Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2016 Martin Kašík

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Výherní strategie ve hrách s kostkami

Winning strategies in dice games

Martin Kašík

Vedoucí práce: doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: B M

2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Výherní strategie ve hrách s kostkami vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

9.12.2016, Praha

....

podpis

ANOTACE

Cílem práce je ověřit intuitivní postup hry Kostky z matematického hlediska. Zároveň si práce klade za cíl přinést vhled na konkrétní situace ve hře a ty podrobně rozebrat.

KLÍČOVÁ SLOVA

pravděpodobnost, strategie, kostky, hry

ANNOTATION

The aim of the thesis is to certify intuitive procedure of a dice game from a mathematician' perspective. Alongside certifying the aim is to bring insight into specific situations in the game and to analyse them.

KEYWORDS

probability, strategy, dice, game

Obsah práce

Úvod

Kostkové hry se hrají od starověku, v mnoha obměnách a různých variantách existují ve společnosti dodnes. „*Hazardní hry byly provozovány již ve starověku. Z východu dostaly se z Řecka do Říma, kde se tak rozšířily a zvrhly, že zákonně byly zapovídány. Samotné slovo hasard (z arabského asár), znamená kostka, tedy vlastně hra v kostky*.“ [1] Dle nařízení z půlky devatenáctého století byly na našem území za doby Rakouska-Uherska hazardní hry, tedy i hry s kostkami, zakázány [1]. Samotná definice hazardních her je velmi dobře popsána v Ottově naučném slovníku. „*Hasardní hry jsou všechny hry, při nichž výhra nebo prohra nezávisí na dovednosti hráčově buď vůbec, nebo aspoň v té míře, jako na náhodě.*“ [1] Výsledek tedy minimálně z poloviny záleží na náhodě.

Do života hráče přináší hra v kostky vzrušení, krok do neznáma. Ač hráč provede dle jeho nejlepšího vědomí a svědomí sebelepší tah, náhoda hraje v kostkách důležitou roli, která může zvrátit jednoznačnou partii v několika málo tazích.

Z hlediska objemu sázek zaujímají kostky v dnešní době zanedbatelnou část vsazených peněz: v roce 2014 bylo v kostkách prosázeno necelých 17 milionů korun českých z celkových 138 miliard korun českých prosázených v loteriích a dalších hazardních hrách [2]. Hry s kostkami jsou ale populární a v různých obměnách jsou často odehrávané kostkové turnaje s přáteli.

Zákon č. 202/1990Sb., o loteriích a jiných podobných hrách, ve znění pozdějších předpisů vymezuje legální hazardní hry a rozděluje je dle jednotlivých paragrafů na loterie (peněžité, číselné, věcné), tomboly, výherní hrací přístroje, kursové sázky, sázkové hry provozované v kasinu, interaktivní videoloterní terminály, karetní turnaje, elektromechanické rulety a kostky (§2písm. j).

Zákon o loteriích dále vyjmenovává charakteristické rysy, které loterie a podobné hry splňují, zejména hry, „*kterých se účastní dobrovolně každá fyzická osoba, která zaplatí vklad (sázku), jehož návratnost se účastníkovi nezaručuje. O výhře nebo prohře rozhoduje náhoda nebo předem neznámá okolnost nebo událost uvedená provozovatelem v předem stanovených herních podmínkách (dále jen "herní plán")*.“ (§1odst.2).

Neznámou okolnost popisuje zákon č. 202/1990Sb. Jako okolnost, „jež určuje výhru (výsledek slosování, sportovního utkání, dostihů, závodů a jiné budoucí události), nesmí být nikomu předem známa a musí být takového druhu, aby nemohla být provozovatelem nebo sázejícím ovlivněna.“ (§1odst. 3).

