Univerzita Karlova
Matematicko – fyzikální fakulta
Praha

Diferenciální rovnice a jejich použití v ekonomii

Disertační práce

Mgr. Pavel Pražák

2006

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedenou literaturu.

Je mojí milou povinností poděkovat své školitelce,
paní doc. RNDr. Janě Staré, CSc.,
za cenné rady a podnětné připomínky k této práci
a za nevšední péči a ochotu, kterou mi po celou dobu psaní práce věnovala.

Děkuji také svému konzultantovi,
panu RNDr. Martinu Černému, CSc.,
za užitečné poznámky týkající se ekonomického obsahu této práce.

Dále děkuji svému kolegovi,
panu Mgr. Petru Duczynskému, Ph.D.,
za jeho poznámky týkající se problému ekonomického růstu.

Annotation

Students of economics at universities are at an early stage made familiar with the concept of ordinary differential equations (ODE) and they are also presented essential methods leading to their solutions. In the first year of their studies students have no experience of how ODE can be used in the field of economics. A mathematics teacher is therefore confronted with such questions as: Why should economists study and master ordinary differential equations? Where can ordinary differential equations be used in economics? The aims of the submitted work titled "Ordinary Differential Equations and Their Applications in Economics" are

- to show that the concept of ODE can be useful in economic phenomena modelling,
- to find such fields in the theory of economics in which the concept of ODE is typically used,
- to use the theory of ODE for selected economic models and to interpret the obtained solutions.

Economics dynamics is a study of how economics variables develop in time. This work gives a survey of mathematical methods commonly used in this field. Once the category of time is added into a model of economics, it is sometimes necessary to reduce the complexity of the model in another direction, and therefore only a qualitative solution to the given problem is obtained.

Models formulated in the first chapter of this work are used in the subject called Mathematics II, taught by the author at the Faculty of Informatics and Management University of Hradec Králové. In this chapter there are also formulated three problems that are further evolved and generalized in the following chapters of this work, which particularly mean: the advertising model by Vidale and Wolfe, the multiplier accelerator model by Phillips and the growth model by Solow. For convenience, basic definitions and theorems of the theory of ODE are introduced in the second chapter. In this chapter it is possible to find the concept of classical solution to ODE or the concept of generalized solution to ODE, which are necessary to be considered if one works with an optimal control problem. Unlike the first chapter, more demanding economic problems are described in the third chapter. For example, Poincaré - Bendixson´s theorem or existence theorem for Hopf bifurcation are used there to establish a cyclical behaviour of a variable. Getting acquainted with problems of economic dynamics, quite a large amount of economic problems are found - formulated as optimal control problems. This is the reason why the fourth chapter presents elements of the optimal control theory. Concretely, it presents necessary conditions to the solution of the optimal control problems, called Maximum Principle of Pontryagin. We present there a proof of Lagrange problem and a proof of Maximum Principle of Pontryagin for the basic control problem. In contrast to the literature for economists, more exact proofs are given. The last chapter is devoted to elements of the theory of the economic growth. A mathematical approach to this problem is given there, and the theory of ODE and the optimal control theory are used together.

Obsah

Seznam symbolů

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$[a, b]$	uzavřený interval
(a, b)	otevřený interval
$\mathbb{R}_+$	množina všech kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_{0+}$	množina všech nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	Eukleidův n-rozměrný reálný lineární prostor
$(x_1, \ldots, x_n)^\top$	sloupcový vektor se složkami $x_1, \ldots, x_n$
i	imaginární jednotka
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$i\mathbb{R}$	množina všech ryze imaginárních čísel
$\Re(z)$	reálná část komplexního čísla z
$\Im(z)$	imaginární část komplexního čísla z
$\mathbf{A}^\top$	transponovaná matice k matici $\mathbf{A}$
$\det \mathbf{A}$	determinant čtvercové matice $\mathbf{A}$
$\mathrm{tr}\mathbf{A}$	stopa čtvercové matice $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	inverzní matice k regulární matici $\mathbf{A}$
$\mathbf{E}$	jednotková matice
$L(X, Y)$	prostor všech lineárních zobrazení vektorového prostoru X do vektorového prostoru Y
∂M	hranice množiny M
$\overline{M}$	uzávěr množiny M
$\mathrm{int} M$	vnitřek množiny M
$B(a, r)$	otevřená koule se středem $a \in X$ a poloměrem $r > 0$
$\mathrm{dist}(x, M)$	vzdálenost bodu x od množiny M
$\|\| \cdot \|\|$	norma
$C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$	prostor spojitých funkcí z $[t_0, t_1]$ do $\mathbb{R}^n$
$C^k([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$	prostor všech funkcí z $[t_0, t_1]$ do $\mathbb{R}^n$ se spojitou derivací až do řádu k
$PC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$	prostor po částech spojitých funkcí z $[t_0, t_1]$ do $\mathbb{R}^n$
$PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$	prostor po částech hladkých funkcí z $[t_0, t_1]$ do $\mathbb{R}^n$
$D_j f(x)$	parciální derivace zobrazení f podle j–té proměnné v bodě x, tj. derivace zobrazení $h \mapsto f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n)$
$f = o(g), x \to a$	$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 0$

Úvod

V základních kurzech matematiky na vysoké škole se studenti ekonomie nebo managementu seznamují s pojmem obyčejné diferenciální rovnice a osvojují si některé elementární metody pro jejich řešení. Souběžně s matematikou studují také ekonomickou teorii, která je často vykládána pomocí grafů, srv. [31], [20] nebo [54], a kde je vývoj ekonomických veličin popisován slovně bez využití matematického aparátu. To znamená, že studenti ekonomie nemají v prvním roce svého studia, na rozdíl od studentů přírodovědných nebo technických oborů, představu o tom, jak lze diferenciální rovnice použít, a učitel matematiky bývá postaven před otázky následujícího charakteru: Proč potřebují ekonomové rozumět diferenciálním rovnicím? K čemu se diferenciální rovnice v ekonomii používají? Jeden z důvodů, proč tato práce vznikla, byla praktická potřeba motivovat studenty Fakulty informatiky a managementu Univerzity Hradec Králové, kde autor vyučuje předměty Základy matematiky 1 a Základy matematiky 2, ke studiu obyčejných diferenciálních rovnic, s jejichž použitím se setkají až mnohem později v některých výběrových přednáškách. Předkládaná práce si klade tyto cíle:

- Ukázat, že diferenciální rovnice mají v kurzech matematiky pro ekonomy své místo a že řada ekonomických vztahů může být pomocí diferenciálních rovnic vyjádřena.
- Nalézt takové oblasti ekonomie, které jsou pro použití obyčejných diferenciálních rovnic typické. Úplné splnění tohoto cíle by si vyžádalo sepsání poměrně rozsáhlé monografie, v této práci se soustředíme pouze na vybrané problémy.
- Pro vybrané ekonomické problémy použít teorii obyčejných diferenciálních rovnic a příslušné řešení interpretovat.

V ekonomii jsou formulovány různé *modely* společenských jevů, které slouží k zjednodušenému popisu zkoumané reality. V této práci se budeme zabývat takovými modely, které neobsahují náhodné veličiny, tj. jsou *deterministické,* a takovými modely, které obsahují čas, tj. jsou *dynamické.* Protože budeme pracovat výhradně se spojitými funkcemi, resp. spojitě diferencovatelnámi funkcemi, půjde o *spojité* modely, které budou reprezentovány obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Různé důvody, proč je užitečné popisovat zkoumané jevy matematickými modely, jsou uvedeny v [39]. Z tohoto přehledu je pro náš text důležité, že modely umožňují interpretovat některé teorie a tvoří jistý spojovací článek mezi teorií a skutečností a že modely umožňují experimentovat tam, kde je experiment na reálném objektu nehospodárný, např. v oblasti řízení ekonomických celků. Vzhledem k tomu, že jsou společenské jevy tvořeny komplikovanými vztahy, bude v některých případech třeba přistoupit ke značným zjednodušením. Takto zjednodušené modely pak nelze použít pro přesné předpovědi budoucího chování veličin, mohou však být použity pro kvalitativní odhad časového vývoje veličin. Přijmeme tedy charakteristiku, kterou v roce 1969 v časopisu *Science* podal M. Kac (jedná se o překlad textu citovaného v [89]):

> Ve většině případů jsou modely pouze karikatury reality. Jsou-li však dobré, pak, podobně jako dobré karikatury, zobrazují, i když poněkud zkresleně, rysy reálného světa. Hlavní role takových modelů není ani tak dopodrobna vysvětlit nebo předpovídat – i když to je hlavním posláním vědy – jako spíš popularizovat myšlení a klást přesné otázky.

Práce je uspořádána do pěti kapitol. V první kapitole jsou uvedeny jednoduché modely, které vedou převážně na lineární diferenciální rovnice prvního nebo druhého řádu. Jedná se o úlohy, které lze přímo využít při výuce v základních kurzech matematiky pro ekonomy nebo manažery. Při zpracování této kapitoly bylo použito mnoho zdrojů, za hlavní lze považovat [42], [85], [9], [35], [3] a [32]. V druhé kapitole je uveden přehled pojmů z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Výběr je proveden s ohledem na použití této teorie v dalších kapitolách a vychází hlavně z [4] a [40]. Mimo jiné zde je věnována pozornost definicím řešení obyčejné diferenciální rovnice. Vyjasnění tohoto pojmu je důležité s ohledem na aplikace v teorii optimálního řízení. Ve třetí kapitole jsou popsány spojité dynamické modely dílčí a všeobecné rovnováhy. Dále jsou zde uvedeny modely, které se zabývají hospodářskými cykly. Pro evidenci těchto cyklů je využita Poincaré-Bendixsonova věta nebo je ukázáno, že příslušná diferenciální rovnice může být transformována na Liénardovu soustavu. V závěru této kapitoly je uveden model popisující reklamní strategii firmy, který využívá existenční větu o Hopfově bifurkaci. Za hlavní zdroje této kapitoly lze označit [84], [23], [24], [49] a [22]. Čtvrtá kapitola se věnuje úloze optimálního řízení. Úlohy tohoto typu se vyskytují v různých oblastech ekonomie a souvisí s hledáním optimálního vývoje ekonomických veličin. V textu této kapitoly jsou uvedeny nutné podmínky pro řešení úlohy optimálního řízení, které jsou souhrnně označovány názvem Pontrjaginův princip maxima. Je zde také ukázáno jejich použití v konkrétních modelech. Při zpracování této kapitoly byly použity hlavně [1] a [37]. Pátá kapitola se soustředí na základní rysy a modely ekonomického růstu. Diferenciální rovnice a teorie optimálního řízení našly v této oblasti ekonomie značné uplatnění a neustále hrají významnou úlohu v rozvoji této teorie. Přispívají tak k nalezení aspektů, které s ekonomickým růstem souvisí. Získané výsledky se pak promítají do praktického života v organizaci ekonomických celků. Text kapitoly se týká hlavně matematického popisu historických modelů teorie růstu. Tato část textu vychází hlavně z [6] a [77].

Autorovi není známo, že v české literatuře existuje podobný text, proto se domnívá, že pro učitele matematiky, kteří na vysokých školách vyučují v kurzech diferenciálních rovnic pro ekonomy, je předkládaný text přínosný. V cizojazyčné literatuře lze za texty, které se zabývají podobnou problematikou, pokládat [24] a [76]. Vzhledem k rozsahu lze sice tyto texty považovat za úplnější, na druhé straně však předkládaný text nabízí podrobnější a matematicky přesnější popis vybraných modelů. Podle obsahu a zpracování lze soudit, že předkládaný text je text mezioborový a proto lze očekávat, že může být přínosný jak pro ekonomy, kteří se zabývají teorií ekonomického růstu nebo teorií hospodářských cyklů, tak pro matematiky, kteří se zajímají o možnost aplikací teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

Kapitola 1

Elementární aplikace obyčejných diferenciálních rovnic v ekonomii.

Ekonomie zkoumá, jak různé společnosti využívají vzácné zdroje k výrobě užitečných a žádaných komodit a jak je rozdělují mezi různé skupiny, srv. [73]. Podle [42] si svět ekonomiky můžeme představit jako skupinu firem, domácností a dalších institucí jako vláda, nevládní instituce a bankovní systém. Mezi těmito skupinami a jednotlivci existují vztahy reprezentované toky zboží, služeb, peněz a informací. Vzájemná komunikace se uskutečňuje pomocí různých trhů. Na trhu se rozhoduje kolik zboží je žádáno a nabízeno. Za kolik jsou kupující ochotni dané zboží koupit a za kolik ho jsou prodávající ochotni prodat. Kromě této výměny informací dochází k technickému pokroku, kdy jsou nové výrobky vyráběny pomocí nových objevů v technických vědách nebo ve fyzice. To vše se odehrává v čase, takže většina procesů, které se v ekonomii uskutečňují má svůj vývoj. Při časovém vývoji nás zajímá pohyb, tj. časové změny ekonomických veličin, a příčiny tohoto pohybu. Souhrnně lze mluvit o *dynamice procesů ekonomického systému.*

Jako model evolučního procesu lze výhodně využít diferenciální rovnice. Ekonomické veličiny však nabývají celočíselných hodnot případně hodnot racionálních s několika málo desetinnými čísly. Vývoj takových veličin zřejmě nelze popsat spojitou nebo dokonce diferencovatelnou funkcí, která představuje řešení diferenciální rovnice. V případě, že však je jednotka dostatečně malá vzhledem k celku, lze tyto veličiny diferencovatelnou funkcí aproximovat. V následujícím textu to budeme dělat, aniž bychom právě uvednou úvahu opakovali.

Dojde-li k měření nějaké sledované ekonomicky zajímavé veličiny, získáme zpravidla posloupnost hodnot. Navíc sběr dat pro měření nelze uskutečnit v krátké době. Rozhodnutí, která na základě naměřených hodnot činíme se také odehrávají v diskrétních časových okamžicích a nikoliv spojitě. To nás i v tomto případě vede k tomu, že ekonomické veličiny nebo procesy lze stěží popsat spojitou funkcí, ale spíše posloupností. Nicméně, podobně jako v předchozím odstavci budeme předpokládat, že jednotka času je dostatečně malá vzhledem k celkové délce procesu, kdy sledujeme danou veličinu a spojitá funkce je dobrou aproximací naměřených hodnot v diskrétních časových okamžicích.

Pokud bychom uvažovali procesy v diskrétním čase, jako model bychom použili diferenční rovnice, to však není případ tohoto textu. Na mnoha místech však diferenční rovnice formulovat budeme, pomocí limitního procesu však posléze napíšeme diferenciální rovnici.

Změny ekonomických veličin jsou zpravidla vyjadřovány pomocí přírůstků nebo pomocí relativních přírůstků. Některé sledované veličiny mají charakter *toku,* tj. jejich rozměr je určité množství za jednotku času – např. národní důchod, spotřeba, investice. O takových veličinách bychom měli hovořit jako o okamžitých *intenzitách* – tedy měli bychom např. říkat intenzita národního důchodu, intenzita spotřeby, intenzita investic. Obvykle se však toto slovní spojení nepoužívá a ani v tomto textu nebude takto použito.

V následujícím textu budeme uvažovat obyčejné diferenciální rovnice ve tvaru

$$\dot{x} = f(t, x),$$

kde $\dot{x} = dx/dt$ vyjadřuje derivaci podle proměnné t a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Proměnná $t \in \mathbb{R}$ obvykle představuje čas a funkce $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje časový vývoj sledované veličiny. Pojem řešení uvedené rovnice je upřesněn v sekci 2.1. První derivace podle času $\dot{x}(t)$ představuje rychlost změny sledované veličiny v čase t nebo tempo změny v čase t. Často bývá také interpretována jako okamžitý přírůstek dané veličiny (může být kladný i záporný) v čase t. Podíl $\dot{x}(t)/x(t)$ představuje okamžitý relativní přírůstek. Druhá derivace $\ddot{x}(t)$ pak představuje zrychlení sledované veličiny v čase t. Budeme také pracovat s počátečním problémem ve tvaru

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0.$$

Podrobnější popis problému lze nalézt v kapitole 2.

1.1 Malé modely

V této sekci popíšeme některé malé modely, které se vztahují k ekonomickým problémům a které vedou k jednoduchým diferenciálním rovnicím. Dají se využít jako motivační nebo problémové úlohy při výuce diferenciálních rovnic v kurzech matematiky pro ekonomy, manažery nebo informatiky. Autor některé z nich využil v [25], kde jsou vyloženy elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu. Konkrétně metoda separace proměnných, metody řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu a metoda řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. V následujících oddílech je popsáno spojité úročení vkladu, jev inflace, funkce poptávky, časový průběh zapomínání a učení se, základní model pro reklamu jistého typu zboží a vyjádření absolutní a relativní míry averze k riziku. Způsob odvození diferenciálních rovnic, který bude použit, navazuje na [79].

1.1.1 Spojité úročení

Půjčí-li někdo někomu peníze, požaduje za tuto službu zaplatit. *Úrok* je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz. Hodnota úroku se obvykle určuje pomocí *úrokové míry,* která vyjadřuje relativní velikost hodnoty úroku vzhledem k hodnotě zapůjčené částky. Způsob, jakým jsou věřiteli započítávány úroky k zapůjčené částce, se nazývá *úročení.*

Lze říci, že úročení patří mezi základní a historicky nejstarší bankovní operace. Klient svěří bance své peníze, banka se stává dlužníkem a klient věřitelem, který za svoji službu inkasuje úroky. Připisují-li se na bankovní účet úroky pravidelně za určitou dobu, lze celkovou částku na účtu vyjádřit pomocí geometrické posloupnosti a studenti se s tímto typem úročení seznamují již na středních školách, viz [57]. V dnešní době existují účty, na které se připisují úroky každý den. Je to umožněno rozsáhlým využíváním výpočetní techniky v bankovnictví. Pro teoretické úvahy je v některých případech vhodné předpokládat, že jsou úroky připisovány každý okamžik. Pak hovoříme o *spojitém úročení*. Předpokládejme, že konstantní úroková míra za jednotku času je $r \in [0, 1)$. Dále uvažujme krátký časový interval délky $\tau \in (0, 1]$. Zvolme nějaký základní okamžik – začátek roku, začátek měsíce atp. Označme $t \in [0, \infty)$ čas vztahující se k základnímu okamžiku a nechť je v čase t na účtu částka $B(t) > 0$. V čase $t + \tau$ je pak na účet připsána poměrná částka $rB(t)\tau$. Celková hodnota účtu tak bude

$$B(t + \tau) = B(t) + rB(t)\tau.$$

Odtud po úpravě získáme

$$\frac{B(t + \tau) - B(t)}{\tau} \frac{1}{B(t)} = r.$$

Budeme-li předpokládat, že funkce $B = B(t)$ je diferencovatelná, lze pro $\tau \to 0$ psát

$$\frac{\dot{B}}{B} = r, \ B(0) = A, \tag{1.1.1}$$

kde $A > 0$ je počáteční vklad na účet. Řešením této lineární diferenciální rovnice získáme

$$B(t) = Ae^{rt}, \ t \in [0, \infty), \tag{1.1.2}$$

kde $B(t)$ představuje budoucí hodnotu počátečního vkladu A v čase t.

Poznámka 1.1.1. Předpokládejme, že na účet, jehož počáteční hodnota je nulová, jsou nepřetržitě (spojitě) vkládány peníze tempem $P(t)$ Kč za časovou jednotku a nechť se jedná o účet se spojitým úročením s úrokovou mírou $r \in [0,\, 1)$. Určíme budoucí hodnotu účtu v čase $T > 0$: Nechť je hodnota vkladu v čase t rovna $B(t)$. V čase $t + \tau$, bude na účet připsána částka $(B(t)r + P(t))\tau$. Pro změnu hodnoty vkladu tedy máme

$$B(t + \tau) - B(t) = (B(t)r + P(t))\tau.$$

Pokud tuto rovnici vydělíme $\tau > 0$, získáme pro $\tau \to 0$ lineární diferenciální rovnici

$$\dot{B}(t) = rB(t) + P(t), \ B(0) = 0.$$

Odtud lze pro $t = T$ psát řešení problému ve tvaru

$$B(T) = \int_0^T P(s)e^{r(T-s)} ds,$$

což je hledaná budoucí hodnota účtu v Kč. Odlišný způsob řešení, ve kterém jsou použity riemannovské integrální součty, je uveden v [25].

Poznámka 1.1.2. Zabývejme se také opačnou otázkou. Jaké množství peněz $A(t)$ by při spojitém úročení s úrokovou mírou $r \in [0, 1)$ za dobu délky $t > 0$ vzrostlo na hodnotu B? Využijeme-li (1.1.2), vzroste za dobu délky $t > 0$ neznámá hodnota $A(t)$ na hodnotu $A(t)e^{rt}$. Tedy $B = A(t)e^{rt}$, odkud

$$A(t) = Be^{-rt}. \tag{1.1.3}$$

Hodnotu $A(t)$ lze interpretovat jako *současnou hodnotu* částky B, která bude k dispozici v budoucím čase $t > 0$.

Poznámka 1.1.3. Při úročení dochází k tomu, že částka, která je na počátku tohoto procesu vložena, je po určitou dobu zhodnocována připisováním úroků a na konci daného období je vyplacena. Při některých obchodech však dochází k tomu, že částka je klientovi vyplacena na počátku, banka si za to naúčtuje poplatek ve formě ušlých úroků a klient po určité době zaplatí celou dlužnou částku. Tohoto způsobu se používá při obchodování se směnkami a úrok, který se nevztahuje k počáteční vložené částce nebo poskytnutému úvěru, ale ke splatné částce, to znamená k částce, kterou vyplatí dlužník věřiteli na konci úrokové doby, se nazývá *diskont.* Úroková míra vázaná na splatnou částku se pak nazývá *diskontní míra.* Vztah (1.1.3) lze nyní interpretovat také takto: $A(t)$ je aktuální (současná) hodnota budoucí splátky ve výši B, která bude při diskontní míře r splacena v čase $t > 0$. Jinými slovy: $A(t)$ je hodnota úvěru, kterou banka vyplatí v čase $t = 0$ a v čase $t > 0$ dlužník splatí částku ve výši B. Říká se také, že hodnota $A(t)$ je *diskontovaná částka* splatné částky B.

Poznámka 1.1.4. V této poznámce se budeme zabývat vztahem, který bude dále v tomto textu několikrát použit. *Důchod* neboli *anuita* je posloupnost stejných plateb, které jsou v průběhu určitého období periodicky vypláceny příjemci. Délka časové periody výplat je přitom konstantní. Abychom pro výplaty důchodu mohli použít spojitý model, nahradíme termín konstantních plateb za konstantní periodu termínem konstantní tempo plateb. Tímto termínem budeme rozumět tok peněz vyjádřený jako intenzitu, jejíž jednotkou je množství peněžních jednotek za jednotku času, tedy např. Kč za měsíc. Uvedeme vztah, který vyjadřuje *současnou hodnotu důchodu.* Tímto termínem se rozumí hodnota všech plateb, které se v průběhu vyplácení důchodu uskuteční a přitom hodota každé z těchto plateb je vztažena k současnému okamžiku.
Označme $PV(t)$ současnou hodnotu důchodu,[1] který je vyplácen po dobu délky $t \geq 0$. Nechť dále $A(t)$ je okamžité tempo výplat důchodu v čase t a $r \in [0,\, 1)$ konstantní diskontní míra. Pak přírůstek $PV(t+\tau) - PV(t)$ současné hodnoty důchodu za velmi krátkou dobu $\tau > 0$ lze vyjádřit jako diskontovanou hodnotu okamžitého tempa důchodu, tj.

$$PV(t+\tau) - PV(t) = A(t)e^{-rt}\tau.$$

Vydělíme-li předchozí vztah τ, lze pro $\tau \to 0$ psát

$$\dot{PV}(t) = A(t)e^{-rt}, \; PV(0) = 0.$$

Odtud získáme

$$PV(t) = \int_0^t A(s)e^{-rs}ds. \tag{1.1.4}$$

Poznámka 1.1.5. V [62] uvedl autor diskrétní model pro splácení půjčky. Při formulaci modelu bylo použito diferenční rovnice a hodnoty, které model poskytl se shodovaly s údaji, které uvádějí banky. V této poznámce se soustředíme na spojitý model dané úlohy. Hodnota tohoto spojitého modelu spočívá v jeho jednoduché konstrukci a jednoduchém řešení.
Banky nebo různé finanční společnosti prodávají půjčky, aby svým klientům umožnily nákup finančně nákladného zboží. Uvažujme, že hodnota půjčky je D_0 a sjednaná doba, za kterou je třeba půjčku splatit, je $T > 0$. Označíme-li $D(t)$ hodnotu půjčky v čase $t \in [0,\, T]$, je $D(0) = D_0$ a $D(T) = 0$. Nechť úrok, za který banka půjčku poskytne, je $p \in (0,\, 1)$ a

[1] PV jsou počáteční písmena anglického názvu *present value.*

uvažujme, že banka si připisuje spojitě úroky z dlužné částky $D(t)$. Dále uvažujme, že klient splácí svůj dluh tempem s. Toto tempo je třeba určit. Jako jednotku tempa splátek lze uvažovat např. Kč za měsíc.
V čase $t \in [0, T]$ se za krátký časový interval $\tau > 0$ dlužná částka zmenší o splátky $s \cdot \tau$ a zvětší se o úroky $pD(t) \cdot \tau$ z dlužné částky $D(t)$. To lze psát jako

$$D(t + \tau) = D(t) - s \cdot \tau + pD(t) \cdot \tau.$$

Po obvyklé úpravě získáme lineární diferenciální rovnici s okrajovými podmínkami

$$\dot{D}(t) = -s + pD(t),\ D(0) = D_0,\ D(T) = 0.$$

Řešení této rovnice s počáteční podmínkou lze psát ve tvaru

$$D(t) = \left(D_0 - \frac{s}{p}\right) e^{pt} + \frac{s}{p}$$

a přihlédneme-li ke koncové podmínce $D(T) = 0$, získáme požadovaný vztah pro tempo splátek

$$s = \frac{D_0 e^{pT}}{e^{pT} - 1} p.$$

1.1.2 Inflace

Inflace je pozorovaný jev, při kterém dochází ke zvyšování všeobecné úrovně cen. Všeobecná úroveň cen je dána cenovou hladinou, která je měřena pomocí cenových indexů. Dojde-li v průběhu času k růstu cenové hladiny, pak ekonomické subjekty vydávají větší množství peněz pro uskutečnění svých nákupů, než tomu bylo před zvýšením. Abychom mohli cenovou hladinu popsat, uvedeme několik definic, které souvisí s měřením ekonomických veličin, viz [42] a [20].

Deflátor hrubého domácího produktu. Vektorem $y \in \mathbb{R}^n_{0+}$ označme finální produkci jisté ekonomiky. Přitom $n \in \mathbb{N}$ značí počet všech druhů zboží nebo služeb, které jsou v dané ekonomice spotřebovány případně investovány. Dále označme $p \in \mathbb{R}^n_{0+}$, vektor cen příslušných danému zboží a daným službám. Vektory y a p chápeme jako sloupcové vektory. *Nominální hrubý domácí produkt $NGDP$* lze nyní vyjádřit jako skalární součin vektorů y a p ve tvaru

$$NGDP = p^\top y,$$

kde $p^\top$ je transponovaný vektor k vektoru cen p. Zvolme nějaký základní rok. Označme t běžné období vztahující se k základnímu roku. *Nominální hrubý domácí produkt v běžném období $NGDP(t)$* je dán jako skalární součin vztahem

$$NGDP(t) = p(t)^\top y(t).$$

Hrubý domácí produkt v běžném období $RGDP(t)$ získáme, jestliže pro vyjádření hrubého domácího produktu použijeme ceny základního období, tj.

$$RGDP(t) = p(0)^\top y(t).$$

Jak bylo řečeno k vyjádření inflace se používá cenová hladina, kterou pro běžné období označíme $P(t)$. Pro měření cenové hladiny se používá buď *deflátor hrubého domácího produktu* $GDPD(t)$, který je dán vztahem

$$GDPD(t) = \frac{p(t)^\top y(t)}{p(0)^\top y(t)} = \frac{NGDP(t)}{RGDP(t)}$$

nebo častěji *spotřebitelský cenový index.*

Spotřebitelský cenový index $CPI(t)$ se používá pro zachycení dopadů změn cen zboží a služeb na průměrné domácnosti a jejich životní náklady. Vektorem $x_0 \in \mathbb{R}^k_{0+}$ označme spotřební koš, který spotřebovává průměrná domácnost v základním období. Přitom $k \in \mathbb{N}$ je počet druhů zboží nebo služeb, které jsou v základním období průměrnou rodinou nejvíce spotřebovávány. Dále označme $c(t) \in \mathbb{R}^k_{0+}$ vektor příslušných cen v běžném období t. Tedy $c(0)$ je vektor cen v základním období. Nyní lze definovat

$$CPI(t) = \frac{c(t)^\top x_0}{c(0)^\top x_0}.$$

Míra inflace. Mějme tedy cenovou hladinu $P(t)$. Míra inflace je definována jako relativní míra změny cenové hladiny:

$$\frac{P(t) - P(t-1)}{P(t-1)}, \quad t \in \{1, 2, \dots\}.$$

Uvažujme dále, že umíme měřit cenovou hladinu v libovolném okamžiku. Nechť je dán pevný časový okamžik t a uvažujme cenovou hladinu v čase $t - h$. Cenová hladina se za dobu délky h změnila o $P(t) - P(t-h)$. Průměrně za dobu h se tedy cenová hladina změní o $(P(t) - P(t-h))/h$ a míra inflace za dobu h je dána vztahem

$$\pi(t) = \frac{P(t) - P(t-h)}{h} \cdot \frac{1}{P(t-h)}.$$

Budeme - li nyní předpokládat, že $P(t)$ je spojitá diferencovatelná funkce, můžeme pro $h \to 0$ psát okamžitou míru inflace

$$\pi(t) = \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}. \tag{1.1.5}$$

Poznámka 1.1.6. Předpokládejme, že v daném roce je v časovém intervalu $I = [a, b]$ okamžitá míra inflace konstantní:

$$\pi(t) = \pi,\ t \in I.$$

Známe-li počáteční hodnotu $P(a)$, lze na intervalu I určit časovou závislost $P(t)$. Řešením lineární diferenciální rovnice (1.1.5) získáme

$$P(t) = P(a)e^{\pi(t-a)},\ t \in I. \tag{1.1.6}$$

Poznámka 1.1.7. Nechť platí předpoklady z předchozí poznámky. Známe-li počáteční hodnotu $P(a)$ a a konečnou hodnotu $P(b)$, lze určit konstantní míru inflace π v časovém intervalu I. Z (1.1.6) získáme

$$\pi = \frac{1}{b-a} \cdot \ln \frac{P(b)}{P(a)}.$$

Chceme-li například zjistit konstantní okamžitou míru inflace, která způsobí dvojnásobné zvětšení cenové hladiny v průběhu jednoho roku, položíme $a = 0,\ b = 1$ a $P(b) = 2P(a)$. Pak $\pi = \ln 2 \doteq 0,693$. Vyjádříme-li tuto hodnotu v procentech, jedná se o okamžitou inflaci s hodnotou asi 70%. Má-li uvažovaný rok 365 dní a vezmeme-li v úvahu (1.1.6), lze průměrnou relativní změnu cenové hladiny za jeden den při této okamžité inflaci vyjádřit jako

$$\frac{P(t) - P(t-1/365)}{P(t-1/365)} = 2^{\frac{1}{365}} - 1 \doteq 0,0019,$$

což představuje průměrný denní nárůst cenové hladiny asi o $0,2\%$.

Poznámka 1.1.8. Uvažujme klienta banky, který spoří na důchod. Nechť banka klientův vklad úročí spojitě a dlouhodobá úroková míra je $r \in (0,1)$. Předpokládejme, že klientovy současné minimální životní náklady jsou Z Kč za rok, $Z > 0$, a že dlouhodobá míra inflace je $\pi \in (0,1)$. Aby mělo spoření smysl, budeme předpokládat, že $r > \pi$. Půjde-li klient do důchodu za T let, jak velkou částku by měl naspořit, aby mohl z těchto úspor financovat své životní náklady dalších T let?
Uvažujme libovolný časový okamžik $t \in [T, 2T]$, tj. okamžik, kdy je klient v důchodu. Za krátký časový interval délky $\tau > 0$ se jeho úspory $B(t)$ v čase t zvětší o částku $rB(t) \cdot \tau$. Jeho náklady vzhledem k inflaci činí $Ze^{\pi(t+T)} \cdot \tau$ a o tuto částku se jeho úspory sníží. Pro $t \in [T,\ 2T)$ můžeme tedy psát

$$B(t+\tau) - B(t) = rB(t)\tau - Ze^{\pi(t+T)}\tau.$$

Vydělíme-li předchozí rovnici $\tau > 0$, získáme pro $\tau \to 0$ lineární diferenciální rovnici

$$\dot{B}(t) = rB(t) - Ze^{\pi(t+T)},\ t \in [T,\ 2T] \tag{1.1.7}$$

s koncovou podmínkou $B(2T) = 0$. Určíme-li hodnotu $B(T)$, budeme znát žádanou velikost úspor. Řešení nalezneme za podmínky $r - \pi > 0$, která odpovídá situaci ve stabilizované společnosti. Získáme

$$B(t) = \frac{Ze^{\pi T}}{r-\pi}(e^{\pi t} - e^{2\pi T}e^{r(t-2T)}),\ t \in [T,\ 2T].$$

Odtud pak máme

$$B(T) = \frac{Ze^{2T\pi}}{r-\pi}(1 - e^{-(r-\pi)T}).$$

1.1.3 Poptávka.

Předpokládejme, že v nějakém obchodě se přeceňování zboží odehrává jednou týdně. Označme $Q_d(p)$ týdenní poptávku po určitém produktu při ceně p Kč za jeden kus tohoto produktu. Prodejce může tuto cenu měnit. Uvažujme, že $p \in I = (p_1,\ p_2) \subset [0,\ \infty)$. Dojde-li však ke změně ceny, dojde také ke změně počtu prodaných kusů daného zboží. Zkušenost ukazuje, že při vyšší ceně bude počet prodaných kusů menší. Při odvození rovnice můžeme uvažovat následujícím způsobem: Změna poptávky $Q_d(p+h)-Q_d(p)$ při malé změně ceny h je přímo úměrná hodnotě poptávky $Q_d(p)$ při původní ceně p a přímo úměrná hodnotě změny ceny h. Pokud je cena daného produktu vysoká, bude mít malá změna ceny na změnu poptávky malý vliv. Naopak, pokud je cena produktu nízká, má i malá změna původní ceny velký vliv na poptávku daného zboží. To znamená, že změna poptávky je nepřímo úměrná hodnotě původní ceny p. Nyní lze psát diferenční rovnici

$$Q_d(p+h) - Q_d(p) = -\lambda \frac{Q_d(p)}{p} h,$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta úměrnosti. Záporné znaménko představuje úbytek poptávky při zvýšení ceny. Pokud je funkce $D(p)$ diferencovatelná, lze pro $h \to 0$ psát

$$Q_d'(p) = -\lambda \frac{Q_d(p)}{p}, \tag{1.1.8}$$

kde $p \in I$. Je-li známa poptávka $Q_d(p_0) > 0$ při ceně $p_0 \in I$, lze nalézt řešení (1.1.8) ve tvaru

$$Q_d(p) = Q_d(p_0) \left(\frac{p_0}{p} \right)^\lambda, \; p \in I. \tag{1.1.9}$$

Odtud máme

$$\lim_{p \to 0+} Q_d(p) = \infty.$$

To však není zcela uspokojivý výsledek, i při téměř nulové ceně je poptávka po daném produktu pouze omezená. Místo (1.1.12) lze vhodněji, srv. [32], uvažovat vztah

$$Q_d'(p) = -\lambda \frac{Q_d(p)}{p+\gamma}, \; \lambda > 0, \tag{1.1.10}$$

kde $\gamma > 0$ je nějaká vhodná konstanta. Řešení (1.1.10) je funkce

$$Q_d(p) = Q_d(p_0) \left(\frac{p_0+\gamma}{p+\gamma} \right)^\lambda, \; p \in I$$

a platí

$$\lim_{p \to 0+} Q_d(p) = Q_d(p_0) \left(\frac{p_0+\gamma}{\gamma} \right)^\lambda < \infty.$$

Poznámka 1.1.9. Podívejme se na předchozí úlohu obecněji, viz [58]. Z pohledu firmy, která prodává svůj výrobek, je žádoucí předvídat, jaký vliv bude mít změna ceny p na příjem $R = R(p)$ firmy. K tomuto účelu se v ekonomii používá veličina *cenová elasticita poptávky.* Tato veličina měří citlivost velikosti poptávky na změnu ceny a je závislá na druhu zboží. Poptávka po zboží je obvykle klesající funkcí ceny tohoto zboží. V závislosti na rychlosti poklesu poptávky může dojít k tomu, že celkový příjem firmy a) klesne b) zůstane stejný nebo se c) zvýší. V případě a) říkáme, že poptávka je citlivá nebo *elastická* na změnu ceny. V případě b) a c) říkáme, že elastická není. Je známo, že

$$R(p) = pq = pQ_d(p),$$

kde $q = Q_d(p)$ je množství poptávané komodity při ceně p. Derivací předchozí funkce získáme

$$R'(p) = Q_d(p) + pQ'_d(p).$$

Nyní lze uvažovat následující možnosti

- Poptávka je elastická, jestliže $R'(p) < 0$. To nastane právě tehdy, když $pQ'_d(p) < -Q_d(p)$. Protože $Q_d(p) > 0$, lze předchozí nerovnici psát ve tvaru

$$-\frac{pQ'_d(p)}{Q_d(p)} > 1.$$

- Poptávka je neelastická, jestliže $R'(p) \geq 0$. To nastane právě tehdy, když $pQ'_d(p) \geq -Q_d(p)$. Protože $Q_d(p) > 0$, lze předchozí nerovnici psát ve tvaru

$$-\frac{pQ'_d(p)}{Q_d(p)} \leq 1.$$

Poptávka je klesající, tedy $Q'_d(p) < 0$. To znamená, že poptávka je elastická, jestliže je absolutní hodnota bezrozměrné veličiny

$$e_d(p) = p\frac{Q'_d(p)}{Q_d(p)} < 0 \tag{1.1.11}$$

větší než jedna. Veličina $e_d(p)$ se v ekonomické literatuře nazývá *cenová elasticita poptávky v bodě*. Předpokládejme dále, že cenová elasticita je v intervalu cen $I = (p_1, p_2) \subseteq [0, \infty)$ konstantní, tj.

$$e_d(p) = -\lambda, \tag{1.1.12}$$

pro $\lambda > 0$ a $p \in I$. Získali jsme tak rovnici (1.1.8), jejíž řešení je dáno (1.1.9). To znamená, že řešení (1.1.9) je platné pro zboží, které má na intervalu I konstantní cenovou elasticitu poptávky.

Poznámka 1.1.10. Vraťme se ještě ke vztahu (1.1.11). Je

$$e_d(p) = \frac{p}{Q_d(p)} \lim_{h \to 0} \frac{Q_d(p+h) - Q_d(p)}{h}.$$

Pro malá h, která představují malý přírůstek ceny, lze uvažovat bezrozměrnou veličinu

$$E_d(p) = \frac{p}{Q_d(p)} \frac{Q_d(p+h) - Q_d(p)}{h} = \frac{\dfrac{Q_d(p+h) - Q_d(p)}{Q_d(p)}}{\dfrac{h}{p}},$$

která se nazývá *cenová elasticita poptávky.* Tato veličina vyjadřuje poměr relativní změny poptávky a relativní změny ceny a v ekonomii se nejčastěji interpretuje tak, že udává, o kolik procent se přibližně změní poptávka po zboží, jestliže se cena tohoto zboží změní o 1%, podrobněji např. [83] a [65].

1.1.4 Ebbinghausův model zapomínání.

Německý psycholog Hermann EBBINGHAUS (1850–1909) provedl v roce 1885 empirický výzkum zapomínání naučené látky. Popis Ebbinghausova experimentu lze nalézt v [5]. My budeme verbální závěry tohoto výzkumu formulovat pomocí matematických vztahů a sestavíme matematický model zapomínání, který vychází z [32]. Předpokládejme, že se student naučil jistou dávku učební látky a v čase $t = 0$ tuto látku ovládá. Postupem času však některé naučené informace zapomíná. Označme $p(t)$ relativní množství látky, kterou v čase t měřeném od okamžiku plného zvládnutí látky ještě ovládá. Zřejmě $p(0) = 1$ a $p(t) \in [0, 1]$. Optimisticky předpokládejme, že určitou část látky student nikdy nezapomene. Označme relativní množství této látky $b \in \langle 0, 1)$. Předpokládejme dále, že množství zapomenuté látky je přímo úměrné délce časového intervalu $\tau > 0$ a množství látky, které je možné ještě zapomenout. To lze zapsat ve tvaru

$$p(t + \tau) - p(t) = -k(p(t) - b)\tau,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Záporné znaménko před konstantou k znamená, že funkce p je klesající a odpovídá tomu, že naučenou látku zapomínáme. Odtud pak

$$\frac{p(t + \tau) - p(t)}{\tau} = -k(p(t) - b).$$

Pro $\tau \to 0$ získáme diferenciální rovnici

$$\dot{p} = -k(p - b),\ p(0) = 1$$

kde $p = p(t)$ je neznámá reálná funkce reálné proměnné t. Protože podle podmínek modelu je $p > b$ a $1 > b$, získáme řešení ve tvaru

$$p(t) = b + (1 - b)e^{-kt},\ t \in [0, \infty).$$

Tento výsledek by měli vzít na vědomí také zaměstnavatelé v případě, že se jejich zaměstnanci vrací z dovolené nebo se vrací po delší nemoci do pracovního procesu. Každý zaměstnanec totiž některé činnosti své profese zapomíná a musí si je připomenout. Samozřejmě, čím je činnost náročnější, tím snáze může zaměstnanec své pracovní úkony zapomenout. S tím souvisí hodnota konstanty b. Proces zapomínání je velmi individuální, každý si vybavuje naučenou činnost nebo látku jinak rychle a jinak kvalitně, s tím souvisí hodnota konstanty k.

1.1.5 Model učení

V předchozím odstavci jsme formulovali jednoduchý model zapomínání. Nyní budeme formulovat podobný model pro učení. Každý zaměstnanec, ať je jakkoliv kvalifikovaný, který nastoupí na nové pracovní místo, se nejdříve musí seznámit s novou činností, novým prostředím nebo novým vybavením. Učí se nové práci. Aby zaměstnavatelé tento proces urychlili, často pro nové zaměstnance organizují školení. Předpokládejme, že $p(t) \in [0,\ 1]$ představuje relativní množství činností a informací, které již zaměstnanec na novém místě v čase t ovládá. Uvažujme nyní, že relativní množství nově naučených činností nebo osvojení informací je přímo úměrné délce časového intervalu $\tau > 0$, po kterou se zaměstnanec učí a relativnímu množství činnosti nebo látky $(1 - p(t))$, která mu ještě zbývá k osvojení. To lze zapsat ve tvaru

$$p(t + \tau) - p(t) = k(1 - p(t))\tau,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Vydělíme-li předchozí rovnici $\tau > 0$, získáme pro $\tau \to 0$, diferenciální rovnici

$$\dot{p} = k(1 - p), \ p(0) = p_0,$$

kde $p_0 \in [0, 1)$ představuje počáteční úroveň znalostí zaměstnance. Řešením této rovnice je

$$p(t) = 1 - (1 - p_0)e^{-kt}, \ t \in [0, \infty).$$

1.1.6 Vidale–Wolfův reklamní model

Chce-li nějaká firma uvést svůj nový výrobek na trh nebo chce udržet svoji pozici na trhu, provádí reklamu. Model popisující podíl vybrané firmy na celkových prodejích na trhu vychází z práce [87] autorů M. L. Vidale a H. B. Wolfe. V následujícím textu bude model formulován na základě [32] a [67].

Budeme předpokládat trh s jedním typem zboží a několika výrobci – firmami. Vyberme jednu z těchto firem. Označme $S(t)$ hodnotu prodejů vybrané firmy v čase t měřenou v peněžních jednotkách za jednotku času. Dále nechť $M(t)$ je hodnota všech prodejů na daném trhu v čase t měřená v peněžních jednotkách za jednotku času. Nakonec označme $u = u(t) > 0$ náklady vynaložené na reklamu v čase t měřené v peněžních jednotkách za jednotku času. Protože má firma omezené finanční prostředky, lze předpokládat, že

$$u \in [0, \overline{u}], \tag{1.1.13}$$

kde $\overline{u} > 0$ je maximální firemní rozpočet, který lze použít pro reklamu. Nyní formulujme předpoklady modelu:

• Prodej výrobku závisí na nasycenosti trhu a lze ho ovlivnit vhodně zvolenou reklamou. Čím větší je potenciální hodnota prodejů $M(t) - S(t)$ v čase t, tím více nových prodejů se může uskutečnit. Budeme předpokládat, že přírůstek nově uskutečněných prodejů je přímo úměrný relativnímu množství zatím neuskutečněných prodejů $(M(t) - S(t))/M(t)$ v čase t. Čím více peněžních prostředků na propagaci výrobku firma utratí, tím větší přírůstek nově uskutečněných prodejů lze očekávat. To znamená, že v prvním přiblížení lze považovat přírůstek nových prodejů přímo úměrný intenzitě reklamy u. Samozřejmý předpoklad je, že čím delší časový interval $\tau > 0$ se výrobek prodává, tím více výrobků se prodá a tedy tím vyšší je hodnota nově uskutečněných prodejů.

• Zákazník, který si již výrobek koupil, ho vyzkouší a na základě své zkušenosti se rozhodne, zda ho příště koupí znovu nebo koupí podobný výrobek od jiné firmy. Tento proces firma přímo neovlivní. Může ho pouze ovlivnit nepřímo – kvalitou svých výrobků. To znamená, že úbytek prodejů je přímo úměrný uskutečněným prodejům $S(t)$ v čase t a také délce časového intervalu τ, po který proces úbytku prodejů pozorujeme.

Oba popsané jevy se navzájem doplňují, takže můžeme psát diferenční rovnici

$$S(t + \tau) - S(t) = (\alpha u(t)\frac{M(t) - S(t)}{M(t)} - \beta S(t))\tau,$$

kde konstanta $\alpha > 0$ charakterizuje účinnost reklamy a konstanta $\beta > 0$ souvisí s kvalitou resp. nekvalitou výrobku a zapomnětlivostí spotřebitelů a charakterizuje míru ztracených prodejů ve prospěch jiných firem. Jestliže poslední rovnici vydělíme τ, získáme pro $\tau \to 0$ počáteční problém

$$\dot{S} = \alpha u(t)\frac{M(t) - S}{M(t)} - \beta S,\ S(0) = S_0. \tag{1.1.14}$$

Předpokládejme, že hodnota všech prodejů uskutečněných na trhu za časovou jednotku je konstantní, $M(t) = M$, $t \in [0, \infty)$. Zaveďme

$$y(t) = \frac{S(t)}{M},\ a = \frac{\alpha}{M} > 0,\ b = \beta > 0 \tag{1.1.15}$$

To znamená, že $y = y(t) \in [0, 1]$ je podíl vybrané firmy na celkových prodejích na trhu. Problém (1.1.14) lze nyní psát jako

$$\dot{y} = au(1 - y) - by,\ y(0) = y_0, \tag{1.1.16}$$

kde $y_0 = S_0/M \in [0, 1]$ je počáteční podíl firmy na celkových prodejích na trhu. V případě, že intenzita reklamy je konstantní v čase, tj. $u(t) = C \in [0, \overline{u}]$, můžeme řešení lineární diferenciální rovnice (1.1.16) psát jako

$$y(t) = (y_0 - y_C)e^{-(aC+b)t} + y_C,\ t \in [0, \infty), \tag{1.1.17}$$

kde

$$y_C = \frac{aC}{aC + b} \tag{1.1.18}$$

je stacionární řešení rovnice (1.1.16). Uvedený model později, v sekci 4.7, rozšíříme a uvedeme možné způsoby optimální strategie výdajů na reklamní propagaci výrobku.

1.1.7 Očekávaný užitek a averze k riziku

Úvahy v tomto oddílu vycházejí z konceptu očekávaného užitku, který je různým způsobem charakterizován např. v [85], [84] a [27]. V našem výkladu budeme vycházet především z [84]. V úlohách, které dosud byly nebo budou dále v tomto textu uvedeny, lze nezávisle proměnnou v řešení příslušné diferenciální rovnice interpretovat jako čas. V tomto oddíle tomu tak není, takže diferenciální rovnice, které zde uvedeme, představují jistou výjimku a podtrhují význam výuky diferenciálních rovnic pro studenty ekonomických oborů.

Nechť konečná množina $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, kde $x_i \in \mathbb{R}_{0+}$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, představuje prostor elementárních jevů, který reprezentuje plán individuální spotřeby nebo plán rozdělení spotřebitelova majetku. Nechť X je náhodná veličina, která nabývá některé z hodnot množiny Ω. Pro naše účely hodnoty této náhodné veličiny, vyjádřené v peněžních jednotkách, zastupují individuální spotřebu nebo majetek. Uvažujme pravděpodobnost P definovanou na množině náhodných jevů prostoru Ω a označme jako p_i její hodnotu určenou vztahem $P[X = x_i]$, tj. $p_i = P[X = x_i]$. Střední hodnota náhodné veličiny X je definována jako

$$EX = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

a v mikroekonomii se označuje jako *očekávaná hodnota.* V našem kontextu se jedná o očekávanou hodnotu individuální spotřeby nebo očekávanou hodnotu individuálního majetku.

Poznámka 1.1.11. Připomeňme, že střední hodnota součinu konstanty $k \in \mathbb{R}$ a náhodné veličiny X je rovna součinu této konstanty a střední hodnoty veličiny X, tj.

$$E(kX) = k\,EX.$$

Mějme dále funkci $v : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}$. Pak $v(X)$ je také náhodná veličina a pro její střední hodnotu platí

$$Ev(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i v(x_i).$$

Vyjadřuje-li funkce v užitek ze spotřeby nebo majetku, vyjadřuje $Ev(X)$ očekávaný užitek.

Uvažujme funkci užitku $u : \mathbb{R}^n_{0+} \to \mathbb{R}$. Lze-li pro u nalézt takovou funkci $v : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}$, že

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i v(x_i) = Ev(X), \tag{1.1.19}$$

nazývá se funkce u *očekávaná funkce užitku* a funkce v se nazývá *von Neumann – Morgensternova funkce užitku.*

Poznámka 1.1.12. Ve speciálním případě je existence von Neumann – Morgensternovy funkce užitku ukázána v [84] na str. 174.

Poznámka 1.1.13. Von Neumann – Morgensternova funkce užitku v je určena jednoznačně až na rostoucí afinní transformaci. To znamená, že je-li funkce v nahrazena funkcí $a + bv$, kde a a $b > 0$ jsou libovolné reálné konstanty, pak se preference, které určuje očekávaná funkce užitku u, nezmění.

Poznámka 1.1.14. Uveďme ilustraci předchozích pojmů. Předpokládejme, že počáteční majetek hráče má hodnotu w_0 Kč a že se hráč zúčastní loterie spojené s rizikem ztráty nebo získání výhry ve výši q Kč. Bude-li výsledek loterie pro hráče příznivý, bude mít s pravděpodobností p částku $x_1 = w_0 + q$. Bude-li výsledek loterie pro hráče nepříznivý, bude mít s pravděpodobností $1 - p$ částku $x_2 = w_0 - q$. Za náhodnou veličinu X lze považovat hodnotu majetku hráče po ukončení loterie, která nabývá hodnot x_1 a x_2.

Očekávaná hodnota majetku hráče je střední hodnota $px_1 + (1 - p)x_2$. Je-li $p = 1/2$, pak se jedná o hodnotu w_0. Užitek z této očekávané hodnoty označme

$$v(EX) = v(px_1 + (1 - p)x_2).$$

Očekávaný užitek z rizika spojeného s účastí v loterii je podle (1.1.19) dán

$$Ev(X) = pv(x_1) + (1 - p)v(x_2).$$

Je-li

$$pv(x_1) + (1 - p)v(x_2) < v(px_1 + (1 - p)x_2), \tag{1.1.20}$$

tj.

$$Ev(X) < v(EX),$$

hráč preferuje užitek z očekávané hodnoty svého majetku před očekávaným užitkem z rizika, a proto mluvíme o jeho averzi vůči riziku nebo o odporu k riziku. Uvědomme si dále, že (1.1.20) je vztah, který splňuje konkávní funkce.

Úvahy uvedené v předchozí poznámce lze zobecnit. Předpokládejme, že spotřebitel s von Neumann-Morgensternovou funkcí užitku $v : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}$ preferuje užitek z očekávané hodnoty libovolného spotřebního plánu před očekávaným užitkem tohoto spotřebního plánu, tj. pro jeho libovolný spotřební plán popsaný množinou Ω platí

$$Ev(X) \leq v(EX), \tag{1.1.21}$$

pak říkáme, že spotřebitel projevuje *averzi vůči riziku.*

Věta 1.1.1. *Spotřebitel projevuje averzi vůči riziku právě tehdy, když je jeho von Neumann-Morgensternova funkce užitku v konkávní.*

Důkaz. Je-li funkce v konkávní, platí Jensenova nerovnost, viz [36, str. 209]. Tato nerovnost však představuje (1.1.21). Obrácená implikace je dokázána např. v [47, str. 89]. □

Přistupme k úvaze, která umožní nalézt míru averze k riziku. Nechť $c \in \mathbb{R}_{0+}$ je určitá hodnota individuální spotřeby a uvažujme náhodnou veličinu Z, která představuje dodatečnou velikost spotřeby spojenou s podstoupením investičního rizika a pro kterou platí $EZ = 0$. Hodnoty náhodné veličiny Z jsou prvky množiny $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, kde $z_i \in \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Označme $r \in \mathbb{R}_{0+}$ nejvyšší hodnotu spotřeby, které je spotřebitel ochoten se vzdát, aby při podstoupení rizika získal dodatečnou prémii danou náhodnou veličinou Z. Veličina r je nazývána *rizikovou prémií* nebo *rizikovovou kompenzací.* Symbolicky lze psát

$$v(c - r) = Ev(c + Z), \tag{1.1.22}$$

kde výraz vlevo představuje užitek ze spotřeby na úrovni $c - r$, tj. užitek z redukované původní spotřeby, a výraz vpravo představuje očekávaný užitek ze spotřeby na úrovni $c+Z$ při podstoupení rizika. Předpokládejme nyní, že náhodná veličina Z je dána a uvažujme náhodnou veličinu tZ, kde t je parametr, pro který $t \in [0, 1]$. Pak je riziková prémie r funkcí t a můžeme psát $r = r(t)$. Pro malé hodnoty parametru t lze pro $r(t)$ psát Taylorův polynom druhého řádu v bodě $t = 0$ ve tvaru

$$r(t) = r(0) + r'(0)t + \frac{1}{2}r''(0)t^2 + o(t^2). \tag{1.1.23}$$

Přepišme vztah (1.1.22) ve tvaru

$$v(c - r(t)) = Ev(c + tZ), \tag{1.1.24}$$

odtud získáme $r(0) = 0$. Derivujeme-li obě strany v (1.1.24) dvakrát podle proměnné t, získáme

$$\begin{aligned} -v'(c - r(t))r'(t) &= E[v'(c + tZ)Z], \\ v''(c - r(t))r'(t)^2 - v'(c - r(t))r''(t) &= E[v''(c + tZ)Z^2]. \end{aligned}$$

Položíme-li v prvním z těchto vztahů $t = 0$ a využijeme-li vlastnost střední hodnoty uvedené v poznámce 1.1.11, získáme $-v'(c)r'(0) = v'(c)EZ$. Protože předpokládáme $EZ = 0$, je $r'(0) = 0$. Pokud položíme $t = 0$ ve druhém z těchto vztahů a opět použijeme vlastnost střední hodnoty uvedené v poznámce 1.1.11, získáme $-v'(c)r''(0) = v''(c)EZ^2$.

Uvědomíme-li si, že var$Z = EZ^2$ je rozptyl náhodné veličiny Z se střední hodnotou $EZ = 0$, získáme

$$r''(0) = -\frac{v''(c)}{v'(c)}\sigma^2,$$

kde $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}Z}$ je směrodatná odchylka náhodné veličiny. Použijeme-li získané výsledky, lze (1.1.23) psát jako

$$r(t) = \left(-\frac{v''(c)}{v'(c)}\right)\frac{\sigma^2}{2}t^2 + o(t^2).$$

Odtud je zřejmé, že pro malé hodnoty t závisí riziková prémie r na hodnotě výrazu

$$A(c) = -\frac{v''(c)}{v'(c)}, \tag{1.1.25}$$

který lze interpretovat jako přijatelnou míru odporu vůči riziku. V mikroekonomii se koeficient $A(c)$ nazývá *Arrow-Prattův absolutní koeficient averze vůči riziku,* srv. [84, str. 178]. Vezmeme-li v úvahu, že při vyšší spotřebě lze očekávat také vyšší užitek, tj. pro $c > 0$ je $v'(c) > 0$, a vzhledem k tomu, že podle věty 1.1.1 je funkce užitku v je konkávní, tj. pro $c > 0$ je $v''(c) < 0$, pak pro $c > 0$ platí $A(c) > 0$. Je-li absolutní koeficient odporu k riziku konstantní, tj. $A(c) = a$, kde $a \in \mathbb{R}_+$, lze řešením homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu nalézt von Neumann–Morgensternovu funkci užitku ve tvaru

$$v(c) = C_1 + C_2e^{-ac},\ c > 0,$$

kde C_1 a C_2 jsou reálné konstanty. Protože $v'(c) > 0$, je $C_2 < 0$.

Poznámka 1.1.15. Zvolíme-li $C_1 = 0$ a $C_2 = -1/a$, získáme

$$v(c) = -\frac{e^{-ac}}{a},\ c > 0, \tag{1.1.26}$$

která se nazývá *exponenciální funkce užitku s koeficientem CARA* (constant absolute risk aversion).

Předpisem

$$R(c) = A(c)\,c \tag{1.1.27}$$

se zavádí *Arrow-Prattův relativní koeficient odporu k riziku,* [84, str. 189]. Je-li tento koeficient konstantní, tj. $R(c) = b$, kde $b \in \mathbb{R}_+$, lze nalézt von Neumann–Morgensternovu funkci užitku. Položíme-li $u(c) = v'(c)$, pak

$$-\frac{u'(c)\,c}{u(c)} = b,\ c > 0.$$

To je diferenciální rovnice 1. řádu se separovanými proměnnými, odkud získáme $u(c) = C_1c^{-b}$, kde $C_1 > 0$ je reálná konstanta. Nyní je $v'(c) = C_1c^{-b}$. Je-li $b \neq 1$, je

$$v(c) = C_2 + \frac{C_1}{1-b}c^{1-b},\ c > 0.$$

Je-li $b = 1$, pak

$$v(c) = C_2 + C_1 \ln c,\ c > 0.$$

Protože pro $c > 0$ je $v'(c) > 0$, je také $C_1 > 0$.

Poznámka 1.1.16. Zvolíme-li $C_2 = -1/(1-b)$ a $C_1 = 1$, získáme

$$v(c) = \frac{c^{1-b} - 1}{1-b},\ c > 0. \tag{1.1.28}$$

V některých případech je výhodná volba $C_2 = 0$ a $C_1 = 1$. Položíme-li $\sigma = 1 - b$, lze pro $\sigma \neq 0$ psát funkci užitku ve tvaru

$$v(c) = \frac{c^{\sigma}}{\sigma},\ c > 0. \tag{1.1.29}$$

Tuto funkci budeme nazývat *mocninnou funkcí užitku s koeficientem CRRA* (constant relative risk aversion). Pro $\sigma = 0$ můžeme psát funkci užitku ve tvaru

$$v(c) = \ln c,\ c > 0 \tag{1.1.30}$$

a budeme ji nazývat *logaritmickou funkcí užitku.*

1.2 Šíření inovací

Zabývejme se otázkou, jak se šíří technologické inovace v nějakém odvětví průmyslu nebo zemědělství. Níže uvedené úvahy vycházejí hlavně z knih [9] a [32]. Popsané modely představují rozšířené verze motivačních úloh ze skript [25], kde jsou použity pro vysvětlení pojmu obyčejné diferenciální rovnice. Částečně se zde využívá také referátu, který autor přednesl v rámci konference Week of Doctoral Students 2000.

1.2.1 Základní model

Předpokládejme, že novou technologii v čase $t = 0$ používá N_0 firem z celkového počtu $N > 0$ firem a nechť jsou tyto hodnoty známé. Nechť dále $N(t)$ značí počet firem, které novou technologii používají v čase t. Pro další úvahy je vhodné zavést podíl

$$n(t) = \frac{N(t)}{N},$$

který určuje koncentraci firem v daném odvětví, které v čase t používají novou technologii, zřejmě $n(t) \in [0, 1]$. Dále označme $n_0 = n(0) = N_0/N$.

Pro jednoduchost uvažujme, že firmy přijmou danou inovaci pouze po doporučení té firmy, která již novou technologii využívá. Velikost přírůstku koncentrace firem, které za dobu $\tau > 0$ začnou používat novou technologii, můžeme zdůvodnit následující úvahou: Čím více firem používá novou technologii, tím více firem se o ní může dovědět. Čím více firem novou technologii nepoužívá, tím více firem ji může začít používat a čím déle je nová technologie používána, tím více firem se o ní může dovědět a využít ji ke zdokonalení svého výrobního procesu.

Uvedené úvahy lze formalizovat: Přírůstek koncentrace firem $n(t+\tau) - n(t)$ v čase t za časový interval $\tau > 0$, které začnou používat uvažovanou technologii, je přímo úměrný koncentraci firem $n(t)$ využívajících novou technologii v čase t, koncentraci firem $1 - n(t)$

nevyužívajících novou technologii a délce časového intervalu τ. Lze tedy psát diferenční rovnici

$$n(t+\tau) - n(t) = kn(t)(1-n(t))\tau,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Tedy

$$\frac{n(t+\tau) - n(t)}{\tau} = kn(t)(1-n(t))$$

a pro $\tau \to 0$ získáme logistickou rovnici

$$\dot{n} = kn(1-n),\ n(0) = n_0, \tag{1.2.1}$$

kde $n = n(t)$ je reálná funkce reálné proměnné t a $n_0 \in [0,1]$.

• Je–li $n_0 = 0$, je řešením rovnice (1.2.1) konstantní funkce $n(t) = 0,\ t \in [0,\infty)$. To samozřejmě znamená, že technologie, kterou žádná firma nezná, se nešíří.

• Je–li $n_0 = 1$, je řešením rovnice (1.2.1) konstantní funkce $n(t) = 1,\ t \in [0,\infty)$. To znamená, že technologie, kterou na počátku používají všechny firmy, je stále využívána všemi firmami.

• Je-li $n_0 \in (0,1)$, je ze zadání (1.2.1) pro $n(t) \in (0,\,1)$ zřejmé, že $\dot{n}(t) > 0,\ t \in [0,\infty)$. Řešení $n(t)$ rovnice (1.2.1) je tedy rostoucí funkce na $[0,\infty)$. To znamená, že koncentrace firem, které používají novou technologii, se stále zvyšuje. Derivací rovnice (1.2.1) získáme $\ddot{n} = (\dot{n})^{\cdot} = k^2 n(1-n)(1-2n)$. Protože $n(t) \in (0,1)$, můžeme rozlišit dva případy:

- Jestliže $n(t) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pak $\ddot{n}(t) > 0$. V tomto případě je řešení $n(t)$ ryze konvexní funkce. To znamená, že rychlost s níž se zvyšuje koncentrace firem, které přijímají novou technologii, se zvětšuje.
- Jestliže $n(t) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, pak $\ddot{n}(t) < 0$. V tomto případě je řešení $n(t)$ ryze konkávní funkce. Většina firem již novou technologii používá a rychlost přírůstku koncentrace firem se s postupem času zmenšuje.

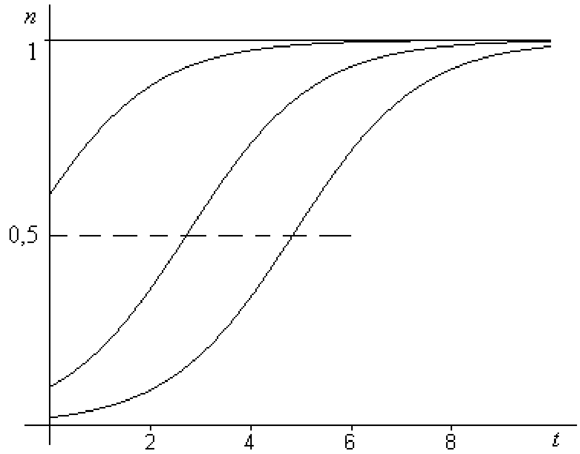
Rovnice (1.2.1) je rovnice se separovanými proměnnými a jejím řešením je funkce

$$n(t) = \frac{n_0}{n_0 + (1-n_0)e^{-kt}},\ t \in [0,\infty). \tag{1.2.2}$$

Odtud je pak zřejmé, že $\lim_{t\to\infty} n(t) = 1$, takže v průběhu času začnou využívat novou technologii všechny uvažované firmy. Z řešení (1.2.2) lze také určit dobu $t_1 > 0$, kdy $n(t_1) = 1/2$. V okamžiku t_1 se mění tempo růstu přijímání nové technologie. Je-li $n_0 \le 1/2$, pak

$$t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{1-n_0}{n_0}. \tag{1.2.3}$$

V případě $n_0 > 1/2$ takový čas neexistuje. Uvedené výsledky ilustruje obr. 1.1.



Obrázek 1.1: Grafy řešení logistické rovnice (1.2.1) pro $k = 0,75$ a počáteční hodnoty $n_0 = 0,02$, $n_0 = 0,1$, $n_0 = 0,6$ a $n_0 = 1$.

1.2.2 Model s vlivem médií.

V předchozím modelu jsme neuvažovali vliv médií na šíření informací o existenci nové technologie. Při zavádění nové technologie do praxe hrají reklamy ve specializovaných časopisech, novinách, televizi nebo rozhlase jistě významnou úlohu. Můžeme tedy učinit dodatečný předpoklad o tom, že novou technologii přijmou i takové firmy, které se o ní dovědí z médií. Přírůstek koncentrace těchto firem, které za dobu $\tau > 0$ začnou používat novou technologii, je zřejmě přímo úměrný koncentraci firem $1 - n(t)$, které zatím novou technologii nepoužívají a délce časového intervalu τ. Přičteme-li tyto firmy k těm, které se o inovaci dověděly od firem, které ji již používají, můžeme psát diferenční rovnici

$$n(t+\tau) - n(t) = kn(t)(1-n(t))\tau + l(1-n(t))\tau,$$

kde $k > 0$ a $l > 0$ jsou konstanty úměrnosti. Pokud předchozí rovnici vydělíme τ, získáme pro $\tau \to 0$ počáteční problém

$$\dot{n} = (kn + l)(1-n), \; n(0) = n_0, \tag{1.2.4}$$

kde $n_0 \in [0, 1]$.

• Je–li $n_0 = 1$, je řešením rovnice (1.2.4) konstantní funkce $n(t) = 1, \; t \in [0, \infty)$. To znamená, že technologie, kterou na počátku používají všechny firmy, je stále využívána všemi firmami.

• Je–li $n_0 \in [0, 1)$, je ze zadání (1.2.4) pro $n(t) \in [0, 1)$ zřejmé, že $\dot{n}(t) > 0, \; t \in [0, \infty)$. Řešení $n(t)$ rovnice (1.2.4) je tedy rostoucí funkce na $[0, \infty)$. To znamená, že koncentrace firem, které používají novou technologii, se stále zvyšuje. Derivací rovnice (1.2.4) získáme $\ddot{n} = (\dot{n})^{\cdot} = (kn + l)(1-n)(k - 2kn - l)$. Protože $n(t) \in [0, 1)$, lze uvažovat následující možnosti:

- Jestliže $n(t) \in \left[0, \dfrac{k-l}{2k}\right)$, pak $\ddot{n}(t) > 0$. V tomto případě je řešení $n(t)$ ryze konvexní funkce a tempo růstu koncentrace firem, které přijímají novou technologii se zrychluje.

- Jestliže $n \in \left(\frac{k-l}{2k}, 1\right)$, pak $\ddot{n}(t) < 0$. V tomto případě je řešení $n(t)$ ryze konkávní funkce. Většina firem již novou technologii používá a tempo růstu koncentrace firem, které používají novou technologii, se zpomaluje.

Protože $\frac{k-l}{2k} < \frac{1}{2}$, dochází v případě vlivu médií k rychlejšímu šíření nové technologie než v případě, kdy se technologie šíří pouze v důsledku doporučení, jak tomu bylo v základním modelu z odstavce 1.2.1.

Rovnice (1.2.4) je rovnice se separovanými proměnnými, která má pro $n_0 \in [0, 1)$ řešení

$$n(t) = \frac{(kn_0 + l)e^{(k+l)t} - l(1 - n_0)}{(kn_0 + l)e^{(k+l)t} + k(1 - n_0)}, \ t \in [0, \infty). \tag{1.2.5}$$

Odtud máme $\lim_{t\to\infty} n(t) = 1$, takže novou technologii začnou postupně využívat všechny uvažované firmy. Podobně jako v základním modelu, můžeme nyní určit čas $t_2 > 0$ takový, že $n(t_2) = \frac{k-l}{2k}$. V tomto okamžiku začne rychlost přijímání nové technologie zpomalovat.

Dosadíme-li předchozí podmínku do (1.2.5), získáme za předpokladu $n_0 \le \frac{k-l}{2k}$ vztah

$$t_2 = \frac{1}{k+l} \ln \frac{k(1 - n_0)}{kn_0 + l}. \tag{1.2.6}$$

Pro $n_0 > \frac{k-l}{2k}$ takový čas neexistuje.

Uvažujme nyní, že $t_2 = t_2(l)$, $l \ge 0$. Pak $t_2'(l) < 0, \ l > 0$ a $\lim_{l\to\infty} t_2(l) = 0$. To znamená, že funkce $t_2(l)$ nabývá pro $l = 0$ svého globálního maxima na $[0, \infty)$. Pro $l = 0$ je však $t_2 = t_1$, kde t_1 je dáno vztahem (1.2.3). Dále je zřejmé, že čím vyšší vliv mají média, tím dochází k rychlejšímu nárůstu koncentrace firem, které používají novou technologii, v počátečním stadiu procesu šíření.

1.2.3 Model s více parametry

Chystá-li se firma používat novou technologii, měla by zjistit, zda je to pro ni výhodné. Jak je z předchozích poznámek zřejmé, je přírůstek koncentrace firem jistého průmyslového odvětví, které používají novou technologii v čase t, za krátký časový interval $\tau > 0$ přímo úměrný koncentraci těch firem, které zatím novou technologii nepřijaly. Podobně jako v předchozích odstavcích můžeme získat diferenciální rovnici

$$\dot{n} = \lambda(1 - n), \ n(0) = n_0. \tag{1.2.7}$$

Víme již, že koeficient přímé úměrnosti λ závisí na koncentraci n firem, které novou technologii používají. Závisí však také na zisku π, který zavedení nové technologie ve srovnání se staršími alternativními technologiemi přináší a také na relativní ceně investice s nutné k zavedení nové technologie vzhledem k celkovým aktivům firmy. Můžeme tedy psát

$$\lambda = \lambda(n, \pi, s).$$

Provedeme-li rozvoj funkce λ v Taylorovu řadu se středem v bodě $(0,0,0)$ a zanedbáme-li členy s řádem vyšším než dva, získáme

$$\lambda = a_1 + a_2 n + a_3 \pi + a_4 s + a_5 n^2 + a_6 \pi^2 + a_7 s^2 + a_8 n\pi + a_9 ns + a_{10} \pi s.$$

V práci [55] je ukázáno, že $a_5 = 0$ a $a_1 + a_3\pi + a_4 s + a_6\pi^2 + a_7 s^2 + a_{10}\pi s = 0$. Položíme-li

$$k = a_2 + a_8 \pi + a_9 s,$$

lze rovnici (1.2.7) psát ve tvaru $\dot{n} = kn(1-n),\ n(0) = n_0$, což je počáteční problém (1.2.1). Nyní je však navíc známa struktura koeficientu přímé úměrnosti k.

1.2.4 Model pro vybavenost předměty dlouhodobé spotřeby

Jako spotřební jednotku budeme nyní místo firmy uvažovat domácnost. Kromě zboží běžného charakteru, kupují domácnosti předměty dlouhodobé spotřeby – PDS, které mají relativně dlouhou životnost a poskytují domácnostem užitek z několikanásobného použití. Takovým zbožím se rozumí domy, byty, automobily, pračky, ledničky, televizory nebo osobní počítače a jejich nákupy jsou domácnostmi hrazeny hlavně z úspor. Níže uvedené úvahy vycházejí z knih [35] a [78], ale úzce souvisí s tím, co již bylo napsáno výše o šíření nových technologií.

