádné řešení a zjišťujeme, proč tomu tak je nebo zda už jsme našli všechny možnosti, a argumentujeme, proč si myslíme, že už jsme je všechny vyčerpali.

A díky všem těmto činnostem, které jsou běžnou součástí našeho společného vyučování, začínám „sklízet ovoce". Většina dětí dovede popsat své způsoby řešení a strategií a to tak, aby je pochopili i ostatní spolužáci, kteří si je pak mohou osvojit mnohem lépe, než kdybych jim, z pozice paní učitelky řekla – děti, a takhle to je a bude. Děti v mé třídě jsou si v matematice jisté tím, co dělají a proč to dělají, ptají se a vysvětlují, rády chodí představovat své objevy ostatním, umí druhému napovědět tak, aby k řešení nakonec dospěl sám. Zřejmě právě proto, že zažívají úspěchy v rolích řešitelů a že mohou samy a po svém matematiku uchopit a proniknout do ní, je tato asi nejoblíbenějším vyučovacím předmětem většiny dětí v mé třídě a překvapivě i těch, kteří jsou v matematice slabší než ostatní.

Role řešitele je proto, podle mne, pro žáky zásadní a nenahraditelná nejen pro vývoj jejich celkového matematického uvažování, ale i pro jejich budoucí vztah k matematice, který tato úloha ovlivňuje zcela pozitivně a to i v případě, že řešitel občas zažívá i velmi neúspěšné situace.

Překvapilo mne, že jsem při svých pokusech vyřešit zadané úlohy uvažovala úplně jiným způsobem než Kryštof[19] a to, na co přišel on, jsem vůbec neobjevila. Šla jsem na to od začátku úplně jinak. Zřejmě, po vnějším zásahu systematiky, kdy mi byl hned v počátku předložen přehledný způsob, jak řešení daných úloh zaznamenávat, který mi byl v tu chvíli přínosem, jsem už ale neuměla ze zavedeného systému vystoupit a zkusit to jinak, podívat se na to z jiné strany. Je pravdou, že mne pak už ani nenapadlo zkoušet řešení úloh zaznamenávat jiným způsobem, než který mi byl ukázán. To ovlivnilo i můj systém řešení těchto úloh.

Vzpomínám si, že jsem v principu podobnou situaci už zažila. Na matematickém kroužku jsme se spolužačkami dětem příliš záhy doslova vnutily jistý způsob záznamu jednoho typu úloh. A i když pak děti úlohy tohoto typu vždy podle zavedeného systému zaznamenávání vyřešily, v jistém smyslu je to na druhé straně omezilo, protože už pak nedokázaly ony úlohy řešit jiným způsobem. Bylo to něco, na co nepřišly samy a tím jim bylo znemožněno nejen do daných úloh proniknout vlastním zkoumáním, ale, jak jsem zjistila nyní, uzavřela se jim tak i cesta pro pohled z jiné strany.

Tato dvojnásobná vlastní zkušenost je pro mne, jako pro učitele, znovu varováním, abych v žádném případě dětem nikdy nic, na co si mohou přijít vlastním zkoumáním, nevnucovala. Protože i v dobré víře, že jim pomáhám, jim vlastně mohu v jistém smyslu uškodit.

[19] Analýzu řešitelského postupu tohoto žáka naleznete na str. 73 – 74

2/ Já jako učitel

Až během studia matematiky na VŠ jsem si uvědomila tuto velmi důležitou a zásadní věc, která je dnes základem mého vyučování matematice. Že je pro žáky mnohem přínosnější nebo možná přínosnější pouze to, když si na řešení úlohy a zároveň na fungující strategie vedoucí k řešení přijdou sami. Nebo – pokud na některou z nich přijdou společně se svými spolužáky, či se ji od svých spolužáků dozvědí a podle ní si pak sami svou úlohu vyřeší.

Pro někoho je toto zjištění možná samozřejmé, ale pro mne to znamenalo úplně přehodnotit svůj přístup k matematice a zapomenout všechno to, jak mě kdo do této doby matematiku učil a co mi o ní říkal. Zvyklá na to, že nám nejen na ZŠ paní učitelky vždy všechno předložily hotové, jsem se často musela doslova kousat do jazyku, abych neprozradila řešení trápícím se dětem, kterým k němu zbýval už jen malý krůček. Krůček k tomu, aby došly k pochopení. Jsem ráda, že jsem se naučila nepospíchat a řešení neprozrazovat, protože tím by konečné pochopení ztratilo na ceně – pokud by k němu vůbec došlo. Uvědomila jsem si, v čem je (nebo by asi měla být) podstata matematiky na školách: že mnohem důležitější, než nalezená řešení, je ono hledání a uvědomování si cest, které k nim vedou.

Na jednu stranu pro mne bylo velmi těžké úplně změnit dosavadní zažité přístupy, ale na stranu druhou je úžasné vidět, jak nové přístupy k žákům v matematice fungují a jak napomáhají nejen tomu, aby děti do matematiky pronikly a porozuměli jí, ale i tomu, aby si ji oblíbily.

Při přípravě experimentu jsem vycházela ze svých dosavadních zkušeností s dětmi. Dříve, hlavně při různých praxích na VŠ a i na začátku své pedagogické praxe, mi činilo problémy odhadnout, co děti určitého věku zvládnou a kolik na to asi budou potřebovat času. Kvůli tomu jsem často bývala zklamaná z nepovedené hodiny. Když jsem připravila něco, co děti zvládly příliš rychle, nebylo to tak špatné, protože jsem v zásobě mívala spousty dalších činností. Horší bylo, když jsem děti přecenila a předložila jim něco, co pro ně bylo příliš náročné. Z takového neúspěchu jsme pak byli zklamaní všichni – děti i já sama.

A čas, ten pro mne býval nejhorším soupeřem. Pravidelně se mi stávalo, že jsme nestihli práci dokončit. Ta pak, bez ukončení, shrnutí a zhodnocení, zcela pozbyla smyslu. Nejde o to, zda jsme dospěli např. k řešení úlohy, jde spíše o jakousi závěrečnou diskusi o tom, co se právě dělo, co jsme zažili, hledali, dělali. S časem jsem bojovala natolik, že jsem se bála, zda se ho vůbec někdy naučím odhadovat lépe.

Nyní, po dvou letech s jednou třídou, mohu s ulehčením říci, že zkušenější pedagogové, kteří mě ujišťovali, že to přijde s časem, měli pravdu. Mívám činnosti naplánované přesně dle zkušeností a schopností nejen třídy jako celku, ale i dle jednotlivých dětí. Vím už přesně, kdo co zvládne a co ne, a podle toho plánuji například i složení skupin. Nebo mám připraveny odstupňované úkoly. Nejslabší žáci plní jen jejich určitou část a ti nejbystřejší (tzv. rychlíci) naopak dostávají úkoly navíc. A všichni jsou spokojeni.

Také mohu s ulehčením říci, že s časem již nebojuji a jednotlivé aktivity mívám naplánovány na minuty přesně. Čas jsem se naučila sledovat a odměřovat i díky velkým hodinám, které mám nyní ve své třídě na zdi přímo naproti tabuli. Samozřejmě, stane se, že se u něčeho zdržíme déle, ale pokud to má svůj smysl, aktivitu zbytečně nekončím. Většinou se to stává u diskusí a rozhovorů – a s tím zase počítám dopředu. Je to především tím, že „své děti" znám. Už nějakou dobu spolu trávíme den co den a díky tomu mohu nejen zhruba odhadnout, jak činnost z hlediska času a náročnosti zvládnou, ale mohu jim připravit aktivitu přímo na tělo.

Díky svým zkušenostem jsem tedy daný experiment připravila s ohledem na věk a získané schopnosti žáků tak, aby se nad úlohami museli opravdu zamyslet, ale aby zároveň mohli přijít na jejich řešení. Myslím, že se mi to podařilo tak, jak jsem si plánovala. Nikdo z žáků, kteří se experimentu účastnili, nebyl zcela neúspěšný. Všichni přišli na řešení všech úloh, i když někteří občas chybovali či se s úlohami trápili o něco déle, než jiní. Myslím, že všech šest účastníků mohlo nakonec odejít s pocitem, že vykonali kus práce a že něco dokázali, něčím se obohatili. Získané zkušenosti jim mohou být přínosem nejen do dalších matematických zkoumání.

Při experimentech s konkrétními dětmi jsem se snažila přistupovat ke každému zcela individuálně – reagovat na jeho podněty, ptát se, pokud dotyčný nebyl příliš sdílný, chválit jej a povzbuzovat, zvláště když jsem viděla určitou nejistotu, dávat najevo, že chyba je to, co se může stát a co nás může posunout blíže k řešení. Snažila jsem se vše jim vysvětlit tak srozumitelně a jednoduše, abych je zbytečně nemátla. Proto jsem si připravila i scénář experimentu a jeho jednotlivé části si přesně seřadila. Vyplatilo se – děti neměly s porozuměním zadání úkolů problémy. Uvědomuji si, že nikdo z dětí se vlastně na nic znovu nevyptával – vše pochopily hned napoprvé, takže je nemuselo v práci nic brzdit.

Při rozhovoru s Danem, který neměl s popisem svých postupů sebemenší problém jsem se snažila příliš mu do jeho projevu nezasahovat. Kladla jsem především otázky otevřené, abych o jeho práci zjistila co nejvíce. V průběhu rozhovoru jsem ho nechválila, neboť ho znám a mám tu zkušenost, že je pak až příliš nabuzený a já jsem chtěla, aby mi vše vysvětlil v klidu. Také už to, že jsem si pro svůj experiment vybrala jeho a ne jiné velmi bystré chlapce, které ve třídě máme, pro něj bylo oceněním jeho kvalit a já jsem nechtěla, aby se cítil přehnaně výjimečný, protože při přílišné chvále v minulosti míval sklony se nad ostatní trochu vyvyšovat. Nicméně na konci experimentu jsem mu poděkovala za jeho práci a zároveň ocenila jeho popis vlastních řešitelských strategií.

Mája narozdíl od Dana potřebovala trochu povzbudit právě proto, že si málo věří. Při společném rozhovoru jsem ji chválila, abych jí dodala odvahu k další debatě. Také jsem ji ujišťovala o správnosti jejích rozhodnutí a postupů. Snažila jsem se navodit uvolněnou atmosféru, aby neměla pocit, že je na nějaké zkoušce. Myslím, že se mi to podařilo. Mája byla sice nervózní při řešení úloh – příliš se snažila mne nezklamat. Ale při následném rozhovoru z ní napětí spadlo a dokonce jsme se společně několikrát zasmály. Nakonec jsem jí poděkovala za spolupráci, aby věděla, že si cením toho, že se na ni mohu spolehnout. A Mája si v podstatě řekla o to, abychom podobné úlohy řešili i ve třetí třídě všichni společně. Řekla jsem, proč ne. Když děti samy od sebe touží řešit nějaké úlohy, vždy mi to udělá radost.

S Ondřejem a Petrou probíhal rozhovor současně. Během něj jsem se snažila oběma ukázat, jak je pro mne jejich analýza přínosná. Že je pro mne moc důležité vědět, jak každý z nich úlohy řešil a je cenné právě to, že oba postupovali poněkud rozdílně. Když jsme narazili na Ondrovu chybu, nedělala jsem z toho žádný závěr, zajímala jsem se pouze o to, proč si myslí, že se mu to stalo. Když Petra konstatovala, že ona v tomto nechybovala, reagovala jsem tím, že každý máme právo na chybu a raději jsem ji pobídla, aby pokračovala v popisu svých strategií. Když pak došlo na chybu Petry, opět jsem to nekomentovala a snažila se neudělat to, co ona prve Ondrovi, i když jsem k tomu měla příležitost. Místo toho jsem se snažila ukázat jí, jak by mohla příště reagovat ona, až zase nějaký spolužák přizná, že se zmýlil.

Vést rozhovor s Kryštofem nebylo vůbec snadné. Tento chlapec byl velmi skoupý na slovo a skoro se mi ani nedíval do očí. Možná byl stále zahanbený tím, že chyboval. Snažila jsem se ho proto povzbudit a vysvětlit mu, že hlavně potřebuji vědět, jak postupoval. Bohužel, úroveň jeho evidenčních schopností neodpovídala jeho úrovni exekutivní. A tak, i když při jeho řešení poslední úlohy probíhaly ty nejzajímavější momenty, málem jsem je neodhalila, protože o tom neuměl a možná ani nechtěl poreferovat.

Naproti tomu Markéta byla velmi sdílná. Protože jsem už na začátku experimentu cítila, že ona je z vybrané dvojice evidentně tou, od koho se čekají menší úspěchy, snažila jsem se ji maximálně povzbuzovat. Během rozhovoru jsem se různě doptávala, abych její odpovědi nějakým způsobem systematizovala. Na konci jsem jí poděkovala a ujistila ji, že si počínala velmi dobře.

Pokud mám hodnotit sebe sama jako učitele, myslím, že jsem si při rozhovorech s dětmi počínala profesionálně. Každá má reakce byla samozřejmě intuitivní, ale při všech jsem se snažila žáky podpořit, rozvinout jejich vlastní odpovědi či jim dát najevo svou podporu – u každého podle aktuální situace. Celkově jsem se snažila nemluvit příliš, abych pro sebe nezabrala většinu ze vzájemných dialogů.

Když vedu s dětmi rozhovor či diskusi, vždy se snažím spíše se upozadit a pouze debatu „moderovat“, doptávat se a směřovat ji. Větší část ráda nechávám na dětech. Myslím si, že tak by to mělo být a jen tak se od nich mohu něco dozvědět – když sama nebudu mluvit příliš. Nebylo snadné se toto naučit. Učitelé všeobecně mají tendence mluvit hodně. Často musím samu sebe hlídat, abych děti s něčím nepředběhla nebo jim něco příliš brzy neprozradila. Ale vyplácí se to. Dozvím se pak od dětí mnohé nečekané – i takové možnosti, na které bych sama nepřišla – a navíc je známo, že ty nejlepší nápady se objevují až později, až po vyčerpání těch očekávaných, těch, co napadnou každého jako první.

Při analyzování jednotlivých experimentů už to tak snadno nešlo. Věřím, že dokáži zaměřit důležité momenty a dobrat se jejich příčin či možných důsledků a navrhnout možné řešení jejich případné léčby, ale má analýza postrádá odbornost. Myslím si, že cokoliv odborně analyzovat je náročné a tato dovednost se dá naučit jen tak, že se člověk seznámí s analýzami někoho jiného, nebo mu někdo odborně poradí (tak jako mě), a pak to člověk bude sám častěji zkoušet. Během dlouholeté praxe a spousty provedených analýz různých situací se snad postupně zkvalitní i ona dovednost.