Cílem práce je ověřit intuitivní postup zkušených hráčů z matematického hlediska, tedy podložit léty zažitou zkušenost konkrétními výsledky. Zároveň si práce klade za cíl vnést vhled na konkrétní situace ve hře a ty podrobně rozebrat, následně pak přijít s postupem, který bude možné aplikovat v každém jednotlivém tahu hry. Takový postup umožní maximalizovat bodový zisk hráče při hraní hry Kostky bez toho, aby zbytečně riskoval více, než může vyhrát.

Teoretická východiska práce

Historický přehled vývoje pravděpodobnosti a statistiky

„*Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, která se zabývá studiem zákonitostí v náhodných pokusech. Podobně jako jiné matematické disciplíny se rozvíjela podle potřeb praxe.*“ [3]

Úlohami, které souvisely s náhodnými pokusy, se zabýval v sedmnáctém století již Galileo Galilei. Ten považoval chyby vzniklé při fyzikálních měřeních za výsledky náhodných pokusů. [4] „*V této době se rovněž objevily tendence vybudovat všeobecnou teorii pojištění, která by byla založena na analýze záznamů úmrtí, chorob, nehod apod. Tyto praktické úlohy však byly na tehdejší dobu příliš složité.*“ [3]

Matematická disciplína teorie pravděpodobnosti vznikala díky usilovné práci Pierra de Fermataa, Christiana Huygense a Blaise Pascala v 17. století. Tito velcí matematici vedli čilý korespondenční život, díky kterému byly již v 17. století definovány důležité pojmy statistiky a pravděpodobnosti, jako je třeba právě pravděpodobnost nebo střední hodnota. Dohromady byli schopni popsat základní vlastnosti střední hodnoty a stanovyly vzorec pro její výpočet. [5] V jejich spisech se objevují také teorie hazardních her.

Teorie pravděpodobnosti se ještě koncem 17. století posunula vpřed díky Jakobu Bernoullimu. Ten jako první zformuloval a dokázal jednu ze zásadních vět teorie pravděpodobnosti - zákon velkých čísel. [6]

V následujícím století se o rozvoj pravděpodobnosti jako matematické disciplíny postarali především Abraham de Moivre a Pierre Simeon Laplace. Oba dva matematici dohromady zformulovali a následně dokázali Moivre-Laplaceovu integrální větu.

Užité matematické pojmy

Náhodné pokusy

Náhodné pokusy popisují středoškolské učebnice jako „*pokusy, které při dodržení předepsaných podmínek mohou vést k různým výsledkům; výsledky těchto pokusů se mohou od jednoho provedení pokusu k druhému měnit. Takové pokusy nazýváme náhodné.*“[7, str.70] Na náhodných pokusech jsou hazardní hry stavěné. V loteriích se losuje předem daný počet čísel z celkového počtu čísel v osudí, ve výherních automatech se po zastavení kotoučů hledají shodné symboly v linii. Kotouče se vždy zastaví náhodně a není v moci hráče jimi manipulovat. To plně odpovídá losternímu zákonu, který loterie a podobné hry popisuje tak, že o výhře nebo prohře rozhoduje náhoda.

Nezávislé a závislé jevy

V ruletě padá vždy jedno číslo z 37. Osmnáct z nich je černé barvy, osmnáct červené. Na zelenou nulu si vsadit nelze. Pomineme-li na chvíli nulu, pak pravděpodobnost padnutí červeného a černého čísla je stejná, přesně jedna polovina. Šance, že padne po červeném čísle černé je stejně pravděpodobné, že po červeném padne opět číslo červené. To, jakou barvu bude mít příští číslo na ruletě nikterak neovlivňuje barva posledního taženého čísla. Hráč, který po sérii pěti červených číslech vsadí na černé číslo s pocitem, že výhra je jeho, má stále pravděpodobnost poloviční. Jeho pocit, že by barvy měly být rozloženy rovnoměrně, ho vede k mylnému závěru, že sázka na černé číslo je výrazně pravděpodobnější.