V první řadě budeme uvažovat, že všechny ekonomické i mimoekonomické vnější faktory jsou v čase konstantní, to nám umožní sledovat vybavování domácností PDS pouze v čase. Dále budeme předpokládat, že existuje jistý počet domácností – potenciálních spotřebitelů, které si mohou nový PDS právě uvedený na trh okamžitě koupit. Počet všech těchto potenciálních spotřebitelů označme S. Bude představovat hladinu nasycenosti při vybavování novým PDS.

Budeme předpokládat, že příjem domácností se v čase zvyšuje, takže se také rozšiřuje okruh domácností, které si mohou nový PDS zakoupit. To znamená, že hladina nasycenosti je rostoucí funkcí příjmu domácností Y a můžeme psát $S = S(Y)$. Jak stále větší okruh domácností může realizovat nákup PDS, zužuje se okruh potenciálních spotřebitelů. Jestliže se daný PDS stane finančně přístupný všem potenciálním spotřebitelům, přestává být další růst příjmu důvodem pro zvýšení poptávky po PDS. To vše znamená, že vliv rostoucího příjmu Y na proměnlivou hladinu nasycení $S(Y)$ by se měl postupně zeslabovat až dokud hladina nasycení nedosáhne jisté konstantní meze $S_0 > 0$, která bývá nazývána *absolutní hladina nasycení.* V [35] a [78] je použit vztah

$$S(Y) = \frac{S_0}{1 + \dfrac{c}{Y^\alpha}}, \tag{1.2.8}$$

kde konstanta $\alpha \geq 0$ je koeficient *dlouhodobé příjmové pružnosti poptávky* a konstanta $c \geq 0$ odpovídá tempu růstu příjmu. Koeficient příjmové pružnosti α vyjadřuje vliv změny příjmu na vývoj vybavenosti daným PDS. Pro vysoké α rostoucí příjem rychle zvyšuje okruh potenciálních spotřebitelů. Pro nízké α bude přírůstek potenciálních spotřebitelů nepatrný a pro nulové α nemá příjem na vývoj vybavenosti žádný vliv. Funkce (1.2.8) je pro $Y > 0$ konkávní, takže je splněn předpoklad postupného snižování růstu hladiny nasycenosti na výšce příjmu a přitom $\lim_{Y\to\infty} S(Y) = S_0$, takže je splněn předpoklad existence absolutní hladiny nasycení.

Příjem domácností je funkcí času t, takže $Y = Y(t)$. Předpokládejme, že příjem roste konstantní mírou. Označme tuto míru $g > 0$, takže lze psát

$$Y(t) = Y_0 e^{gt},\ t \in [0, \infty), \tag{1.2.9}$$

kde $Y_0 > 0$ je konstanta představující příjem domácností v čase $t = 0$.

Ne všechny domácnosti, které si mohou dovolit koupit nový PDS, si ho koupí okamžitě. K tomu, aby došlo k vybavení všech potenciálních spotřebitelů PDS je zapotřebí jisté doby. Domácnosti se nejdříve musí o novém PDS dovědět a seznámit se s jeho výhodami. Tato informovanost se šíří tím rychleji, čím více potenciálních spotřebitelů již PDS využívá. Počet domácností v čase t, které jsou již vybaveny novým PDS označíme $N(t)$. Přírůstek domácností v čase t nově vybavených PDS za krátký časový interval $\tau > 0$ je tedy přímo úměrný $N(t)$.

Rozhodnutí zakoupit PDS se týká pouze těch domácností, které jej ještě nemají. To znamená, že s růstem vybavenosti se zužuje množství potenciálních spotřebitelů, které si nový PDS mohou koupit. V průběhu času však roste hladina nasycení S. Můžeme tedy uvažovat, že přírůstek nových domácností, které si koupí PDS je přímo úměrný koncentraci $1 - N(t)/S(t)$ koupěschopných spotřebitelů, kteří si zatím PDS nekoupili.

Poslední pozorování, které učiníme, se týká časového intervalu $\tau > 0$, ve kterém sledujeme změnu vybavenosti domácností. Čím je tento časový interval delší, tím větší je přírůstek nových domácností vybavených PDS.

Výše popsané předpoklady můžeme formalizovat a psát diferenční rovnici

$$N(t+\tau) - N(t) = kN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{S(Y)}\right)\tau,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Vydělíme-li poslední rovnici τ, pak pro $\tau \to 0$ získáme diferenciální rovnici

$$\dot{N} = kN\frac{S(Y) - N}{S(Y)}, \tag{1.2.10}$$

kde $N = N(t)$. Dosadíme-li (1.2.8) a (1.2.9) do rovnice (1.2.10) a budeme-li znát počáteční podmínku $N(0) = N_0$, získáme po úpravě počáteční problém

$$\dot{N} = kN - \frac{k}{S_0}\left(1 + \frac{c}{Y_0^\alpha}e^{-\alpha g t}\right)N^2,\ N(0) = N_0, \tag{1.2.11}$$

který představuje model pro vybavenost domácností PDS. Jedná se o Bernoulliovu rovnici, kterou můžeme převést na lineární diferenciální rovnici substitucí $z = N^{-1}$. Pak $\dot{z} = -N^{-2}\dot{N}$. Vynásobíme-li rovnici (1.2.11) členem $-N^{-2}$ a použijeme-li substituci, získáme

$$\dot{z} = -kz + \frac{k}{S_0}\left(1 + \frac{c}{Y_0^\alpha}e^{-\alpha g t}\right).$$

Řešením této lineární diferenciální rovnice a opětným použitím substituce postupně obdržíme:

- Je-li $k \neq \alpha g$, pak

$$N(t) = \frac{S_0}{1 + Ce^{-kt} + \dfrac{c}{Y_0^\alpha}\dfrac{k}{k-\alpha g}e^{-\alpha g t}}, \; t \in [0, \infty),$$

kde $C = \dfrac{S_0}{N_0} - 1 - \dfrac{c}{Y_0^\alpha}\dfrac{k}{k-\alpha g}$ je konstanta závislá na počáteční podmínce.

- Je-li $k = \alpha g$, pak

$$N(t) = \frac{S_0}{1 + Ce^{-kt} + \dfrac{c}{Y_0^\alpha} k\, te^{-kt}}, \; t \in [0, \infty),$$

kde $C = \dfrac{S_0}{N_0} - 1$ je konstanta závislá na počáteční podmínce.

Z výše uvedeného je zřejmé, že chceme-li předvídat vývoj vybavenosti daným PDS, je nutné mít k dispozici údaje o předpokládaném vývoji příjmů domácností. Pak je možné odhadnout parametry α, k, c, g nebo S_0.

1.3 Základní spojité modely růstu

Ekonomický růst se týká zvýšení výstupu zboží a služeb a souvisí s růstem reálného hrubého národního důchodu. V následujících odstavcích formulujeme dva modely, které v minulosti sehrály důležitou roli při snaze ekonomický růst vysvětlit. Jde o podstatně rozšířený zápis motivačních úloh, které autor použil v [25]. Při popisu Domarova růstového modelu a Solowova růstového modelu vycházíme z knih [58] a [77]. Komentáře jsou pak založeny na historických poznámkách knihy [34] a Solowově laureátské přednášce pronesené při udělování Nobelovy ceny za ekonomii z roku 1987, která je uvedena v [38]. Podrobnější popis předpokladů a obecnější Solowův model uvedeme později, v oddílu 5.1.

Jako měřítko růstu se často používá tempo růstu, které vyjadřuje relativní změnu hrubého národního produktu mezi dvěma po sobě následujícími obdobími. Protože v tomto textu pracujeme převážně se spojitými veličinami, budeme *tempem růstu hrubého domácího produktu* rozumět podíl

$$\gamma_Y(t) = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}, \tag{1.3.1}$$

kde $Y(t)$ představuje okamžitou velikost hrubého národního produktu. [2]

1.3.1 Domarův růstový model

Američan Evsey Domar (1914 – 1997) formuloval svůj model v článku *Capital Expansion, Rate of Expansion and Employment* v roce 1946. Jeho model vede k podobným závěrům,

[2] Tato veličina má charakter toku. Lze ji tedy vyjádřit jako množství peněžních jednotek za jednotku času.

jako model, který dříve formuloval Angličan Roy Forbes HARROD (1900 – 1978) v článku *An Essay on Dynamic Economics* z roku 1939. Harrod vycházel z poněkud odlišných předpokladů a jeho model je formulován pomocí diferenční rovnice.

Budeme uvažovat uzavřenou ekonomiku a trh s agregovaným zbožím. Kapitál $K = K(t)$ představuje výrobní faktor, který je sám výsledkem předchozí výroby a vzniká na základě investic $I = I(t)$. Kapitálové statky pak slouží pro další produkci. Množství produkce vytvořené pomocí kapitálu označíme $F(K)$. Model je založen na následujících předpokladech:

• Přírůstek hodnoty kapitálu $K(t)$ v čase t za krátkou dobu $\tau > 0$ je rovný hodnotě investic za dobu τ. Pro krátký interval $\tau > 0$ lze psát $K(t + \tau) - K(t) = I(t)\tau$, kde $I(t)$ je hodnota investic v čase t. Odtud

$$\frac{K(t+\tau) - K(t)}{\tau} = I(t).$$

Pokud pro $\tau \to 0$ existuje limita vlevo, můžeme psát

$$\dot{K}(t) = I(t). \tag{1.3.2}$$

• Produkce je přímo úměrná hodnotě kapitálu, tedy

$$F(K) = AK, \tag{1.3.3}$$

kde $A > 0$ je konstanta úměrnosti vyjadřující úroveň technologie. Tento předpoklad říká, že růstovým faktorem je pouze akumulace kapitálu.

• V uzavřené ekonomice platí, že důchod $Y(t)$ je rozdělen mezi spotřebu $C(t)$ a soukromé investice $I(t)$, tedy v každém okamžiku t platí

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{1.3.4}$$

Pro spotřební funkci předpokládáme, že $C(t) = cY(t)$, kde $c \in (0, 1)$ je *podíl spotřeby.* Zavedeme-li ještě *podíl úspor* $s = 1 - c \in (0, 1)$, můžeme také psát

$$C(t) = (1 - s)Y(t). \tag{1.3.5}$$

Použitím tohoto vztahu lze (1.3.4) přepsat ve tvaru

$$I(t) = sY(t). \tag{1.3.6}$$

Tento vztah lze interpretovat tak, že všechny úspory v uzavřené ekonomice jsou ihned investovány. Nebo krátce, že investice jsou rovny úsporám.

• Model dále předpokládá, že objem nabízeného produktu $F(K)$ je vždy plně využit. To znamená, že jakékoliv zvýšení produktu je absorbováno zvýšením poptávky, kterou představují investice $I(t)$ a spotřeba $C(t)$. V každém okamžiku t tedy platí

$$Y(t) = F(K(t)). \tag{1.3.7}$$

Protože je podíl úspor $s < 1$, absorbuje spotřeba $C(t)$ pouze část zvětšení produkce $Y(t)$. To však znamená, že zvýšená produkce vede i ke zvýšení investic. Nicméně zvýšení investic vede opět ke zvýšení produkční kapacity a tak dále. Dochází tak k růstu produkční kapacity v čase. Je zřejmě nutné beze zbytku využít přírůstek produkce, případné nevyužití by totiž mohlo vést k zastavení investic a k zastavení růstu produkce.

Zůstává otevřena otázka týkající se časového průběhu důchodu. Použijeme-li vztahů (1.3.7) a (1.3.3), je $Y(t) = AK(t)$. Odtud pak $\dot{Y}(t) = A\dot{K}(t)$. Použijeme-li (1.3.2), je $\dot{Y}(t) = AI(t)$. Je-li dále známa počáteční hodnota Y_0, lze pomocí (1.3.6) psát počáteční problém

$$\dot{Y} = \Gamma Y,\, Y(0) = Y_0,$$

kde $Y = Y(t)$ je hledaná reálná funkce reálné proměnné t a

$$\Gamma = As > 0. \tag{1.3.8}$$

Konstanta Γ bývá nazývána *zaručené tempo růstu.* Řešením uvedené lineární diferenciální rovnice je funkce

$$Y(t) = Y_0 e^{\Gamma t},\; t \in [0, \infty). \tag{1.3.9}$$

Poznámka 1.3.1. Koeficient zaručeného růstu (1.3.8) byl od počátku zdrojem mnoha otázek. To nás přivádí k diskusi o nedostatcích Domarova modelu.

Poznámka 1.3.2. Předpokládejme, že pracovní síla $L = L(t)$ roste podle Malthusova zákona. Tedy

$$\frac{\dot{L}}{L} = n,\; L(0) = L_0 \tag{1.3.10}$$

kde $n > 0$ je míra růstu pracovní síly a v souvislosti s Domarovým modelem bývá také nazývána *přirozená míra růstu.* Lze požadovat, aby byla pracovní síla plně využita. To zapíšeme jako

$$Y(t) = BL(t), \tag{1.3.11}$$

kde $B > 0$ je konstanta úměrnosti. Odtud

$$\Gamma = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{(BL)^{\cdot}}{BL} = \frac{\dot{L}}{L} = n. \tag{1.3.12}$$

To znamená, že má-li být udrženo zaručené tempo růstu produktu při plné zaměstnanosti je třeba, aby pracovní síla rostla stejným tempem. Vztah (1.3.12) přepíšeme pomocí (1.3.8), získáme $As = n$. Takové spojení na sobě nezávislých parametrů je však málo pravděpodobné, proto se v ekonomické literatuře píše o růstu produktu "na ostří nože," srv. [31, str. 102]. Solow o tom v [38, str. 607] říká:

> Pochybnosti vznikaly proto, že tyto závěry byly odvozeny za předpokladu, že všechny tři klíčové veličiny - míra úspor, tempo růstu pracovních sil a kapitálová náročnost [3] - byly dané konstanty, přirozené charakteristiky reality. ...
>
> O všech se předpokládalo, že se mohou čas od času měnit, ale sporadicky a více méně nezávisle. V tomto případě by však možnost stálého růstu byla zázračným štěstím. Většina ekonomik by se po většinu času nenacházela na rovnovážné trajektorii růstu. Historie kapitalistických ekonomik by měla představovat střídání dlouhých období zhoršující se nezaměstnanosti a dlouhých období prohlubujícího se nedostatku pracovních sil.

[3] Kapitálovou náročností se rozumí $k = 1/A$.

Poslední poznámku týkající se zaměstnanosti nyní vysvětlíme. Při splnění vztahu (1.3.12) platí (1.3.11) a (1.3.7), tedy $AK = BL$. Protože, jak bylo řečeno, je tento vztah málo pravděpodobný, platí spíše $AK < BL$ nebo $AK > BL$. Nicméně pro výrobu nemůže být nedostatek práce ani kapitálu, tedy $Y = \min_{K \geq 0, L \geq 0}(AK, BL)$. V prvním případě, $AK < BL$, tak dochází k nezaměstnanosti pracovní síly a v druhém případě, $AK > BL$, bude existovat nevyužitý kapitál.

Poznámka 1.3.3. K tomu, aby mohl být zachován růst produkce podle (1.3.9) by podle (1.3.6) měly investice růst jako

$$I(t) = I_0 e^{\Gamma t}, \tag{1.3.13}$$

kde $I_0 = sY_0$. Co se stane, pokud investice rostou jiným tempem $\gamma \neq \Gamma$? Pak lze místo (1.3.13) psát

$$I(t) = I_0 e^{\gamma t}.$$

Pro velikost kapitálu nyní integrací vztahu (1.3.2) získáme $K(t) = K(0) + I_0/\gamma \cdot (e^{\gamma t} - 1)$. Podle (1.3.3) tedy pro velikost produkce platí

$$F(K(t)) = AK(0) + \frac{AI_0}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1). \tag{1.3.14}$$

Podobně ze vztahu (1.3.6) získáme pro poptávku

$$Y(t) = \frac{1}{s} I_0 e^{\gamma t}.$$

Odtud nyní máme

$$\lim_{t \to \infty} \frac{F(K(t))}{Y(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{AK(0) + AI_0/\gamma \cdot (e^{\gamma t} - 1)}{1/s \cdot I_0 e^{\gamma t}} = \frac{As}{\gamma} = \frac{\Gamma}{\gamma}.$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme učinit tato pozorování:

• Rostou-li investice rychleji než je zaručené tempo růstu, tj. $\Gamma/\gamma < 1$, existuje čas $t_1 > 0$, takový, že pro všechna $t > t_1$ platí $F(K(t)) < Y(t)$. To znamená, že i když rostou investice rychleji než je zaručené tempo růstu, nestačí produkce pokrýt poptávku.

• Rostou-li investice pomaleji než je zaručené tempo růstu, tj. $\Gamma/\gamma > 1$, existuje čas $t_2 > 0$, takový, že pro všechna $t > t_2$ platí $F(K(t)) > Y(t)$. To znamená, že i když investice nedosahují zaručeného tempo růstu, vzniká nadbytečná produkce.

Oba paradoxní výsledky ukazují nedostatky Domarova růstového modelu, které odstraňuje Solowův model růstu, srv. výsledek (1.3.23).

Poznámka 1.3.4. Uvedeme ještě námitku proti možnosti zvyšování tempa růstu tak, jak ji vyslovil Solow ve své přednášce, [38, str. 606]:

> Byl zde ještě další důsledek Harrod-Domarova modelu, který se zdál být ošidný. Jestliže podmínkou stálého růstu je, že míra úspor je rovna součinu tempa růstu zaměstnanosti a technologicky dané kapitálové náročnosti, potom receptem, jak zdvojnásobit tempo růstu v ekonomice s přebytkem pracovních sil, bylo jednoduše zdvojnásobit míru úspor, snad pomocí státního rozpočtu. ... Toto doporučení mi neznělo přijatelně.

1.3.2 Solowův růstový model s Cobb–Douglasovou produkční funkcí

Zde popíšeme zjednodušenou variantu růstového modelu, který formuloval Robert M. Solow (nar. 1924). Základy tohoto modelu vyložil v článku *A Contribution to the Theory of Economic Growth* v roce 1956. Za své příspěvky k teorii ekonomického růstu a empirickém výzkumu procesu růstu získal Solow v roce 1987 Nobelovu cenu za ekonomii. Jak již bylo uvedeno, budeme vycházet z knih [58] a [77]. Na rozdíl od oddílu 1.3.1 připustíme, že při produkci dochází k vzájemné substituci práce $L(t)$ a kapitálu $K(t)$, takže produkční funkce F bude obsahovat oba tyto výrobní faktory. Solow o tom ve své přednášce, [38, str. 606], říká:

> ... Nemohu vám říci, proč mě napadlo nejprve nahradit konstantní kapitálovou náročnost (a pracovní náročnost) bohatším a realističtějším znázorněním technologie. ... Vím, že mě jako rozeného makroekonoma napadlo velice brzy, že i když sama technologie není pro každý jednotlivý výrobek v daném čase tak pružná, agregátní faktorová náročnost musí být mnohem proměnlivější, protože ekonomika si může zvolit, zda se zaměří na výrobky kapitálově náročné, nebo na pracovně náročné či na výrobky náročné na půdu. V každém případě jsem zde okamžitě objevil něco zajímavého.

Zde budeme uvažovat Cobb–Douglasovu produkční funkci

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{1.3.15}$$

kde $A > 0$ je konstantní hladina technologické úrovně a $\alpha \in (0,1)$ je konstantní koeficient elasticity produkce vzhledem ke kapitálu,[4] který udává o kolik procent se změní produkt, jestliže se změní kapitál o 1% a ostatní faktory zůstanou nezměněny. Produkční funkce vyjadřuje funkční závislost růstu produktu na růstu pracovní síly a na růstu kapitálu. Budeme také předpokládat, že pracovní síla roste podle Malthusova zákona (1.3.10). Použijeme-li opět vztahy (1.3.6), (1.3.2) a nově (1.3.10) získáme

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{I}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = s\frac{Y}{L} - \frac{K}{L}n. \tag{1.3.16}$$

Zaveďme kapitálovou intenzitu

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

a použijme vztah (1.3.7) ve tvaru $Y = F(K,L)$, přičemž produkční funkce F je dána (1.3.15). Rovnici (1.3.16) lze nyní psát ve tvaru

$$\dot{k} = \Gamma k^{\alpha} - kn, \ k(0) = k_0, \tag{1.3.17}$$

kde jsme stejně jako v případě Domarova modelu označili $\Gamma = As > 0$ a zvolili jsme počáteční podmínku.

Stacionární bod k° rovnice (1.3.17) je dán podmínkou $\Gamma(k^{\circ})^{\alpha} = nk^{\circ}$. To znamená, že pro $k(0) = k^{\circ}$, získáme stacionární řešení ve tvaru

$$k(t) = \left(\frac{\Gamma}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^{\circ}, \ t \geq 0. \tag{1.3.18}$$

[4] Pro $\alpha = 1$ bychom získali předchozí model.

Rovnice (1.3.17) je Bernoulliova rovnice, jejíž analytické řešení lze nalézt. Položme

$$z = k^{1-\alpha},$$

pak $\dot{z} = (1-\alpha)k^{-\alpha} \cdot \dot{k}$. Vynásobíme-li (1.3.17) členem $(1-\alpha)k^{-\alpha} \neq 0$, získáme vhodným přeskupením členů lineární diferenciální rovnici

$$\dot{z} + (1-\alpha)nz = (1-\alpha)\Gamma, \; z(0) = k_0^{1-\alpha}.$$

Jejím řešením je

$$z(t) = \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\Gamma}{n}\right) e^{-(1-\alpha)nt} + \frac{\Gamma}{n},$$

takže řešení rovnice (1.3.17) má tvar

$$k(t) = \left(\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\Gamma}{n}\right) e^{-(1-\alpha)nt} + \frac{\Gamma}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; t \geq 0. \tag{1.3.19}$$

Odtud ihned máme

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \left(\frac{\Gamma}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{1.3.20}$$

a tedy stacionární řešení (1.3.18) je asymptoticky stabilní, viz definice v oddílu 2.4. Vztah (1.3.20) ukazuje, že ekonomika dosáhne svého stacionárního stavu a není k tomu zapotřebí nějakého citlivého přizpůsobování investic, jako tomu bylo v Domarově modelu. Určíme ještě, jak se chová růstový koeficient kapitálu a investic. Platí

$$\gamma_K = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{I}{K} = \frac{sY}{K} = sA\frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{K} = sA\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = sAk^{\alpha-1}. \tag{1.3.21}$$

Odtud pak s přihlédnutím k (1.3.20)

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_K(t) = sA\frac{n}{\Gamma} = n. \tag{1.3.22}$$

Kapitál tedy po dostatečně dlouhé době bude růst stejným tempem jako pracovní síla, srv. (1.3.10). Dále platí

$$\gamma_I = \frac{\dot{I}}{I} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{A\alpha K^{\alpha-1}\dot{K}L^{1-\alpha} + A(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha}\dot{L}}{AK^\alpha L^{1-\alpha}} =$$
$$\alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L} = \alpha sAk^{\alpha-1} + (1-\alpha)n.$$

Odtud je nejdříve patrné, že $\gamma_I = \gamma_Y$. Protože platí (1.3.21), je dále $\gamma_I = \alpha\gamma_K + (1-\alpha)n$. Použijeme-li (1.3.22), máme

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_Y(t) = \lim_{t\to\infty} \gamma_I(t) = \alpha n + (1-\alpha)n = n. \tag{1.3.23}$$

Tedy také růst investic a růst důchodu se po dostatečně dlouhé době přizpůsobí tempu růstu pracovní síly. Pro zvyšování tempa růstu pomocí zvyšování podílu investic nyní ze vztahu pro γ_Y, který jsme odvodili, spíše platí, [38, str. 607]:

> ...Rozvíjející se ekonomika, která s úspěchem soustavně zvyšuje svou míru úspor (investic), bude mít vyšší úroveň tempa růstu než kdyby tak neučinila a musí proto růst rychleji. Trvale však vyššího tempa růstu výroby nedosáhne. Přesněji: trvalé tempo růstu výroby na jednotku pracovního vstupu je nezávislé na míře úspor (investic) a závisí na tempu technického pokroku v nejširším slova smyslu.

O tom, jak do modelu zapracovat úroveň technologie se však zmíníme až v sekci 5.3. Tam také uvidíme, že výsledky, které jsme odvodili pro Cobb-Douglasovu produkční funkci platí pro libovolnou neoklasickou produkční funkci.

1.4 Phillipsův model s multiplikátorem a akcelerátorem.

Jednou z důležitých událostí při vytváření makroekonomické teorie byla formulace modelu hospodářského cyklu s multiplikátorem a akcelerátorem. Autorem tohoto modelu z roku 1939 byl Paul A. Samuelson, držitel Nobelovy ceny za ekonomii z roku 1970. Později, v roce 1950, model rozšířil John R. Hicks, držitel Nobelovy ceny za ekonomii z roku 1972, srv. [71], [23] a [34]. Model byl formulován pomocí diferenčních rovnic pro proces v diskrétním čase. V roce 1954 formuloval A. W. Phillips podobný model pro proces se spojitým časem, srv. [3] a [2]. Tímto modelem se zde budeme zabývat. Autor o tomto modelu přednesl referát na konferenci Week of Doctoral Students 2003, viz [64].

Makroekonomické dynamické modely se snaží o popis chování relativně velkého počtu ekonomických jednotek. Pomáhají vyjasnit jaké síly určují průměrné chování takové skupiny jednotek. Ekonomické jevy jsou velmi komplikované a pro dobrý popis evoluce velké ekonomické jednotky bychom potřebovali mnoho proměnných. Každá taková proměnná může na ostatních proměnných záviset mnoha způsoby a není zaručeno, že se podaří všechny tyto vztahy nalézt. Díky této nejistotě jsou zaváděny agregované proměnné a jsou formulovány agregované modely. Nicméně takové modely nejsou příliš přesné a pomáhají spíše nalézt základní mechanizmy reálných ekonomických procesů. Protože se jedná o zjednodušené modely, bývá také obtížné určit hodnoty konstant, které v modelu vystupují. K tomu se používají statistické metody a metody ekonometrie. To vše znamená, že nemůžeme očekávat deterministický model, který by nám umožnil předpovídat přesné budoucí chování nějaké ekonomické jednotky.

1.4.1 Myšlenka exponenciálního zpoždění v ekonomických modelech

Nejdříve popíšeme způsob, který umožňuje modelovat některé dynamické jevy v ekonomii. Představme si, že existuje aktuální informace o hodnotě jisté ekonomické veličiny. Na základě této informace lze provést taková rozhodnutí, které povedou ke změně hodnoty jiné ekonomické veličiny. Hodnoty ekonomických veličin nelze měnit okamžitě, podléhají jisté setrvačnosti. Plán se vztahuje k současnosti, ale bude realizován později. To znamená, že existuje nějaké zpoždění mezi aktuální hodnotou a budoucí potenciální hodnotou uvažované veličiny.

Uvažujme, že vstup ekonomické jednotky $\mathbf{S}$ je dán funkcí $z = z(t),\ t \in [t_0, \infty)$, kde proměnná t označuje čas a výstup jednotky $\mathbf{S}$ je dán funkcí $y = y(t),\ t \in [t_0, \infty)$. Chceme přizpůsobit výstup $y(t)$ tak, aby platilo

$$y(t + T) = z(t),\ t \in [t_0, \infty), \tag{1.4.1}$$

kde $T \geq 0$ je doba zpoždění výstupu za vstupem.

V reálném systému však nemáme přímé informace o budoucích hodnotách funkce $z(t)$ a výstupní funkci $y(t)$ nelze změnit okamžitě. Lze však připustit, že v každém okamžiku $t \in [t_0, \infty)$ známe rozdíl $z(t) - y(t)$. Uvažujme také, že $z(t_0) - y(t_0) \neq 0$. Vztah (1.4.1) představuje ideální podmínku, která je však statická a neříká nic o procesu, pomocí kterého hodnota výstupu $y(t)$ dosáhne během intervalu délky T hodnoty vstupu $z(t)$. Potřebujeme plán, jak přizpůsobit výstup $y(t)$ tak, aby vztah (1.4.1) platil alespoň přibližně. Jeden z možných způsobů je tento: Rozdělíme interval $[t, t+T]$ na n intervalů stejné délky $\tau = T/n$. Plán počítá s tím, že se rozdíl $z(t)-y(t)$ eliminuje v n krátkých krocích délky τ. V každém časovém intervalu délky τ je třeba provádět nějakou opravu, protože $z(t)$ se mění. Budeme předpokládat, že $1/n$ rozdílu $z(t) - y(t)$ je vyrovnána změnou výstupu $y(t)$ v průběhu prvního časového intervalu délky τ. To znamená, že

$$y(t+\tau) - y(t) = \frac{z(t) - y(t)}{T}\tau, \tag{1.4.2}$$

kde $t \in \{t_0, t_0+\tau, t_0+2\tau, \dots\}$. Výstup $y(t)$ se vždy zpožďuje za měnícím se vstupem $z(t)$. V závislosti na délce τ získáme tyto odlišné modely:

(i) Jestliže $\tau = 1$ a $T \in \{2, 3, \dots\}$, pak máme lineární diferenční rovnici

$$y(t+1) - y(t) = \frac{z(t) - y(t)}{T}, \tag{1.4.3}$$

kde $t \in \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots\}$.

(ii) Předpokládáme-li, že výstup $y(t)$ je diferencovatelná funkce, pak pro $\tau \to 0$ získáme lineární diferenciální rovnici

$$\dot{y}(t) = \frac{z(t) - y(t)}{T}, \ t \in [t_0, \infty), \tag{1.4.4}$$

kde $T \in (0, \infty)$.

Platí-li rovnice (1.4.3) nebo (1.4.4) říkáme, že výstup $y(t)$ má jednoduché exponenciální zpoždění za vstupem $z(t)$. Jinou interpretaci konceptu jednoduchého exponenciálního zpoždění lze nalézt v [3] nebo v [2].

Poznámka 1.4.1. Uvedeme zde ještě mechanickou ilustraci předchozích poznámek. Představme si dva automobily. Nechť v čase t_0 jede automobil A vpředu před automobilem B. Řidič automobilu B neví, jak bude řidič automobilu A řídit svůj vůz, zda bude zrychlovat, zpomalovat, pojede konstantní rychlostí nebo zastaví. V každém čase $t \in [t_0, \infty)$ však má informace o vzdálenosti obou automobilů. Přeje si řídit svůj vůz B tak, aby byl v čase $t + T$, kde $T > 0$, přibližně ve stejném místě, ve kterém byl automobil A v čase t. Jedna z možných strategií je tato: Zvolí takovou rychlost $\dot{y}$ jízdy svého automobilu B v čase t, že vzdálenost $T\dot{y}$ ujetá za dobu T je rovna rozdílu drah $z(t) - y(t)$, kde $z(t)$ je dráha automobilu A a $y(t)$ je dráha automobilu B v čase t. To může být zapsáno pomocí lineární diferenciální rovnice $T\dot{y} = z - y$, což je rovnice (1.4.4).

1.4.2 Podmínky modelu

Nyní popíšeme základní předpoklady modelu.

- Agregovaná poptávka $Z = Z(t)$ je rovna součtu agregované spotřeby $C = C(t)$ a investic $I = I(t)$, to znamená, že pro $t \in [t_0, \infty)$ je
$$Z(t) = C(t) + I(t).^5 \tag{1.4.5}$$

- Spotřeba C je přímo úměrná agregovanému výstupu – důchodu $Y = Y(t)$, to znamená, že pro $t \in [t_0, \infty)$ je
$$C(t) = cY(t), \tag{1.4.6}$$
kde koeficient přímé úměrnosti–multiplikátor $c \in (0, 1)$ je nazýván *mezní sklon ke spotřebě.*

- Rozhodnutí investovat částku $B = B(t)$ v čase t je přímo úměrné rychlosti výstupu $\dot{Y}$ v čase t, to znamená, že pro všechna $t \in [t_0, \infty)$ platí
$$B(t) = v\dot{Y}(t), \tag{1.4.7}$$
kde $v > 0$ je koeficient přímé úměrnosti, který se nazývá *akcelerační koeficient.* Jeho rozměr je časová jednotka.

- Stav investičních výdajů $I = I(t)$ je zpožděný za investičním rozhodnutím B. Budeme předpokládat, že zpoždění je rovno jedné časové jednotce. To znamená, že současná rychlost výstupu může být ovlivněna investicemi až v následující periodě a můžeme psát $1 \cdot \dot{I} = B - I$. Použijeme-li (1.4.7), máme
$$\dot{I}(t) = v\dot{Y}(t) - I(t) \tag{1.4.8}$$
pro $t \in [t_0,\ \infty)$.[6]

- Výrobci se snaží přizpůsobit výstup Y agregované poptávce Z. Předpokládá se, že výstup bude mít stejnou hodnotu jako poptávka za dobu $T \in (0, 1)$. Použijeme-li ideu zpoždění, podobně jako v (1.4.4) můžeme pro $t \in [t_0, \infty)$ psát
$$T\dot{Y}(t) = Z(t) - Y(t) \tag{1.4.9}$$

Abychom zkrátili další zápis, zavedeme tzv. *mezní sklon k úsporám*, který je definován jako $s = 1 - c \in (0, 1)$. Nyní použijeme (1.4.5) a (1.4.6) pro (1.4.9). Získáme
$$T\dot{Y} = cY + I - Y = I - sY.$$
Z této rovnice máme buď
$$I = T\dot{Y} + sY \tag{1.4.10}$$
nebo
$$T\ddot{Y} = \dot{I} - s\dot{Y}, \tag{1.4.11}$$

[5] Tyto veličiny mají charakter toku, tj. jejich rozměr je určité množství za jednostku času.

[6] Zdá se, že rovnice (1.4.8) není rozměrově shodná. Všimněme si však, že byla vydělena časovou jednotkou a měli bychom psát $v/1$, resp. $I/1$ místo v, resp. I. Je dobré mít tuto skutečnost na paměti.

jestliže navíc předpokládáme, že funkce $Y, \dot{Y}$ a I jsou diferencovatelné.

Dosadíme-li (1.4.8) do (1.4.11), máme $T\ddot{Y} = v\dot{Y} - I - s\dot{Y}$. Nahradíme-li I z (1.4.10) získáme $T\ddot{Y} = v\dot{Y} - T\dot{Y} - sY - s\dot{Y}$, což je lineární diferenciální rovnice druhého řádu, kterou je možné psát jako [7]

$$T\ddot{Y} + (T + s - v)\dot{Y} + sY = 0. \tag{1.4.12}$$

Jsou-li známy počáteční podmínky $Y(0)$ a $\dot{Y}(0)$, reprezentuje řešení rovnice (1.4.12) časový vývoj důchodu Y.

1.4.3 Řešení modelu

Charakteristická rovnice pro rovnici (1.4.12) je

$$T\lambda^2 + (T + s - v)\lambda + s = 0. \tag{1.4.13}$$

Můžeme ji psát ve tvaru $\lambda^2 + \frac{T+s-v}{T}\lambda + \frac{s}{T} = 0$. Podle Viétova pravidla pro součet a součin kořenů kvadratické rovnice lze psát

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{s}{T} > 0 \text{ a } \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{T + s - v}{T}. \tag{1.4.14}$$

Z podmínky $\lambda_1\lambda_2 > 0$ je zřejmé, že v případě, že jsou kořeny reálné, mají oba stejné znaménko. Diskriminant charakteristické rovnice (1.4.13) je

$$D = (T + s - v)^2 - 4Ts. \tag{1.4.15}$$

V závislosti na znaménku diskriminantu D lze nyní uvažovat různá řešení pro důchod Y. Všimněme si ještě, že stacionárním řešením rovnice (1.4.12) je funkce

$$Y(t) = 0,\ t \in [0, \infty). \tag{1.4.16}$$

1. případ

Je-li $D > 0$, má charakteristická rovnice (1.4.13) dva různé reálné kořeny $\lambda_1,\ \lambda_2$ a řešením rovnice (1.4.12) je funkce

$$Y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

kde C_1 a C_2 jsou reálné konstanty, jejichž hodnoty závisí na počátečních podmínkách. Je žádoucí vědět, zda jsou kořeny $\lambda_1,\ \lambda_2$ kladné nebo záporné. Protože $D > 0$, je $|T + s - v| > 2\sqrt{Ts}$ tedy buď $T + s - v > 2\sqrt{Ts}$ nebo $-(T + s - v) > 2\sqrt{Ts}$.

(i) První podmínka, $T + s - v > 2\sqrt{Ts}$, může být upravena na tvar $v < (\sqrt{T} - \sqrt{s})^2$. Je-li splněna, máme podle (1.4.14) $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. To znamená, že oba kořeny charakteristické rovnice (1.4.13) jsou negativní a důchod Y má tlumený průběh a stacionární řešení (1.4.16) je stabilní.

(ii) Druhá podmínka , $-(T + s - v) > 2\sqrt{Ts}$, může být upravena na tvar $v > (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2$. Opět podle (1.4.14) lze nahlédnout, že $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. To znamená, že jsou oba kořeny charakteristické rovnice (1.4.13) jsou kladné a důchod Y má explozivní průběh a stacionární řešení (1.4.16) není stabilní.

[7] Pro rozměrovou shodu platí podobná poznámka jako v předchozí poznámce pod čarou 6.

2. případ

Je-li $D < 0$, má charakteristická rovnice (1.4.13) dva komplexně sdružené kořeny. Budeme je psát ve tvaru $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ a $\lambda_2 = \alpha - i\omega$, kde

$$\alpha = \frac{v - T - s}{2T} \text{ a } \omega = \frac{\sqrt{|D|}}{2T}. \tag{1.4.17}$$

Řešením rovnice (1.4.12) je funkce

$$Y(t) = C_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + C_2 e^{\alpha t} \cos \omega t,$$

kde $C_1,\ C_2$ jsou reálné konstanty dané počátečními podmínkami. Řešení můžeme upravit a psát

$$Y(t) = Be^{\alpha t} \cos(\omega t - \varphi),$$

kde reálná konstanta B se nazývá amplituda a reálná konstanta φ se nazývá fáze. Jestliže $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, položíme $B = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ a $\cos \varphi = \frac{C_1}{B}$, $\sin \varphi = \frac{C_2}{B}$.

Protože $D < 0$, platí podle (1.4.15) vztah $|T + s - v| < 2\sqrt{Ts}$. To znamená, že

$$(\sqrt{T} - \sqrt{s})^2 < v < (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2. \tag{1.4.18}$$

V závislosti na znaménku α můžeme provést následující diskusi:

(i) Je-li $\alpha > 0$, pak $v - T - s > 0$, což lze psát jako $v > T + s$. Společně s podmínkou (1.4.18) máme $T + s < v < (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2$. V tomto případě má důchod Y explozivní oscilující průběh.

(ii) Je-li $\alpha < 0$, pak $v - T - s < 0$, což znamená, že $v < T + s$. Společně s podmínkou (1.4.18) máme $(\sqrt{T} - \sqrt{s})^2 < v < T + s$. V tomto případě má důchod Y tlumený oscilující průběh.

(iii) Je-li $\alpha = 0$, pak $v - T - s = 0$, což je možné psát jako $v = T + s$. V tomto případě je průběh důchodu Y periodický.

3. případ

Je-li $D = 0$, má charakteristická rovnice (1.4.13) jeden dvojnásobný reálný kořen λ_0. Řešením rovnice (1.4.12) je funkce

$$Y(t) = e^{\lambda_0 t}(C_1 t + C_2),$$

kde $C_1,\ C_2$ jsou reálné konstanty, jejichž hodnoty závisí na počátečních podmínkách. Protože $D = 0$ platí podmínka $|T + s - v| = 2\sqrt{Ts}$.

(i) Je-li $T + s - v > 0$, je $v = (\sqrt{T} - \sqrt{s})^2$. Podle (1.4.14) je kořen charakteristické rovnice (1.4.13) záporný a důchod Y je tlumený.

(ii) Je-li $T + s - v < 0$, je $v = (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2$. Podle (1.4.14) je kořen charakteristické rovnice (1.4.13) kladný a důchod Y má expanzivní charakter.

Následující tabulka poskytuje stručný přehled doposud získaných výsledků:

podmínka pro v	důchod $Y(t)$	$Y(t)$	poznámka
$v < (\sqrt{T} - \sqrt{s})^2$	tlumený průběh	$Y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$	$\lambda_1,\ \lambda_2 < 0$
$v = (\sqrt{T} - \sqrt{s})^2$	kritický útlum	$Y(t) = (C_1 t + C_2) e^{\lambda_0 t}$	$\lambda_0 < 0$
$(\sqrt{T} - \sqrt{s})^2 < v < T + s$	tlumené oscilace	$Y(t) = B e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\alpha < 0$
$v = T + s$	harmonický průběh	$Y(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$	
$T + s < v < (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2$	expanzivní oscilace	$Y(t) = B e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\alpha > 0$
$v = (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2$	kritická expanze	$Y(t) = (C_1 t + C_2) e^{\lambda_0 t}$	$\lambda_0 > 0$
$v > (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2$	expanzivní průběh	$Y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

1.4.4 Rozbor

Statistická šetření výkonu ekonomických jednotek ukazují, že důchod Y má velmi často oscilující průběh, který nebývá expanzivní. Pro další rozbor tedy budeme předpokládat, že řešení rovnice (1.4.12), které závisí na třech parametrech s, T, v, je periodická funkce. Může být zajímavé zjistit, zda existuje minimální hodnota periody oscilací důchodu Y.

Je známo, že $\omega = 2\pi/P$ kde $P > 0$ je perioda oscilací. Ze vztahů (1.4.17) a (1.4.15) získáme

$$P = P(s, T, v) = \frac{4\pi T}{\sqrt{4Ts - (T + s - v)^2}}.$$

Podobně jako v [3], budeme předpokládat, že mezní sklon ke spoření s je pro danou ekonomickou jednotku daný. Je-li navíc známa také relativní délka zpoždění T, je $P = P(v)$. Nyní můžeme nalézt stacionární bod této funkce jedné reálné proměnné. Po úpravách získáme

$$P'(v) = 4\pi T \frac{v - (T + s)}{\sqrt{(4Ts - (T + s - v)^2)^3}}.$$

Stacionární bod je $v = T + s$. Pro $v \in ((\sqrt{T} - \sqrt{s})^2, T + s)$ je $P'(v) < 0$ a pro $v \in (T + s, (\sqrt{T} + \sqrt{s})^2)$ je $P'(v) > 0$. Funkce $P = P(v)$ má tedy v bodě $v = T + s$ lokální minimum a platí

$$P_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{T}{s}}.$$

Odtud je zřejmé, že pro menší mezní hodnoty sklonu ke spoření $s \in (0, 1)$ je minimální perioda P_{min} delší. To znamená, že průběh důchodu bude mít v průběhu času méně výkyvů kolem své rovnovážné hodnoty. Naopak, je-li hodnota s větší, je kratší hodnota minimální periody P_{min} a důchod bude v průběhu času kmitat kolem své rovnovážné hodnoty častěji.

Pro numerickou ilustraci předpokládejme, že $s = 1/4$, srv. [73], a nechť $P_{min} = 5$ časových jednotek. Takto získáme, že relativní délka zpoždění je $T \doteq 0,16$ a hodnota akcelerátoru je $v \doteq 0,41$. Je-li jednotkou času jeden rok, je délka zpoždění důchodu 2 měsíce.

Kapitola 2

Obyčejné diferenciální rovnice

V této kapitole bude uveden popis soustavy obyčejných diferenciálních rovnic a některá tvrzení, která charakterizují vlastnosti řešení takové soustavy. Budeme přitom vycházet z [40], [4], [44] a [18]. Většina uvedených tvrzení bude uvedena bez důkazů, nicméně vždy je uveden odkaz, kde lze důkaz nalézt. Při výběru vlastností se soustředíme pouze na takové aspekty, které využijeme v následujících kapitolách, ve kterých uvedeme další aplikace diferenciálních rovnic v ekonomii.

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Položme $G = J \times D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Abychom mohli zápis soustavy obyčejných diferenciálních rovnic co nejvíce zjednodušit, připomeneme některé pojmy a zavedeme vhodné značení. *Vektorovou funkcí* se rozumí zobrazení definované na podmnožině $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Je–li $x(t)$ vektorová funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^n$, má n složek a lze psát

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

kde $x_i(t),\ i \in \{1, \dots n\}$ jsou reálné funkce reálné proměnné. Derivování a integrování vektorových funkcí lze provádět po složkách, pokud derivace, resp. integrály, jednotlivých složek existují. Budeme také pracovat s *vektorovými zobrazeními,* které jsou definovány na podmnožině $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, s hodnotami v $\mathbb{R}^n$. Pokud je dáno vektorové zobrazení f definované na podmnožině $\mathbb{R}^m$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$, můžeme psát

$$f(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix},$$

kde f_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ jsou funkce definované na podmnožině $\mathbb{R}^m$.

Pomocí uvedených konvencí lze soustavu obyčejných diferenciálních rovnic zapsat ve vektorovém tvaru

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{2.0.1}$$

kde $x : J \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je vektorové zobrazení. Uvedená soustava se často uvádí společně s počátečními podmínkami. Jsou–li dány $t_0 \in J$ a $x_0 \in D$, můžeme je zapsat ve vektorovém tvaru

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.0.2}$$

2.1 Pojem řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Základní pojem teorie obyčejných diferenciálních rovnic je pojem *řešení* soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.0.1). Tento pojem se v průběhu času vyvíjel a přizpůsoboval se potřebám aplikací diferenciálních rovnic, blíže v [44].

2.1.1 Klasické řešení

Nechť $G = J \times D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina a uvažujme, že $f : G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení spojité na G.

Definice 2.1.1. Funkce $\varphi : J_\varphi \to D$ se nazývá *řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.0.1) na intervalu* J_φ, jestliže

(i) $J_\varphi \subseteq J$ je interval, pro který int $J_\varphi \neq$,

(ii) $\varphi \in C^1(J_\varphi, D)$,

(iii) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ pro všechna $t \in J_\varphi$.

Platí-li navíc pro dané $t_0 \in J$ a dané $x_0 \in D$ podmínka

(iv) $\varphi(t_0) = x_0$,

říkáme, že φ je *řešení počátečního problému* (2.0.1), (2.0.2).

Je-li $\tilde{\varphi} : J_{\tilde{\varphi}} \to D$ řešení počátečního problému (2.0.1), (2.0.2), pro které platí $J_{\tilde{\varphi}} \subset J_\varphi$ a $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in J_{\tilde{\varphi}}$, říkáme, že řešení φ je *prodloužením řešení* $\tilde{\varphi}$ nebo řešení $\tilde{\varphi}$ *je zúžením řešení* φ. Zřejmě může nastat situace, kdy řešení φ počátečního problému (2.0.1), (2.0.2), není zúžením žádného jiného řešení tohoto problému. Takovému řešení pak říkáme *úplné řešení* nebo *maximální řešení.*

V případě, že existuje úplné řešení počátečního problému takové, že každé jiné řešení tohoto problému je jeho zúžením, říkáme, že počáteční problém má právě jedno řešení, nebo že počáteční problém má *jednoznačné řešení.*

Poznámka 2.1.1. Lze ukázat, např. [40], že počáteční problém (2.0.1), (2.0.2) má řešení φ na intervalu J právě tehdy, když $(t, \varphi(t)) \in G$ pro $t \in J$, φ je spojitá na J a

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \; t \in J. \tag{2.1.1}$$

2.1.2 Po částech hladké řešení

V teorii optimálního řízení, jejíž základní popis bude uveden v kapitole 4, se pracuje s diferenciálními rovnicemi tvaru

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)), \tag{2.1.2}$$

kde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je spojitě diferencovatelná vzhledem k proměnným t a x. Funkce $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá řízení a obvykle se připouští, že je po částech spojitá. To podle [44] znamená:

Definice 2.1.2. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $S \subset I$ je konečná množina (může být $S =$). Funkce $u : I \to \mathbb{R}$ se nazývá *po částech spojitá* na intervalu I, jestliže

(i) je spojitá v každém bodě $t \in I \setminus S$, který je vnitřním bodem intervalu I, v případě, že $t \in I \setminus S$ je levý koncový bod intervalu I je v tomto bodě spojitá zprava a podobně, je-li $t \in I \setminus S$ pravý koncový bod intervalu I je v tomto bodě spojitá zleva.

(ii) v každém bodě $s \in S$, který je vnitřním bodem I, existují konečné limity

$$\lim_{t \to s+} u(t) \text{ a } \lim_{t \to s-} u(t).$$

V případě, že $s \in S$ je levý koncový bod intervalu I, existuje konečná $\lim_{t \to s+} u(t)$ a je–li $s \in S$ pravý koncový bod intervalu, existuje konečná $\lim_{t \to s-} u(t)$.

Dále řekneme, že $v : I \to \mathbb{R}^n$ je *po částech spojitá vektorová funkce* na intervalu I, je-li každá její složka po částech spojitá funkce. Uvažujme nyní, že $G = I \times D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina a že $f : G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení, které má následující vlastnosti

(i) pro libovolné $x \in D$ je $t \mapsto f(t, x)$ po částech spojitá vektorová funkce na I,

(ii) pro libovolné $t \in I$ je zobrazení $x \mapsto f(t, x)$ spojité na D.

Toto zobrazení budeme nazývat *po částech spojité zobrazení* vzhledem k proměnné $t \in I$.

Poznámka 2.1.2. Vraťme se k rovnici (2.1.2). Je-li $u : I \to \mathbb{R}$ po částech spojitá funkce na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, je zobrazení $f(t, x) = F(t, x, u(t))$, které představuje pravou stranu rovnice (2.1.2), po částech spojité vzhledem k proměnné $t \in I$.

Chceme-li, aby v definici řešení soustavy diferenciálních rovnic (2.0.1) platil vztah (iii) uvedený v definici 2.1.1, je třeba připustit, že derivace řešení je po částech spojitá funkce a neplatí vztah (ii) z definice 2.1.1. To nás vede k tomu, abychom modifikovali pojem řešení soustavy diferenciálních rovnic. Ještě dříve však uveďme následující pojem.

Definice 2.1.3. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ se nazývá *po částech hladká* na intervalu I, je-li spojitá na I a její derivace $\dot{\varphi}$ je po částech spojitá na intervalu I.

Podobně jako v úvodu tohoto oddílu bychom mohli definovat po částech hladkou vektorovou funkci. Nyní již můžeme uvést modifikovanou definici řešení soustavy (2.0.1) v případě, že zobrazení f je po částech spojité v proměnné t.

Definice 2.1.4. Funkce $\varphi : J_\varphi \to D$ se nazývá *řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.0.1) na intervalu J_φ*, jestliže

(i) $J_\varphi \subseteq J$ je interval, pro který int $J_\varphi \neq$,

(ii) $\varphi : J_\varphi \to D$ je po částech hladká funkce,

(iii) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ pro všechna $t \in J_\varphi$, ve kterých je funkce f spojitá.

2.1.3 Absolutně spojité řešení

V některých případech je užitečné předpokládat, že řízení u vystupující v rovnici (2.1.2) je měřitelná funkce. Definici měřitelnosti funkce neuvádíme, viz např. [43]. Také v tomto případě může být pravá strana rovnice (2.1.2) nespojitá a je třeba upřesnit, co budeme chápat jejím řešením.

Má-li platit vztah (2.1.1), je třeba, aby funkce φ byla neurčitým integrálem své derivace $\dot{\varphi}$, tj. aby platilo

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(s)ds. \tag{2.1.3}$$

V teorii Lebesgueova integrálu, např. [43], se ukazuje, že vztah (2.1.3) platí pro takové funkce φ, které jsou absolutně spojité. Definici uvedeme podle [43].

Definice 2.1.5. Říkáme, že funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ je *absolutně spojitá* na intervalu $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolnou konečnou množinu navzájem disjunktních intervalů $(\alpha_k, \beta_k) \subset I,\ k \in \{1, \dots, N\}$ takových, že

$$\sum_{k=1}^{N} (\beta_k - \alpha_k) < \delta$$

platí

$$\sum_{k=1}^{N} ||\varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k)|| < \varepsilon.$$ [1]

Následující věta ukazuje souvislost mezi pojmem absolutní spojitosti funkce a neurčitým Lebesgueovým integrálem funkce, viz [43, str. 378].

Věta 2.1.1. *Nechť funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, je absolutně spojitá na $I = [t_0, t_1]$. Pak je diferencovatelná skoro všude, její derivace $\dot{\varphi}$ je integrovatelná na I a pro všechna $t \in I$ platí (2.1.3).*

Je-li funkce $f : I \to \mathbb{R}^n$ integrovatelná na I a $t \in I$, pak funkce

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

je absolutně spojitá na I a $\dot{\varphi}(t) = f(t)$ skoro všude na I.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci zobecněného řešení úlohy (2.0.1) v případě, že zobrazení f není spojité vzhledem k proměnné t, viz [18].

Definice 2.1.6. Nechť I je interval a $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. Funkci φ nazveme *řešením* soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.0.1), jestliže platí

(i) φ je absolutně spojitá na I,

(ii) $(t, \varphi(t)) \in G$ pro $t \in I$,

(iii) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ pro skoro všechna $t \in I$.

[1] $|| \cdot ||$ značí normu na lineárním normovaném prostoru $\mathbb{R}^n$.

2.2 Vlastnosti řešení

V souvislosti s obyčejnými diferenciálními rovnicemi a jejich aplikacemi nás bude zajímat několik otázek.

- *Existence řešení.* V mnoha případech nelze nalézt explicitní řešení počátečního problému (2.0.1), (2.0.2). Otázka existence řešení však může postačovat k odpovědi na některé teoretické otázky. Existují také numerické metody, viz např. [56], pomocí kterých lze řešení počátečního problému aproximovat. Má–li být použití numerických metod smysluplné, je existence alespoň jednoho úplného řešení daného problému základní.

- *Jednoznačnost řešení.* Pokud lze nalézt nějaké úplné řešení dané úlohy, naskýtá se otázka *jednoznačnosti* řešení. V aplikacích, ve kterých se jako nezávisle proměnná t vyskytuje čas, má jednoznačnost řešení zajímavý důsledek: Systém popsaný diferenciální rovnicí se chová *deterministicky.* To znamená, že znalost zákonitostí jeho chování a znalost jeho stavu v libovolném časovém okamžiku stačí pro určení jeho stavu v budoucnosti i minulosti.

- *Citlivost řešení.* V konkrétních aplikacích jsou diferenciální rovnice sestaveny pomocí parametrů, jejichž hodnoty nelze měřením přesně určit a také počáteční podmínky mohou být zatíženy nepřesností. V takových případech je důležité vědět, jaký vliv mají malé změny v počátečních podmínkách nebo parametrech na chování řešení a jak *citlivé* je toto řešení na dané změny. Bylo by žádoucí, aby malé změny v datech vyvolávaly pouze malé změny řešení.

  Existují však počáteční úlohy, jejichž řešení je na změnu hodnot parametrů velmi citlivé. Hodnota parametru, při které dochází k velké změně řešení, se nazývá bodem bifurkace.

- *Stabilita řešení a limitní chování.* V mnoha aplikacích je důležité odpovědět na otázku, jak se chová řešení po uplynutí velmi dlouhého časového úseku. S tím souvisí také otázka, jak malá změna v počátečních podmínkách nebo v hodnotách parametrů ovlivní dlouhodobý vývoj řešení.

2.2.1 Vlastnosti klasického řešení

V tomto oddílu budou uvedeny základní vlastnosti klasického řešení. Při výběru bude přihlédnuto k pozdějším aplikacím.

Věta 2.2.1 (O lokální existenci a jednoznačnosti). *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Předpokládejme, že zobrazení $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojité a splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k x : pro každé $(t_0, x_0) \in J \times D$ existuje okolí $U = U(t_0, x_0)$ bodu (t_0, x_0) a $L \in \mathbb{R}^+$ tak, že platí*

$$(t, x), (t, y) \in U \Longrightarrow ||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||. \tag{2.2.1}$$

Pak pro každé $(t_0, x_0) \in J \times D$ existuje $\delta > 0$ tak, že počáteční problém (2.0.1), (2.0.2) má právě jedno řešení definované na $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Důkaz. Lze nalézt v [40] na str. 64. □

Poznámka 2.2.1. Jak již bylo uvedeno, v některých aplikacích je třeba uvažovat, že zobrazení f z předchozí věty není spojité vzhledem k proměnné t. Pro jednoduchost předpokládejme, že $\tau_0 \in J$ je jediná hodnota, pro kterou není zobrazení $f(\cdot, x)$ spojité. Pokud pro $t_0 < \tau_0$ nebo $t_0 > \tau_0$ splňuje zobrazení f předpoklady věty 2.2.1, lze nalézt dostatečně malé $\delta > 0$ tak, že počáteční problém (2.0.1), (2.0.2) má právě jedno řešení definované na $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Pišme nyní

$$f_1(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & t \in J \cap (-\infty, \tau_0), \\ \lim_{t \to \tau_0 -} f(t,x), & t = \tau_0. \end{cases}$$

Funkce $f_1(t,x)$ splňuje na intervalu $J \cap (-\infty, \tau_0]$ podmínky věty 2.2.1. Existuje tedy $\delta_1 > 0$ takové, že počáteční problém $\dot{x} = f_1(t,x)$, $x(\tau_0) = x_0$ má právě jedno řešení definované na $[\tau_0 - \delta_1, \tau_0]$. Podobně funkce

$$f_1(t,x) = \begin{cases} \lim_{t \to \tau_0 +} f(t,x), & t = \tau_0, \\ f(t,x), & t \in J \cap (\tau_0, \infty) \end{cases}$$

splňuje na intervalu $J \cap [\tau_0, \infty)$ podmínky věty 2.2.1. Existuje tedy $\delta_2 > 0$ takové, že počáteční problém $\dot{x} = f_2(t,x)$, $x(\tau_0) = x_0$ má právě jedno řešení definované na $[\tau_0, \tau_0 + \delta_2]$. Ukázali jsme tak, že pro $t_0 = \tau_0$ existuje na intervalu $[\tau_0 - \delta_1, \tau_0 + \delta_2]$ právě jedno po částech hladké řešení počátečního problému (2.0.1), (2.0.2).

Podobně bychom mohli postupovat v případě, kdy je zobrazení f po částech spojité vzhledem k proměnné t. To znamená, že pokud nahradíme předpoklad spojitosti zobrazení f předpokladem, že f je po částech spojité vzhledem k proměnné t a místo klasického řešením budeme rozumět po částech hladké řešení, zůstává věta 2.2.1 v platnosti.

Předchozí věta se týká pouze lokální existence a jednoznačnosti řešení. Takové tvrzení však v mnoha případech nestačí a proto uvedeme také následující tvrzení.

Věta 2.2.2 (O globální existenci a jednoznačnosti). *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Předpokládejme, že zobrazení $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojité a splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $x \in D$. Pak pro každé $(t_0, x_0) \in J \times D$ existuje právě jedno úplné řešení*

$$\varphi(\cdot, t_0, x_0) : I \to D$$

počáteční úlohy (2.0.1), (2.0.2) Maximální interval I, na kterém řešení existuje je otevřený:

$$I = I(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0),\, t^+(t_0, x_0))$$

a platí buď

$$t^- = t^-(t_0, x_0) = \inf J, \quad \textit{resp.} \quad t^+ = t^+(t_0, x_0) = \sup J,$$

nebo

$$\lim_{t \to t^\pm} \min \left\{ \operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x_0), \partial D), \frac{1}{|\varphi(t, t_0, x_0)|} \right\} = 0.^2 \qquad (2.2.2)$$

Důkaz. Je uveden na str. 100 – 102 v [4]. □

[2] Limita pro $t \to t^+$ se uvažuje, jestliže $t^+ < \sup J$. Analogicky limita pro $t \to t^-$ se uvažuje, jestliže $t^- > \inf J$.

Poznámka 2.2.2. Podobně jako v poznámce 2.2.1 se zabývejme situací, kdy zobrazení f je po částech spojité vzhledem k proměnné $t \in J$. Konečnou množinu hodnot, pro které není f vzhledem k proměnné t spojitá, označme S. Nechť $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ je řešení počáteční úlohy (2.0.1), (2.0.2) definované a omezené v levém okolí bodu $\tau \in S$ a nechť se toto řešení neblíží k hranici množiny D. Toto řešení lze prodloužit pro $t \geq \tau$. Pomocí Bolzano–Cauchyovy podmínky, viz [36, str. 169], lze ukázat, že existuje konečná limita $\lim_{t \to \tau-} \varphi(t) = x_\tau$ a za prodloužení řešení lze uvažovat řešení problému $\dot{x} = f(t, x)$, $x(\tau) = x_\tau$. Takto lze postupovat dokud neplatí $t^+ = \sup J$ nebo (2.2.2). Podobně lze prodlužovat řešení doleva. Můžeme tedy uzavřít, že věta 2.2.2 platí také pro zobrazení f, které je po částech spojité vzhledem k proměnné $t \in J$ a řešení úlohy (2.0.1), (2.0.2) chápeme jako po částech hladké řešení.

V souvislosti s tématem této práce uveďme, že v diferenciálních rovnicích, které popisují ekonomické chování jistých soustav, není často možné nalézt dostatečně přesné hodnoty parametrů ani počáteční hodnoty. To zvyšuje důraz na citlivost chování řešení k daným datům. Částečnou odpověď na tuto otázku dává následující věta.

Věta 2.2.3 (O spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách). *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení takové, že pro každý bod $(t_0, x_0) \in J \times D$ má počáteční problém*

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0 \tag{2.2.3}$$

právě jedno úplné řešení $\varphi(t, t_0, x_0)$. Toto řešení je spojitou funkcí proměnných t, t_0, x_0 na množině

$$M_0 = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2} |\ (t_0, x_0) \in J \times D, t \in I\},$$

kde $I = I(t_0, x_0)$ je interval, na němž $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ řeší (2.2.3).

Důkaz. Obecnější tvrzení, které vyjadřuje spojitou závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech, a jeho důkaz jsou uvedeny na str. 82 a 83 v [40]. □

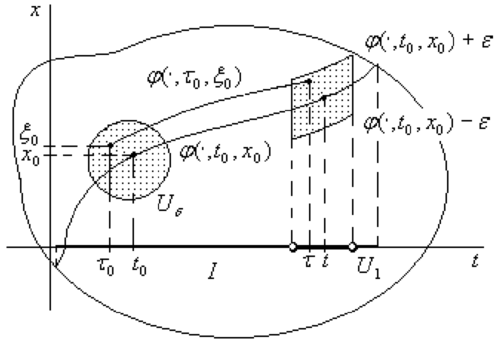
Poznámka 2.2.3. Spojitost funkce φ na množině M_0 znamená, že pro každý bod $(t, t_0, x_0) \in M_0$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U = U(t, t_0, x_0)$ bodu (t, t_0, x_0) tak, že pro $(\tau, \tau_0, \xi_0) \in U$ platí pro řešení $\varphi(\tau, \tau_0, \xi_0)$, které je definováno na $I' = I'(\tau_0, \xi_0)$, vztah

$$|\varphi(\tau, \tau_0, \xi_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Každé okolí U bodu (t, t_0, x_0) lze psát jako $U = U_1 \times U_\delta$, kde $U_1 = U_1(t)$ je okolí bodu t a $U_\delta = U_\delta(t_0, x_0)$ je okolí bodu (t_0, x_0). Situaci lze nyní znázornit pomocí obr. 2.1.

Poznámka 2.2.4. Nechť $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ je úplné řešení počátečního problému (2.2.3), které je definováno na intervalu (t^-, t^+). Podle předchozí věty lze pro každé $t \in (t^-, t^+)$ a pro každé $\varepsilon > 0$ nalézt okolí $U_\delta = U_\delta(t_0, x_0)$ bodu (t_0, x_0) takové, že pro $(\tau_0, \xi_0) \in U_\delta$ platí $|\varphi(t, \tau_0, \xi_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$. Věta netvrdí, že $\varphi(\cdot, \tau_0, \xi_0)$ existuje na celém intervalu (t^-, t^+). Tuto situaci lze ilustrovat pomocí počátečních úloh $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 0$ a $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. První z nich má řešení $x(t) = 0$, které je definované na $\mathbb{R}$. Druhá úloha má řešení $x(t) = x_0/(1 - x_0 t)$, které je definováno na intervalu $(-\infty, 1/x_0)$.

Je-li speciálně $t^+ = \infty$, pak blízkost dvou řešení na neomezeném intervalu souvisí s otázkou stability, viz sekce 2.4.



Obrázek 2.1: Ilustrace věty o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách

Poznámka 2.2.5. Je–li $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ úplné řešení počátečního problému (2.2.3), které je definované na intervalu (t^-, t^+), pak je na tomto intervalu spojité a je stejnoměrně spojité na každém kompaktním podintervalu $I_0 \subset (t^-, t^+)$. Za předpokladů uvedených ve větě 2.2.3 lze dokonce ukázat, viz [40, str. 83], že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ takové, že $|\varphi(\tau, \tau_0, \xi_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, pokud $|\tau - t| + |\tau_0 - t_0| + |\xi_0 - x_0| < \delta$ a $t, \tau \in I_0$.

Poznámka 2.2.6. V oddílu 4.3.1 použijeme pozorování, které je důsledkem diskutované věty a předchozí poznámky 2.2.5. Nechť $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ splňuje předpoklady věty 2.2.3 a $(t_0, x_0) \in J \times D$. Nechť φ_0 je úplné řešení počátečního problému $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ definované na otevřeném intervalu I a $[t_0, t_1] \subset I$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $(t_0, \xi_0) \in \Omega$ takové, že $|\xi_0 - x_0| < \delta$, existuje řešení φ počátečního problému $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = \xi_0$, které je definované na intervalu $[t_0, t_1]$, a platí $|\varphi(t) - \varphi_0(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in [t_0,\, t_1]$.

Abychom mohli formulovat další větu, připomeňme, že pro $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ představuje $D_2 f(t, x)$ v tomto textu derivaci zobrazení $x \mapsto f(t, x)$, kde $t \in \mathbb{R}$ je pevné a $x \in \mathbb{R}^n$. Tato derivace je reprezentována čtvercovou maticí řádu n, která má na i-tém řádku a v j-tém sloupci, kde $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, n\}$, prvek

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x).$$

Podobně pro $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ představuje $D_3 \varphi(t, t_0, x_0)$ derivaci zobrazení $x_0 \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$, kde $t \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ jsou pevné a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Také tato derivace je reprezentována čtvercovou maticí řádu n.

Věta 2.2.4 (O diferencovatelné závislosti řešení na počátečních podmínkách). *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a nechť zobrazení $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ a jeho derivace $D_2 f(t, x)$ jsou spojité na $J \times D$. Nechť $(t_0, x_0) \in J \times D$ a nechť $\varphi(t, t_0, x_0)$ je řešení počátečního problému*

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0.$$

Toto řešení je spojitě diferencovatelné podle proměnných t, t_0, x_0 na množině

$$\{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2} |\ (t_0, x_0) \in J \times D, t \in I\},$$

kde $I = I(t_0, x_0)$ je interval, na němž řešení $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ existuje. Označme

$$z : t \mapsto D_3\varphi(t, t_0, x_0). \tag{2.2.4}$$

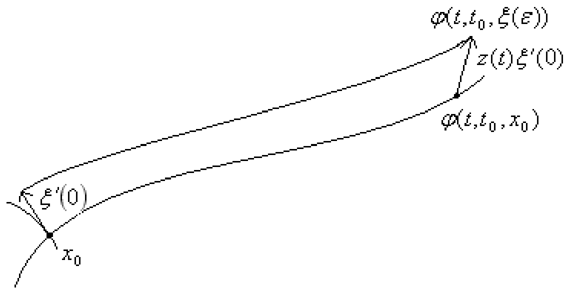
Tato maticová funkce je řešením počáteční úlohy

$$\dot{z} = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \cdot z, \quad z(t_0) = \mathbf{E},$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n.

Důkaz. Lze nalézt v [4] na str. 116 a 117. □

Poznámka 2.2.7. Matici $z(t)$ z předchozí věty 2.2.4 lze využít pro vyjádření lineárního členu Taylorova rozvoje řešení $\varphi(\cdot, t_0, \xi)$, kde ξ je blízké k počáteční podmínce x_0, viz obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Posunutí trajektorie $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ pro počáteční podmínku $\xi(\varepsilon) \neq x_0$.

Nechť $\xi : [0, \eta] \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelná a $\xi(0) = x_0$. Pak

$$\varphi(t, t_0, \xi(\varepsilon)) = \varphi(t, t_0, x_0) + D_3\varphi(t, t_0, x_0)\xi'(0)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Použijeme–li (2.2.4), můžeme psát

$$\varphi(t, t_0, \xi(\varepsilon)) = \varphi(t, t_0, x_0) + z(t)\xi'(0)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Tuto úvahu využijeme později v oddílu 4.3.

2.2.2 Vlastnosti absolutně spojitého řešení

Pro absolutně spojité řešení soustavy (2.0.1) lze formulovat podobné vlastnosti jako v předcházejícím oddílu pro klasické řešení. Tato teorie je zpracována v [18] nebo [44] a využívá tzv. Carathéodoryho podmínky. V tomto oddílu využijeme poněkud odlišný postup, který vychází z [1] a který využívá silnější podmínky. Tyto podmínky zaručují existenci a jednoznačnost řešení a spojitou závislost řešení na počátečních podmínkách. Formulaci příslušných tvrzení přizpůsobíme označení, které v tomto textu používáme.

Věta 2.2.5 (O lokální existenci). *Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ a $G = I \times D$. Nechť $f : G \to \mathbb{R}^n$ je takové zobrazení, že*

(i) *množina G je otevřená v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,*

(ii) *pro každé $x \in D$ je funkce $t \mapsto f(t,x)$ měřitelná a integrovatelná na každém kompaktním podintervalu I,*

(iii) *pro libovolné $t \in I$ je zobrazení $x \mapsto f(t,x)$ diferencovatelné,*

(iv) *pro libovolnou kompaktní množinu $K \subset G$ existuje taková lokálně integrovatelná funkce [3] $k(\cdot)$, že pro všechna $(t,x) \in K$ platí*

$$||D_2 f(t,x)|| \leq |k(t)|.$$

Pak existuje takové $\delta > 0$ a řešení $\varphi(t, t_0, x_0)$ počáteční úlohy

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(t_0) = x_0, \tag{2.2.5}$$

které je definováno na intervalu $[\tau - \delta, \tau + \delta]$.

Důkaz. Je uveden v [1] na str. 159 až 161. □

Poznámka 2.2.8. Uvažujme $U \subseteq \mathbb{R}^m$ a po částech spojitou funkci $u : I \to U$. Příkladem funkce, která splňuje předpoklady předchozí věty 2.2.5 je funkce $f(t,x) = F(t,x,u(t))$, kde $F(t,x,u)$ i $D_2F(t,x,u)$ jsou spojité na $G \times U$. Podmínky (i) – (iii) jsou splněny a za funkci $k(t)$ lze vzít maximum $||D_2 f(t,x)||$ na K.

Věta 2.2.6 (O jednoznačnosti). *Nechť platí podmínky věty 2.2.5. Nechť J_1 a J_2 jsou intervaly v $\mathbb{R}$ a nechť $\varphi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n$ a $\varphi_2 : J_2 \to \mathbb{R}^n$ jsou dvě řešení počáteční úlohy (2.2.5), jejichž grafy leží v G. Pak $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ pro všechna $t \in J_1 \cap J_2$.*

Důkaz. Lze nalézt v [1] na str. 162. □

Následující věta specifikuje, jak řešení problému (2.2.5) závisí spojitě na počátečních podmínkách.

Věta 2.2.7 (O spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách). *Nechť platí podmínky věty 2.2.5 a nechť $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ je řešení počáteční úlohy (2.2.5) definované na kompaktním intervalu J, jehož graf $\Gamma = \{(t, \varphi(t)) | \, t \in J\}$ leží v $I \times D$.*

Pak existují $\delta > 0$ a okolí $\Gamma' \supset \Gamma$ tak, že pro libovolné $(\tau_0, \xi_0) \in \Gamma'$ má počáteční problém

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(\tau_0) = \xi_0$$

právě jedno řešení $\varphi(\cdot, \tau_0, \xi_0)$ definované na $J' = [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$. Funkce $(t, \tau_0, \xi_0) \mapsto \varphi(t, \tau_0, \xi_0)$ je spojitá na $J' \times \Gamma'$. Pro $(\tau_0, \xi_0) \to (t_0, x_0)$ řešení $\varphi(t, \tau_0, \xi_0)$ konverguje stejnoměrně k $\varphi(t, t_0, x_0)$ vzhledem k $t \in J'$.

Důkaz. Je uveden v [1] na str. 166 až 168. □

[3] Funkce se nazývá lokálně integrovatelná, jestliže je integrovatelná na kompaktním intervalu $J \subset I$.