Jsem přesvědčena, že v průběhu let, pokud budu mít příležitost se v této schopnosti zdokonalovat, bude s postupem času má pedagogická analýza mnohem profesionálnější, než je nyní.

3/ Já jako student

Na úvod je třeba předeslat, že toto je už druhá diplomová práce, na které jsem pracovala. Tu první, pod dohledem jiného vedoucího, jsem musela z několika různých důvodů, které zcela chápu a rozumím jim, opustit a začít práci nanovo. Nestěžuji si na změnu tématu a už vůbec ne na změnu vedoucího své diplomové práce, to v žádném případě. Ale je fakt, že to, že jsem pracovala na něčem, co jsem poté musela odložit, a že jsem věnovala čas a energii na něco, co nakonec nebude potřeba, mne značně demotivovalo pro práci na diplomové práci jako takové.

Někdo může říci, že žádná práce není zbytečná a že se mi to v životě bude hodit – minimálně jako zkušenost. S tím ráda souhlasím. Ovšem, mám pocit, že jako učitel nemám času ani energie nazbyt. Cítím, že pokud chci dělat jakoukoliv práci pořádně, nemohu sedět na dvou židlích. Prostě to neumím. Někdo to zvládá, ale já bohužel ne. Když se věnuji dětem, dávám do toho sto procent své píle a energie a tak nemohu zároveň pracovat na něčem, co je stejně závažné – vím, že bych to pak neudělala pořádně. A naopak – když jsem chtěla věnovat veškerou svou snahu této diplomové práci, nemohla jsem zároveň učit. Nikdy bych si totiž nedovolila odevzdat něco, co bych neudělala pečlivě, co bych považovala za odflinknuté, za co bych se sama styděla, a také se mi to ještě nikdy nestalo.

Mohu zodpovědně prohlásit, že jsem této práci věnovala tolik úsilí, kolik jsem měla sil. Často jsem byla unavená, někdy zoufalá, stresovaná, jindy plná nápadů, a spokojená s tím, jak mi jde práce od ruky, měla jsem radost, když se mi dařilo – myslím, že totožné pocity zažívají všichni autoři při tvorbě důležitých prací. Snažila jsem se všechny zadané úkoly beze zbytku splnit a napsat vše popravdě tak, jak se to stalo a jak to vnímám. Během práce jsem se mnohokrát obracela do zkušeností ze svého studia i svého dětství a čerpala z nich důkazy pro svá tvrzení či je identifikovala jako původce svých postojů a spouštěčů pro vývoj svých názorů. Do této práce jsem vložila i své soudy, svá hodnocení a své představy. Díky ní jsem si mohla znovu připomenout spousty svých zásad a pochopit i to, kde mají své kořeny.

Uvědomuji si, že sebereflexe je důležitou součástí mé pedagogické práce, protože díky ní mohu nejen zpětně reflektovat a hodnotit své kroky jako učitel, ale mohu si připomenout i to, jaké to bylo, když jsem sama bývala žákem. Na vlastních zkušenostech si totiž nejlépe uvědomuji, co je tou pravou cestou k lepší komunikaci s dětmi, k lepší spolupráci a k lepšímu vzdělávání.

6. kapitola: Závěr

Ve své diplomové práci jsem měla možnost seznámit se s různými aplikacemi teorie grafů v didaktice matematiky. Více jsem do této problematiky pronikla prostřednictvím zadaných úloh – jejich řešením a tvorbou komentářů k nim, kterými své dílčí postupy a strategie mapuji. Během těchto řešení jsem odhalila jisté zákonitosti, jejichž znalost mi pomohla při tvorbě úloh z prostředí rovnicového šipkového grafu. Na základě těchto zkušeností jsem následně vytvořila kaskádu úloh s odstupňovanou náročností pro žáky mladšího školního věku. Tato kaskáda úloh a různé způsoby jejího řešení byly předmětem experimentů, které jsem provedla s vybraným vzorkem žáků. Rozhovory s jednotlivými řešiteli jsem po té podrobila pedagogické analýze.

V závěru své práce jsem věnovala obsáhlý prostor vlastní sebereflexi. Hodnotila jsem sebe samu v roli řešitele zadaných úloh, v roli učitele při realizaci jednotlivých experimentů a následných analýz, a také v roli studenta, který zpracovával tuto diplomovou práci.

Do budoucna hodlám ve vyučování matematiky pokračovat ve způsobu práce s dětmi, který jsem zde nastínila. Tento způsob totiž potvrzuje sám sebe – když se žákům dá možnost a prostor pro to, aby mohli matematiku pochopit vlastním úsilím, budou schopni i v mladším školním věku porozumět například takovým jevům, jako jsou různé aplikace teorie grafů.

Použitá literatura:

1. DIVÍŠEK, J. HOŠPESOVÁ, A. KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : matematika pro 2. ročník*. Praha : Prometheus, 1997
2. DIVÍŠEK, J. HOŠPESOVÁ, A. KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : matematika pro 2. ročník : pracovní sešit. 1.* Praha : Prometheus, 1997
3. DIVÍŠEK, J. HOŠPESOVÁ, A. KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : matematika pro 2. ročník : pracovní sešit. 2.* Praha : Prometheus, 1997
4. DIVÍŠEK, J. HOŠPESOVÁ, A. KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : metodická příručka k výuce matematiky v 2. ročníku základní a obecné školy* Praha : Prometheus, 1998
5. HEJNÝ, M. *Materiály k předmětu Didaktika matematiky 1 pro studenty 1. stupně.*
6. HEJNÝ, M. *Materiály k předmětu Didaktika matematiky 2 pro studenty 1. stupně.*
7. HEJNÝ, M. a kolektiv. *Teória vyučovania matematiky.* Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990
8. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. *Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 1999
9. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: příručka učitele pro 1. ročník základní školy.* Plzeň : FRAUS, 2007
10. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy. 1. díl.* Plzeň : FRAUS, 2007
11. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy. 2. díl.* Plzeň : FRAUS, 2007
12. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: příručka učitele pro 2. ročník základní školy.* Plzeň : FRAUS, 2008
13. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy. 1. díl.* Plzeň : FRAUS, 2008
14. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy. 2. díl.* Plzeň : FRAUS, 2008
15. HEJNÝ, M. JIROTKOVÁ, D. SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy. 3. díl.* Plzeň : FRAUS, 2008

16. HEJNÝ, M. KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha : Portál, 2001

17. HEJNÝ, M. NIEPEL, Ľ. *Šestnásť matematických príbehov.* Bratislava : Mladé letá, 1983

18. HEJNÝ, M. NOVOTNÁ, J. STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Díl 1.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004

19. HEJNÝ, M. NOVOTNÁ, J. STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Díl 2.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004

20. HEJNÝ, M. STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 1999

21. JANČAŘÍK, A. *Hry v matematice.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007

22. Článek v seriálové publikaci:

HEJNÝ, M. *Aby matematika nestrašila.* Učitelské noviny, 2010, č.7, s.12-13.

23. Články Hejného, Jirotkové a Slezákové v publikaci:

HOŠPESOVÁ, A. STEHLÍKOVÁ, N. TICHÁ, M. *Cesty zdokonalování vyučování matematice.* České Budějovice : Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007

Seznam příloh:

Příloha č. 1 – KASKÁDA ÚLOH: **1. kategorie: VELMI SNADNÉ úlohy**

Příloha č. 2 – KASKÁDA ÚLOH: **2. kategorie: SNADNÉ úlohy**

Příloha č. 3 – KASKÁDA ÚLOH: **3. kategorie: STŘEDNĚ OBTÍŽNÉ úlohy**

Příloha č. 4 – KASKÁDA ÚLOH: **4. kategorie: OBTÍŽNÉ úlohy**

Příloha č. 5 – KASKÁDA ÚLOH: **5. kategorie: VELMI OBTÍŽNÉ úlohy**

Příloha č. 6 – KASKÁDA ÚLOH, která byla předložena žákům k vyřešení (pracovní listy)

Příloha č. 7 – Vyplněné pracovní listy: **Daniel**

Příloha č. 8 – Vyplněné pracovní listy: **Mája**

Příloha č. 9 – Pomocný list: **Mája**
– Pomocný list: **Markéta**

Příloha č. 10 – Vyplněné pracovní listy: **Ondra**

Příloha č. 11 – Vyplněné pracovní listy: **Petra**

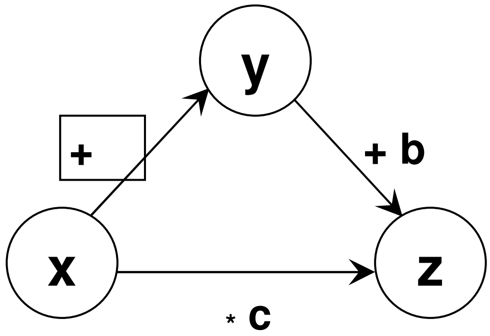
Příloha č. 12 – Vyplněné pracovní listy: **Kryštof**

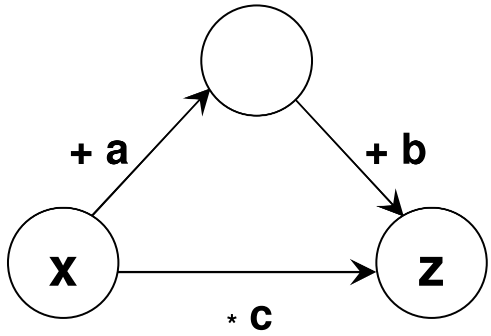
Příloha č. 13 – Vyplněné pracovní listy: **Markéta**

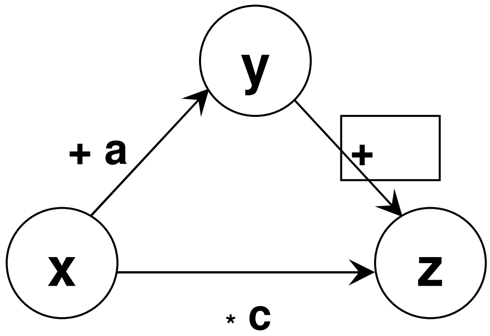
Příloha č. 14 – Esej **Můj postoj k matematice** (z prvního ročníku)

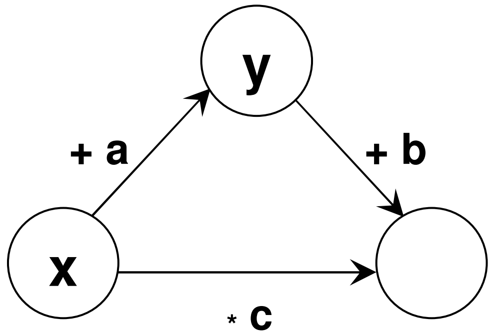
Příloha č. 1 – KASKÁDA ÚLOH: **1. kategorie: VELMI SNADNÉ úlohy**

– označení náročnosti úloh 1

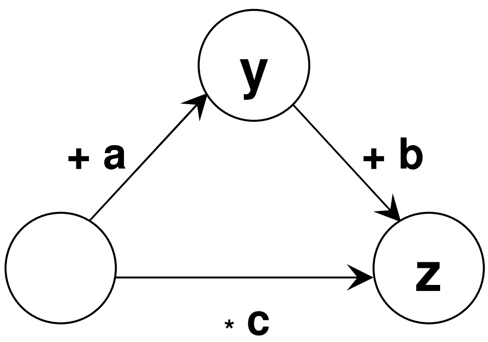


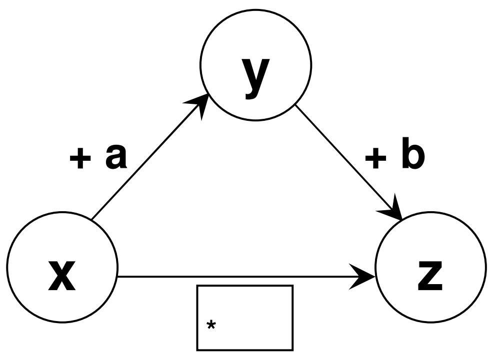






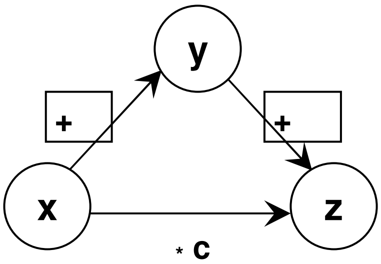
– označení náročnosti úloh 1/2

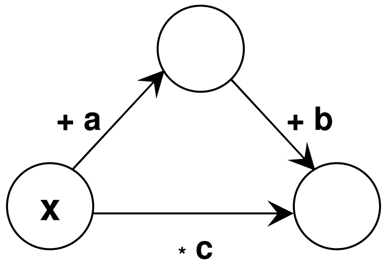


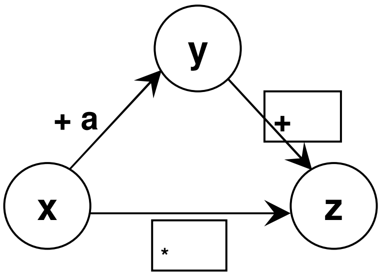


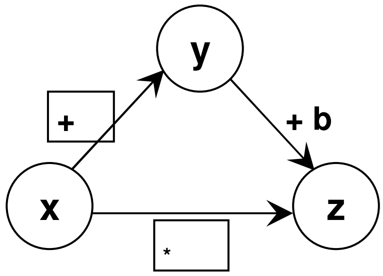
Příloha č. 2 – KASKÁDA ÚLOH: **2. kategorie: SNADNÉ úlohy**