Obdobně funguje házení kostkou. Pravděpodobnost, že na kostce, na které právě padla šestka, padne šestka znovu, je totožná s pravděpodobností hození jakéhokoli jiného čísla. Pro házení jednou kostkou platí, že je stejně pravděpodobné vržení šesti jedniček po sobě jako hození postupky „$1-2-3-4-5-6$.“

„Řekneme, že jevy **A** a **B** jsou nezávislé, jestliže pravděpodobnost jejich současného splnění je rovná součinu pravděpodobností jevů **A** a **B**, tedy

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$“

[7] str.107

Příklad nezávislého jevu

K,L je počet ok hozených na kostce v prvním a druhém hodu. Jev **A** zastupuje tvrzení „Na první kostce padlo číslo větší nebo rovné třema“ Jev **B** zastupuje tvrzení „Na druhé kostce padlo číslo menší než pět.“

Obě dvě podmínky splňují kombinace **K-L** (3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4), celkem 16 kombinací z 36, tedy $\frac{4}{9}$. Pravděpodobnost průniku je $\frac{4}{9}$.

Pravděpodobnost jevu **A** je $\frac{4}{6}$ (na kostce **K** musí padnout číslo 3, 4, 5, 6, na druhou jev A neklade žádnou podmínku).

Pravděpodobnost jevu **B** je také $\frac{4}{6}$ (na kostce L musí padnout číslo 1, 2, 3 nebo 4, na kostku **K** neklade jev **B** žádné podmínky).

Součin pravděpodobností

$$P(A) * P(B) = P(A \cap B)$$

je roven a jevy **A** a **B** jsou tak nezávislé.

Příklad závislého jevu

K,L je počet ok hozených na kostce v prvním a druhém hodu. Jev **A** zastupuje tvrzení „Součet ve dvou hodech **K** + **L** je roven 9.“ Jev B zastupuje tvrzení „Na první kostce padla čtyřka.“

Pro průnik jevů **A** a **B** je z 36 možností příznivá pouze jediná: na první kostce padne čtyřka, na druhé pětka. Pravděpodobnost průniku je tedy $\frac{1}{36}$.

Pravděpodobnost jevu **A** je $\frac{4}{36}$ (mohou padnout kombinace 3-6, 4-5, 5-4, 6-3). Pravděpodobnost jevu **B** je $\frac{1}{6}$.

Pravděpodobnost průniku jevů se nerovná součinu pravděpodobností jednotlivých jevů, jedná se o jevy závislé.

Permutace, permutace s opakováním

Permutace **P** z n prvků je uspořádaná *n-tice* sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou. Pro každé přirozené číslo n definujeme $n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * (n - 1) * n$, $n!$ nazýváme faktoriálem přirozeného čísla.

Konečně **P**(n) všech permutací z n prvků je **P**(n)=n!. [7] str.18

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná *k-tice* sestavená z těchto prvků tak, že se každý v ní vyskytuje aspoň jednou.

Počet **P**´(k_1,k_2,...k_n) permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují k_1, k_2,...,k_n-krát, je

$$P'\left(k_1, k_2, \ldots, k_{n)}\right) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}$$

[8] str.41

Kombinační číslo

Pro všechna celá nezáporná čísla *n, k,* $k \leq n$ je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

Pro symbol $\binom{n}{k}$ je užíván výraz kombinační číslo, čte se „n nad *k*." Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ určuje počet *k*-prvkových podmnožin *n*-prvkové množiny.

[8] str.26

Kombinace, kombinace s opakováním

K-členná kombinace z *n* prvků je neuspořádáná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet **K**(*k*,*n*) všech *k*-členných kombinací z *n* prvků je

$$K(n,k) = \binom{n}{k}$$

K-členná kombinace s opakováním z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát.

Počet **K´**(*k*,*n*) všech *k*-členných kombinací s opakováním z *n* prvků je

$$K'(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Můžeme rovněž říci, že počet **K´**(*k*,*n*) všech *k*-členných kombinací s opakováním z *n* prvků je roven počtu všech *k*-členných kombinací (bez opakování) z *n + k – 1* prvků.