Abychom mohli formulovat větu o diferencovatelné závislosti řešení podle počáteční podmínky x_0, je třeba zesílit předpoklad (*iii*) uvedený ve větě 2.2.5.

Věta 2.2.8 (O diferencovatelné závislosti řešení na počátečních podmínkách). *Nechť platí podmínky (i), (ii) a (iv) věty 2.2.5 a místo podmínky (iii) platí*

(iii)' pro libovolné $t \in I$ je zobrazení $x \mapsto f(t,x)$ spojitě diferencovatelné.

Nechť $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ je řešení počáteční úlohy (2.2.5) definované na kompaktním intervalu J, jehož graf $\Gamma = \{(t, \varphi(t)) |\ t \in J\}$ leží v $I \times D$ a nechť $\delta > 0$ a $J' = [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$ jsou stejné jako ve větě 2.2.7

Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro libovolné $\tau_0 \in J'$ je zobrazení $\xi_0 \to \varphi(\cdot, \tau_0, \xi_0)$ z $B(x_0, \varepsilon)$ do $C(J', \mathbb{R}^n)$ spojitě diferencovatelné. Označme

$$z : t \mapsto D_3\varphi(t, t_0, x_0).$$

Tato maticová funkce je řešením počáteční úlohy

$$\dot{z} = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \cdot z, \quad z(t_0) = \mathbf{E},$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n.

Důkaz. Lze nalézt v [1] na str. 171 až 173. □

V dalších oddílech této kapitoly se budeme opět zabývat klasickým řešením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

2.3 Autonomní rovnice

Důležitým případem soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.0.1) je soustava, ve které funkce f explicitně nezávisí na nezávisle proměnné t, ale pouze na proměnné x. Taková soustava, kterou lze psát ve tvaru

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.3.1}$$

kde $f : D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, se nazývá *autonomní soustava obyčejných diferenciálních rovnic* nebo krátce *autonomní rovnice*. Budeme předpokládat, že každý počáteční problém (2.3.1), $x(t_0) = x_0$ je jednoznačný pro každé $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$. Chceme–li charakterizovat řešení autonomních rovnic, kterým v této sekci budeme rozumět pouze úplné řešení, je třeba zavést další pojmy.

Množina D se nazývá *fázový prostor* a nezávisle proměnná t je nazývána *čas*. Řešení $\varphi(t)$ rovnice (2.3.1) lze interpretovat jako *křivku* ve fázovém prostoru D danou parametricky rovnicí $x = \varphi(t)$, která má v každém bodě $x \in D$ tečný vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 2.3.1. Funkci f lze interpretovat jako *vektorové pole* na D, kdy každému bodu $x \in D$ přiřadíme vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

Lze ukázat, např. [40] nebo [86], že platí následující tvrzení.

Lemma 2.3.1. *Nechť $\varphi(t)$ je řešení počátečního problému (2.3.1), $x(t_0) = x_0$ definované na intervalu (t^-, t^+). Pak pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ je $\psi(t) = \varphi(t + \tau)$ řešení počátečního problému (2.3.1), $x(t_0 - \tau) = x_0$, které je definované na intervalu $(t^- - \tau, t^+ - \tau)$.*

Poznámka 2.3.2. Řešení $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ z předchozího lemmatu jsou pro $\tau \neq 0$ různé. Nicméně ve fázovém prostoru jsou tato řešení reprezentována stejnými křivkami. To nás přivádí k tomu, že pro každé řešení lze položit počáteční čas $t_0 = 0$. Řešení (2.3.1) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ budeme zapisovat ve tvaru $\varphi(t, x_0)$ a maximální interval, na kterém toto řešení existuje označíme $I(x_0) = (t^-, t^+)$.

Při popisu řešení autonomních rovnic hraje důležitou úlohu pojem *trajektorie* procházející bodem $x_0 \in D$, kterým se rozumí množina

$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in I(x_0)} \varphi(t, x_0).$$

Podobně lze charakterizovat *kladnou,* resp. *zápornou polotrajektorii* procházející bodem $x_0 \in D$. Uvědomíme-li si, že $0 \in (t^-, t^+)$, jedná se o množiny

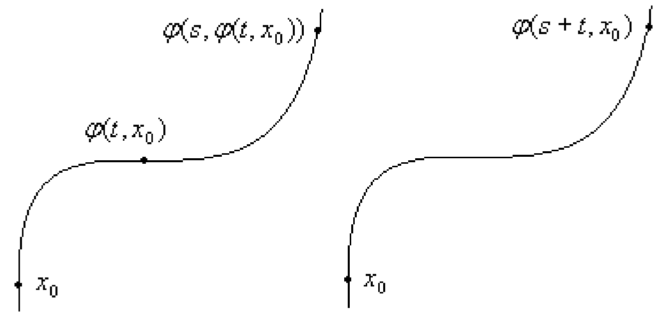
$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in (0, t^+)} \varphi(t, x_0), \text{ resp. } \gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in (t^-, 0)} \varphi(t, x_0).$$

Poznámka 2.3.3. Z předpokladů uvedených při popisu soustavy (2.3.1) vyplývá, že pokud mají grafy dvou úplných řešení této soustavy společný bod, tak splývají. Ukážeme, že totéž platí o trajektoriích. Konkrétně ukážeme, že *trajektorie ve fázovém prostoru se neprotínají, tj. každý bod $x \in D$ leží právě na jedné trajektorii.* I když se uvedené tvrzení zdá být intuitivně zřejmé, je třeba si uvědomit, že pojem trajektorie je odlišný od pojmu graf řešení. Podívejme se tedy na důkaz.

Nejdříve si všimněme, že vzhledem k předpokladu jednoznačnosti řešení v soustavě (2.3.1) platí: pro každé $x_0 \in D$, $t \in I(x_0)$ a $s \in I(\varphi(t, x_0))$ je $s + t \in I(x_0)$ a

$$\varphi(s, \varphi(t, x_0)) = \varphi(s + t, x_0).^4 \tag{2.3.2}$$

Situaci znázorňuje obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Ilustrace vztahu (2.3.2).

Pomocí (2.3.2) lze nahlédnout, že

$$\text{je–li } x = \varphi(t, x_0),\ t \in I(x_0),\ \text{pak } x_0 = \varphi(-t, x),\ -t \in I(x) = I(x_0). \tag{2.3.3}$$

[4] Tento vztah tvoří jednu z podmínek, která se používá při definici pojmu *tok vektorového pole f* a pojmu *dynamický systém,* viz [4, str. 124].

Mějme nyní $\xi, \eta \in D$ takové, že $\xi \neq \eta$ a $\gamma(\xi) \cap \gamma(\eta) \neq$. Podle definice trajektorie to znamená, že existují $\tau \in I(\xi)$ a $\nu \in I(\eta)$ takové, že

$$\varphi(\tau, \xi) = \varphi(\nu, \eta).$$

Podle předpokladu jednoznačnosti odtud máme $I(\varphi(\tau, \xi)) = I(\varphi(\nu, \eta))$. Pomocí (2.3.3) a (2.3.2) získáme

$$\xi = \varphi(-\tau, \varphi(\nu, \eta)) = \varphi(\nu - \tau, \eta), \tag{2.3.4}$$

kde

$$-\tau \in I(\varphi(\nu, \eta)) = I(\xi),\ \nu - \tau \in I(\eta). \tag{2.3.5}$$

Uvažujme libovolné $x \in \gamma(\xi)$, pak existuje $t \in I(\xi)$ takové, že $x = \varphi(t, \xi)$. Použijeme-li (2.3.4) a (2.3.2), můžeme psát $x = \varphi(t, \varphi(\nu - \tau, \eta)) = \varphi(t + \nu - \tau, \eta)$. Pomocí (2.3.5) máme $t \in I(\xi) = I(\varphi(\nu - \tau, \eta))$, takže $t + \nu - \tau \in I(\eta)$. Tedy $x \in \gamma(\eta)$ a $\gamma(\xi) \subseteq \gamma(\eta)$. Obrácenou inkluzi bychom ukázali obdobným způsobem, takže $\gamma(\xi) = \gamma(\eta)$.

Strukturu rozdělení fázového prostoru na trajektorie, tj. geometrický obraz vzájemného rozložení trajektorií ve fázovém prostoru, nazýváme *fázový portrét* nebo fázový obraz. Věnujme se nyní klasifikaci některých význačných trajektorií soustavy (2.3.1).

Definice 2.3.1. Bod $x^\circ \in D$ se nazývá *stacionární bod* rovnice $\dot{x} = f(x)$, jestliže $\varphi(t, x^\circ) = x^\circ$ pro všechna $t \in I(x^\circ)$. Řešení $\varphi(\cdot, x^\circ)$ se nazývá *konstantní,* resp. *stacionární řešení.*

Poznámka 2.3.4. Trajektorie konstantního řešení x° rovnice $\dot{x} = f(x)$ ve fázovém prostoru je *jednobodová množina* $\{x^\circ\}$ a platí $I(x^\circ) = \mathbb{R}$.

Věta 2.3.2. *$x^\circ \in D$ je stacionární bod rovnice $\dot{x} = f(x)$ právě tehdy, když $f(x^\circ) = 0$.*

Důkaz. Nechť $x^\circ \in D$ je stacionární bod, pak

$$f(x^\circ) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t, x^\circ) - x^\circ}{t} = 0.$$

Naopak, platí-li pro nějaký bod $x^\circ \in D$ vztah $f(x^\circ) = 0$, pak je konstantní funkce $t \mapsto x^\circ$, $t \in \mathbb{R}$ řešením počátečního problému $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x^\circ$. Díky jednoznačnosti řešení pak $\varphi(t, x^\circ) = x^\circ, t \in I(x^\circ) = \mathbb{R}$. □

Definice 2.3.2. Bod $x \in D$ se nazývá *periodický bod* rovnice $\dot{x} = f(x)$, jestliže existuje $T > 0$ takové, že $\varphi(t + T, x) = \varphi(t, x)$ pro $t \in I(x)$. Řešení $\varphi(\cdot, x)$ pak nazýváme *periodické řešení* s periodou T. *Minimální perioda* je taková perioda, pro kterou platí $\varphi(t, x) \neq x$ pro $t \in (0, T)$.

Poznámka 2.3.5. Lze ukázat, např. [86, str. 14], že řešení autonomní rovnice (2.3.1) je periodické právě tehdy, když jeho trajektorie ve fázovém prostoru je uzavřená křivka a že toto periodické řešení je definováno pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Uzavřená křivka ve fázovém prostoru se nazývá *cyklus.*

Poznámka 2.3.6. V [40, str. 97] se ukazuje, že autonomní rovnice (2.3.1) může mít trajektorie trojího typu: (i) Stacionární body, které odpovídají konstantním řešením. (ii) Uzavřené trajektorie, cykly, které odpovídají nekonstantním periodickým řešením. (iii) Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Uvažujme, že interval, na kterém existuje řešení procházející bodem $x_0 \in D$, je $I(x_0) = (-\infty, \infty)$. Při zkoumání asymptotického chování tohoto řešení je užitečný následující pojem: Bod $p \in D$ se nazývá *ω-limitním bodem* trajektorie $\gamma(x_0)$ soustavy (2.3.1), jestliže existuje posloupnost $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, $t_n \to \infty$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0) = p.$$

Množina všech ω-limitních bodů trajektorie $\gamma(x_0)$, kterou značíme $\omega(x_0)$, se nazývá *ω-limitní množina* trajektorie $\gamma(x_0)$. Podobně lze definovat následující pojem: Bod $q \in D$ se nazývá *α-limitním bodem* trajektorie $\gamma(x_0)$ soustavy (2.3.1), jestliže existuje posloupnost $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, $t_n \to -\infty$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0) = q.$$

Množina všech α-limitních bodů trajektorie $\gamma(x_0)$, kterou značíme $\alpha(x_0)$, se nazývá *α-limitní množina* trajektorie $\gamma(x_0)$. Abychom mohli popsat další vlastnosti ω-limitní množiny, věnujeme pozornost pojmu invariantní množiny: Množina $M \subseteq D$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^n$, se nazývá *invariantní* vzhledem k soustavě (2.3.1), jestliže pro každé $x_0 \in M$ je $\gamma(x_0) \subset M$. Platí-li místo této vlastnosti pouze $\gamma^+(x_0) \subset M$, resp. $\gamma^-(x_0) \subset M$, nazývá se M *pozitivně*, resp. *negativně invariantní.*

Věta 2.3.3. *Je-li kladná polotrajektorie $\gamma^+(x_0)$ omezená, pak ω-limitní množina $\omega(x_0)$ je neprázdná, kompaktní, souvislá a invariantní.*

Důkaz. Lze nalézt např. v [30] na str. 288. □

Poznámka 2.3.7. Jestliže pro řešení $\varphi(t, x_0)$, $t \in (t^-, \infty)$ autonomní rovnice (2.3.1) existuje $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = x^\circ \in D$, pak x° je stacionární bod. Uvažujme libovolnou rostoucí vybranou posloupnost $(t_n)_{n=1}^{\infty}, t_n \to \infty$, pak $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0) = x^\circ$. To znamená, že $x^\circ \in \omega(x_0)$ a také, že jiné body do ω-limitní množiny nepatří. Tedy $\omega(x_0) = \{x^\circ\}$.

Poznámka 2.3.8. Předpokládejme, že $\varphi(t, x_0)$, $t \in (-\infty, \infty)$ je periodické řešení soustavy (2.3.1) a že minimální perioda je $T > 0$. Pak je $\gamma(x_0)$ cyklus. Uvažujme libovolné $\xi \in \gamma(x_0)$, pak existuje $t_\xi \in [0, T)$ takové, že $\xi = \varphi(t_\xi, x_0)$. Sestrojme nyní posloupnost $t_n = nT + t_\xi$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\xi = \varphi(t_n, x_0)$. Tedy $\xi \in \omega(x_0)$. Protože jiné body do ω-limitní množiny nepatří, je $\omega(x_0) = \gamma(x_0)$.

2.4 Stabilita řešení

Všimněme si nejdříve, jak je pojem stability chápán v každodenním životě. Pomineme-li biologické a fyzikální aspekty, je každodenní život podstatně utvářen vztahy mezi ekonomickými subjekty. Pokud by neexistovaly stabilní rovnovážné ceny potravin a pokud by neexistovala možnost dlouhodobého zaměstnání, žili bychom v nejistotě z budoucnosti. Pokud by neexistovaly dlouhodobě platné právní předpisy, nemělo by význam uskutečňovat investiční záměry a prosazovat modernizaci podporovanou vědeckými výzkumy. Život by se ubíral v neustálých sporech a jeho budoucnost by byla nejistá. V uvedených případech lze rozeznat dvě důležitá hlediska: dlouhý časový interval a malá změna v porovnání se zvoleným stavem. Podobný význam pojmu stability lze nalézt také v matematice.

Konstantní nebo periodická řešení autonomních rovnic, o kterých jsme se zmínili v sekci

2.3, existují v libovolném čase t. V aplikacích nastává otázka, zda řešení, která jsou v počátečním čase t_0 blízko zmíněných speciálních řešení zůstanou v blízkosti těchto řešení i pro $t > t_0$. V případě, že taková situace nastane, nazýváme příslušné speciální řešení stabilní. V [26] je uvedeno, že existuje více než 57 variant definice stability řešení. V tomto textu se soustředíme pouze na takové, které později využijeme v konkrétních ekonomických aplikacích.

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $J = (\alpha, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce, která splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné $x \in D$. Nechť dále $(t_0, x_0) \in J \times D$ a $\varphi(t, t_0, x_0)$ označuje řešení počátečního problému

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.4.1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.4.2}$$

Předpokládejme také, že $f(\cdot, 0) = 0$, takže diferenciální rovnice (2.4.1) má nulové řešení $x = 0$, které je úplné.

Definice 2.4.1. Nulové řešení rovnice (2.4.1) se nazývá

(i) *ljapunovsky stabilní,* jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a $t_0 \in J$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tak, že každé řešení $\varphi(t, t_0, x_0)$ počátečního problému (2.4.1), (2.4.2) vyhovující podmínce $||x_0|| < \delta$ existuje pro $t > t_0$ a pro tato t platí $||\varphi(t, t_0, x_0)|| < \varepsilon$,

(ii) *ljapunovsky nestabilní,* jestliže není ljapunovsky stabilní,

(iii) *atraktorem,* jestliže pro každé $t_0 \in J$ existuje $\eta = \eta(t_0) > 0$ takové, že pro všechna řešení $\varphi(t, t_0, x_0)$ počátečního problému (2.4.1), (2.4.2) vyhovující podmínce $||x_0|| < \eta$ platí $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, t_0, x_0) = 0$.

(iv) *asymptoticky stabilní,* jestliže je stabilní a je atraktorem.

Poznámka 2.4.1. Je–li $\overline{\varphi}(t, \tau, \xi)$ nějaké nenulové úplné řešení rovnice $\dot{x} = f(t, x)$ má diferenciální rovnice

$$\dot{y} = f(t, y + \overline{\varphi}(t)) - f(t, \overline{\varphi}(t)) = g(t, y), \tag{2.4.3}$$

pro kterou platí $g(t, 0) = 0$, nulové úplné řešení. Má–li nulové řešení rovnice (2.4.3) některou z vlastností (i)–(iv) předchozí definice, lze z tohoto důvodu říkat, že také řešení $\overline{\varphi}$ má danou vlastnost.

Konkrétně také říkáme, že stacionární bod x° autonomní soustavy $\dot{x} = f(x)$, kde $f(x^\circ) = 0$, je stabilní, asymptoticky stabilní, atd., jestliže konstantní řešení $\overline{\varphi}(t) = x^\circ$, $t \in \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti.

Poznámka 2.4.2. Pojem stability rozšiřuje vlastnost popsanou ve větě 2.2.3 o spojité závislosti na počátečních podmínkách. To znamená, že pro každé $t_0 \in J$ platí

$$\lim_{x_0 \to 0} \varphi(t, t_0, x_0) \;=\; 0$$

stejnoměrně pro $t \in [t_0, \infty)$. Z věty 2.2.3 lze odvodit, že daný vztah platí pouze na kompaktním podintervalu J, viz také poznámky 2.2.5 a 2.2.4.

Poznámka 2.4.3. Pojem stability a pojem atraktoru jsou nezávislé pojmy. Nulové řešení soustavy $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ je stabilní, ale není to atraktor. Např. v [26] je na str. 30 uveden příklad autonomní soustavy, jejíž stacionární bod je atraktor, který není stabilní. Jedná se o stacionární bod $(0, 1)$ soustavy

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2.4.4}$$

$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2.4.5}$$

Poznámka 2.4.4. Protože $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, t_0, x_0) = 0$ znamená: pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ takové, že pro $t > t_0 + \tau$ platí $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, můžeme podmínku v definici atraktoru napsat podrobněji. Nulové řešení rovnice (2.4.1) je atraktorem, jestliže pro všechna $t_0 \in J$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují $\eta = \eta(t_0) > 0$ a $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ takové, že pro $||x_0|| < \eta$ a $t > t_0 + \tau$ platí $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$.

Pojem ljapunovské stability uvedený v definici 2.4.1 vyžaduje existenci $\delta > 0$, které je závislé jednak na výběru $\varepsilon > 0$ a jednak na výběru $t_0 \in J$. Uveďme ještě variantu dané definice, ve které je $\delta > 0$ závislé pouze na výběru $\varepsilon > 0$.

Definice 2.4.2. Nulové řešení rovnice (2.4.1) se nazývá

(i) *stejnoměrně stabilní*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $t_0 \in J$ všechna řešení $\varphi(t, t_0, x_0)$ počátečního problému (2.4.1), (2.4.2) vyhovující podmínce $||x_0|| < \delta$ existují pro $t > t_0$ a pro tato t platí $||\varphi(t, t_0, x_0)|| < \varepsilon$,

(ii) *stejnoměrně asymptoticky stabilní,* jestliže je stejnoměrně stabilní a jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existují $\eta > 0$ a $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ takové, že pro všechna $t_0 \in J$ platí: je-li $||x_0|| < \eta$ a $t > t_0 + \tau$ je $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$.

Poznámka 2.4.5. V případě, že soustava rovnic (2.4.1) je autonomní, jsou pojmy stabilita, resp. asymptotická stabilita shodné s pojmy stejnoměrná stabilita, resp. stejnoměrná asymptotická stabilita.

2.4.1 Stabilita homogenní soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty

Nechť $\mathbf{A}$ je konstantní čtvercová matice řádu n s reálnými koeficienty.[5] Uvažujme autonomní homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\dot{x} = \mathbf{A}x, \tag{2.4.6}$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$. Připomeňme, že k dané matici $\mathbf{A}$ lze sestrojit charakteristickou rovnici

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0,$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n a kořen charakteristické rovnice $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá *vlastní hodnota* matice $\mathbf{A}$.

[5] Pro aplikace v ekonomii, kterými se budeme zabývat, tento předpoklad postačí.

Poznámka 2.4.6. V případě, že

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu 2, lze její charakteristickou rovnici psát ve tvaru

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}\, \lambda + \det \mathbf{A} = 0,$$

kde $\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22}$ je stopa matice $\mathbf{A}$ a $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ je její determinant. Vztah lze ověřit přímým výpočtem, platí totiž

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Připomeňme také, že existuje regulární matice $\mathbf{T}$ řádu n taková, že matice $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ má tzv. *Jordanův tvar*. Podrobnější popis lze nalézt např. v [44] nebo [40]. Řešení soustavy (2.4.6) je vhodné hledat ve tvaru $x = \mathbf{T}y$. Funkce y pak splňuje rovnici $\mathbf{T}\dot{y} = \mathbf{AT}y$, neboli

$$\dot{y} = \mathbf{J}y. \tag{2.4.7}$$

Řešení soustavy (2.4.7) lze nalézt přímou integrací. Pomocí transformace $x = \mathbf{T}y$ pak ihned získáme řešení soustavy (2.4.6).

Poznámka 2.4.7. Jsou-li všechny vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$ navzájem různé, existuje regulární matice $\mathbf{T}$ řádu n taková, že matice $\mathbf{J}$ je diagonální.

Věta 2.4.1. *Nulové řešení rovnice (2.4.6)*

(i) je stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ má nekladnou reálnou část a každý kořen s nulovou reálnou částí je jednoduchého typu (tj. každý blok odpovídající takovému kořenu v Jordanově kanonickém tvaru má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále).

(ii) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ má zápornou reálnou část.

Důkaz. Lze nalézt na str. 126, resp. na str. 129 v [40]. □

2.4.2 Linearizovaná stabilita

V tomto odstavci budeme uvažovat nelineární soustavu rovnic $\dot{x} = f(t, x)$, o které budeme předpokládat, že je v jistém smyslu blízká vhodně zvolené lineární soustavě $\dot{x} = \mathbf{A}x$ s konstantní reálnou maticí $\mathbf{A}$ řádu n. Konkrétní předpoklady budou uvedeny v tvrzeních, jejichž výběr je podřízen využití v dále uvedených aplikacích.

Věta 2.4.2 (Asymptotická stabilita). *Nechť $\mathbf{A}$ je reálná čtvercová matice řádu n taková, že všechny kořeny její charakteristické rovnice mají zápornou reálnou část. Dále nechť zobrazení $g : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojité, splňuje Lipschitzovu podmínku v proměnné $x \in D$ a platí*

$$||g(t, x)|| = o(||x||),\ x \to 0,$$

stejnoměrně pro $t \in J$. Pak nulové řešení porušené lineární soustavy

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + g(t, x)$$

je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Důkaz. Lze nalézt na str. 202 a 203 v [4]. □

Někdy je užitečná obdoba předchozího kritéria, která umožňuje posoudit nestabilitu řešení.

Věta 2.4.3 (Nestabilita). *Nechť* $\mathbf{A}$ *je reálná čtvercová matice řádu n taková, že alespoň jeden kořen její charakteristické rovnice má kladnou reálnou část. Dále nechť zobrazení* $g : J \times D \to \mathbb{R}^n$ *je spojité, splňuje Lipschitzovu podmínku v proměnné* $x \in D$ *a platí*

$$||g(t,x)|| = o(||x||),\ x \to 0,$$

stejnoměrně pro $t \in J$. *Pak nulové řešení porušené lineární soustavy*

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + g(t,x)$$

je nestabilní.

Důkaz. Lze nalézt na str. 204 až 206 v [4]. □

V případě, že pracujeme s autonomní nelineární soustavou, může být užitečné následující tvrzení, jehož důkaz je založen na použití dvou předchozích tvrzení.

Věta 2.4.4 (Princip linearizované stability). *Nechť* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina,* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *je spojitě diferencovatelné zobrazení a* $f(x_0) = 0$. *Jestliže má každý kořen charakteristické rovnice Jacobiho matice* $Df(x_0)$ *zápornou reálnou část, pak je* x_0 *asymptoticky stabilní stacionární bod autonomní rovnice* $\dot{x} = f(x)$. *Jestliže má alespoň jeden charakteristický kořen Jacobiho matice* $Df(x_0)$ *kladnou reálnou část, je stacionární bod* x_0 *nestabilní.*

Důkaz. Lze nalézt na str. 206 v [4]. □

Poznámka 2.4.8. Uvedená věta představuje pouze lokální výsledek. Nelze podle ní např. zjistit, jak vypadá množina bodů, pro které je daný stacionární bod atraktorem.

Poznámka 2.4.9. Hlavní výhodou při použití této věty je, že stačí znát pouze znaménka kořenů charakteristické rovnice. Pro zjištění této informace lze použít např. Hurwitzovo kritérium, viz str. 209 v [4].

2.4.3 Přímá Ljapunovova metoda

V tomto oddílu budeme předpokládat, že $f(0) = 0$ a budeme se zajímat o podmínky zaručující stabilitu nulového řešení autonomní soustavy

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.4.8}$$

kde $f : D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce na $D = \{x \in \mathbb{R}^n |\ ||x|| < a\}$ pro $0 < a \leq \infty$. Uvedeme zde metodu založenou na použití vhodné pomocné funkce, která umožňuje posoudit, zda je nulové řešení soustavy (2.4.8) stabilní nebo nestabilní, aniž bychom znali její řešení pro $x_0 \neq 0$. Při popisu vycházíme z [40] a [30].

Definice 2.4.3. Funkce $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá

(i) *pozitivně definitní* v okolí G počátku $0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže $V(0) = 0$ a $V(x) > 0$ pro všechna $x \in G \setminus \{0\}$.

(ii) *negativně definitní* v okolí G počátku $0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže $V(0) = 0$ a $V(x) < 0$ pro všechna $x \in G \setminus \{0\}$.

Definice 2.4.4. Spojitá funkce $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá *ljapunovská funkce* soustavy (2.4.8), jestliže existuje okolí G počátku $0 \in \mathbb{R}^n$ tak, že

(i) V je pozitivně definitní v G,

(ii) je–li $\varphi(t) = \varphi(t, \tau, \xi)$ řešení (2.4.8), pro které $\xi \in G$, pak $V(\varphi(t))$ je nerostoucí pro všechna $t \geq \tau$ pro které $\varphi(t) \in G$.

Věta 2.4.5. *Jestliže existuje ljapunovská funkce soustavy (2.4.8), pak je nulové řešení této soustavy stejnoměrně stabilní.*

Důkaz. Je uveden na str. 143 v [40]. □

Pro další úvahy budeme předpokládat, že funkce V má spojité parciální derivace prvního řádu a $\varphi(t)$ je řešení rovnice (2.4.8). Uplatníme–li tento předpoklad, pak složená funkce $V(\varphi(t))$ je nerostoucí, jestliže

$$(V(\varphi(t)))^{\cdot} = DV(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = DV(x)f(x) \leq 0,$$

kde jsme označili $x = \varphi(t)$, $x \in G$. Derivace $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$, $x \in G$ se nazývá *derivace funkce V vzhledem k rovnici* (2.4.8). V aplikacích se ukáže užitečnost následujícího tvrzení.

Věta 2.4.6. *Jestliže v okolí G počátku* $0 \in \mathbb{R}^n$ *existuje pozitivně definitní funkce* $V : G \to \mathbb{R}$ *se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu taková, že její derivace vzhledem k rovnici (2.4.8) je negativně definitní, pak je nulové řešení této rovnice asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Lze nalézt v [40] na str. 143. □

2.5 Stacionární body a periodická řešení autonomních rovnic v rovině

V této sekci se vrátíme k autonomním soustavám rovnic a provedeme několik přípravných úvah pro následující kapitolu. Budeme uvažovat otevřenou množinu $X \subseteq \mathbb{R}^2$, funkci $f \in C^1(X, \mathbb{R}^2)$ a autonomní soustavu

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.5.1}$$

Protože $X \subseteq \mathbb{R}^2$, nazývá se (2.5.1) *rovnice v rovině.* V aplikacích budeme potřebovat charakterizovat různé typy stacionárních bodů rovnice (2.5.1) a zjistit existenci periodických řešení. V souvislosti s ekonomickými problémy představují stacionární body autonomních rovnic klidový nebo rovnovážný stav a periodická řešení autonomních rovnic se objevují v modelech, které popisují hospodářské cykly. To je hlavní důvod, proč se v této sekci budeme věnovat kritériím, které existenci periodického řešení autonomní soustavy (2.5.1) zajišťují.

2.5.1 Typy stacionárních bodů soustavy v rovině

Pomocí [86] a [40] uvedeme stručnou charakteristiku stacionárních bodů lineární autonomní rovnice

$$\dot{x} = \mathbf{A}x, \tag{2.5.2}$$

kde $x \in \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{A}$ je konstantní čtvercová matice řádu 2. Je-li $\mathbf{A}$ reálná matice, jsou vlastní hodnoty této matice rovněž reálná nebo komplexně sdružená čísla.

- Jsou-li vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$ reálné, různé a mají-li stejné znaménko, nazývá se stacionární bod $0 \in \mathbb{R}^2$ *uzel.* Jsou-li vlastní hodnoty záporné, jedná se o stabilní uzel. V případě, že jsou tyto hodnoty kladné, jedná se o nestabilní uzel.
- Jsou-li vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$ reálné a mají-li opačné znaménko, nazývá se stacionární bod $0 \in \mathbb{R}^2$ *sedlo.*
- Jsou-li vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$ komplexně sdružená čísla $\alpha \pm i\beta$, kde $\alpha\beta \neq 0$, nazývá se stacionární bod $0 \in \mathbb{R}^2$ *ohnisko.* V případě, že $\alpha < 0$, jedná se o stabilní ohnisko, pokud je $\alpha > 0$, jedná se o nestabilní ohnisko.
- Jsou-li vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$ ryze imaginární čísla, nazývá se stacionární bod $0 \in \mathbb{R}^2$ *střed.*

Poznámka 2.5.1. V případě, že se jedná o stacionární body autonomní rovnice, která není lineární, lze provést podobné rozdělení. Geometrická charakteristika takových stacionárních bodů je uvedena v [59] na str. 138.

Poznámka 2.5.2. Bodem rotace se rozumí takový stacionární bod x° rovnice (2.5.3) v jehož libovolném okolí existuje alespoň jeden cyklus, který odpovídá nekonstantnímu periodickému řešení. Jeho grafem ve fázovém prostoru je uzavřená křivka, která ve svém vnitřku obsahuje bod x°.

Nyní lze pro popis stacionárních bodů soustavy nelineárních autonomních rovnic v rovině využít následující tvrzení, jehož důkaz lze nalézt v [40] na str. 117.

Věta 2.5.1. *Předpokládejme, že zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $x^\circ \in \mathbb{R}^2$ a že $f(x^\circ) = 0$. Nechť* $\det Df(x^\circ) \neq 0$. *Pak bod x° je izolovaným stacionárním bodem systému*

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.5.3}$$

Přitom je bod x° uzel, ohnisko nebo sedlo pro systém (2.5.3), je-li počátek singulárním bodem stejného typu pro lineární systém

$$\dot{z} = Df(x^\circ)\, z, \tag{2.5.4}$$

kde $z = x - x^\circ$. Je-li však počátek střed pro systém (2.5.4), je bod x° buď bod rotace nebo ohnisko pro systém (2.5.3).

2.5.2 Věta o stabilní varietě

Je-li stacionární bod x° soustavy 2.5.1 sedlo, je nestabilní. Vzniká otázka, jak geometricky odlišit sedlo od ostatních typů nestabilních stacionárních bodů. Pokud budeme blíže studovat fázový portrét v blízkosti sedla, všimneme si čtyř speciálních trajektorií, jejichž ω - limitním nebo α - limitním bodem je stacionární bod x°. Společně se stacionárním bodem hrají tyto speciální trajektorie důležitou roli při popisu fázového portrétu rovnice (2.5.1).

Definice 2.5.1. Nechť U je okolí stacionárního bodu x° soustavy (2.5.1). *Lokální stabilní varieta* bodu x° je množina

$$W^s(x^\circ, U) = \{x_0 \in U |\ \varphi(t, x_0) \in U \text{ pro } t \geq 0 \text{ a } \lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = x^\circ\}.$$

Lokální nestabilní varieta bodu x° je množina

$$W^n(x^\circ, U) = \{x_0 \in U |\ \varphi(t, x_0) \in U \text{ pro } t \leq 0 \text{ a } \lim_{t\to-\infty} \varphi(t, x_0) = x^\circ\}.$$

Uvažujme, že byla zvolena taková soustava souřadnic, že soustava (2.5.1), jejímž stacionárním bodem je sedlo, má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + g_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

kde $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ a zobrazení $g = (g_1, g_2)$ splňuje podmínky $g(0,0) = 0$, $Dg(0,0) = 0$. Linearizací této soustavy ve stacionárním bodě $(0,0)$ získáme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Lokální stabilní, resp. nestabilní, varieta soustavy (2.5.6) je osa x_1, resp. osa x_2.

Věta 2.5.2 (O stabilní varietě). *Pro soustavu (2.5.5) existuje $\delta > 0$ takové, že v okolí $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ |x_1| < \delta, |x_2| < \delta\}$ lze stabilní a nestabilní varietu v počátku vyjádřit ve tvaru*

$$\begin{aligned} W^s(0, U) &= \{(x_1, x_2) \in U |\ x_2 = h_s(x_1), |x_1| < \delta\}, \\ W^n(0, U) &= \{(x_1, x_2) \in U |\ x_1 = h_n(x_1), |x_2| < \delta\}, \end{aligned}$$

kde funkce h_s a h_n jsou tak hladké jako zobrazení g v rovnici (2.5.5). Tyto funkce navíc splňují podmínky

$$h_s(0) = 0, h_n(0) = 0, h_s'(0) = 0, h_n'(0) = 0.$$

Větu jsme formulovali podle [30]. Obecnější verzi této věty a její důkaz lze nalézt v [59] na str. 107 až 111.

Poznámka 2.5.3. Podle uvedené věty je lokální stabilní varieta v počátku hladký graf v soustavě souřadnic tvořené stabilní a nestabilní varietou linearizované soustavy (2.5.6). Také lze říci, že lokální stabilní varieta linearizované soustavy (2.5.6) je tečnou k lokální stabilní varietě soustavy (2.5.5) v počátku.

Vraťme se znovu ke konceptu lokální stabilní a nestabilní variety stacionárního bodu v rovině. Nebudeme-li požadovat, aby příslušné definice platily v určitém okolí stacionárního bodu, můžeme přistoupit k následující definici.

Definice 2.5.2. Nechť x° je stacionární bod soustavy (2.5.1). *Globální stabilní varieta* stacionárního bodu x° je množina

$$W^s(x^\circ) = \{x_0 \in \mathbb{R}^2 | \lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = x^\circ\}.$$

Globální nestabilní varieta bodu x° je množina

$$W^n(x^\circ) = \{x_0 \in \mathbb{R}^2 | \lim_{t\to-\infty} \varphi(t, x_0) = x^\circ\}.$$

Poznámka 2.5.4. Obecně jsou globální stabilní a nestabilní variety velmi komplikované, takže neplatí globální analogie věty 2.5.2. V některých případech platí $W^s(x^\circ, U) = W^s(x^\circ) \cap U$ a $W^n(x^\circ, U) = W^n(x^\circ) \cap U$.

Poznámka 2.5.5. Určit globální stabilní varietu přímo podle definice 2.5.2 je složité, protože jako počáteční body by bylo třeba vyzkoušet všechny body fázové roviny. Jinou možností, jak získat globální stabilní varietu, je nejdříve nalézt lokální stabilní varietu. Budeme-li body lokální stabilní variety považovat za počáteční body a otočíme-li čas, získáme globální stabilní varietu, tj.

$$W^s(x^\circ) = \bigcup_{t\leq 0} \varphi(t, W^s(x^\circ, U)).$$

2.5.3 Poincaré – Bendixsonova věta

Definici periodického řešení jsme uvedli v sekci 2.3. Tam jsme také uvedli, že ve fázovém prostoru odpovídá periodickému řešení uzavřená trajektorie, která je Jordanovou křivkou a která se nazývá cyklus. Protože uvažujeme autonomní rovnici v rovině, plyne z Jordanovy věty, viz [14], že cyklus rozdělí rovinu na dvě části - omezenou vnitřní část cyklu a neomezenou vnější část cyklu. V bodech, které se nacházejí "blízko" cyklu mohou začínat trajektorie, které se v průběhu času k danému cyklu "spirálovitě" přibližují nebo vzdalují, zavedeme proto následující pojem.

Definice 2.5.3. Cyklus γ odpovídající periodickému řešení soustavy (2.5.1) se nazývá *limitní cyklus*, jestliže existuje $x \in X \setminus \gamma$ takový, že $\gamma \subseteq \omega(x)$.

Poznámka 2.5.6. V [44, str. 298] je uvedeno lemma, ve kterém se tvrdí, že pro cyklus γ a bod $x \in X$ pro které $\gamma \subseteq \omega(x)$, platí $\gamma = \omega(x)$.

Nyní můžeme formulovat tvrzení, podle kterého lze rozhodnout o existenci cyklu pro soustavu (2.5.1).

Věta 2.5.3 (Poincaré–Bendixsonova). *Nechť $K \subseteq X$ je kompaktní množina a $\gamma^+(x_0) \subseteq K$. Jestliže $\omega(x_0)$ neobsahuje stacionární bod, je $\omega(x_0)$ cyklus.*

Důkaz. Lze nalézt v [4] na str. 333. □

Poznámka 2.5.7. Jinými slovy: Jestliže se bod pohybuje po trajektorii a zůstává přitom v nějaké kompaktní oblasti roviny, která neobsahuje stacionární body, pak je daná trajektorie cyklus nebo limitní cyklus.

V některých aplikacích je přímé ověření předpokladů věty 2.5.3 obtížné. Následující tvrzení, které lze pomocí věty 2.5.3 dokázat, viz str. 335 v [4], garantuje existenci limitního cyklu a jeho předpoklady lze v některých aplikacích ověřit snadněji.

Věta 2.5.4. *Nechť $K \subseteq X$ je kompaktní a pozitivně invariantní množina. Nechť existuje právě jeden stacionární bod $x^\circ \in K$. Jestliže $K \neq \{x^\circ\}$ a je-li x° nestabilní uzel nebo ohnisko, pak v K existuje alespoň jeden limitní cyklus γ.*

Poznámka 2.5.8. Nyní můžeme naznačit postup, který lze při hledání periodického řešení uplatnit: (i) Nalezneme stacionární body. (ii) Lokalizujeme stacionární bod, který je nestabilní uzel. (iii) Hledáme pozitivně invariantní množinu, která obsahuje nestabilní uzel. Tento krok může v konkrétních úlohách činit problémy.

Podle předchozích kritérií bylo možno posoudit existenci periodických řešení autonomní soustavy v rovině. Následující tvrzení zajišťuje existenci stacionárního bodu pro autonomní soustavu v rovině.

Věta 2.5.5. *Nechť $K \subseteq X$ je kompaktní, neprázdná a jednoduše souvislá množina, která je pozitivně, resp. negativně invariantní. Pak v K existuje alespoň jeden stacionární bod.*

Důkaz. Lze nalézt v [4] na str. 347. Je poměrně rozsáhlý, protože mu předchází mu několik přípravných úvah uvedených na str. 339 – 346. □

Poznámka 2.5.9. Pomocí věty lze nahlédnout, že každá uzavřená trajektorie soustavy (2.5.1) ve fázové rovině ohraničuje alespoň jeden stacionární bod.

Jak bylo uvedeno v poznámce 2.5.8, je při použití věty 2.5.4 obtížné nalézt pozitivně invariantní množinu a ukázat tak existenci periodického řešení. Na druhé straně následující podmínka umožňuje existenci periodických řešení autonomní soustavy v rovině vyloučit.

Věta 2.5.6 (Bendixsonovo kritérium). *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f \in C^1(X, \mathbb{R}^2)$ a nechť na otevřené souvislé množině $D \subseteq X$ platí buď* $\operatorname{div} f \geq 0$ *nebo* $\operatorname{div} f \leq 0$ *a v žádné otevřené podmnožině množiny D není* $\operatorname{div} f \equiv 0$. *Pak v D neexistuje periodická trajektorie $\dot{x} = f(x)$.*

Důkaz. V [39] na str. 9 a 10. □

Na závěr uveďme větu, která charakterizuje strukturu ω-limitní množiny a α- limitní množiny autonomní rovnice v rovině.

Věta 2.5.7. *Nechť $K \subseteq X$ je kompaktní množina, $\gamma^+(x_0) \subseteq K$ a nechť rovnice v rovině (2.5.1) má konečný počet stacionárních bodů v K. Pak nastane právě jedna z možností: ω-limitní množina $\omega(x_0)$*

- *(i) je jednobodová množina $\{x^\circ\}$, kde x° je stacionárním bodem a* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x_0) = x^\circ$.
- *(ii) je cyklus, který může být limitním cyklem.*
- *(iii) je tvořena stacionárními body a trajektoriemi jejichž α-limitní množiny a ω-limitní množiny jsou dané stacionární body.*

Důkaz. Je uveden v [59, str. 230]. □

2.5.4 Periodická řešení Liénardovy soustavy

V předcházejícím oddílu 2.5.3 byla formulována Poincaré–Bendixsonova věta, která umožňuje ukázat existenci periodického řešení jisté autonomní soustavy v rovině. Uvedená věta však nedává odpověď na otázku o přesném počtu periodických řešení dané soustavy. V tomto oddílu bude uvedena soustava, která má za určitých podmínek právě jeden limitní cyklus. Jedná se o *Liénardovu soustavu*, kterou lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x), \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

kde funkce $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ a $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mají jisté vlastnosti, které budou uvedeny ve větě 2.5.8. Soustava 2.5.7 může být ekvivalentně zapsána ve tvaru

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{2.5.8}$$

kde $h(x) = F'(x)$. Nyní již zmíněná věta.

Věta 2.5.8. *Nechť*

(i) $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *i* $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *jsou liché funkce,*

(ii) $xg(x) > 0$ *pro* $x \neq 0$,

(iii) $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$ *a existuje právě jeden bod* $a > 0$ *takový, že* $F(a) = 0$ *a pro* $x \geq a$ *je* F *rostoucí, přitom* $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

Pak má Liénardova soustava (2.5.7) právě jeden cyklus, který je stabilní.

Důkaz. Lze nalézt v [59] na str. 235 – 237. □

Poznámka 2.5.10. Existují různé varianty této věty, srv. [4, str. 347], [10, str. 117] nebo [44, str. 300], pro naše účely je však výhodná uvedená formulace.

2.5.5 Fázová rovina a metoda izoklin

Věta 2.5.1 umožňuje charakterizovat trajektorie soustavy (2.5.1) v okolí stacionárních bodů této soustavy. V aplikacích je však často třeba vědět o trajektoriích více. Napišme soustavu (2.5.1) podrobněji

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y). \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Množina bodů (x, y) fázové roviny, ve kterých mají tečny sestrojené k trajektoriím soustavy (2.5.9) stejné směrnice, se nazývá *izoklina,* tj. je-li dáno $c \in \mathbb{R}$, pak množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f_1(x, y) \neq 0$ a $f_2(x, y)/f_1(x, y) = c\}$ nebo množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f_2(x, y) \neq 0$ a $f_1(x, y)/f_2(x, y) = c\}$ jsou izokliny. Pomocí izoklin lze lépe porozumět globálnímu fázovému portrétu soustavy (2.5.9). Položíme-li konkrétně $f_1(x, y) = 0$, resp. $f_2(x, y) = 0$, získáme tzv. x*– nulklinu,* resp. y*– nulklinu.* Tyto izokliny rozdělí fázovou rovinu na oblasti, ve kterých mají funkce f_1 a f_2 různá znaménka. Podle těchto znamének lze zjistit, zda se souřadnice řešení x_1 nebo x_2 při pohybu po trajektorii zvětšují nebo zmenšují. Průsečíky nulklin reprezentují stacionární body soustavy. Tuto metodu použijeme v následujícím oddílu nebo v oddílu 5.4.5.

2.5.6 Periodická řešení v Lotka – Volterrově modelu

V tomto oddílu uvedeme model, který se využívá hlavně v matematické biologii pro popis soužití dravců a jejich kořisti. Jedná se o klasický Lotkův – Volterrův model. O biologické interpretaci tohoto modelu se lze podrobněji dočíst v [39]. Zde se soustředíme na některé rysy tohoto modelu a získané výsledky použijeme v sekci 3.4, kde také uvedeme ekonomickou interpretaci modelu. Má-li model popisovat reálný jev, měl by být první kvadrant pozitivně invariantní množinou. Ukážeme, že tomu tak skutečně je. Následující popis vychází z [8] str. 325 a dále. Uvedeme zde také vypracovaný problém 6 ze sekce 6.4 této knihy.

Uvažujme autonomní soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-a+by)x \\ \dot{y} &= (c-dx)y, \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

kde $a, b, c,$ a d jsou kladné reálné konstanty. Každý počáteční problém pro tuto soustavu má právě jedno úplné řešení. Nás budou zajímat řešení, pro jejichž trajektorie platí $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Nulkliny, tj. přímky $x = 0,\ y = 0,\ x = c/d$ a $y = a/b$, rozdělí fázovou rovinu na oblasti se stejným znaménkem derivací $\dot{x}$ a $\dot{y}$. Průsečíky nulklin představují stacionární body soustavy (2.5.10), jsou to body $(0, 0)$ a $(c/d, a/b)$. Rozborem znamének derivací $\dot{x}$ a $\dot{y}$ lze zjistit, že trajektorie (2.5.10) mají orientaci ve směru hodinových ručiček kolem stacionárního bodu $(c/d, a/b)$ a také, že první kvadrant je pozitivně invariantní množina. Označíme-li jednotně (x°, y°) stacionární bod soustavy (2.5.10), má matice linearizované soustavy tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a+by^\circ & bx^\circ \\ -dy^\circ & c-dx^\circ \end{pmatrix}.$$

Kořeny chrakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ pro stacionární bod $(0, 0)$ jsou $\lambda_1 = a > 0$ a $\lambda_2 = -c < 0$. Podle věty 2.5.1 se tedy jedná o sedlo pro soustavu (2.5.10). Kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ pro stacionární bod $(c/d, a/b)$ jsou $\lambda_1 = i\sqrt{ac}$ a $\lambda_2 = -i\sqrt{ac}$. Podle věty 2.5.1 nelze jednoznačně zjistit typ tohoto stacionárního bodu a je třeba rozhodnout, zda uvažovaný stacionární bod je střed, ohnisko nebo bod rotace. Ukážeme, že se jedná o střed, ale také, že všechny trajektorie soustavy (2.5.10), které leží v prvním kvadrantu a jsou různé od tohoto stacionárního bodu, jsou uzavřené. Úvahy rozdělíme do několika kroků:

• Je-li na určitém časovém intervalu $x \neq 0$ a $y \neq a/b$, je $x = x(t)$ prostá funkce proměnné t. Tato funkce má na příslušném intervalu inverzní funkci $t = t(x)$ proměnné x a podle věty o derivaci inverzní funkce platí

$$t'(x) = \frac{1}{(-a+by)x}.$$

Protože $y = y(t)$ a $t = t(x)$, lze psát $y = y(t(x)) = y(x)$. Použijeme-li větu o derivaci složené funkce, jsou části trajektorií soustavy (2.5.10) popsány rovnicí

$$y'(x) = \dot{y}(t)t'(x) = \frac{(c-dx)y}{(-a+by)x}.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými. Funkce $g(x) = c/x - d$ je spojitá na $I = (0, \infty)$. Na I tedy existuje primitivní funkce G k funkci g a platí

$$G(x) = c \ln x - dx. \tag{2.5.11}$$

Funkce $h(y) = y/(-a + by)$ je nenulová a spojitá na intervalu $D_1 = (0, a/b)$ nebo na intervalu $D_2 = (a/b, \infty)$, kde existuje primitivní funkce H k funkci $1/h$ a platí

$$H(y) = -a \ln y + by. \tag{2.5.12}$$

Poznámka 2.5.11. Funkce H je spojitá a klesající na interalu $D_1 = (0, a/b)$, a je spojitá a rostoucí na intervalu $D_2 = (a/b, \infty)$.

Použijeme-li metodu separace proměnných na množinách $M_1 = I \times D_1$ nebo $M_2 = I \times D_2$, získáme

$$H(y) = G(x) + C, \tag{2.5.13}$$

kde $C = H(y_0) - G(x_0)$, přitom $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ jsou počáteční podmínky problému (2.5.10).

• Podobně, je-li $y \neq 0$ a $x \neq c/d$, jsou části trajektorií soustavy (2.5.10) grafy řešení rovnice

$$x'(y) = \frac{(-a + by)x}{(c - dx)y}.$$

Stejným způsobem jako v předcházejícím odstavci bychom zjistili, že na množinách $N_1 = E_1 \times J$ nebo $N_2 = E_2 \times J$ platí vztah (2.5.13), kde $x \in E_1 = (0, c/d)$ nebo $x \in E_2 = (c/d, \infty)$ a $y \in J = (0, \infty)$.

• Z předchozích pozorování vyplývá, že libovolná trajektorie autonomní soustavy (2.5.10) je pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ popsána vztahem (2.5.13). Pišme tento vztah ve tvaru, který nám umožní nakreslit fázový portrét soustavy (2.5.10), tj.

$$\psi(x, y) = H(y) + F(x) = C, \tag{2.5.14}$$

kde $x \in J = (0, \infty)$, $y \in I = (0, \infty)$ a kde

$$F(x) = -G(x) = -c \ln x + dx. \tag{2.5.15}$$

Pro další úvahy položme $(x^\circ, y^\circ) = (c/d, a/b)$.

• Podle (2.5.15) platí $F'(x) = -c/x + d$, takže

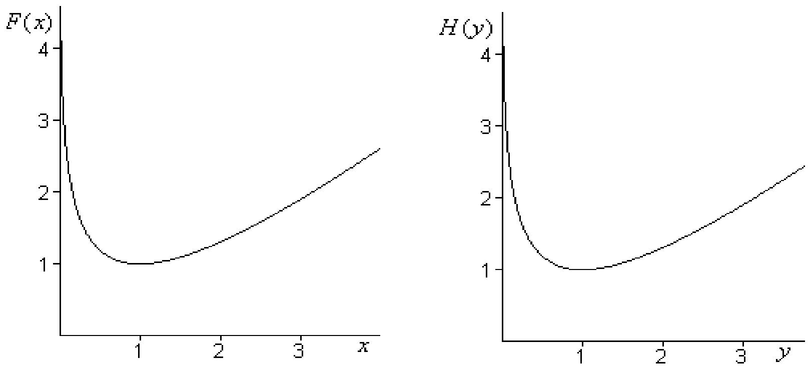
$$\begin{array}{ll} F'(x) < 0, & x \in (0, c/d) = (0, x^\circ), \\ F'(x) > 0, & x \in (c/d, \infty) = (x^\circ, \infty), \end{array}$$

a dále $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to \infty} F(x) = \infty$. Tedy F nabývá svého absolutního minima na $(0, \infty)$ v $x = x^\circ$.

• Podobně, vzhledem k (2.5.12) platí $H'(y) = -a/y + b$, takže

$$\begin{array}{ll} H'(y) < 0, & y \in (0, a/b) = (0, y^\circ), \\ H'(y) > 0, & y \in (a/b, \infty) = (y^\circ, \infty), \end{array}$$

a dále $\lim_{y \to 0^+} H(y) = \lim_{y \to \infty} H(y) = \infty$. Tedy H nabývá svého absolutního minima na $(0, \infty)$ v $y = y^\circ$. Grafy funkcí F a H pro konkrétní hodnoty parametrů jsou uvedeny na obr. 2.4.



Obrázek 2.4: V levé části je graf funkce $x \mapsto F(x),\ x \in (0,\infty)$ pro $c=1$ a $d=1$. V pravé části je graf funkce $y \mapsto H(y),\ y \in (0,\infty)$ pro $a=1$ a $b=1$.

Poznámka 2.5.12. Na intervalu $I_1=(0,y^\circ]$ je funkce H klesající a podle věty o spojitosti inverzní funkce je inverzní funkce H_1^{-1} spojitá na $H(I_1)=[H(y^\circ),\infty)$. Podobně, na intervalu $I_2=[y^\circ,\infty)$ je funkce H rostoucí a podle věty o spojitosti inverzní funkce je inverzní funkce H_2^{-1} spojitá na intervalu $H(I_2)=[H(y^\circ),\infty)$. Funkce H_1^{-1} i H_2^{-1} jsou spojité v bodě $H(y^\circ)$ zprava.

Poznámka 2.5.13. Pro $\alpha > F(x^\circ)$ má rovnice $F(x)=\alpha$ právě dvě řešení x_1,x_2, pro která platí $0<x_1<x^\circ<x_2$. Pro $\alpha=F(x^\circ)$ má uvedená rovnice právě jedno řešení $x=x^\circ$. Podobně pro $\beta > H(y^\circ)$ má rovnice $H(y)=\beta$ právě dvě řešení y_1,y_2, pro která platí $0<y_1<y^\circ<y_2$. Pro $\beta=H(y^\circ)$ má uvedená rovnice právě jedno řešení $y=y^\circ$.

• Položme $C_0=H(y^\circ)+F(x^\circ)$. Protože funkce H a F nabývají svých absolutních minim na $(0,\infty)$ v $x=x^\circ$ a $y=y^\circ$, má rovnice $H(y)+F(x)=C$ řešení pouze pro $C\ge C_0$, přičemž pro $C=C_0$ existuje pouze jedno řešení $(x,y)=(x^\circ,y^\circ)$.

• Ke každému $C>C_0$ existuje $\alpha>F(x^\circ)$ takové, že $C=\alpha+H(y_0)$. Zvolme nyní libovolné $\alpha>F(x^\circ)$. Podle předchozí poznámky 2.5.13 existují x_1,x_2 tak, že $F(x_1)=F(x_2)=\alpha$ a pro všechna $x\in(x_1,x_2)$ platí $\alpha-F(x)>0$. Protože je F spojitá platí také

$$\lim_{x\to x_1^+}(\alpha-F(x))=0 \text{ a } \lim_{x\to x_2^-}(\alpha-F(x))=0. \tag{2.5.16}$$

Uvažujme nyní rovnici $\psi(x,y)=H(y)+F(x)=C$. Protože $C=H(y^\circ)+\alpha>C_0$, můžeme odtud pro všechna $x\in(x_1,x_2)$ psát

$$H(y)=H(y^\circ)+(\alpha-F(x))>H(y^\circ).$$

Podle předchozí poznámky 2.5.13 existují pro každé $x\in(x_1,x_2)$ dvě řešení $y_1(x)$ a $y_2(x)$, pro která platí $0<y_1(x)<y^\circ<y_2(x),\ x\in(x_1,x_2)$.

• Zabývejme se nejdříve funkcí $y_1(x)$. Protože platí (2.5.16) a funkce H je spojitá na $(0,\infty)$, máme

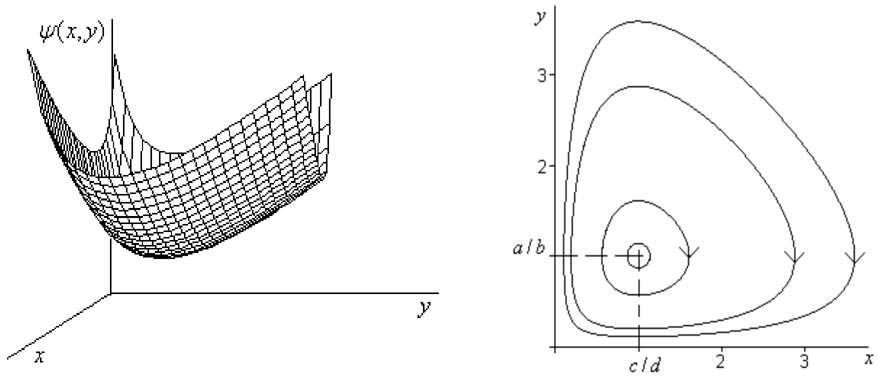
$$\lim_{x\to x_1^-}H(y_1(x))=\lim_{x\to x_1^-}[H(y^\circ)+(\alpha-F(x))]=H(y^\circ).$$

Podle poznámky 2.5.12 je funkce H_1^{-1} spojitá zprava v bodě $H(y^\circ)$ a lze psát

$$\lim_{x \to x_1^-} y_1(x) = \lim_{x \to x_1^-} H_1^{-1}(H(y^\circ) + (\alpha - F(x))) = H_1^{-1}(H(y^\circ)) = y^\circ.$$

Podobně lze určit, že $\lim_{x \to x_2^+} y_1(x) = y^\circ$. Obdobně bychom mohli postupovat v případě funkce $y_2(x)$, pro kterou bychom získali $\lim_{x \to x_1^-} y_2(x) = y^\circ$ nebo $\lim_{x \to x_2^+} y_2(x) = y^\circ$.

• Zjistili jsme, že grafy spojitých funkcí $y_1(x)$ a $y_2(x)$ definovaných na intervalu $[x_1, x_2]$ se v bodech x_1, resp. x_2 spojí a vytvoří uzavřenou křivku. Ilustraci provedených úvah lze nalézt na obr. 2.4 a obr. 2.5.



Obrázek 2.5: V levé části je zobrazen graf funkce $\psi(x,y) = F(x) + H(y), x \in (0,\infty), y \in (0,\infty)$ pro $a = b = c = d = 1$. V pravé části jsou zobrazeny vrstevnice $\psi(x,y) = C$ pro $C > \psi(x^\circ, y^\circ)$, kde $(x^\circ, y^\circ) = (c/d, a/b)$ je stacionární bod soustavy (2.5.10). Tyto vrstevnice reprezentují trajektorie soustavy (2.5.10), takže obrázek vpravo představuje fázový portrét této soustavy.

• V předchozích úvahách jsme ukázali, že pro libovolné $C = \alpha + H(y^\circ) > C_0$ je trajektorie $\psi(x,y) = C$ uzavřená křivka a stacionární bod (x°, y°) je střed. Na obr. 2.5 lze nalézt fázový portrét soustavy (2.5.10) pro $x > 0,\ y > 0$. Následující tvrzení shrnuje dosavadní diskusi o klasickém Lotka-Volterrově modelu.

Věta 2.5.9. *Každá trajektorie soustavy (2.5.10) v* $(0,\infty) \times (0,\infty)$, *kromě stacionárního bodu* $(c/d, a/b)$, *je uzavřená křivka.*

Podle uvedené věty je první složka $x = x(t)$ řešení soustavy (2.5.10) periodická funkce, která osciluje kolem hodnoty $x^\circ = c/d$. Podobně druhá složka $y = y(t)$ je periodická funkce, která osciluje kolem hodnoty $y^\circ = a/b$. Následující věta se týká středních hodnot funkcí $x(t)$ a $y(t)$ za dobu jedné periody.

Věta 2.5.10. *V soustavě (2.5.10) s nenulovým stacionárním bodem* $(c/d, a/b)$ *je střední hodnota řešení* x *za jednu periodu rovna* c/d *a střední hodnota řešení* y *za jednu periodu je* a/b.

Důkaz. Předpokládejme, že $x = x(t) > 0,\ y = y(t) > 0$ je nekonstantní řešení soustavy (2.5.10), které je periodické s periodou T. Využijeme-li druhou rovnici z (2.5.10), odkud

$$x(t) = \frac{c}{d} - \frac{1}{d}\frac{\dot{y}(t)}{y(t)},$$

je střední hodnota $\overline{x}$ řešení $x(t)$ dána

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{c}{d}dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{d}\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}dt = \frac{c}{d} - \frac{1}{T}\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{d} = \frac{c}{d},$$

protože $y(T) = y(0)$. Podobně lze postupovat při výpočtu $\overline{y}$. □

Poznámka 2.5.14. Všimněme si znovu linearizace soustavy (2.5.10). Položíme-li $x = X + c/d$ a $y = Y + a/b$, stacionární bod $(c/d, a/b)$ se posune do bodu $(0,0)$ a získáme soustavu

$$\dot{X} = \frac{cb}{d}Y + bXY, \quad \dot{Y} = -\frac{ad}{b}X - dXY.$$

Linearizací této soustavy v počátku získáme

$$\dot{X} = \frac{cb}{d}Y, \quad \dot{Y} = -\frac{ad}{b}X.$$

Zderivujeme-li první z těchto rovnic a pak za $\dot{Y}$ dosadíme z druhé rovnice, obdržíme lineární rovnici druhého řádu

$$\ddot{X} + acX = 0,$$

která má řešení

$$X(t) = A\sin(\sqrt{ac}\, t + \varphi),$$

kde amplituda A a fáze φ jsou konstanty závislé na počátečních podmínkách. Nyní lze určit

$$Y(t) = \frac{d}{cb}\dot{X} = \sqrt{\frac{a}{c}\frac{d}{b}}A\cos(\sqrt{ac}\, t + \varphi).$$

Pokud získaná řešení $X(t)$ a $Y(t)$ linearizované soustavy umocníme, získáme rovnici trajektorie této soustavy ve tvaru

$$\frac{ad^2}{cb^2}\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{A^2} = 1.$$

To je rovnice elipsy, po které ve směru hodinových ručiček obíhá bod fázové roviny s úhlovou rychlostí $\omega = \sqrt{ac}$. Protože $\omega = 2\pi/T$, kde T je perioda pohybu, můžeme psát

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}. \tag{2.5.17}$$

Tento vztah lze použít také pro odhad periody řešení nelineární soustavy (2.5.10), které se nachází v dostatečně blízkém okolí stacionárního bodu $(c/d, a/b)$.

2.5.7 Poincaré – Andronov – Hopfova bifurkace

V aplikacích se obvykle vyskytují soustavy diferenciálních rovnic, které obsahují parametry. Tyto parametry mohou nabývají hodnot z jistých množin. Chceme-li porozumět celkovému chování soustavy diferenciálních rovnic s parametry, je třeba zjistit, jak se mění kvalitativní vlastnosti řešení v závislosti na měnících se hodnotách parametrů.

Počet stacionárních bodů, počet cyklů a orientace trajektorií, které je spojují nebo obklopují tvoří *kvalitativní strukturu fázového prostoru* soustavy autonomních diferenciálních rovnic. Je-li daná soustava závislá na parametrech, může při změně hodnot těchto parametrů dojít ke změně kvalitativní struktury příslušného fázového prostoru. Studiem takových změn se zabývá *teorie bifurkací.* Soustava diferenciálních rovnic má *stabilní kvalitativní strukturu fázového prostoru,* jestliže se při dostatečně malé změně dané hodnoty parametru uvažovaná struktura nezmění. Hodnota parametru, při které dojde ke změně kvalitativní struktury struktury dané soustavy (tj. např. se změní počet stacionárních bodů nebo jejich stabilita), se nazývá *bifurkační bod.* V tomto oddílu uvedeme pouze základní popis, který budeme potřebovat pro aplikace v následující kapitole, podrobněji jsou poznatky teorie bifurkací uvedeny v [28], [17] nebo [30].

Na rozdíl od modelů fyzikálních věd, v ekonomických modelech není možné pro většinu parametrů stanovit přesné hodnoty, jejichž hodnoty by byly platné pro dlouhé období. Parametry, které jsou v ekonomických modelech použity, často odrážejí vliv vnějších podmínek modelu a tyto podmínky se mohou nezávisle na popisovaném modelu měnit. To je důvod, proč jsou poznatky z teorie bifurkací pro ekonomické modely cenné. V našem popisu se soustředíme na podmínky pro vznik tzv. Hopfovy bifurkace, které zaručují existenci limitního cyklu a tedy také periodického řešení autonomní rovnice.

Pojem *bifurkace* souvisí s řešením rovnic, které obsahují parametry, srv. [4] a [17]. V dalším textu budeme *množinu parametrů* značit symbolem Λ.

Definice 2.5.4. Nechť $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny a $0 \in X$. Nechť $\Phi : X \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ je takové zobrazení, že pro libovolné $\lambda \in \Lambda$ platí $\Phi(0, \lambda) = 0$. Bod $(0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ se nazývá *bifurkační bod* rovnice

$$\Phi(x, \lambda) = 0,$$

jestliže každé okolí bodu $(0, \lambda_0)$ v $X \times \Lambda$ obsahuje takové řešení (x, λ) rovnice $\Phi(x, \lambda) = 0$, pro které $x \neq 0$.

Poznámka 2.5.15. Uvažujme, že $\Phi \in C^1(X \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ a derivaci tohoto zobrazení podle první proměnné v bodě $(x, \lambda) \in X \times \Lambda$ označme $D_1\Phi(x, \lambda)$. Předpokládejme dále, že pro $(0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ je $\Phi(0, \lambda_0) = 0$ a že existuje inverzní matice k matici $D_1\Phi(0, \lambda_0)$. Podle věty o implicitní funkci, viz např. [17, str. 26], existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu 0, okolí $\mathcal{V}$ bodu λ_0, kde $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq X \times \Lambda$ a právě jedna spojitá funkce $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ taková, že pro všechna $\lambda \in \mathcal{V}$ je $x = \psi(\lambda)$ a $\Phi(\psi(\lambda), \lambda) = 0$. Spojitost funkce ψ v bodě $\lambda_0 \in \mathcal{V}$ znamená, že pro libovolné $\eta > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro $||\lambda - \lambda_0|| < \delta$ je $||\psi(\lambda)|| < \eta$. To znamená, že $(0, \lambda_0)$ není bifurkační bod.

V důsledku uvedené úvahy se lze v další diskusi o bifurkačních bodech soustředit hlavně na takové body $(0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$, $\Phi(0, \lambda_0) = 0$, pro které je $D_1\Phi(0, \lambda_0)$ singulární matice.

Poznámka 2.5.16. Nechť pro zobrazení Φ platí stejné předpoklady jako v poznámce 2.5.15. Položme $\mathbf{A} = D_1\Phi(0, \lambda_0)$ a předpokládejme že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je singulární. Pak má homogenní soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}x = 0$, kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $0 \in \mathbb{R}^n$, netriviální řešení. To znamená, že 0 je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Množina všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ se nazývá bodové spektrum a budeme ji značit $\sigma(\mathbf{A})$.

Pojem bifurkačního bodu nyní přeneseme do oblasti diferenciálních rovnic. Nechť $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny a $f \in C^1(X \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ je takové, že $f(0, \lambda) = 0$ pro všechna

$\lambda \in \Lambda$. To znamená, že pro libovolné $\lambda \in \Lambda$ je $x = 0$ stacionárním bodem autonomní rovnice s parametrem

$$\dot{x} = f(x, \lambda). \tag{2.5.18}$$

Nechť pro nějaké $\lambda_0 \in \Lambda$ platí $0 \notin \sigma(D_1 f(0, \lambda_0))$, pak podle poznámek 2.5.15 a 2.5.16 existuje okolí $\mathcal{V}$ bodu λ_0 tak, že pro $\lambda \in \mathcal{V}$ je řešení $x = 0$ izolovaný stacionární bod. V tomto případě při malé změně hodnoty parametru λ nedojde ke změně stability stacionárního bodu. Naopak, je-li $(0, \lambda_0)$ bifurační bod rovnice $f(x, \lambda) = 0$, nazývá se $(0, \lambda_0)$ *bifurkační bod* stacionárního řešení rovnice $\dot{x} = f(x, \lambda)$.

V následujícím textu se soustředíme na bifurkace, které se vyskytnou v případě, že matice $D_1 f(0, \lambda_0)$ má právě jednu dvojici ryze imaginárních vlastních čísel a žádná jiná vlastní čísla nemají nulovou reálnou část.

Poznámka 2.5.17. V souvislosti s uvedeným předpokladem a poznámkou 2.5.16 uveďme, že stacionární bod $x^\circ \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *hyperbolický* pro rovnici $\dot{x} = f(x),\ x \in X$, jestliže

$$f(x^\circ) = 0 \text{ a } \sigma(Df(x^\circ)) \cap i\mathbb{R} = ,$$

kde množina $\sigma(Df(x^\circ))$ představuje množinu všech vlastních čísel matice $Df(x^\circ)$ a $i\mathbb{R}$ představuje množinu ryze imaginárních čísel. To znamená, že matice $Df(x^\circ)$ nemá žádná ryze imaginární vlastní čísla.

Stejně jako v poznámce 2.5.15 lze pomocí věty o implicitní funkci zdůvodnit, že při malé změně hodnoty λ_0 parametru rovnice zůstává stacionární bod zachován a žádné nové stacionární body nevzniknou. Nicméně, pokud vlastní čísla matice $D_1 f(0, \lambda)$ protnou imaginární osu v bodě $\lambda = \lambda_0$, dojde ke změně počtu vlastních čísel, které mají kladnou resp. zápornou reálnou část. Při tomto jevu může vzniknout periodické řešení rovnice tak, jak o tom vypovídá následující věta.

Věta 2.5.11 (Existence Poincaré – Andronov – Hopfovy bifurkace). *Nechť $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 3$ a $F \in C^k(X \times \Lambda, \mathbb{R}^2)$ je takové zobrazení, že $F(0, \cdot) = 0$ a $D_1 F(0, \cdot) = 0$. Nechť*

$$\dot{x} = \mathbf{A}(\lambda)x + F(x, \lambda) \tag{2.5.19}$$

je rovnice v rovině taková, že její lineární část $\mathbf{A}(\lambda)$ ve stacionárním bodě $0 \in X$ má vlastní čísla $\alpha(\lambda) \pm i\omega_0(\lambda)$. Nechť pro $\lambda_0 \in \Lambda$ platí $\alpha(\lambda_0) = 0$ a $\omega_0(\lambda_0) > 0$ a nechť $\alpha(\lambda)$ je spojitě diferencovatelná funkce proměnné λ na nějakém okolí bodu λ_0 taková, že

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\alpha(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

Pak pro libovolné okolí $\mathcal{U}$ bodu $0 \in X$ a libovolné okolí $\mathcal{V}$ bodu $\lambda_0 \in \Lambda$ existuje $\lambda \in \mathcal{V}$ takové, že diferenciální rovnice (2.5.19) má nekonstantní periodické řešení, jehož trajektorie je uzavřená křivka v $\mathcal{U}$, a jehož amplituda pro $\lambda \to \lambda_0$ konverguje k nule.

Důkaz. Speciální případ této věty, kde matice $\mathbf{A}(\lambda)$ má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a $\lambda_0 = 0$, je dokázán v [30] na str. 352 a 353. Obecnější tvar této věty, kde $X = \mathbb{R}^n$, je dokázán v [4] na str. 407 a 408. □

Poznámka 2.5.18. Bod $(0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ z předchozí věty je bifurkačním bodem rovnice (2.5.19). Tvrzení věty platí lokálně v tom smyslu, že (i) platí pouze pro parametry blízké hodnotě λ_0, (ii) cyklus existuje pouze v okolí stacionárního bodu $0 \in X$.

Poznámka 2.5.19. Poincaré – Andronov – Hopfovu bifurkaci lze ilustrovat pomocí animace vytvořené počítačovým algebraickým systémem, např. Maple. Autor o tomto způsobu referoval v [68].

Kapitola 3

Spojité modely v ekonomii

3.1 Tržní rovnováha

Trh je skupina kupujících a prodávajících, kteří se snaží koupit nebo prodat nějaké zboží, produkt nebo službu. Objekt, s nímž se na trhu obchoduje, budeme jednotně nazývat *statek.* Cena, při které se poptávané množství statku v daném časovém období rovná nabízenému množství statku, se nazývá *rovnovážná cena.* V závislosti na tom, zda každý trh zkoumáme izolovaně a rovnovážné ceny na těchto trzích jsou navzájem nezávislé nebo zda se uvažuje, že trhy jsou vzájemně propojeny a změna ceny na jednom trhu může ovlivnit cenu na jiném trhu, uvažujeme o *dílčí* nebo o *všeobecné rovnováze* na trhu.

3.1.1 Dílčí rovnováha na trhu

V této sekci budeme předpokládat, že prodávající je zároveň výrobce. Budeme uvažovat dokonale konkurenční trh s jedním statkem. Takový trh, kde abstrahujeme od vlivů všech ostatních trhů, se nazývá dílčí trh. Na dílčím trhu je mnoho prodávajících a mnoho kupujících, takže každý z nich má pouze zanedbatelný vliv na konkurenční cenu. Výrobci nabízejí statek za cenu, kterou sami nemohou individuálně ovlivnit, je dána podmínkami trhu. Přitom se snaží prodat takové množství statku, které maximalizuje jejich *zisk.* Naopak kupující se snaží opatřit si takové množství statku, které maximalizuje jejich *užitek.* Výklad vychází z [20], [27] a [24].