– označení náročnosti úloh 2

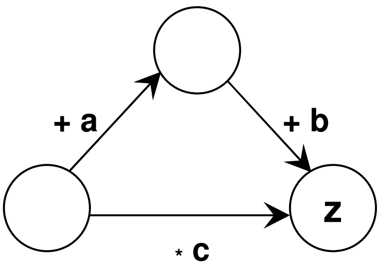


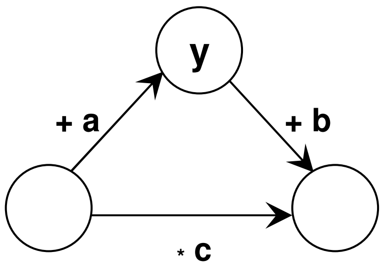


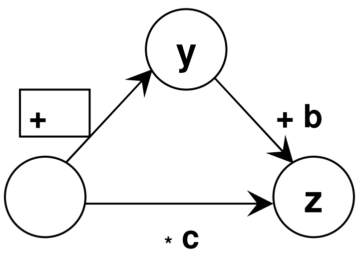


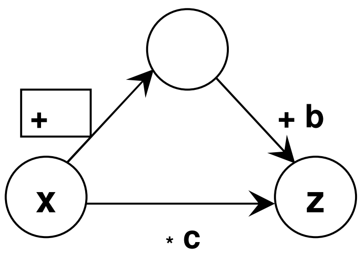


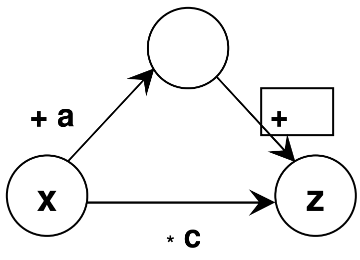
– označení náročnosti úloh 2/3

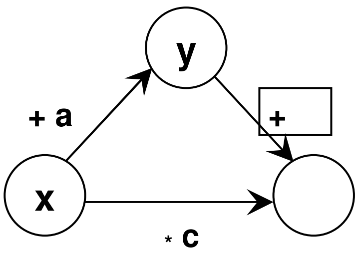


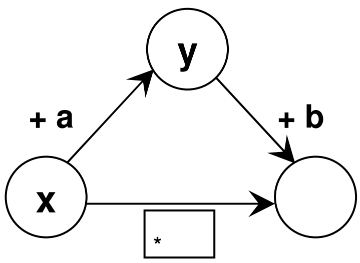


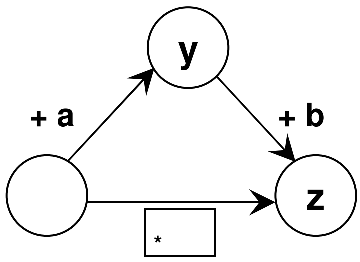






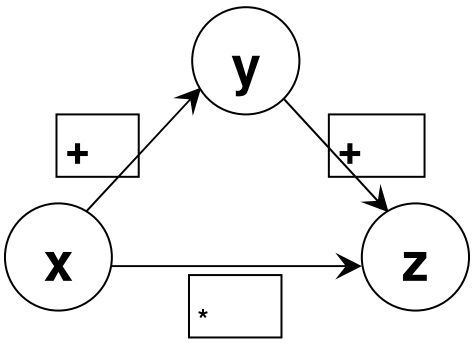


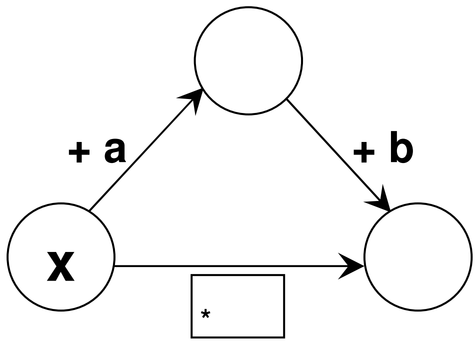


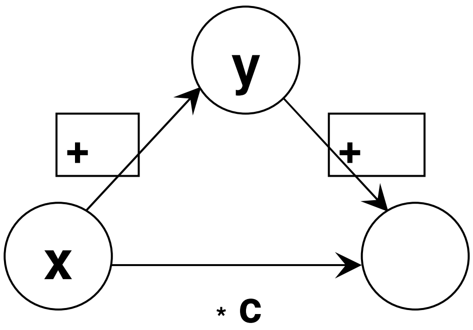


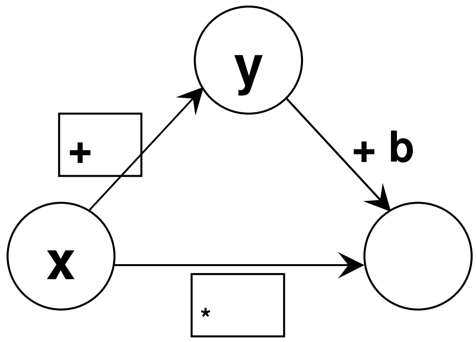
Příloha č. 3 – KASKÁDA ÚLOH: **3. kategorie: STŘEDNĚ OBTÍŽNÉ úlohy**

– označení náročnosti úloh 3

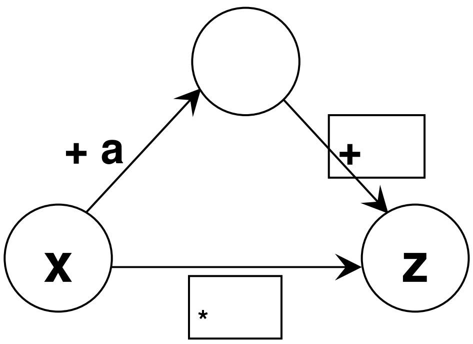


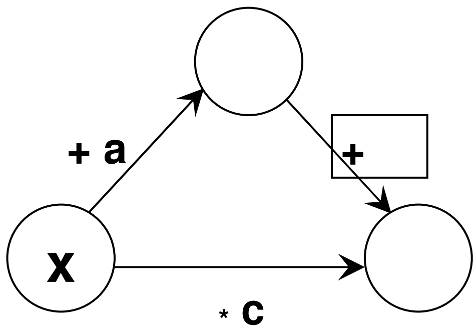


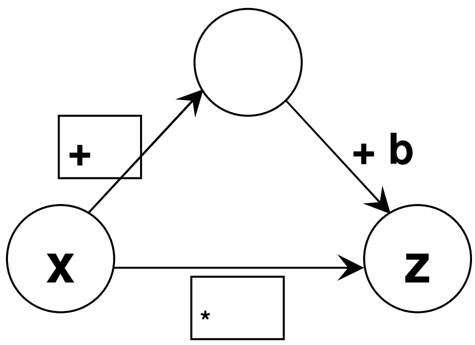




– označení náročnosti úloh 3/4

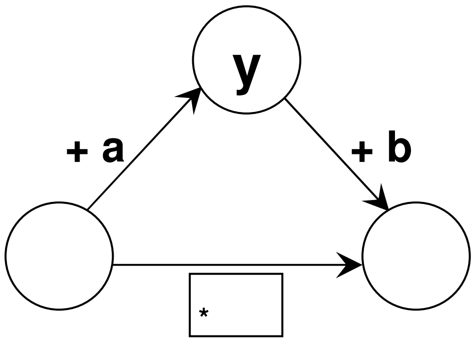


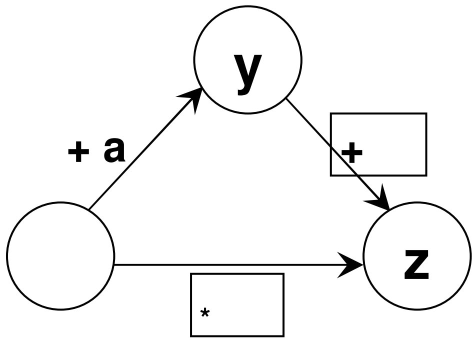


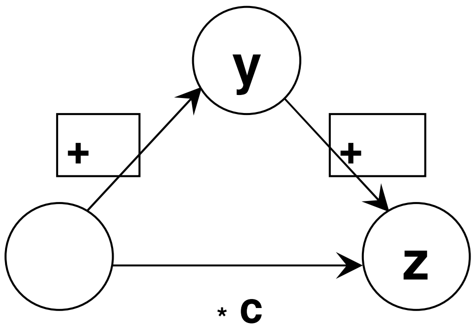


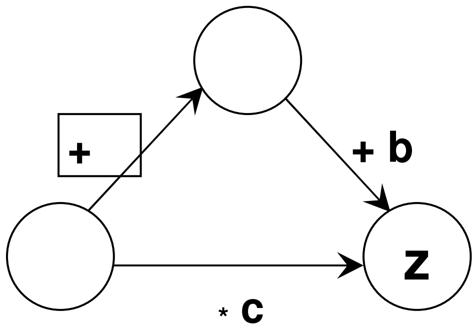
Příloha č. 4 – KASKÁDA ÚLOH: **4. kategorie: OBTÍŽNÉ úlohy**

– označení náročnosti úloh 4-

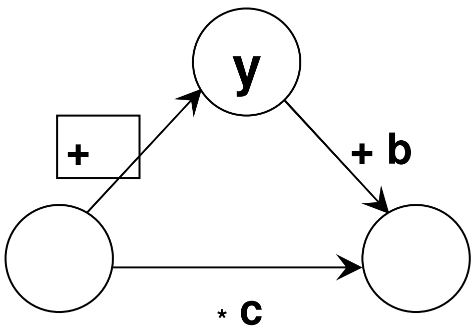


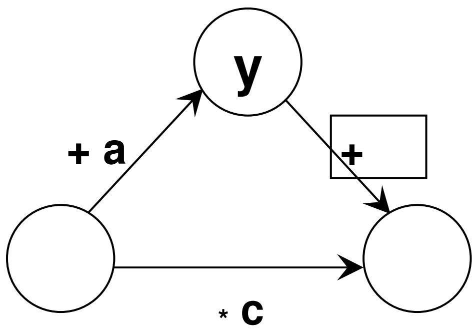


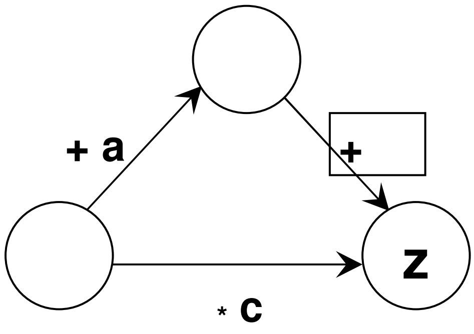


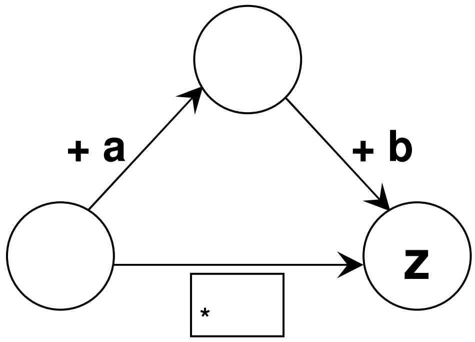


– označení náročnosti úloh 4



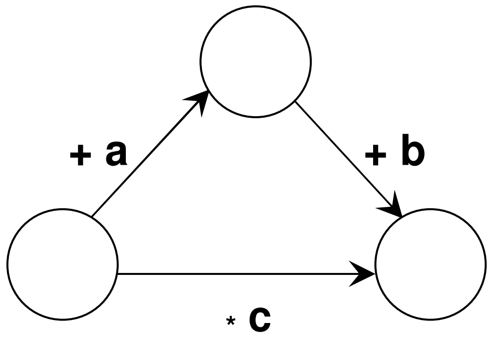






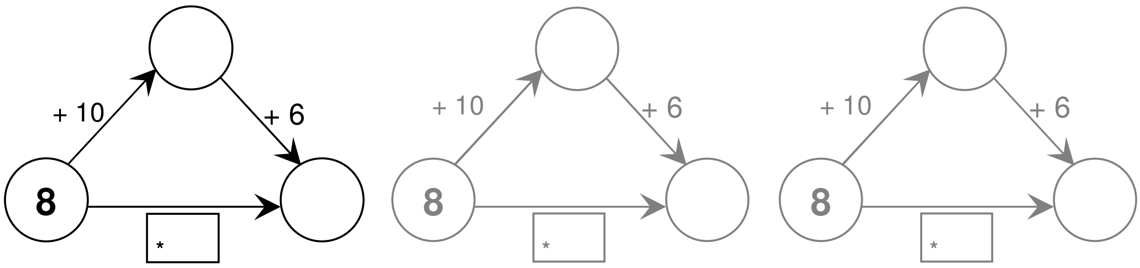
Příloha č. 5 – KASKÁDA ÚLOH: **5. kategorie: VELMI OBTÍŽNÉ úlohy**

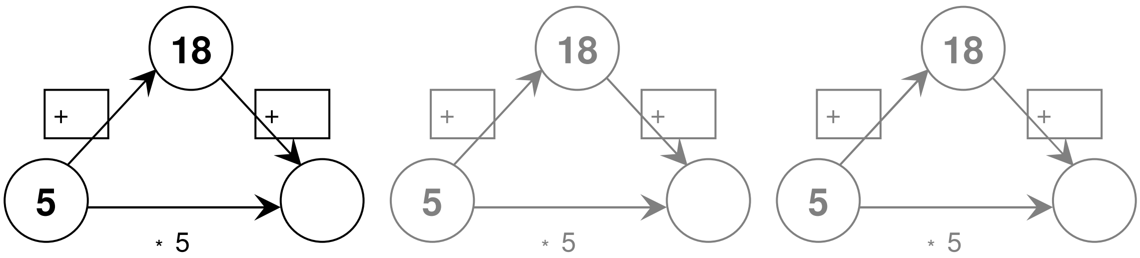
– označení náročnosti úloh 5

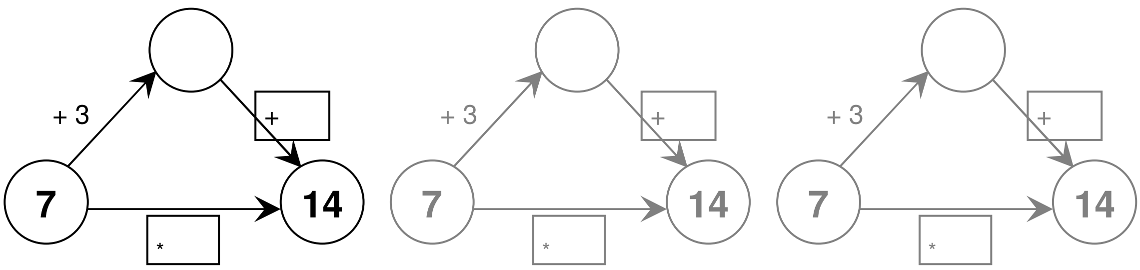


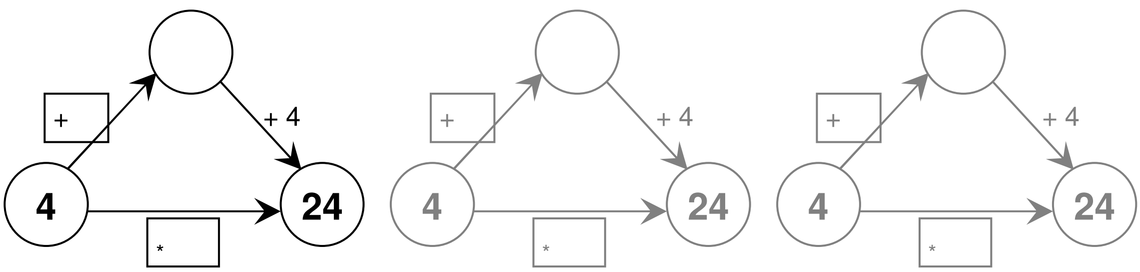
Příloha č. 6 – KASKÁDA ÚLOH, která byla předložena žákům 2. ročníku k vyřešení (pracovní listy)