[8] str.26,48

Střední hodnota

„Střední hodnota náhodné veličiny je zobecněním pojmu aritmetického průměru. Jsou-li x_i , $i = 1, 2, \ldots$ *možné hodnoty diskrétní náhodné veličiny* ξ *a* p_i *odpovídající pravděpodobnosti hodnot* x_i *, je střední hodnota náhodné veličiny určena vztahem*

$$EX = \bar{x} = \langle x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \ ,$$

kde EX, $\bar{x}$ *, resp.* $\langle x \rangle$ *jsou nejčastěji používaná označení střední hodnoty."*

[9] str.19; [10]

Pravidla hry Kostky

Cílem hry je získat deset tisíc bodů. Body každý hráč získává hozením jednotlivých figur na kostkách. Každý hráč má neomezené množství hodů, nicméně po každém hodu je nucen odložit alespoň jednu bodovanou kostku nebo celou figuru a házet s kostkami zbývajícími. Při odložení všech šesti kostek se sečte bodový mezivýsledek a hráč hází opět se všemi šesti kostkami. Nemůže-li hráč odložit žádnou bodovanou kostku nebo figuru, jeho kolo je ohodnoceno nulou, nehledě na body v odložených kostkách. Před každým dalším hodem se hráč může rozhodnout v kole nepokračovat a zapsat dosavadní výsledek. Obtížnější varianta počítá s minimálním počtem bodů nutným pro zapsání, obvykle tři sta padesát bodů. Hráč, který má ve třech hodech po sobě nula bodů, přichází o všechny body a začíná od začátku.

Bodování kostek je určeno pevně, a to následujícím způsobem:

„1“ samostatně – sto bodů

„5“ samostatně – padesát bodů

trojice jedniček – tisíc bodů

trojice dvojek – dvě stě bodů

trojice trojek – tři sta bodů

trojice čtyřek – čtyři sta bodů

trojice pětek – pět sta bodů

trojice šestek – šest set bodů

čtveřice – počet bodů za trojici krát dvě

pětice – počet bodů za trojici krát čtyři

šestice – počet bodů za trojici krát osm

postupka „$1-2-3-4-5-6$“ – dva tisíce bodů

Každá figura musí být hozena v rámci jednoho hodu.

Kostkové hry jsou dnes rozšířené po celém světě, existují desítky variant pravidel, z nichž mnoho popisuje John Scarne v jeho Encyklopedii her. [11] s. 454-457

Pro účely této práce se budeme držet vždy těchto pravidel a bodování. Veškeré výpočty a rozbory budou odkazovat právě k výše definovaným pravidlům.

Převzatý model hry od starších a zkušenějších hráčů říká, že k výhře je třeba v každém tahu odkládat hlavně jedničky a vysoce bodované figury, se zbytkem házet znovu. Pětky brát pouze v tom případě, kdy k tomu vývoj hry hráče nutí, obdobně též trojice dvojek nebo trojice trojek. Tento návod je spíše intuitivní a vychází ze zkušenosti hráčů, kteří hru hrají mnoho let.

Postup a koncepce řešení

Mezi stěžejní úkoly práce patří výpočty všech možných vrhů ve hře. Jednotlivé výpočty charakterizují jednotlivé vrhy třemi charakteristikami: střední hodnotou hodu, pravděpodobností padnutí jakékoli bodované figury dle pravidel, a pravděpodobností nepadnutí žádné bodované figury.

Všechny tři charakteristiky budou následně užity pro definování rozhodovacího procesu, který bude udávat jednoznačnou radu hráči, jak se má v jakémkoli okamžiku hry zachovat.