Nabídkovou funkci trhu označme $q = S(p)$, kde p je cena produktu, q je množství nabízeného produktu a $S : [p_0, \infty) \to [0, \infty)$. Všimněme si, že výrobci jsou ochotni nabízet a prodávat zboží až při minimální ceně p_0, která alespoň pokryje jejich náklady. Tato funkce popisuje, jaké množství $S(p)$ produktu jsou prodejci ochotni a schopni při ceně p prodat. Zkušenost ukazuje a mikroekonomická teorie potvrzuje, že platí *zákon nabídky,* který říká, že za jinak stejných podmínek (tj. všechny vnější podmínky jsou pro trh neměnné), [1] se při zvýšení ceny statku zvýší nabízené množství statku. Budeme-li dále předpokládat, že funkce nabídky S je třídy C^1, pak zřejmě $S'(p) > 0$. K takové nabídkové funkci existuje inverzní funkce, kterou označíme $p = p_S(q)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce je také $p_S'(q) > 0$.

Poptávkovou funkci trhu označme $q = D(p)$, kde $D : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Tato funkce popisuje, jaké množství $D(p)$ produktu jsou kupující ochotni a schopni při ceně p koupit.

[1] V učebnicích ekonomie se pro tuto podmínku používá termín *ceteris paribus.*

Zkušenost ukazuje a mikroekonomická teorie potvruje, že platí *zákon poptávky,* který říká, že za jinak stejných podmínek se při rostoucí ceně snižuje poptávané množství. Budeme-li analogicky předpokládat, že funkce poptávky D je třídy C^1, pak zřejmě $D'(p) < 0$. K takové poptávkové funkci existuje inverzní funkce, kterou označíme $p = p_D(q)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce je také $p'_D(q) < 0$.

Trh je v rovnováze, jestliže neexistuje převis poptávky ani převis nabídky, takže platí

$$S(p^\circ) = D(p^\circ). \tag{3.1.1}$$

Označme $z(p) = D(p) - S(p)$, $p \in [p_0, \infty)$ funkci přebytku na straně poptávky. Protože jsou funkce D i S třídy C^1, je také funkce z třídy C^1. Nechť $z(p_0) > 0$ a nechť také existuje cena $p_1 \in (p_0, \infty)$, pro kterou $z(p_1) < 0$. Pak podle Bolzanovy věty, viz např. [65], existuje cena $p^\circ \in (p_0, p_1)$ taková, že $z(p^\circ) = 0$. Cena p° je rovnovážná cena a odpovídá jí rovnovážná produkce q°.

Co se stane, jestliže trh v rovnováze není? Taková situace může například nastat, jestliže na trhu, který se nacházel v rovnováze, nastala náhlá změna vnějších podmínek. Změna se může vyskytnout jak na straně nabídky tak na straně poptávky. Jak se trh vyrovná s novými podmínkami? Dospěje v čase k nové rovnováze nebo ne?

Je-li $p < p^\circ$, na trhu existuje převis na straně poptávky, tj. $z(p) = D(p) - S(p) > 0$. To znamená, že domácnosti by byly ochotny kupovat více, ale prodávající nejsou ochotni více nabídnout. Nastala neuspokojená poptávka, kdy prodávající omezují obchodování a snaží se zvýšit cenu. Je-li $p > p^\circ$, na trhu existuje převis na straně nabídky, tj. $z(p) = D(p) - S(p) < 0$. Domácnosti při vysoké ceně omezují své nákupy. Svým chováním se naží snížit cenu. Podle *Walrasovy hypotézy* se aktuální cena statku zvětšuje (zmenšuje), jestliže je převis na straně poptávky kladný (záporný). Budeme dále uvažovat, že rychlost změny ceny $\dot{p}$ je přímo úměrná rozdílu mezi aktuálně poptávaným množstvím statku $D(p)$ a aktuálně nabízeným množstvím statku q. To lze psát pomocí rovnice

$$\dot{p} = \alpha(D(p) - q), \tag{3.1.2}$$

kde $\alpha > 0$ je konstanta úměrnosti.

Převis na straně žádané ceny, který označíme $e(q)$, je rozdíl mezi cenou, kterou si domácnosti přejí platit za nějaké dané množství produktu a cenou, která je při dané nabídce požadována prodejci, tj. $e(q) = p_D(q) - p_S(q)$. Je-li $q > q^\circ$ je převis na straně žádané ceny záporný, výrobci nabízejí velké množství statku, které domácnosti nejsou ochotny koupit. Je-li $q < q^\circ$ je převis na straně žádané ceny kladný, domácnosti jsou ochotny kupovat více, ale výrobci více nenabízejí. Podle *Marshallovy hypotézy* se aktuální množství statku na trhu zvětšuje (zmenšuje), jestliže převis na straně žádané ceny je kladný (záporný). Budeme dále uvažovat, že rychlost změny množství statku $\dot{q}$ je přímo úměrná rozdílu mezi aktuální cenou statku p a aktuální nabízenou cenou $p_S(q)$. To lze psát pomocí rovnice

$$\dot{q} = \beta(p - p_S(q)), \tag{3.1.3}$$

kde $\beta > 0$ je konstanta úměrnosti.

Rovnice (3.1.2) a (3.1.3), které můžeme psát jako soustavu

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \alpha(D(p) - q) \\ \dot{q} &= \beta(p - p_S(q)), \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

popisují dynamiku dokonale konkurenčního trhu s jedním statkem.

Zabývejme se linearizací soustavy (3.1.4) v okolí stacionárního bodu $x^\circ = (p^\circ,\ q^\circ)$. Nechť $x = (p,\, q)$ a $f(x)$ pravá straně rovnice (3.1.4), pak

$$\mathbf{A} = Df(x^\circ) = \begin{pmatrix} -\alpha D'(p^\circ) & -\alpha \\ \beta & -\beta p_S'(q^\circ) \end{pmatrix}.$$

Protože $\alpha > 0, \beta > 0, D'(p^\circ) > 0$ a $p_S'(q^\circ) > 0$, platí pro kořeny λ_1, λ_2 charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ Viétovy vztahy

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha\, D'(p^\circ) - \beta p_S'(q^\circ)) < 0 \text{ a } \lambda_1\lambda_2 = \alpha\, \beta\, (1 - D'(p^\circ)p_S'(q^\circ)) > 0.$$

To znamená, že reálné části kořenů charakterické rovnice matice $\mathbf{A}$ jsou záporné a podle věty 2.4.4 je stacionární řešení $x^\circ = (p^\circ,\, q^\circ)$ asymptoticky stabilní.

Uvedený výsledek lze interpretovat lokálně tak, že na dílčím trhu s pevně danými funkcemi poptávky a nabídky, se po dostatečně dlouhé době ustanoví rovnovážná cena p° a rovnovážné množství prodávaného statku q°, pokud se počáteční hodnoty nacházejí v blízkém okolí bodu $(p^\circ,\, q^\circ)$. Pouze tato rovnovážná cena a množství jsou slučitelné s existujícími záměry kupujících i prodávajících.

3.1.2 Všeobecná rovnováha na trhu při čisté výměně

Uvažujme ekonomiku s několika dílčími trhy. Všeobecnou rovnováhou se rozumí takový stav této ekonomiky, ve kterém jsou všechny trhy současně v rovnovážném stavu. Půjde o to objasnit, jak se vzájemně nabídka a poptávka na uvažovaných dílčích trzích ovlivňují. Výsledkem jejich vzájemné interackce jsou pak takové ceny, při nichž je současně dosaženo rovnováhy na všech analyzovaných trzích. Výklad vychází hlavně z [84] a dále z [77], [27], resp. [45].

Předpokládejme, že uvažované trhy jsou dokonale konkurenční trhy. Z toho pak vyplývá, že jak spotřebitelé tak firmy považují ceny komodit nabízených na těchto trzích za dané. V zájmu zjednodušení budeme uvažovat speciální případ, kdy jedinými aktéry v ekonomice jsou spotřebitelé. To je případ, kdy si jednotliví spotřebitelé vyměňují statky mezi sebou a hovoří se o *čisté výměně.* V ekonomii s čistou výměnou budeme uvažovat n spotřebitelů s jejich preferencemi. Ti vlastní jistý počet statků, které mohou prodávat a kupovat si jiné statky tak, že pro sebe docílí vyšší užitek.

Označme $X = \{y \in \mathbb{R}^k |\ y_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, k\}$. Každý spotřebitel $i \in \{1, \ldots, n\}$ je charakterizován svojí funkcí užitku u_i a na začátku je vybaven jistým množstvím k druhů statků, což budeme psát

$$\omega_i = (\omega_{1i}, \ldots, \omega_{ki})^\top \in X,$$

kde ω_{ji} je množství statku j, které vlastní spotřebitel i. Spotřební koš i–tého spotřebitele označíme

$$x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ki})^\top \in X,$$

kde x_{ji} je množství statku j, které poptává spotřebitel i. Alokací $x = (x_1, \ldots x_n)$ rozumíme množinu n spotřebních košů, které popisují, jak velké množství daných statků spotřebitel vlastní. Dosažitelnou alokací se rozumí taková alokace, která je fyzicky možná, tj. taková, která rozdělí všechno zboží:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i. \tag{3.1.5}$$

Cenu, za kterou si spotřebitel může opatřit jednu jednotku statku $j \in \{1, \ldots, k\}$ označíme $p_j \geq 0$. Symbolem $p = (p_1, \ldots, p_k)^\top$ označíme vektor jednotkových cen všech statků na analyzovaném trhu. Příjem, který může i–tý spotřebitel získat prodejem statků, kterými je vybaven označme I_i. Platí

$$I_i = p^\top \omega_i = \sum_{j=1}^{k} p_j \omega_{ji}. \tag{3.1.6}$$

Každý spotřebitel i bere cenový vektor p jako daný a vybírá takový koš, který mu dovoluje jeho příjem I_i a při kterém je jeho užitek maximální. Každý spotřebitel tedy řeší dílčí úlohu

$$\begin{aligned}&\max(u_i(x_i) |\, x_i \in X)\\ &\text{vzhledem k } p^\top x_i = I_i\end{aligned}$$

Řešením této úlohy, srv. [90], je funkce poptávky $x_i(p, I_i)$. Je dobré si uvědomit, že spotřebitelův příjem není daný. Je určen vztahem (3.1.6), takže závisí na vnitřních podmínkách trhu, které určují cenový vektor p.

Vztahem

$$z(p) = (z_1(p), \ldots, z_k(p))^\top = \sum_{i=1}^{n} (x_i(p, p^\top \omega_i) - \omega_i) \tag{3.1.7}$$

definujme agregovaný převis na straně poptávky.

Walrasova rovnováha

Při všeobecné rovnováze by měly být všichni účastníci na trhu spokojeni, takže nemají důvod tento stav měnit. Je tedy přirozené předpokládat, že rovnovážný cenový vektor p° je tvořen takovými cenami, které vedou k vyčištění všech trhů, tj. takovými cenami, při kterých je na všech trzích poptávka rovna nabídce. Takový předpoklad je však poněkud přísný. Uvažujme, že plán každého spotřebitele je uskutečnitelný a že některý nabízený statek je nežádoucí, tj. při nasycenosti spotřebitelů po něm není poptávka. V takovém případě může v rovnováze dojít k převisu na straně nabídky. Přijmeme tedy mírnější požadavek na cenový rovnovážný vektor a budeme pouze požadovat, aby neexistoval převis na straně poptávky, tj. aby celková poptávka nepřekročila celkovou nabídku danou počátečním vybavením. Pomocí označení zavedeného v (3.1.7) můžeme pro tzv. *Walrasovu rovnováhu* p° psát vztah:

$$z(p^\circ) \leq 0, \tag{3.1.8}$$

který znamená, že pro všechna $j \in \{1, \ldots, k\}$ je $z_j(p^\circ) \leq 0$.

Vlastnosti převisu na straně poptávky

Všimněme si nyní vlastností funkce z definované vztahem (3.1.7):

• Budou-li všechny ceny vynásobeny kladnou konstantou, spotřebitelova poptávka se nezmění. To odpovídá vztahu $x_i(p, p^\top \omega_i) = x_i(\lambda p, (\lambda p)^\top \omega_i)$ pro všechna $\lambda > 0$, takže poptávková funkce je homogenní stupně nula v cenách. Definice a vlastnosti homogenní funkce viz [84, str. 481]. Protože součet homogenních funkcí je také homogenní, platí $z(p) = z(\lambda p)$ pro všechna $\lambda > 0$ a funkce z je homogenní stupně nula.

• Jsou-li všechny individuální poptávkové funkce spojité, tj. užitkové funkce spotřebitelů jsou ryze konkávní, viz [90], je také spojitá funkce z.

• Pro agregovanou funkci převisu na straně poptávky platí *Walrasův zákon:*

$$\text{Pro libovolný cenový vektor } p \text{ platí } p^\top z(p) = 0. \tag{3.1.9}$$

To znamená, že hodnota celkového převisu na straně poptávky je identicky rovna nule, tj. celková poptávka je pro všechny možné výběry ceny rovna nule.

Důkaz. V ekonomii s čistou výměnou platí pro příjem I_i každého spotřebitele $i \in \{1, \dots, n\}$ s poptávkou $x_i = x_i(p, I_i)$ vztah $I_i = p^\top x_i = p^\top \omega_i$. Podle (3.1.7) lze pak psát

$$p^\top z(p) = p^\top \sum_{i=1}^{n} (x_i - \omega_i) = \sum_{i=1}^{n} (p^\top x_i - p^\top \omega_i) = 0.$$

□

Walrasův zákon poskytuje dva užitečné důsledky.

Důsledek 3.1.1. *Shoduje-li se poptávka a nabídka na $k-1$ trzích a $p_k > 0$, pak se nabídka shoduje s poptávkou také na k–tém trhu.*

Jinými slovy: je-li na trhu s k dílčími trhy $k-1$ dílčích trhů v rovnováze, je v rovnováze všech k dílčích trhů.

Důsledek 3.1.2. *Je-li p° Walrasova rovnováha a $z_l(p^\circ) < 0$ pro nějaké $l \in \{1, \dots, k\}$, pak $p_l^\circ = 0$.*

To znamená, že je-li trh v rovnováze a pro nějaký statek existuje přebytek na straně nabídky, pak je tento statek zadarmo a poptávka po tomto statku je omezená.

Důkaz. Nechť $z_l(p^\circ) < 0$ a $p_l > 0$. Podle definice Walrasovy rovnováhy dané vztahem (3.1.8) platí pro nezáporné ceny $p^{\circ\top} z(p^\circ) = \sum_{j=1}^{k} p_j^\circ z_j(p^\circ) \leq p_l^\circ z_l(p^\circ) < 0$. To je však ve sporu s Walrasovým zákonem. □

Chceme-li, aby mohl obchod proběhnout i když je některý statek zadarmo, budeme předpokládat, že *statky jsou žádoucí* ve smyslu:

$$\text{Je-li } p_j = 0, \text{ je } z_j(p) > 0, \text{ pro } j \in \{1, \dots, k\} \tag{3.1.10}$$

Tento předpoklad nám umožňuje dokázat následující tvrzení.

Věta 3.1.3. *Jsou-li všechny statky žádoucí a p° je Walrasova rovnováha, pak*

$$z(p^\circ) = 0.$$

Důkaz. Nechť $z_j(p^\circ) < 0$, pak podle důsledku 3.1.2, je statek j zadarmo, tj. $p_j^\circ = 0$. Nicméně podle definice žádoucího statku (3.1.10) je $z_j(p^\circ) > 0$, což je spor. □

Důsledek 3.1.4. *Jsou-li všechny statky žádoucí a p° je Walrasova rovnováha, pak*

$$p^\circ > 0,$$

tj. pro libovolné $j \in \{1, \ldots, k\}$ je $p_j^\circ > 0$.

Důkaz. Pro $j \in \{1, \ldots, k\}$ je $p_j^\circ \geq 0$. Pokud $p_j^\circ = 0$, je $z_j(p^\circ) > 0$, což je spor s tvrzením předchozí věty. □

Existence rovnováhy

Protože funkce převisu na straně poptávky je homogenní stupně nula, můžeme normalizovat ceny. Pro naše účely nahradíme každou absolutní cenu $\overline{p}_l$, $l \in \{1, \ldots, k\}$ relativní cenou

$$p_l = \frac{\overline{p}_l}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \overline{p}_j}.$$

V tomto případě tvoří cenové vektory p s relativními cenami $k-1$ dimenzionální simplex

$$S^{k-1} = \{p \in \mathbb{R}_+^k | \sum_{j=1}^{k} p_j = 1\},$$

na kterém budeme rovnováhu p° hledat. [2] Důkaz existence rovnováhy je založen na Brouwerově větě o pevném bodě, viz např. [4, str. 300]:

Věta 3.1.5. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná, kompaktní a konvexní množina. Pak každá spojitá funkce $f : K \to K$ má pevný bod, tj. existuje takový bod $x \in K$, že $x = f(x)$.*

Nyní můžeme formulovat větu, jejímž důsledkem je existence Walrasovy rovnováhy.

Věta 3.1.6. *Je-li $z : S^{k-1} \to S^{k-1}$ spojitá funkce splňující Walrasův zákon (3.1.9). Pak existuje bod $p^\circ \in S^{k-1}$ takový, že $z(p^\circ) \leq 0$.*

Označme $u \in \mathbb{R}^k$ takové, že $u = (1, 1, \ldots, 1)^\top$. Pak všechny cenové vektory p simplexu S^{k-1} splňují vztah $p^\top u = 1$. Dále označme $z_j(p)_+ = \max\{0, z_j(p)\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ kladnou část funkce $z_j(p)$.

Důkaz. Hledáme takovou funkci f, která zmenší odchylku daného cenového vektoru p od rovnováhy p°. Nechť je $d_j > 0$, položme $M_j(p) = d_j z_j(p)_+$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ a $M(p) = (M_1(p), \ldots, M_k(p))^\top$. Definujme novou cenu $f(p)$ předpisem [3]

$$f(p) = \frac{p + M(p)}{(p + M(p))^\top u} = \frac{p + M(p)}{1 + M(p)^\top u}.$$

[2] Je-li $\overline{p} \in \mathbb{R}_+^k$ vektor absolutních cen, je zobrazení $\overline{p} \mapsto \overline{p} / \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_j$ projekce vektoru $\overline{p}$ na simplex S^{k-1} ve směru přímky procházející počátkem.

[3] Ekonomický význam definovaného zobrazení je tento: Je-li na nějakém trhu j přebytek poptávky, tj. $z_j(p) \geq 0$, pak se relativní cena na tomto trhu zvýší. Geometrický význam definovaného zobrazení bychom mohli charakterizovat takto: Zobrazení $z \mapsto M(z)$, kde $M_j(z) = d_j z_{j+}$ je projekcí převisu poptávky z na množinu $X = \{y \in \mathbb{R}^k | \ y_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, k\}$. Zobrazení $p \mapsto (p + M(p)/((p + M(p))^\top u)$ je projekce upravené ceny $p + M(p)$ na simplex S^{k-1} ve směru přímky procházející počátkem.

Funkce $M(p)$ je spojitá, protože je to složená funkce spojitých funkcí max a z. To znamená, že také funkce f je spojitá. Nový cenový vektor $f(p)$ splňuje vztah $f(p)^\top u = 1$, takže $f : S^{k-1} \to S^{k-1}$. Podle Brouwerovy věty 3.1.5 tedy existuje bod p° takový, že $f(p^\circ) = p^\circ$.

Hledejme vlastnosti tohoto bodu. Je

$$p^\circ = \frac{p^\circ + M(p^\circ)}{1 + M(p^\circ)^\top u},$$

takže

$$p^\circ M(p^\circ)^\top u = M(p^\circ).$$

Vynásobíme-li předchozí vztah zleva vektorem $z(p^\circ)^\top$ a uplatníme-li Walrasův zákon ve tvaru $z(p^\circ)^\top p^\circ = 0$, máme

$$0 = z(p^\circ)^\top M(p^\circ).$$

Rozepíšeme-li předchozí vztah po složkách, získáme

$$\sum_{j=1}^{k} d_j z_j(p^\circ) z_j(p^\circ)_+ = 0. \tag{3.1.11}$$

Nechť je pro nějaké $z_j(p^\circ) > 0$, $j \in \{1, \dots k\}$ pak $z_j(p^\circ)_+ = z_j(p^\circ)$ a $d_j z_j(p^\circ) z_j(p^\circ)_+ = d_j z_j(p^\circ)^2 > 0$. Sečteme-li takováto čísla, získáme kladné číslo, což je spor se vztahem (3.1.11). Je tedy $z_j(p^\circ) \leq 0$ pro všechna $j \in \{1, \dots k\}$, což znamená

$$z(p^\circ) \leq 0.$$

□

Jednoznačnost rovnováhy

V předchozím odstavci jsme ukázali, že Walrasova rovnováha existuje. Nyní ukážeme, že tato rovnováha je za jistých podmínek určena jednoznačně. K dosavadním předpokladům týkajících se funkce převisu na straně poptávky z přidejme, že tato funkce je spojitě diferencovatelná. Budeme také předpokládat, že statky, kterými se na trhu obchoduje, jsou *hrubé substituty.* Dva statky jsou hrubé substituty, jestliže zvýšení ceny jednoho má za následek zvýšení poptávky po druhém statku. Přesněji: dva statky i a j jsou při cenovém vektoru p hrubé substituty, jestliže pro $i \neq j$ platí

$$\frac{\partial z_j(p)}{\partial p_i} > 0.$$

Jsou-li hrubými substituty všechny statky obchodované na trhu, pak jsou členy Jacobiho matice $Dz(p)$, které neleží na hlavní diagonále, kladné.

Věta 3.1.7. *Jestliže pro libovolný cenový vektor p jsou všechny statky obchodované na trhu hrubé substituty, pak je rovnovážný cenový vektor p° určen jednoznačně.*

Důkaz. Nechť $p^\circ = (p_1^\circ, \ldots, p_k^\circ)^\top$ je rovnovážný cenový vektor a nechť $p = (p_1, \ldots, p_k)^\top$, kde $p_i > 0, i \in \{1, \ldots, k\}$ je jiný cenový vektor. Ukážeme, že p není rovnovážný cenový vektor. Vzhledem k důsledku 3.1.4 můžeme definovat $\lambda = \max(p_i/p_i^\circ | \; i = 1, \ldots k)$. Pomocí tohoto označení můžeme pro $i \in \{1, \ldots, k\}$ psát $p_i \leq \lambda p_i^\circ$, přičemž existuje $j \in \{1, \ldots, k\}$ takové, že $p_j = \lambda p_j^\circ$. Vzhledem k tomu, že funkce z je homogenní a p° je rovnovážný cenový vektor, platí $z(p^\circ) = z(\lambda p^\circ) = 0$. Snížíme-li všechny ceny λp_i°, které jsou různé od p_j, na hodnotu p_i, pak, díky předpokladu hrubé substituce mezi statky, dojde ke zvýšení poptávky po statku j, tj. $z_j(p) > 0$. To však znamená, že p není rovnovážný cenový vektor. □

Slabý axiom projevené preference

Popíšeme a interpretujeme technický termín, který později využijeme při důkazu stability všeobecné rovnováhy. Předpokládejme, že jsou k dispozici pozorování chování spotřebitelů a že jsou tato pozorování zanesena do seznamu. V tomto seznamu budou uvedeny cenové vektory p a spotřební koše $x(p) \in X$, které jsou při ceně p poptávány.

Řekneme, že pro koš $x(p)$, který byl spotřebitelem vybrán při cenovém vektoru p, existuje *projevená preference* před košem x, jestliže platí podmínka:

$$p^\top x(p) \geq p^\top x \text{ a přitom } u(x(p)) \geq u(x),$$

kde $u(x(p))$, resp. $u(x)$ znamená užitek spotřebního koše $x(p)$, resp. koše x. To znamená, že byl-li koš $x(p)$ při ceně p vybrán i když mohl být vybrán koš x, musí být užitek koše $x(p)$ alespoň tak velký jako užitek koše x.

Slabý axiom projevené preference říká, srv. [84, str. 133] a [45, str. 149], že pokud pro koš $x(p)$ existuje projevená preference před košem x a $x(p) \neq x$, pak pro koš x neexistuje projevená preference před košem $x(p)$. Uvedeme ještě jiné vyjádření. Je-li při cenovém vektoru p vybrán koš $x(p)$, při cenovém vektoru $p^* \neq p$ vybrán koš $x(p^*)$ a současně platí $p^\top x(p) \geq p^\top x(p^*)$, pak nesmí platit $p^{*\top} x(p^*) \geq p^{*\top} x(p)$, tedy pro libovolné cenové vektory p a $p^* \neq p$ platí:

$$p^\top x(p) \geq p^\top x(p^*) \Rightarrow p^{*\top} x(p) > p^{*\top} x(p^*). \tag{3.1.12}$$

Poznámka 3.1.1. Právě uvedený vztah lze také interpretovat takto: je-li v okamžiku, kdy je dostupný spotřební koš $x(p^*)$, koupen koš $x(p)$, pak v okamžiku, kdy je koupen koš $x(p^*)$, není koš $x(p)$ dostupný.

Protože vztah (3.1.12) platí pro všechny cenové vektory p a p^*, platí i pro rovnovážnou cenu p°. Položme $p^* = p^\circ$ a uvažujme počáteční vybavení ω, pak lze vztah (3.1.12) přepsat jako

$$\left[p^\top x(p) - p^\top \omega \geq p^\top x(p^\circ) - p^\top \omega\right] \Rightarrow \left[p^{\circ\top} x(p) - p^{\circ\top} \omega > p^{\circ\top} x(p^\circ) - p^{\circ\top} \omega\right].$$

Vezmeme-li v úvahu vztah (3.1.7) pro agregovaný převis na straně poptávky, lze slabý axiom projevené preference psát pro livovolné $p \neq p^\circ$ ve tvaru

$$p^\top z(p) \geq p^\top z(p^\circ) \Rightarrow p^{\circ\top} z(p) > p^{\circ\top} z(p^\circ). \tag{3.1.13}$$

Použijeme-li Walrasův zákon a podmínku všeobecné rovnováhy (3.1.8), lze pro $p \neq p^\circ$ psát

$$0 = p^\top z(p) \geq p^\top z(p^\circ)$$

To je předpoklad implikace (3.1.13), takže pro libovolné $p \neq p^\circ$ platí

$$p^{\circ\top} z(p) > p^{\circ\top} z(p^\circ) = 0. \tag{3.1.14}$$

Dynamika všeobecné rovnováhy

Chceme-li popsat síly, které umožňují uvést všeobecný trh do jeho rovnováhy, budeme uvažovat o tomto procesu: Na otevřeném trhu účastníci představí svoji nabídku a poptávku. V čase t oznámí *licitátor* vektor cen $p(t)$. Na trhu se okamžitě ustanoví vektor převisu na straně poptávky $z(p(t))$. Záporné hodnoty znamenají převis na straně nabídky. Je-li v čase t na dílčím trhu $j \in \{1, \ldots, k\}$ převis na straně poptávky, licitátor oznámí zvýšení ceny daného statku, které bude přímo úměrné převisu poptávky. Pomocí nové ceny se celý proces znovu opakuje, aniž by se uskutečnily obchody při nerovnováze nabídky a poptávky. V ekonomické literatuře se popsaný živelný proces dosahování rovnováhy nazývá *proces tápání - tâtonnement*. K realizaci obchodů dojde až tehdy, když je nabídka a poptávka v rovnováze, tj. tehdy když je nalezena rovnovážná cena. Pokud by se totiž obchody uskutečnili při procesu tápání, kdy nejsou ustanoveny rovnovážné ceny, změnilo by se rozdělení důchodů mezi účastníky trhu. Tím by se změnily výchozí podmínky modelu, změnily by se i cíle účastníků trhu a tedy i samotná rovnovážná cena. Proto budeme v dalších úvahách předpokládat, že se obchodování uskuteční až po dosažení rovnovážné ceny.

Předchozí úvahy lze popsat pomocí počáteční úlohy

$$\dot{p}_j = d_j z_j(p), \quad p_j(0) = p_{j0}, \quad j \in \{1, \ldots, k\}, \tag{3.1.15}$$

kde $d_j > 0$ je reakční koeficient statku j určený vnějšími podmínkami modelu. Označíme-li $\mathbf{D}$ diagonální matici s prvky d_j na hlavní diagonále, můžeme souhrnně psát

$$\dot{p} = \mathbf{D}\, z(p), \quad p(0) = p_0. \tag{3.1.16}$$

Jestliže cena statku na j–tém trhu klesla na nulu a přebytek na straně poptávky je stále záporný, vede proces představený rovnicí (3.1.16) k záporné ceně na j–tém trhu. To není přípustné, protože $p_j \geq 0$ pro $j \in \{1, \ldots, k\}$. Je tedy nutné uvést jistý předpoklad, abychom vyloučili uvedenou možnost a možnost rovnováhy při nulovém cenovém vektoru. Obecně se předpokládá, že statky jsou žádoucí. To podle věty 3.1.3 znamená, že Walrasova rovnováha je stacionární bod problému (3.1.16).

Věta 3.1.8. *Nechť funkce převisu na straně poptávky definovaná vztahem (3.1.7) splňuje slabý axiom projevené preference. Pak je rovnovážný bod p° problému (3.1.16) asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Pro $p(t) \neq p^\circ$ uvažujme pozitivně definitní funkci

$$V(p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(p_j(t) - p_j^\circ)^2}{2d_j}.$$

Označme krátce $p = p(t)$. Použijeme-li Walrasův zákon a vztah (3.1.14) pro slabý axiom projevené preference, můžeme pro derivaci funkce V vzhledem k rovnici (3.1.16) psát

$$\dot{V}(p(t)) = \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j - p_j^\circ}{d_i} \dot{p}_j = \sum_{j=1}^{k} (p_j - p_j^\circ) z_j(p) = p^\top z(p) - p^{\circ\top} z(p) = -p^{\circ\top} z(p) < 0.$$

Pro $p \neq p^\circ$ to je negativně definitní funkce a podle věty 2.4.6 to znamená, že p° je asymptoticky stabilní stacionární bod. □

Ukázali jsme, že pokud obchodníci neporušují slabý axiom projevených preferencí, na trhu s čistou výměnou existuje konkurenční rovnováha, která je charakterizována rovnovážným cenovým vektorem. Jakmile se ustanoví rovnovážný vektor cen, může dojít k obchodování. Pokud se po nějakém čase změní preference účastníků trhu, může dojít k novému způsobu hledání rovnovážného cenového vektoru a tento proces je úspěšný. Předpoklad obchodování při rovnovážných cenách je však v praxi těžko dosažitelný a proto mají uvedené výsledky hlavně teoretický význam pro úvahy, které jsou rozvíjeny hlavně v mikroekonomii. O historii myšlenky všeobecné rovnováhy a jejím tvůrci Léonu Walrasovi (1834-1910) se lze blíže dočíst v 9. kapitole knihy [34].

3.2 Kaldorův model hospodářských cyklů

Zkušenosti a měření ekonomických veličin ukazují, že se ekonomické systémy nevyvíjejí rovnoměrně. Existují období, kdy ekonomika vyrábí více zboží a poskytuje více služeb. To se děje v důsledku zvyšování produktivity, růstu zásob kapitálu a zlepšování technologií. V některých obdobích se však růst výroby zastaví nebo se dostaví dokonce pokles. Firmám se nedaří prodat vyrobené zboží, takže omezují své výrobní kapacity a snižují počet pracovníků. Měření dále ukazují, že se období růstu a poklesu cyklicky opakují. Období, kdy ekonomika vykazuje růst, je nazýváno *konjunktura,* období, kdy dochází k poklesu, je nazýváno *recese.* V případě, že nastal výrazný pokles, jedná se o *depresi.*

Z dlouhodobého hlediska se za výrazný jev považuje růst ekonomických veličin. Pouze tak lze zajistit zvyšování životní úrovně obyvatelstva. Z pohledu krátkodobého a střednědobého jsou však výkyvy ekonomických veličin velmi nápadné jevy a proto se ekonomové snaží objevit skryté mechanismy, které stojí v pozadí cyklického chování ekonomických aktivit. Velké výkyvy jsou nežádoucím jevem a budou-li známy příčiny cyklického chování, je možné, že budeme schopni kmity tlumit. Život pak bude probíhat bez rušivých elementů, které do společnosti přinášejí nejistotu a zmatek. V učebnicích makroekonomie [54] nebo [31] je k vysvětlení zmíněných výkyvů použit model, který předpokládá, že výkyvy jsou způsobeny takovými událostmi, které působí na ochotu domácností nakupovat zboží a služby a na ochotu firem zboží vyrábět a nabízet. Argumentace je vedena pouze slovně s případným využitím grafů. Jedná se o tzv. model *agregátní poptávky a agregátní nabídky.* V této sekci bude popsán odlišný model hospodářských cyklů. Jedná se o *Kaldorův model*, který je založen na analýze investiční funkce a na rozdíl od modelu agregátní poptávky a nabídky předpokládá, že hospodářské cykly jsou způsobeny vnitřními vlastnostmi trhu.

Při formulaci předpokladů a modelu samotného budeme vycházet převážně z [49], [22] a [23]. Abychom mohli použít matematický aparát připravený v 2. kapitole, doplníme některé vlastnosti, které nejsou v uvedených zdrojích explicitně formulovány. Na druhé straně některé předpoklady zjednodušíme. Model, který Nicholas Kaldor (1908-1986) popsal v práci *A Model of the Trade Cycle,* (Economic Journal 50, 1940), vyšetřuje interakci mezi funkcí úspor a investiční funkcí a charakterizuje jejich vlastnosti tak, aby bylo možné ukázat vznik obchodních cyklů.

Klíčový předpoklad Kaldorova modelu je založen na pozorování, že ochota a schopnost firem investovat se zmenšuje, jestliže se důchod odchyluje od své rovnovážné hodnoty. Předpokládejme, že investiční funkce $I = I(Y, K)$, $Y \geq 0, K \geq 0$, je funkcí důchodu

$Y = Y(t)$ a kapitálu $K = K(t)$, kde proměnná t označuje čas.[4] Nyní lze předchozí předpoklad vyjádřit tak, že investiční funkce je nelineární funkce důchodu Y. Model budeme formulovat pro jednosektorový trh, kde lze předpokládat, že pro důchod Y a produkt Z platí $Y = Z$. Jak již bylo zmíněno, budeme kromě investiční funkce uvažovat také funkci úspor $S = S(Y, K)$, $Y \geq 0, K \geq 0$. O funkcích I a S budeme předpokládat, že jsou třídy C^1 na svém definičním oboru a další požadavky na tyto funkce popíšeme dále.

Konstrukci modelu provedeme ve třech kvalitativně odlišných krocích: 1) slovní popis ekonomického mechanismu vzniku obchodních cyklů, 2) matematická formulace předpokladů Kaldorova modelu, 3) formulace matematického modelu, modifikace předpokladů původního Kaldorova modelu a použití Poincaré-Bendixsonovy věty. Rádi bychom pomocí tohoto postupu demonstrovali, jak lze základní ekonomickou představu, která je formulována vágně, zpřesnit a formulovat předpoklady, za kterých lze použít matematické tvrzení.

3.2.1 Základní ekonomická představa

Začněme úvahou, která je uváděna v učebnicích ekonomie, viz např. [20]: Pokud při nějaké úrovni důchodu a kapitálu platí $S(Y, K) > I(Y, K)$, pak domácnosti tvoří více úspor na úkor výdajů na spotřebu. Omezení výdajů na spotřebu vede k tomu, že firmy část své produkce nerealizují a vzrostou investice do zásob. Investice tohoto typu se firmy snaží omezit, takže sníží výstup. Výstup tedy začne klesat. Tento pokles má jistou setrvačnost, takže pokračuje i poté, co byla dosažena rovnost investic a úspor. Při snižování úrovně investic dojde k tomu, že čisté investice $I_n(Y, K) = I(Y, K) - \delta K$, kde $\delta > 0$ je koeficient znehodnocení kapitálu, jsou záporné. To vede ke snižování úrovně kapitálu. Je-li naopak $S(Y, K) < I(Y, K)$, pak vysoké výdaje na spotřebu na úkor tvorby úspor vytvářejí silný tlak na straně poptávky, který přesahuje současné možnosti výstupu. Firmy tedy budou usilovat o růst produktu, který bude podporovat růst úrovně úspor, až dojde k vyrovnání s úrovní investic. V důsledku růstu investic dochází k tomu, že čisté investice $I_n(Y, K)$ jsou kladné, takže dochází k růstu kapitálu. Růst produktu podléhá opět setrvačnosti, takže pokračuje i po dosažení rovnosti úspor a investic, dojde k porušení rovnovážného stavu a situace se může opakovat.

3.2.2 Předpoklady Kaldorova modelu

Dosud uvedené úvahy budou nyní specifikovány. Uvedeme takové předpoklady, které umožní podrobnější argumentaci a vytvoří základní rámec pro matematickou formulaci úvah z oddílu 3.2.1.

Investiční funkce

• Zabývejme se vlastnostmi investiční funkce $I = I(Y, K)$ v závislosti na velikosti důchodu Y. Při libovolné úrovni důchodu $Y \geq 0$ a při každé úrovni kapitálu $K \geq 0$ existuje ochota investovat, tj.

$$I(Y, K) > 0. \tag{3.2.1}$$

[4] Abychom zjednodušili zápis vztahů, budeme proměnnou t vynechávat.

Při vyšším důchodu Y existuje, při každé úrovni kapitálu K, vyšší ochota investovat, tedy I je pro pevné K rostoucí funkcí Y a pro $K \geq 0$ a $Y > 0$ platí

$$I_Y(Y, K) = \frac{\partial I}{\partial Y}(Y, K) > 0. \tag{3.2.2}$$

• Pokud se důchod dostatečně sníží pod svoji rovnovážnou úroveň při konstantní úrovni kapitálu, sníží se mezní hodnota investic, tj. ochota a schopnost investovat je při jistém zvýšení důchodu Y nižší než v oblasti kolem rovnovážné úrovně důchodu. To je důsledkem malé možnosti zisku v tomto období nízké aktivity. Navíc existuje přebytek výrobních kapacit a libovolné zvýšení poptávky může být uspokojeno existující výrobní kapacitou a stačí k tomu méně investic. Podobně, je-li důchod Y při konstantní úrovni kapitálu K dostatečně nad svojí rovnovážnou úrovní, mezní hodnota investic se také snižuje, tj. ochota a schopnost investovat je při navýšení důchodu Y nižší než při rovnovážné úrovni důchodu. Investice se sice zvyšují, ale mnohem méně. Tentokrát pokles nastane v důsledku vyšších nákladů na výrobu dalších kusů zboží při vyšších úrovních důchodu. Lze také připustit, že nejlepší investiční projekty již byly uskutečněny a v tomto období jsou k dispozici pouze projekty, které nejsou tak ziskové, takže o ně není takový zájem. Uvedené úvahy nám dovolují předpokládat, že pro každou úroveň kapitálu $K \geq 0$ existuje úroveň důchodu $Y_1 > 0$ taková, že mezní hodnota investic I_Y je rostoucí pro $Y < Y_1$ a I_Y je klesající pro $Y > Y_1$. Budeme také předpokládat, že pro všechna $K \geq 0$, platí

$$\lim_{Y \to 0+} I_Y(Y, K) = 0, \; \lim_{Y \to \infty} I_Y(Y, K) = 0. \tag{3.2.3}$$

• Další úvaha v Kaldorově modelu se týká předpokladu *kapitálové akumulace.* Při uskutečněné investici I dochází také k nárůstu kapitálu K. Roste-li při konstantní úrovni důchodu kapitál K, pak mezní produkt kapitálu, podle zákona klesajících výnosů, klesá. To však pro každou úroveň důchodu Y znamená pokles mezní hodnoty investic a pro $K > 0$ a $Y \geq 0$ lze psát

$$I_K(Y, K) = \frac{\partial I}{\partial K}(Y, K) < 0. \tag{3.2.4}$$

Funkce úspor

Kaldor ve svém článku argumentuje, že funkce úspor $S = S(Y, K)$ je pro pevné $K \geq 0$ nelineární funkcí důchodu Y a že pro pevné $Y \geq 0$ je tato funkce rostoucí funkcí kapitálu K. Tato pozorování však nepoužijeme a pro $K \geq 0$ a $Y \geq 0$ přijmeme pouze obvyklý předpoklad

$$S(Y, K) = sY, \tag{3.2.5}$$

kde

$$s \in (0, 1) \tag{3.2.6}$$

je míra úspor.

Poznámka 3.2.1. Z úvahy uvedené v [24] vyplývá, že závislost funkce úspor na kapitálu není pro závěry modelu podstatná a proto ji v našem popisu nebudeme specifikovat. Podle původní Kaldorovy představy lze pro $K \geq 0$ a $Y \geq 0$ předpokládat

$$S_K(Y, K) = \frac{\partial S}{\partial K}(Y, K) > 0. \tag{3.2.7}$$

Naproti tomu v [22] je uveden předpoklad, podle kterého je $S_K(Y,K) < 0$. Tento předpoklad je pak doplněn podmínkou, že pro $Y \geq 0$ a $K \geq 0$ je $|S_K(Y,K)| < |I_K(Y,K)|$.

Vztah investiční funkce a funkce úspor

Předpoklady uvedené v předchozím odstavci umožňují vyjádřit úvahy z oddílu 3.2.1 graficky. Tato grafická analýza je uvedena v [24, str. 444]. My ji v našem textu uvádět nebudeme. Místo toho popíšeme vztahy mezi investiční funkcí a funkcí úspor, které jsou v grafické analýze modelu vyjádřeny implicitně.

• Dojde-li k akumulaci kapitálu a úroveň kapitálu K je velmi vysoká, lze předpokládat, že investice již poklesly na takovou úroveň, která je nižší než úroveň úspor. Předpokládejme tedy, že pro všechna $Y > 0$ platí

$$\lim_{K\to\infty} I(Y,K) < sY \text{ a že } \lim_{K\to\infty} I(0,K) = 0. \tag{3.2.8}$$

• Zabývejme se také opačnou situací. Položme $K = 0$ a hledejme vztah mezi investiční funkcí a funkcí úspor. Za tímto účelem uvažujme spojitou funkci

$$g(Y) = I(Y,0) - sY,\ Y \geq 0.$$

Podle (3.2.1) je $g(0) > 0$. Pro derivaci funkce g platí $g'(Y) = I_Y(Y,0) - s,\ Y > 0$. Je $s \in (0,1)$ a podle (3.2.3) je $\lim_{Y\to\infty} I_Y(Y,0) = 0$, takže $\lim_{Y\to\infty} g'(Y) = -s$. To znamená, že pro libovolné $\vartheta > 0$ takové, že $-\vartheta \in (-s,0)$ existuje $Y_\vartheta > 0$ takové, že pro $Y > Y_\vartheta$ je $g'(Y) < -\vartheta$. Integrací tohoto vztahu získáme $g(Y) - g(Y_\vartheta) < -\vartheta(Y - Y_\vartheta)$, neboli $g(Y) < g(Y_\vartheta) - \vartheta(Y - Y_\vartheta)$. Odtud získáme, že

$$\lim_{Y\to\infty} g(Y) = -\infty.$$

Protože g je na $[0,\infty)$ spojitá a nabývá zde kladných i záporných hodnot, existuje alespoň jedno $Y > 0$ takové, že $g(Y) = 0$. Označíme-li Y_s nejmenší z těchto hodnot, lze z uvedeného rozboru uzavřít, že $g(Y) > 0$ pro $Y \in [0, Y_s)$, neboli

$$I(Y,0) > sY,\ Y \in [0, Y_s). \tag{3.2.9}$$

• Kaldor předpokládá, že existuje právě jedna rovnovážná úroveň důchodu $Y^\circ > 0$ a kapitálu $K^\circ > 0$, při které jsou úspory rovné investicím a při které jsou čisté investice nulové. To znamená, že není důvod ke změně úrovně produkce, resp. že nedochází ke změně dosažené úrovně kapitálu. Tyto vztahy lze stručně formulovat ve tvaru

$$I(Y^\circ,K^\circ) = sY^\circ \text{ a } I_n(Y^\circ,K^\circ) = I(Y^\circ,K^\circ) - \delta K^\circ = 0. \tag{3.2.10}$$

• Aby Kaldor vyjádřil, že v ekonomice existují síly, které způsobují, že se ekonomika nevyvíjí směrem k rovnovážné úrovni důchodu Y° a kapitálu K°, navrhl předpoklad, podle kterého v rovnovážném bodě (Y°, K°) platí vztah

$$\left.\frac{\partial I(Y,K)}{\partial Y}\right|_{(Y^\circ,K^\circ)} > s. \tag{3.2.11}$$

Je-li $Y < Y^\circ$, je podle (3.2.11) $I(Y,K^\circ) < sY$, takže domácnosti preferují úspory před spotřebou, což vede k dalšímu poklesu produkce Y. Je-li naopak $Y > Y^\circ$, platí podle

(3.2.11) vztah $I(Y, K^\circ) > sY$ a velké investice úroveň produkce Y dále zvyšují.

• Protože předpokládáme, že pro $Y > 0$ a $K \geq 0$ je funkce $I_Y(Y, K)$ spojitá a platí (3.2.11), existuje okolí (Y_n, Y_N) bodu Y° a okolí U bodu K° takové, že pro $K \in U$ platí

$$I_Y(Y, K) > s,\ Y \in (Y_n, Y_N). \tag{3.2.12}$$

Vzhledem k předpokladu (3.2.3) můžeme dále uvažovat, že pro $K \geq 0$ platí

$$I_Y(Y, K) \begin{cases} < s, & Y \in [0, Y_n), \\ = s, & Y = Y_n, \\ = s, & Y = Y_N, \\ < s, & Y \in (Y_N, \infty). \end{cases} \tag{3.2.13}$$

V okolí rovnovážné úrovně důchodu tedy očekáváme oblast s vysokou investiční aktivitou, kdy jsou investice upřednostněny před úsporami, tj. investice rostou více než úspory. Na druhé straně v oblastech s nízkou nebo vysokou úrovní důchodu očekáváme nízkou investiční aktivitu, kdy úspory rostou více než investice.

3.2.3 Modifikace Kaldorova modelu a limitní cyklus

V předchozích odstavcích jsme uvedli matematické vyjádření předpokladů, které použil Kaldor ve své argumentaci existence hospodářských cyklů. Pokud tyto předpoklady vhodně modifikujeme, budeme moci použít Poincaré-Bendixsonovu větu a ukázat existenci limitních cyklů.

Sestrojme první rovnici modelu. Uvažujme, že převaha investiční poptávky nad úsporami vede k růstu finální produkce a naopak převaha úspor vede k poklesu produkce Y. Můžeme tedy psát $\dot{Y} = \alpha(I(Y, K) - S(Y, K))$, kde $\alpha > 0$ je konstanta úměrnosti. Pomocí druhé rovnice vyjádříme akumulaci kapitálu. Budeme uvažovat, že rychlost změny kapitálu K je rovna čistým investicím, tj. celkovým investicím sníženými o znehodnocený kapitál, tj. $\dot{K} = I(Y, K) - \delta K$, kde $\delta \in [0, 1]$ je konstantní míra znehodnocení kapitálu. Vzhledem k předpokladu (3.2.5) lze psát tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha(I(Y, K) - sY), \quad & Y(0) = Y_0 \geq 0 \\ \dot{K} &= I(Y, K) - \delta K, & K(0) = K_0 \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

která popisuje časový vývoj důchodu Y a kapitálu K. Podle předpokladu (3.2.10) existuje právě jeden stacionární bod (Y°, K°) soustavy (3.2.14). Abychom mohli použít Poincaré-Bendixsonovu větu je třeba vyloučit možnost, že tento stacionární bod patří do ω-limitní množiny nějakého bodu (Y, K) fázového prostoru, pro který $(Y, K) \neq (Y^\circ, K^\circ)$. Uvažujme linearizaci soustavy (3.2.14) v bodě (Y°, K°). Označíme-li

$$f(Y, K) = \begin{pmatrix} \alpha(I(Y, K) - sY) \\ I(Y, K) - \delta K \end{pmatrix},$$

platí

$$\mathbf{A} = Df(Y, K)|_{(Y^\circ, K^\circ)} = \begin{pmatrix} \alpha(I_Y - s) & \alpha I_K \\ I_Y & I_K - \delta \end{pmatrix}, \tag{3.2.15}$$

kde parciální derivace Jacobiho matice jsou vyjádřeny v bodě (Y°, K°). Pro účely výpočtu kořenů charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$ je užitečné vyjádřit stopu $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ této matice a determinant $\det\mathbf{A}$ této matice. Je

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\mathbf{A} &= \alpha(I_Y - s) + I_K - \delta\\ \det\mathbf{A} &= \alpha[(I_Y - s)(I_K - \delta) - I_Y I_K] = \alpha[-sI_K - \delta(I_Y - s)].\end{aligned}$$

Podle poznámky 2.4.6 lze nyní charakteristickou rovnici matice $\mathbf{A}$ psát ve tvaru

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}\mathbf{A}\,\lambda + \det\mathbf{A} = 0.$$

Napíšeme-li pro její kořeny Viétovy vztahy, získáme

$$\lambda_1\lambda_2 = \det\mathbf{A}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}\mathbf{A}.$$

Abychom vyloučili možnost, že stacionární bod (Y°, K°) je sedlo, budeme požadovat, aby $\det\mathbf{A} > 0$, tj. aby platila podmínka

$$-sI_K - \delta(I_Y - s) > 0. \tag{3.2.16}$$

Poznámka 3.2.2. Uvažujme, že pro míru znehodnocení kapitálu platí $\delta = 0$. Přihlédneme-li k podmínce (3.2.4), je podmínka (3.2.16) splněna. Ze spojitosti všech funkcí, které v (3.2.16) vystupují, můžeme usoudit, že pro malé hodnoty δ tato podmínka platí. V případě, že míra kapitálového znehodnocení δ je dostatečně velká, může dojít k porušení podmínky (3.2.16) a model bude poskytovat jiné řešení.

Abychom dále vyloučili možnost, že stacionární bod (Y°, K°) je stabilní, budeme požadovat, aby $\operatorname{tr}\mathbf{A} > 0$, tj. aby platila podmínka

$$\alpha(I_Y - s) + I_K - \delta > 0. \tag{3.2.17}$$

Poznámka 3.2.3. Podmínka (3.2.17) je silnější než Kaldorova podmínka (3.2.11), která požaduje, aby ve ve stacionárním bodě (Y°, K°) platilo $I_Y - s > 0$.

Fázový portrét

Protože je soustava (3.2.14) dvojrozměrná, lze v rovině nakreslit její fázový portrét. Konkrétně budeme pracovat s množinou $M = \{(Y, K)|\ Y \geq 0, K \geq 0\}$. Úvahy začneme tím, že sestrojíme množiny bodů, které vyhovují rovnicím

$$\varphi_1(Y, K) = \alpha(I(Y, K) - sY) = 0,\ \varphi_2(Y, K) = I(Y, K) - \delta K = 0. \tag{3.2.18}$$

Tyto množiny charakterizují body s nulovými derivacemi $\dot{Y} = 0$ a $\dot{K} = 0$ soustavy (3.2.14), tj. body, pro které se nemění úroveň důchodu, resp. kapitálu. Průběh křivek φ_1 a φ_2 zjistíme pomocí věty o implicitní funkci, viz např. [17].

Křivka φ_2 : Zvolme libovolné pevné $Y \geq 0$ a uvažujme funkci $f_2(K) = \varphi_2(Y, K)$, $K \geq 0$. Díky (3.2.1) platí

$$f_2(0) = I(Y, 0) > 0.$$

Protože platí (3.2.4), je

$$f_2'(K) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial K}(Y,K) = I_K(Y,K) - \delta < -\delta. \tag{3.2.19}$$

To znamená, že f_2 je klesající funkce na $[0,\infty)$. Integrací předešlého vztahu získáme $f_2(K) - f_2(0) < -\delta K$, takže pro $K > f_2(0)/\delta$ je $f_2(K) < 0$. Protože f_2 je spojitá klesající funkce, která nabývá kladných i záporných hodnot, existuje právě jedno $K > 0$ takové, že $f_2(K) = 0$.

Ukázali jsme tak, že ke každému $Y \geq 0$ existuje právě jedno $K = K_2(Y) > 0$ takové, že $\varphi_2(Y,K) = 0$. To znamená, že vztahem $\varphi_2(Y,K) = 0$ je pro $Y \geq 0$ implicitně definována právě jedna funkce $K = K_2(Y)$. Průběh této funkce určíme podle věty o implicitní funkci.

Protože pro každé (Y,K), pro které $\varphi_2(Y,K) = 0$, platí (3.2.19) a díky (3.2.2) je

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial Y}(Y,K) = I_Y(Y,K) > 0,$$

platí podle věty o implicitní funkci

$$K_2'(Y) = -\frac{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial Y}(Y,K)}{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial K}(Y,K)} = -\frac{I_Y}{I_K - \delta} > 0,\ Y > 0. \tag{3.2.20}$$

Odtud je zřejmé, že funkce $K_2(Y)$ je rostoucí funkcí pro $Y > 0$.

Poznámka 3.2.4. V předchozí úvaze jsme také ukázali, že existuje $K_m = K_2(0) > 0$ takové, že $\varphi_2(0,K_m) = 0$, tj. křivka φ_2 má průsečík s osou souřadnic K. Vzhledem k tomu, že funkce K_2 je rostoucí, neexistuje kladný průsečík křivky φ_2 s osou souřadnic Y.

Poznámka 3.2.5. Určíme znaménko $\dot{K}$ pro body (Y,K), které neleží na křivce $\varphi_2(Y,K) = 0$. Uvažujme libovolný $(\overline{Y},\overline{K}) \in \{(Y,K)|\ \varphi_2(Y,K) = 0\}$. Protože platí (3.2.19), je $\partial\varphi_2(Y,K)/\partial K|_{(\overline{Y},K)} < 0$ a tedy $\varphi_2(\overline{Y},K) > 0$ pro $K < \overline{K}$ a $\varphi_2(\overline{Y},K) < 0$ pro $K > \overline{K}$. Odtud je zřejmé, že pro všechny body (Y,K) ležící nad křivkou $\varphi_2(Y,K) = 0$ platí $\dot{K} < 0$ a pro všechny body (Y,K) ležící pod touto křivkou platí $\dot{K} > 0$. Viz také obr. 3.1.

Křivka φ_1 : Zvolme libovolné pevné $Y \in (0,Y_s)$, kde Y_s je stejná úroveň důchodu jako v (3.2.9) a uvažujme funkci $f_1(K) = \varphi_1(Y,K)$, $K \geq 0$. Protože předpokládáme (3.2.9), je $f_1(0) = \alpha(I(Y,0) - sY) > 0$. Dále předpokládáme (3.2.8), takže $\lim_{K\to\infty} f_1(K) = \lim_{K\to\infty} \alpha(I(Y,K) - sY) < 0$. Vzhledem k (3.2.4) platí pro $K > 0$

$$f_1'(K) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial K}(Y,K) = \alpha I_K(Y,K) < 0, \tag{3.2.21}$$

takže f_1 je klesající funkce na $[0,\infty)$. Ukázali jsme, že pro $Y \in [0,Y_s)$ spojitá klesající funkce f_1 nabývá na intervalu $[0,\infty)$ kladných i záporných hodnot. Existuje tedy právě jedna hodnota $K > 0$ taková, že $f_1(K) = 0$. Je-li $Y = Y_s$, je pro $K = 0$ $f_1(K) = 0$ a pro $K > 0$ je $f_1(K) < 0$.

Z předchozí úvahy vyplývá, že ke každému $Y \in (0, Y_s)$ existuje právě jedno $K = K_1(Y) > 0$ takové, že $\varphi_1(Y, K) = 0$. Také bylo řečeno, že pro $Y = Y_s$ je $K = K_1(Y_s) = 0$ a $\varphi_1(Y_s, 0) = 0$. To znamená, že vztahem $\varphi_1(Y, K) = 0$ je pro $Y \in (0, Y_s]$ implicitně definována právě jedna funkce $K = K_1(Y)$ a pro $Y = Y_s$ je $K_1(Y_s) = 0$. Průběh funkce $K_1(Y)$ určíme podle věty o implicitní funkci.

V libovolném bodě (Y, K) takovém, že $\varphi_1(Y, K) = 0$ platí (3.2.21) a také

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial Y}(Y, K) = \alpha(I_Y(Y, K) - s).$$

Podle věty o implicitní funkci pro $Y \in (0, Y_s)$ platí

$$K_1'(Y) = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial Y}(Y, K)}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial K}(Y, K)} = \frac{s - I_Y}{I_K}. \tag{3.2.22}$$

Poznámka 3.2.6. Je-li $Y_s \leq Y_n < Y^\circ$, kde Y_n je charakterizováno v (3.2.12), je podle (3.2.13) $s - I_Y(Y, K) > 0$ a funkce K_1 je klesající na $(0, Y_s]$. Z monotonie funkce K_1 plyne existence $\lim_{Y \to 0^+} K_1(Y)$, jejíž hodnota je ∞. Pokud by hodnota této limity byla konečná, pak by $\varphi_1(0, K) = \alpha I(0, K) = 0$, což je spor s předpokladem (3.2.1). Protože K_1 je spojitá na $(0, Y_s]$ a $K_1(Y_s) = 0$, ukázali jsme, že obor hodnot funkce K_1 je interval $[0, \infty.)$ Nyní je zřejmé, že existuje $Y^r \in (0, Y_s)$ takové, že $K_1(Y^r) = K_2(Y^r) = K^r$, kde K_2 je funkce definovaná v předchozím odstavci implicitně vztahem $\varphi_2(Y, K) = 0$. Vzhledem k tomu, že grafy funkcí K_1 a K_2 reprezentují nulkliny soustavy (3.2.14), je bod (Y^r, K^r) stacionární bod této soustavy. To je však spor s předpokladem jednoznačnosti stacionárního bodu (Y°, K°). Tedy $Y_s > Y_n$, K_1 je klesající na $(0, Y_n)$ a $K_1(Y_n) > K_2(Y_n) > 0$.

Poznámka 3.2.7. Je-li $Y_s \in (Y_n, Y_N)$, pak podle (3.2.12) platí $s - I_Y(Y, K) < 0$ a funkce K_1 je rostoucí na $(Y_n, Y_s]$. To znamená, že $K_1(Y_s) > 0$, což je spor s definicí Y_s v (3.2.9). Je tedy $Y_s > Y_N$ a funkce K_1 je rostoucí na (Y_n, Y_N). Vzhledem k předpokladu jednoznačnosti stacionárního bodu (Y°, K°) je $0 < K_1(Y_N) < K_2(Y_N)$.

Poznámka 3.2.8. Díky (3.2.13) platí na intervalu $(Y_N, Y_s]$ vztah $s - I_Y(Y, K) > 0$, takže K_1 je na tomto intervalu klesající.

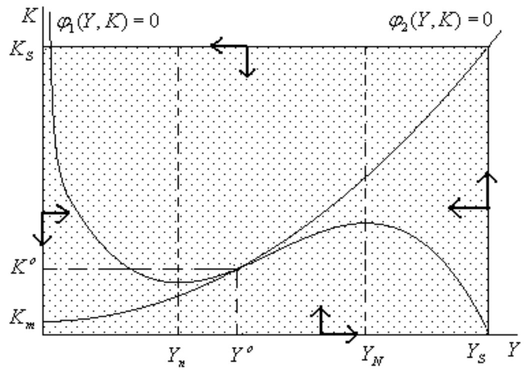
Poznámka 3.2.9. Podobně jako v poznámce 3.2.5 lze určit, že pro všechny body (Y, K) ležící nad křivkou $\varphi_1(Y, K) = 0$ platí $\dot{Y} < 0$ a pro všechny body (Y, K) ležící pod touto křivkou platí $\dot{Y} > 0$. Viz obr. 3.1.

Nyní můžeme zkonstruovat fázový portrét problému (3.2.14), viz obr. 3.1. Naše dosavadní úvahy shrneme a formulujeme větu, která je obměnou věty uvedené v [22].

Věta 3.2.1. *Nechť má soustava (3.2.14), definovaná na množině*

$$M = \{(Y, K) | \; Y \geq 0, K \geq 0\},$$

následující vlastnosti:



Obrázek 3.1: Fázový portrét modifikovaného Kaldorova modelu. Vodorovné šipky reprezentují směr vývoje důchodu Y, tj. šipka směřující doprava, resp. doleva, znamená $\dot{Y} > 0$, resp. $\dot{Y} < 0$. Podobně svislé šipky reprezentují směr vývoje kapitálu K, tj. šipka směřující nahoru, resp. dolů, znamená $\dot{K} > 0$, resp. $\dot{K} < 0$. Zvýrazněná oblast znázorňuje pozitivně invariantní množinu.

(i) pro funkci I platí (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) a (3.2.4),

(ii) pro koeficient s platí (3.2.6),

(iii) platí (3.2.8)

(iv) existuje právě jeden stacionární bod (Y°, K°) ve kterém platí (3.2.16) a (3.2.17),

(v) existují $Y_n > 0$ a $Y_N > Y_n$ takové, že $Y^\circ \in (Y_n, Y_N)$ a pro všechna $K \geq 0$ platí (3.2.12) a (3.2.13).

Pak existuje kompaktní pozitivně invariantní množina $N \subset M$, $(Y^\circ, K^\circ) \in N$, ve které existuje alespoň jeden limitní cyklus soustavy (3.2.14).

Důkaz. Doplníme pouze poznámky uvedené před větou. Nechť $K_s \geq 0$ je úroveň kapitálu, pro kterou $\dot{K} = 0 = I(Y_s, K_s) - \delta K_s$. Uvažujme kompaktní množinu

$$N = \{(Y, K) | \, 0 \leq Y \leq Y_s, 0 \leq K \leq K_s\}.$$

Podle poznámek 3.2.5 a 3.2.9 pro směr pohybu veličin Y a K platí na hranicích množiny N vztahy vyznačené na obr. 3.1. To znamená, že N je pozitivně invariantní množina. Podle předpokladu obsahuje N stacionární bod (Y°, K°), který není sedlo a je nestabilní. Podle věty 2.5.4, která je přímým důsledkem Poincaré-Bendixsonovy věty 2.5.3, tedy platí tvrzení. □

3.3 Úpravy základního Phillipsova modelu s multiplikátorem a akcelerátorem

V této sekci navážeme na úvod sekce předchozí a budeme pokračovat v popisu modelů, které vysvětlují hospodářské cykly. V sekci 1.4 jsme popsali Phillipsův model, který využíval multiplikátor a akcelerátor. V tomto modelu byla pro uzavřenou ekonomiku odvozena rovnice (1.4.12), která popisovala vývoj důchodu $Y = Y(t)$, kde t je čas. Pro pohodlí tuto rovnici připomeneme:

$$T\ddot{Y} + (T + s - v)\dot{Y} + sY = 0, \tag{3.3.1}$$

kde $T > 0$ představuje délku zpoždění důchodu Y za poptávkou Z, $s \in (0, 1)$ mezní koeficient úspor a $v > 0$ akcelerátor, podle kterého dochází k úpravě skutečných investic. Za velmi přísné podmínky

$$v = T + s \tag{3.3.2}$$

je řešením rovnice (3.3.1) periodická funkce a dochází k periodickému vývoji důchodu Y. Splnění (3.3.2) je však málo pravděpodobné, takže pomocí modelu nelze uspokojivě vysvětlit cyklické kolísání důchodu kolem rovnovážné hodnoty. Za nedostatek modelu lze také považovat, že amplituda periodického průběhu důchodu závisí na počátečních podmínkách a nikoli na parametrech modelu.

Dalším možným řešením rovnice (3.3.1) jsou tlumené kmity nebo expanzivní kmity. V prvním případě model pohyb důchodu nevysvětluje. Nabízí pouze popis vývoje důchodu, jehož počáteční výchylku způsobily vnější vlivy. Je-li však systém ponechán bez dalších vnějších impulsů, vrátí se po dostatečně dlouhé době do klidového stavu a pohyb důchodu ustane. Na druhé straně v případě explozivních cyklů může dojít k velmi velkým záporným výchylkám důchodu od rovnovážné hodnoty a tento vývoj by zřejmě způsobil katastrofu ve vývoji dané ekonomiky. Chtěli bychom sestavit takovou rovnici, která by produkovala periodické řešení pro vývoj důchodu s konečnou amplitudou a tato amplituda by závisela na parametrech modelu. Periodické řešení by mělo být stabilní, tj. po dostatečně dlouhé době by měl systém z libovolného počátečního stavu přejít k periodickému vývoji. V následujících odstavcích ukážeme, jak lze některé nedostatky základní rovnice (3.3.1) odstranit a přiblížit se k požadovanému modelu.

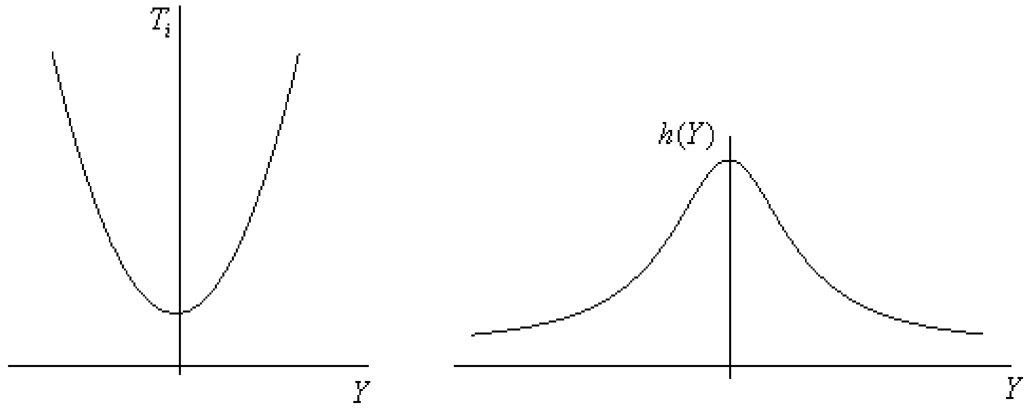
3.3.1 Jednoznačné cykly v upraveném Phillipsově modelu

V tomto oddílu bude popsán model uvedený v [49], který přizpůsobíme označení uvedenému v sekci 1.4. Tam jsme ve vztahu (1.4.8) předpokládali, že skutečné investice $I = I(t)$ se za plánovanými investicemi $B(t) = v\dot{Y}(t)$ zpožďují o dobu danou jednou časovou jednotkou. Nyní délku doby zpoždění skutečných investic za plánovanými nebudeme specifikovat, označíme ji $T_i > 0$ a místo vztahu (1.4.8) budeme nejdříve uvažovat, že platí

$$T_i\dot{I} = v\dot{Y} - I. \tag{3.3.3}$$

Uvědomme si také, že rovnice (3.3.1) popisující časový vývoj důchodu má jedno stacionární řešení $Y(t) = 0$, které představuje rovnovážnou hodnotu důchodu vzhledem k níž se uskutečňují fluktuace důchodu. Pokud bychom uvažovali autonomní spotřebu vlády, byla by tato rovnovážná hodnota nenulová. Dále lze uvažovat, že čím více je skutečná hodnota důchodu $Y(t)$ vzdálena od rovnovážné hodnoty, bude doba zpoždění plánovaných a skutečných investic delší. To nás vede k tomu, abychom uvažovali, že $T_i = T_i(Y)$. Základní představu o průběhu doby zpoždění T_i v závislosti na odchylce důchodu od rovnovážné hodnoty znázorňuje obr. 3.2. Vztah (3.3.3) lze nyní psát ve tvaru

$$T_i(Y)\dot{I} = v\dot{Y} - I. \tag{3.3.4}$$



Obrázek 3.2: Ilustrace doby zpoždění $T_i(Y)$ plánovaných a skutečných investic. Investiční koeficient $h(Y) = 1/T_i(Y)$.

Nahradíme-li vztah (1.4.8) vztahem (3.3.4) a zopakujeme-li úvahy uvedené v sekci 1.4, získáme místo rovnice (3.3.1) rovnici

$$\ddot{Y} + \left(\frac{s}{T} + h(Y)\left(1 - \frac{v}{T}\right)\right)\dot{Y} + \frac{s}{T}h(Y)Y = 0, \tag{3.3.5}$$

kde $h(Y) = 1/T_i(Y)$, srv. obr. 3.2. Položme $f(Y) = \frac{s}{T} + h(Y)\left(1 - \frac{v}{T}\right)$, $g(Y) = \frac{s}{T}h(Y)Y$ a $F(Y) = \int_0^Y f(y)dy$. Rovnice (3.3.5) je ekvivalentní s autonomní soustavou v $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= X - F(Y) \\ \dot{X} &= -g(Y), \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

v tomto smyslu: Je-li Y řešením rovnice (3.3.5) a $X = \dot{Y} + F(Y)$, pak je dvojice Y, X řešením soustavy (3.3.6). Je-li naopak dvojice funkcí Y, X řešením soustavy (3.3.6), je Y řešením rovnice (3.3.5).

Pro další úvahy je žádoucí specifikovat vlastnosti funkce funkce h, kterou nazveme investiční koeficient. Budeme předpokládat, že $h \in C^1(\mathbb{R})$ a že pro všechna $Y \in \mathbb{R}$ platí

$$h(Y) > 0,\ h(Y) = h(-Y) \tag{3.3.7}$$

a dále

$$h'(0) = 0,\ h''(0) < 0 \text{ a } h'(Y) < 0 \text{ pro } Y > 0. \tag{3.3.8}$$

Abychom mohli soustavu (3.3.6) považovat za Liénardovu soustavu, budeme také předpokládat, že

$$h(0)(v - T) > s. \tag{3.3.9}$$

Zabývejme se nyní vlastnostmi soustavy (3.3.6).

(i) (a) Vzhledem k předpokladům na funkci h je $F,\ g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(b) Vzhledem k (3.3.7) je funkce g je lichá.

(c) Vzhledem k (3.3.7) a (3.3.9) je f sudá. Pro libovolné $Y \in \mathbb{R}$ platí

$$2F(Y) = \int_{-Y}^{Y} f(y)dy = \int_{-Y}^{0} f(y)dy + \int_{0}^{Y} f(y)dy = -F(-Y) + F(Y).$$

Tedy $F(-Y) = -F(Y)$ a funkce F je také lichá.

(ii) Vzhledem k (3.3.7) pro $Y \neq 0$ platí $Yg(Y) = \frac{s}{T}h(Y)Y^2 > 0$.

(iii) (a) $F(0) = 0$.

(b) Vzhledem k (3.3.9) je $F'(0) < 0$.

(c) Vzhledem k (3.3.8) a (3.3.9) je $f(0) < 0, f'(0) = 0, f''(0) > 0$ a f je rostoucí pro $Y > 0$. Existuje tedy $Y_1 > 0$ tak, že $f(Y_1) = 0$ a pro $Y > Y_1$ je $f(Y) > 0$. To znamená, že existuje $Y_2 > Y_1$, takové, že $F(Y_2) = 0$ a platí $\lim_{Y\to\infty} F(Y) = \infty$.

Podmínky (i)–(iii) představují předpoklady věty 2.5.8. Soustava (3.3.6) je Liénardova soustava, která má právě jedno stabilní periodické řešení. To znamená, že časový vývoj důchodu Y má periodický průběh, jehož amplituda není závislá na počátečních podmínkách.

3.3.2 Nelineární investiční funkce a limitní cykly

V tomto oddílu uvedeme další modifikaci rovnice (3.3.1), která vychází z [71]. Na rozdíl od předchozího oddílu 3.3.1 budeme předpokládat, stejně jako v základním modelu v sekci 1.4, že zpoždění skutečných investic je konstantní a je rovno jedné časové jednotce. Místo předpokladu (3.3.4), který byl v předchozím oddílu příčinou periodického vývoje důchodu, specifikujeme podrobněji vlastnosti investiční funkce a akcelerátoru ve vztahu (1.4.7), který kvůli přehlednosti připomeneme

$$B = v\dot{Y}, \tag{3.3.10}$$

$v > 0$ je konstanta, $B = B(t)$ jsou zamýšlené investice,[5] $Y = Y(t)$ je úroveň důchodu a $\dot{Y}$ je tempo důchodu.