– str.1





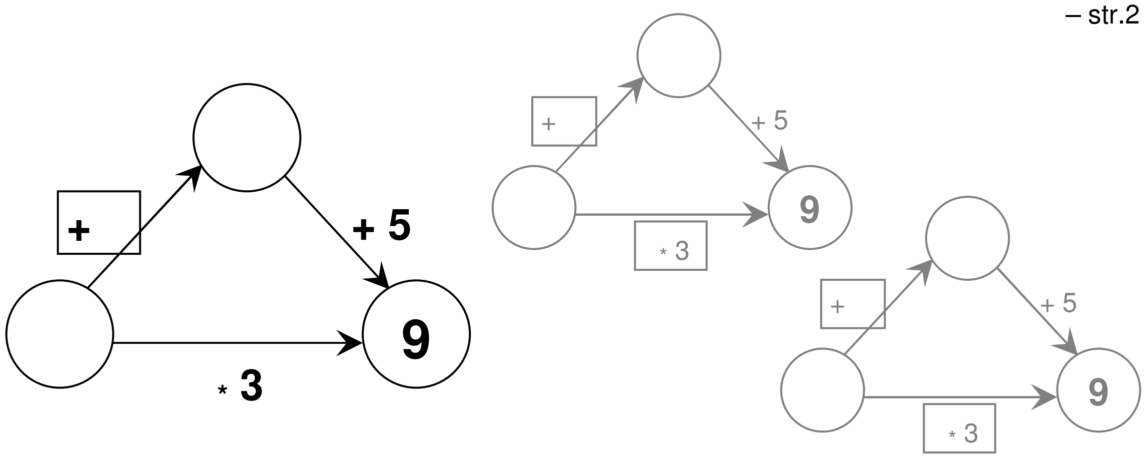


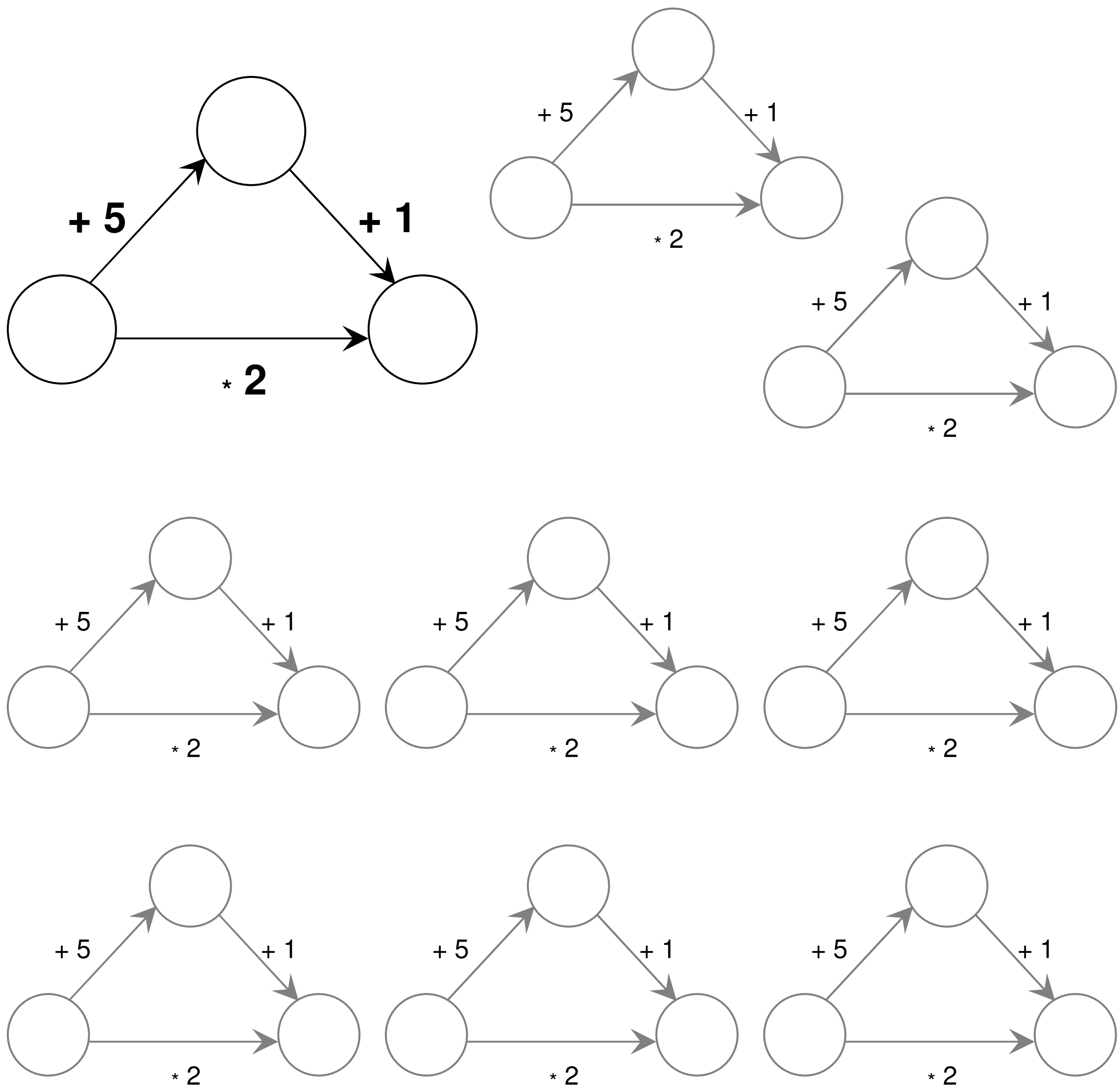


KASKÁDA ÚLOH, která byla předložena žákům 2. ročníku k vyřešení

(pracovní listy)