Úkolem práce bude též srovnání rozhodovacího procesu s modely různých herních strategií a v neposlední řadě také ověření z generace na generaci předávané rady, která hráči doporučuje brát vysoce bodované figury, případně padlé jedničky obodované stem bodů, a až v poslední řadě brát padlé pětky hodnocené padesáti body.

V práci bude pracováno se soubory náhodných čísel čítající stovky až desetitisíce náhodných vrhů kostkami, aby se výsledný vzorec co nejvíce přiblížil reálné situaci

V závěru práce budou naprogramovány jednoduché simulace porovnávající jednotlivé herní modely pro ověření, že model jako takový je životaschopný..

Početní část

Pro určení vhodné herní strategie, která bude v závěru práce vyvozena, je třeba spočítat vstupní hodnoty, které budou nezbytné. Jedná se o pravděpodobnost výskytu všech kombinací kostek, tedy jejich relativní zastoupení. Výpočty, především pro hody čtyřmi a více kostkami, jsou podrobněji rozepsány, neboť některé z vypisovaných hodnot, především pak konkrétní bodové hodnoty a počty bodovaných kostek, na kterých padly, budeme pro následné výpočty potřebovat.

Počet možných vrhů je počtem všech kombinací, které na kostkách mohou padnout.

Počet záporných vrhů popisuje všechny vrhy, na kterých nepadne žádná bodovaná figura dle pravidel.

Počet kladných vrhů popisuje všechny vrhy, ve kterých bodovaná figura padne. Počet kladných vrhů společně s počtem záporných vrhů dávají dohromady počet možných vrhů.

Jednotlivé vrhy kostkami

Vrh jednou kostkou

Při vrhu jednou kostkou je šance na padnutí příznivé strany kostky, tedy jedničky nebo pětky, jedna třetina.

Střední hodnota hodu je

$$EX = \sum \frac{1}{6} * 100 + \frac{1}{6} * 50 = \frac{150}{6} = 25$$

Vrh dvěma kostkami

Ve vrhu dvěma kostkami je možné vrhnout celkem 36 různých výsledků.

Vržená kombinace	Počet možných vrhů	Počet záporných vrhů	Počet kladných vrhů
Dvojice	$\binom{6}{1} = 6$	$\binom{4}{1} = 4$	2
Dvě různé kostky	$\binom{6}{2} * 2! = 30$	$\binom{4}{2} * 2! = 12$	18

Z třiceti šesti výsledků je bodovaných celkem dvacet.

Osm hodů je hodnoceno padesáti body (pouze pětka), devět hodů je hodnoceno sto body (pouze jednička společně s hodem dvojice pětek), dva hody hodnoceny sto padesáti hody (kombinace pětky a jedničky) a jeden hod hodnocen dvěma sty body (dvojice jedniček).

Střední hodnota hodu je tak

$$EX = \sum \frac{8}{36} * 50 + \frac{9}{36} * 100 + \frac{2}{36} * 150 + \frac{1}{36} * 200 = 50$$

Vrh třemi kostkami

Při vrhu třemi kostkami připadá v úvahu celkem 216 možných výsledků.

Výsledky padnou v rozložení: trojice; dvojice+ samostatná kostka; tři navzájem různé kostky

Vržená kombinace	Počet možných vrhů	Počet záporných vrhů	Počet kladných vrhů
Trojice	$\binom{6}{1} = 6$	0	6
Dvojice a samostatná kostka	$\binom{6}{1} * \binom{5}{1} * \frac{3!}{2!} = 90$	$\binom{4}{1} * \binom{3}{1} * \frac{3!}{2!} = 36$	54
Tři navzájem různé kostky	$\binom{6}{3} * 3! = 120$	$\binom{4}{3} * 3! = 24$	96

Kladných výsledků padne v hodu třemi kostkami 156 z 216, tedy 72,2%.

Trojice padnou s bodovou hodnotou z pravidel, tedy 1000/200/300/400/500/600 bodů.