Při použití lineárního vztahu v (3.3.10) se nabízí několik otázek, viz [71]. Připomeňme nejdříve, že pojem investice označuje nové výrobní závody, stroje a zařízení, které obohacují současný kapitál. Aby bylo možné vyprodukovat nějaký investiční statek, je třeba použít zdroje, které které by jinak mohly být použity na výrobu spotřebních statků. Investiční výdaje tedy neslouží k přímé spotřebě, ale přispívají k budoucí výrobě a tedy k budoucí úrovni důchodu. Předpokládejme, že tempo růstu důchodu je záporné, pak jsou podle (3.3.10) také záporné investice. Pokud je tempo snižování investic rychlejší než přirozená míra znehodnocení kapitálu, dochází k aktivní destrukci kapitálu. To je zřejmý nedostatek vztahu (3.3.10). Uvažujme opačně, že tempo růstu důchodu je kladné. Při vysokých hodnotách tohoto tempa naráží rostoucí objem investic na přirozená omezení daná růstem výrobních faktorů jako jsou práce, půda, materiálové vybavení, které jsou ve svém růstu

[5] V ekonomické literatuře se pro plánované investice používá termín *ex ante*. Pro uskutečněné investice se pak užívá termín *ex post*. Tyto termíny začala používat tzv. Stokholmská škola , srv. [34].

limitovány. Uvedené poznámky znamenají, že lineární vztah (3.3.10) je efektivní pouze při malých změnách produkce.

Aby dané nedostatky odstranil, navrhl John Richard Hicks (1904-1989) ve své práci *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle,* (Oxford University Press, 1950) nahradit lineární funkci funkcí po částech lineární, která je omezená shora i zdola. Kdykoliv klesá důchod rychleji než je přirozená míra kapitálového znehodnocení, zůstanou investice na záporné hodnotě tohoto přirozeného znehodnocení. Podobně, roste-li příjem příliš rychle, rychleji než ostatní faktory produkce, neexistuje žádný důvod k dalším investicím, které tak nepřekročí jistou horní hranici.

Později, v článku *The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles* (Econometrica 19, No. 1, 1951), navrhl Richard M. Goodwin hladkou nelineární investiční funkci, která horní i dolní mez dosáhne asymptoticky. V našem modelu použijeme funkci arctg a místo (3.3.10) budeme psát[6]

$$B = v \cdot \operatorname{arctg} \dot{Y}. \tag{3.3.11}$$

Použijeme-li stejný postup jako v sekci 1.4, získáme místo rovnice (3.3.1) rovnici

$$\ddot{Y} + \left(1 + \frac{s}{T}\right)\dot{Y} - \frac{v}{T} \operatorname{arctg} \dot{Y} + \frac{s}{T} Y = 0. \tag{3.3.12}$$

Předpokládejme dále, že levou stranu rovnice (3.3.12) lze derivovat. Jestliže tuto derivaci provedeme a položíme-li $x = \dot{Y}$, získáme

$$\ddot{x} + \left(1 + \frac{s}{T} - \frac{v}{T} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)\dot{x} + \frac{s}{T} x = 0. \tag{3.3.13}$$

Položme

$$f(x) = 1 + \frac{s}{T} - \frac{v}{T} \cdot \frac{1}{1+x^2},\ g(x) = \frac{s}{T}\, x \text{ a } F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi.$$

Rovnice (3.3.13) je ekvivalentní autonomní soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

ve smyslu, který jsme uvedli dříve na str. 87. Připomeňme, že $s > 0, v > 0$ a $T > 0$ jsou reálné konstanty. Abychom mohli pokračovat v úvahách, budeme dále předpokládat, že

$$T + s < v. \tag{3.3.15}$$

Zabývejme se nyní vlastnostmi soustavy (3.3.14).

(i) $F, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Funkce g je lichá funkce a lze ukázat, že také funkce F je lichá.

(ii) $xg(x) = \dfrac{s}{T} x^2 > 0$ pro $x \neq 0$.

---

[6] V [71] jsou použity pouze první dva členy Taylorova rozvoje $\operatorname{arctg} x = x - 1/3x^3 + o(x^4)$, $x \to 0$.

(iii) (a) $F(0) = 0$.

(b) Přímým výpočtem lze ukázat, že díky (3.3.15) je $F'(0) < 0$.

(c) Přihlédneme-li k podmínkce (3.3.15), lze ukázat, že existuje $a > 0$, pro které $F(a) = 0$. Dále platí $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

Podmínky (i)–(iii) představují předpoklady věty 2.5.8. Soustava (3.3.6) je Liénardova soustava, která má právě jedno stabilní periodické řešení. To znamená, že časový vývoj veličiny $x = x(t)$ má periodický průběh, jehož amplituda není závislá na počátečních podmínkách.

Funkce $x = x(t)$ je periodická, existuje tedy nějaká minimální perioda $P > 0$ taková, že pro všechna $t \geq 0$ (bereme v úvahu pouze kladné časy), platí $x(t + P) = x(t)$. Protože v Liénardově soustavě (3.3.14) jsou funkce F a g liché, je zřejmé, že je-li $(x(t), y(t))$ řešením této soustavy, je $(-x(t), -y(t))$ také řešením této soustavy. To znamená, že uzavřená trajektorie γ Liénardovy soustavy (3.3.14), která reprezentuje periodické řešení, je souměrná podle počátku soustavy souřadnic a pro libovolné $t \geq 0$ platí $-x(t) = x(t + P/2)$. Díky této vlastnosti platí

$$\int_t^{t+P} x(s)ds = 0.$$

Protože jsme dříve použili substituci $\dot{Y}(t) = x(t)$, je $Y(t) = \int_0^t x(s)ds$. Pro libovolné $t \geq 0$ platí

$$Y(t + P) = \int_0^{t+P} x(s)ds = \int_0^t x(s)ds + \int_t^{t+P} x(s)ds = \int_0^t x(s)ds = Y(t),$$

takže také důchod $Y = Y(t)$ má periodický průběh s periodou $P > 0$. Amplituda přitom nezávisí na počátečních podmínkách, ale je určena vnitřními parametry modelu.

3.3.3 Cykly v případě obecné investiční funkce

Pomocí existenční věty pro Poincaré – Andronov – Hopfovu bifurkaci nyní ukážeme existenci obchodních cyklů za poněkud obecnější podmínky než v předchozím oddílu. Popíšeme model, který lze nalézt v [16]. V úvodním oddílu 3.3.1 této sekce jsme předpokládali, že doba zpoždění skutečných investic za plánovanými investicemi je závislá na odchylce skutečné hodnoty důchodu od rovnovážné hodnoty důchodu. Místo vztahu (3.3.4), který tuto závislost vyjadřoval, budeme nyní předpokládat, že doba zpoždění T_i je konstantní. V předchozím oddílu 3.3.2 jsme uvažovali, že investiční funkce je dána nelineárním vztahem (3.3.11). V tomto oddílu budeme obecněji uvažovat, že plánované investice B jsou dány nějakou, obecně nelineární, funkcí produkce Y a tempem produkce $\dot{Y}$, krátce budeme psát $B = B(Y, \dot{Y})$. Budeme předpokládat, že $B \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Nyní lze rovnici (1.4.8) pro zpoždění skutečných investic psát jako

$$T_i\dot{I} = B(Y, \dot{Y}) - I. \tag{3.3.16}$$

Zopakujeme-li postup uvedený v sekci 1.4, získáme místo rovnice (3.3.1) rovnici

$$TT_i\ddot{Y} + (T + sT_i)\dot{Y} + sY - B(Y, \dot{Y}) = 0. \tag{3.3.17}$$

Předpokládejme, že existuje právě jedno konstantní řešení této rovnice, které označíme $Y(t) = Y^\circ$. Pro tuto hodnotu platí

$$sY^\circ - B(Y^\circ, 0) = 0. \tag{3.3.18}$$

Abychom mohli provést další úvahy, definujme odchylku důchodu od daného konstantního řešení jako $y = Y - Y^\circ$. Nyní lze rovnici (3.3.17) přepsat pro odchylku y, získáme tak

$$\ddot{y} + \alpha(T + sT_i)\dot{y} + \alpha sy - \alpha b(y, \dot{y}) = 0, \tag{3.3.19}$$

kde

$$\alpha = 1/TT_i > 0 \text{ a } b(y, \dot{y}) = B(y + Y^\circ, \dot{y}) - sY^\circ.$$

Vzhledem k (3.3.18) platí $b(0,0) = 0$ a lze uvažovat Taylorův rozvoj funkce $b(y, \dot{y})$ v bodě $(0,0)$ ve tvaru

$$b(y, \dot{y}) = b_1 y + b_2 \dot{y} + e(y, \dot{y}), \tag{3.3.20}$$

kde člen $e(y, \dot{y})$ obsahuje mocniny y, $\dot{y}$ vyššího řádu a platí $e(0,0) = 0$ a

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{e(x_1, x_2)}{|x_1| + |x_2|} = 0.$$

Pro koeficienty b_1, resp. b_2 lze psát $b_1 = D_1 B(Y^\circ, 0)$, resp. $b_2 = D_2 B(Y^\circ, 0)$. Použijeme-li (3.3.20), kde jsme oddělili lineární a nelineární část $b(y, \dot{y})$, má (3.3.19) tvar

$$\ddot{y} + \alpha(T + sT_i - b_2)\dot{y} + \alpha(s - b_1)y - \alpha e(y, \dot{y}) = 0. \tag{3.3.21}$$

Položíme-li $x_1 = y$ a $x_2 = \dot{y}$, lze (3.3.21) přepsat jako autonomní soustavu v $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(s - b_1) & \alpha\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ e(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \tag{3.3.22}$$

kde jsme označili $\mu = b_2 - T - sT_i$.

Lokální rozbor: Stacionární bod x° soustavy (3.3.22) má souřadnice $x_1^\circ = 0$ a $x_2^\circ = 0$. Uvažujme lineární část rovnice (3.3.22) v tomto stacionárním bodě a její matici označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(s - b_1) & \alpha\mu \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ má tvar

$$\lambda^2 - \alpha\mu\lambda + \alpha(s - b_1) = 0. \tag{3.3.23}$$

Pro její kořeny lze psát Viétovy vztahy

$$\lambda_1\lambda_2 = \alpha(s - b_1), \ \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha\mu.$$

Podle [16] lze standardně předpokládat $s > b_1$, což znamená, že v okolí stacionárního bodu x° je křivka úspor S strmější než investiční křivka I, srv. též Kaldorův model v sekci 3.2. Odtud pak $\lambda_1\lambda_2 > 0$ a můžeme vyloučit, že stacionární bod x° je sedlo. Je-li $\mu > 0$, jsou reálné části obou kořenů charakteristické rovnice λ_1 i λ_2 kladné, takže podle věty 2.4.3 je stacionární bod x° nestabilní. V případě, že $\mu < 0$, jsou reálné části obou kořenů charakteristické rovnice záporné. Podle věty 2.4.2 to znamená, že stacionární bod je asymptoticky stabilní. Z uvedeného můžeme usoudit, že pro $\mu = 0$ nastává změna charakteru stacionárního bodu a $(x^\circ, 0)$ je bifurkační bod rovnice (3.3.22).

Existence cyklu: Vyjádříme-li diskriminant charakteristické rovnice (3.3.23) matice $\mathbf{A}$, lze pro její kořeny psát

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{2}(\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha^2\mu^2 - 4\alpha(s - b_1)}).$$

Připomeňme, že $\alpha > 0$ a že předpokládáme $s - b_1 > 0$. Pro $\mu = 0$ získáme ryze imaginární kořeny

$$\lambda_1(0) = -i\sqrt{\alpha(s - b_1)} \text{ a } \lambda_2(0) = i\sqrt{\alpha(s - b_1)}.$$

Přímým výpočtem lze ověřit, že platí

$$\frac{d}{d\mu}[\Re\lambda(\mu)]_{|\mu=0} = \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Ukázali jsme tak platnost předpokladů věty 2.5.11 o existenci Poincaré – Andronov – Hopfovy bifurkace. To znamená, že v okolí bifurkačního bodu $(x^\circ, 0)$ dochází ke vzniku periodického řešení soustavy (3.3.22). Podrobněji lze říci, že pro libovolné okolí $\mathcal{U}$ bodu $x^\circ = 0$ a libovolné okolí $\mathcal{V}$ bodu $\mu = 0$ existuje $\mu \in \mathcal{V}$ takové, že soustava (3.3.22) má nekonstantní periodické řešení, jehož trajektorie je uzavřená křivka v $\mathcal{U}$, a jehož amplituda pro $\mu \to 0$ konverguje k nule. Pro vyšetření stability tohoto periodického řešení by bylo třeba provést podrobnější rozbor.

Nyní je zřejmé, že první souřadnice $x_1 = x_1(t)$ řešení soustavy (3.3.22) má periodický průběh, a protože jsme položili $y(t) = x_1(t)$ a $y(t) = Y(t) - Y^\circ$, existuje periodické řešení důchodu $Y(t) = Y^\circ + y(t)$, které osciluje kolem konstantního řešení Y°. Amplituda tohoto řešení závisí na hodnotách parametrů v rovnici (3.3.17).

3.3.4 Závěr

V roce 1929 došlo na americké burze ke zhroucení trhu s cennými papíry. Tato událost přispěla k následné světové hospodářské krizi. Měla nepříznivé dopady na životní úroveň obyvatelstva a mimo jiné odstartovala diskusi o příčinách kolísání úrovně důchodu kolem rovnovážné hodnoty. Nastala snaha o vysvětlení příčin obchodních cyklů. V této sekci jsme uvedli tři modifikace základního Phillipsova modelu s multiplikátorem a akcelerátorem, který vyjadřuje časový vývoj důchodu Y v uzavřeném ekonomickém systému. Ukázalo se, že za příslušných podmínek lze nalézt periodická řešení důchodu Y. Daná řešení byla závislá pouze na vnitřních parametrech daného modelu. To nás přivádí k tomu, že některé typy obchodních cyklů jsou způsobeny vnitřními silami daného ekonomického systému. Z uvedených modelů je zřejmé, že se jedná pouze o velmi hrubé přiblížení skutečnosti, které nemůže vysvětlit všechny pozorované jevy a ani nemůže přispět ke konkrétní předpovědi případné fluktuace. Význam těchto modelů spočívá v tom, že jsou formulovány příslušné pohybové rovnice a studovány vnitřní ekonomické síly, které mohou být příčinou obchodních cyklů. Objev těchto sil vede ke snaze o jejich eliminaci a přispívá tak k ochraně společnosti proti nepříznivým jevům, které doprovázejí propad důchodu pod dlouhodobou úroveň.

3.4 Goodvinův model růstového cyklu

Většina rozvinutých zemí dlouhodobě vykazuje stálý růst národního důchodu, který v průběhu času kolísá. Toto cyklické kolísání relativní míry růstu je doprovázeno kolísáním míry zaměstnanosti případně kolísáním úrovně mezd. Na prvním Světovém kongresu Ekonometrické společnosti v konaném v Římě v roce 1965 přednesl R. M. GOODWIN referát s názvem *A Growth Cycle*. V referátu představil model, který popisuje, jak spolu míra zaměstnanosti a podíl mezd na celkovém důchodu souvisí. Tento model nyní uvedeme a jak se ukáže, jedná se o obdobu Lotka-Volterrova modelu pro dravce a kořist, který jsme popsali v oddílu 2.5.6. Při výkladu budeme vycházet hlavně z [24], [49] a [22].

Základní ekonomická argumentace může být formulována takto: Vysoká zaměstnanost vede ke zvýšení mezd zaměstnanců. To je příčinou zvýšení podílu mezd dělníků na výsledné produkci a vede ke snížení zisku zaměstnavatelů. Nižší zisk vede k omezení budoucích investic a výsledné produkce. Snížení produkce má za následek snížení poptávky po práci a zaměstnanosti. To vede k nižším mzdám, takže se sníží podíl mezd dělníků na výsledné produkci. Tak se může zvětšit zisk zaměstnavatelů, což vede ke zvýšení investic. Přitom se zvyšuje zaměstnanost a zlepšuje se vyjednávací pozice pracujících. V důsledku toho se zvyšují i mzdy tak, jak je tomu v případě Phillipsovy křivky, viz [7] nebo [31]. To vede opět ke zvětšení podílu mezd dělníků na výstupu a cyklus se opakuje. Goodvin předpokládá, že nabídka práce a produktivita rostou exogenně, takže nezávisí na proměnných v modelu a růst dané ekonomické soustavy stojí stranou jeho modelu.

3.4.1 Předpoklady a označení

Předpokládejme, že v ekonomice, která vyrábí agregovaný produkt, jehož množství v čase t označíme $Y = Y(t)$, existují dvě třídy, zaměstnanci – dělníci a zaměstnavatelé – kapitalisté. Označme dále $N = N(t)$ nabídku práce, $L = L(t)$ její zaměstnanou část a $K = K(t)$ zásoby kapitálu v čase t. Nebudeme uplatňovat předpoklad plné zaměstnanosti, tj. pracovní nabídka N a zaměstnaná pracovní síla L se neshodují. Uveďme další předpoklady modelu.

• Pracovní nabídka se zvětšuje podle Malthusova zákona, takže

$$\frac{\dot{N}}{N} = n > 0. \tag{3.4.1}$$

• Produktivita Y/L se zvyšuje konstantní mírou $\phi =$ konst., tedy

$$\frac{(Y/L)^{\cdot}}{(Y/L)} = \phi > 0 \tag{3.4.2}$$

• Je-li w průměrná mzda, je wL celkový příjem zaměstnanců a vztahem

$$u = \frac{wL}{Y} \tag{3.4.3}$$

lze definovat podíl mezd na celkovém příjmu.

• Protože je důchod rozdělen pouze mezi zaměstnance a zaměstnavatele, je zisk zaměstnavatelů $Y - wL$. To znamená, že podíl zisku na celkovém důchodu je $1 - u$. Zisk je uspořen, takže pro hodnotu úspor zaměstnavatelů platí $S = (1-u)Y$. Veškeré úspory jsou automaticky investovány. Pro investice platí $I = \dot{K}$, kde $K = K(t)$ je úroveň kapitálu. Lze tedy psát

$$\dot{K} = (1-u)Y. \tag{3.4.4}$$

• Předpokládá se, že koeficient kapitálové náročnosti produkce neboli kapitálový koeficient je konstantní

$$k = \frac{K}{Y} = \text{konst.} \tag{3.4.5}$$

• Míru zaměstnanosti označíme

$$v = \frac{L}{N} \tag{3.4.6}$$

• Předpokládá se, že průměrná hodnota mezd w se mění podle standardní Phillipsovy křivky, viz [49], tj.

$$\frac{\dot{w}}{w} = f(v), \ \lim_{v\to 1^-} f(v) = \infty, \ \lim_{v\to 0^+} f(v) = \Omega < 0, \ f'(v) > 0. \tag{3.4.7}$$

Pro konkrétnost bude (3.4.7) nahrazena lineární aproximací

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v, \tag{3.4.8}$$

kde $\gamma > 0$ a $\rho > 0$ jsou reálné konstanty.

3.4.2 Konstrukce modelu

Ústřední proměnné v Goodwinově modelu jsou mzdový podíl na důchodu u a míra zaměstnanosti v. Na základě uvedených předpokladů pro ně nyní sestavíme diferenciální rovnice.

Rovnice pro podíl mezd na příjmu. Derivací vztahu (3.4.3) získáme

$$\dot{u} = \dot{w}\frac{L}{Y} + w\left(\frac{L}{Y}\right)^{\cdot}. \tag{3.4.9}$$

Využijeme-li (3.4.2), máme

$$\left(\frac{L}{Y}\right)^{\cdot} = \left(\left(\frac{Y}{L}\right)^{-1}\right)^{\cdot} = -\left(\frac{Y}{L}\right)^{-2}\left(\frac{Y}{L}\right)^{\cdot} = -\phi\frac{L}{Y}.$$

Dosadíme-li tento vztah a (3.4.8) do (3.4.9) získáme

$$\dot{u} = (-\gamma + \rho v)w\frac{L}{Y} - w\phi\frac{L}{Y}.$$

Použijeme-li znovu (3.4.3), můžeme předchozí rovnici psát ve tvaru

$$\dot{u} = (-(\gamma + \phi) + \rho v)u. \tag{3.4.10}$$

Rovnice pro míru zaměstnanosti. Derivací vztahu (3.4.6) a použitím (3.4.1) získáme

$$\dot{v} = \left(\frac{L}{N}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{L}}{N} - \frac{L}{N}\frac{\dot{N}}{N} = \left(\frac{\dot{L}}{L} - n\right) v. \tag{3.4.11}$$

Použijeme-li (3.4.2), lze psát

$$\left(\frac{Y}{L}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{Y}}{L} - \frac{Y}{L}\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{Y}}{Y}\frac{Y}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{Y}{L} = \phi\frac{Y}{L},$$

odkud

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \phi. \tag{3.4.12}$$

Protože se předpokládá (3.4.5) a platí (3.4.4), lze psát

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{kY} = \frac{1}{k}(1-u). \tag{3.4.13}$$

Dosadíme-li (3.4.13) do (3.4.12) a pak (3.4.12) do (3.4.11), máme

$$\dot{v} = (1/k - (n+\phi) - u/k)v. \tag{3.4.14}$$

Položme $a = \gamma + \phi > 0$, $b = \rho > 0$, $c = 1/k - (n+\phi)$ a $d = 1/k > 0$. Rovnice (3.4.9) a (3.4.14) lze nyní psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (-a + bv)u \\ \dot{v} &= (c - du)v \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Je-li $c > 0$,[7] tj. $1/k > n + \phi$, představuje (3.4.15) Lotkův–Volterrův model. V tomto modelu představují proměnné velikost populace dravců a velikost populace kořisti. Mohou tedy nabývat nezáporných hodnot. V Goodvinově modelu lze mzdový podíl u interpretovat jako dravce a míru zaměstnanosti v jako kořist. Vzhledem k definici těchto proměnných platí $u, v \in [0,1]$. V případě, že spotřeba překročí celkový důchod, tj. existuje nedostatek investic, lze si vyjímečně představit, že $u > 1$. Abychom mohli o soustavě (3.4.15) říci více, přijmeme výsledky, které jsme uvedli dříve v oddílu 2.5.6 pro Lotka – Volterrův model.

3.4.3 Popis řešení Goodwinova modelu

Stacionární bod soustavy (3.4.15), který odpovídá podmínkám $u > 0$ a $v > 0$, má souřadnice

$$u^\circ = 1 - k(n+\phi), \quad v^\circ = \frac{\gamma + \phi}{\rho}.$$

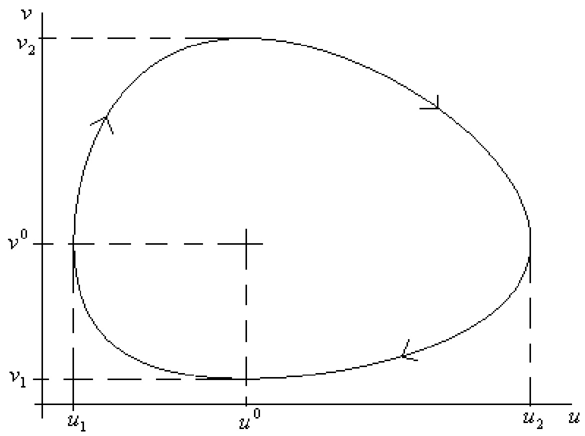
Podle výsledků odvozených v oddílu 2.5.6 je tento bod stabilní. Trajektorie soustavy (3.4.15) odpovídající podmínkám $u > 0$ a $v > 0$, které jsou různé od stacionárního bodu, jsou uzavřené křivky a reprezentují periodická řešení. To znamená, že časový průběh míry zaměstnanosti $u = u(t)$ a podílu mezd na důchodu $v = v(t)$ je periodický. Amplitudy a periody těchto řešení jsou závislé na počátečních podmínkách. V případě, že se nějaká

[7] Podle [23, str. 461] lze jako dolní závoru pro $1/k$ vzít $0,2$ a jako horní závoru pro $n+\phi$ uvažovat $0,12$. Tedy pak $c > 0$.

trajektorie soustavy (3.4.15) nachází v blízkém okolí stacionárního bodu (u°, v°), má tvar elipsy a pro periodu časového vývoje u a v podle (2.5.17) platí

$$T \doteq \frac{2\pi}{\sqrt{(\gamma+\phi)(1/k-(n+\phi))}}.$$

Popis řešení modelu uzavřeme slovy, kterými v roce 1967 Goodwin interpretoval svůj



Obrázek 3.3: Goodwinův růstový cyklus.

cyklus znázorněný na obr. 3.3. Jde o volný autorův překlad podle [24, str. 462]):

> Je-li zisk největší, tj. $u = u_1$, je zaměstnanost průměrná, tj. $v = v^\circ$, a vysoká míra růstu táhne zaměstnanost k možnému maximu v_2, což sníží míru zisku na průměrnou hodnotu u°. Zpomalení růstu opět sníží zaměstnanost na její průměrnou hodnotu, kde se růst a zisk nacházejí na svém dně. Tento pomalý růst vede k pádu produkce a zaměstnanosti, což zvýší ziskovost na její průměrnou hodnotu protože produktivita nyní roste rychleji než mzdy ... Zlepšená ziskovost přispívá ke své vlastní destrukci, protože je příčinou prudké expanze produkce a zaměstnanosti ...

3.5 Limitní cyklus v modelu reklamy

V této sekci bude popsán spojitý model pro intenzitu opakovaného prodeje jistého typu zboží, který je ovlivněn propagací značky výrobce. Jde o autorův článek [69], ve kterém jsme místo formulací použitých tvrzení použili odkazy na příslušná tvrzení uvedená v kapitole 2.

Uvažujeme firmu, která vyrábí a na trhu prodává výrobek označený její značkou. Podobný výrobek vyrábějí i jiné firmy a prodávají je pod svými značkami. To, zda si vybraná firma udrží svůj podíl na trhu závisí na kvalitě nabízeného výrobku, která ovlivňuje jeho oblíbenost a také na firemní propagaci daného výrobku a značky.

Zde se předpokládá, že výrobce provádí takovou reklamu, jejíž intenzita je přímo úměrná objemu prodaného zboží.

3.5.1 Popis modelu

Při formulaci modelu budeme vycházet z [24] a článku [19]. Označme $N_1 = N_1(t)$ počet potenciálních kupců vybrané značky. To jsou všichni, kteří v čase $t \in [0, \infty)$ uvažovanou značku nepoužívají, ale jsou účastníky trhu. Dále označme $N_2 = N_2(t)$ počet uživatelů značky v čase t. Implicitně budeme předpokládat, že hodnoty N_1 a N_2 jsou dostatečně velké tak, že lze uvažovat $N_1, N_2 \in C^1(\mathbb{R})$.

Počet potenciálních zákazníků, kteří si v čase t koupí vybranou značku a stanou se tak jejími novými uživateli, je přímo úměrný počtu uživatelů značky N_2 v čase t a počtu potenciálních zákazníků N_1 v čase t. Koeficient přímé úměrnosti, který označíme $a = a(t)$, se nazývá *kontaktní míra.* Obecně je závislý na čase a lze ho ovlivnit propagací značky. Úbytek uživatelů značky v čase t je přímo úměrný počtu těchto uživatelů N_2 v čase t. Díky migraci a přirozené úmrtnosti z nich část trh opustí (přestane zboží daného typu používat), označme tuto míru $\varepsilon > 0$. Část z nich přejde ke konkurenčním značkám a stanou se z nich potenciální zákazníci, označme tuto míru $\beta > 0$. Uživatelé značky v čase t tedy ubývají mírou $\delta = \varepsilon + \beta$. Předchozí předpoklady lze stručně zapsat pomocí rovnice

$$\dot{N}_2 = a(t)N_1N_2 - \delta N_2.$$

Předpokládejme dále, že díky přirozenému růstu příjmu obyvatelstva roste počet nových potenciálních zákazníků značky konstantní rychlostí $k > 0$. Ti, kteří se podle předchozího odstavce stali novými uživateli uvažované značky, představují úbytek potenciálních zákazníků a ti, kteří přestali být uživateli značky a koupili si značku konkurenční, představují přírůstek potenciálních zákazníků. Stručně tedy můžeme psát

$$\dot{N}_1 = k - a(t)N_1N_2 + \beta N_2.$$

Uvažujme, že kontaktní míra je rostoucí funkcí reklamních nákladů. Ty mají za následek rostoucí počet uživatelů značky, takže náklady na reklamu lze považovat přímo úměrné počtu uživatelů značky. Budeme tedy předpokládat, že $a(t) = \alpha N_2(t)$, kde $\alpha > 0$ je konstanta úměrnosti. Celkem získáme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= k - \alpha N_1N_2^2 + \beta N_2, \quad && N_1(0) \geq 0, \\ \dot{N}_2 &= \alpha N_1N_2^2 - \delta N_2, && N_2(0) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Stacionární bod soustavy (3.5.1) je

$$(N_1^\circ, N_2^\circ) = \left(\frac{\delta\varepsilon}{\alpha k}, \frac{k}{\varepsilon} \right).$$

Označíme-li dále $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ celkový počet účastníků trhu, pak podle (3.5.1) platí $\dot{N} = k - \varepsilon N_2$. V závislosti na okamžitém počtu uživatelů značky N_2 může nastat $\dot{N} > 0$, resp. $\dot{N} < 0$. To znamená, že počet účastníků trhu se v průběhu času může zvětšovat nebo zmenšovat.

3.5.2 Transformace modelu

Abychom určili kvalitativní chování řešení soustavy (3.5.1), položme

$$\tau = \delta t, \; x_1(\tau) = \frac{\alpha k}{\delta\varepsilon} N_1\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - 1, \text{ a } x_2(\tau) = \frac{\varepsilon}{k} N_2\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - 1. \tag{3.5.2}$$

Vzhledem k významu N_1 a N_2 je $N_1 \geq 0,\ N_2 \geq 0$ a tedy $x_1 \geq -1$ a $x_2 \geq -1$. Použijeme-li (3.5.2), lze soustavu (3.5.1) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(-x_1 + (\phi - 2)x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - x_1x_2^2) \\ x'_2 &= x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2^2 \end{aligned}\ , \tag{3.5.3}$$

kde $'$ znamená derivaci podle proměnné τ a $\gamma = \alpha k^2/\delta\varepsilon^2$, $\phi = \beta/\delta$. Stacionární bod soustavy (3.5.3) je

$$(x_1^\circ, x_2^\circ) = (0, 0).$$

3.5.3 Podmínky stability stacionárního bodu

Při vyšetřování stability stacionárního bodu soustavy (3.5.3) budeme vycházet z věty 2.5.1, kterou jsme uvedli v kapitole 2.

Označme

$$f(x_1, x_2) = (\gamma(-x_1 + (\phi - 2)x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - x_1x_2^2), x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2^2),$$

pak

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \gamma(-1 - 2x_2 - x_2^2) & \gamma((\phi - 2) - 2x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2) \\ 1 + 2x_2 + x_2^2 & 1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Matice linearizované soustavy (3.5.3) ve stacionárním bodě $(x_1^\circ, x_2^\circ) = (0, 0)$ je

$$\mathbf{A} = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma(\phi - 2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\gamma - \lambda & \gamma(\phi - 2) \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\gamma - 1)\lambda + \gamma(1 - \phi) = 0, \tag{3.5.4}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice.

Hledejme řešení kvadratické rovnice (3.5.4). V závislosti na znaménku diskriminantu

$$D(\gamma) = \gamma^2 + 2(2\phi - 3)\gamma + 1, \tag{3.5.5}$$

rozlišíme hodnoty vlastních čísel matice $\mathbf{A}$. Připomeňme také, že $\gamma > 0$ a $0 \leq \phi < 1$, pak

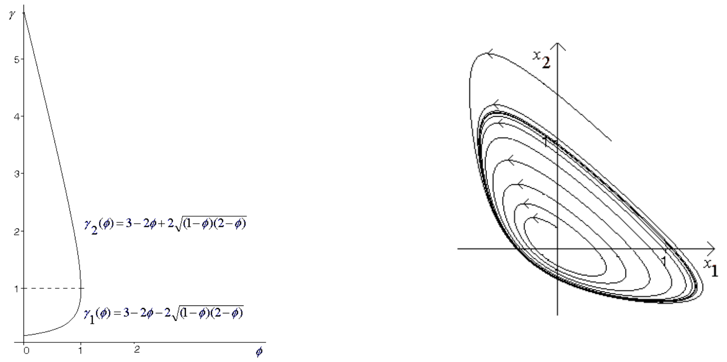
$$\lambda_1\lambda_2 = \gamma(1 - \phi) > 0 \text{ a } \lambda_1 + \lambda_2 = -(\gamma - 1). \tag{3.5.6}$$

Je-li $D(\gamma) > 0$, má rovnice (3.5.4) dva různé reálné kořeny a matice $\mathbf{A}$ má dvě různá reálná vlastní čísla:

$$\lambda_{1,2}(\gamma) = \frac{-(\gamma - 1) \pm \sqrt{D(\gamma)}}{2}. \tag{3.5.7}$$

Hledejme nyní podmínky, za kterých dané kořeny existují. Diskriminant kvadratické nerovnice

$$D(\gamma) = \gamma^2 + 2(2\phi - 3)\gamma + 1 > 0 \tag{3.5.8}$$



Obrázek 3.4: V levé části jsou zobrazeny kořeny $\gamma_1(\phi)$ a $\gamma_2(\phi)$ jako funkce proměnné ϕ. V pravé části je fázový obraz soustavy (3.5.3) pro $\gamma = 0,92$ a $\phi = 0,1$.

je $\Delta = 16(\phi-2)(\phi-1)$ a vzhledem k podmínkce $0 \leq \phi < 1$ platí vždy $\Delta > 0$. To znamená, že vždy existují dva nulové body kvadratického trojčlenu $D(\gamma)$ a platí pro ně

$$\gamma_1(\phi) = 3 - 2\phi - 2\sqrt{(\phi-2)(\phi-1)},\ \gamma_2(\phi) = 3 - 2\phi + 2\sqrt{(\phi-2)(\phi-1)}. \tag{3.5.9}$$

Lze ukázat, že pro $\phi \in [0,\,1)$ je $0 < \gamma_1(\phi) < 1$ a $1 < \gamma_2(\phi)$. Ilustraci těchto vztahů znázorňuje obr. 3.4. Odtud nyní máme, že nerovnice (3.5.8) platí pro $\gamma \in [0, \gamma_1(\phi)) \cup (\gamma_2(\phi), \infty)$.

Využijme nyní (3.5.6) a hledejme znaménka vlastních čísel (3.5.7). Pro $\gamma < 1$ je $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Podle druhého ze vztahů v (3.5.6) je tedy $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$ a stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0,\,0)$ soustavy (3.5.3) je nestabilní uzel. Naopak, pro $\gamma > 1$ je $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Potom však $\lambda_1 < 0$ i $\lambda_2 < 0$ a stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0,\,0)$ soustavy (3.5.3) je stabilní uzel.

Je-li $D(\gamma) < 0$, má rovnice (3.5.4) dva komplexně sdružené kořeny a matice **A** má dvě koplexně sdružená vlastní čísla. Podobně jako v předcházejícím odstavci bychom zjistili, že vlastní čísla matice **A** linearizované soustavy (3.5.3) jsou pro $\gamma \in (\gamma_1(\phi), \gamma_2(\phi))$ dány

$$\lambda_{1,2}(\gamma) = \frac{-\,(\gamma-1) \pm i\sqrt{-D(\gamma)}}{2}. \tag{3.5.10}$$

Je-li $\gamma < 1$, je $\Re(\lambda_{1,2}) = -(\gamma-1)/2 > 0$ a stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0,0)$ soustavy (3.5.3) je nestabilní ohnisko. Naopak pro $\gamma > 1$ je $\Re(\lambda_{1,2}) = -(\gamma-1)/2 < 0$ a stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0,0)$ soustavy (3.5.3) je stabilní ohnisko. Pro $\gamma = 1$ je $\Re(\lambda_{1,2}) = 0$ a stacionární bod je ohnisko nebo bod rotace.

Dosud provedené úvahy týkající se lokálního chování soustavy (3.5.3) nyní shrneme.

Věta 3.5.1. *Soustava (3.5.3) má jediný stacionární bod* $(0,0)$ *a existují hodnoty* γ_1, γ_2 *parametru* γ *dané (3.5.9), pro které* $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$ *takové, že stacionární bod je*

(i) nestabilní uzel pro $\gamma \in [0, \gamma_1)$,

(ii) nestabilní ohnisko pro $\gamma \in (\gamma_1, 1)$,

(iii) ohnisko nebo bod rotace pro $\gamma = 1$,

(iv) stabilní ohnisko pro $\gamma \in (1, \gamma_2)$,

(v) stabilní uzel pro $\gamma \in (\gamma_2, \infty)$.

3.5.4 Periodické řešení

V soustavě (3.5.1) je možné vhodnou reklamou ovlivnit hodnotu parametru α. Tento parametr ovlivňuje hodnotu parametru γ v soustavě (3.5.3). V dalším budeme předpokládat, že parametr ϕ v soustavě (3.5.3) je konstantní. Takto můžeme připustit, že soustava (3.5.3) je citlivá především na změnu hodnoty parametru γ, která je však ovlivněna dalšími parametry α, k, δ a ε soustavy (3.5.1). Z věty 3.5.1 je zřejmé, že při přechodu parametru γ přes hodnotu $\gamma_0 = 1$ dochází ke změně stability stacionárního bodu soustavy (3.5.3). To nás přivádí k myšlence, že hodnota γ_0 může být bifurkačním bodem soustavy (3.5.3). Zabývejme se tedy dále řešením soustavy (3.5.3) pro hodnoty γ z blízkého okolí bodu γ_0.

Pro soustavu (3.5.3) položme $\gamma_0 = 1$. Pro tuto hodnotu splňuje soustava (3.5.3) předpoklady věty 2.5.11 pro existenci Poincaré–Andronov–Hopfovy bifurkace, přičemž

$$\frac{d}{d\gamma}[\Re\lambda(\gamma_0)] = -\frac{1}{2}.$$

Existuje tedy nějaké okolí bodu $\gamma_0 = 1$, ve kterém v závislosti na volbě parametru γ existují periodická řešení soustavy (3.5.3).

Chceme-li uvažovat o stabilním periodickém řešení, je třeba předpokládat, že stacionární bod $(x^\circ, y^\circ) = (0, 0)$ je nestabilní. To nastává pro $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_0)$. Důkaz toho, že periodické řešení vzniká právě v okolí (γ_3, γ_0) bodu γ_0, kde $\gamma_3 > \gamma_1$, lze provést převedením soustavy (3.5.3) na normální formu, srv. [28]. Tento výpočet zde pro jeho rozsáhlost provádět nebudeme. Uvažujme pouze ilustraci fázového obrazu a trajektorie pro hodnoty parametrů $\gamma = 0,92$ a $\phi = 0,1$, srv. obr. 3.4. Pro dané hodnoty je stacionární bod nestabilní ohnisko a existuje stabilní periodické řešení, jehož amplituda závisí na hodnotě parametru γ.

Ukázali jsme, že reklamní strategie, založená na tom, že investice do reklamy jsou přímo úměrné objemu prodeje, může vést k periodickým oscilacím objemu prodeje výrobků dané značky. Tento výsledek je možné interpretovat takto: Je-li počet uživatelů výrobku v daném čase malý, firma má malý příjem a nemůže si dovolit rozsáhlou reklamní kampaň. Nicméně na trhu je mnoho potenciálních zákazníků, takže i malé investice do reklamy vedou ke zvětšení objemu firemního prodeje. Tak jak roste objem prodaných výrobků, zvyšují se i výdaje na reklamu. Tento růst však po čase převýší růst objemu prodejů, protože potenciální zákazníci tím, jak se stávají uživateli, ubývají. Reklama přestává být účinná. Nicméně stále dochází k přirozenému odlivu uživatelů a protože nových uživatelů v této fázi cyklu přibývá málo, dochází k poklesu objemu prodejů. Proces se tak může opakovat.

Kapitola 4

Optimální řízení

V této kapitole budou popsány základní rysy teorie optimálního řízení, které lze uplatnit při řešení některých ekonomických modelů. Úlohy optimálního řízení jsou v ekonomii běžné. Firmy se například snaží zvolit takový plán svých investic, aby v nějakém časovém intervalu maximalizovaly svůj zisk. Jednotlivec nebo celá společnost se snaží plánovat svoji spotřebu a úspory tak, aby byl v nějakém časovém období maximalizován užitek ze zvolené spotřeby.

Nejdříve uvedeme ilustrační úlohu z knihy [33], jejíž řešení lze nalézt elementárními prostředky. Uvažujme zahradníka, který pěstuje jistý druh rostlin. Představme si, že zahradník získal zakázku, podle které má k danému datu vypěstovat a na trh dodat předem daný počet rostlin předepsané výšky. Je známo, že přirozený růst rostlin je možné podpořit umělým osvětlením v době, kdy je nedostatek přirozeného slunečního světla a růst neprobíhá. Jsou-li vhodně zvoleny jednotky, můžeme proces růstu popsat pomocí diferenciální rovnice pro výšku $x = x(t)$ rostliny v čase t ve tvaru

$$\dot{x} = 1 + u, \tag{4.0.1}$$

kde $u = u(t)$ je dodatečná míra růstu způsobená umělým osvětlením, kterému budeme říkat řízení. Pro určitost předpokládejme, že v počátečním okamžiku je výška rostliny nulová a v koncovém čase rovném jedné časové jednotce je výška rostliny rovna dvěma výškovým jednotkám, tedy

$$x(0) = 0,\ x(1) = 2 \tag{4.0.2}$$

Dodatečný přírůstek je způsoben svícením, které ovšem vyžaduje další finanční náklady. Tyto náklady závisí na době, kdy je umělé osvětlení používáno a tuto dobu může zahradník ovlivnit. Uvažujme, že cena je přímo úměrná hodnotě integrálu ve tvaru

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} u(t)^2 dt. \tag{4.0.3}$$

Úkolem je nalézt takové řízení u, které lze použít v rovnici (4.0.1) s podmínkami (4.0.2) a při kterém má integrál (4.0.3), v teorii řízení nazývaný cenový nebo účelový funkcionál, minimální hodnotu.

Řešení rovnice (4.0.1) s počáteční podmínkou $x(0) = 0$ můžeme psát ve tvaru

$$x(t) = \int_0^t 1 + u(s)ds = t + \int_0^t u(s)ds.$$

Použijeme-li podmínku $x(1) = 2$ v koncovém bodě, získáme

$$\int_0^1 u(s)ds = 1. \tag{4.0.4}$$

Abychom určili optimální řízení, použijeme účelový funkcionál (4.0.3). Protože platí (4.0.4), lze (4.0.3) psát jako

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}[(u(t)-1)^2 + 2u(t) - 1]dt =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u(t)-1)^2 dt + \int_0^1 u(t)dt - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 (u(t)-1)^2 dt + \frac{1}{2}.$$

Poslední integrál v předchozím vztahu je nezáporný, takže minimální hodnota funkcionálu je $\mathcal{J} = \frac{1}{2}$ a této hodnoty nabývá při optimálním řízení

$$\widehat{u}(t) = 1,\ t \in [0,\ 1].$$

Řešením (4.0.1), (4.0.2) s řízením $\widehat{u}$ získáme optimální trajektorii

$$\widehat{x}(t) = 2t,\ t \in [0,\ 1].$$

Uvedená úloha je příkladem problému, kterým se zabývá teorie optimálního řízení. Z toho, co bylo dosud uvedeno, můžeme úlohu optimálního řízení popsat takto: Je dána nějaká soustava, jejíž chování lze popsat pomocí zákonů této soustavy. Okamžitý stav soustavy v čase $t \in [t_0,\ t_1]$ popisuje hodnota funkce $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$. V mnoha případech je žádoucí, ale pouze v některých případech je možné, aby do procesu vývoje soustavy vstoupil člověk a pomocí řízení ovlivnil její chování tak, aby byl daný proces v nějakém smyslu optimální. Vzhledem k tomu, že člověk může na soustavu působit pouze omezenými prostředky, je řízení omezená funkce $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m,\ m \in \mathbb{N}$, která nemusí být spojitá. To souvisí s tím, že například v uvedené úloze o zahradníkovi může řízení probíhat způsobem: rozsvíceno – zhasnuto.

Standardní model uvažovaného procesu, který popisuje zákony chování soustavy, je soustava obyčejných diferenciálních rovnic. Problém teorie optimálního řízení pak spočívá ve výběru řízení $\widehat{u}(\cdot)$, kterému odpovídá trajektorie $\widehat{x}(\cdot)$ a případně ve výběru počátečního času $\widehat{t_0}$ a koncového času $\widehat{t_1}$ takových, že účelový funkcionál $\mathcal{J}(x, u, t_0, t_1)$ sestavený pro daný systém dosáhne své optimální (tj. minimální nebo maximální) hodnoty vzhledem k přípustným výběrům funkcí $u(\cdot)$, $x(\cdot)$ a výběru časových okamžiků t_0 a t_1. V následujících odstavcích se budeme popisu problému optimálního řízení věnovat podrobněji.

4.1 Vázané extrémy a Lagrangeova úloha

V tomto oddílu budou připomenuty některé pojmy a tvrzení týkající se optimalizačních úloh. Nejdříve uvedeme pojem lokálního minima vzhledem k množině, viz např. [21]. Použijeme přitom takové značení, které bude použito později v úlohách optimálního řízení.

Definice 4.1.1. Nechť X je metrický prostor a $M \subset X$. Říkáme, že funkcionál $\mathcal{J} : M \to \mathbb{R}$ má v bodě $\widehat{z} \in M$ *lokální minimum vzhledem k množině* M, jestliže existuje okolí U bodu $\widehat{z}$ takové, že

$$\mathcal{J}(\widehat{z}) \leq \mathcal{J}(z)$$

pro všechna $z \in M \cap U$. Úlohu hledat lokální minimum funkcionálu f vzhledem k množině M budeme zapisovat

$$\min(\mathcal{J}(z)|\ z \in M). \tag{4.1.1}$$

Budeme uvažovat takový minimalizační problém (4.1.1), ve kterém je množina M zadána ve tvaru rovnosti

$$M = \{z \in X|\ G(x) = 0\}, \tag{4.1.2}$$

kde $G : X \to Y$ a X, Y jsou Banachovy prostory. Při formulaci nutné podmínky pro existenci minima bude na takto zadané množině M užitečný následující pojem, srv. např. [50].

Definice 4.1.2. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a nechť pro nějakou otevřenou množinu $U \subset X$ je zobrazení $G : U \to Y$ spojitě Fréchetovsky diferencovatelné. Je-li $\widehat{z} \in U$ takové, že zobrazení $DG(\widehat{z})$ zobrazuje X na Y, tj. Im $DG(\widehat{z}) = Y$, nazýváme $\widehat{z}$ *regulárním bodem* G.

Poznámka 4.1.1. Je-li $X = \mathbb{R}^n$ a $Y = \mathbb{R}^m$, $n \geq m$, je bod $\widehat{z}$ regulárním bodem G, má-li Jacobiho matice $DG(\widehat{z})$ hodnost m. To vyplývá z věty o inverzním zobrazení, která říká, že G je lokálně invertibilní v okolí bodu $\widehat{z}$, jestliže $DG(\widehat{z})$ má hodnost m.

Důkaz následujícího tvrzení, které je obdobou věty o Lagrangeových multiplikátorech, lze nalézt v [37, str. 87].

Věta 4.1.1. *a) Nechť X, Y jsou reálné Banachovy prostory a U je otevřená množina v X. Nechť $\mathcal{J} : U \to \mathbb{R}$ má v bodě $\widehat{z} \in U$ lokální minimum vzhledem k množině*

$$M = \{z \in U|\ G(z) = 0\},$$

kde $G : U \to Y$. Jestliže existují Fréchetovy derivace $\mathcal{J}'(\widehat{z})$, $G'(\widehat{z})$ a je-li Im$G'(\widehat{z})$ uzavřený podprostor v Y, pak lze nalézt číslo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ a spojitou lineární formu φ na prostoru Y, které nejsou současně nulové, tak, že pro funkcionál

$$\mathcal{L} : z \mapsto \lambda_0 \mathcal{J}(z) - \varphi(G(z)),\ z \in U$$

nazývaný Lagrangeovou funkcí platí

$$\mathcal{L}'(\widehat{z}) = 0,$$

tj. $\mathcal{L}$ splňuje v bodě $\widehat{z}$ nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému.

b) Je-li $\widehat{z}$ regulárním bodem G, je multiplikátor $\lambda_0 \neq 0$ a lze položit $\lambda_0 = 1$.

Bude-li mít zobrazení G z předchozí věty speciální tvar, tj. bude-li tvořeno zobrazením do nějakého Banachova prostoru, které je regulární v bodě $\widehat{z}$ a zobrazením do $\mathbb{R}^r$, lze vyslovit následující důsledek, viz [37, str. 75].

Důsledek 4.1.2. *Nechť X, Y jsou reálné Banachovy prostory a U je otevřená množina v X. Nechť $\mathcal{J} : U \to \mathbb{R}$ má v bodě $\widehat{z} \in U$ lokální minimum vzhledem k množině*

$$M = \{z \in U|\ G(z) = 0,\ G_1(z) = 0, \ldots,\ G_r(z) = 0\},$$

kde $G : U \to Y$ a $G_i : U \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots r\}$. Nechť existují Fréchetovy derivace $\mathcal{J}'(\widehat{z})$, $G'(\widehat{z}), G_i'(\widehat{z})$, $i \in \{1, \dots, r\}$. Je-li dále $\widehat{z}$ regulárním bodem zobrazení G, pak existují čísla $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ a spojitá lineární forma φ na prostoru Y, které nejsou současně nulové, tak, že pro funkcionál

$$\mathcal{L} : z \mapsto \lambda_0 \mathcal{J}(z) + \lambda_1 G_1(z) + \dots + \lambda_r G_r(z) - \varphi(G(z)),\ z \in U$$

platí

$$\mathcal{L}'(\widehat{z}) = 0.$$

4.1.1 Reprezentace spojitého lineárního funkcionálu na prostoru spojitých funkcí a pomocná tvrzení

Při aplikaci věty 4.1.1 nebo důsledku 4.1.2 bude třeba vyjádřit obecný tvar lineárního funkcionálu v prostoru spojitých funkcí. Připomeňme nejdříve pojmy, které budeme pro takové vyjádření potřebovat, viz [43, str. 366]. Funkci α definovanou na uzavřeném intervalu $[t_0, t_1]$ nazýváme *funkcí s konečnou variací,* jestliže existuje taková konstanta $M > 0$, že pro libovolné dělení

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = t_1$$

intervalu $[t_0, t_1]$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(\tau_k) - \alpha(\tau_{k-1})| < M.$$

Podle [48] lze nyní formulovat Rieszovu větu o reprezentaci, která popisuje obecný tvar lineárního funkcionálu v prostoru spojitých funkcí.

Věta 4.1.3. *Ke každému spojitému lineárnímu funkcionálu $\varphi \in C^*([t_0, t_1], \mathbb{R})$ lze přiřadit funkci s konečnou variací $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ takovou, že pro všechna $h \in C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ platí*

$$\varphi(h) = \int_{t_0}^{t_1} h(t) d\alpha(t), \tag{4.1.3}$$

kde vpravo je Riemann-Stiltjesův integrál. [1]

Funkce s konečnou variací α není podle předchozí věty určena jednoznačně, stačí totiž k α přičíst libovolnou konstantu a (4.1.3) se nezmění. Lze také nahlédnout, že hodnoty funkce α v bodech nespojitosti této funkce uvnitř intervalu $[t_0,\ t_1]$ lze změnit, aniž to bude mít vliv na hodnotu integrálu (4.1.3). Uvažujme funkci β s konečnou variací na $[t_0,\ t_1]$, takovou, že $\alpha(t) = \beta(t)$ v bodech t_0, t_1 a ve všech bodech $(t_0,\ t_1)$, ve kterých je funkce α spojitá. Nyní mohou být součty, které se vyskytují v definici integrálů

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t) d\alpha(t) \text{ a } \int_{t_0}^{t_1} h(t) d\beta(t),$$

sestaveny pomocí hodnot v právě uvedených bodech, takže oba tyto integrály mají stejnou hodnotu. Abychom možnou komplikaci týkající se nejednoznačnosti odstranili, zavedeme

[1] Každá funkce s konečnou variací $\alpha(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ definuje míru, viz 6. kapitola v [43]. Stiltjesův integrál (4.1.3) je integrál podle této míry. Míru, odpovídající funkci s konečnou variací $\alpha(\cdot)$, budeme označovat $d\alpha(\cdot)$.

pojem kanonické funkce s konečnou variací: Funkci s konečnou variací $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ budeme nazývat *kanonickou,* jestliže je spojitá zprava ve všech bodech intervalu (t_0, t_1) a $\alpha(t_0) = 0$.

Lemma 4.1.4. *Jestliže pro všechna $h \in C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ a pro kanonickou funkci α platí*

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t) d\alpha(t) = 0, \tag{4.1.4}$$

pak $\alpha(t) \equiv 0$ na $[t_0, t_1]$.

Dříve, než přistoupíme k důkazu, všimněme si, že pro funkci α s konečnou variací na $[t_0,\, t_1]$ a pro $c \in [t_0,\, t_1)$ platí

$$\lim_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau} \int_c^{c+\tau} \alpha(t) dt = \lim_{t \to c+} \alpha(t). \tag{4.1.5}$$

Poznámka 4.1.2. Uveďme krátké zdůvodnění předchozího pozorování. Podle definice kanonické funkce existuje $\lim_{t \to c+} \alpha(t) = k \in \mathbb{R}$. To znamená, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $t \in (c, c + \delta)$ platí $|\alpha(t) - k| < \varepsilon$. Použijeme-li tento odhad a vlastnosti integrálu, můžeme psát

$$\left| \frac{1}{\tau} \int_c^{c+\tau} \alpha(t) dt - k \right| \leq \frac{1}{\tau} \int_c^{c+\tau} |\alpha(t) - k| dt < \varepsilon.$$

To však bylo třeba ukázat.

Podobně pro $c \in (t_0,\, t_1]$ platí

$$\lim_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau} \int_{c-\tau}^{c} \alpha(t) dt = \lim_{t \to c-} \alpha(t). \tag{4.1.6}$$

Nyní můžeme přistoupit k důkazu lemmatu 4.1.4, vycházíme přitom z [81].

Důkaz. Položme nejdříve $h(t) \equiv 1$ na $[t_0,\, t_1]$. Z předpokladu (4.1.4) v tomto případě vyplývá

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} d\alpha(t) = \alpha(t_1) - \alpha(t_0). \tag{4.1.7}$$

Uvažujme dále, že $c \in [t_0,\, t_1)$, $\tau \in (0, t_1 - c)$ a definujme funkci h předpisem

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{je–li } t \in [t_0,\, c], \\ 1 - \dfrac{t-c}{\tau}, & \text{je–li } t \in [c,\, c+\tau], \\ 0, & \text{je–li } t \in [c+\tau, t_1]. \end{cases}$$

Z předpokladu (4.1.4) nyní vyplývá

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} h(t) d\alpha(t) = \alpha(c) - \alpha(t_0) + \int_c^{c+\tau} h(t) d\alpha(t).$$

Použijeme-li v posledním integrálu metodu per partes, viz [72, str. 150], získáme

$$\int_c^{c+\tau} h(t)d\alpha(t) = h(c+\tau)\alpha(c+\tau) - h(c)\alpha(c) - \int_c^{c+\tau} \alpha(t)dh(t) =$$
$$-\alpha(c) - \int_c^{c+\tau} \alpha(t)\dot{h}(t)dt = -\alpha(c) + \frac{1}{\tau}\int_c^{c+\tau} \alpha(t)dt.$$

Pomocí (4.1.5) pro $\tau \to 0+$ získáme

$$\lim_{t\to c+} \alpha(t) = \alpha(t_0),\ c \in [t_0, t_1). \tag{4.1.8}$$

Postupujme podobně a uvažujme, že $c \in (t_0,\, t_1]$, $\tau \in (0, c - t_0)$ a definujme funkci h předpisem

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{je–li } t \in [t_0,\, c-\tau], \\ 1 + \dfrac{t-c}{\tau}, & \text{je–li } t \in [c-\tau,\, c], \\ 1, & \text{je–li } t \in [c, t_1]. \end{cases}$$

Podobně jako v předchozí části důkazu bychom s pomocí takto definované funkce h a (4.1.6) zjistili, že

$$\lim_{t\to c-} \alpha(t) = \alpha(t_1),\ c \in (t_0,\, t_1]. \tag{4.1.9}$$

Díky (4.1.7), (4.1.8) a (4.1.9) lze nyní nahlédnout, že α je spojitá konstantní funkce a platí $\alpha(t) = \alpha(t_0)$. Podle předpokladu je α kanonická funkce, tedy $\alpha(t_0) = 0$. Odtud pak plyne tvrzení. □

Pomocí uvedeného lemmatu lze ukázat, že platí následující užitečné tvrzení.

Lemma 4.1.5. *Nechť $a : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ je funkce lebegueovsky integrovatelná na $[t_0,\, t_1]$. Nechť $A : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, nechť $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ je kanonická funkce s konečnou variací a nechť $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Je-li pro všechna $h \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ splněna rovnost*

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} [\dot{h}(t) - A(t)h(t)]d\alpha(t) + c_0h(t_0) + c_1h(t_1) = 0, \tag{4.1.10}$$

je funkce $\alpha(\cdot)$ absolutně spojitá na $[t_0, t_1]$. Její derivace, kterou označíme $\psi(\cdot)$, je spojitá ve všech bodech intervalu $[t_0, t_1]$ a je řešením diferenciální rovnice

$$\dot{\psi}(t) = a(t) - A(t)\psi(t),\ \ s.v.\ na\ [t_0, t_1]$$

s okrajovými podmínkami

$$\psi(t_0) = c_0\ \ a\ \psi(t_1) = -c_1.$$

Důkaz. Libovolnou $h \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ lze psát ve tvaru

$$h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{h}(s)ds.$$

Pomocí tohoto vyjádření a vhodného přeskupení členů lze vyjádřit (4.1.10) ve tvaru

$$\left[\int_{t_0}^{t_1} a(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} A(t)d\alpha(t) + c_0 + c_1\right] h(t_0)$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} a(t)\left(\int_{t_0}^{t} \dot{h}(s)ds\right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(t)d\alpha(t)$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} A(t)\left(\int_{t_0}^{t} \dot{h}(s)ds\right) d\alpha(t) + c_1 \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(s)ds = 0$$

Protože funkci h lze volit libovolně, získáme při volbě $\dot{h}(\cdot) = 0$ a $h(t_0) \in \mathbb{R}$ vztah

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} A(t)d\alpha(t) + c_0 + c_1 = 0. \tag{4.1.11}$$

Pro libovolné $\dot{h} \in C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ a $h(t_0) = 0$ získáme

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\left(\int_{t_0}^{t} \dot{h}(s)ds\right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(t)d\alpha(t)$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} A(t)\left(\int_{t_0}^{t} \dot{h}(s)ds\right) d\alpha(t) + c_1 \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(s)ds = 0 \tag{4.1.12}$$

Zaměníme-li v prvním a třetím členu vztahu (4.1.12) pořadí integrace,[2] ve druhém členu označíme písmenem s integrační proměnnou a vhodně seskupíme členy, získáme

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{s}^{t_1} a(t)dt - \int_{s}^{t_1} A(t)d\alpha(t) + c_1\right] \dot{h}(s)ds + \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(s)d\alpha(s) = 0. \tag{4.1.13}$$

Položme

$$\beta(s) = \int_{t_0}^{s} \left[\int_{r}^{t_1} a(t)dt - \int_{r}^{t_1} A(t)d\alpha(t) + c_1\right] dr. \tag{4.1.14}$$

Lze si rozmyslet, že tato funkce je absolutně spojitá, takže podle [43, str. 392] lze psát

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(s)\dot{\beta}(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(s)d\beta(s).$$

Vztah (4.1.13) lze pomocí tohoto výsledku psát ve tvaru

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(s)d\beta(s) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(s)d\alpha(s) = 0. \tag{4.1.15}$$

Pro funkci β platí $\beta(t_0) = 0$. Je to tedy, stejně jako funkce α, kanonická funkce. Podle lemmatu 4.1.4 platí $\beta(t) + \alpha(t) \equiv 0$ na $[t_0, t_1]$. To znamená, že funkce α je absolutně spojitá a pro její derivaci podle (4.1.14) platí

$$\psi(s) = \dot{\alpha}(s) = -\dot{\beta}(s) = -\int_{s}^{t_1} a(t)dt + \int_{s}^{t_1} A(t)d\alpha(t) - c_1.$$

[2]Nechť $\alpha_1(\cdot)$ a $\alpha_2(\cdot)$ jsou dvě funkce s konečnou variací definované na intervalu $[a, b]$. Pak je na čtverci $[a, b] \times [a, b]$ definován součin měr $d\alpha_1(\cdot) \times d\alpha_2(\cdot)$, platí Fubiniova věta, viz [43, str.348] a vztah pro záměnu pořadí integrace

$$\int_a^b \int_a^t f(t, s)d\alpha_1(s)d\alpha_2(t) = \int_a^b \int_s^b f(t, s)d\alpha_2(t)d\alpha_1(s).$$

Položíme-li $s = t_1$, získáme odtud $\psi(t_1) = -c_1$. Položíme-li $s = t_0$ a uplatníme-li (4.1.11), získáme $\psi(t_0) = c_0$. Protože α je absolutně spojitá funkce, je

$$\int_s^{t_1} A(t)d\alpha(t) = \int_s^{t_1} A(t)\dot{\alpha}(t)dt = \int_s^{t_1} A(t)\psi(t)dt.$$

Pomocí tohoto vztahu a derivací funkce ψ obdržíme

$$\dot{\psi}(t) = a(t) - A(t)\psi(t), \text{ s.v. na } [t_0, t_1].$$

□

Tvrzení, která byla v tomto oddílu uvedena lze zobecnit na vektorový případ. Uvedeme pouze Rieszovu větu, viz [1, str. 116], a zobecnění posledního lemmatu.

Věta 4.1.6. *Ke každému spojitému lineárnímu funkcionálu $\varphi \in C^*([t_0, t_1], \mathbb{R})$ lze přiřadit funkci s konečnou variací $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ takovou, že pro všechna $h \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ platí*

$$\varphi(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left([d\alpha(t)]^\top h(t) \right), \tag{4.1.16}$$

kde vpravo je Riemann-Stiltjesův integrál.

Zobecnění lemmatu 4.1.5 nazveme *zobecněné Du Bois-Reymondovo lemma,* viz [1, str. 259]. Toto tvrzení nám v následujícím oddílu 4.1.2 umožní přehledně nalézt nutnou podmínku pro řešení Lagrangeovy úlohy.

Lemma 4.1.7. *Nechť $a : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ je funkce lebegueovsky integrovatelná na $[t_0,\ t_1]$. Nechť $A : [t_0, t_1] \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je spojitá maticová funkce, nechť $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ je kanonická funkce s konečnou variací a $C_0, C_1 \in \mathbb{R}^n$. Je-li pro všechna $h \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ splněna rovnost*

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)^\top h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \left([d\alpha(t)]^\top (\dot{h}(t) - A(t)h(t)) \right) + C_0^\top h(t_0) + C_1^\top h(t_1) = 0, \tag{4.1.17}$$

je funkce $\alpha(\cdot)$ absolutně spojitá na $[t_0, t_1]$. Její derivace, kterou označíme ψ, je spojitá ve všech bodech intervalu $[t_0, t_1]$ a je řešením diferenciální rovnice

$$\dot{\psi}(t) = a(t) - A(t)^\top \psi(t), \text{ s.v. na } [t_0, t_1] \tag{4.1.18}$$

s okrajovými podmínkami

$$\psi(t_0) = C_0 \text{ a } \psi(t_1) = -C_1 \tag{4.1.19}$$

4.1.2 Lagrangeova úloha

Nechť je dána nějaká soustava, jejíž chování lze pozorovat ve spojitém čase v pevně daném časovém intervalu $[t_0,\ t_1]$. Okamžitý vstup v čase t lze charakterizovat vektorem řízení $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a okamžitý stav soustavy lze charakterizovat stavovým vektorem $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Chování soustavy je v čase t popsáno obyčejnou diferenciální rovnicí

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0,\ t_1], \tag{4.1.20}$$

kde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojité a spojitě diferencovatelné zobrazení ve svých proměnných. Předpokládáme, že trajektorie $x(t)$ splňuje hraniční podmínky

$$g_0(x(t_0)) = 0, \; g_1(x(t_1)) = 0, \tag{4.1.21}$$

kde $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{s_i}$, $i = 0, 1$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení. Nechť jsou náklady na přechod soustavy z počátečního stavu do koncového stavu dány cenovým funkcionálem

$$\mathcal{J}(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt, \tag{4.1.22}$$

kde $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce ve všech svých proměnných. Jako třídu přípustných řízení vezmeme prostor $C([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^m)$ spojitých funkcí s normou

$$||u||_0 = \max(\max_{t\in[t_0,t_1]} |u_1(t)|, \max_{t\in[t_0,t_1]} |u_2(t)|, \ldots, \max_{t\in[t_0,t_1]} |u_m(t)|).$$

Za uvedených podmínek má (4.1.20) pro tato přípustná řízení jednoznačné řešení x v prostoru $C^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ s normou

$$||x||_1 = \max(||x||_0, ||\dot{x}||_0).$$

Budeme řešit úlohu

$$\min(\mathcal{J}(x, u)| \; (x, u) \in M), \tag{4.1.23}$$

kde $M = M_1 \times M_2$ a

$$M_1 = \{x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)| \; \dot{x} = f(t, x, u), \; g_0(x(t_0)) = 0, \; g_1(x(t_1)) = 0, \; u \in M_2\}$$
$$M_2 = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^m). \tag{4.1.24}$$

Lokální minimum $(\widehat{x}, \widehat{u})$ úlohy (4.1.23)–(4.1.24) se nazývá *optimálním procesem ve slabém smyslu,* neboli *slabým minimem.* Podle definice 4.1.1 to znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pokud platí

$$||x - \widehat{x}||_1 < \varepsilon \text{ a } ||u - \widehat{u}||_0 < \varepsilon,$$

pak platí

$$\mathcal{J}(\widehat{x}, \widehat{u}) \leq \mathcal{J}(x, u).$$

4.1.3 Nutné podmínky pro řešení Lagrangeovy úlohy

Cílem tohoto oddílu je Lagrangeovu úlohu (4.1.22)–(4.1.24) přeformulovat tak, aby bylo možné formulovat úlohu pro hledání minima na typu množiny popsané rovnostmi. Pak bude možné použít větu 4.1.1 a získat nutné podmínky. Nejdříve bude zavedeno vhodné značení a budou uvedeny některé výsledky týkající se derivací zobrazení.

Označme $z = (x, u)$ řízený proces, kde x a u splňují (4.1.24). Nechť dále

$$X = C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$$

s normou $||z|| = \max(||x||_1, ||u||_0)$ a

$$Y = C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n).$$

Nyní je $z \in X$ a účelový funkcionál $\mathcal{J} : X \to \mathbb{R}$ má tvar

$$\mathcal{J}(z) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt. \tag{4.1.25}$$

Podle [37, str. 51] je funkcionál $\mathcal{J}$ fréchetovsky diferencovatelný, jeho diferenciál je spojitý a platí

$$\mathcal{J}'(\widehat{x}, \widehat{u})[h, k] = \int_{t_0}^{t_1} D_2\widehat{f}_0(t)h(t) + D_3\widehat{f}_0(t)k(t)dt, \tag{4.1.26}$$

kde

$$D_2\widehat{f}_0(t) = D_2 f_0(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)),\ D_3\widehat{f}_0(t) = D_3 f_0(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)). \tag{4.1.27}$$

Jak je v tomto textu obvyklé, značí $D_i,\ i \in \{2, 3\}$ derivaci podle i–té proměnné. Uvažujme dále zobrazení $G : X \to Y$

$$G(z) = \dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)) \tag{4.1.28}$$

Podle [1, str. 152] je zobrazení G fréchetovsky diferencovatelné a pro jeho diferenciál v bodě $(\widehat{x}, \widehat{u})$ platí

$$G'(\widehat{x}, \widehat{u})[h, k] = \dot{h}(t) - D_2\widehat{f}(t)h(t) - D_3\widehat{f}(t)k(t), \tag{4.1.29}$$

kde

$$D_2\widehat{f}(t) = D_2 f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)),\ D_3\widehat{f}(t) = D_3 f(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) \tag{4.1.30}$$

Nakonec ještě uvažujme zobrazení $G_i : C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{s_i}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1\}$ dané předpisy

$$G_i(x) = g_i(x(t_i)),\ i \in \{0, 1\}. \tag{4.1.31}$$

Podle [37, str. 49] jsou tato zobrazení fréchetovsky diferencovatelná a pro jejich diferenciály v bodě $\widehat{x}$ platí

$$G_0'(\widehat{x})[h] = D\widehat{g}_0 h(t_0), \tag{4.1.32}$$

$$G_1'(\widehat{x})[h] = D\widehat{g}_1 h(t_1), \tag{4.1.33}$$

kde

$$D\widehat{g}_0(t_0) = Dg_0(\widehat{x}(t_0)),\ D\widehat{g}_1(t_1) = Dg_1(\widehat{x}(t_1)). \tag{4.1.34}$$

Úlohu (4.1.22)–(4.1.24) lze nyní stručně zapsat ve tvaru

$$\min(\mathcal{J}(z)|\ G(z) = 0,\ G_0(z) = 0,\ G_1(z) = 0). \tag{4.1.35}$$

Pro nalezení nutné podmínky, kterou splňuje její řešení, použijeme důsledek 4.1.2. Abychom tuto nutnou podmínku mohli formulovat co nejstručněji, zavedeme *Hamiltonovu funkci:*

$$H(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = -\psi_0 f_0(t, x(t), u(t)) + \psi(t)^\top f(t, x(t), u(t)), \tag{4.1.36}$$

kde $\psi_0 \in \mathbb{R}$ a $\psi \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Vzhledem k podmínkám kladeným na funkce f_0 a f je Hamiltonova funkce H pro pevně dané ψ_0 a pevnou funkci $\psi(\cdot)$ spojitě diferencovatelná funkce vzhledem k proměnným x a u.

Věta 4.1.8. *Nechť $(\widehat{x}, \widehat{u})$ je optimální proces ve slabém smyslu pro úlohu (4.1.22)–(4.1.24), pak existují Lagrangeovy multiplikátory $\psi_0 \in \mathbb{R}, \psi_0 \geq 0$, $\chi_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$, $\chi_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ a $\psi(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, které nejsou současně rovné nule a takové, že platí*

(i) adjungovaná rovnice (AR)

$$\dot{\psi} = -[D_2 H(t, \widehat{x}, \widehat{u}, \psi_0, \psi)]^\top, \tag{4.1.37}$$

(ii) podmínky transverzality (PT)

$$\psi(t_0) = [Dg_0(\widehat{x}(t_0))]^\top \chi_0, \tag{4.1.38}$$

$$\psi(t_1) = -[Dg_1(\widehat{x}(t_1))]^\top \chi_1, \tag{4.1.39}$$

(iii) podmínka stacionárnosti (PS)

$$D_3 H(t, \widehat{x}, \widehat{u}, \psi_0, \psi) = 0. \tag{4.1.40}$$

Důkaz. Z poznámek, které byly uvedeny před větou, je zřejmé, že zobrazení $\mathcal{J}$, G, G_0 a G_1 jsou v bodě $\widehat{z} = (\widehat{x}, \widehat{u})$ diferencovatelné. Důkaz rozdělíme do několika částí.

Regulární bod zobrazení. Ukážeme, že bod $\widehat{z}$ je regulárním bodem zobrazení G. To znamená, že pro libovolné $y \in Y$ existuje $(h, k) \in X$, takové, že $G'(\widehat{z})[h, k] = y$. Tuto podmínku lze pomocí (4.1.29) psát jako diferenciální rovnici

$$\dot{h}(t) - D_2\widehat{f}(t)h(t) - D_3\widehat{f}(t)k(t) = y(t), \tag{4.1.41}$$

kde $D_2\widehat{f}(t)$ a $D_3\widehat{f}(t)$ jsou definovány v (4.1.30). Protože $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in X$, jsou $D_2\widehat{f}(t)$ a $D_3\widehat{f}(t)$ spojité. Vezměme nějaké $k \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$, pro určitost lze položit $k(\cdot) = 0$. Podle věty o existenci řešení pro obyčejné diferenciální rovnice existuje takové $h \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, které řeší lineární rovnici (4.1.41) se spojitými koeficienty.

Nyní můžeme použít Lagrangeovu větu o multiplikátorech formulovanou v důsledku 4.1.2. Sestrojme nejdříve Lagrangeovu funkci pro úlohu (4.1.22)–(4.1.24) zapsanou pomocí (4.1.25) a (4.1.35). Pro zápis spojitého lineárního funkcionálu použijeme Rieszovu větu o reprezentaci 4.1.6. Podle této věty existuje kanonická funkce s konečnou variací $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ taková, že Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathcal{L}(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi_0 f_0(t, x(t), u(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} \Big([d\alpha(t)]^\top (\dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t))) \Big) + \\ \chi_0^\top g_0(x(t_0)) + \chi_1^\top g_1(x(t_1)) \tag{4.1.42}$$

Nutná podmínka prvního řádu pro existenci lokálního extrému pro Lagrangeovu funkci je $\mathcal{L}'(\widehat{z}) = 0$. Vzhledem k tomu, že $z = (x, u)$, je tato podmínka ekvivalentní podmínkám $\mathcal{L}'_x(\widehat{z}) = 0$ a $\mathcal{L}'_u(\widehat{z}) = 0$.