– str.2

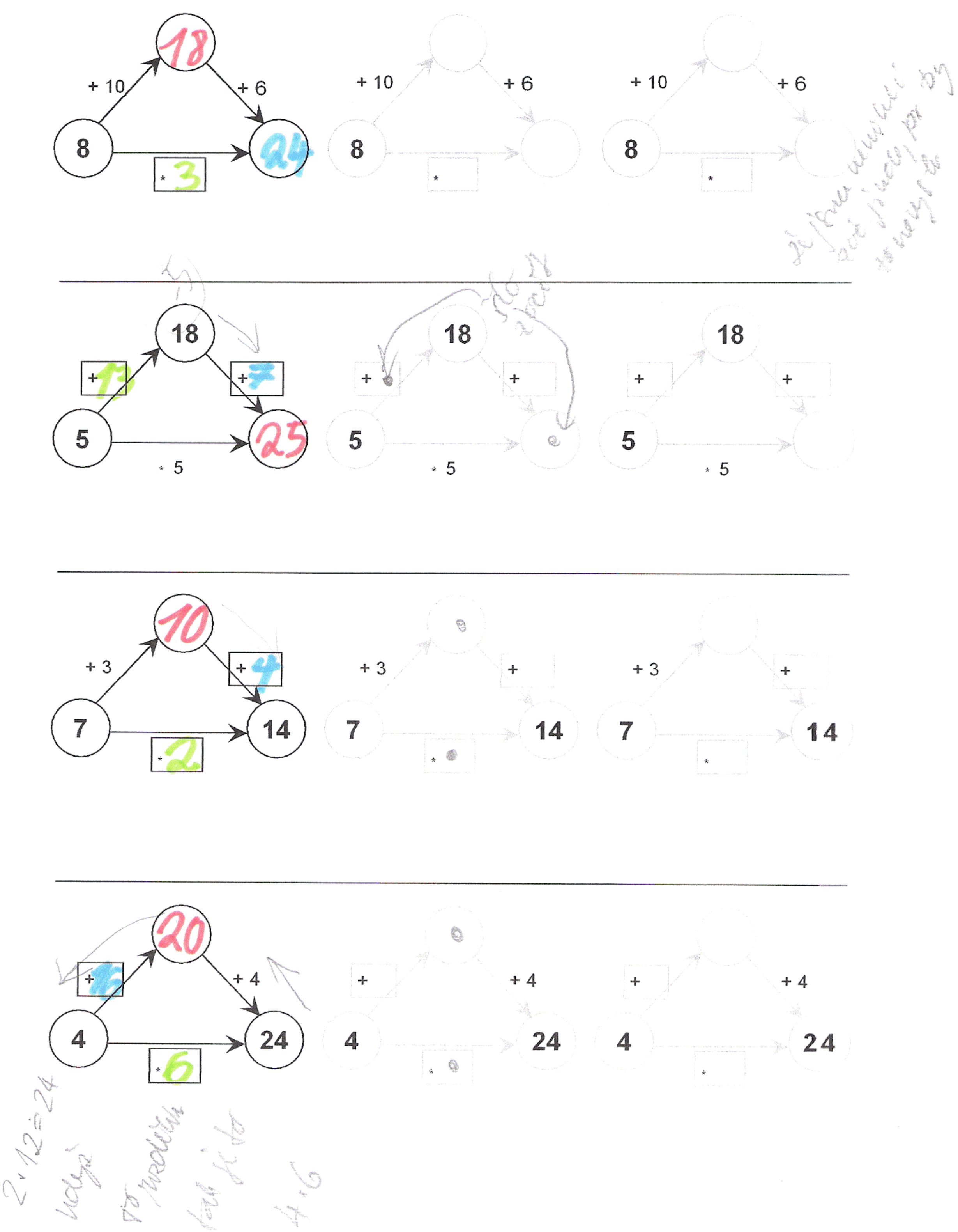




Příloha č. 7 – Vyplněné pracovní listy: **Daniel**

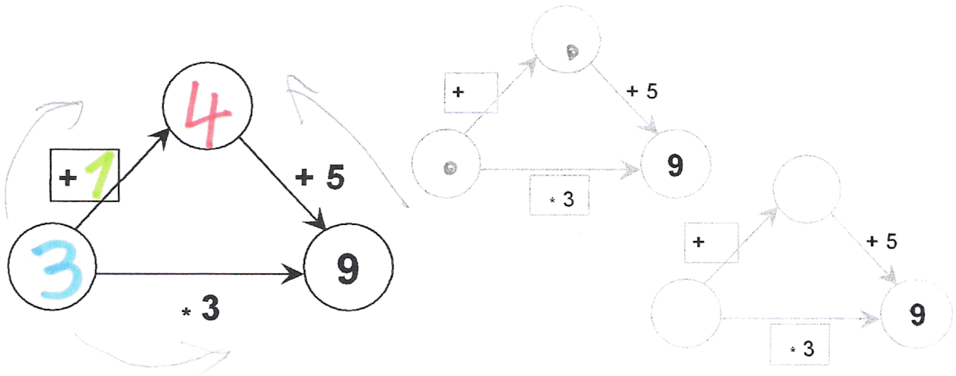
úlohy 1

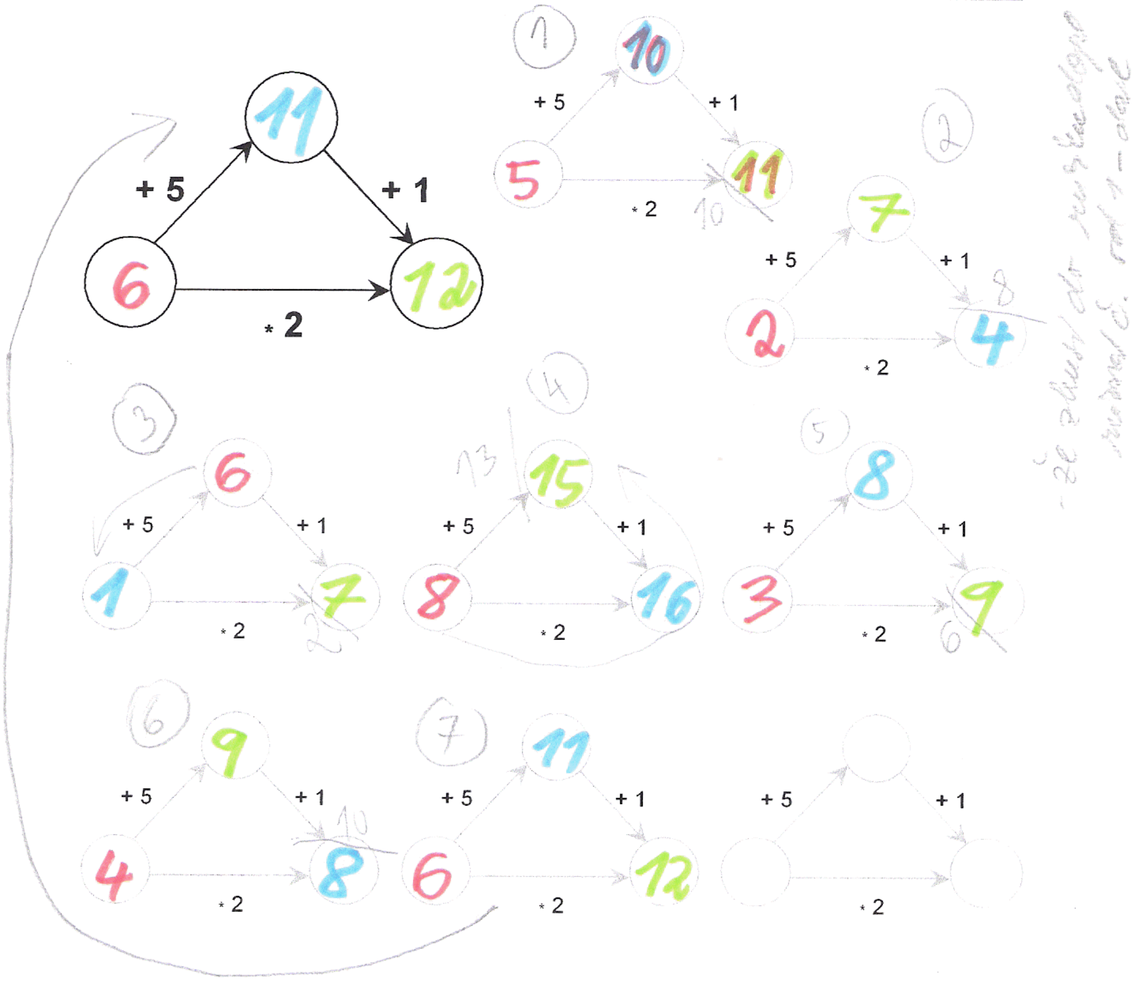
Jméno řešitele: Daniel **třída:** 2. C



úlohy 2

Jméno řešitele: Daniel **třída:** 2. C

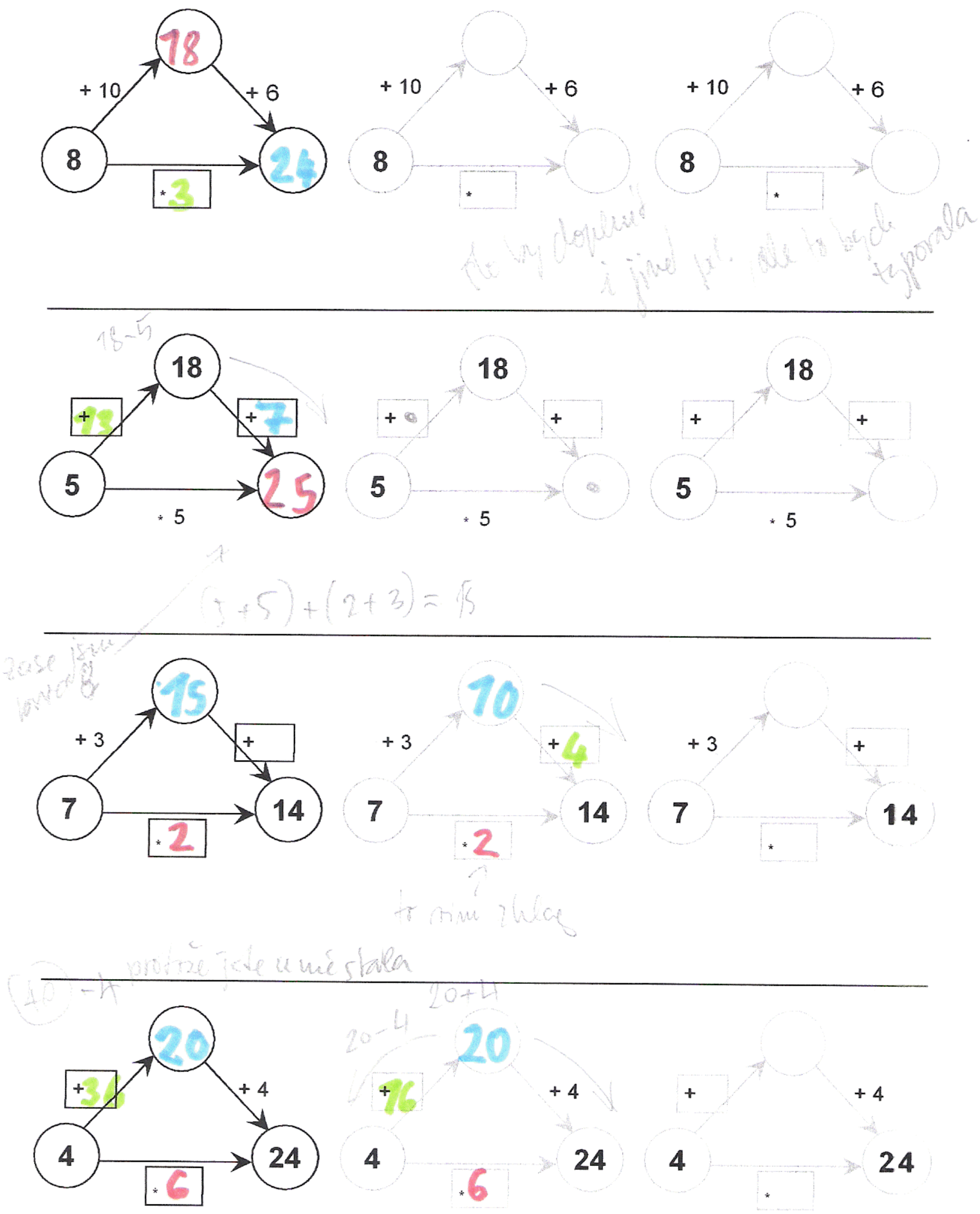




Příloha č. 8 – Vyplněné pracovní listy: **Mája**

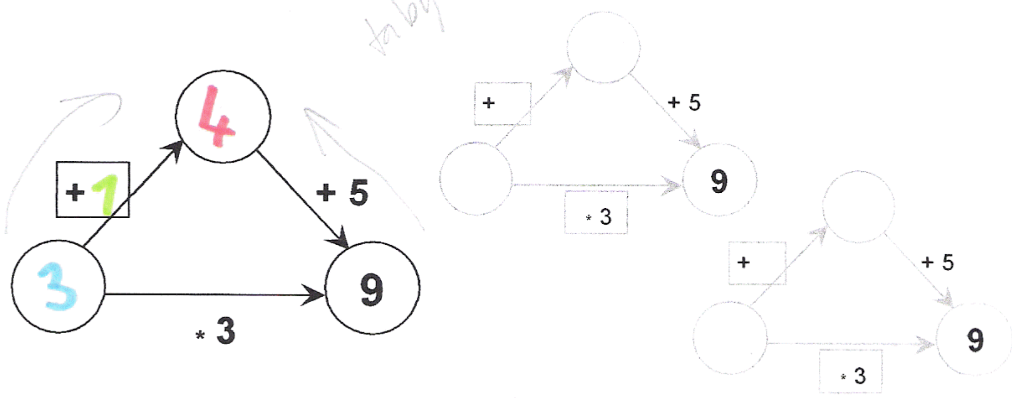
úlohy 1

Jméno řešitele: MÁJA **třída:** 2.C

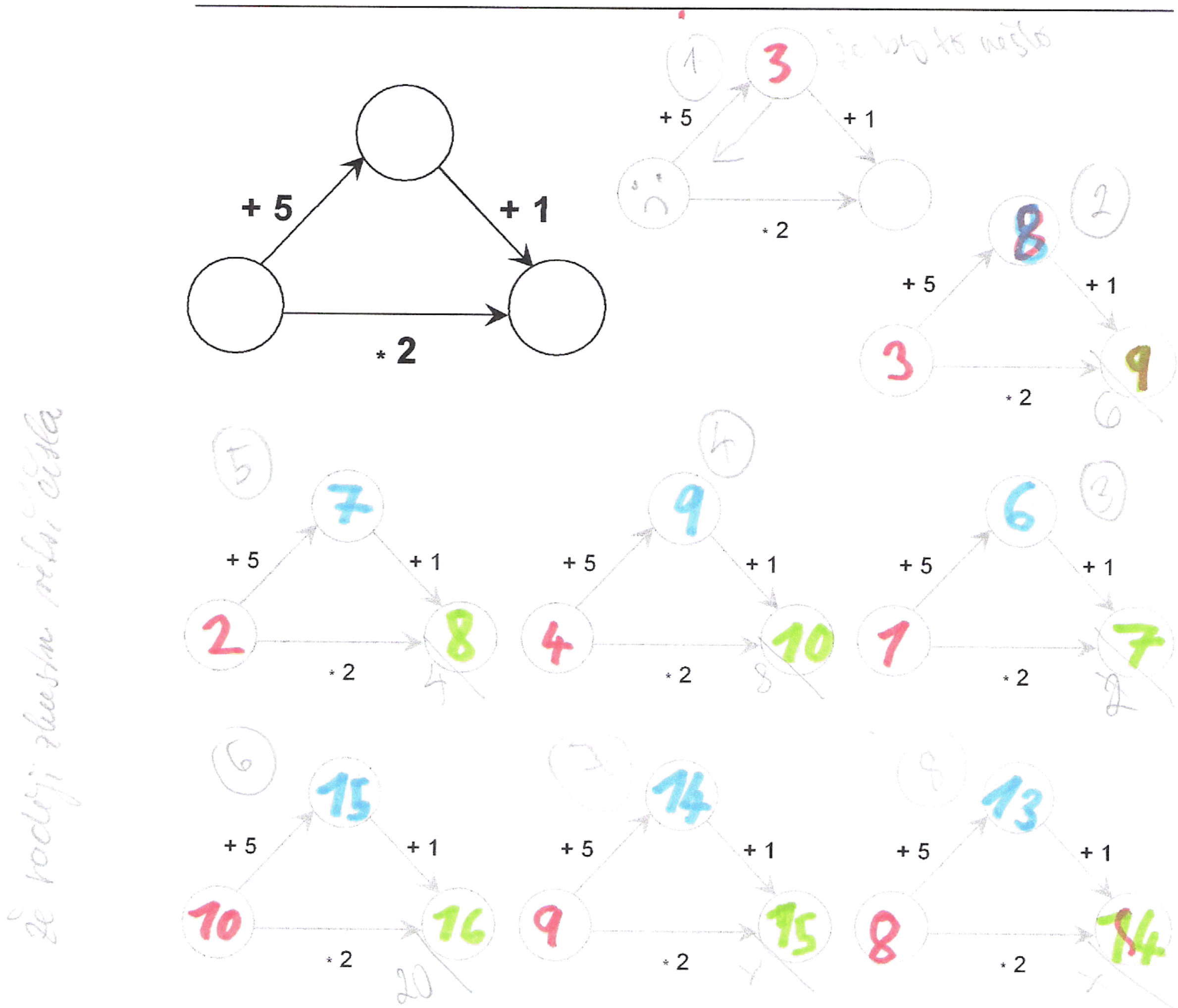


úlohy 2

Jméno řešitele: MÁJA **třída:** 2 C



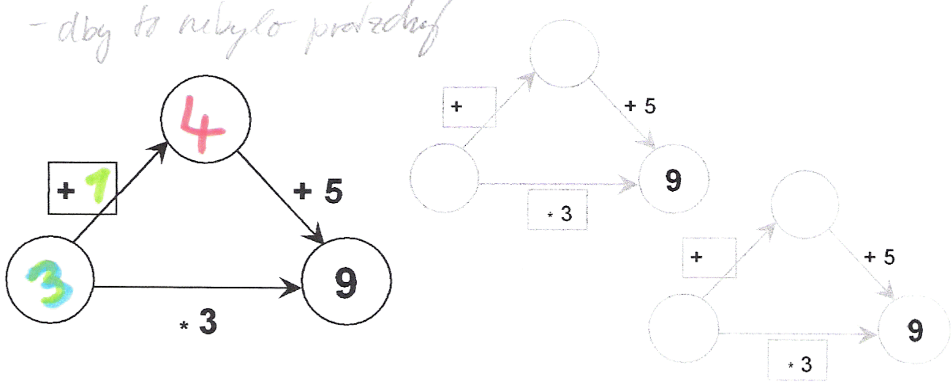
básnička: 3·3 je 9, kdo brečí, je medvěd.

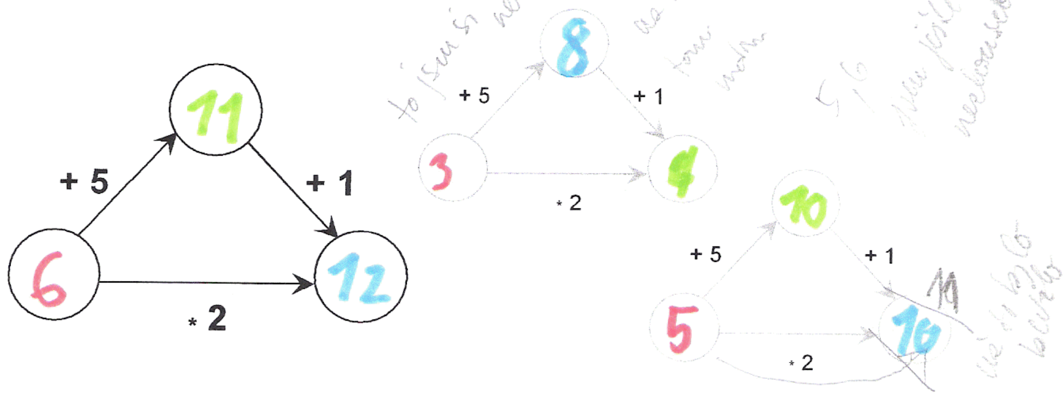


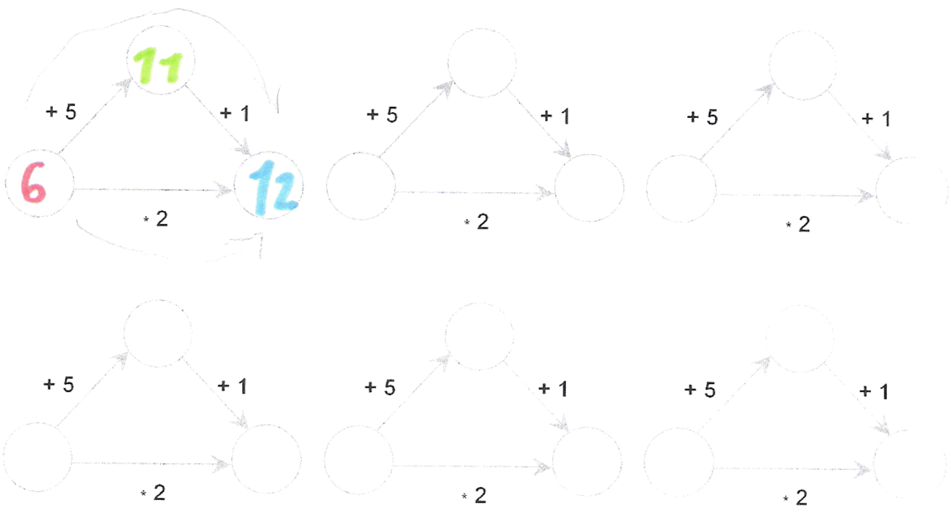
úlohy 2

Jméno řešitele: MÁJA **třída:** 2.C

– aby to nebylo prázdný







mě tyhle úlohy docela bavily
tohle asi budeme hrát ve 3 tř.