Dvanáct vrhů s dvojicí jedniček má hodnotu dvě stě bodů, tři vrhy s pětkou jako třetí kostkou dvě stě padesát hodů.

Dvanáct vrhů s dvojicí pětek má hodnotu sta bodů, tři vrhy, kdy jednička padne jako třetí, má bodovou hodnotu dvou set bodů.

Celkem 48 vrhů (dvanáct se dvojicí stejných kostek a 36 s navzájem různými kostkami) padne pouze s jedničkou, bodová hodnota hodů je sto bodů.

Stejně, tedy 48 vrhů padne pouze s pětkou, bodová hodnota vrhů je padesát bodů.

Ve dvaceti čtyřech vrzích padne společně jednička i pětka s třetí, odlišnou kostkou. Bodová hodnota vrhů je sto padesát bodů.

Střední hodnota hodu je tak

$$EX = \sum\left(\frac{1}{216} * 1000 + \frac{1}{216} * 200 + \frac{1}{216} * 300 + \frac{1}{216} * 400 + \frac{1}{216} * 500 + \frac{1}{216} * 600 + \frac{48}{216} * 50 + \frac{60}{216} * 100 + \frac{24}{216} * 150 + \frac{15}{216} * 200 + \frac{3}{216} * 250\right) = 86{,}806$$

Vrh čtyřmi kostkami

Při vrhu čtyřmi kostkami napočítáme celkem 1296 možných výsledků. Množina bodovaných výsledků se rozšiřuje oproti vrhu třemi kostkami o čtyři bodované kostky – čtveřice a trojice s bodovanou jedničkou či pětkou.

Vržená kombinace	Počet možných vrhů	Počet záporných vrhů	Počet kladných vrhů
Čtveřice	$\binom{6}{1} = 6$	0	6
Trojice	$\binom{6}{1} * \binom{5}{1} * \frac{4!}{3!} = 120$	0	120
Dvě dvojice	$\binom{6}{2} * \frac{4!}{2! * 2!} = 90$	$\binom{4}{2} * \frac{4!}{2! * 2!} = 36$	54
Dvojice a dvě navzájem různé kostky	$\binom{6}{1} * \binom{5}{2} * \frac{4!}{2!} = 720$	$\binom{4}{1} * \binom{3}{2} * \frac{4!}{2!} = 144$	576
Čtyři navzájem různé kostky	$\binom{6}{4} * 4! = 360$	$\binom{4}{4} * 4! = 24$	336

Při vrhu čtyřmi kostkami je šance na bodovaný hod rovna $1092/1296 = 84{,}26\%$.

Součet bodů u kladných výsledků nás vrací k přepočtení výše rozepsaných hodů.

Čtveřice jsou obodovány $2000 + 400 + 600 + 800 + 1000 + 1200 = 5000$

Trojice jedniček a pětka na čtvrté kostce má hodnotu 1050, takové hody mohou padnout čtyři.

Trojice jedniček a jednoho z čísel $2, 3, 4, 6$ má hodnotu 1000 bodů, takových hodů je šestnáct.

Trojice pětek a jednička na čtvrté kostce má hodnotu 600 bodů, takové hody mohou padnout čtyři.

Trojice pětek a jednoho z čísel $2, 3, 4, 6$ má hodnotu 500 bodů, takových hodů je šestnáct.

Trojice dvojek a jedničky má bodovou hodnotu 300, takové hody mohou padnout čtyři.

Trojice dvojek a pětky má bodovou hodnotu 250, takové hody mohou padnout čtyři.

Trojice dvojek a jednoho z čísel $2, 3, 4, 6$ má hodnotu 200 bodů, takových hodů je dvanáct.

Pro trojice trojek, čtyřek a šestek platí obdobné dělení jako pro trojici dvojek.

Dvojice jedniček a pětek má bodovou hodnotu 300, takových hodů může padnout šest.

Dvojice jedniček a jiné dvojice $(2, 3, 4, 6)$ má hodnotu 200 bodů. Takových hodů existuje 24.