Stacionárnost vzhledem k $x(\cdot)$. Použijeme-li (4.1.26), (4.1.29), (4.1.32) a (4.1.33) je

$$\mathcal{L}'_x(\widehat{x},\widehat{u})[h] = \int_{t_0}^{t_1} \psi_0 D_2 \widehat{f}_0(t)h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} [d\alpha(t)]^\top (\dot{h}(t) - D_2\widehat{f}(t)\, h(t)) + \chi_0^\top D\widehat{g}_0(t_0)h(t_0) + \chi_1^\top D\widehat{g}_1(t_1)h(t_1) = 0, \quad (4.1.43)$$

pro všechna $h \in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. Označme $[a(t)]^\top = \psi_0 D_2\widehat{f}_0(t)$, $A(t) = D_2\widehat{f}(t)$, $C_0^\top = \chi_0^\top D\widehat{g}_0(t_0)$ a $C_1^\top = \chi_1^\top D\widehat{g}_1(t_1)$. Uvedené funkce a podmínka (4.1.43) splňují předpoklady lemmatu 4.1.7. To znamená, že kanonická funkce α je absolutně spojitá, její derivace, kterou označíme ψ, je spojitá funkce na $[t_0,t_1]$ a platí

$$\dot{\psi}(t) = a(t) - A(t)^\top \psi(t) = \psi_0 D_2\widehat{f}_0(t) - [D_2\widehat{f}(t)]^\top \psi(t) = -[D_2 H(t,\widehat{x},\widehat{u},\psi_0,\psi)]^\top,$$

s.v. na $[t_0,t_1]$ s hraničními podmínkami

$$\psi(t_0) = C_0 = [D\widehat{g}_0(t_0)]^\top \chi_0, \quad \psi(t_1) = -C_1 = -[D\widehat{g}_1(t_1)]^\top \chi_1.$$

Tím je ukázána platnost (AR) a (TP).

Stacionárnost vzhledem k $u(\cdot)$. Podle (4.1.26) a (4.1.29) je

$$\mathcal{L}'_u(\widehat{x},\widehat{u})[k] = \int_{t_0}^{t_1} \psi_0 D_3\widehat{f}_0(t)k(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} [d\alpha(t)]^\top (D_3\widehat{f}(t)\; k(t)) = 0, \quad (4.1.44)$$

pro všechna $k \in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)$. Vezmeme-li v úvahu, že $\alpha(\cdot)$ je absolutně spojitá a její derivace je $\psi(\cdot) = \dot{\alpha}(\cdot)$, pak platí

$$\int_{t_0}^{t_1} [\psi_0 D_3\widehat{f}(t) - \psi^\top(t) D_3\widehat{f}(t)]k(t)dt = 0.$$

Podle lemmatu 4.1.4 tedy platí

$$\psi_0 D_3\widehat{f}(t) - \psi^\top(t) D_3\widehat{f}(t) = -D_3 H(t,\widehat{x},\widehat{u},\psi_0,\psi) = 0.$$

Tím je ukázána platnost (PS). □

4.2 Popis problému teorie optimálního řízení

V tomto oddílu bude uveden obecnější popis úlohy optimálního řízení. Za první knižní publikace týkající se tohoto problému lze považovat [61] a [46]. My budeme vycházet z [37], [1] a [75]. Budeme přitom potřebovat pojem po částech spojité funkce a pojem po částech spojité vektorové funkce, které byly uvedeny na straně 38 v definici 2.1.2. Lze ukázat, že množina všech po částech spojitých vektorových funkcí na intervalu $I = [t_0,t_1]$ s obvykle definovanými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem tvoří lineární prostor. Jestliže na tomto prostoru zavedeme normu

$$||F||_0 = \max(\max_{t\in I}|F_1(t)|, \max_{t\in I}|F_2(t)|, \ldots, \max_{t\in I}|F_n(t)|),$$

kde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ je po částech spojitá vektorová funkce na I, získáme normovaný lineární prostor, který označíme $PC(I,\mathbb{R}^n)$. Na straně 38 jsme uvedli definici po částech hladké funkce. Je-li $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce, jejíž složky $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i \in \{1, \dots, n\}$ jsou po částech hladké funkce na intervalu $I = [t_0,\ t_1]$, pak budeme vektorovou funkci F nazývat po částech hladkou vektorovou funkcí na intervalu I. Také množina všech hladkých vektorových funkcí s normou

$$||F||_1 = \max(||F||_0, ||\dot{F}||_0),$$

tvoří lineární normovaný prostor, který označíme $PC^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Problém optimálního řízení budeme nyní formulovat pomocí cenového funkcionálu, dynamiky systému, hraničních podmínek a podmínek pro vstupní funkci.

4.2.1 Proměnné

V úloze optimálního řízení se uvažuje nezávisle proměnná $t \in [t_0,\ t_1]$, která je nazývána *čas,* přičemž $-\infty \le t_0 < t_1 \le \infty$. Hodnota t_0 se nazývá *počáteční čas* a hodnota t_1 *koncový čas.* Je-li $t_1 < \infty$, jedná se o úlohu na *konečném časovém horizontu,* v opačném případě se jedná o úlohu na *nekonečném časovém horizontu.* V případě, že koncový čas t_1 není pevně určen, budeme mluvit o úloze s *volným časovým horizontem,* v opačném případě budeme mluvit o úloze s *pevným časovým horizontem.*

Stav soustavy je vyjádřen množinou stavových proměnných. Uspořádaná množina těchto proměnných představuje *stavový vektor* $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, který v každém časovém okamžiku popisuje stav uvažované soustavy.

Proměnné, kterými lze ovlivnit chování soustavy, tvoří množinu řídících proměnných. Uspořádaná množina těchto proměnných představuje *řízení* $u \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, dané soustavy.

4.2.2 Omezení řízení

Hodnoty řízení $u : [t_0,\ t_1] \to \mathbb{R}^m$ mohou patřit do nějaké předem určené množiny U , která se nazývá *oblast řízení.* Stručně píšeme

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \tag{4.2.1}$$

K označení řízení $u(t),\ t \in [t_0,\ t_1]$ budeme v některých případech používat symbol $u(\cdot)$.

V aplikacích se lze soustředit na situace, kdy oblast řízení není omezena, tj.

$$U = \mathbb{R}^m$$

nebo kdy jsou některé souřadnice hodnot řízení omezeny podmínkou $u_k \in [a_k,\ b_k],\ \ k \in \{1, \dots, m\}$. Vezmeme-li v úvahu lineární transformaci

$$v_k = -\frac{2}{a_k - b_k} u_k + \frac{a_k + b_k}{a_k - b_k},\ k \in \{1, \dots, m\},$$

lze uvažovat pouze omezení typu $v_k \in [-1,\ 1]$. Budeme tedy také předpokládat oblast řízení ve tvaru

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m |\ u_k \in [-1,\ 1] \text{ pro } k \in M\},$$

kde $M \subset \{1, \dots m\}$.

4.2.3 Vazby stavového vektoru

Množina všech možných stavových vektorů $x \in \mathbb{R}^n$ tvoří *stavový* nebo *fázový prostor.* Další ohraničení, se kterými se lze v úlohách optimálního řízení setkat, se týkají stavového vektoru a lze je psát ve tvaru rovnosti

$$G_1(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) = 0, \tag{4.2.2}$$

nebo ve tvaru nerovnosti

$$G_2(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) \le 0, \tag{4.2.3}$$

kde $G_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{k_i}$, $i \in \{1, 2\}$ a $k_i \in \mathbb{N}$. V aplikacích se lze často setkat s rozřešeným ohraničením ve tvaru obyčejné diferenciální rovnice

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{4.2.4}$$

kde $x : [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, je spojité a spojitě diferencovatelné v proměnných t a x.

Ohraničení (4.2.4) lze interpretovat jako matematický model nějakého reálného procesu – *dynamické soustavy* – jejíž stav v čase $t \in [t_0,\, t_1]$ určuje hodnota fázové proměnné $x(t)$, která je řešením (4.2.4). Pro označení řešení $x(t),\ t \in [t_0,\, t_1]$ budeme používat symbolu $x(\cdot)$. Množina všech stavů kterými soustava v průběhu času postupně prochází se nazývá *fázová trajektorie.*

4.2.4 Okrajové podmínky

Počáteční a koncový stav systému splňují okrajové podmínky

$$g_0(t_0,\, x(t_0)) = 0, \tag{4.2.5}$$

resp.

$$g_1(t_1,\, x(t_1)) = 0, \tag{4.2.6}$$

kde $g_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{s_i},\ i = 0, 1$ jsou spojité funkce spojitě diferencovatelné vzhledem k proměnným x a t.

Často se předpokládá, že je dán pevný počáteční stav $x(t_0) = x_0$, v tom případě položíme $g_0(t, x) = x - x_0$. Dále se také uvažuje, že je dán pevný koncový stav $x(t_1) = x_1$, stačí položit $g_1(t, x) = x - x_1$, nebo volný koncový stav $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$, kdy lze položit $g_1(t, x) = 0$ V prvním případě se jedná o úlohu s *pevným koncem,* v druhém případě jde o úlohu s *volným koncem.*

Pomocí okrajových podmínek zapsaných ve tvaru (4.2.5) a (4.2.6) lze také zapsat úlohu s *pevným počátečním časem,* stačí položit $g_0(t, x) = t - t_0$ nebo úlohu s *pevným koncovým časem.* To položíme $g_1(t, x) = t - t_1$.

4.2.5 Funkcionál

Kritérium, které rozhoduje o hodnotě ceny změny stavu z $x(t_0)$ splňující (4.2.5) do $x(t_1)$ splňující (4.2.6), se nazývá *účelový funkcionál* nebo *cenový funkcionál.* Uvedeme tři typy funkcionálů. *Integrální funkcionály* mají tvar

$$\mathcal{J}_1(x, u, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt, \tag{4.2.7}$$

kde $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitá a spojitě diferencovatelná v proměnných t a x. Funkcionály tohoto typu vyjadřují cenu, která je závislá na výběru řízení $u(\cdot)$ a na trajektorii $x(\cdot)$.

Funkcionály, jejichž hodnota je závislá na počátečním, resp. koncovém stavu fázové proměnné, se nazývají *terminální funkcionály.* Mají tvar

$$\mathcal{J}_2(x, t_0, t_1) = g(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \tag{4.2.8}$$

kde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná. Funkcionály tohoto typu vyjadřují cenu, která je závislá na hodnotě počátečního a koncového stavu v cílové množině.

Obecně pak lze uvažovat o funkcionálech smíšeného typu ve tvaru

$$\mathcal{J}(x, u, t_0, t_1) = \mathcal{J}_1(x, u, t_0, t_1) + \mathcal{J}_2(x, t_0, t_1). \tag{4.2.9}$$

Bude-li v úloze použit pouze integrální funkcionál $\mathcal{J}_1$, bude se úloha nazývat *Lagrangeova úloha.* V případě, že bude použit pouze terminální funkcionál $\mathcal{J}_2$, půjde o *Mayerovu úlohu* a bude-li použit smíšený funkcionál $\mathcal{J}$, půjde o *Bolzovu úlohu.*

4.2.6 Přípustná řízení a optimální řízení

Abychom mohli dokončit popis problému optimálního řízení, je třeba specifikovat třídy přípustných prvků, tj. přípustná řízení a přípustné stavové vektory.

Jak již bylo řečeno, je v mnoha aplikacích třeba uvažovat, že řízení není spojitá funkce.[3] V našem popisu se omezíme na funkce po částech spojité, tedy $u \in PC([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^m)$. Tento výběr však vyžaduje upřesnit pojem řešení rovnice (4.2.4) : Spojitou funkci $x : [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}^n$, která pro každé $t \in [t_0,\, t_1]$ s výjimkou bodů nespojitosti řízení u splňuje rovnici (4.2.4), budeme nazývat *odezva na řízení u.* Je tedy $x \in PC^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$. Srv. též definici 2.1.4 na straně 38.[4]

Řízení u, které splňuje (4.2.1) a jehož odezva x splňuje (4.2.5) a (4.2.6), se nazývá *přípustné řízení.* Jestliže u je přípustné řízení, x jeho odezva a $t_1 > t_0$, budeme čtveřici

$$(x,\, u, t_0, t_1) \tag{4.2.10}$$

nazývat *přípustný řízený proces* úlohy optimálního řízení,

Podle [37] se přípustný řízený proces $(\widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{t_0}, \widehat{t_1})$ nazývá *optimální*, jestliže lze nalézt $\varepsilon > 0$ takové, že pro každý přípustný řízený proces $(x(t),\, u(t), t_0, t_1)$, pro který

$$|t_0 - \widehat{t_0}| < \varepsilon, |t_1 - \widehat{t_1}| < \varepsilon \text{ a } |x(t) - \widehat{x}(t)| < \varepsilon \text{ pro všechna } t \in [t_0,\, t_1] \cap [\widehat{t_0}, \widehat{t_1}],$$

je splněna nerovnost

$$\mathcal{J}(\widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{t_0}, \widehat{t_1}) \leq \mathcal{J}(x, u, t_0, t_1). \tag{4.2.11}$$

V popsané situaci se také říká, že $\mathcal{J}$ nabývá v $(\widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{t_0}, \widehat{t_1})$ *silného minima.*[5] Úlohou optimálního řízení se pak rozumí nalézt optimální řízený proces.

[3] Při řízení můžeme například využít pouze stavu zapnuto – vypnuto.

[4] V [37] se předpokládá, že x je funkce absolutně spojitá, což je v našem případě splněno.

[5] Již jsme v tomto textu zavedli optimální proces ve slabém smyslu, srv. str. 109. Pokud jako dříve do okolí bodu $\widehat{x} \in PC^1([t_0, t_1])$ zahrneme takové prvky x, pro které jsou rozdíly $x(t) - \widehat{x}(t)$ i rozdíly $\dot{x}(t) - \dot{\widehat{x}}(t)$ malé, pak prvky x z tohoto okolí mohou být vzájemně dosti vzdálené. Opravdu, jestliže derivace $\dot{\widehat{x}}$ má skok o velikosti δ v nějakém bodě, pak žádná z funkcí $x \in C^1([t_0, t_1])$ nemůže pro všechna t, pro která $\widehat{x}(t)$ existuje, splňovat nerovnost $|\dot{x}(t) - \dot{\widehat{x}}(t)| < \delta/2$. To je pro účely definice optimálního procesu obecně nevhodné. Proto se požaduje pouze porovnání samotných funkcí a nikoliv jejich derivací a dochází k nahrazení pojmu *slabého minima* pojmem *silného minima* a ke změně definice optimálního procesu.

Chceme tedy nalézt takový řízený proces, při kterém účelový funkcionál $\mathcal{J}$ nabývá své minimální hodnoty vzhledem k (4.2.1), (4.2.4), (4.2.5) a (4.2.6). Stručně budeme psát

$$\min(\mathcal{J}(x,u,t_0,t_1)|\ x \in M_1,\ u \in M_2,\ t_1 > t_0), \tag{4.2.12}$$

kde

$$M_1 = \{x \in PC^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)|\ \dot{x} = f(t,x,u),\\ g_0(t_0,x(t_0)) = 0,\ g_1(t_1,x(t_1)) = 0,\ u \in M_2\}, \tag{4.2.13}$$

$$M_2 = \{u \in PC([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)|\ u(t) \in U\}. \tag{4.2.14}$$

Poznámka 4.2.1. V ekonomických aplikacích je často třeba hledat maximum účelového funkcionálu místo jeho minima. V tomto případě lze však postupovat stejně jako při hledání minima, platí totiž

$$\max \mathcal{J}(x,u,t_0,t_1) = -\min\ (-\mathcal{J}(x,u,t_0,t_1)).$$

4.3 Úloha s volným koncem – základní úloha optimálního řízení

Při hledání nutné podmínky pro minimum v Lagrangeově úloze byla použita věta o multiplikátorech na Banachových prostorech. Budeme-li však pracovat s řízením, které je po částech spojitou funkcí, není takový přístup bezprostředně možný, protože prostor po částech spojitých funkcí netvoří Banachův prostor. V tomto oddílu proto využijeme jiný postup.

Změníme-li v nějakém čase optimální řízení, dojde ke zvětšení hodnoty účelového funkcionálu. Protože připouštíme, že řízení není spojitá funkce a nabývá např. pouze hodnot $u(t) \in \{0,1\}$, může dojít k významné změně trajektorie soustavy, která může vést k velké změně hodnoty účelového funkcionálu. Abychom i za této situace mohli pracovat s malými změnami hodnoty účelového funkcionálu, budeme předpokládat, že změna řízení bude provedena na krátkém časovém intervalu. Lze očekávat, že vliv takové změny na trajektorii soustavy bude malý. V následujícím odstavci bude tato myšlenka specifikována. Budeme přitom vycházet z [37], [1] a [52].

4.3.1 Úloha s terminálním funkcionálem

Uvažujme úlohu, ve které je účelový funkcionál tvořen pouze terminálním funkcionálem. Nechť t_0 je pevně daný počáteční okamžik a $x(t_0)$ pevně daný počáteční stav. Dále označme t_1 pevně daný koncový čas a $x(t_1)$ koncový stav, pro který není předepsána žádná podmínka. Půjde tedy o úlohu s pevným časovým horizontem, volným koncem a terminálním funkcionálem. Podrobněji, budeme se zabývat úlohou:

$$\min(\mathcal{J}(x,u)|\ x \in M_1, u \in M_2), \tag{4.3.1}$$

kde

$$\mathcal{J}(x,u) = g(x(t_1)), \tag{4.3.2}$$

$$M_1 = \{x \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) |\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0,\ u \in M_2\} \tag{4.3.3}$$

a

$$M_2 = \{u \in PC([t_0, t_1]), \mathbb{R}^m |\ u(t) \in U\}. \tag{4.3.4}$$

Budeme předpokládat, že $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, které je na svém definičním oboru spojitě diferencovatelné vzhledem k proměnným t a x.

Připomeňme, že odezvou $\tilde{x}(\cdot)$ k danému přípustnému řízení $\tilde{u}(\cdot)$ bylo nazváno jednoznačně určené řešení počátečního problému:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t)), t \in [t_0, t_1] \tag{4.3.5}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4.3.6}$$

Poznámka 4.3.1. Řešením (4.3.5) rozumíme spojitou funkci, pro kterou v bodech spojitosti řízení $\tilde{u}$ platí vztah (4.3.5). Podrobněji viz definice 2.1.2.

Aby bylo možné posoudit, zda je nějaký proces optimální, je třeba zjistit, jak se změní odezva, jestliže se na krátkém intervalu změní řízení. Zaveďme nejdříve nové pojmy.

Definice 4.3.1. Nechť $\tau \in (t_0, t_1)$ je libovolný pevně zvolený bod, ve kterém je přípustné řízení $\tilde{u}(\cdot)$ spojité. Nechť $v \in U$ je pevně zvolená hodnota řízení. Vyberme $\varepsilon > 0$ takové, že $t_0 < \tau - \varepsilon < \tau$. Řízení

$$u(t, \varepsilon) = \begin{cases} v, & t \in [\tau - \varepsilon, \tau), \\ \tilde{u}(t), & \text{jinak}, \end{cases} \tag{4.3.7}$$

nazveme *elementární jehlovitou variací řízení* $\tilde{u}(\cdot)$. Nechť $x(t, \varepsilon)$ je řešení počátečního problému

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t, \varepsilon)),\ t \geq t_0 \tag{4.3.8}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4.3.9}$$

Toto řešení nazveme *elementární jehlovitou variací odezvy* $\tilde{x}(\cdot)$.

Je-li proces $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ optimální, pak pro libovolnou jehlovitou variaci $x(\cdot, \varepsilon)$ platí

$$\mathcal{J}(x(\cdot, \varepsilon), u(\cdot, \varepsilon)) \geq \mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)),$$

neboli

$$g(x(t_1, \varepsilon)) - g(\widehat{x}(t_1)) \geq 0. \tag{4.3.10}$$

Při změně optimálního řízení dojde ke změně odezvy a půjde nám o to, abychom porozuměli, jak výběr $\tau \in (t_0, t_1)$ a $v \in U$ pro dostatečně malá $\varepsilon > 0$ změní $x(\cdot, \varepsilon)$ v porovnání s $\widehat{x}(\cdot)$. Tuto informaci pak využijeme k tomu, abychom podrobněji zapsali podmínku (4.3.10). Úvahu rozdělíme do několika částí.

Lemma 4.3.1. *Nechť $\tilde{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ je libovolně zvolené přípustné řízení, $\tau \in (t_0, t_1)$ je libovolný bod, ve kterém je $\tilde{u}$ spojité a $\tilde{x}(t)$ je řešením rovnice*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t)),\ t \geq \tau \tag{4.3.11}$$

s počáteční podmínkou

$$\tilde{x}(\tau) = x_\tau.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ *a* $x(t,\varepsilon)$ *je řešení stejné rovnice (4.3.11) s počáteční podmínkou*

$$x(\tau,\varepsilon) = x_\tau + \varepsilon y_\tau + o(\varepsilon) \text{ pro } \varepsilon \to 0^+,$$

kde $y_\tau \in \mathbb{R}^n$. *Pak*

$$x(t,\varepsilon) = \tilde{x}(t) + \varepsilon y(t) + o(\varepsilon) \text{ pro } \varepsilon \to 0^+, \tag{4.3.12}$$

na libovolném kompaktním podintervalu intervalu $[\tau, t_1]$, *kde*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= D_2 f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\, y(t),\ t \geq \tau \\ y(\tau) &= y_\tau. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Vztah (4.3.12) znamená, že řešení $x(t,\varepsilon)$ je diferencovatelné podle ε a platí

$$\left.\frac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0^+} = y(t),$$

kde $y(t)$ je řešení rovnice (4.3.13) pro libovolné $y_\tau \in \mathbb{R}^n$. Přistupme nyní k důkazu lemmatu.

Důkaz. Nechť $\varphi(t,\tau,\zeta)$ je řešení (4.3.11) s počáteční podmínkou $x(\tau) = \zeta$. Podle věty o diferencovatelné závislosti řešení na počátečních podmínkách je řešení $\varphi(\cdot,\tau,\zeta)$ diferencovatelné podle proměnné ζ. Tato derivace, kterou označíme $z(t) = D_3\varphi(t,\tau,\zeta)$, splňuje lineární rovnici

$$\dot{z}(t) = D_2 f(t, \varphi(t,\tau,\zeta), \tilde{u}(t)) \cdot z(t),\ t \in [\tau, t_1] \tag{4.3.14}$$

$$z(\tau) = \mathbf{E}, \tag{4.3.15}$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n. Položme $\zeta = x(\tau,\varepsilon)$, takže $x(t,\varepsilon) = \varphi(t,\tau,x(\tau,\varepsilon))$. Podle věty o derivaci složené funkce můžeme psát

$$y(t) = \left.\frac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0^+} = \left.\frac{\partial \varphi(t,\tau,x(\tau,\varepsilon))}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0^+} = D_3\varphi(t,\tau,x(\tau,\varepsilon))\ \left.\frac{\partial x(\tau,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0^+} = z(t) y_\tau,$$

kde $z(t) = D_3\varphi(t,\tau,\tilde{x}(\tau))$ je řešení rovnice (4.3.14). Nyní je zřejmé, že platí

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= D_2 f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \cdot y(t),\ t \in [\tau, t_1] \\ y(\tau) &= y_\tau. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.3.2. *Nechť* $\tilde{x}(t)$ *je řešení počátečního problému (4.3.5), (4.3.6) a* $x(t,\varepsilon)$ *je řešení počátečního problému (4.3.8), (4.3.9). Pak*

$$x(t,\varepsilon) = \tilde{x}(t) + \varepsilon y(t) + o(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0^+ \tag{4.3.16}$$

na kompaktních podintervalech intervalu $[t_0, \infty)$. *V (4.3.16) je y je spojitá funkce, pro kterou platí*

$$y(t) = 0,\ t \in [t_0, \tau] \tag{4.3.17}$$

a v bodech spojitosti řízení $\tilde{u}$ pro y platí

$$\dot{y}(t) = D_2 f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) y(t), \; t \geq \tau \tag{4.3.18}$$
$$y(\tau) = y_\tau, \tag{4.3.19}$$

kde

$$y_\tau = f(\tau, \tilde{x}(\tau), v) - f(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)). \tag{4.3.20}$$

Důkaz. Úvahu rozdělíme do několika kroků. Postupně budeme zjišťovat vztah $x(t,\varepsilon)$ a $\tilde{x}(t)$ na intervalech $[t_0, \tau - \varepsilon]$, $[\tau - \varepsilon, \tau]$ a $[\tau, t_1]$.

• Oba počáteční problémy (4.3.5), (4.3.6) a (4.3.8), (4.3.9) mají na intervalu $[t_0, \tau - \varepsilon]$ stejnou pravou stranu i stejnou počáteční podmínku. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejné diferenciální rovnice tedy

$$x(t, \varepsilon) = \tilde{x}(t), \; t \in [t_0, \tau - \varepsilon]$$

a platí (4.3.16), (4.3.17).

• Uvažujme počáteční problém

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), v),$$
$$x(s) = \xi$$

a jeho řešení označme $\Phi(t, s, \xi)$. Podle věty o lokální existenci a jednoznačnosti existuje $\delta > 0$ tak, že řešení $\Phi(t, s, \xi)$ existuje na $[s, s + \delta]$. Zvolme $\varepsilon < \delta$ a položme $s = \tau - \varepsilon$, $\xi = \tilde{x}(\tau - \varepsilon)$. Nyní pro $t \in [\tau - \varepsilon, \tau]$ platí $x(t, \varepsilon) = \Phi(t, \tau - \varepsilon, \tilde{x}(\tau - \varepsilon))$.

• Protože řízení $\tilde{u}(t)$ je spojité v bodě $t = \tau$ a je to po částech spojitá funkce, je spojité také na nějakém okolí bodu τ. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\tilde{u}(t)$ je spojité na $[\tau - \varepsilon, \tau]$, pak

$$|f(t, x(t, \varepsilon), v) - f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))| \leq K$$

na $[\tau - \varepsilon, \tau]$ pro nějaké $K > 0$. Pro $t \in [\tau - \varepsilon, \tau]$ lze nyní psát

$$|x(t, \varepsilon) - \tilde{x}(t)| = \left| \int_{\tau - \varepsilon}^{t} f(s, x(s, \varepsilon), v) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{u}(s)) ds \right| \leq K\varepsilon.$$

To znamená, že pro $t \in [\tau - \varepsilon, \tau]$ platí (4.3.16), (4.3.17).

• Na intervalu $[\tau - \varepsilon, \tau]$ je spojitá také $\dot{\tilde{x}}(t)$ a lze psát

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}(\tau - \varepsilon) + \varepsilon \dot{\tilde{x}}(\tau - \varepsilon) + o(\varepsilon) = \tilde{x}(\tau - \varepsilon) + \varepsilon f(\tau - \varepsilon, \tilde{x}(\tau - \varepsilon), \tilde{u}(\tau - \varepsilon)) + o(\varepsilon).$$

Podobně také

$$x(\tau, \varepsilon) = \tilde{x}(\tau - \varepsilon) + \varepsilon f(\tau - \varepsilon, \tilde{x}(\tau - \varepsilon), v) + o(\varepsilon).$$

To znamená, že limita

$$y_\tau = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{x(\tau, \varepsilon) - \tilde{x}(\tau)}{\varepsilon} \tag{4.3.21}$$

existuje a platí

$$y_\tau = f(\tau, \tilde{x}(\tau), v) - f(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)). \tag{4.3.22}$$

Získali jsme tak (4.3.20). Všimněme si, že (4.3.21) lze psát ve tvaru

$$x(\tau, \varepsilon) = \tilde{x}(\tau) + \varepsilon y_\tau + o(\varepsilon), \; \varepsilon \to 0^+, \tag{4.3.23}$$

který nám umožní další úvahy.
• Pro $t \geq \tau$ řeší $\tilde{x}(\cdot)$ a $x(\cdot,\varepsilon)$ stejnou diferenciální rovnici. Oba problémy se však liší v počátečních podmínkách, pro které platí (4.3.23). Podle lemmatu 4.3.1 platí

$$x(t,\varepsilon) = \tilde{x}(t) + \varepsilon y(t) + o(\varepsilon),\ t \geq \tau,$$

kde $y(\cdot)$ je dána (4.3.13), což je (4.3.18). □

Lemma 4.3.3. *Nechť $\psi \in PC^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ je řešení adjungované rovnice (AR):*

$$\dot{\psi}(t) = -[D_2 f(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))]^\top \psi(t),\ t \in [t_0,t_1] \tag{4.3.24}$$

s podmínkou transverzality (PT):

$$\psi(t_1) = -[Dg(\tilde{x}(t_1))]^\top, \tag{4.3.25}$$

pak

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{J}(x(\cdot,\varepsilon),u(\cdot,\varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=0+} = -\psi(\tau)^\top y(\tau),$$

kde $y(\tau)$ je určeno (4.3.20).

Důkaz. Použijeme-li lemma 4.3.2 a Taylorův rozvoj funkce se středem v $\varepsilon = 0$, je

$$\mathcal{J}(x(\cdot,\varepsilon),u(\cdot,\varepsilon)) = g(x(t_1,\varepsilon)) = g(\tilde{x}(t_1)+\varepsilon y(t_1)+o(\varepsilon)) = g(\tilde{x}(t_1))+\varepsilon Dg(\tilde{x}(t_1))y(t_1)+o(\varepsilon),$$

kde $y(\cdot)$ splňuje (4.3.17) a (4.3.18), (4.3.19). Použijeme-li uvedený vztah a předpoklad (4.3.25), můžeme postupně psát

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{J}(x(\cdot,\varepsilon),u(\cdot,\varepsilon))\bigg|_{\varepsilon=0+} = Dg(\tilde{x}(t_1))\,y(t_1) = -\psi(t_1)^\top y(t_1).$$

Chceme ukázat, že tato rovnost platí s hodnotou τ. K tomu stačí ukázat, že funkce $\psi(t)^\top y(t)$ je konstantní na $[\tau,t_1]$. Použijeme-li (4.3.18) a (4.3.24), lze psát

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\psi(t)^\top y(t)] &= \dot{\psi}(t)^\top y(t) + \psi(t)^\top \dot{y}(t)\\ &= -\psi(t)^\top D_2 f(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))y(t) + \psi(t)^\top D_2 f(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))y(t) = 0.\end{aligned}$$

Funkce $\psi(t)^\top y(t)$ je tedy na (τ,t_1) konstantní. Protože je tato funkce na $[\tau,t_1]$ spojitá, platí

$$-\psi(t_1)^\top y(t_1) = -\psi(\tau)^\top y(\tau).$$

□

Nyní přistoupíme k závěrečným poznámkám. Abychom mohli snadněji formulovat nutnou podmínku pro úlohu (4.3.1)–(4.3.4), zavedeme pro tuto úlohu Hamiltonovu funkci

$$H(t,x,u,\psi) = \psi(t)^\top f(t,x(t),u(t)). \tag{4.3.26}$$

Věta 4.3.4. *Nechť $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ je optimální proces úlohy (4.3.1)–(4.3.4) a H je Hamiltonova funkce (4.3.26), pak pro řešení $\psi \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ adjungované rovnice (AR)*

$$\dot{\psi}(t) = -[D_2 H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \psi)]^\top,\ t \in [t_0, t_1]$$

s podmínkou transverzality (PT)

$$\psi(t_1) = -[Dg(\widehat{x}(t_1))]^\top,$$

platí v bodech spojitosti řízení $\widehat{u}(\cdot)$ princip maxima (PM)

$$H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \psi(t)) = \max(H(t, \widehat{x}(t), u(t), \psi(t)))|\ u \in M_2) \qquad (4.3.27)$$

Důkaz. Nejdříve si uvědomme, že uvedený tvar adjungované rovnice je (4.3.24) zapsaný pomocí Hamiltonovy funkce pro optimální řízení $\widehat{u}$ a jeho odezvu $\widehat{x}$.

Ukažme, že platí princip maxima. Uvažujme libovolné a pro účely této úvahy pevné $\tau \in (t_0, t_1)$, ve kterém je optimální řízení $\widehat{u}(t)$ spojité. Mějme dále libovolný prvek $v \in U$. Protože předpokládáme, že $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ je optimální proces dané úlohy a platí (4.3.16), nabývá funkcionál

$$\varepsilon \mapsto \mathcal{J}(x(\cdot, \varepsilon), u(\cdot, \varepsilon))$$

svého minima na $[0,\ \tau - t_0]$ pro $\varepsilon = 0$. To znamená, že

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{J}(\widehat{x}(\cdot, \varepsilon), \widehat{u}(\cdot, \varepsilon))\right|_{\varepsilon = 0+} \geq 0.$$

Vyjádříme-li levou stranu v předchozím vztahu podle lemmatu 4.3.3, platí

$$-\psi(\tau)^\top (f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) - f(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau)) \geq 0.$$

Tento vztah lze pomocí (4.3.26) psát jako

$$\begin{aligned} H(t, \widehat{x}(t), v, \psi(t)) &= \psi(\tau)^\top f(\tau, \widehat{x}(\tau), v) \\ &\leq \psi(\tau)^\top f(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{u}(\tau)) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \psi(t)), \end{aligned}$$

který platí pro libovolné τ, ve kterém je řízení $\widehat{u}(\cdot)$ spojité a pro libovolné $v \in U$. Tedy platí (4.3.27). □

4.3.2 Úloha s integrálním funkcionálem

Účelový funkcionál v předchozím oddílu obsahoval pouze terminální člen. Aby bylo možné řešit i úlohy s integrálním funcionálem, rozšíříme základní úlohu (4.3.1)–(4.3.4) a místo funkcionálu (4.3.2) budeme uvažovat smíšený funkcionál

$$\mathcal{J}(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + g(x(t_1)). \qquad (4.3.28)$$

To znamená, že se budeme zabývat úlohou

$$\min(\mathcal{J}(x, u)|x \in M_1, u \in M_2), \qquad (4.3.29)$$

kde

$$M_1 = \{x \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)|\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, u \in M_2\} \tag{4.3.30}$$

a

$$M_2 = \{u \in PC([t_0, t_1]), \mathbb{R}^m|\ u(t) \in U\}. \tag{4.3.31}$$

Zobrazení f a funkce g mají stejné vlastnosti, jako v předchozí úloze a funkce $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitá a na svém definičním oboru spojitě diferencovatelná vzhledem k proměnným t a x.

Nahradíme–li Hamiltonovu funkci (4.3.26) pro úlohu (4.3.1)–(4.3.4) funkcí

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = -f_0(t, x(t), u(t)) + \psi(t)^\top f(t, x(x), u(t)), \tag{4.3.32}$$

lze nutnou podmínku pro úlohu (4.3.28)–(4.3.31) formulovat stejně jako ve větě 4.3.4.

Věta 4.3.5. *Nechť $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ je optimální proces úlohy (4.3.28)–(4.3.31) a H je Hamiltonova funkce (4.3.32), pak pro řešení $\psi \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ adjungované rovnice (AR)*

$$\dot{\psi}(t) = -[D_2 H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \psi)]^\top,\ t \in [t_0, t_1]$$

s podmínkou transverzality (PT)

$$\psi(t_1) = -[Dg(\widehat{x}(t_1))]^\top,$$

platí v bodech spojitosti řízení $\widehat{u}(\cdot)$ princip maxima (PM)

$$H(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \psi(t)) = \max(H(t, \widehat{x}(t), u(t), \psi(t)))|\ u \in M_2) \tag{4.3.33}$$

Při důkazu věty použijeme trik, který danou úlohu převede na úlohu s terminálním funkcionálem, pro kterou platí věta 4.3.4.

Důkaz. Pro účely tohoto důkazu uvažujme řešení $x^0 : [t_0,\ t_1] \to \mathbb{R}$ počátečního problému

$$\begin{gathered} \dot{x}^0(t) = f_0(t, x(t), u(t)),\ t \in [t_0, t_1] \\ x^0(t_0) = 0. \end{gathered}$$

Zaveďme následující značení

$$\begin{gathered} \overline{x}(t) = \begin{pmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\ \overline{f}(t, \overline{x}(t), u(t)) = \begin{pmatrix} f_0(t, x(t), u(t)) \\ f(t, x(t), u(t)) \end{pmatrix}, \\ \overline{g}(\overline{x}(t)) = g(x(t)) + x^0(t). \end{gathered}$$

Nyní lze úlohu (4.3.29)–(4.3.31) psát ve tvaru

$$\min(\overline{\mathcal{J}}(\overline{x}, u)|\ \overline{x} \in \overline{M}_1, u \in M_2), \tag{4.3.34}$$

kde

$$\overline{\mathcal{J}}(\overline{x}, u) = \overline{g}(\overline{x}(t_1)), \tag{4.3.35}$$

$$\overline{M}_1 = \{\overline{x} \in PC^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^{n+1})|\ \dot{\overline{x}}(t) = \overline{f}(t,\overline{x}(t),u(t)), \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, u \in M_2\} \qquad (4.3.36)$$

$$M_2 = \{u \in PC([t_0,t_1]),\mathbb{R}^m|\ u(t) \in U\}, \qquad (4.3.37)$$

což je úloha (4.3.1)–(4.3.4), pro kterou platí věta 4.3.4. Pro takto upravenou úlohu napišme Hamiltonovu funkci. Je

$$\overline{H}(t,\overline{x}(t),u(t),\overline{\psi}(t)) = \overline{\psi}(t)^\top\ \overline{f}(t,\overline{x}(t),u(t)) = \sum_{i=0}^{n} \overline{\psi}_i(t)\overline{f}_i(t,\overline{x}(t),u(t)),$$

kde $\overline{\psi} : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ je funkce, pro kterou platí adjungovaná rovnice

$$\dot{\overline{\psi}}(t) = -[D_2\overline{H}(t,\widehat{\overline{x}}(t),\widehat{u}(t),\overline{\psi}(t)]^\top$$

s podmínkou transverzality

$$\overline{\psi}(t_1) = -[D\overline{g}(\widehat{\overline{x}}(t_1))]^\top.$$

Protože v definici zobrazení $\overline{f}$ se $x^0(\cdot)$ explicitně nevyskytuje, lze psát

$$\dot{\overline{\psi}}_0(t) = \frac{\partial}{\partial x^0}\overline{H}(t,\overline{x}(t),u(t),\overline{\psi}(t)) = 0.$$

To znamená, že $\overline{\psi}_0(t)$ je na $[t_0,t_1]$ konstantní. Dále

$$\overline{\psi}_0(t_1) = -\frac{\partial}{\partial x^0}\overline{g}(\widehat{\overline{x}}(t_1)) = -1.$$

Odtud je zřejmé, že

$$\overline{\psi}_0(t) = -1 \text{ na } [t_0,\ t_1]$$

a Hamiltonova funkce má tvar

$$\overline{H}(t,\overline{x}(t),u(t),\overline{\psi}(t)) = -f_0(t,x(t),u(t)) + \psi(t)^\top f(t,x(t),u(t)),$$

což je (4.3.32). Nyní lze nahlédnout, že $\psi(\cdot)$ splňuje adjungovanou rovnici i podmínku transverzality. Podle věty 4.3.4 splňuje (4.3.32) princip maxima. □

Poznámka 4.3.2. Uvažujme úlohu (4.3.29)–(4.3.31), ve které je $g(x(t_1)) = 0$. Pomocí značení zavedeného v předchozím důkazu lze tuto úlohu interpretovat geometricky. Je

$$\mathcal{J}(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt = x^0(t_1).$$

Úlohu nalézt minimum účelového funkcionálu, lze nyní formulovat jako úlohu, při které je třeba nalézt takové řízení $\widehat{u}(\cdot)$, které převede soustavu $\dot{\overline{x}}(t) = \overline{f}(t,\overline{x}(t),u(t))$

$$\text{z bodu } \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \text{ do bodu } \begin{pmatrix} x^0(t_1) \\ x(t_1) \end{pmatrix}$$

s minimální souřadnicí $x^0(t_1)$, srv. [60] a [11].

4.4 Pontrjaginův princip maxima

V předchozí části jsme se zabývali úlohou teorie optimálního řízení s pevným časem a volným koncem. Tuto úlohu nyní rozšíříme a podle [37] formulujeme nutné podmínky pro minimum v úloze, která neobsahuje ohraničení fázové proměnné typu (4.2.3). Budeme se tedy zabývat následující úlohou: pro funkcionál

$$\mathcal{J}(x,u,t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt \tag{4.4.1}$$

hledáme

$$\min(\mathcal{J}(x,u,t_0,t_1)|\ x\in M_1, u\in M_2, t_0<t_1), \tag{4.4.2}$$

kde

$$\begin{aligned} M_1=\{x\in PC^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)|\ \dot{x}&=f(t,x(t),u(t)),\\ &g_0(t_0,x(t_0))=0,\ g_1(t_1,x(t_1))=0,\ u\in M_2\} \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

$$M_2=\{u\in PC([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)|\ u(t)\in U\}. \tag{4.4.4}$$

O funkcích f, f_0, g_0 a g_1 budeme předpokládat, že splňují podmínky uvedené v 4.2.3 až 4.2.5. Abychom mohli napsat nutnou podmínku pro řešení této úlohy, zavedeme *Hamiltonovu funkci*

$$H(t,x(t),u(t),\psi_0,\psi(t))=-\psi_0 f_0(t,x(t),u(t))+\psi(t)^\top f(t,x(t),u(t)), \tag{4.4.5}$$

kde $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ a $\psi_0\in\mathbb{R}$ a *hamiltonián*

$$\mathcal{H}(t,x,\psi_0,\psi)=\sup_{u\in U} H(t,x,u,\psi_0,\psi). \tag{4.4.6}$$

Věta 4.4.1. *Nechť $(\widehat{x},\widehat{u})$ je optimální proces úlohy (4.4.1)–(4.4.4) definovaný na $[\widehat{t_0},\widehat{t_1}]$. Pak existuje číslo $\psi_0\geq 0$, vektory $\chi_0\in\mathbb{R}^{s_0}$, $\chi_1\in\mathbb{R}^{s_1}$ a funkce $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, které nejsou současně nulové, takové, že platí*

(i) adjungovaná rovnice (AR)

$$\dot{\psi}=-[D_2H(t,\widehat{x},\widehat{u},\psi_0,\psi)]^\top, \tag{4.4.7}$$

(ii) podmínky transverzality (PT)

$$\psi(\widehat{t_0})=[Dg_0(\widehat{t_0},\widehat{x}(\widehat{t_0}))]^\top\chi_0, \tag{4.4.8}$$

$$\psi(\widehat{t_1})=-[Dg_1(\widehat{t_1},\widehat{x}(\widehat{t_1}))]^\top\chi_1, \tag{4.4.9}$$

(iii) princip maxima (PM)

$$H(t,\widehat{x},\widehat{u},\psi_0,\psi)=\max_{u\in U} H(t,\widehat{x},u,\psi_0,\psi)=\mathcal{H}(t,\widehat{x},\psi_0,\psi), \tag{4.4.10}$$

pro všechna $t\in[\widehat{t_0},\widehat{t_1}]$, ve kterých je řízení $\widehat{u}$ spojité, *(iv) hamiltonián $\mathcal{H}(t, \widehat{x}, \psi_0, \psi)$, je spojitý na $[\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$ a v koncových bodech tohoto intervalu platí*

$$\mathcal{H}(\widehat{t}_0, \widehat{x}(\widehat{t}_0), \psi_0, \psi(\widehat{t}_0)) = -\widehat{g}_0^\top \chi_0, \tag{4.4.11}$$

$$\mathcal{H}(\widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1), \psi_1, \psi(\widehat{t}_1)) = \widehat{g}_1^\top \chi_1, \tag{4.4.12}$$

kde

$$\widehat{g}_0 = \frac{\partial}{\partial t} g_0(t, \widehat{x}(t))\Big|_{t=\widehat{t}_0} \quad a \quad \widehat{g}_1 = \frac{\partial}{\partial t} g_1(t, \widehat{x}(t))\Big|_{t=\widehat{t}_1}.$$

Důkaz. Lze nalézt v [37] na stranách 158 až 171. □

Poznámka 4.4.1. Adjungovanou rovnici lze podrobněji psát ve tvaru

$$\dot{\psi} = \psi_0 (D_2 f_0(t, \widehat{x}, \widehat{u}))^\top - (D_2 f(t, \widehat{x}, \widehat{u}))^\top \psi. \tag{4.4.13}$$

Poznámka 4.4.2. Lze nahlédnout, že (AR) i (PM) jsou lineární pro ψ_0 a ψ. To znamená, že pokud $(\widehat{x}, \widehat{u})$ je optimální řízený proces s nějakými ψ_0 a $\psi(\cdot)$, pak $(\widehat{x}, \widehat{u})$ je optimální řízený proces také pro $c\psi_0$ a $c\psi(\cdot)$, kde $c > 0$. Stačí tedy uvažovat pouze dvě možnosti pro volbu ψ_0 : buď $\psi_0 = 0$ nebo $\psi_0 = 1$.

Poznámka 4.4.3. Jedná-li se o úlohu s pevným počátkem, položíme $g_0(x) = x - x_0,\ x \in \mathbb{R}^n$. Pak $Dg_0(x(t_0)) = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n. Odtud máme (PT) ve tvaru $\psi(t_0) = \chi_0 \in \mathbb{R}^n$. Protože však χ_0 neznáme, nezískáme takto žádnou informaci pro $\psi(t_0)$.

Poznámka 4.4.4. Jedná-li se o úlohu s volným koncem, položíme $g_1(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$. Pak $Dg_1(x(t_1)) = 0$ a (PT) má tvar

$$\psi(t_1) = 0. \tag{4.4.14}$$

Jedná-li se o úlohu s pevným koncem, platí podobné tvrzení jako v poznámce 4.4.3.

Poznámka 4.4.5. Uvažujme, že se jedná o úlohu s pevným počátečním časem, pak položíme $g_0(t) = t - t_0$. Z podmínky (4.4.11) získáme

$$\mathcal{H}(t_0, \widehat{x}(t_0), \psi_0, \psi(t_0)) = \chi_0 \in \mathbb{R}.$$

To je však neznámá konstanta.

Poznámka 4.4.6. Jde–li o úlohu s volným koncovým časem, položíme $g_1(t) = 0$. Z podmínky (4.4.12) získáme

$$\mathcal{H}(\widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1), \psi_0, \psi(\widehat{t}_1)) = 0.$$

Pomocí tohoto vztahu lze nalézt optimální hodnotu koncového času $\widehat{t}_1$. Jedná–li se o úlohu s pevným koncovým časem, platí podobné tvrzení jako v poznámce 4.4.5.

4.5 Použití Pontrjaginova principu maxima

Existuje celá řada ekonomických nebo manažerských úloh, ve kterých je vhodné Pontrjaginův princip maxima použít. Některé z nich lze nalézt v knihách [75], [15], [74], [12], [41] nebo [29] . V této sekci se soustředíme na dvě elementární aplikace, na kterých použití principu maxima ilustrujeme.

4.5.1 Nepoctivý živnostník

Tato úloha vychází z cvičení 7.8 uvedeném v [33]. Uvažujme živnostníka, který v čase $t = 0$ vlastní majetek ve výši x_0 Kč. Jeho majetek vyjádřený v Kč v čase $t \geq 0$ označme $x(t)$. Živnostník předpokládá, že majetek, který investuje, přináší zisk s dlouhodobou mírou zisku $k \in (0, 1)$. Protože živnostník není poctivý, přiznává na finančním úřadě pouze relativní část $u(t) \in [0, 1]$ ze svého zisku. To znamená, že relativní část $1 - u(t) \in [0, 1]$ svého zisku si schovává. Znovu investuje pouze tu část, kterou si neschoval a která mu zůstane po zaplacení daně. Označme míru zdanění příjmu $\lambda \in (0, 1)$. Pro okamžitý přírůstek investic v čase t lze psát

$$\dot{x}(t) = k(1 - \lambda)u(t)x(t), \; x(0) = x_0. \tag{4.5.1}$$

Označíme-li $e(t)$ hodnotu jeho schovaného majetku v čase t vyjádřenou v Kč, lze pro okamžitý přírůstek majetku tohoto typu psát

$$\dot{e}(t) = k[1 - u(t)]x(t), \; e(0) = 0. \tag{4.5.2}$$

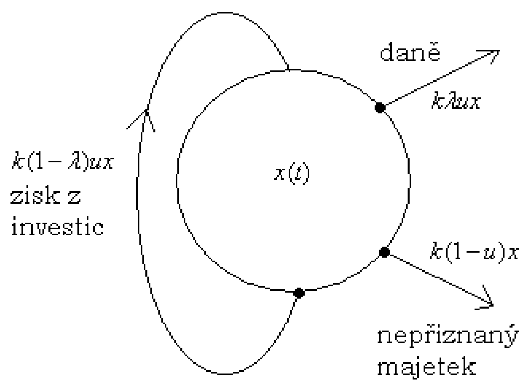
Podobně, označíme-li $f(t)$ hodnotu zaplacených daní v čase t vyjádřenou v Kč, lze pro okamžitý přírůstek zaplacených daních psát

$$\dot{f}(t) = k\lambda u(t)x(t), \; f(0) = 0. \tag{4.5.3}$$

Všimněme si, že pro okamžité tempo hrubého přírůstku majetku živnostníka platí

$$(x(t) + e(t) + f(t))^{\cdot} = \dot{x}(t) + \dot{e}(t) + \dot{f}(t) = kx(t), t \geq 0.$$

Situaci znázorňuje obr. 4.1. Živnostník odhaduje, že za $t_1 > 0$ let zdědí jeho majetek



Obrázek 4.1: Ilustrace finančních toků nepoctivého živnostníka.

potomci. Časový horizont t_1 považuje za známý.

Formulujme první úlohu. Úhrnný majetek živnostníka v čase t_1, který označíme $\mathcal{E}(x, u)$, je celková velikost nepřiznané části zisku $e(t)$ a jeho majetku $x(t)$, který používá pro investice, v čase t_1. Pomocí (4.5.2) můžeme psát

$$\mathcal{E}(x, u) = \int_0^{t_1} k[1 - u(t)]x(t)dt + x(t_1). \tag{4.5.4}$$

Jak by měl živnostník postupovat, aby byl jeho majetek v čase t_1 co největší?

Uvažujme druhou úlohu. Předpokládejme, že jeho veškerý majetek je v čase t_1 zatížen dědickou daní, jejíž hodnotu označme $\mu \in (0,1)$. Vezmeme-li v úvahu tento předpoklad, lze pomocí (4.5.3) vyjádřit celkovou daň ve tvaru

$$\mathcal{F}(x,u) = \int_0^{t_1} k\lambda u(t)x(t)dt + \mu\mathcal{E}(x,u). \tag{4.5.5}$$

Jak by měl živnostník postupovat, aby byla celková daň, která bude zaplacena, co nejnižší?

Maximalizace majetku

První úlohu lze formulovat jako úlohu optimálního řízení s pevným časovým horizontem a volným koncem. Protože jde o úlohu, ve které je třeba nalézt maximální hodnotu funkcionálu (4.5.4), lze ji krátce vyjádřit ve tvaru

$$\min(-\mathcal{E}(x,u)|\, x \in M_1, u \in M_2),$$

kde

$$M_1 = \{x \in PC^1([0,t_1])|\, \dot{x} = k(1-\lambda)ux,\, x(0) = x_0,\, u \in M_2\} \tag{4.5.6}$$

$$M_2 = \{u \in PC([0,t_1])|\, u(t) \in [0,1]\} \tag{4.5.7}$$

a při hledání optimálního procesu použít větu 4.3.5. Sestavme nejdříve Hamiltonovu funkci. Je

$$H(x,u,\psi) = k(1-u)x + \psi k(1-\lambda)ux,$$

kde $\psi : [0,t_1] \to \mathbb{R}$ je adjungovaná funkce. Protože Hamiltonova funkce je lineární vzhledem k proměnné u, lze psát princip maxima ve tvaru

$$k(1-u)\widehat{x} + \psi u(1-\lambda)k\widehat{x} \le k(1-\widehat{u})\widehat{x} + \psi\widehat{u}(1-\lambda)k\widehat{x},\; u \in [0,\, 1].$$

Po úpravě a s přihlédnutím k podmínkám úlohy získáme

$$(\widehat{u}(t) - u(t))[1 - \psi(t)(1-\lambda)] \le 0.$$

Nyní lze uvažovat následující možnosti:

- Je-li $\psi(t) < \dfrac{1}{1-\lambda}$ na $I_1 \subseteq [0,t_1]$, je $\widehat{u}(t) = 0$ v každém bodě $t \in I_1$. Řešení (4.5.1) na intervalu I_1 má tvar
$$\widehat{x}(t) = A,\; t \in I_1, \tag{4.5.8}$$
kde $A \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta.

- Je-li $\psi(t) > \dfrac{1}{1-\lambda}$ na $I_2 \subseteq [0,t_1]$, je $\widehat{u}(t) = 1$ v každém bodě $t \in I_2$. Řešení (4.5.1) na intervalu I_2 je
$$\widehat{x}(t) = B\, e^{k(1-\lambda)t},\; t \in I_2 \tag{4.5.9}$$
kde $B \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta.

Optimální řízení $\widehat{u}(\cdot)$ má konečný počet bodů nespojitosti a vzhledem k uvedeným možnostem se jedná o po částech konstantní funkci, která může nabývat pouze hodnot 0 nebo 1. Adjungovaná rovnice úlohy má tvar

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = -k(1-u) - k(1-\lambda)u\psi.$$

Abychom mohli napsat podmínku transverzality, je třeba uvažovat terminální část cenového funkcionálu $-\mathcal{E}(x,u)$, která má tvar $g(x) = -x$. Podle věty 4.3.5 je pak podmínka transverzality

$$\psi(t_1) = 1. \tag{4.5.10}$$

Všimněme si, že

$$\frac{1}{1-\lambda} > 1.$$

Tato podmínka a podmínka transverality (4.5.10) znamená, že $\widehat{u}(t_1) = 0$. Jak jsme uvedli dříve, je optimální řízení po částech konstantní funkce a adjungovaná rovnice má pro $t \in [t_p, t_1]$, kde $t_p \in [0, t_1)$ je poslední bod nespojitosti optimálního řízení, řešení

$$\psi(t) = -kt + kt_1 + 1. \tag{4.5.11}$$

V závislosti na hodnotách parametrů k a λ lze nyní uvažovat následující dvě možnosti.

Krátký časový horizont. Je-li $t_p = 0$, platí $\psi(t) < \dfrac{1}{1-\lambda}$, $t \in [0, t_1]$. To znamená, že pro všechna $t \in [0, t_1]$ platí

$$-kt + kt_1 + 1 < \frac{1}{1-\lambda}.$$

Odtud získáme podmínku

$$t_1 < \frac{1}{k} \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}. \tag{4.5.12}$$

Tuto podmínku lze interpretovat tak, že úloha je formulována pro krátký časový horizont. Pokud optimální proces úlohy existuje, má tvar $\widehat{u}(t) = 0$, $\widehat{x}(t) = x_0$, $t \in [0, t_1]$. Živnostník tedy veškerý zisk ze svých investic schovává, na finanční úřad nechodí a investuje stále stejné množství peněz. Celková hodnota jeho majetku v čase t_1 je

$$\mathcal{E}(\widehat{x}, \widehat{u}) = (1 + kt_1)x_0.$$

Dlouhý časový horizont. Není-li podmínka (4.5.12) splněna, tj. úloha je formulována pro dlouhý časový horizont, pak v čase $t_p \in (0, t_1)$, pro který podle řešení adjungované rovnice platí

$$-kt_p + kt_1 + 1 = \frac{1}{1-\lambda},$$

tj. v čase

$$t_p = t_1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}, \tag{4.5.13}$$

dojde ke změně hodnoty řízení $\widehat{u}$. Pro $t \leq t_p$, je $\widehat{u}(t) = 1$. Adjungovaná funkce je spojitá, takže

$$\psi(t_p) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Pro $t \leq t_p$ má adjungovaná rovnice řešení

$$\psi(t) = \frac{1}{1-\lambda} e^{k(1-\lambda)(t_p - t)}, \ t \leq t_p.$$

To je klesající funkce proměnné t, takže pro $t < t_p$ platí

$$\psi(t) > \frac{1}{1-\lambda}.$$

To, co bylo uvedeno, znamená, že pokud existuje optimální řízení, má tvar

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_p], \\ 0, & t \in (t_p, t_1], \end{cases}$$

a tomuto řízení odpovídá odezva

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} x_0 e^{k(1-\lambda)t}, & t \in [0, t_p], \\ x_0 e^{k(1-\lambda)t_p}, & t \in (t_p, t_1]. \end{cases}$$

Tyto výsledkky lze interpretovat tak, že živnostník nejdříve neschovává žádnou část ze zisku svých investic, tj. chová se poctivě. Později však naopak schovává vše. Celková hodnota jeho majetku v čase t_1 je

$$\mathcal{E}(\widehat{x}, \widehat{u}) = \int_{t_p}^{t_1} k x_0 e^{k(1-\lambda)t_p} dt + x_0 e^{k(1-\lambda)t_p}.$$

Po úpravě získáme

$$\mathcal{E}(\widehat{x}, \widehat{u}) = \frac{x_0}{1-\lambda} \cdot e^{k(1-\lambda)t_p}.$$

Uvedený rozbor můžeme uzavřít konstatováním, že strategie chování živnostníka je závislá na délce časového horizontu úlohy, která je určena hodnotou $t_1 > 0$. Podmínka, která určuje jeho optimální chování je dána vztahem (4.5.12). Pokud (4.5.12) platí, pak živnostník své veškeré zisky nepřiznává a schovává si je. Pokud podmínka (4.5.12) neplatí, živnostník nejdříve všechny své zisky přiznává, ale v určitém čase, který je dán vztahem (4.5.13), změní své chování a veškeré své zisky začne schovávat.

Minimalizace daní

Také úlohu minimalizace daní s účelovým funkcionálem (4.5.5) lze formulovat jako úlohu optimálního řízení s pevným časovým horizontem a volným koncem. Můžeme ji zapsat ve tvaru

$$\min(\mathcal{F}(x, u) |\, x \in M_1, u \in M_2),$$

kde M_1 a M_2 jsou stejné jako v (4.5.6) a (4.5.7). Pro její řešení použijeme opět větu 4.3.5. Hamiltonova funkce této úlohy má tvar

$$H(x,u,\psi) = -(\lambda ukx + \mu(1-u)kx) + \psi(1-\lambda)ukx.$$

To je lineární funkce proměnné u, takže podle principu maxima můžeme psát

$$\begin{aligned} &-(\lambda u(t)k\widehat{x}(t) + \mu[1-u(t)]k\widehat{x}(t)) + \psi(t)(1-\lambda)u(t)k\widehat{x}(t) \\ &\qquad \le -(\lambda\widehat{u}(t)k\widehat{x}(t) + \mu[1-\widehat{u}(t)]k\widehat{x}(t)) + \psi(t)(1-\lambda)\widehat{u}(t)k\widehat{x}(t). \end{aligned}$$

Po úpravách získáme přehlednější vztah

$$(u(t) - \widehat{u}(t))[\mu - \lambda + \psi(t)(1-\lambda)] \le 0,$$

podle kterého lze uvažovat o následujících možnostech.

- Je-li $\psi(t) < \dfrac{\lambda-\mu}{1-\lambda}$ na $I_1 \subseteq [0,t_1]$, pak pro $t \in I_1$ platí $\widehat{u}(t) = 0$ a řešení (4.5.1) je

  $$\widehat{x}(t) = A,\ t \in I_1,$$

  kde $A \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta.

- Je-li $\psi(t) > \dfrac{\lambda-\mu}{1-\lambda}$ na $I_2 \subseteq [0,t_1]$, pak pro $t \in I_2$ platí $\widehat{u}(t) = 1$ a řešení (4.5.1) je

  $$\widehat{x}(t) = Be^{k(1-\lambda)t},\ t \in I_2,$$

  kde $B \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta.

Protože řízení $\widehat{u}$ má konečný počet bodů nespojitosti, je odtud zřejmé, že optimální řízení je po částech konstantní funkce, která nabývá hodnot 0 nebo 1. Adjungovaná rovnice má podle věty 4.3.5 tvar

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = \lambda ku + \mu k(1-u) - \psi k(1-\lambda)u. \tag{4.5.14}$$

Chceme-li stanovit podmínku transverzality, je třeba uvažovat terminální část účelového funkcionálu, který lze vyjádřit ve tvaru $g(x) = x$. Podle věty 4.3.5 lze nyní napsat podmínku transverzality

$$\psi(t_1) = -\mu. \tag{4.5.15}$$

Všimněme si, že platí

$$\frac{\lambda-\mu}{1-\lambda} = \frac{\lambda - \lambda\mu + \lambda\mu - \mu}{1-\lambda} = \lambda \cdot \frac{1-\mu}{1-\lambda} - \mu > -\mu.$$

Vzhledem k této podmínce a podmínce transverzality (4.5.15), je $u(t_1) = 0$. Protože optimální řízení je po částech konstantní funkce, lze pro $t \in [t_p,\, t_1]$, kde $t_p \in [0,t_1)$ je poslední bod nespojitosti optimálního řízení, lze adjungovanou rovnici (4.5.14) psát ve tvaru

$$\dot{\psi}(t) = \mu k > 0.$$

To znamená, že $\psi(t)$ je na $[t_p,\, t_1]$ rostoucí funkce. Protože $\psi(t_p) < (\lambda-\mu)/(1-\lambda)$, můžeme odtud usoudit, že $t_p = 0$ a pokud má úloha optimální řízení řešení, má optimální proces tvar $\widehat{u}(t) = 0$, $\widehat{x}(t) = x_0$, $t \in [0,\, t_1]$. V tomto případě bude živnostník všechny úroky ze svých investic schovávat a platit daně na finančním úřadě nebude. Celková částka v čase t_1, která bude na daních odvedena, bude

$$\mathcal{F}(\widehat{x}, \widehat{u}) = \int_0^{t_1} \mu k x_0 dt + \mu x_0 = \mu x_0(1 + kt_1).$$

4.5.2 Malý monopolista

Následující úloha je modifikací úlohy uvedené v [88]. Uvažujme, že obchodník vlastní všechny zásoby vzácného značkového vína. Předpokládá, že bude-li tyto zásoby uvolňovat tempem u objemových jednotek za časovou jednotku, může stanovit cenu $p(u)$ Kč za objemovou jednotku, kde

$$p(u) = \begin{cases} 1 - \dfrac{u}{2}, & u \in [0, 2), \\ 0, & u \in [2, \infty). \end{cases}$$

V čase $t = 0$ má zásoby o velikosti $x_0 > 0$ objemových jednotek a tyto zásoby si přeje vyprodat tak, aby maximalizoval svůj diskontovaný příjem

$$\mathcal{P}(u, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-\alpha t} u(t) p(u(t)) dt,$$

kde $\alpha \in (0, 1)$ je diskontní míra a koncový čas t_1 není určen.

Úlohu lze formulovat jako úlohu optimálního řízení s pevným koncem, tj. stav zásob na konci je nulový, a volným časovým horizontem. Okamžité tempo, jakým se snižují zásoby, je rovno tempu prodeje, tj. platí

$$\dot{x}(t) = -u(t),\ x(0) = x_0,\ x(t_1) = 0. \tag{4.5.16}$$

Podle zadání může obchodník zvyšovat svůj příjem, jestliže pro tempo prodeje platí $u(t) \in [0, 2]$. Protože v úloze jde o hledání maxima účelového funkcionálu $\mathcal{P}(u, t_1)$, můžeme psát

$$\min(-\mathcal{P}(u, t_1) |\, x \in M_1, u \in M_2, 0 < t_1),$$

kde

$$M_1 = \{x \in PC^1([0, t_1]) |\, \dot{x} = -u, x(0) = x_0, x(t_1) = 0,\ u \in M_2\}$$
$$M_2 = \{u \in PC([0, t_1]) |\, u(t) \in [0, 2]\}.$$

Pro řešení úlohy použijeme větu 4.4.1. Hamiltonova funkce pro danou úlohu má tvar

$$H(t, x, u, \psi, \psi_0) = \psi_0 e^{-\alpha t} u \left(1 - \frac{u}{2}\right) + \psi(-u),$$

kde $\psi : [0, t_1] \to \mathbb{R}$ je adjungovaná funkce, pro kterou platí adjungovaná rovnice

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t, x, u, \psi, \psi_0)}{\partial x} = 0.$$

Protože ψ je spojitá funkce na $[0, \widehat{t}_1]$, kde $\widehat{t}_1$ je optimální koncový čas, je $\psi(t) = A,\ t \in [0, \widehat{t}_1]$, kde $A \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Počáteční i koncový stav jsou pevné, takže nelze formulovat žádnou podmínku transverzality. Další postup hledání optimálního procesu rozdělíme pro $\psi_0 = 0$ a $\psi_0 = 1$.

- Je-li $\psi_0 = 0$, pak podle věty 4.4.1 $\psi(t) = A \neq 0$, $t \in [0, \widehat{t}_1]$. Hamiltonova funkce má tvar

$$H(t, x, u, \psi) = -\psi u = -Au.$$

To je lineární funkce proměnné u a princip maxima z věty 4.4.1 lze pro $u(t) \in [0, 2]$ psát jako

$$-Au(t) \leq -A\widehat{u}(t),\ t \in [0, \widehat{t}_1],$$

tj.

$$A(u(t) - \widehat{u}(t)) \geq 0.$$

Odtud máme

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} 0, & A > 0, \\ 2, & A < 0. \end{cases}$$

Protože koncový čas úlohy je volný, lze podle poznámky 4.4.6 psát

$$H(\widehat{t}_1, \widehat{x}(\widehat{t}_1), \widehat{u}(\widehat{t}_1)) = -A\widehat{u}(\widehat{t}_1) = 0.$$

Odtud máme $\widehat{u}(\widehat{t}_1) = 0$, protože $A \neq 0$. To znamená, že optimální řízení má tvar

$$\widehat{u}(t) = 0, t \in [0, \widehat{t}_1].$$

Odezva pro takové řízení vyhovuje podle (4.5.16) rovnici $\dot{x}(t) = 0$ s hraničními podmínkami $x(0) = x_0 > 0, x(\widehat{t}_1) = 0$. Tento problém však nemá řešení, takže nalezené řízení není přípustné. To však znamená, že případ $\psi_0 = 0$, můžeme vyloučit.

- Položme $\psi_0 = 1$, pak má Hamiltonova funkce pro $\psi(t) = A$, $t \in [0, \widehat{t}_1]$ tvar

$$H(t, x, u, \psi) = e^{-\alpha t} u \left(1 - \frac{u}{2}\right) - Au. \tag{4.5.17}$$

Vzhledem k proměnné $u \in [0, 2]$ se jedná o kvadratickou funkci se záporným koeficientem u kvadratického členu u^2. Maximum Hamiltonovy funkce vzhledem k proměnné u lze hledat na množině $\{0, u_s, 2\}$, kde u_s je stacionární bod Hamiltonovy funkce vzhledem k proměnné u. Je

$$\frac{\partial H(t, x, u, \psi)}{\partial u} = e^{-\alpha t}(1 - u) - A = 0,$$

odkud máme

$$u_s(t) = 1 - Ae^{\alpha t}.$$

Případ $u = 0$ lze ihned vyloučit, takže pro optimální řízení lze uvažovat tyto případy:

(i) Jestliže pro všechna $t \in [0, \widehat{t}_1]$ platí $0 \leq 1 - Ae^{\alpha t} \leq 2$, je

$$\widehat{u}(t) = 1 - Ae^{\alpha t},\ t \in [0, \widehat{t}_1].$$

(ii) Jestliže pro nějaké $t_p \in (0, \widehat{t_1})$ platí $1 - Ae^{\alpha t_p} = 2$, je $A < 0$ a lze uvažovat

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} 1 - Ae^{\alpha t}, & t \in [0, t_p], \\ 2, & t \in (t_p, \widehat{t_1}]. \end{cases}$$

(iii) Jestliže pro všechna $t \in [0, \widehat{t_1}]$ platí $1 - Ae^{\alpha t} > 2$, je $A < 0$ a lze uvažovat

$$\widehat{u}(t) = 2, t \in [0, \widehat{t_1}].$$

Případy (ii) a (iii) vedou ke sporu s poznámkou 4.4.6 a možností volby konstanty A. Budeme se tedy dále zabývat pouze případem (i). Podle (4.5.17) lze podmínku z poznámky 4.4.6 pro řízení uvedené v (i) psát ve tvaru

$$1 - Ae^{\alpha\widehat{t_1}} = 0 \text{ nebo } e^{-\alpha\widehat{t_1}}\left(1 - \frac{1}{2}(1 - Ae^{\alpha\widehat{t_1}})\right) - A = 0.$$

Odtud máme

$$A = e^{-\alpha\widehat{t_1}}.$$

Optimální řízení uvedené v (i) lze nyní psát jako

$$\widehat{u}(t) = 1 - e^{-\alpha(\widehat{t_1} - t)}, \; t \in [0, \widehat{t_1}], \tag{4.5.18}$$

kde $\widehat{t_1}$ určíme z (4.5.16) jako řešení rovnice

$$x_0 = \int_0^{\widehat{t_1}} u(t)dt = \widehat{t_1} - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\widehat{t_1}}). \tag{4.5.19}$$

Podle uvedených výsledků lze formulovat toto doporučení: Chce-li monopolista maximalizovat svůj příjem z prodeje zásob značkového vína, měl by po dobu určenou vztahem (4.5.19) exponenciálně snižovat tempo uvolňování svých zásob vína tak, aby platil vztah (4.5.18). Může přitom očekávat, že jeho příjem dosáhne hodnoty

$$\mathcal{P}(\widehat{u}, \widehat{t_1}) = \int_0^{\widehat{t_1}} (\widehat{u}(t) - \widehat{u}^2(t)/2)e^{-\alpha t}dt = \frac{(1 - e^{\alpha\widehat{t_1}})^2}{2\alpha}.$$

4.6 Úloha optimálního řízení s nekonečným časovým horizontem

Jedna z oblastí ekonomie, ve které jsou úlohy optimálního řízení využívány, je teorie růstu. Při konstrukci optimálních růstových modelů však nastává problém s výběrem koncového času plánovaného období. Je-li vybrán konečný horizont, je třeba stanovit koncovou hodnotu kapitálu. Tato hodnota je důležitá pro generace žijící po uplynutí uvažovaného období, protože bude počáteční hodnotou pro další plánovací období. Vzhledem k tomu, že neexistuje kritérium, jak tuto koncovou hodnotu kapitálu stanovit a protože proces akumulace kapitálu nemá žádný přirozený koncový okamžik, je běžné, že se v teorii růstu používá fiktivní idea nekonečného časového horizontu. Výběr nekonečného časového horizontu vede ke zjednodušení vztahů a závěrů. Na druhé straně však přináší nové matematické problémy, které je třeba řešit. Tyto problémy lze podle [74] formulovat takto:

(i) Nalézt rozumné kritérium optimality pro účelový funkcionál, který v případě integrálního funkcionálu obsahuje nekonečnou horní mez.

(ii) Nalézt platné terminální podmínky.

Základní úlohu optimálního řízení s nekonečným časovým horizontem a volným koncem lze stručně charakterizovat takto: je třeba nalézt

$$\min(\mathcal{J}(x,u)|\ x \in M_1, u \in M_2), \tag{4.6.1}$$

kde

$$\mathcal{J}(x,u) = \int_{t_0}^{\infty} f_0(t, x(t), u(t))dt, \tag{4.6.2}$$

$$M_1 = \{x \in PC^1([t_0,\infty), \mathbb{R}^n)|\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, u(t) \in M_2\}, \tag{4.6.3}$$

$$M_2 = \{u \in PC([t_0,\infty), \mathbb{R}^m)|\ u(t) \in U\}. \tag{4.6.4}$$

Pro funkce f, f_0 platí stejné předpoklady, které jsme uvedli v oddílech 4.2.3 až 4.2.5.

V oddílu 4.2.6 jsme uvedli definici optimálního procesu pro konečný časový horizont. Pokud však uvažujeme horizont nekonečný, nemusí být pro všechny přípustné procesy účelový funkcionál konečný. To nás nutí přistoupit k modifikaci optimálního procesu.