Příloha č. 9 – Pomocný list: **Mája**

$8 \cdot 1 = 8$, $8 \cdot 2 = 16$, $8 \cdot 3 = 24$

$4 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 4 = 16$, $4 \cdot 5 = 20$,

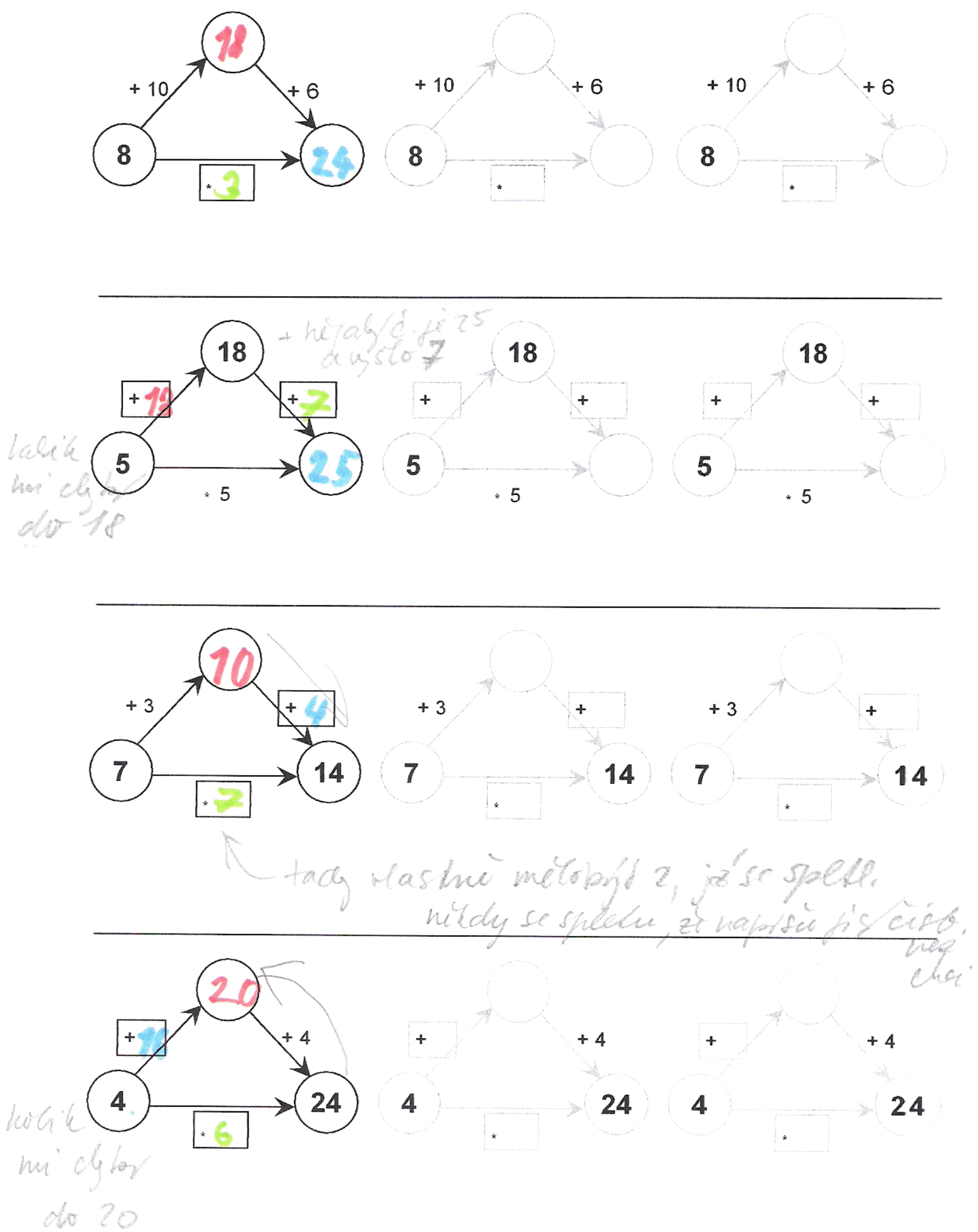
– Pomocný list: **Markéta**

6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Příloha č. 10 – Vyplněné pracovní listy: **Ondra**

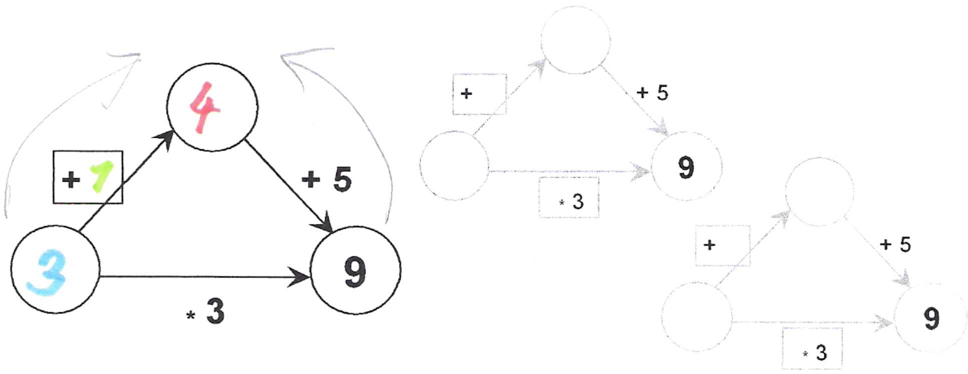
úlohy 1

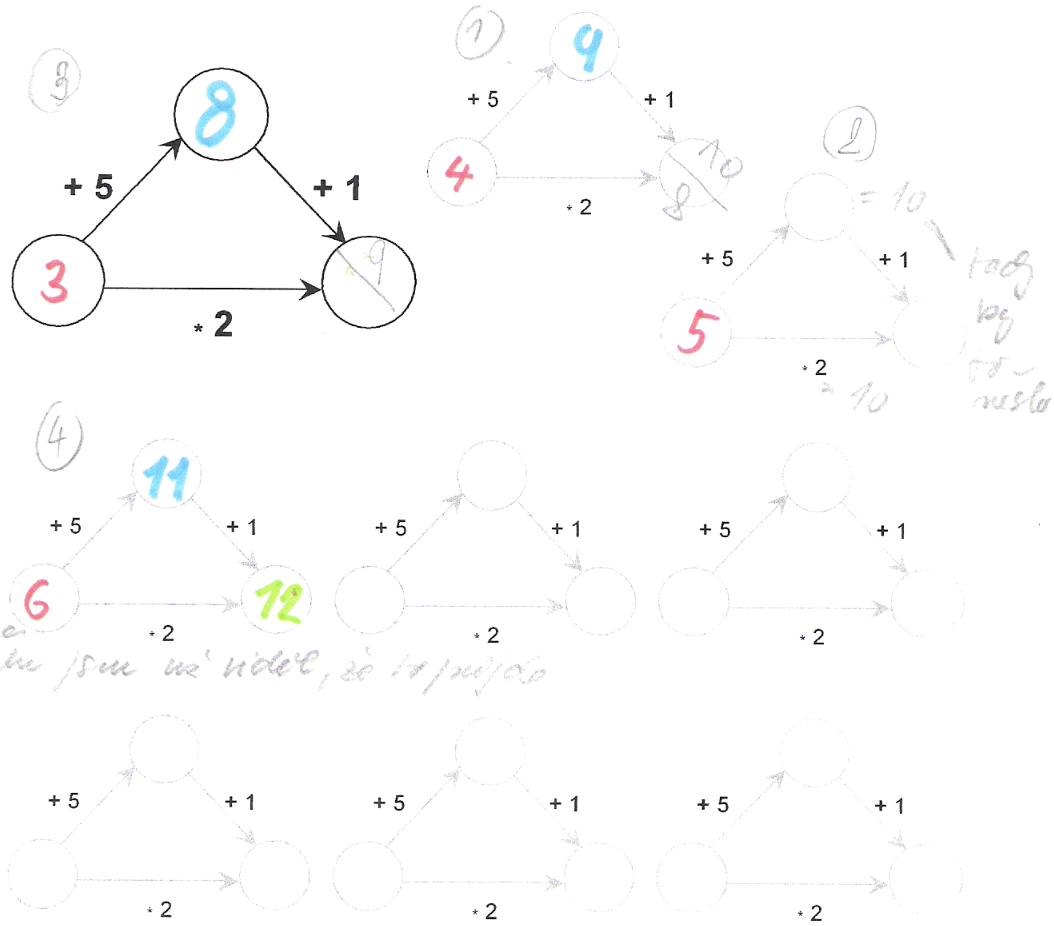
Jméno řešitele: Ondra **třída:** 2.A



úlohy 2

Jméno řešitele: Ondra **třída:** 2.A



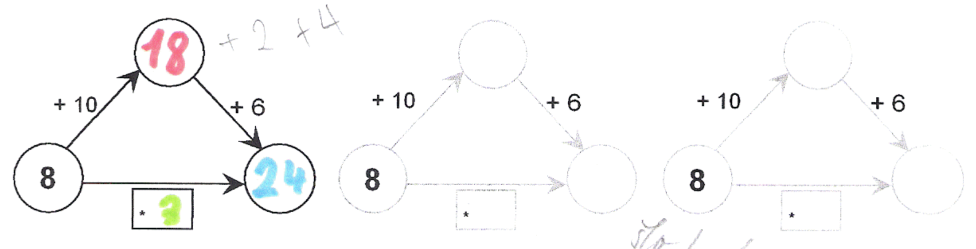


hned na začátku jsem už viděl, že to nejde

Příloha č. 11 – Vyplněné pracovní listy: **Petra**

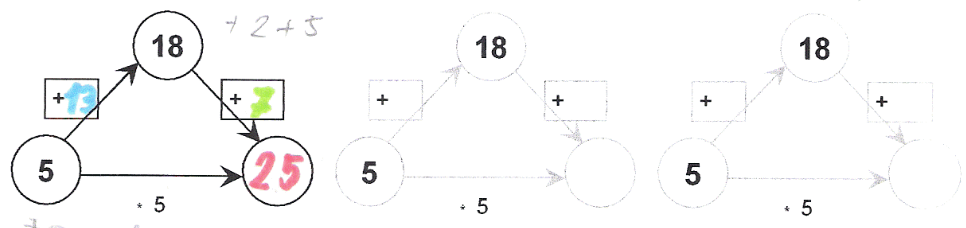
úlohy 1

Jméno řešitele: Petra **třída:** 2. A

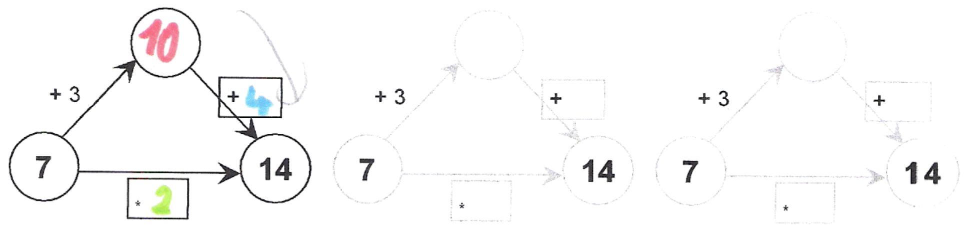


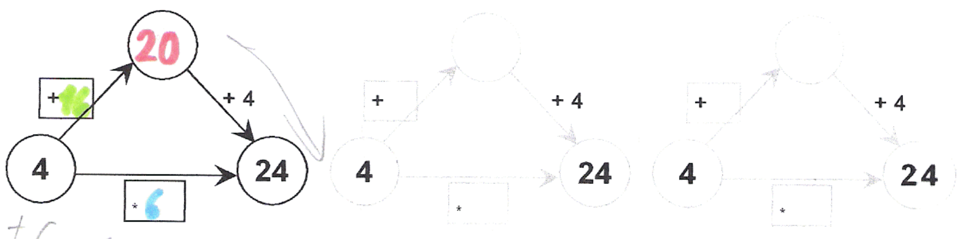
když umím násob. 8 (do 10·8)