Definice 4.6.1. Nechť $\mathcal{J}(x,u)$ je účelový funkcionál s nekonečným časovým horizontem. Přípustný řízený proces $(\widehat{x}, \widehat{u})$ se nazývá *silně optimální*, jestliže

(i) hodnota $\mathcal{J}(\widehat{x}, \widehat{u})$ je konečná,

(ii) lze nalézt $\varepsilon > 0$ takové, že pro každý přípustný řízený proces $(x(t),\ u(t))$, pro který $|x(t) - \widehat{x}(t)| < \varepsilon,\ t \in [t_0,\ \infty)$ je splněna nerovnost $\mathcal{J}(\widehat{x}, \widehat{u}) \leq \mathcal{J}(x,u)$.

Poznámka 4.6.1. Podmínku optimality lze formulovat i pro funkcionály, které nejsou konečné. Pro takovou formulaci se nabízí více způsobů, podrobněji viz [13] nebo [74]. Vzhledem k tomu, že v tomto textu s jiným konceptem optimality pracovat nebudeme, budeme místo dlouhé formulace *silně optimální proces* psát krátce *optimální proces*.

V [13] je na str. 26 a dále uveden důkaz obdoby Pontrjaginova principu maxima pro úlohu optimálního řízení s nekonečným časovým horizontem.

Věta 4.6.1. *Nechť $(\widehat{x}, \widehat{u})$ je optimální proces úlohy (4.6.1)–(4.6.4) definovaný na $[t_0, \infty)$. Pak existuje takové číslo $\psi_0 \geq 0$, a taková funkce $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, které nejsou současně nulové, že platí*

(i) adjungovaná rovnice (AR):

$$\dot{\psi} = -[D_2 H(t, \widehat{x}, \widehat{u}, \psi_0, \psi)]^\top, \tag{4.6.5}$$

pro $t \in [t_0, \infty)$, ve kterých je řízení $\widehat{u}$ spojité a kde

$$H(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = -\psi_0 f_0(t, x(t), u(t)) + \psi(t)^\top f(t, x(t), u(t)), \tag{4.6.6}$$

je Hamiltonova funkce,

(ii) princip maxima (PM): pro všechna $t \in [\widehat{t}_0, \widehat{t}_1]$, ve kterých je řízení $\widehat{u}$ spojité, platí

$$H(t, \widehat{x}, \widehat{u}, \psi_0, \psi) = \max(H(t, \widehat{x}, u, \psi_0, \psi) |\, u \in U) \tag{4.6.7}$$

Poznámka 4.6.2. Věta 4.6.1 v obecnosti neposkytuje dostatek podmínek pro určení optimálního řešení, protože neobsahuje podmínky transverzality. V případě, že jde o úlohu optimálního řízení s konečným časovým horizontem a volným koncem, platí podmínka transverzality ve tvaru $\psi(t_1) = 0$, srv. poznámku 4.4.4. Pro úlohu s nekonečným časovým horizontem se tedy nabízí podmínka transverzality ve tvaru $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Jak je však ukázáno v [13] nebo v [12], kde je uveden tzv. Halkinův příklad, tato podmínka obecně neplatí.

V ekonomických aplikacích se často vyskytují úlohy, ve kterých účelový funkcionál obsahuje diskontní faktor $r \in [0, 1)$ a má tvar

$$\mathcal{J}(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} f_0(t, x(t), u(t))dt. \tag{4.6.8}$$

Poznámka 4.6.3. Předpokládejme, že $f_0(t, x(t), u(t))$ z (4.6.8) reprezentuje hodnotu důchodu vyplaceného v okamžiku $t \in [t_0, \infty)$. Podle poznámky 1.1.4 představuje hodnota funkcionálu (4.6.8) současnou hodnotu úhrnného důchodu vypláceného v časovém intervalu $[t_0, \infty)$.

Jak ukazuje následující věta, lze podmínku (i) z definice 4.6.1 pro účelový funkcionál s diskontním faktorem snadno splnit.

Věta 4.6.2. *Nechť $\mathcal{J}(x, u)$ je účelový funkcionál (4.6.8) s nekonečným časovým horizontem a diskontním faktorem $r \in [0, 1)$ a nechť f_0 je omezená funkce, tj. existuje $B > 0$ tak, že pro libovolné $t \in [t_0, \infty)$ platí $|f_0(t, x(t), u(t))| \leq B$. Pak je hodnota $\mathcal{J}(x, u)$ konečná a platí*

$$|\mathcal{J}(x, u)| \leq \frac{B}{r} e^{-rt_0}.$$

Důkaz. Jde o přímý důsledek vlastností integrálu.

$$|\mathcal{J}(x, u)| \leq \int_{t_0}^{\infty} |e^{-rt} f_0(t, x(t), u(t))|dt \leq B \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} dt = \frac{B}{r} e^{-rt_0}.$$

□

Budeme-li v (4.6.8) uvažovat funkci f_0, která explicitně nezávisí na proměnné t, tj. funkci $f_0(x(t), u(t))$, lze ukázat, že pro úlohu s tímto typem funkcionálu je možné nalézt obecnou podmínku transverzality. Uvažujme tedy úlohu

$$\min(\mathcal{J}(x, u) |\, x \in M_1, u \in M_2), \tag{4.6.9}$$

kde

$$\mathcal{J}(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} f_0(x(t), u(t))dt, \tag{4.6.10}$$

$$M_1 = \{x \in PC^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^n) |\, \dot{x} = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0,\ u(t) \in M_2\}, \tag{4.6.11}$$

$$M_2 = \{u \in PC([t_0, \infty), \mathbb{R}^m) |\, u(t) \in U\}. \tag{4.6.12}$$

Pro tuto úlohu platí.

Věta 4.6.3. *Nechť $(\widehat{x},\widehat{u})$ je optimální proces úlohy (4.6.9)–(4.6.12) definovaný na $[t_0,\infty)$. Pak existuje takové číslo $\psi_0 \geq 0$, a taková funkce $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, které nejsou současně nulové, že platí*

(i) adjungovaná rovnice (AR):

$$\dot{\psi} = -[D_2 H(t,\widehat{x},\widehat{u},\psi_0,\psi)]^\top, \tag{4.6.13}$$

v bodech $t \in [t_0,\infty)$, ve kterých je $\widehat{u}$ spojitá a kde

$$H(x(t),u(t),\psi_0,\psi(t)) = -\psi_0 e^{-rt} f_0(x(t),u(t)) + \psi(t)^\top f(x(t),u(t)), \tag{4.6.14}$$

je Hamiltonova funkce,

(ii) princip maxima (PM): pro všechna $t \in [t_0,\infty)$, ve kterých je řízení $\widehat{u}$ spojité, platí

$$H(\widehat{x},\widehat{u},\psi_0,\psi) = \max(H(\widehat{x},u,\psi_0,\psi)|\ u \in U) = q(t), \tag{4.6.15}$$

kde

$$q(t) = -r\psi_0 \int_t^\infty e^{-rs} f_0(\widehat{x}(s),\widehat{u}(s))ds.$$

Důkaz. Lze nalézt v [80]. □

Důsledek 4.6.4. *Nechť platí předpoklady a označení věty 4.6.3, pak*

$$\lim_{t\to\infty} H(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),\psi_0,\psi(t)) = 0. \tag{4.6.16}$$

4.7 Spojitý model pro optimální reklamu

Tato sekce se zabývá modifikací Vidale-Wolfeho modelu pro reklamu, který jsme uvedli v oddílu 1.1.6. Model je doplněn předpokladem, podle kterého současná intenzita prodejů závisí hlavně na minulé intenzitě reklamy. Matematická formulace tohoto problému vede na soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic. Nejdříve se zabýváme speciálním případem, kdy je intenzita reklamy konstantní, pak se soustředíme na hledání optimální strategie reklamy s ohledem na daný účelový funkcionál. K tomuto účelu použijeme Pontrjaginův princip maxima. Text tohoto oddílu vychází z autorových článků [66] a [70].

Chtějí-li firmy uvést svůj nový výrobek na trh nebo chtějí udržet svoji pozici na trhu, provádějí reklamu. Firmy volí zpravidla takovou reklamní strategii, která co nejvíce zvětší jejich zisk.

Jeden z prvních matematických modelů reklamy uvedli M.L. Vidale a H.B. Wolfe v roce 1957. V roce 1973 jejich model modifikoval S. Sethi. Původní model byl doplněn účelovým funkcionálem, který vyjadřoval zisk firmy, tak, aby bylo možno použít metody teorie optimálního řízení, viz [41]. Autor o tomto modelu referoval v [67]. Myšlenku, že současná intenzita prodejů závisí na minulé intenzitě reklamy, lze nalézt v [53] a [82].

4.7.1 Popis modelu

Uvažujme trh s jedním druhem zboží a několika výrobci – firmami. Vyberme jednu z těchto firem. Předpokládejme, že celkový zisk ze všech prodejů na trhu je znám a tuto hodnotu označme P. V čase t může vybraná firma získat pouze zlomek $y(t) \in [0,\, 1]$ ze všech uskutečněných prodejů a její zisk je tedy $P\, y(t)$.

Označme dále $u = u(t)$ firemní výdaje na reklamu v čase t. Tyto výdaje lze měřit v peněžních jednotkách za jednotku času. Protože firma má limitované zdroje příjmu, budeme předpokládat, že

$$u \in [0,\, \overline{u}], \tag{4.7.1}$$

kde $\overline{u} > 0$ představuje maximální možné výdaje na reklamu. Tato hodnota je odvozena z firemního rozpočtu určeného pro reklamní činnost. Předpokládejme, že účinek $x = x(t)$ reklamních výdajů $u(t)$ není okamžitý, ale je zpožděný za aktuální hodnotou reklamních výdajů $u(t)$. Nejjednodušší způsob, jak lze tento jev popsat, je formulovat diferenční rovnici

$$x(t+\tau) - x(t) = (u(t) - x(t))\tau,\ x(0) = x_0, \tag{4.7.2}$$

kde x_0 představuje počáteční účinek reklamy. Tuto hodnotu lze interpretovat jako počáteční informovanost spotřebitelů o existenci daného výrobku. Pokud uvedenou rovnici vydělíme $\tau > 0$ a položíme $\tau \to 0$, získáme počáteční problém

$$\dot{x} = u - x,\ x(0) = x_0. \tag{4.7.3}$$

Abychom zkrátili zápis, vynecháváme proměnnou t v $x = x(t), u = u(t)$. Rovnici (4.7.3) lze interpretovat tak, že funkce x má exponenciální zpoždění vzhledem k funkci u. Více podrobností o exponenciálním zpoždění lze nalézt v [64] nebo v sekci 1.4.

Zakoupí-li spotřebitel výrobek firmy, vyzkouší ho a rozhodne se pro jeho další nákup nebo pro nákup podobného výrobku od jiné firmy. Tento proces je nezávislý na reklamě a firma nemůže opakované prodeje ovlivnit. To znamená, že pokud firma neprovádí propagaci svého výrobku, jeho prodej klesá konstantní mírou $b > 0$, jejíž hodnotu firma nemůže ovlivnit:

$$y(t+\tau) - y(t) \approx -by(t)\tau. \tag{4.7.4}$$

Svůj podíl na trhu může firma ovlivnit tak, že pomocí reklamy získá zákazníky, kteří v současné době nekupují její výrobek. Lze předpokládat, že přírůstek nových prodejů je přímo úměrný účinku reklamy $x(t)$ a koncentraci $1 - y(t)$ zákazníků, kteří v současnosti výrobek dané firmy nekupují. Konstanta úměrnosti, kterou označíme $a > 0$, odráží účinnost reklamy při získávání nových prodejů:

$$y(t+\tau) - y(t) \approx ax(t)(1 - y(t))\tau. \tag{4.7.5}$$

Oba zmíněné jevy působí současně, takže lze psát diferenční rovnici

$$y(t+\tau) - y(t) = (ax(t)(1 - y(t)) - by(t))\tau,\ y(0) = y_0, \tag{4.7.6}$$

kde $y_0 \in [0, 1]$ reprezentuje počáteční podíl dané firmy na trhu. Pokud poslední rovnici vydělíme $\tau > 0$ a položíme $\tau \to 0$, získáme

$$\dot{y} = ax(1 - y) - by,\ y(0) = y_0. \tag{4.7.7}$$

Rovnice (4.7.3), (4.7.7) představují soustavu, která reprezentuje reklamní model se zpožděným účinkem nákladů na reklamu.

4.7.2 Konstantní výdaje na reklamu

Předpokládejme, že reklamní náklady firmy jsou konstantní, tj.

$$u(t) = C,\ t \in [0, \infty],\ C \in [0, \overline{u}]. \tag{4.7.8}$$

Nyní je soustava (4.7.3), (4.7.7) autonomní a má právě jeden stacionární bod

$$(x^\circ, y^\circ) = \left(C, \frac{aC}{aC + b}\right). \tag{4.7.9}$$

Označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -b \end{pmatrix}, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} C \\ -axy \end{pmatrix}$$

a soustavu (4.7.3), (4.7.7) pišme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g(x, y).$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = -1 < 0$ a $\lambda_2 = -b < 0$. Protože jsou složky zobrazení g polynomy, je g spojitě diferencovatelné a platí

$$\lim_{z \to 0} \frac{||g(z)||}{||z||} = 0,$$

kde $z = (x - x^\circ, y - y^\circ)$. Podle uvedených poznámek a věty 2.4.2 je stacionární bod (4.7.9) soustavy (4.7.3), (4.7.7) stejnoměrně asymptoticky stabilní.

4.7.3 Optimální výdaje na reklamu

Firma se snaží maximalizovat současnou hodnotu svého úhrnného zisku. Hodnotu zisku v čase $t \geq 0$ lze vyjádřit jako rozdíl firemních příjmů $P\,y(t)$ a nákladů na reklamu $u(t)$. Diskontní faktor označíme $r \in [0, 1)$. Uvedený problém lze formulovat jako úlohu optimálního řízení s účelovým funkcionálem

$$\mathcal{J}(u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-rt}(Py(t) - u(t))dt, \tag{4.7.10}$$

jehož maximální hodnota vzhledem k soustavě (4.7.3), (4.7.7) a podmínce (4.7.1) má být určena.

Budeme předpokládat, že přípustná řídící funkce $u = u(t)$ je po částech spojitá a pro formulaci nutných podmínek pro řešení úlohy optimálního řízení použijeme Pontrjaginův princip maxima. Nejdříve uveďme Hamiltonovu funkci úlohy ve tvaru

$$H(t, y, u, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \mu_0 e^{-rt}(Py - u) + \mu_1(u - x) + \mu_2(ax(1 - y) - by), \tag{4.7.11}$$

kde jsme kvůli stručnosti vynechali proměnnou t ve funkcích $y = y(t), u = u(t), \mu_1 = \mu_1(t)$ and $\mu_2 = \mu_2(t)$. Použijeme-li větu 4.6.3, můžeme psát:

Je-li $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{u})$ optimální proces úlohy (4.7.10), (4.7.3),(4.7.7) a (4.7.1), existuje taková konstanta $\mu_0 \in \mathbb{R}$ a takové po částech hladké funkce $\mu_1(t), \mu_2(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že platí *(i)* $(\mu_0, \mu_1(t), \mu_2(t)) \neq 0$ *a* $\mu_0 \geq 0$,

(ii) adjungovaná rovnice:

$$\dot{\mu_1}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, y, u, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \mu_1(t) - \mu_2(t)a(1 - y(t)), \tag{4.7.12}$$

$$\dot{\mu_2}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, x, y, u, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = -\mu_0 e^{-rt}P + \mu_2(t)(ax(t) + b), \tag{4.7.13}$$

(iii) princip maxima: pro každé $t \in [0, \infty)$, *ve kterém je funkce* $\widehat{u}(t)$ *spojitá*

$$H(t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{u}, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \max\{H(t, \widehat{x}, \widehat{y}, u, \mu_0, \mu_1, \mu_2)|\ u \in [0,\ \overline{u}]\}$$

(iv) hraniční podmínka: $H(t, \widehat{x}(t), \widehat{y}(t), \widehat{u}(t), \mu_0, \mu_1(t), \mu_2(t)) = q(t)$, *kde*

$$q(t) = r\mu_0 \int_t^\infty e^{-rs}(Py(s) - u(s))ds.$$

V další diskusi se soustředíme na možnost $\mu_0 \neq 0$ a položíme $\mu_0 = 1$. Protože je Hamiltonova funkce (4.7.11) lineární v proměnné u nabývá svého maxima v hraničních bodech definičního oboru u. Podle principu maxima získáme pro všechna $u \in [0, \overline{u}]$ vztah

$$(\widehat{u} - u)(e^{-rt} - \mu_1) \leq 0, \tag{4.7.14}$$

ze kterého vyplývají následující tři možnosti:

$$\begin{aligned}
&\text{Jestliže } \mu_1(t) > e^{-rt},\ t \in I_1,\ \text{pak } \widehat{u}(t) = \overline{u} \text{ na } I_1.\\
&\text{Jestliže } \mu_1(t) = e^{-rt},\ t \in I_2,\ \text{pak podle principu maxima není možné určit } \widehat{u} \text{ na } I_2.\\
&\text{Jestliže } \mu_1(t) < e^{-rt},\ t \in I_3,\ \text{pak } \widehat{u}(t) = 0 \text{ na } I_3.
\end{aligned} \tag{4.7.15}$$

4.7.4 Singulární řešení

V tomto oddílu budeme předpokládat, že existuje interval $I_2 \subset [0, \infty)$, na kterém platí podmínka $\mu_1(t) = e^{-rt}$. Derivací této podmínky získáme

$$\dot{\mu_1} = -re^{-rt}. \tag{4.7.16}$$

Dosadíme-li pravou stranu adjungované rovnice (4.7.12) do (4.7.16), získáme

$$e^{-rt} - \mu_2 a(1 - y) = -re^{-rt}. \tag{4.7.17}$$

Derivací totoho vztahu a pomocí úprav získáme

$$-r(r + 1)e^{-rt} = \dot{\mu_2}a(1 - y) + \mu_2 a(-\dot{y}) \tag{4.7.18}$$

Dosadíme-li pravou stranu rovnice (4.7.7) a pravou stranu rovnice adjungované rovnice (4.7.13) do (4.7.18), získáme po úpravách kvadratickou rovnici s neznámou $(1 - y)$

$$Pa(1 - y)^2 - r(r + 1)(1 - y) - b(r + 1) = 0. \tag{4.7.19}$$

Protože $y \in [0,1]$ a tedy $1-y \in [0,1]$, vybereme kladné znaménko před odmocninou v zápisu kořenů rovnice (4.7.19). Takto obdržíme singulární hodnotu prodejů

$$y_s = y_s(t) = 1 - \frac{r(r+1) + \sqrt{r^2(r+1)^2 + 4Pab(r+1)}}{2Pa}, \; t \in I_2. \tag{4.7.20}$$

Protože $y_s(t)$ je konstantní na I_2, je $\dot{y}_s(t) = 0$ na I_2. Z (4.7.7) získáme pro účinek reklamy

$$x_s = x_s(t) = \frac{by_s}{a(1-y_s)}, \; t \in I_2. \tag{4.7.21}$$

Protože $x_s(t)$ je konstantní na I_2 je $\dot{x}_s(t) = 0$ na I_2. Z (4.7.5) získáme singulární řízení

$$u_s = u_s(t) = x_s, \; t \in I_2. \tag{4.7.22}$$

Aby platilo $y_s > 0$, použijeme (4.7.20) a získáme $Pa > (r+b)(r+1)$. Aby platilo $u_s < \overline{u}$ použijeme (4.7.22), (4.7.21) a (4.7.20) a získáme $Pa < (r+1)(1+\frac{a}{b}\overline{u})(r+b+a\overline{u})$.

Jestliže $y(0) \neq y_s$, nastává otázka zda a jak v rámci možností, které dovoluje soustava (4.7.3), (4.7.7) s řízením u, dosáhnout stacionárního řešení $(x_s,\, y_s)$ soustavy

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = -x + u_s, & x(0) = x_0 \in [0,\, \overline{u}] \\ \dot{y} = ax(1-y) - by, & y(0) = y_0 \in [0,\, 1]. \end{array} \tag{4.7.23}$$

Z pohledu následující argumentace je užitečné všimnout si, že $u_s < \overline{u}$ implikuje [6] $y_s < \overline{y}$, kde $\overline{y} = \frac{a\overline{u}}{a\overline{u}+b}$ je konstantní řešení (4.7.7) pro $u(t) = \overline{u}$, $t \in I_2$.

Je-li $y(0) < y_s$, zvyšuje se intenzita prodejů y nejrychleji pro řízení $u(t) = \overline{u}$. Na druhé straně, je-li $y(0) > y_s$, intenzita prodejů y se nejrychleji snižuje pro řízení $u(t) = 0$. To nás přivádí k tomu, že má-li se řešení soustavy (4.7.3), (4.7.7) s řízením u, přiblížit k singulárnímu řešení $(x_s,\, y_s)$ této soustavy pro $u(t) = u_s$, lze použít tento proces:

$$u(t) = \begin{cases} \overline{u}, & \text{jestliže} \quad y(t) < y_s \\ u_s, & \text{jestliže} \quad y(t) = y_s \\ 0, & \text{jestliže} \quad y(t) > y_s, \end{cases} \tag{4.7.24}$$

jehož grafickou ilustraci znázorňuje obr. 4.2.

Abychom ukázali, že daný proces skutečně dosáhne singulární stacionární bod problému (4.7.23) budeme se zabývat dvojicí počátečních úloh

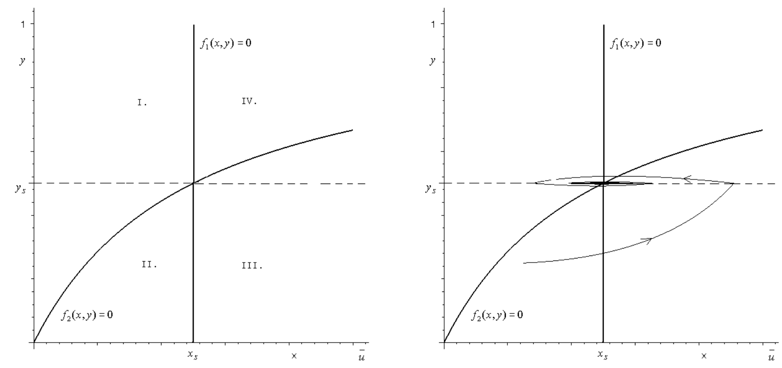
$$\begin{array}{ll} \dot{x} = -x + \overline{u}, & x(0) = x_0 \in [0,\, \overline{u}] \\ \dot{y} = ax(1-y) - by, & y(0) = y_0 \in [0,\, 1] \end{array} \tag{4.7.25}$$

a

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = -x, & x(0) = x_0 \in [0,\, \overline{u}] \\ \dot{y} = ax(1-y) - by, & y(0) = y_0 \in [0,\, 1] \end{array} \tag{4.7.26}$$

Pomocí x–nulkliny $n_1 : x - u_s = 0$ and y–nulkliny $n_2 : ax(1-y) - by = 0$, rozdělíme oblast $[0,\overline{u}] \times [0,1]$ fázové roviny počáteční úlohy (4.7.23) na 4 části, viz obr. 4.2. Nyní

[6] Nechť $u(t) = C$ je konstantní na $[0,\infty)$ a nechť C je libovolný bod z $[0,\overline{u}]$. Pak konstantní řešení rovnice (4.7.7) je $y^\circ = \frac{aC}{aC+b}$, což je rostoucí funkce proměnné C na $[0,\overline{u}]$. Protože $u_s < \overline{u}$ získáme dané pozorování.



Obrázek 4.2: Na levé straně: Ukázka fázové roviny počátečního problému (4.7.23) se stacionárním bodem (x_s, y_s), kde $x_s = u_s$ a nulklinami $-x + x_s = 0$, $ax(1-y) - by = 0$. Na pravé starně: Ukázka trajektorie procesu přiblížení ke stacionárnímu bodu (x_s, y_s).

si všimněme, že v oblastech II a III platí pro oba počáteční problémy (4.7.25) a (4.7.26) vztah $ax(1-y) - by > 0$. To znamená, že v oblastech II a III platí pro oba problémy (4.7.25) a (4.7.26) vztah $\dot{y}(t) > 0$. Podobně, v oblastech I a IV platí pro oba tyto problémy vztah $\dot{y}(t) < 0$. Všimněme si dále, že ve všech oblastech I–IV pro problém (4.7.25) platí $-x + \overline{u} > 0$. To znamená, že pro problém (4.7.25) platí vztah $\dot{x}(t) > 0$ ve všech oblastech I–IV. Nakonec si všimněme, že ve všech oblastech I–IV platí $-x < 0$. To znamená, že pro problém (4.7.26) platí $\dot{x}(t) < 0$ ve všech oblastech I–IV.

Pozorování 1: *Nechť $x^1(t), y^1(t)$ je řešení (4.7.25) s počátečními podmínkami $x_0^1 < x_s$, $y_0^1 = y_s$. Pak existuje právě jeden časový okamžik $t_1 > 0$ takový, že $x^1(t_1) > x_s$ a $y^1(t_1) = y_s$.*

Počáteční bod (x_0^1, y_0^1) je v oblasti I, kde pro (4.7.25) platí $\dot{x}^1(t) > 0$ a $\dot{y}^1(t) < 0$. Protože y–nulklina $ax(1-y) - by = 0$ je rostoucí funkce proměnné x, protne v nějakém bodě trajektorii $(x^1(t), y^1(t))$. V tomto průsečíku platí $\dot{x}^1(t) > 0$ a $\dot{y}^1(t) = 0$. To znamená, že trajektorie $(x^1(t), y^1(t))$ směřuje do oblasti II. V oblasti II a III platí pro (4.7.25) podmínky $\dot{x}^1(t) > 0$ a $\dot{y}^1(t) > 0$. Všimněme si také, že trajektorie $(x^1(t), y^1(t))$ nemůže protnout přímku $n_3 : -x + \overline{u} = 0$, protože to je jiná trajektorie problému (4.7.25), srv. poznámku 2.3.3. Již jsme ukázali, že $y_s < \overline{y} = \frac{a\overline{u}}{a\overline{u}+b}$, existuje tedy časový okamžik $t_1 > 0$ takový, že $y^1(t_1) = y_s$ a $x^1(t_1) > x_s$.

Pozorování 2: *Nechť $x^2(t), y^2(t)$ je řešení (4.7.26) s počátečními podmínkami $x_0^2 > x_s$, $y_0^2 = y_s$. Pak existuje právě jeden časový okamžik t_2 takový, že $x^2(t_2) < x_s$ and $y^2(t_2) = y_s$.*

Lze uvést podobnou argumentaci jako v pozorování 1.

Pozorování 3: *Nechť $x^1(t), y^1(t)$ je řešení (4.7.25) s počátečními podmínkami $x_0^1 < x_s$, $y_0^1 = y_s$. Nechť $x^3(t), y^3(t)$ je také řešení (4.7.25) s počátečními podmínkami $x_0^3 < x_s$, $y_0^3 = y_s$ a $x_0^1 < x_0^3$. Pak $x^1(t_1) > x^3(t_3) > x_s$, kde pro čas $t_1 > 0$ platí $y^1(t_1) = y_s$ a podobně pro čas $t_3 > 0$ platí $y^3(t_3) = y_s$.*

Toto pozorování vyplývá z pozorování 1 a důsledku věty o lokální existenci a jednoznačnosti, který jsme formulovali v poznámce 2.3.3. Podle této poznámky není možné, aby se dvě různé trajektorie stejné počáteční úlohy protínaly. Stejně bychom nahlédli platnost následujícího pozorování.

Pozorování 4: *Nechť $x^2(t), y^2(t)$ je řešení (4.7.26) s počátečními podmínkami $x_0^2 > x_s$, $y_0^2 = y_s$. Nechť $x^4(t), y^4(t)$ je také řešení (4.7.26) s počátečními podmínkami $x_0^4 > x_s$, $y_0^4 = y_s$ a $x_0^2 > x_0^4$. Pak $x^2(t_1) < x^4(t_3) < x_s$, kde pro čas $t_2 > 0$ platí $y^2(t_2) = y_s$ a podobně pro čas $t_4 > 0$ platí $y^4(t_4) = y_s$.*

Jako důsledek dvou předchozích pozorování bezprostředně získáme.

Pozorování 5: *Nechť $x^1(t), y^1(t)$ a $x^3(t), y^3(t)$ jsou řešení (4.7.25) s počátečními podmínkami danými v pozorování 3, tedy $x_0^1 < x_0^3$. Nechť $x^2(t), y^2(t)$ a $x^4(t), y^4(t)$ jsou řešení (4.7.26) s počátečními podmínkami danými v pozorování 4 a konkrétně položme $x_0^2 = x^1(t_1), y_0^2 = y_s$ a $x_0^4 = x^3(t_3), y_0^4 = y_s$, kde $t_1 > 0$ a $t_3 > 0$ jsou dány v pozorování 3. Pak $x^2(t_2) < x^4(t_4)$, kde $t_2 > 0$ a $t_4 > 0$ jsou dány v pozorování 4.*

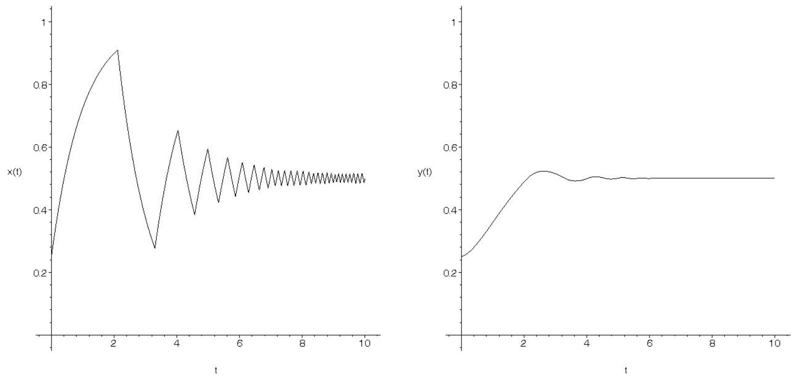
Pozorování 6: *Nechť $x^1(t), y^1(t)$ je řešení (4.7.25) s počátečními podmínkami $x_0^1 < x_s$, $y_0^1 = y_s$. Nechť $x^2(t), y^2(t)$ je řešení (4.7.26) s počátečními podmínkami $x_0^2 = x^1(t_1)$, $y_0^2 = y_s$. Pak $x_0^1 < x^2(t_2)$.*

Uvažujme nejdříve řešení $x^*(t)$, $y^*(t)$ počáteční úlohy (4.7.26) s počáteční podmínkou $x_0^* = \overline{u}, y_0^* = y_s$. Na trajektorii $(x^*(t), y^*(t))$ lze nalézt bod (x^*, y^*) takový, že $x^* < x_s$ a $y^* = y_s$, jedná se o průsečík této trajektorie a přímky $y = y_s$. Nyní uvažujme o dvou možnostech.

(i) Nechť $x_0^1 = 0 < x^*$. Použijeme pozorování 1 a pozorování 2. Protože trajektorie $(x^2(t), y^2(t))$ počáteční úlohy (4.7.26) nemůže protnout trajektorii $(x^*(t), y^*(t))$ stejné úlohy, platí $x^* < x^2(t_2)$. To však znamená, že $x_0^1 < x^2(t_2)$.

(ii) Nechť $0 < x_0^1 < x_s$, pak můžeme použít výsledek, který jsme obdrželi v (i) a opakovaně pozorování 5.

Podobná pozorování jako pozorování 6 je možné učinit pro libovolný počáteční bod $(x_0, y_0) \in [0, \overline{u}] \times [0, 1]$. To znamená, že proces (4.7.24) je účinný a lze ho použít pro přiblížení k singulárnímu stacionárnímu bodu (x_s, y_s). Geometrickou ilustraci lze nalézt na obr. 4.3.



Obrázek 4.3: Ukázka grafů x – ové souřadnice a y – ové souřadnice procesu přizpůsobení (4.7.24). Graf x – ové souřadnice ilustruje zpožděný efekt výdajů na reklamu u a graf y – ové souřadnice ilustruje proces přiblížení k singulární hladině prodejů y_s.

Závěr

Z uvedených výsledků je zřejmé, že pokud je účinnost reklamní činnosti dostatečně vysoká, tj. platí $Pa > (r + b)(r + 1)$ a je-li dostatečně vysoká horní mez pro výdaje na reklamu $\overline{u}$, tj. platí $Pa < (r + 1)(1 + \frac{a}{b}\overline{u})(r + b + a\overline{u})$, je možné nalézt konstantní hodnotu u_s výdajů na reklamu, která poskytuje optimální zisk firmy. Jak bylo ukázáno hladina y_s podílu firmy na trhu může být dosažena procesem (4.7.24), jehož obdoba je v [41] nazývána procesem nejrychlejšího přizpůsobení. V [82] jsou uvedeny některé empirické studie týkající se reklamní činnosti. Jedna z těchto reklamních strategií nazývaná *pulsní reklama* odpovídá procesu (4.7.24). Používá-li firma tento proces, může se vyhnout plýtvání finančními zdroji v době, kdy je účinek minulé reklamy ještě dostatečně vysoký.

Kapitola 5

Základy ekonomického růstu

Z dlouhodobého hlediska patří ekonomický růst k nepřehlédnutelným jevům současného světa. Všechny světové ekonomiky se snaží o ekonomický růst a jejich politické reprezentace tvrdí, že v dlouhodobém horizontu lze pouze tímto způsobem zajistit existenci daného národa a rostoucí životní úroveň obyvatelstva. Exituje obecné povědomí, že ekonomický růst je klíčem ke splnění potřeb a přání jednotlivců i celého národa. To je také hlavní důvod, proč se teorie ekonomického růstu těší velké pozornosti ze strany ekonomů, proč je stále rozvíjena a obohacována. Z našeho pohledu je důležité, že tato teorie využívá matematický aparát, který jsme v našem textu popsali. V této kapitole bude ukázáno, jak lze obyčejné diferenciální rovnice využít v teorii růstu. Budeme přitom vycházet z moderní knihy o ekonomickém růstu [6], učebnice makroekonomie [7], starší knihy o matematické ekonomiii [3] a knihy o ekonomické dynamice [77].

5.1 Neoklasická konstrukce ekonomie

Představu neoklasického ekonomického světa popíšeme v souladu s předpoklady v [6, str. 14] nebo [54, str. 48]:

(i) Domácnosti vlastní všechny vstupy a aktiva dané ekonomiky. Jedná se hlavně o práci, pozemky a kapitál. Kapitálem se rozumí hlavně budovy a stroje. Uvedené vstupy jsou souhrnně nazývány *výrobní faktory.* Každá domácnost se samostatně rozhoduje, jakou část svého příjmu spotřebuje nebo uspoří. Dále se samostatně rozhodují, zda se připojí k pracovní síle a jak mnoho budou pracovat, případně, kolik budou mít potomků.

(ii) Firmy si najímají výrobní faktory, hlavně kapitál a práci, a používají je k produkci zboží, které je prodáváno domácnostem nebo jiným firmám. Aby mohly nějaké zboží vyrobit, je třeba, aby měly přístup k *technologiím,* které umožní přeměnit vstupy na výstupy. Výrobní technologie se mohou v čase vyvíjet.

(iii) Domácnosti a firmy jsou v interakci na trzích, kde domácnosti prodávají výrobní faktory a firmy prodávají zboží domácnostem nebo dalším firmám.

Základní rysy modelu, který bude předmětem zájmu v této sekci, byly formulovány v roce 1956 v práci Roberta M. Solowa nazvané *A Contribution to the Theory of Economic*

Growth, (Quaterly Journal of Economics, 70) a v práci Trewora W. SWANA s názvem *Economic Growth and Capital Accumulation,* (Economic Record, 32), srv. [6]. Model, který je dnes označován jako *neoklasický model*, se stal základním rámcem pro analýzu ekonomického růstu. Později, v roce 1966 v článku *Golden Rules of Economic Growth,* (Norton), formuloval Edmund S.PHELPS zlaté pravidlo kapitálové akumulace pro neoklasický model. V modelu je využívána neoklasická produkční funkce. Pokud je tato funkce rozšířena o technický pokrok, který se v čase zlepšuje a přispívá k obohacení pracovní síly, lze získat model, jehož základní rysy podal Solow v roce 1969 v článku *Investment and Technical Change* (Mathematical Methods in the Social Sciences).

5.1.1 Základní předpoklady

Obecné předpoklady nyní specifikujeme a formulujeme jejich matematizovanou podobu.

Domácnosti. Jak bylo řečeno, domácnosti vlastní majetek, finanční aktiva a pracovní sílu. Majetek přináší domácnostem příjem daný úrokovou mírou $r = r(t)$ a práce je placena mzdovou sazbou $w = w(t)$ za jednotku práce. Domácnosti nakupují zboží za účelem spotřeby a spoří, aby zvětšily svůj majetek. Základní model předpokládá identické domácnosti, které mají stejné preferenční parametry, jsou placeny stejnou mzdovou sazbou, začínají se stejným jměním na jednu osobu a mají stejnou míru růstu populace. Uvažujeme také, že domácnosti jsou konkurenční, tj. přijímají sazby r a w jako dané. Uvedené předpoklady nám umožní pracovat pouze s jednou reprezentativní domácností.

Pracovní síla $L = L(t)$ se mění s časem podle toho, kolik lidí schopných práce se rodí, jak rozsáhlá je migrace práce schopných lidí, případně podle toho, kolik lidí se rozhodne pracovat a jak dlouho budou pracovat. Budeme předpokládat, že populace $N = N(t)$ roste konstantní mírou

$$\frac{\dot{N}}{N} = n \geq 0, \tag{5.1.1}$$

a že práce je přímo úměrná velikosti populace a produkční aktivitě či intenzitě jednotlivce $l = l(t)$, tedy

$$L = l\,N. \tag{5.1.2}$$

Kombinací (5.1.1) a (5.1.2) získáme vztah

$$\frac{\dot{L}}{L} = n + \frac{\dot{l}}{l}. \tag{5.1.3}$$

Budeme-li dále předpokládat, že každý pracuje s danou konstantní intenzitou, lze (5.1.3) psát jako

$$\frac{\dot{L}}{L} = n. \tag{5.1.4}$$

To znamená, že tempo růstu obyvatelstva je shodné s tempem růstu pracovních sil.

Domácnosti vlastní majetek ve formě vlastnických práv na kapitál nebo jako půjčky. Záporné půjčky představují dluhy. Domácnosti mohou půjčovat ostatním domácnostem nebo si od ostatních domácností vypůjčovat. Nicméně reprezentativní domácnost v uzavřené ekonomice skončí v rovnovážném stavu s nulovými půjčkami. Oba zmíněné typy majetku

– kapitál a půjčky – lze považovat za dokonalé substituty, tj. jsou navzájem zaměnitelné. Jinými slovy, roste-li cena za pronájem jednotky kapitálu, zvýší se poptávka po půjčkách a naopak rostou-li úroky půjček, roste zájem o pronájem kapitálu. To znamená, že příjem domácností za oba typy majetku je stejný a je dán úrokovou mírou r.

Celkový příjem, který domácnosti obdrží, je součet příjmu z majetku a důchodu. Označíme–li $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ velikost majetku a aktiv domácností, lze předchozí skutečnost psát jako $r(t)\mathcal{A}(t) + w(t)L(t)$. Příjem, který není spotřebován, používají domácnosti ke zvětšení svého majetku, tedy

$$\dot{\mathcal{A}} = [r\mathcal{A} + wL] - C, \tag{5.1.5}$$

kde $C = C(t)$ je velikost spotřeby měřená v peněžních jednotkách.

Firmy. Chtějí-li firmy, které vlastní technologii $T = T(t)$, produkovat statky, najímají práci L a fyzický kapitál $K = K(t)$. Budeme předpokládat, že firmy jsou identické. V zájmu zjednodušení lze pak uvažovat pouze jednu reprezentativní firmu. Její potenciální produkce $Y = Y(t)$ je dána produkční funkcí se dvěma vstupy K a L a úrovní technologie T

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)]. \tag{5.1.6}$$

O funkci F budeme předpokládat, že je neoklasická. Tyto podmínky budou specifikovány dále v oddílu 5.1.2.

Firma je konkurenční, takže přijímá cenu nájmu $R = R(t)$ za jednotku služby kapitálu, mzdovou sazbu $w = w(t)$ za nájem jednotky práce a cenu produktu P za danou. Normalizujeme-li ceny tak, že prodejní cena výstupu je jednotková, $P = 1$, jsou R a w reálné ceny. Uvažujme na chvíli, že úroveň technologie T je daná a nemění se. Cílem reprezentativní firmy je maximalizace zisku, tj. maximalizace rozdílu mezi příjmy a náklady. Vybírá tedy takovou kombinaci vstupů K a L, aby byl její zisk

$$\pi(K, L) = F(K, L, T) - RK - wL$$

maximální. Podmínky prvního řádu dávají

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L, T) &= R \\ \frac{\partial F}{\partial L}(K, L, T) &= w. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Uvažujme, že kapitálové zásoby se znehodnocují konstantní mírou $\delta \geq 0$. Čistá míra příjmu domácností, které vlastní jednotku kapitálu, je tedy $R - \delta$. Na druhé straně jsme zmínili, že domácnosti jsou také příjemci úroků r z fondů zapůjčených jiným domácnostem. Není-li v ekonomice žádná arbitráž, je nutné, aby byl příjem z kapitálu rovný příjmu z pohledávek, takže

$$R - \delta = r. \tag{5.1.8}$$

Rovnováha na trhu s aktivy. Budeme uvažovat uzavřenou ekonomiku. To znamená, že domácnosti nemohou nakupovat cizí zboží nebo aktiva a nemohou prodávat své zboží a aktiva jiným. Domácnosti mohou svobodně půjčovat svá aktiva a zapůjčovat si jiná. V rovnovážném stavu se však všechna půjčená a zapůjčená aktiva domácností v uzavřené ekonomice navzájem vyruší, v opačném případě by byl trh s aktivy v nerovnováze. Platí tedy

$$\mathcal{A}(t) = K(t), \ t \geq 0. \tag{5.1.9}$$

Rovnici (5.1.5) nyní můžeme psát jako

$$\dot{K} = (rK + wL) - C. \tag{5.1.10}$$

5.1.2 Neoklasická produkční funkce a intenzivní produkční funkce

V tomto oddílu budeme pozorovat vlastnosti produkční funkce, budeme přitom vycházet z [6], [51] a [3]. Produkční funkce není známa. Z empirických pozorování však vyplývají jisté vlastnosti této funkce, které nyní popíšeme. V zájmu zjednodušení zanedbáme technologický pokrok. Budeme tedy předpokládat, že funkce (5.1.6) má tvar

$$Y = F(K, L). \tag{5.1.11}$$

Je definována pro $K \geq 0, L \geq 0$ a v celém svém definičním oboru je dvakrát spojitě diferencovatelná.

Ze zkušeností vyplývá, že při zapojení většího množství kapitálu K při daném množství práce L nebo při zapojení většího množství práce L při daném množství kapitálu K se zvětší množství potenciálního produktu Y, tj. pro $K > 0, L > 0$. platí

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) > 0. \tag{5.1.12}$$

Uvedené parciální derivace se obvykle nazývají *mezní produktivita kapitálu,* resp. *mezní produktivita práce.*

Při dané úrovni technologie je stále těžší organizovat zapojení dalšího kapitálu při daném množství pracovníků (jednotek práce). Podobně při daném množství kapitálu je obtížnější organizovat výrobu pro další pracovníky. To však znamená, že každá další jednotka kapitálu (resp. práce) za dané úrovně práce (resp. kapitálu) přispěje ke zvýšení potenciálního produktu méně a můžeme psát

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) < 0. \tag{5.1.13}$$

Tato skutečnost se nazývá *zákon klesajících výnosů.*

Jsou-li najímáni pracovníci, aby při dané úrovni technologie vyrobili větší množství produkce, není žádoucí, aby klesla průměrná produktivita práce. To znamená, že by tito pracovníci měli být vybaveni stejným množstvím kapitálu, jako pracovníci stávající. Předpokládá se, že současná změna kapitálu a práce zapojených do výroby vede ke stejné změně potenciálního produktu. Tento předpoklad se nazývá *koncept konstantních výnosů z rozsahu* a pro jeho popis lze použít požadavek, že produkční funkce je homogenní funkcí stupně jedna. To znamená, že pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}_+$ platí

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L). \tag{5.1.14}$$

Nakonec budeme ještě uvažovat, že pro mezní produktivitu kapitálu, resp. mezní produktivitu práce platí tyto *Inadovy podmínky:*

$$\lim_{K\to 0+}\frac{\partial F}{\partial K}(K,L)=\lim_{L\to 0+}\frac{\partial F}{\partial L}(K,L)=\infty \tag{5.1.15}$$

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\partial F}{\partial K}(K,L)=\lim_{L\to\infty}\frac{\partial F}{\partial L}(K,L)=0.$$

Produkční funkce (5.1.11), pro kterou platí podmínky (5.1.12), (5.1.13), (5.1.14) a (5.1.15), se nazývá *neoklasická produkční funkce.*

Nyní využijeme toho, že neoklasická produkční funkce F je homogenní funkcí stupně jedna. Můžeme pak psát

$$Y=F(K,L)=L\cdot F(K/L,1)=L\cdot f(k), \tag{5.1.16}$$

kde $k=K/L\geq 0$ se nazývá *kapitálová intenzita* nebo *kapitálová vybavenost pracovníků* a funkce f definovaná vztahem

$$f(k)=F(k,1), \tag{5.1.17}$$

se nazývá *intenzivní produkční funkce.* Položíme-li ještě $y=Y/L$, což je veličina, která představuje velikost výstupu odpovídající jedné pracovní jednotce, lze psát

$$y=f(k).$$

Přeneseme nyní vlastnosti (5.1.12), (5.1.13) a (5.1.15) neoklasické produkční funkce na intenzivní produkční funkci.

Věta 5.1.1. *Pro intenzivní produkční funkci* (5.1.17) *příslušnou neoklasické produkční funkci* (5.1.11) *platí*

(i) $f'(k)$ *je mezní produktivita kapitálu a pro* $k>0$ *je* $f'(k)>0,\ f''(k)<0$;

(ii) $f(k)-kf'(k)$ *je mezní produktivita práce a pro* $k>0$ *je* $f(k)-kf'(k)>0$;

(iii) $\lim_{k\to 0+}f'(k)=\infty,\ \lim_{k\to\infty}f'(k)=0.$

Důkaz. • Vzhledem k podmínce (5.1.12) pro mezní produktivitu kapitálu platí

$$0<\frac{\partial}{\partial K}F(K,L)=L\cdot\frac{\partial}{\partial K}\left(F\left(\frac{K}{L},1\right)\right)=L\cdot\frac{\partial}{\partial K}\left(f\left(\frac{K}{L}\right)\right)=f'\left(\frac{K}{L}\right)=f'(k).$$

Dále podle podmínky (5.1.13) máme

$$0>\frac{\partial^2}{\partial K^2}F(K,L)=\frac{\partial}{\partial K}\left(f'\left(\frac{K}{L}\right)\right)=\frac{1}{L}\cdot f''\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{1}{L}\cdot f''(k).$$

Tím je dokázáno (i).

• Vzhledem k podmínce (5.1.12) pro mezní produktivitu práce platí

$$\begin{aligned}0<\frac{\partial}{\partial L}F(K,L)&=\frac{\partial}{\partial L}L\cdot\left(F\left(\frac{K}{L},1\right)\right)=\frac{\partial}{\partial L}L\cdot f\left(\frac{K}{L}\right)\\&=f\left(\frac{K}{L}\right)+Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\cdot\left(-\frac{K}{L^2}\right)=f(k)-kf'(k).\end{aligned}$$

Tím je dokázáno (ii).

• Využijeme-li Inadovy podmínky (5.1.15) platí

$$\infty = \lim_{K \to 0+} \frac{\partial}{\partial K} F(K, L) = \lim_{k \to 0+} f'(k).$$

Protože $f'(\cdot)$ je omezená zdola a je nerostoucí, existuje konečná $\lim_{k\to\infty} f'(k)$. Využijeme-li Inadovy podmínky, je pro omezená L

$$0 = \lim_{K \to \infty} \frac{\partial}{\partial K} F(K, L) = \lim_{k \to \infty} f'(k).$$

Tím je dokázáno (iii). □

Ukážeme, že z vlastnosti (5.1.15) vyplývá, že každý vstup – kapitál K i práce L – je nutný pro nenulovou produkci Y a také, že pokud nějaký vstup roste nade všechny meze, roste také produkce Y nade všechny meze.

Věta 5.1.2. *Pro neoklasickou produkční funkci* (5.1.11) *platí*

(i) pro libovolné konečné hodnoty $K \geq 0$, *resp.* $L \geq 0$, *je* $F(0, L) = F(K, 0) = 0$;

(ii) $\lim_{L\to\infty} F(K, L) = \lim_{K\to\infty} F(K, L) = \infty$.

Důkaz. • Nechť je produkce Y konečná, pak

$$\lim_{L \to \infty} \frac{Y}{L} = 0.$$

Použijeme-li nejdříve l'Hospitalovo pravidlo a pak Inadovy podmínky pro neoklasickou produkční funkci, můžeme pro nekonečně velkou produkci Y psát

$$\lim_{L \to \infty} \frac{Y}{L} = \lim_{L \to \infty} \frac{\partial Y}{\partial L} = 0.$$

Dále však pro pevné konečné K platí také

$$\lim_{L \to \infty} \frac{Y}{L} = \lim_{L \to \infty} F(K/L, 1) = F(0, 1),$$

tedy $F(0, 1) = 0$. Nyní využijeme toho, že F je homogenní prvního řádu. Pro konečnou hodnotu L máme postupně

$$F(0, L) = L \cdot F(0, 1) = 0.$$

Vztah $F(K, 0) = 0$ se ukáže podobně. Tím je ukázáno (i).

• Pro důkaz tvrzení (ii) si uvědomíme, že $F(K, L) = K(f(k)/k)$. Postupně použijeme l'Hospitalovo pravidlo a tvrzení (iii) předchozí věty 5.1.1. Pro libovolné konečné K můžeme psát

$$\lim_{L \to \infty} F(K, L) = K \cdot \lim_{k \to 0+} \frac{f(k)}{k} = K \cdot \lim_{k \to 0+} f'(k) = \infty.$$

Pro konečné L bychom obdobně získali $\lim_{k\to\infty} f'(k) = \infty$. □

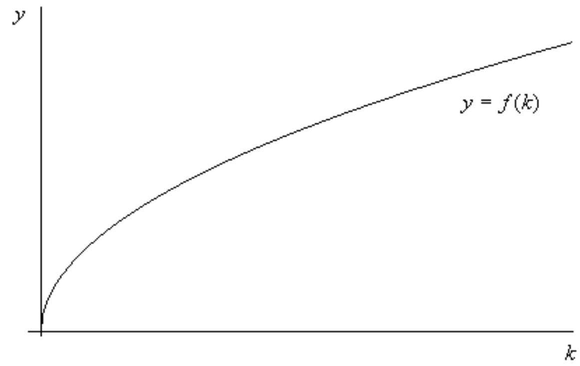
Protože $f(0) = F(0,1) = 0$ a pro konečné L také

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{K\to\infty} 1/L \cdot F(K,L) = \infty,$$

je bezprostředním důsledkem právě uvedeného tvrzení tato vlastnost.

Věta 5.1.3. *Pro intenzivní produkční funkci* (5.1.17) *příslušnou neoklasické produkční funkci* (5.1.11) *platí*

$$f(0) = 0, \lim_{k\to\infty} f(k) = \infty.$$



Obrázek 5.1: Neoklasická intenzivní produkční funkce je rostoucí, ryze konkávní funkce. Výstup na jednotku práce y roste s kapitálovým vybavením jednotky práce k. Protože se jedná o ryze kokávní funkci a $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$, je tento efekt tím menší, čím vyšší je hodnota kapitálové vybavenosti.

5.2 Solow–Swanův neoklasický model růstu

Za předpokladů uvedených v odstavci 5.1.1 můžeme odvodit rovnici, která bude popisovat dynamiku kapitálové intenzity a ze které lze usoudit na růst kapitálové zásoby v jednoduché ekonomické jednotce, kterou uvažujeme.

5.2.1 Základní rovnice pro tvorbu kapitálu

Předpokládejme, že produkční funkce F je neoklasická a že její vstupy jsou pouze kapitál a práce. Místo (5.1.6) budeme tedy pouze psát

$$Y(t) = F[K(t), L(t)] \tag{5.2.1}$$

a uvědomíme si, že se jedná o homogenní funkci stupně jedna. Podle Eulerovy věty pro homogenní funkci stupně jedna, viz např. [84, str. 481], platí

$$F(K,L) = K\,\frac{\partial F}{\partial K}(K,L) + L\,\frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = RK + wL, \tag{5.2.2}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili vztahy (5.1.7). Přihlédneme-li k (5.1.8) a (5.2.2), lze (5.1.10) psát ve tvaru

$$\dot{K} = F(K, L) - C - \delta K. \tag{5.2.3}$$

V uzavřené ekonomice je výstup buď spotřebován, nebo uspořen, tedy platí

$$Y = C + S, \tag{5.2.4}$$

kde $C = C(t)$ je spotřeba a $S = S(t)$ jsou úspory. Označme relativní část výstupu, která je uspořena $s \in (0, 1)$ a nazvěme ji *podílem úspor*. Pro spotřebu nyní platí $C = (1-s)F(K, L)$. S tímto označením lze rovnici (5.2.3) psát jako

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K. \tag{5.2.5}$$

Tato rovnice bývá nazývána *základní rovnice pro tvorbu kapitálu*. Uvědomíme-li si, že pro úspory $S = sF(K, L)$ v uzavřené ekonomice platí

$$I = S, \tag{5.2.6}$$

kde $I = I(t)$ jsou investice v čase t, můžeme rovnici (5.2.5) psát ve tvaru

$$\dot{K} = I - \delta K. \tag{5.2.7}$$

Obecně je podíl úspor funkcí několika proměnných, v tomto oddílu je však nebudeme specifikovat a v případě potřeby budeme psát $s = s(\cdot)$. V základním modelu, který studovali Solow a Swan, se předpokládá, že podíl úspor s je konstantní. V takovém případě říkáme, že podíl úspor je dán *exogenně*, tj. nezávisle na vnitřních procesech v ekonomice.

Vydělíme-li rovnici (5.2.5) množstvím práce L a zavedeme-li intenzivní produkční funkci, získáme rovnici

$$\frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta k. \tag{5.2.8}$$

Podle věty o derivaci podílu můžeme psát

$$\dot{k} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - nk, \tag{5.2.9}$$

kde n je míra růstu práce zavedená předpokladem (5.1.4). Dosadíme-li (5.2.8) do (5.2.9), získáme autonomní diferenciální rovnici nazývanou *neoklasický růstový model* ve tvaru

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k. \tag{5.2.10}$$

Věta 5.2.1 (Solow, 1956, [77]). *Neoklasický růstový model* (5.2.10) *má jednoznačně určený stacionární bod* $k^\circ > 0$, *pro který platí*

$$sf(k^\circ) = (n + \delta)k^\circ. \tag{5.2.11}$$

Tento stacionární bod je asymptoticky stabilní.

Protože v [7] lze nalézt pouze intuitivní důkaz založený na grafickém znázornění situace a [6] i [77] obsahují pouze náznak důkazu, uvedeme následující podrobnější argumentaci. Závěrečné úvahy založené na použití ljapunovské funkce používají ideje uvedené v [10, str. 99].

Důkaz. Pro $k \geq 0$ uvažujme spojitou funkci

$$g(k) = sf(k) - (n + \delta)k.$$

Z vlastností intenzivní produkční funkce k uvedených ve větě 5.1.3 a jedné z Inadových podmínek uvedené ve větě 5.1.1 vyplývá

$$g(0) = 0 \text{ a } \infty = \lim_{k \to 0+} sf'(k) > (n + \delta).$$

Odtud máme $g'(0) = sf'(0) - (n + \delta) > 0$, takže pro dostatečně malá $k > 0$ platí

$$g(k) > 0.$$

Z další Inadovy podmínky pro intenzivní produkční funkci uvedené ve větě 5.1.1 máme

$$0 = \lim_{k \to \infty} sf'(k) < (n + \delta).$$

To znamená, že pro nějaké $\eta > 0$ existuje $\kappa > 0$ takové, že pro $k \geq \kappa$ je

$$sf'(k) \leq (n + \delta) - \eta.$$

Odtud pak

$$g'(k) = sf'(k) - (n + \delta) \leq -\eta < 0.$$

Integrací tohoto vztahu získáme

$$g(k) - g(\kappa) \leq -\eta(k - \kappa),$$

pro $k > \kappa$, odkud

$$\lim_{k \to \infty} g(k) = -\infty.$$

Protože na $(0, \infty)$ nabývá g kladných i záporných hodnot, existuje $k^\circ > 0$, pro které $g(k^\circ) = 0$. Odtud pak získáme vztah (5.2.11). Z věty 5.1.1 také vyplývá

$$g''(k) = sf''(k) < 0, \; k > 0,$$

takže g je spojitá ryze konkávní funkce na $(0, \infty)$ a bod k° je určen jednoznačně.[1]

Pro $0 < k < k^\circ$ je $g(k) > 0$, pro $k > k^\circ$ je $g(k) < 0$. Z uvedených poznámek je dále zřejmé, že g je v bodě k° klesající, takže platí

$$g'(k^\circ) = sf'(k^\circ) - (n + \delta) < 0. \tag{5.2.12}$$

[1]Předpokládejme, že existují alespoň dva různé nulové body funkce g. Nechť $\kappa^\circ > 0$ je takový bod, pro který platí $g(\kappa^\circ) = 0$ a $\kappa^\circ \neq k^\circ$. Uvažujme například, že $\kappa^\circ > k^\circ$. Přímo z definice ryze konkávní funkce získáme $g(k^\circ) > 0$, což odporuje skutečnosti, podle které $g(k^\circ) = 0$. Pokud je $0 < \kappa^\circ < k^\circ$ lze postupovat obdobně.

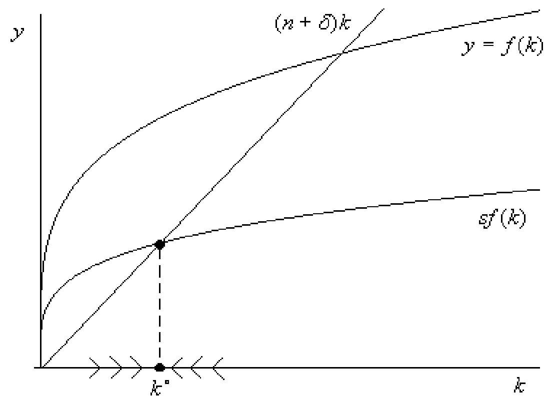
Zabývejme se nyní otázkou stability stacionárního bodu k°. Podle uvedených vlastností funkce g lze usoudit, že pro $k \in (0, k^\circ)$ je $\dot{k} > 0$ a pro $k \in (k^\circ, \infty)$ je $\dot{k} < 0$. V obou případech lze říci, že k konverguje k hodnotě k°, z čehož lze usuzovat na lokální stabilitu bodu k°. [2] Položme dále $x = k - k^\circ$. Protože je f konkávní v k°, platí

$$f(k^\circ + x) \leq f(k^\circ) + xf'(k^\circ). \tag{5.2.13}$$

Uvažujme nyní pozitivně definitní funkci $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. Pro její derivaci vzhledem k rovnici (5.2.10) postupně máme

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) = x\dot{x} = x\dot{k} = x(sf(k^\circ + x) - (n+\delta)(k^\circ + x)) \\ \leq x(sf(k^\circ) + xsf'(k^\circ) - (n+\delta)(k^\circ + x)) = x^2(sf'(k^\circ) - (n+\delta)) < 0,\end{aligned}$$

neboť (5.2.13) a (5.2.12). To podle věty 2.4.6 znamená, že stacionární bod k° je asymptoticky stabilní. □



Obrázek 5.2: Je-li kapitál a výstup nízký, investice přesahují znehodnocení kapitálu, kapitál roste. Je-li kapitál a výstup vysoký, investice jsou nižší než znehodnocení kapitálu a kapitál klesá.

Poznámka 5.2.1. V [7, str. 211] je popsána historická událost, která se dá pomocí neoklasického modelu dobře vysvětlit. V průběhu druhé světové války utrpěla Francie velké ztráty. Zahynulo asi 550 000 obyvatel ze 42 miliónů. Ztráty na kapitálovém vybavení byly však mnohonásobně větší. Dojde-li k větší destrukci kapitálu než pracovní síly, prudce se sníží kapitálová vybavenost k. To se stalo ve Francii. V letech 1946-1950 vykazovala Francie rychlý růst, jehož průměrná hodnota činila $9,6\%$ za rok. Tento rychlý pohyb se dá vysvětlit tak, že při počáteční hodnotě $k(0) < k^\circ$, došlo k výrazné konvergenci k rovnovážnému, tj. dlouhodobému, kapitálovému vybavení k° tak, jak to předpovídá neoklasický model růstu.

Hodnota stacionárního řešení k° rovnice (5.2.10), která představuje rovnovážnou kapitálovou vybavenost, je dána úrovní technologie dané neoklasické produkční funkce $f(\cdot)$, hodnotou podílu úspor s, mírou růstu populace n a mírou znehodnocení kapitálu. Dojde-li ke

[2] Uvědomme si také, že $g(0) = 0$, takže bod 0 je stacionární bod rovnice (5.2.10), nicméně z toho, co jsme uvedli, lze usoudit, že tento bod je lokálně nestabilní.

změně některého z těchto parametrů, změní se rovnovážná kapitálová vybavenost a tedy také rovnovážná úroveň produktu na jednu pracovní jednotku. Tuto rovnovážnou hodnotu budeme považovat za dlouhodobou úroveň kapitálové vybavenosti a hodnotu $y^\circ = f(k^\circ)$ budeme považovat za dlouhodobou úroveň produktu na jednotku pracovní síly. Nyní můžeme učinit některá pozorování:

• *Podíl úspor nemá žádný vliv na dlouhodobou relativní míru růstu produktu na jednotku práce $\gamma_y = \dot{y}/y$, která je rovna nule.* Tento výsledek je víceméně samozřejmý. Viděli jsme, že ekonomika konverguje ke konstantní hodnotě produktu na jednu pracovní jednotku, takže v dlouhém období je růstová míra rovna nule, ať je podíl úspor jakkoliv vysoký.

• Nicméně, jak vyplývá z předchozích poznámek, *podíl úspor určuje rovnovážnou hodnotu produkce na jednu pracovní jednotku.* V případě, že existují dvě ekonomiky se stejnými parametry a jedna z ekonomik má větší podíl úspor, pak dosáhne vyšší rovnovážné hodnoty produktu na jednu pracovní jednotku, neboli $y'(s) > 0,\ s \in (0,1)$.

• Z uvedených dvou pozorování můžeme uzavřít, že *zvýšení podílu úspor povede v krátkém období k vyššímu růstu produkce na jednu pracovní jednotku, ale ne navždy.* Tento jev budeme nazývat dynamika přechodu a budeme se mu věnovat v odstavci 5.2.2.

Zmíníme ještě jeden důsledek, který lze z neoklasického růstového modelu odvodit. Domácnosti příliš nezajímá, jak velký je výstup na jednotku práce, ale spíše velikost spotřeby. Připomeňme, že pro spotřebu platí $C(t) = (1-s)Y(t)$. V ekonomice, ve které je podíl úspor rovný nule, je také kapitál rovný nule a tedy také výstup je nulový. To však znamená, že i spotřeba je nulová. Na druhé straně v ekonomice, ve které je podíl úspor rovný jedné, je všechno zboží investováno a na spotřebu nic nezbývá, takže je také nulová. Tyto dva extrémní případy naznačují, že pravděpodobně existuje nějaká hodnota podílu úspor, pro kterou je spotřeba maximální. Postupujme podrobněji. Víme, že pro danou intenzivní produkční funkci f a pro dané hodnoty parametrů n a δ existuje pro každou hodnotu spotřebního podílu s jednoznačně určený stacionární stav kapitálové vybavenosti $k^\circ > 0$. Takový stav označíme $k^\circ(s)$, přičemž lze pozorovat, že $[k^\circ(s)]' > 0,\ s \in (0,1)$. Spotřeba na jednu pracovní jednotku, budeme také říkat spotřeba na hlavu, je při stacionárním stavu kapitálové vybavenosti $c^\circ(s) = (1-s)f(k^\circ(s))$. Ptejme se, zda a za jakých podmínek lze $c^\circ(s)$ maximalizovat. Odpověď na tuto otázku dává následující tvrzení.

Věta 5.2.2 (Phelps, 1966 - zlaté pravidlo kapitálové akumulace, [77]). *Nechť je neoklasický růstový model* (5.2.10) *ve stacionárním stavu. Maximální podíl spotřeby c_{gold} na jednu pracovní jednotku lze dosáhnout, jestliže pro daný stacionární stav, který označíme k_{gold}, platí*

$$f'(k_{gold}) = n + \delta. \tag{5.2.14}$$

Důkaz. Je

$$c^\circ(s) = (1-s)f(k^\circ(s)) = f(k^\circ(s)) - (n+\delta)k^\circ(s),$$

protože $sf(k^\circ) = (n+\delta)k^\circ$. Ve stacionárním bodě $s = s_{gold}$ platí

$$[c^\circ(s)]' = (f'(k^\circ(s)) - (n+\delta)) \cdot [k^\circ(s)]' = 0.$$

Protože $[k^\circ(s)]' > 0$, máme $f'(k^\circ(s_{gold})) - (n+\delta) = 0$. Protože je $f'(k)$ klesající funkce, existuje pouze jedno řešení předchozí rovnice, které označíme $k_{gold} = k^\circ(s_{gold})$. Nyní již získáme (5.2.14).

Pro druhou derivaci $c^\circ(s)$ v bodě s_{gold} platí

$$\begin{aligned}(c^\circ)''(s_{gold}) = f''(k_{gold}) \cdot [(k^\circ)'(s_{gold})]^2 + [f'(k_{gold}) - (n+\delta)] \cdot [(k^\circ)''(s_{gold})] \\ = f''(k_{gold}) \cdot [(k^\circ)'(s_{gold})]^2 < 0,\end{aligned}$$

protože $f''(k) < 0$ a $[k^\circ(s)]' > 0$. To znamená, že $c^\circ(s_{gold})$ je lokální maximum podílu spotřeby. $\square$

Tento výsledek vede k otázce, zda současné ekonomiky operují se spotřební mírou s_{gold} nebo ne. Označme s_0 počáteční míru úspor v dané ekonomice a předpokládejme, že:

• $s_0 > s_{gold}$, pak libovolné zvýšení spotřební míry na hodnotu $s_2 > s_0$ vede k okamžitému poklesu spotřební míry, $c_2 < c_0$, tedy také spotřeby na hlavu. Nicméně, jak vyplývá z věty 5.2.2, také z dlouhodobého hlediska dochází k poklesu spotřeby na hlavu, tj $c^\circ(s_2) < c^\circ(s_0)$. To je z pohledu současných i budoucích spotřebitelů nežádoucí jev. Ačkoliv přitom došlo ke zvýšení kapitálového vybavení a k růstu produktu na jednu pracovní jednotku, zůstává po celý čas spotřeba na hlavu pod možnou dosažitelnou úrovní. Proto se tento růst, růst při podmínce $k > k_{gold}$, nazývá *dynamicky neefektivní.* Jak je uvedeno v [7, str. 216] v zemích OECD[3] tento jev nenastává a nastává spíše opačná možnost.

• $s_0 < s_{gold}$, pak libovolné zvýšení spotřební míry na hodnotu $s_1 > s_0$ vede k okamžitému poklesu současné míry spotřeby, $c_1 < c_0$, tedy také okamžité spotřeby na hlavu. Nicméně, jak vyplývá z věty 5.2.2, z dlouhodobého hlediska dochází ke zvýšení spotřeby na hlavu, tj. $c^\circ(s_1) > c^\circ(s_0)$. Co by v takovém případě měla udělat vláda? Pokud provede taková opatření, že dojde ke zvýšení míry úspor, pak ji současné domácnosti zřejmě nebudou dále volit, protože dojde k dočasnému snížení jejich možností ke spotřebě. Pokud neprovede žádné opatření ke zvýšení míry úspor, budou budoucí generace spotřebovávat méně, než je v možnostech dané ekonomiky. To je zřejmě také nežádoucí. Kterou možnost si vláda vybere? Jak již bylo řečeno, operují země OECD pod úrovní s_{gold}, takže si spíše vybírají spokojenost současných voličů. Připusťme však, že situace není tak jednoduchá a závisí také na jiných okolnostech.

5.2.2 Míra růstu kapitálové intenzity a dynamika přechodu

Předchozí rozbor nás přivedl k tomu, že kapitálové vybavení ekonomiky se nachází ve stacionárním stavu nebo se k tomuto stacionárnímu stavu snaží přiblížit. Je-li kapitálové vybavení ve stacionárním stavu, platí (5.2.11) a také produkt připadající na jednu pracovní jednotku je ve stacionárním stavu, totiž $y^\circ = f(k^\circ)$. Nyní lze popsat, jaký je za podmínky stacionárního stavu kapitálového vybavení časový vývoj celkového produktu. Je $Y = Ly^\circ = L_0 f(k^\circ)e^{nt}$, to znamená, že míra růstu produktu γ_Y, je $\gamma_Y = \dot{Y}/Y = n$. Je tedy stejná, jako míra růstu pracovní síly. Podobně bychom zjistili, že míra růstu kapitálu je $\gamma_K = \dot{K}/K = n$, míra růstu spotřeby je $\gamma_C = \dot{C}/C = n$ a míra růstu úspor je $\gamma_S = \dot{S}/S = n$. To nás vede k závěru, že stacionární stav kapitálového vybavení dané ekonomiky je charakterizován stejnou konstantní mírou růstu veličin Y, K, S nebo C. Vzhledem k tomu, že míra růstu pracovní síly je exogenní veličinou, narážíme na vážné omezení neoklasické dynamické rovnice. Například to znamená, že míra růstu produktu Y je nezávislá na míře úspor s

[3]OECD-Organization for Economic Cooperation and Development, založena v roce 1961 v Paříži, sdružuje většinu bohatých zemí, které produkují až 70% celosvětového produktu, srv. [7, str. 15].

nebo na úrovni technologie v produkční funkci f. Model však poskytuje několik zajímavých informací, které souvisí s přechodem ekonomiky do jejího stacionárního stavu.

Abychom mohli studovat přechod ekonomiky do stacionárního stavu, budeme uvažovat míru růstu kapitálové intenzity. Zavedeme ji vztahem

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta). \tag{5.2.15}$$

Budeme-li uvažovat, že ekonomika není ve svém stacionárním stavu, lze psát

$$\gamma_k = \gamma_k(k),\ k > 0$$

a zajímat se o vlastnosti této veličiny.

Věta 5.2.3. *Nechť* $k^\circ > 0$ *je stacionární bod neoklasického růstového modelu* (5.2.11) *a* $\gamma_k(k)$ *je míra růstu kapitálové intenzity definovaná vztahem* (5.2.15). *Pak*

(i) $\gamma_k(k) > 0$ *pro* $0 < k < k^\circ$, $\gamma_k(k) < 0$ *pro* $k > k^\circ$ *a* $\gamma_k(k^\circ) = 0$;

(ii) $\lim_{k\to 0+} \gamma_k(k) = \infty$ *a* $\lim_{k\to\infty} \gamma_k(k) = -(n+\delta)$;

(iii) $\gamma_k'(k) < 0$ *pro* $k > 0$.

Důkaz. • Podobně, jako v důkazu věty 5.2.1 položme $g(k) = sf(k) - k(n+\delta),\ k > 0$. Pak $\gamma_k(k) = g(k)/k,\ k > 0$. V důkazu věty 5.2.1 bylo ukázáno, že $g(k) > 0$ pro $0 < k < k^\circ$, $g(k) < 0$ pro $k > k^\circ$ a $g(k^\circ) = 0$. Odtud pak plyne (i).