šlo by to, ale jak by ses spíš nekropie



+ 3 = 8 / + 10 = 18



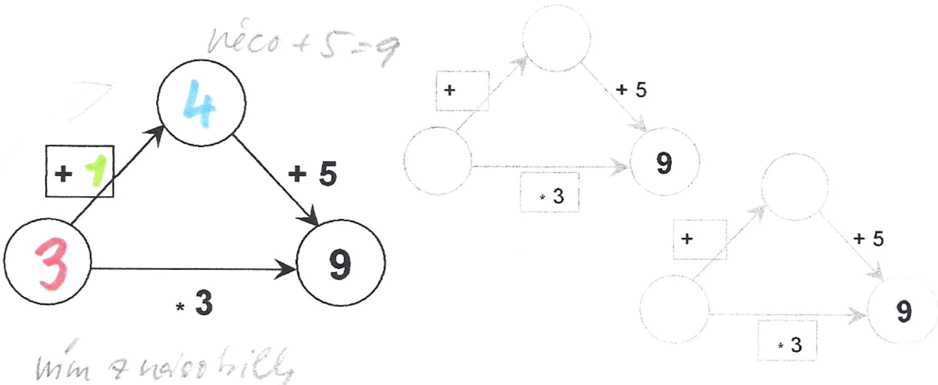


+ 6 = 10 + 6 = 20

úlohy 2

Jméno řešitele: Petra **třída:** 2. A

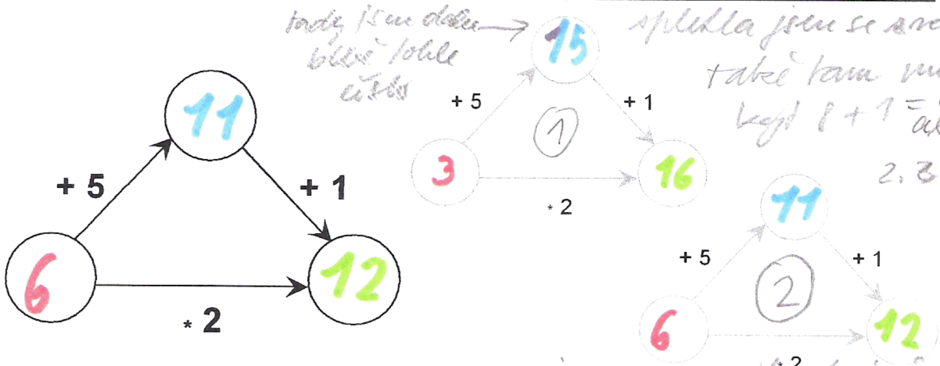
něco + 5 = 9



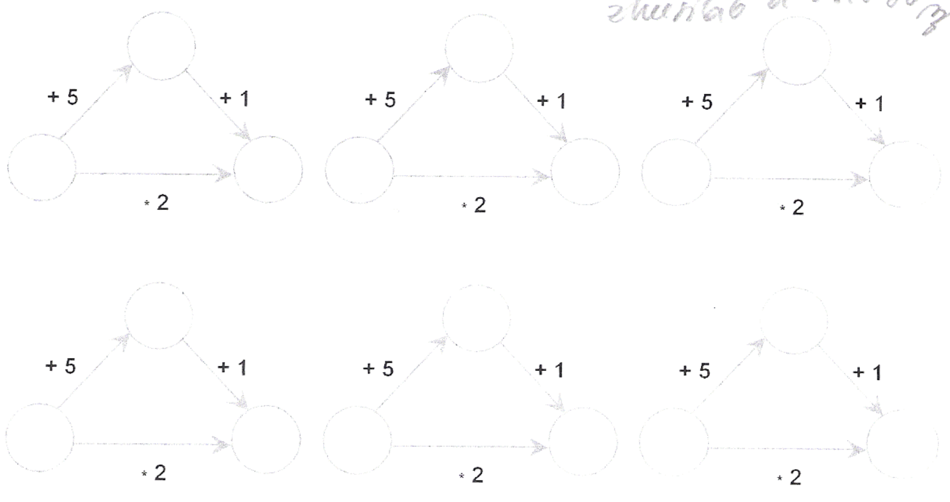
mám 4 násobilky

tady jsem dala blízké lehké čísla

spletla jsem se a násobila také tam místo když 8 + 1 = 9 ale 2 . 3 není 9



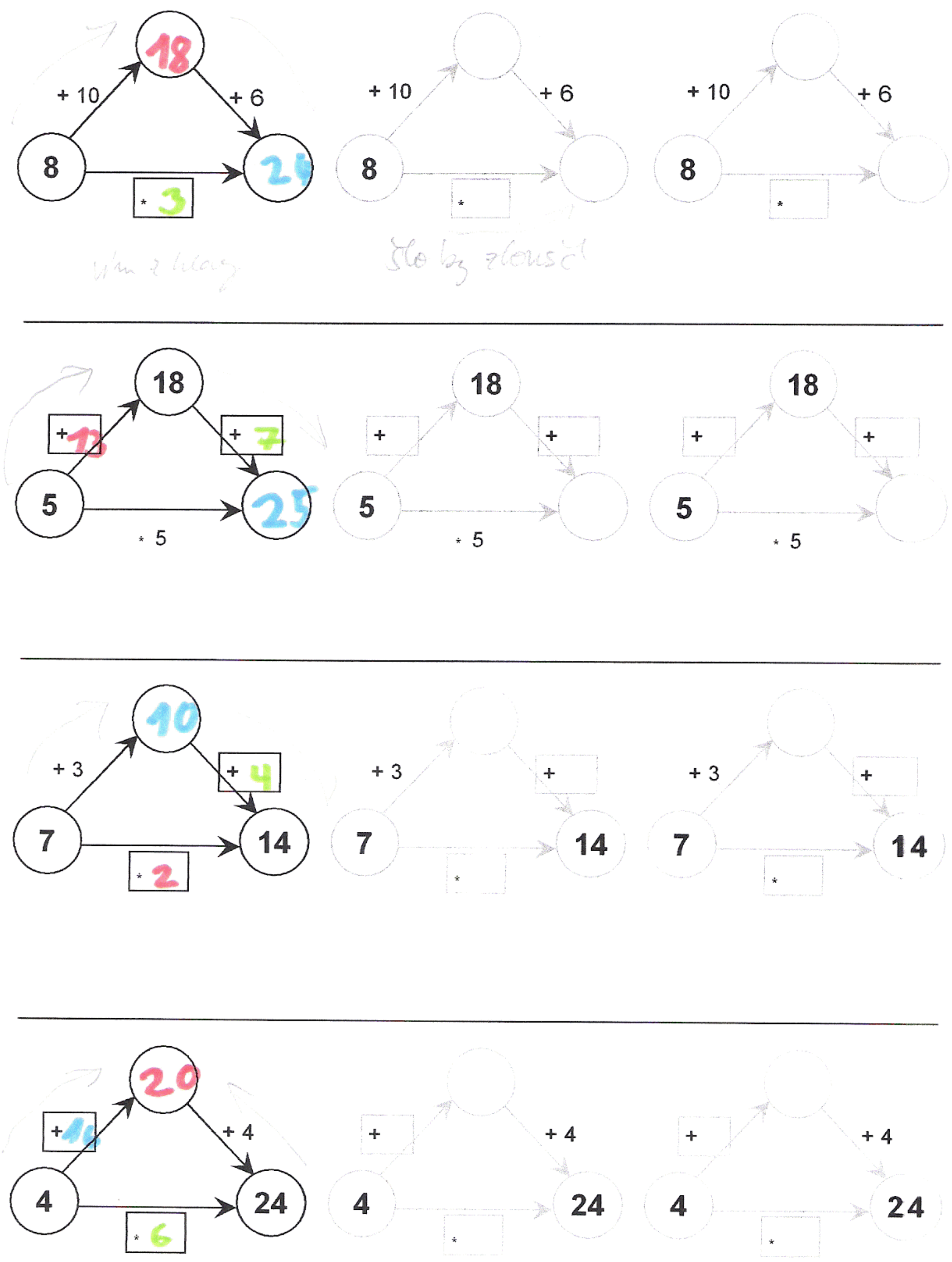
jsem tak náhodné jsem zkusila a ono to [illegible]



Příloha č. 12 – Vyplněné pracovní listy: **Kryštof**

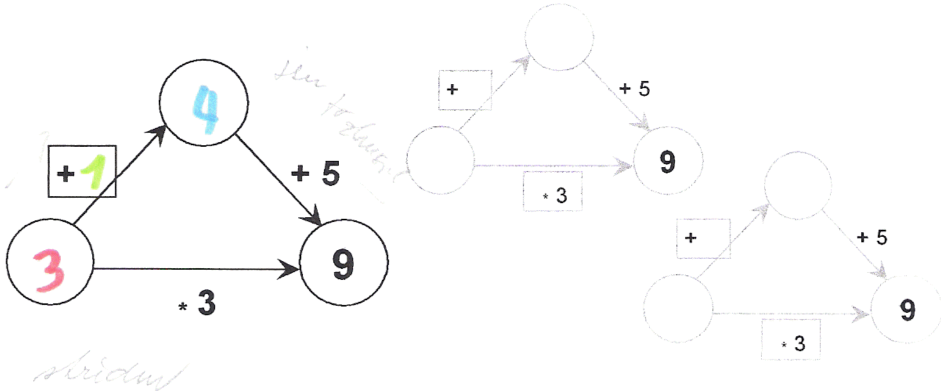
úlohy 1

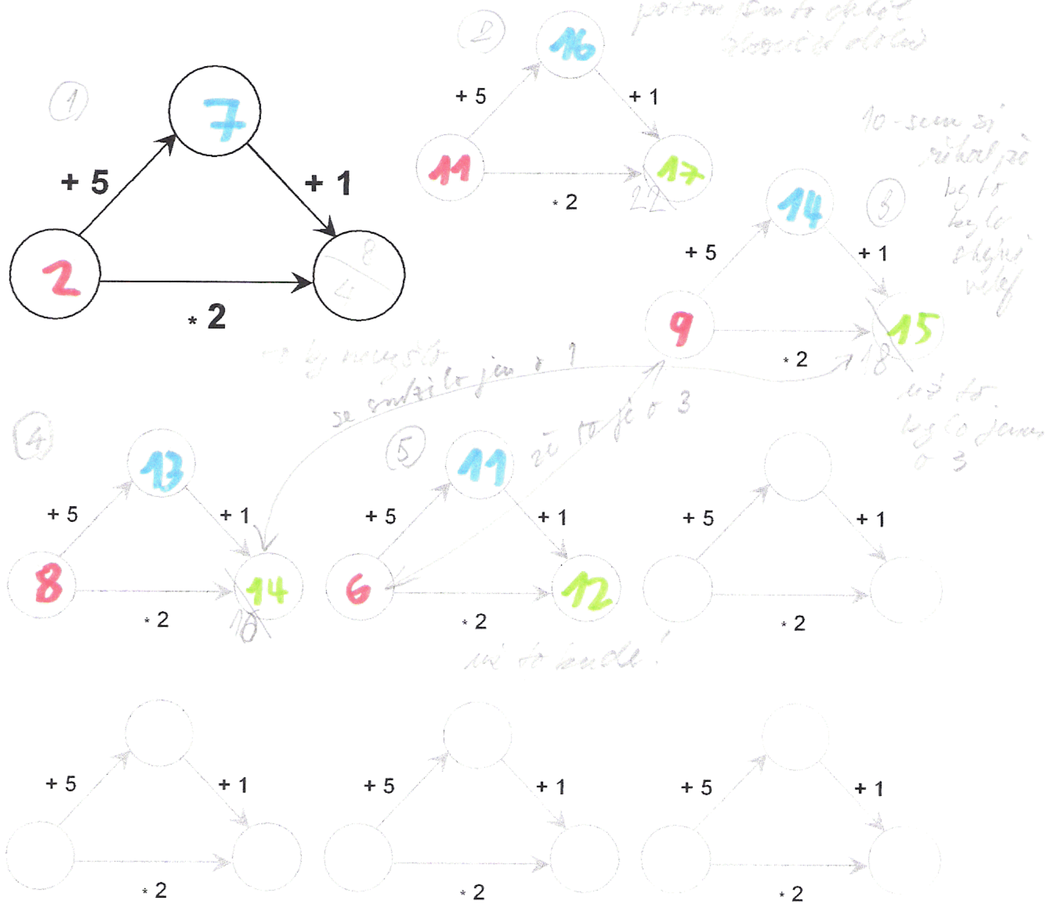
Jméno řešitele: Kryštof **třída:** 2. B



úlohy 2

Jméno řešitele: Kryštof **třída:** 2 B

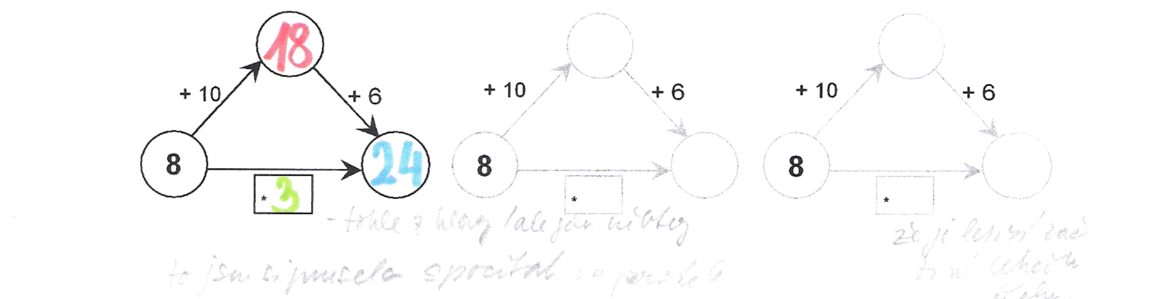


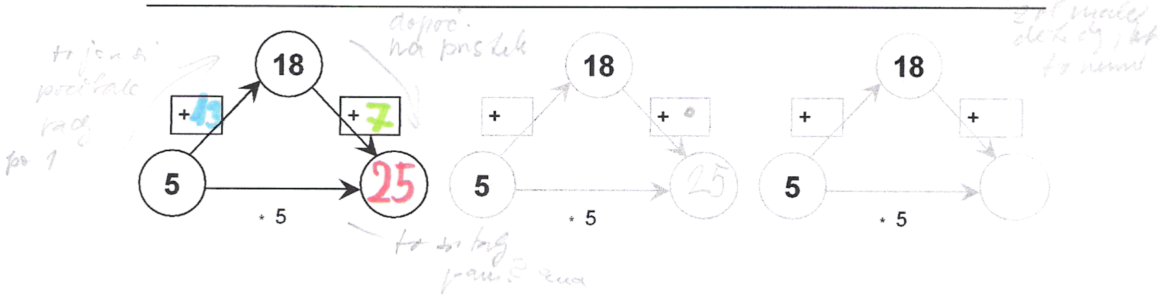


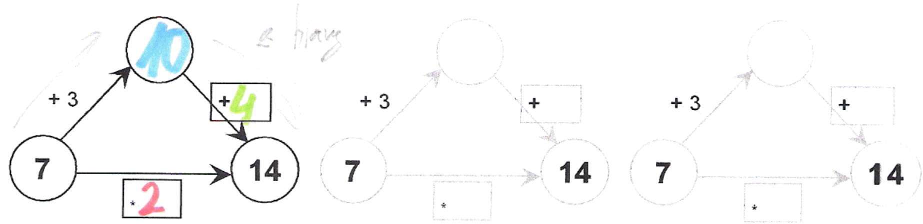
Příloha č. 13 – Vyplněné pracovní listy: **Markéta**