• Použijeme-li l'Hospitalovo pravidlo a jedné z Inadových podmínek uvedených v části (iii) věty 5.1.1, lze psát

$$\lim_{k\to 0+} \gamma_k(k) = \lim_{k\to 0+} (sf'(k) - (n+\delta)) = \infty.$$

Využijeme-li dále další Inadovu podmínku, získáme (ii)

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k(k) = \lim_{k\to\infty} (sf'(k) - (n+\delta)) = -(n+\delta).$$

• Je

$$\gamma_k'(k) = s\frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} = -\frac{s}{k^2}(f(k) - kf'(k)).$$

Protože podle bodu (ii) věty 5.1.1 je mezní produktivita práce $f(k) - kf'(k) > 0$, je $\gamma_k'(k) < 0$. Tedy platí (iii). □

Absolutní konvergence. Mějme dvě ekonomiky, které mají stejné parametry, a tedy mají také stejný stacionární stav kapitálové vybavenosti k°. Nechť platí $k_{poor}(0) < k_{rich}(0) < k^\circ$, kde $k_{poor}(0)$ je počáteční kapitálové vybavení chudší z obou ekonomik a $k_{rich}(0)$ je kapitálové vybavení bohatší z obou ekonomik. Pak podle (iii) předchozí věty 5.2.3 platí $\gamma_k(k_{poor}(0)) > \gamma_k(k_{rich}(0))$. Tento počáteční stav zřejmě znamená, že také $\gamma_k(k_{poor}(t)) > \gamma_k(k_{rich}(t)),\ t \geq 0$. Můžeme se tedy domnívat, že chudší ekonomika roste v daném období vyšším tempem než ekonomika bohatší. Hypotéza, *že relativní přírůstek výstupu na jednu pracovní jednotku chudších zemí má tendenci být vyšší než u bohatších zemí,* aniž se přihlíží k ostatním charakteristikám ekonomik, se v teorii ekonomického růstu nazývá *absolutní konvergence.* Sledované hodnoty z jednotlivých států USA, kde jsou ekonomické parametry srovnatelné, případně hodnoty ze států sdružených v OECD, o kterých lze také uvažovat jako o podobných ekonomikách, tuto hypotézu potvrzují, srv. [6].

Podmíněná konvergence. Pokud se srovnání provede v celosvětovém měřítku, hypotéza absolutní konvergence neplatí. Lze nalézt mnoho chudých států, jejichž tempo růstu produktu na jednu pracovní jednotku je menší než u států bohatých a tato pozorování dokonce převažují. I tento jev lze vysvětlit, pokud nebudeme předpokládat stejné parametry ekonomik, tedy ani stejné stacionární hodnoty kapitálové vybavenosti nebo produktu na jednotku práce. Připustíme-li, že stacionární stavy ekonomik se liší, přicházíme k hypotéze, která se v teorii ekonomického růstu nazývá *podmíněná konvergence.* Ta je založena na pozorování (*ii*) a (*iii*) věty 5.2.3 a tvrdí, že *ekonomika roste tím rychleji, čím níže je pod svým vlastním stacionárním stavem,* podrobněji viz [6] nebo [23].

5.3 Neoklasický model růstu a technologický pokrok

V předcházející sekci jsme ukázali, že se ekonomika po dostatečně dlouhé době přiblíží rovnovážnému stavu, kdy poměr práce-kapitál, reálný důchod na osobu a spotřeba na osobu zůstávají na konstantní úrovni. To by znamenalo, že se životní úroveň stabilizuje na určité úrovni a pokud by nedošlo ke změně míry úspor obyvatelstva, došlo by k její stagnaci. Taková stabilita růstových koeficientů však není pozorována.

Doposud jsme uvažovali, že úroveň používané technologie je daná a nemění se. Vstup byl ovlivněn pouze množstvím práce a velikostí fyzického kapitálu. Nicméně v dlouhodobém vývoji všech vyspělých světových ekonomik lze pozorovat, že produkce v těchto zemích roste rychleji než vstup práce. Krátkodobý růst lze vysvětlit pomocí akumulace fyzického kapitálu, nicméně akumulace více zdrojů a investic do kapitálu je limitována klesajícími výnosy. Chceme-li vysvětlit zmíněný vyšší růst produkce, bude nutné vzít v úvahu rozvoj lidského poznání. Porovnáme-li způsob výroby před 100 lety a nyní, je zřejmé, že došlo k velkým změnám v postupech i organizaci výroby. Zdá se tedy, že zdrojem vyšší produktivity je výzkum a vývoj – R & D (research and development). To je pojem, který zahrnuje vědecký výzkum, vývoj výrobku, vývoj a inovace výrobních postupů a zlepšení v řízení. Krátce budeme říkat, že dochází ke zlepšování technologie výroby. Tak jak dochází k obohacení práce případně kapitálu technologií, zvyšuje se produktivita práce, a tedy dochází k vyššímu růstu produktu. V oddílu 5.3.1 charakterizujeme produkční funkci s technologickým pokrokem. V oddílu 5.3.2 ukážeme, jak se změní základní rovnice pro tvorbu kapitálu a jak se modifikuje její řešení.

5.3.1 Neoklasická produkční funkce s technologií.

Pomocí technologie lze rozšířit oba vstupy produkce - kapitál a práci. Místo (5.1.11) tedy uvažujme produkční funkci ve tvaru

$$Y = F(BK, AL), \tag{5.3.1}$$

kde $A = A(t)$ a $B = B(t)$ jsou funkce technologie, které rozšiřují vstupy produkční funkce. V [6, str. 53] je ukázáno, že pokud existuje konstantní míra technologického pokroku, je v neoklasickém modelu nutné, aby technologický pokrok obohacoval práci. Takový případ se nazývá *Harodovsky neutrální* technologický pokrok. Z tohoto pozorování budeme vycházet a k předpokladům uvedeným v 5.1.1 přidáme požadavek, podle kterého má technologický pokrok přímý vliv na pracovní sílu. Budeme tedy uvažovat produkční funkci ve tvaru

$$Y = F(K, AL), \tag{5.3.2}$$

kde $A = A(t)$ představuje úroveň technologie. Budeme předpokládat, že

$$\frac{\dot{A}}{A} = x, \tag{5.3.3}$$

kde $x > 0$ je konstantní míra růstu technologie. Celkové množství práce, které je nyní dáno součinem skutečné velikosti práce L a velikostí úrovně rozšiřující technologie A, bývá v ekonomické literatuře, srv. [51], nazýváno *efektivní pracovní vstup* nebo *efektivní práce,* resp. *práce měřená v jednotkách efektivní práce.* Označme tuto veličinu

$$\tilde{L}(t) = A(t)L(t). \tag{5.3.4}$$

Pomocí vztahu $\tilde{k} = K/\tilde{L} \geq 0$ zavedeme *kapitálové vybavení efektivní práce* nebo *efektivní kapitálovou intenzitu.* Položme ještě $\tilde{y} = Y/\tilde{L}$, a nazvěme tuto veličinu efektivní pracovní produktivita.

Protože je F homogenní řádu jedna, můžeme psát

$$Y = AL \cdot F\left(\frac{K}{AL}, 1\right).$$

Použijeme-li předchozí označení, máme

$$f(\tilde{k}) = F(\tilde{k}, 1), \tag{5.3.5}$$

kde f je intenzivní produkční funkce a můžeme psát

$$\tilde{y} = f(\tilde{k}). \tag{5.3.6}$$

Podobně jako ve větách 5.1.1 a 5.1.3 bychom mohli ukázat, že platí

Věta 5.3.1. *Pro intenzivní produkční funkci (5.3.5) příslušnou neoklasické produkční funkci* (5.3.2) *platí*

(i) $f'(\tilde{k})$ *je mezní produktivita kapitálu a pro* $\tilde{k} > 0$ *je* $f'(\tilde{k}) > 0,\ f''(\tilde{k}) < 0$;

(ii) $[f(\tilde{k}) - \tilde{k}f'(\tilde{k})]e^{xt}$ *je mezní produktivita práce a pro* $\tilde{k} > 0$ *je* $f(\tilde{k}) - \tilde{k}f'(\tilde{k}) > 0$;

(iii) $\lim_{\tilde{k}\to 0+} f'(\tilde{k}) = \infty,\ \lim_{\tilde{k}\to\infty} f'(\tilde{k}) = 0.$

(iv) $f(0) = 0,\ \lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k}) = \infty.$

5.3.2 Základní rovnice pro tvorbu kapitálu a technologický pokrok obohacující pracovní sílu.

Opakujme nyní některé kroky z odstavce 5.2.1, kde jsme odvodili základní rovnici pro tvorbu kapitálu. Reprezentativní firma se chová tak, aby maximalizovala svůj zisk

$$\pi(K, L) = F(K, \tilde{L}) - RK - wL,$$

kde $R = R(t)$ je cena nájmu jednotky kapitálu a $w = w(t)$ je mzdová sazba za jednotku práce. Podmínky prvního řádu dávají

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K}(K, \tilde{L}) &= R, \\ \frac{\partial F}{\partial L}(K, AL) = \frac{\partial F}{\partial \tilde{L}}(K, \tilde{L})A &= w. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Podle Eulerovy věty pro homogenní funkci řádu jedna (5.3.2) platí

$$F(K, \tilde{L}) = K\,\frac{\partial F}{\partial K}(K, \tilde{L}) + \tilde{L}\,\frac{\partial F}{\partial \tilde{L}}(K, \tilde{L}) = RK + wL, \tag{5.3.8}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili vztahy (5.3.7) a (5.3.4). Přihlédneme-li k (5.1.8) a (5.3.8), lze (5.1.10) psát ve tvaru

$$\dot{K} = F(K, \tilde{L}) - C - \delta K. \tag{5.3.9}$$

Protože v uzavřené ekonomice pro spotřebu $C = C(t)$ platí $C = (1-s)F(K, \tilde{L})$, kde s je podíl úspor, lze rovnici (5.3.9) psát jako $\dot{K} = sF(K, \tilde{L}) - \delta K$. Získali jsme tak variantu základní rovnice pro tvorbu kapitálu v případě produkční funkce s technologickým pokrokem. Použijeme-li ještě (5.3.9), máme

$$\dot{K} = sF(K, AL) - \delta K. \tag{5.3.10}$$

Vydělíme-li (5.3.10) efektivním množstvím práce AL a použijeme-li intenzivní produkční funkci (5.3.5), získáme

$$\frac{\dot{K}}{AL} = sf(\tilde{k}) - \delta\tilde{k}. \tag{5.3.11}$$

Podle vět o derivaci součinu a podílu můžeme psát

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{k}} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L}\right)\frac{K}{AL} = \\ \frac{\dot{K}}{AL} - (x+n)\tilde{k}, \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

kde n je míra růstu práce zavedená předpokladem (5.1.4) a x je míra růstu technologie zavedená předpokladem (5.3.3). Dosadíme-li (5.3.11) do (5.3.12), získáme *neoklasický růstový model s technologií* ve tvaru

$$\dot{\tilde{k}} = sf(\tilde{k}) - (x + n + \delta)\tilde{k}, \tag{5.3.13}$$

která je formálně shodná s rovnicí (5.2.10). To však znamená, že po doplnění míry růstu technologie, konkrétně pak vlastností uvedených ve větě 5.3.1, lze použít výsledky uvedené v oddílu 5.2.1. Tato podobná tvrzení zde uvedeme bez důkazů, neboť jsou analogické důkazům uvedeným v oddílu 5.2.1.

Věta 5.3.2. *Neoklasický růstový model s technologickým pokrokem* (5.3.13) *má jednoznačně určený stacionární bod* $\tilde{k}^\circ > 0$, *pro který platí*

$$sf(\tilde{k}^\circ) = (x + n + \delta)\tilde{k}^\circ. \tag{5.3.14}$$

Tento stacionární bod je asymptoticky stabilní.

		míra růstu
1.	efektivní kapitálová intenzita, $\tilde{k}$	$\gamma_{\tilde{k}} = 0$
2.	efektivní pracovní produktivita, $\tilde{y}$	$\gamma_{\tilde{y}} = 0$
3.	kapitálová intenzita, k	$\gamma_k = x$
4.	pracovní produktivita, y	$\gamma_y = x$
5.	práce, L	$\gamma_L = n$
6.	kapitál, K	$\gamma_K = x + n$
7.	produkce, Y	$\gamma_Y = x + n$
8.	spotřeba, C	$\gamma_C = x + n$

Tabulka 5.1: Charakteristiky vyváženého růstu uzavřené ekonomiky.

Označme $\tilde{c} = C/\tilde{L}$ spotřebu na jednu efektivní pracovní jednotku. Nyní lze formulovat analogii pravidla zlaté kapitálové akumulace.

Věta 5.3.3. *Nechť je neoklasický růstový model s technologickým pokrokem* (5.3.13) *ve stacionárním stavu. Maximální podíl spotřeby $\tilde{c}_{gold}$ na jednu efektivní pracovní jednotku lze dosáhnout, jestliže pro daný stacionární stav, který označíme $\tilde{k}_{gold}$, platí*

$$f'(\tilde{k}_{gold}) = x + n + \delta. \tag{5.3.15}$$

Stacionární stav kapitálového vybavení $\tilde{k}^\circ$ charakterizuje také stacionární stav efektivní pracovní produktivity, z (5.3.6) máme $\tilde{y}^\circ = f(\tilde{k}^\circ)$. Potom však $Y(t) = A(t)L(t)\tilde{y}^\circ = A_0 L_0 f(\tilde{k}^\circ) e^{(x+n)t}$, kde A_0 je počáteční úroveň technologie a L_0 je počáteční množství práce. Odtud $\gamma_Y = \dot{Y}/Y = x + n$. Podobně bychom ověřili i další výsledky charakterizující vyvážený růst, tj. růst za podmínky stacionárního stavu efektivní kapitálové intenzity, uvedené v tabulce 5.1. Mějme ekonomiku, která roste velmi rychle (v porovnání s ostatními zeměmi nebo v porovnání se svým růstem v minulosti). Zatím uvedené výsledky růstového modelu nabízejí dva způsoby vysvětlení.

- Rychlý růst je způsoben vyšší mírou technologického pokroku x.
- Rychlý růst je důsledkem podmíněné konvergence, kdy se ekonomika přizpůsobuje vyšší hladině kapitálu, který odpovídá efektivní pracovní jednotce, $\tilde{k} = K/AL$.

Jakou odpověď v konkrétním případě upřednostnit? Jestliže růst odráží vysokou míru vyváženého růstu, pak by výstup na jednotku práce (nebo produktivita práce) měl růst mírou růstu technologického pokroku. V tabulce 5.1 se jedná o řádek 4. V druhém případě, kdy růst odráží přizpůsobení vyšší hladině kapitálu na efektivní jednotku práce, by měla míra růstu produktivity převýšit míru růstu technologického pokroku. Taková pozorování byla u některých rozvinutých světových ekonomik učiněna, srv. např. [7].

V této sekci bylo ukázáno, že pokud se v modelu předpokládá technický pokrok, lze zajistit dlouhodobý stabilní růst, který má za následek trvalý růst životní úrovně obyvatelstva a který charakterizuje tabulka 5.1. Díky technickému růstu lze tedy také u vyspělých ekonomik, které se již nacházejí v blízkosti svého rovnovážného stavu, zajistit, aby se růst nezastavil a byl kladný.

5.4 Ramsey–Cass–Koopmansův model

V modelech, které jsme uvedli v sekcích 5.2 a 5.3, jsme považovali míru úspor s za exogenní veličinu. To spotřebitelům nedovoluje, aby optimalizovali svoji spotřebu a může vést k neefektivním úsporám. Abychom získali více realistický model, bylo by vhodné, aby míra úspor nebyla konstantní a aby byla určena optimalizací domácností a firem, které na sebe navzájem působí na konkurenčních trzích.

Kořeny moderní teorie růstu položil Frank Ramsey ve své práci *A Mathematical Theory of Saving,* (Economic Journal, 38), z roku 1928, která do ekonomie zavedla optimalizaci v chování domácností. Jeho myšlenky však byly přijaty mnohem později, až v 60. letech minulého století. V tomto období také došlo k začlenění teorie optimálního řízení do ekonomických modelů. Jak bylo uvedeno v předchozí sekci, základním modelem pro analýzu ekonomického růstu se stal Solow-Swanův neoklasický model. V roce 1965 provedli David Cass v článku *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital acumulation,* (Rewiew of Economic Studies, 32), a nositel Nobelovy ceny za ekonomii z roku 1975 Tjalling C. Koopmans v článku *On the Concept of Optimal Economic Growth,* (The Econometric Approach to Development Planning), první pokus o endogenizaci neoklasického modelu. Pomocí Ramseyovy analýzy spotřebitelské optimalizace získali endogenní determinaci míry úspor. Tím však nezmizela závislost dlouhodobého růstu na exogenním technickém pokroku. V této sekci se budeme jejich myšlenkami zabývat podrobněji. Základní rovnice v tomto modelu bude, stejně jako v neoklasickém modelu s technologickým pokrokem uvedeném v předchozí sekci, rovnice (5.3.13). Abychom se však vyhnuli technickým potížím a snadněji odvodili hraniční podmínku, budeme postupovat jinak a k rovnici (5.3.13) se dostaneme později.

5.4.1 Domácnosti

Pro formulaci modelu použijeme stejné předpoklady jako na str. 145 v oddílu 5.1.1. Populace je tvořena jistým množstvím identických domácností, které mají stejné preference, jsou placeny stejnou mzdovou sazbou, na počátku mají stejný majetek připadající na jednu osobu a rostou stejnou mírou. Podle uvedených předpokladů lze pracovat s reprezentativní domácností. Každá domácnost má jednoho nebo více dospělých, kteří představují pracovní sílu současné generace. Dospělí současné generace, tj. rodiče, se snaží zajistit zdroje prosperity pro své potomky, chovají se altruisticky. Každá generace optimalizuje svoji spotřebu tak, aby měla budoucí generace dostatek prostředků k přežití. Tuto mezigenerační interakci si lze představit tak, že současná generace maximalizuje užitek ze své spotřeby na nekonečném časovém horizontu a bere v úvahu rozpočtová omezení domácnosti. Takto lze připustit, že reprezentativní domácnost existuje v nekonečně dlouhém období, i když jednotlivci žijí pouze v konečném období. Nejdříve popíšeme kritérium, podle kterého domácnosti posuzují užitek ze své spotřeby, pak provedeme modifikaci rovnice (5.1.5) a stanovíme hraniční podmínku.

Užitek ze spotřeby

Současní dospělí předpokládají, že jejich nekonečně dlouho žijící rodina roste podle Malthusova zákona mírou $n \geq 0$, která je závislá na míře porodnosti a míře úmrtnosti. Jestliže normalizujeme počet dospělých v čase nula, tj. položíme $L(0) = 1$, lze velikost rodiny v čase t podle (5.1.1) psát ve tvaru

$$L(t) = e^{nt}. \tag{5.4.1}$$

Tento vztah odpovídá velikosti dospělé populace a současně vyjadřuje velikost pracovní síly rodiny v čase t. Definujme dále spotřebu na jednotku práce $c(t) = C(t)/L(t)$, která odpovídá spotřebě jedné dospělé osoby. Nechť $u(c)$ je užitek odpovídající spotřebě c jedné dospělé osoby. Pak $u[c(t)]e^{nt}$ je užitek odpovídající spotřebě generace žijící v čase t. Každá domácnost si přeje maximalizovat celkový užitek ze spotřeby, který lze vyjádřit vztahem

$$U(c) = \int_0^\infty u[c(t)]e^{nt}e^{-\rho t}dt. \tag{5.4.2}$$

Uvedená formulace předpokládá, že celkový užitek v čase $t = 0$ je vážený součet užitku $u[c(t)]e^{nt}$ generací žijících v budoucích časech t. Váhový koeficient $e^{-\rho t}$, $\rho > 0$ představuje míru časové preference. Kladná hodnota ρ znamená, že je-li spotřeba uskutečněna déle, je její užitek z pohledu současné generace méně hodnotný. Velikost koeficientu ρ odráží míru netrpělivosti současné generace. Je-li koeficient malý, současné generaci na spotřebě v budoucím období záleží, je-li koeficient velký, je současná generace netrpělivá a současné spotřebě dává větší přednost před budoucí spotřebou.

Budeme předpokládat, že funkce užitku $u(c)$ je rostoucí funkce spotřeby $c \in [0, \infty)$, která je konkávní, tj. $u'(c) > 0$ a $u''(c) < 0$. Předpoklad konkávnosti odpovídá tomu, že užitek ze spotřeby jedné jednotky je při vysoké spotřebě menší než užitek ze spotřeby jedné jednotky při nízké spotřebě. Budeme také předpokládat, že $u(c)$ splňuje Inadovy podmínky: $\lim_{c\to 0+} u'(c) = \infty$ a $\lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$. Uvažujme dále, že $\rho > n$, tato podmínka bude v (5.4.31) upřesněna. Podle věty 4.6.2 to znamená, že účelový funkcionál $U(c)$ ve vztahu (5.4.2) je konečný.

Rovnice pro majetek

V oddílu 5.1.1 jsme uvedli diferenciální rovnici (5.1.5), která vyjadřovala růst majetku reprezentativní domácnosti. Definujme majetek na jednotku práce ve tvaru $a(t) = \mathcal{A}(t)/L(t)$. Podle věty o derivaci podílu získáme

$$\dot{a} = \left(\frac{\mathcal{A}}{L}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\mathcal{A}}L - \mathcal{A}\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{\mathcal{A}}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{\mathcal{A}}{L}. \tag{5.4.3}$$

Vydělíme-li (5.1.5) množstvím práce L a použijeme-li (5.1.4), můžeme po úpravě napsat předchozí vztah (5.4.3) jako

$$\dot{a} = (r - n)a + w - c. \tag{5.4.4}$$

Připomeňme, že $r = r(t)$ je úroková míra, která přináší domácnostem příjem za pronájem majetku a $w = w(t)$ je mzdová sazba, která přináší domácnostem příjem za pronájem pracovní síly. Danou rovnici lze interpretovat tak, že tempo růstu majetku na jednotku práce v čase t je přímo úměrné hodnotě majetku v čase t a je upravené o rozdíl mzdové sazby a spotřeby v čase t. Označme $a(0) = a_0$ počáteční majetek připadající na jednu pracovní jednotku. Budeme-li předpokládat, že je tato hodnota známa, získáme řešení rovnice (5.4.4) ve tvaru

$$a(t) = a_0 e^{P(t)} + \int_0^t e^{P(t)-P(s)}(w(s) - c(s))ds, \tag{5.4.5}$$

kde

$$P(t) = \int_0^t r(s) - n\, ds = \int_0^t r(s) ds - nt. \tag{5.4.6}$$

Poznámka 5.4.1. Označme

$$\overline{r}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t r(s) ds. \tag{5.4.7}$$

střední úrokovou míru na intervalu $[0,t]$. Podle oddílu 1.1.1 představuje $e^{\overline{r}(t)\,t}$ výsledek spojitého úročení, které probíhá na intervalu $[0,t]$ a pro které je dána spojitá úroková míra $r(s),\ s \in [0,t]$. To znamená, že je-li v čase $t = 0$ investována jedna jednotka zboží, získáme v čase $t > 0$ již $e^{\overline{r}(t)\,t}$ jednotek zboží. Uvedenou skutečnost lze vyjádřit ekvivalentně. Pokud $\overline{r}(t)$ reprezentuje střední diskontní míru na intervalu $[0,t]$, představuje faktor $e^{-\overline{r}(t)\,t}$ současnou hodnotu jednotky výstupu v čase $t > 0$, tj. tato jednotka má v čase $t = 0$ hodnotu $e^{-\overline{r}(t)\,t}$. V poznámce 1.1.2 jsme uvažovali konstantní diskontní míru $r(s) = r$, $s \in [0,t]$, takže současná hodnota jednotky výstupu v čase $t > 0$ má hodnotu e^{-rt}. Uvědomme si také, že místo (5.4.6) lze psát

$$P(t) = [\overline{r}(t) - n]t. \tag{5.4.8}$$

Hraniční podmínka

Abychom vyloučili řešení rovnice (5.4.4), která vedou v nekonečném časovém horizontu k dluhům, stanovíme hraniční podmínku. Uvažujme nejdříve situaci na konečném časovém horizontu $T > 0$. Každý spotřebitel, který se snaží o maximalizaci užitku ze spotřeby, nezanechá po dosažení hraničního času T žádný svůj majetek, tj.

$$a(T)e^{nT}e^{-\overline{r}(T)T} \leq 0.$$

Na druhé straně užitek lze zvětšit při spotřebě zbývajícího majetku. Stejnou podmínku lze tedy formulovat i pro nekonečný časový horizont a pro $T \to \infty$ můžeme psát

$$\lim_{T\to\infty} a(T)e^{nT}e^{-\overline{r}(T)T} \leq 0.$$

Tato podmínka platí pro všechny spotřebitele v dané uzavřené ekonomice, takže v nekonečném časovém horizontu nemá žádná domácnost majetek a neexistuje domácnost, která by mohla financovat dluhy jiným domácnostem. To znamená, že žádná domácnost pro $T \to \infty$ nevlastní žádný majetek a pro reprezentativní rodinu platí

$$\lim_{t\to\infty} a(t)e^{nt}e^{-\overline{r}(t)t} = 0. \tag{5.4.9}$$

Pokud tento vztah rozepíšeme pomocí (5.4.5) podrobněji, získáme

$$\lim_{t\to\infty} [a(0) + \int_0^t e^{-[\overline{r}(s)-n]s}(w(s) - c(s)ds] = 0 \tag{5.4.10}$$

Podmínka (5.4.10) je v ekonomické literatuře známa jako *negativní podmínka pro Ponziho hru*. Ponziho hra je strategie, podle které někdo vytvoří dluh pro svoji současnou spotřebu a pak používá další půjčky, aby splatil prvotní dluh a úroky, které z něho plynou. Taková strategie umožňuje, aby byla současná hodnota jeho celoživotní spotřeby větší než současná hodnota jeho celoživotních zdrojů. Přijmeme-li podmínku (5.4.10), pak strategii typu financování na dluh nedovolíme.

Poznámka 5.4.2. Podle (5.4.1) je $L(t) = e^{nt}$, takže $a(t)e^{nt} = \mathcal{A}(t)$. Vztah (5.4.9) lze nyní přepsat ve tvaru

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(t)e^{-\overline{r}(t)} = 0,$$

který vyjadřuje, že současná hodnota majetku $\mathcal{A}$ reprezentativní rodiny, která maximalizuje užitek, je na nekonečném horizontu nulová. Vztah (5.4.10) lze také vyjádřit ve tvaru

$$\int_0^\infty e^{-[\overline{r}(t)-n]t}c(t)dt = a(0) + \int_0^\infty e^{-[\overline{r}(t)-n]t}w(t)dt, \tag{5.4.11}$$

který vyjadřuje, že současná hodnota úhrnné spotřeby reprezentativní rodiny je rovna součtu počátečního majetku a současné hodnoty úhrnného platu této rodiny.

5.4.2 Optimalizace spotřeby

Domácnosti se snaží maximalizovat hodnotu celkového užitku, který jim poskytuje spotřeba vyrobeného zboží. Tento celkový užitek je dán vztahem (5.4.2), který pro účely formulace úlohy zapíšeme jako $U(a, c) = U(c)$, kde a, resp. c, je hodnota majetku, resp. spotřeby, na jednu pracovní jednotku. Protože jde o hledání maxima účelového funkcionálu, lze formulovat úlohu optimálního řízení ve tvaru

$$\min(-U(a, c)|\ a \in M_1, c \in M_2), \tag{5.4.12}$$

kde

$$\begin{aligned} M_1 = \{a \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})|\ \dot{a}(t) = (r(t) - n)a(t) + (w(t) - c(t)),& \\ a(0) = a_0 \in \mathbb{R}, \lim_{t\to\infty} a(t)e^{-[\overline{r}(t)-n]\,t} = 0, c \in M_2\}& \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

a

$$M_2 = \{c \in C([0,\infty),\mathbb{R})|\ c(t) \in [0,\infty)\} \tag{5.4.14}$$

Funkce spotřeby c představuje řídící proměnnou v úloze (5.4.12)–(5.4.14). Je tedy třeba nalézt takovou funkci spotřeby, aby byl proces (a, c) optimální. Použijeme-li větu 4.6.3, lze pro úlohu (5.4.12)–(5.4.14) formulovat nutné podmínky. Abychom zkrátili zápis, budeme proměnnou t při zápisu funkcí $a = a(t), c = c(t), r = r(t), w = w(t)$ a adjungované funkce $\psi = \psi(t)$ často vynechávat. S touto konvencí má Hamiltonova funkce úlohy tvar

$$H(t, a, c, \psi_0, \psi) = \psi_0 u(c)e^{-(\rho-n)t} + \psi((r - n)a + w - c). \tag{5.4.15}$$

Budeme-li uvažovat pouze vnitřní body množiny M_2, získáme podle principu maxima

$$\frac{\partial H}{\partial c}(t, a, c, \psi_0, \psi)\bigg|_{(t,\widehat{a},\widehat{c},\psi_0,\psi)} = \psi_0 u'(\widehat{c})e^{-(\rho-n)t} - \psi = 0.$$

Odtud je zřejmé, že není možné, aby $\psi_0 = 0$. Položíme tedy $\psi_0 = 1$ a předchozí vztah zapíšeme ve tvaru

$$\psi = u'(\widehat{c})e^{-(\rho-n)t}. \tag{5.4.16}$$

Pro adjungovanou funkci platí vztah

$$-\frac{\partial H}{\partial a}(t, a, c, \psi)\bigg|_{(t,\widehat{a},\widehat{c},\psi)} = \dot{\psi}.$$

Odtud

$$\dot{\psi} = -(r-n)\psi. \tag{5.4.17}$$

Derivujeme-li (5.4.16) podle času t, dosadíme-li z (5.4.17) a z (5.4.16), získáme po úpravě vztah pro optimální spotřebu $\widehat{c}$

$$r = \rho - \frac{u''(\widehat{c})}{u'(\widehat{c})}\dot{\widehat{c}}.$$

Ukážeme, že tento vztah je výhodné zapsat ve tvaru

$$r(t) = \rho - \frac{u''(\widehat{c}(t))}{u'(\widehat{c}(t))}\,\widehat{c}(t)\,\frac{\dot{\widehat{c}}(t)}{\widehat{c}(t)}, \tag{5.4.18}$$

pro který lze použít vztahy, které připomeneme v následující poznámce.

Poznámka 5.4.3. V oddílu 1.1.7 jsme uvedli vztahy pro vyjádření funkce užitku, které odrážejí konstantní relativní koeficient averze k riziku, tj. platí

$$-\frac{u''(c)}{u'(c)}\,c = \theta, \tag{5.4.19}$$

kde $\theta > 0$ je reálná konstanta. Tento vztah lze také interpretovat jako konstantní elasticitu mezního užitku $u'(c)$. V dalším textu budeme uvažovat funkci užitku ve tvaru

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta},\ c > 0.$$

Konkrétní úloha pro funkci užitku $u(c) = c$ na konečném horizontu je popsána v autorově článku [63].

Poznámka 5.4.4. Pomocí (5.4.18) lze nahlédnout, že pokud je na nějakém časovém intervalu spotřeba konstantní, tj. $\dot{\widehat{c}}(t) = 0$, pak na tomto intervalu platí $r(t) = \rho$. Chce-li se spotřebitel, který maximalizuje užitek ze spotřeby, od nějaké konstantní hladiny spotřeby odrazit, tj. $\dot{\widehat{c}}(t) > 0$, je úroková míra $r(t)$ určena součtem časové preference ρ tohoto spotřebitele a relativní mírou poklesu mezního užitku $u'(\widehat{c}(t))$.

Pomocí (5.4.19) lze (5.4.18) vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\dot{\widehat{c}}}{\widehat{c}} = \frac{1}{\theta}[r-\rho]. \tag{5.4.20}$$

Řešením této rovnice získáme

$$\widehat{c}(t) = \widehat{c}(0)e^{\frac{1}{\theta}[\bar{r}(t)-\rho]t},\ t \geq 0. \tag{5.4.21}$$

Budeme-li znát počáteční optimální hodnotu spotřeby $\widehat{c}(0)$, budeme znát i optimální spotřebu $\widehat{c}(t)$ reprezentativní domácnosti pro $t \geq 0$. Zůstává problém, jak tuto hodnotu $\widehat{c}(0)$ určit, aby byla splněna hraniční podmínka (5.4.10) a proces $(\widehat{a}, \widehat{c})$ byl přípustný. Využijeme-li tvar (5.4.11) této podmínky a (5.4.21), můžeme psát

$$\widehat{c}(0)\int_0^\infty e^{\frac{1}{\theta}[(1-\theta)\bar{r}(t)+\theta n-\rho]t}dt = \widehat{a}(0) + \int_0^\infty e^{-[\bar{r}(t)-n]t}w(t)dt.$$

Označíme-li

$$\mu = \left[\int_0^\infty e^{\frac{1}{\theta}[(1-\theta)\overline{r}(t)+\theta n-\rho]t}dt\right]^{-1},$$

je

$$\widehat{c}(0) = \mu\left[\widehat{a}(0) + \int_0^\infty e^{-[\overline{r}(t)-n]t}w(t)dt\right]. \qquad (5.4.22)$$

Tato podmínka vyjadřuje, že počáteční spotřeba reprezentativní domácnosti je přímo úměrná součtu počátečního majetku domácnosti a současné hodnoty úhrnné mzdy domácnosti. Konstanta úměrnosti μ vyjadřuje sklon domácnosti ke spotřebě svého majetku. Řešení (5.4.21) lze nyní napsat ve tvaru

$$\widehat{c}(t) = \mu\left[\widehat{a}(0) + \int_0^\infty e^{-[\overline{r}(t)-n]t}w(t)dt\right]e^{\frac{1}{\theta}[\overline{r}(t)-\rho]t},\ t \geq 0. \qquad (5.4.23)$$

5.4.3 Firmy

Protože všechny předpoklady a úvahy týkající se reprezentativní firmy byly uvedeny v oddílu 5.1.1 a v sekci 5.3, budeme postupovat rychleji. Připomeňme, že firmy produkují zboží, platí mzdy za pronájem pracovní síly a platí nájem za pronájem kapitálu. Každá firma má přístup k produkční technologii, která splňuje neoklasické předpoklady. Tato technologie je přístupná technickému pokroku obohacujícím práci, tj. produkční funkce má tvar

$$Y = F(K, AL),$$

kde $Y = Y(t)$ je produkt, $K = K(t)$ je vstup, který reprezentuje kapitál, $L = L(t)$ je vstup, který reprezentuje práci a $A = A(t)$ je úroveň technologie, o které se předpokládá, že roste konstantní mírou $x \geq 0$. Pokud na počátku normalizujeme úroveň technologie, tj. položíme $A(0) = 1$, můžeme psát $A(t) = e^{xt}$. Efektivní práci jsme definovali vztahem $\tilde{L}(t) = L(t)A(t)$, dále jsme definovali efektivní kapitálovou intenzitu $\tilde{k} = K/\tilde{L}$ a efektivní pracovní produktivitu $\tilde{y} = Y/\tilde{L}$. Pomocí tohoto označení lze místo produkční funkce $F(K, AL)$ uvažovat intenzivní produkční funkci $f(\tilde{k})$ a psát

$$\tilde{y} = f(\tilde{k}).$$

Vlastnosti této funkce jsou souhrnně uvedeny ve větě 5.3.1. Reprezentativní firma se chová tak, aby maximalizovala svůj zisk. Bod, ve kterém lze nalézt maximální zisk, může být charakterizován pomocí podmínek prvního řádu (5.3.7). Podle věty 5.3.1 a vztahu (5.1.8) lze podmínky (5.3.7) psát ve tvaru

$$f'(\tilde{k}) = r + \delta, \qquad (5.4.24)$$

$$[f(\tilde{k}) - \tilde{k}f'(\tilde{k})]e^{xt} = w, \qquad (5.4.25)$$

kde $r = r(t)$ je úroková míra, $\delta > 0$ je míra znehodnocení kapitálu a $w = w(t)$ je mzdová sazba. Vztah (5.4.24) vyjadřuje, že mezní produktivita kapitálu je rovna součtu úrokové míry a míry znehodnocení kapitálu, tj. ceně pronájmu jednotky kapitálu. Vztah (5.4.25) vyjadřuje, že mezní produktivita práce je rovna mzdové sazbě.

5.4.4 Tržní rovnováha a soustava rovnic

Nyní zkombinujeme chování domácností a firem a popíšeme tržní rovnováhu v dané uzavřené ekonomice. V takové ekonomice neexistují dluhy – kapitál je majetkem nějakého vlastníka uvnitř této ekonomiky. To znamená, že majetek a jedné dospělé osoby je roven kapitálovému vybavení k jedné pracovní jednotky. Vývoj majetku, který odpovídá jedné dospělé osobě, je popsán rovnicí (5.4.4). Pokud v této rovnici položíme $a = k$, $\tilde{k} = k/A = ke^{-xt}$ a použijeme podmínky (5.4.24), (5.4.25), získáme rovnici

$$\dot{\tilde{k}} = f(\tilde{k}) - \tilde{c} - (x + n + \delta)\tilde{k}, \tag{5.4.26}$$

kde $\tilde{c} = C/\tilde{L} = \widehat{c}e^{-xt}$ je spotřeba na jednu efektivní jednotku práce a $\tilde{k}(0) = a(0)$ je dáno. Rovnice (5.4.26) představuje základní rovnici pro efektivní kapitálovou intenzitu (5.3.13) a vyjadřuje omezení pro vývoj zdrojů v uvažované ekonomice.

Použijeme-li (5.4.20) a (5.4.24), získáme postupně

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{\dot{\widehat{c}}}{\widehat{c}} - x = \frac{1}{\theta}(f'(\tilde{k}) - \delta - \rho - \theta x) \tag{5.4.27}$$

Uvažujme nyní (5.4.7), (5.4.24) a vztah $\tilde{k} = ke^{-xt}$. Tyto vztahy nám umožní vyjádřit hraniční podmínku (5.4.9) ve tvaru

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t)e^{-\int_0^t [f'(\tilde{k}(s))-\delta-x-n]ds} = 0. \tag{5.4.28}$$

5.4.5 Stacionární stav soustavy a fázový portrét

V tomto oddílu přistoupíme ke konstrukci fázového portrétu rovinné soustavy (5.4.26) a (5.4.27). Později využijeme hraniční podmínku (5.4.28) ke konstrukci trajektorie optimálního procesu. Uvažujme množinu $\{(\tilde{k}, \tilde{c})^\top \in \mathbb{R}^2 | \ \tilde{k} \geq 0, \ \tilde{c} > 0\}$ a označme

$$\varphi_1(\tilde{k}, \tilde{c}) = f(\tilde{k}) - \tilde{c} - (x + n + \delta)\tilde{k} \ \text{ a } \ \varphi_2(\tilde{k}, \tilde{c}) = f'(\tilde{k}) - \delta - \rho - \theta x. \tag{5.4.29}$$

Množina bodů, pro které platí $\varphi_1(\tilde{k}, \tilde{c}) = 0$, reprezentuje body, v nichž $\dot{\tilde{k}} = 0$ a množina bodů, pro které platí $\varphi_2(\tilde{k}, \tilde{c}) = 0$, reprezentuje body, v nichž $\dot{\tilde{c}} = 0$. Bod, ve kterém platí oba vztahy zároveň, je stacionární bod soustavy.

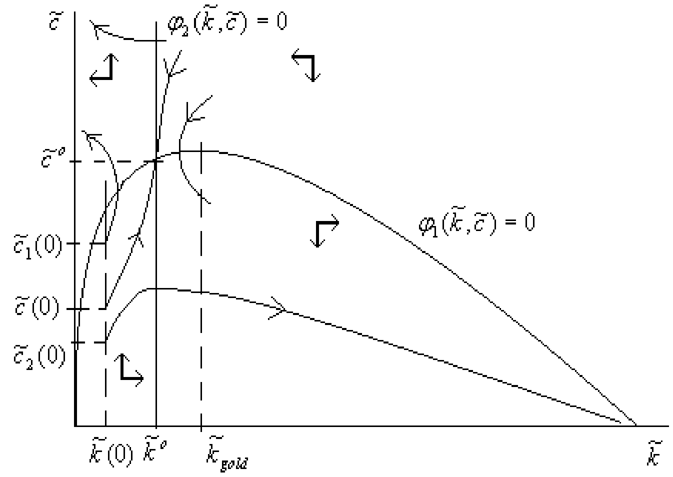
$\tilde{k}$ **– nulklina.** Zabývejme se množinou bodů, pro které $\varphi_1(\tilde{k}, \tilde{c}) = 0$. Pro body z této množiny platí vztah $\tilde{c} = f(\tilde{k}) - (x+n+\delta)\tilde{k}$, odkud je zřejmé, že existuje funkce $\tilde{c} = \tilde{c}(\tilde{k})$, $\tilde{k} \geq 0$ taková, že $\varphi_1(\tilde{k}, \tilde{c}(\tilde{k})) = 0$, $\tilde{k} \geq 0$. Vzhledem k vlastnostem funkce f uvedeným ve větě 5.3.1 (i) existují $\tilde{c}'(\tilde{k})$ a $\tilde{c}''(\tilde{k})$ pro $\tilde{k} > 0$ a platí

$$\tilde{c}'(\tilde{k}) = f'(\tilde{k}) - (x + n + \delta), \ \tilde{c}''(\tilde{k}) = f''(\tilde{k}) < 0.$$

Funkce $f(\tilde{k})$ je ryze konkávní pro $\tilde{k} > 0$ a tedy $f'(\tilde{k})$ je klesající funkce pro $\tilde{k} > 0$. Protože také platí Inadovy podmínky $\lim_{\tilde{k}\to 0^+} f'(\tilde{k}) = \infty$ a $\lim_{\tilde{k}\to\infty} f'(\tilde{k}) = 0$, existuje právě jeden bod $\tilde{k}_{gold} > 0$, ve kterém $f'(\tilde{k}_{gold}) = x + n + \delta > 0$, neboli $\tilde{c}'(\tilde{k}_{gold}) = 0$. Vzhledem k tomu, že funkce $\tilde{c}(\tilde{k})$ je ryze konkávní pro $\tilde{k} > 0$, nabývá v bodě $\tilde{k}_{gold}$ svého globálního maxima na $(0, \infty)$. Hodnotu tohoto maxima označíme $\tilde{c}_{gold}$. Uvedené poznatky ilustruje obr. 5.3. V bodě $\tilde{k}_{gold}$ platí $r = f'(\tilde{k}_{gold}) - \delta = n + x$, tj. úroková míra r je rovna míře růstu $n + x$ výstupu.

$\tilde{c}$ – **nulklina.** Nyní budeme uvažovat množinu bodů, pro které $\varphi_2(\tilde{k},\tilde{c}) = 0$. Protože $f'(\tilde{k}) > 0,\ \tilde{k} > 0$ je spojitá funkce, viz věta 5.3.1 (i), platí Inadovy podmínky a $f''(\tilde{k}) < 0,\ \tilde{k} > 0$, existuje právě jeden bod $\tilde{k}^\circ > 0$ takový, že $f'(\tilde{k}^\circ) = \delta + \rho + \theta x > 0$. To znamená, že pro libovolné $\tilde{c} > 0$ je $\varphi_2(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}) = 0$. Tuto skutečnost ilustruje obr. 5.3. Pro úrokovou míru, jejíž hodnotu označíme r°, platí

$$r^\circ = f'(\tilde{k}^\circ) - \delta = \rho + \theta x. \tag{5.4.30}$$



Obrázek 5.3: Fázový portrét Ramsey-Cass-Koopmansova modelu.

Stacionární bod. Pokud existuje stacionární bod soustavy (5.4.26) a (5.4.27), je v tomto bodě $\tilde{k}(t) = \tilde{k}^\circ, t \geq 0$, tj. efektivní kapitálová intenzita je konstantní. Má-li v daném stacionárním bodě platit hraniční podmínka (5.4.28) je nutné, aby $f'(\tilde{k}^\circ) - \delta - x - n > 0$, neboli $f'(\tilde{k}^\circ) - \delta > x + n$. Tento vztah lze interpretovat tak, že úroková míra ve stacionárním bodě převýší míru růstu ve stacionárním bodě. Použijeme-li (5.4.30), můžeme předchozí nerovnost psát ve tvaru $f'(\tilde{k}^\circ) - \delta = \rho + \theta x > x + n$, neboli

$$\rho > n + (1 - \theta)x. \tag{5.4.31}$$

Platnost tohoto vztahu budeme v dalším textu předpokládat. V opačném případě by neplatila hraniční podmínka (5.4.28) a úloha by neměla význam. Protože $f'(\tilde{k}^\circ) = \delta + \rho + \theta x > \delta + x + n = f'(\tilde{k}_{gold})$ a funkce $f'(\tilde{k})$ je na $(0, \infty)$ klesající (viz věta 5.3.1 (i)), platí důležitý vztah

$$\tilde{k}^\circ < \tilde{k}_{gold}. \tag{5.4.32}$$

Poloha stacionárního bodu $(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ)$ je uvedena na obr. 5.3.

V soustavě (5.4.26), (5.4.27) označme

$$F(\tilde{k},\tilde{c}) = \begin{pmatrix} f(\tilde{k}) - (x + n + \delta)\tilde{k} - \tilde{c} \\ \dfrac{1}{\theta}(f'(\tilde{k}) - \delta - \rho - \theta x)\tilde{c} \end{pmatrix}$$

a uvažujme Jacobiho matici

$$\mathbf{A} = DF(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ) = \begin{pmatrix} f'(\tilde{k}^\circ) - (x+n+\delta) & -1 \\ \dfrac{1}{\theta} f''(\tilde{k}^\circ)\tilde{c}^\circ & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ této matice platí podle poznámky 2.4.6 vztah

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det \mathbf{A} = \frac{1}{\theta} f''(\tilde{k}^\circ)\tilde{c}^\circ < 0.$$

Jsou to tedy reálná čísla, která mají opačná znaménka. Podle věty 2.5.1 to znamená, že stacionární bod $(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ)$ je sedlo.

Poznámka 5.4.5. Určíme směr trajektorií ve fázovém portrétu na obr. 5.3. Uvažujme libovolné a pro účely této úvahy pevné $\tilde{k}^* > 0$. Nechť $\tilde{c}^* > 0$ je takové, že $\varphi_1(\tilde{k}^*, \tilde{c}^*) = 0$. Podle (5.4.29) je $\varphi_1(\tilde{k}^*, \tilde{c})$ klesající lineární funkce proměnné $\tilde{c} > 0$. To znamená, že pro $\tilde{c} < \tilde{c}^*$ je $\varphi_1(\tilde{k}^*, \tilde{c}) > 0$, neboli $\dot{\tilde{k}} > 0$. Podobně pro $\tilde{c} > \tilde{c}^*$ je $\varphi_1(\tilde{k}^*, \tilde{c}) < 0$, neboli $\dot{\tilde{k}} < 0$.

Pokračujme podobnými úvahami. Mějme libovolné pevné $\tilde{c}^* > 0$, pak $\varphi_2(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^*) = 0$. Vzhledem k tomu, že $f'(\tilde{k})$ je klesající funkce pro $\tilde{k} > 0$, je vzhledem k (5.4.29) také $\varphi_2(\tilde{k}, \tilde{c}^*)$ klesající funkce proměnné $\tilde{k} > 0$. To znamená, že pro $\tilde{k} < \tilde{k}^\circ$ je $\varphi_2(\tilde{k}, \tilde{c}) > 0$, neboli $\dot{\tilde{c}} > 0$. Podobně pro $\tilde{k} > \tilde{k}^\circ$ je $\varphi_2(\tilde{k}, \tilde{c}) < 0$, neboli $\dot{\tilde{c}} < 0$.

Poznámka 5.4.6. Označme $a = f'(\tilde{k}^\circ) - (x+n+\delta) > 0$,[4] resp. $b = 1/\theta \cdot f''(\tilde{k}^\circ)\tilde{c}^\circ < 0$. Charakteristická rovnice matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

má tvar $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$. Její záporný kořen je

$$\lambda = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Vlastní vektor příslušný $\lambda < 0$ označme v a konkrétně uvažujme $v = (1, v_2)^\top$. Podle věty 2.5.2 a poznámky 2.5.3 je vektor v směrový vektor tečny k lokální stabilní varietě stacionárního bodu $(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ)$. Platí $\mathbf{A}\, v = \lambda\, v$, odkud $a - v_2 = \lambda < 0$. Pomocí tohoto vztahu a vyjádření kořene $\lambda < 0$, získáme odhad

$$v_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} > a, \tag{5.4.33}$$

odkud $v_2 > f'(\tilde{k}^\circ) - (x+n+\delta) > 0$. Hodnota v_2 vyjadřuje směrnici tečny k lokální stabilní varietě, která prochází stacionárním bodem $(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ)$.

[4] Je $\tilde{k}^\circ < \tilde{k}_{gold}$ a $f'(\tilde{k}^\circ) > f'(\tilde{k}_{gold}) = x+n+\delta$, tedy $f'(\tilde{k}^\circ) - (x+n+\delta) > 0$.

5.4.6 Dynamika přechodu a počáteční hodnota $\tilde{c}$

Představme si, že pro počáteční efektivní kapitálovou intenzitu $\tilde{k}(0) > 0$ platí $\tilde{k}(0) \neq \tilde{k}^\circ$ a ptejme se, zda lze nalézt řešení soustavy (5.4.26), (5.4.27), které splňuje hraniční podmínku (5.4.28). Abychom takové řešení mohli popsat, je užitečné upozornit na rozdíl mezi proměnnými, které zastupují spotřebu a kapitál. Kapitál je stavová veličina. Lze ho akumulovat nebo odinstalovat. Jeho vývoj je určen dřívějšími investicemi. V ekonomické jednotce, kterou se zabýváme, je popsán základní rovnicí pro tvorbu kapitálu a jeho počáteční velikostí. Tato rovnice má v modelu pro efektivní kapitálovou intenzitu tvar (5.4.26) a počáteční hodnota $\tilde{k}(0)$ je dána. Spotřeba je řídící proměnná a domácnosti mohou svobodně volit, jak velkou část svého příjmu spotřebě věnují. V našem modelu optimální volby se spotřeba na jednu efektivní jednotku práce řídí rovnicí (5.4.27). Počáteční hodnotu $\tilde{c}(0)$ mohou domácnosti zvolit libovolně. Doposud jsme nevyužili hraniční podmínku (5.4.28), nicméně je nutné, aby tato podmínka pro optimální proces platila. To znamená, že hraniční podmínka je pro výběr počáteční hodnoty spotřeby určující. Uvažujme, že $\tilde{k}(0) < \tilde{k}^\circ$ a sledujme trajektorie na obr. 5.3.

• Vyberme takovou počáteční hodnotu spotřeby na efektivní jednotku $\tilde{c}(0)$, že $(\tilde{k}(0), \tilde{c}(0)) \in W^s$, kde $W^s = W^s((\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ))$ je globální stabilní varieta bodu $(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ)$, viz definice 2.5.2. To znamená, že $\lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t) = \tilde{k}^\circ$. Protože pro úrokovou míru platí $r(t) = f[\tilde{k}(t)] - \delta$ a funkce f je spojitá, platí $\lim_{t\to\infty} r(t) = f'(\tilde{k}^\circ) - \delta = r^\circ$. Pro tuto hodnotu platí (5.4.30) a dále předpokládáme (5.4.31). Platí tedy také hraniční podmínka (5.4.28).

• Je-li počáteční hodnota spotřeby na efektivní jednotku příliš vysoká, např. $\tilde{c}_1(0)$ na obr. 5.3, je míra úspor malá na to, aby mohla kapitálová intenzita stále růst. Spotřeba se stále zvětšuje a trajektorie procesu protne $\tilde{k}$ – nulklinu. Jakmile k tomu dojde, začne efektivní kapitálová intenzita $\tilde{k}$ klesat. Protože spotřeba na efektivní jednotku stále roste, je podle (5.4.26) hodnota $\dot{\tilde{k}}$ stále více záporná. To znamená, že v nějakém čase dojde k tomu, že $\tilde{k} = 0$. V tomto okamžiku platí $\tilde{y} = f(0) = 0$. Při nulové efektivní produktivitě $\tilde{y} = 0$ je také spotřeba na efektivní pracovní jednotku nulová, tj. $\tilde{c} = 0$. Při této prudké změně se spotřeba přestala řídit rovnicí (5.4.27), takže proces není přípustný.

• Je-li počáteční hodnota spotřeby na efektivní jednotku příliš nízká, např. $\tilde{c}_2(0)$ na obr. 5.3, je míra úspor dostatečně vysoká, takže dochází k růstu kapitálu. Trajektorie procesu protne $\tilde{c}$ – nulklinu a dojde k tomu, že spotřeba na efektivní jednotku začne klesat. Efektivní kapitálová intenzita stále roste a jakmile překročí hodnotu $\tilde{k}_{gold}$, platí pro úrokovou míru $r = f'(\tilde{k}) - \delta < n + x$. Pro takové hodnoty úrokové míry však dojde k porušení hraniční podmínky (5.4.28) a proces není přípustný. Všimněme si také, že při tomto procesu se snižuje spotřeba, takže se zvětšují úspory. Tímto způsobem vznikají nevyužité úspory a užitek ze spotřeby klesá.

Poznámka 5.4.7. Podobný rozbor lze provést také pro $\tilde{k}(0) > \tilde{k}^\circ$. Podle (5.4.22) lze pro každé $\tilde{k}_0 = \tilde{k}(0) \geq 0$ nalézt $\tilde{c}_0 = \tilde{c}(0)$ jednoznačně – ve vztahu (5.4.22) stačí položit $a(0) = \tilde{k}(0)$ a $\tilde{c}(0) = c(0)$. To znamená, že $\tilde{c}_0$ je funkcí $\tilde{k}_0$ a globální stacionární varieta W^s je grafem této funkce. Abychom vyjádřili tento vzájemný vztah mezi optimální spotřebou na efektivní pracovní jednotku $\tilde{c}$ a efektivní kapitálovou intenzitou $\tilde{k}$, budeme stručně psát $\tilde{c} = \tilde{c}(\tilde{k})$, $\tilde{k} \geq 0$. Protože $\dot{\tilde{c}} = \tilde{c}'(\tilde{k}) \cdot \dot{\tilde{k}}$ a $\dot{\tilde{k}} > 0$, $\dot{\tilde{c}} > 0$ nebo $\dot{\tilde{k}} < 0$, $\dot{\tilde{c}} < 0$, je $\tilde{c}(\tilde{k})$ rostoucí funkce, která prochází stacionárním bodem. Konkrétní tvar grafu této funkce závisí na parametrech modelu, viz [6] str. 105.

Doposud uvedené výsledky nás přivádějí k pozorování, že pokud reprezentativní domácnost provádí optimalizaci užitku ze spotřeby svých aktiv, vyvíjí se uzavřená ekonomika podle optimální trajektorie, která konverguje k stacionárnímu bodu $(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ)$. Zabývejme se nyní mírou růstu efektivní kapitálové intenzity při vývoji na optimální trajektorii. Podle (5.4.26) můžeme pro tuto veličinu psát

$$\gamma_{\tilde{k}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{f(\tilde{k}) - \tilde{c} - (x + n + \delta)\tilde{k}}{\tilde{k}}. \tag{5.4.34}$$

Při vývoji podle optimální trajektorie je $\tilde{c} = \tilde{c}(\tilde{k})$, takže také $\gamma_{\tilde{k}} = \gamma_{\tilde{k}}(\tilde{k})$. Pomocí vztahu (5.4.34) můžeme nyní učinit další pozorování:

- Nachází-li se ekonomika ve stacionárním bodě $(\tilde{k}^\circ, \tilde{c}^\circ)$, je $\dot{\tilde{k}} = 0$, takže $\gamma_{\tilde{k}} = 0$. To znamená, že ekonomika je v rovnovážném stavu.
- Uvažujme, že $\tilde{k}_0 = \tilde{k}(0) < \tilde{k}^\circ$ a ekonomika se vyvíjí optimálním způsobem, pak pro trajektorii $\{(\tilde{k}(t), \tilde{c}(t)) \in \mathbb{R}^2 | \, t \geq 0\}$ platí $\varphi_1(\tilde{k}(t), \tilde{c}(t)) > 0$, kde φ_1 je definováno v (5.4.29). To znamená, že $\gamma_{\tilde{k}} > 0$ pro $\tilde{k} < \tilde{k}^\circ$.
- Podobně lze ukázat, že pro $\tilde{k} > \tilde{k}^\circ$ platí $\gamma_{\tilde{k}} < 0$
- Pro směrnici tečny lokální stabilní variety platí vztah (5.4.33), takže

  $$\tilde{c}'(\tilde{k^\circ}) > f'(\tilde{k^\circ}) - (n + x + \delta).$$

  Pomocí (5.4.34) můžeme psát

  $$c'(\tilde{k^\circ}) = f'(\tilde{k^\circ}) - (n + \delta + x) - (\gamma_{\tilde{k}}(\tilde{k}) \cdot \tilde{k})'\Big|_{\tilde{k}=\tilde{k}^\circ}.$$

  Dohromady to znamená, že

  $$(\gamma_{\tilde{k}}(\tilde{k}) \cdot \tilde{k})'\Big|_{\tilde{k}=\tilde{k}^\circ} < 0.$$

  Protože $\gamma_{\tilde{k}}(\tilde{k}^\circ) = 0$ a $\tilde{k}^\circ > 0$, získáme odtud

  $$\gamma_{\tilde{k}}'(\tilde{k}^\circ) < 0.$$

Uvedené výsledky korespondují s větou 5.2.3, která byla odvozena pro Solow-Swanův model a podle které bylo možno vysvětlit absolutní a potenciální konvergenci ekonomiky k rovnovážnému stavu. To nás přivádí k tomu, že tyto výsledky platí také pro model s optimalizací spotřeby domácností, pro který je míra úspor určována endogenně a nikoliv exogenně, jak tomu bylo v Solow-Swanowě modelu. Více ekonomických interpretací a pozorování, které se vztahují k Ramseyově modelu lze nalézt v [6].

Podstatným rysem neoklasických růstových modelů uvedených v této kapitole je, že růst kapitálové intenzity k nebo pracovní produktivity y je určován mírou růstu technologického pokroku x, která je dána exogenně, srv. tabulku 5.1 na straně 160. Technologický pokrok byl považován za daný a v rámci příslušného modelu nebyl vysvětlen. Tato komplikace motivovala vznik dalších modelů, které předpoklad exogennosti technologického pokroku opustily a vytvořily základ další teorie, která je nazývána *nová teorie růstu*. Její rysy již v této práci uvádět nebudeme.

Závěr

V předložené práci bylo ukázáno, že použití obyčejných diferenciálních rovnic je při studiu časového vývoje ekonomických veličin užitečné a že pomocí vhodné interpretace řešení lze ověřit známé, případně získat nové, poznatky ekonomické teorie. Při hledání ekonomických aplikací diferenciálních rovnic byly objeveny dvě poměrně velké oblasti použití. Jedná se o popis hospodářských cyklů a o popis ekonomického růstu.

V první kapitole se podařilo nalézt nebo samostatně formulovat úlohy které mohou být použity přímo při výuce obyčejných diferenciálních rovnic. Uvedené úlohy lze použít buď jako úlohy motivační nebo problémové. Většinu z nich autor využívá při výuce předmětu Základy matematiky 2 na Fakultě informatiky a managementu Univerzity Hradec Králové a zkušenosti s jejich použitím lze hodnotit pozitivně. S jejich pomocí získávají studenti větší důvěru v matematické metody, které s řešením diferenciálních rovnic souvisí. Některé z těchto úloh použil autor v textu [25], kde jsou uvedeny elementární metody řešení diferenciálních rovnic. Další modely, které byly uvedeny v této kapitole, lze nalézt v autorových článcích [64] a [67].

V druhé kapitole byly vybrány a popsány takové pojmy a tvrzení teorie obyčejných diferenciálních rovnic, které lze použít v ekonomických modelech uvedených dále v práci. Podrobně je zde vysvětlen pojem řešení obyčejné diferenciální rovnice a na základě známé definice absolutně spojitého řešení je zde analogicky zaveden pojem po částech hladké řešení.

Ve třetí kapitole se podařilo uceleně formulovat spojité dynamické modely pro dílčí a všeobecnou rovnováhu. V dalších oddílech této kapitoly byly uvedeny modely hospodářských cyklů, které rozšiřují základní spojitý model využívající multiplikátor a akcelerátor. Vzhledem k tématu této práce je podstatné, že byly použity poznatky teorie obyčejných diferenciálních rovnic týkající se stability řešení nebo existence cyklů. Je zde také uveden Kaldorův model hospodářských cyklů, ve kterém jsou podrobně specifikovány předpoklady tohoto modelu. Aby bylo možné zkonstruovat fázový portrét a popsat pozitivně invariantní množinu tohoto problému, jsou nad rámec citované literatury doplněny některé předpoklady. V závěru této kapitoly je uveden model jisté reklamní strategie, který byl popsán v článku [69].

Při popisu ekonomického růstu je užitečné použít poznatky z teorie optimálního řízení. Ukázalo se také, že úloha optimálního řízení je pro tvorbu matematických modelů s ekonomickým obsahem poměrně rozšířená. Proto byla ve čtvrté kapitole tohoto textu věnována pozornost nutným podmínkám pro optimální proces úlohy optimálního řízení, které jsou souhrnně nazývány jako Pontrjaginův princip maxima. Byl zde uveden důkaz nutných podmínek pro optimální řešení Lagrangeovy úlohy a důkaz nutných podmínek pro optimální řešení základní úlohy optimálního řízení. V této kapitole byly uvedeny také některé menší ekonomické modely, které lze pomocí Pontrjaginova principu řešit, jeden z těchto modelů je popsán v článku [63]. Dále zde byl uveden původní autorův model týkající se optimálních výdajů na reklamu jisté značky, která má zpožděný účinek. Tento model je popsán v autorových článcích [66] a [70].

V páté kapitole se podařilo nalézt poměrně podrobný matematický popis neoklasických růstových modelů. Byly zde uvedeny matematické formulace předpokladů neoklasické ekonomie, které umožnily formulovat a dokázat tvrzení o vlastnostech neoklasické intenzivní produkční funkce. Pomocí těchto vlastností byla dokázána existence stacionárního bodu v neoklasickém modelu růstu a také další vlastnosti týkající se konvergence řešení k stacionárnímu bodu. Vzhledem k tomu, že existující literatura při popisu řešení často používá grafické metody, lze předložený text považovat za doplnění literatury věnované tomuto tématu. Základní neoklasický model růstu byl rozšířen o technologii obohacující práci. Dále byl model rozšířen o funkcionál, který vyjadřuje úhrnnou spotřebu typické domácnosti a vznikla úloha optimálního řízení na nekonečném časovém horizontu. Byly zde také uvedeny ekonomické důvody, které umožňují formulovat hraniční podmínky. To pro tento model není typické, v citované literatuře je spíše uvedena terminální podmínka, jejíž platnost pro úlohu optimálního řízení na nekonečném časovém horizontu nebývá ověřena. Pomocí této podmínky lze pak nalézt optimální proces, který poskytuje vysvětlení některých jevů, které jsou v ekonomickém růstu pozorovány.

V práci byly uvedeny modely, ve kterých byla ukázána existence cyklu. V budoucnu by se autor rád věnoval problémům spojených se stabilitou těchto cyklů. Při přípravě tohoto textu se autor také setkával s modely, které byly formulovány pomocí diferenčních rovnic. Tento typ diskrétních modelů je pro ekonomii a management v některých případech více typický. Proto by se v budoucnu autor rád věnoval i tomuto matematickému pojmu a metodám, které vedou k popisu řešení diferenčních rovnic.

Literatura

[1] Alexejev, V. M., Tichomirov, V.M. a Fomin, S.V. *Optimalnoje upravlenije.* Nauka, Moskva, 1979. (Český překlad, Academia, Praha, 1991).

[2] Allen, R. G. D. *Mathematical Economics.* Macmillan & Co Ltd, London, 1963. (Český překlad, Academia, Praha 1971).

[3] Allen, R. G. D. *Macro – Economic Theory, A Mathematical Treatment.* Macmillan & Co Ltd, London, 1970.

[4] Amann, H. *Ordinary Differential Equation.* de Gruyter, Berlin – New York, 1990.

[5] Atkinson, R. L. a kol. *Psychologie.* Portál, Praha, 2003.

[6] Barro, R., Sala–i–Martin, X. *Economic Growth.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2004.

[7] Blanchard, O. *Macroeconomics.* Prentice – Hall, New Jersey, 2000.

[8] Borrelli, R.L., Coleman, C.S. *Differential Equations, A Modeling Perspective.* John Wiley, New York, 1996.

[9] Braun, M. *Differential Equations and Their Applications.* Springer – Verlag, New York – Berlin, 1983.

[10] Brock, W.A., Malliaris, A.G. *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics.* North – Holland, Amsterdam, 1989.

[11] Brunovský, P. *Matematická teória optimálneho riadenia.* Alfa, Bratislava, 1980.

[12] Caputo, M.R. *Foundations of Dynamic Economic Analysis, Optimal Control Theory and Applications.* Cambridge University Press, 2005.

[13] Carlson, D. A., Haurie, A. *Infinite Horizon Optimal Control.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 1987.

[14] Černý, I. *Analýza v komplexním oboru.* Academia, Praha, 1983.

[15] Chiang, A. C. *Elements of Dynamic Optimization.* Wavelend Press, Illinois, 1992.

[16] Chiarella, C. *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1990.

[17] Chow, S. H., Hale, J. K. *Methods of Bifurcation Theory.* Springer – Verlag, New York – Berlin, 1982.

[18] Coddington, E. A., Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw – Hill Book Co, New York – Toronto – London, 1955.

[19] Feichtinger, G. Hopf bifurcation in an advertising diffusion model. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 17:401 – 411, 1992.

[20] Fuchs, K., Tuleja, P. *Základy ekonomie.* Ekopress, Praha, 2003.

[21] Fučík, S., Milota, J. *Matematická analýza II: Diferenciální počet funkcí více proměnných.* SPN, Praha, 1980.

[22] Gabisch, G., Lorenz, H.W. *Business Cycle Theory, A Survey of Methods and Concepts.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 1987.

[23] Gandolfo, G. *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics.* North – Holland, Amsterdam – London, 1971.

[24] Gandolfo, G. *Economic Dynamic.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1997.

[25] Gavalcová, T., Pražák, P. *Základy matematiky 2.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2004.

[26] Glendinning, P. *Stability, Instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations.* Cambridge University Press, 1994.

[27] Gravelle, H., Rees, R. *Microeconomics.* Longman, London, 1992.

[28] Guckenheimer, J., Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields.* Springer – Verlag, New York – Berlin, 1983.

[29] Hadley, G., Kemp, M. C. *Variational Methods in Economics.* North – Holland, Amsterdam, 1971.

[30] Hale, J.K., Koçak, H. *Dynamics and Bifurcation.* Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1991.

[31] Helísek, M. *Makroekonomie – základní kurs.* Melandrium, Slaný, 2000.

[32] Heuser, H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* B.G.Teubner, Stuttgart, 1995.

[33] Hocking, L. M. *Optimal Control: An Introduction to the Theory with Applications.* Oxford University Press, 1991.

[34] Holman, R. a kol. *Dějiny ekonomického myšlení.* C.H. Beck, Praha, 2001.

[35] Hušek, R., Pelikán, J. *Aplikovaná ekonometrie, teorie a praxe.* Professional Publishing, Praha, 2003.

[36] Jarník, V. *Diferenciální počet II.* Academia, Praha, 1984.

[37] Joffe, A. D., Tichomirov, V. M. *Teorija ekstremalnych zadač.* Nauka, Moskva, 1974.

[38] Jonáš, J. a kol. *Oslava ekonomie – Přednášky laureátů Nobelovy ceny za ekonomii.* Academia, Praha, 1994.

[39] Kalas, J., Pospíšil, Z. *Spojité modely v biologii.* Masarykova univerzita, Brno, 2001.

[40] Kalas, J., Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[41] Kamien, M.I., Schwartz, N.I. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.* North – Holland, Amsterdam – New York, 1991.

[42] Kodera, J. *Měnová analýza.* Melandrium, Slaný, 2001.

[43] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. *Elementy teorii funkcij i funkcionalnovo analiza.* Nauka, Moskva, 1972. (Český překlad, SNTL, Praha 1975).

[44] Kurzweil, J. *Ordinary Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo, 1986.

[45] Lancaster, K. *Mathematical Economics.* Dover Publications, New York, 1987.

[46] Lee, F. B., Markus, L. *Foundations of Optimal Control Theory.* John Wiley & Sons, New York, 1967. (Ruský překlad, Nauka, Moskva, 1972).

[47] LeRoy, S. F., Werner, J. *Principles of Financial Economics.* Cambridge University Press, 2001.

[48] Ljusternik, L. A., Sobolev, V. I. *Kratkij kurs funkcionalnovo analiza.* Vysšaja škola, Moskva, 1982.

[49] Lorenz, H.W. *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 1989.

[50] Luenberger, D. G. *Optimization by Vector Space Methods.* John Wiley & Sons, New York, 1969.

[51] Mach, M. *Makroekonomie II, pro magisterské studium.* Melandrium, Slaný, 2003.

[52] Macki, J., Strauss, A. *Introduction to Optimal Control Theory.* Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1982.

[53] Mandl, P. *Řízení a regulace.* Karolinum, Praha, 1993.

[54] Mankiw, N. G. *Zásady ekonomie.* GRADA Publishing, Praha, 2000.

[55] Mansfield, E. Technical change and the rate of imitation. *Econometrica*, 4, 1961.

[56] Mattheij, R. M. M., Molenaar, J. *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice.* John Wiley & Sons, Chichester – New York, 1996.

[57] Odvárko, O. *Matematika pro gymnázia – posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha, 1995.

[58] Ostaszewski, A. *Mathematics in Economics.* Blackwell, Oxford, 1993.

[59] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1991.

[60] Pinch, E.R. *Optimal Control and the Calculus of Variations.* Oxford University Press, 1993.

[61] Pontrjagin, L. S., Boltjanskij, V. G., Gamkrelidze, R. V. a Miščenko, E. F. *Matematičeskaja teorija optimalnych procesov.* Fizmatgiz, Moskva, 1961. (Český překlad, SNTL, Praha, 1964).

[62] Pražák, P. Splácení půjčky. *Rozhledy matematicko – fyzikální*, 77:212 – 216, 2000.

[63] Pražák, P. Application of the Maximum Principle in Economics. In Šafránková, J., editor, *WDS'02*, pages 92 – 97, Praha, 2002. Matfyzpress.

[64] Pražák, P. Phillips' Model of a Closed Economic Unit. In Šafránková, J., editor, *WDS'03*, pages 66 – 71, Praha, 2003. Matfyzpress.

[65] Pražák, P. *Základy matematiky 1.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2003.

[66] Pražák, P. On Continuous – Time Optimal Advertising Model. In Šafránková, J., editor, *WDS'04*, pages 130 – 135, Praha, 2004. Matfyzpress.

[67] Pražák, P. On the Vidale – Wolfe Advertising Model. In *MME'04*, pages 269 – 274. MU Brno, 2004.

[68] Pražák, P. Hopf Bifurcation and Maple. In *ICTMT7*, pages 245 – 251. University of Bristol, 2005.

[69] Pražák, P. Limitní cyklus v modelu reklamy. In *APLIMAT'05*, pages 111 – 116. STU Bratislava, 2005.

[70] Pražák, P. On an Optimal Advertising Model with Lagged effect of Advertising. In Skalská, H., editor, *MME'05*, pages 309 – 314, Hradec Králové, 2005. Gaudeamus.

[71] Puu, T. *Nonlinear Economic Dynamics.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1989.

[72] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw – Hill Book Co, New York – London, 1964. (Ruský překlad, Mir, Moskva, 1966).

[73] Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D. *Ekonomie.* Svoboda, Praha, 1995.

[74] Seierstad, A., Sidsæter, K. *Optimal Control Theory with Economic Applications.* Elsevier, Amsterdam, 1987.

[75] Sethi, S. P., Thomson, G. H. *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics.* Kluwer Academic Publishers, Boston – Dordrecht – London, 2000.

[76] Shone, R. *Economic Dynamics.* Cambridge University Press, 1997.

[77] Simonovits, A. *Mathematical Methods in Dynamic Economics.* Macmillan Press Ltd, London.

[78] Sojka, J., Walter, J. a kol. *Matematické modelovanie ekonomických procesov.* Alfa, Bratislava, 1986.

[79] Stará, J., Milota, J. *Diferenciální rovnice pro IV. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku.* SPN, Praha, 1988.

[80] Štorová, J. Úlohy optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte. Diplomová práce, FMFI Univerzita Komenského, Bratislava, 2001.

[81] Taylor, A. E. *Introduction to functional analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1967. Český překlad, Academia, Praha, 1973.

[82] Tellis, G.J. *Reklama a podpora prodeje.* Grada Publishing, Praha, 2000.

[83] Turnovec, F. *Úvod do mikroekonomickej teórie.* Ekonomická univerzita, Bratislava, 1992.

[84] Varian, H.R. *Microeconomic Analysis.* W.W. Norton & Co, New York, 1992.

[85] Varian, H.R. *Intermediate Microeconomics – A Modern Approach.* W. W. Norton & Co, New York, 1993. (Český překlad, Victoria Publishing, Praha, 1995).

[86] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 1996.

[87] Vidale, M.L., Wolfe, H.B. An operations research study of sales response to advertising. *Operations Research*, 5:370 – 381, 1957.

[88] Weber, R. Optimization and control. Přístup z internetu: http://www.statslab.cam.ac.uk/rrw1/oc/index.

[89] Wei–Bin–Zhang. *Econonomics Dynamics, Growth and Development.* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 1990.

[90] Zimmermann, K. *Úvod do matematické ekonomie.* Karolinum, Praha, 2002.