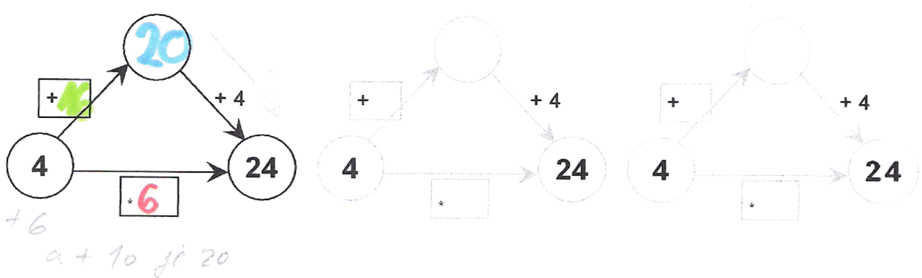
úlohy 1

Jméno řešitele: Markéta **třída:** 2B



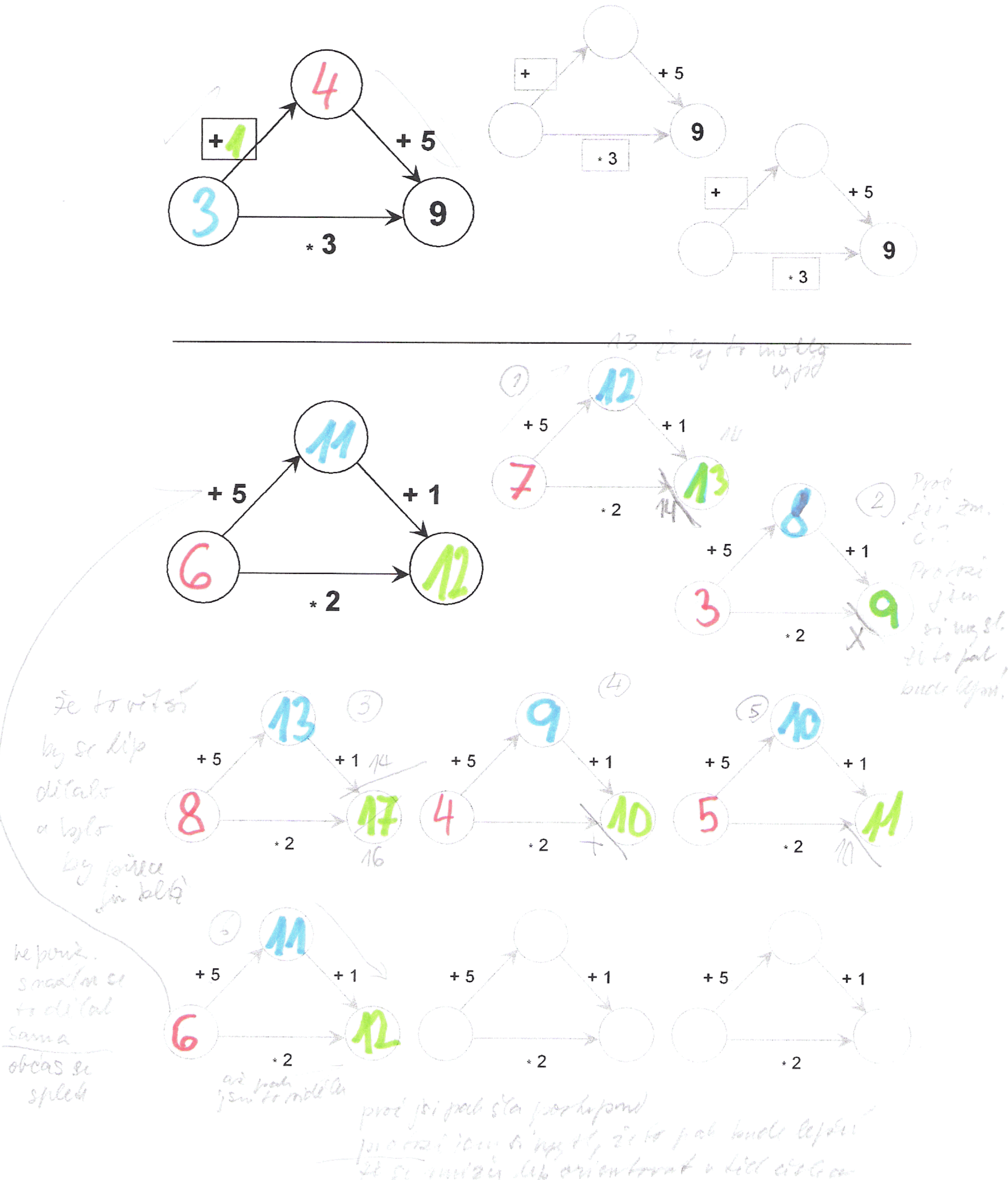






úlohy 2

Jméno řešitele: Markéta **třída:** 2B



Příloha č. 14– Esej **Můj postoj k matematice**

(z prvního ročníku, z kurzu Úvod do studia matematiky)

Pokud jde o můj postoj k matematice, musím zde nejprve nastínit všeobecný vztah k matematice u nás v rodině, který ten můj rozhodně ovlivňoval, ať už kladně nebo záporně.

Můj tatínek je inženýrem elektrotechniky a matematiku zbožňuje a nejen ji, i fyziku a chemii a vůbec vše, co k tomu náleží. Na základní škole a později i na gymnáziu byl nepochybně „šprt“ alespoň pokud jde o tyto předměty a v jiných odvětvích vědění se zajisté také snažil, i když ve vztahu k nim nemá takové nadání, jak sám říká. Já jsem po něm zdědila tuto snaživost ovšem to je asi tak vše. Talent na matematické a logické myšlení si tatínek šetřil pro mého mladšího bratra, který cestou gymnazistů kráčí v jeho šlépějích a pravidelně se k tatínkově radosti zúčastňuje různých matematických olympiád. Maminka vystudovala střední ekonomickou školu, ale k matematice a k počtům nemá zdaleka tak vřelý vztah jako tatínek. Její postoj k tomuto oboru je čistě praktický. Teta, tatínkova sestra, je učitelkou matematiky a fyziky na základní škole a podle mého názoru moc dobrou učitelkou. Dědeček z tatínkovy strany je sice doktor práv, ale zaměřuje se na ekonomiku a léta dělal finančního kontrolora.

Já z této skupiny matematicky orientovaných příbuzných „bohužel“ vybočuji. Ne, že bych matematiku neměla ráda, to ne, ale jsem orientovaná na úplně jiný druh lidského vědění. V testech, které jsme si dělali na konci základní školy, abychom poznali, na jaké povolání se hodíme, mi vyšlo, že jsem založená na humanitní vědy s trochou umění a pokud jde o vědy přírodní, zbožňuji biologii, ale to je tak vše. Vystudovala jsem Střední Pedagogickou školu se spoustou těchto humanitně založených předmětů a pokud jde o matiku a jí příbuzné vědy, byly zde zastoupeny minimálně, což mě samotnou trochu mrzelo, jelikož jsem tam za ty čtyři roky poměrně hodně matematicky zakrněla. Mého tatínka však toto zjištění šokovalo. Prohlásil, že pedagogika s psychologií jsou pavědy a že škola, kterou navštěvuji, není dostatečně kvalitní, protože zde není povinná maturita z matematiky. Myslím, že ho dodnes mrzí, že jsem nešla na gymnázium, ale dnes už mi to alespoň nevyčítá.

Ale abych začala od začátku. První mé (dokonce zdokumentované) vzpomínky na matematiku sahají do těsně předškolního období. Myslím, že se tatínek ve mně snažil probudit matematického génia již dříve, ale na to si „bohužel“ nevzpomínám. Když mi tedy bylo kolem šestého roku (bratr je o dva roky mladší) tatínek pro nás vymyslel „luštění“, jak to nazval. Vyrobil pro nás pomocí tiskátek první jednoduché matematické hry (ukázku několika těchto listů jsem přiložila k této seminární práci). Vzpomínám si, jak jsme s bratrem seděli u stolu a tatínek nám kladl různé otázky a zadával nám různé úkoly, které jsme s radostí plnili. Pro nás to byla hra na školu a přišli jsme si při ní velice důležití. První strana obsahuje úkoly typu: „První dvě kočičky dej do kroužku. Třetí a poslední kočičky vybarvi hnědě a zbylou kočičku zeleně.“ atd. Na další stránce jsou úkoly podobného typu. Pak následuje bludiště podle popisu trasy a dále množiny. Pak je tam opět jakési bludiště a zase množiny, tentokrát již složitější. Na stránce označené číslem 13 jsme už dokonce začínali počítat kolik je na obrázku kachen, kolik krocanů a kolik vepříků. Následuje poznávání číslic a toho, jak jdou za sebou. Pak jsou tam opět množiny, tentokráte na základě příbuzenských vztahů jednotlivých zvířátek a také začínáme počítat, kolik má které zvíře na obrázku nohou. Pak jsou tam úkoly podobného typu s různými obměnami a nakonec už jen nematematické hledání rozdílů mezi obrázky. Myslím, že tatínek to měl moc dobře vymyšlené a měl radost, jak nám to jde. Hlavně bráškovi, protože mu tenkrát byly jen čtyři roky a už byl na úrovni předškoláka. Tenkrát jsem na něj trochu žárlila, zvláště když mu tatínek kontroloval jeho pracovní list a „oznámkoval“ mu ho lépe než mně.

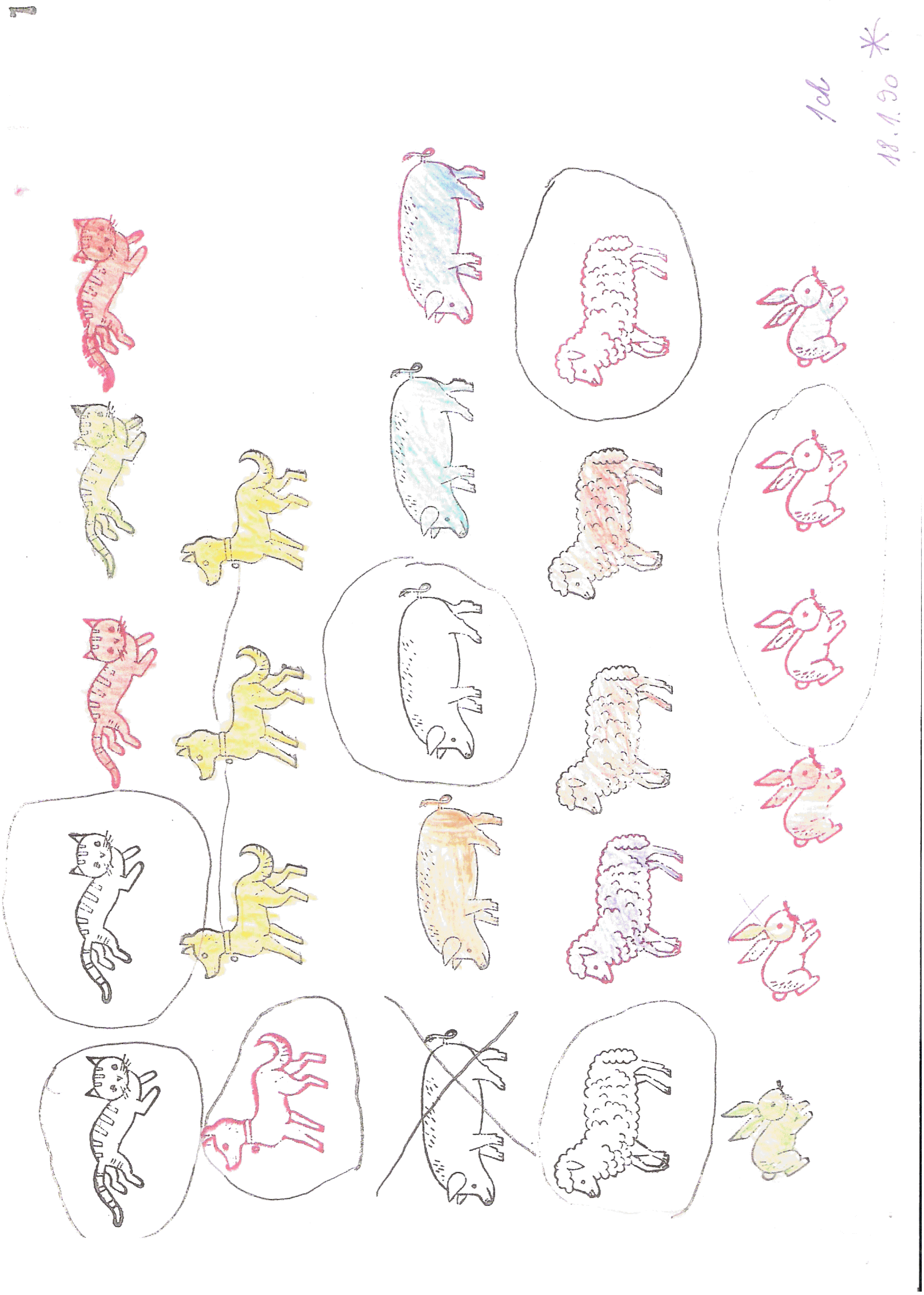
Na prvním stupni povinné školní docházky jsem s matematikou problémy neměla, možná i díky domácímu tréninku. Vzpomínám si, že jsem se s tatínkem několikrát přela o způsobu počítání mého domácího úkolu. Tatínek mi vysvětloval, jak mohu vypočítat stejný příklad i jiným způsobem než jsme se učili ve škole, ale já jsem si nedala říct. Tvrdila jsem mu, že to počítá špatně, protože paní učitelka nás to učila jinak.

Na druhém stupni jsem za tatínkem občas chodila pro matematickou radu, hlavně na „doučování“ z fyziky. Vždycky se v tom úžasně vyžíval. Natáhl mezi dvířka skříně kus tapety, která mu sloužila jako tabule, vybavil se spoustou různobarevných fixů a jal se mi vysvětlovat to, na co můj mozeček bez pomoci nestačil. Když mi pak potřetí vysvětloval to samé pořád dokola a já mu potřetí odpovídala, že tomu pořád nerozumím, kolikrát vykřikl směrem k mamince: „Proboha, je tohle vůbec moje dítě?!“ No, je to k neuvěření, ale zřejmě opravdu jsem jeho. Ke konci základní školy jsem však na sebe mohla být pyšná. Spolu s celou třídou jsem v rámci přípravy na přijímací zkoušky vypočítala celého tolik obávaného „Bělouna“ a tenkrát mě matika opravdu bavila.

Jak už jsem napsala na začátku, na střední škole to šlo s úrovní matematiky z kopce a její obliba klesala přímou úměrností. Ve čtvrtém ročníku nám navíc místo naší nenáročné paní profesorky, která si sama nebyla v matice moc jistá, několikrát přidělili jiného pedagoga až jsme skončili s mladým, nesmělým, ale co se týče matematiky ambiciózním profesorem. Dopadlo to tak, že celé naší třídě hrozily v pololetí z matiky velmi neuspokojivé známky a můj tatínek po obdržení písemného oznámení o tom, že jeho dcera měsíc před maturitou propadá z matematiky, málem omdlel. Nakonec vše dobře dopadlo, jen můj zájem o tuto vědní disciplínu kolísal na bodu mrazu.

To, že jsem na vysokou školu nemusela dělat přijímací zkoušky z matematiky, mě tedy nevýslovně potěšilo. Horší to bylo, když jsem se dozvěděla o testu, který jsme museli zvládnout, abychom se dostali do tohoto kurzu a děs mě začal obcházet, když jsem si uvědomila, že pokud tu vydržím až do konce, čeká mne z matematiky povinná státnice. Test jsem zvládla díky bratrově víkendovém tréninku, kdy mě zásoboval úlohami ze svých matematických Klokanů a Pythágoriád. A po několika měsících v tomto kurzu se můj postoj k matematice také poněkud změnil. Zjistila jsem, že mě baví zkoumat a zkoušet vypočítat nějaký záludný matematický problém a nedá mi to, dokud nepřijdu na jeho řešení. Možná, že ve mně přece jen dřímá trochu těch tatínkových matematických genů. Jen je vydolovat.

(list 1 k eseji Můj postoj k matematice z kurzu Úvod do studia matematiky)



(list 2 k eseji Můj postoj k matematice z kurzu Úvod do studia matematiky)

(list 3 k eseji Můj postoj k matematice z kurzu Úvod do studia matematiky)