Dvojice pětek a jiné dvojice $(2, 3, 4, 6)$ má hodnotu 100 bodů. Takových hodů existuje také 24

Dvojice jedniček, pětka a na poslední kostce nebodované číslo má hodnotu 250 bodů. Je jich 48.

Dvojice jedniček a dvě nebodované kostky má hodnotu 200 bodů, takových je 72.

Dvojice pětek, jednička a na poslední kostce nebodované číslo má hodnotu 200 bodů. Je jich 48.

Dvojice pětek a dvě nebodované kostky má hodnotu 100 bodů, takových je 72.

Nebodovaná dvojice společně s jedničkou a pětkou má hodnotu 150 bodů. Takových je 48.

Nebodovaná dvojice spolu pouze s jedničkou má hodnotu 100 bodů, je jich 144.

Nebodovaná dvojice spolu pouze s pětkou má hodnotu 50 bodů. Ve výčtu jich je 144.

Jednička s pětkou a dvěma nebodovanými kostkami má hodnotu 150 bodů, je jich 144.

Jednička se třemi nestejnými nebodovanými kostkami může padnout 96x.

Pětka se třemi nestejnými nebodovanými kostkami může padnout také 96x.

Střední hodnota hodu je

$$EX = \sum\Big(\frac{1}{1296} * 2000 + \frac{1}{1296} * 400 + \frac{1}{1296} * 600 + \frac{1}{1296} * 800 + \frac{1}{1296} * 1000 + \frac{1}{1296} * 1200 + \frac{4}{1296} * 1050 + \frac{16}{1296} * 1000 + \frac{4}{1296} * 700 + \frac{4}{1296} * 650 + \frac{16}{1296} * 600 + \frac{20}{1296} * 500 + \frac{4}{1296} * 450 + \frac{16}{1296} * 400 + \frac{4}{1296} * 350 + \frac{22}{1296} * 300 + \frac{52}{1296} * 250 + \frac{156}{1296} * 200 + \frac{192}{1296} * 150 + \frac{336}{1296} * 100 + \frac{240}{1296} * 50\Big) = \frac{185000}{1296} = 142{,}75$$

Vrh pěti kostkami

Pět kostek generuje celkem 7776 možností. K vrhům se čtyřmi kostkami přibývají pětice, čtveřice s bodovanou kostkou, trojice s dvojicí kostek, trojice se dvěma navzájem různými kostkami, dvojice se třemi navzájem různými kostkami a dvě dvojice.

	Vržená kombinace	Počet možných vrhů	Počet záporných vrhů	Počet kladných vrhů
a)	Pětice	$\binom{6}{1} = 6$	0	6
b)	Čtveřice	$\binom{6}{1} * \binom{5}{1} * \frac{5!}{4!} = 150$	0	150
c)	Trojice + dvojice	$\binom{6}{1} * \binom{5}{1} * \frac{5!}{3! * 2!} = 300$	0	300
d)	Trojice + dvě navzájem různé kostky	$\binom{6}{1} * \binom{5}{2} * \frac{5!}{3!} = 1200$	0	1200
e)	Dvě dvojice	$\binom{6}{2} * \binom{4}{1} * \frac{5!}{2! * 2!} = 1800$	$\binom{4}{2} * \binom{2}{1} * \frac{5!}{2! * 2!} = 360$	1440
f)	Dvojice + navzájem různé kostky	$\binom{6}{1} * \binom{5}{3} * \frac{5!}{2!} = 3600$	$\binom{4}{1} * \binom{3}{3} * \frac{5!}{2!} = 240$	3360
g)	Pět různých kostek	$\binom{6}{5} * 5! = 720$	0	720

Vhledem do problematiky snadno zjistíme, že bodované jsou všechny hody s pěti navzájem různými kostkami– pět navzájem různých kostek vždy bude obsahovat alespoň jedno z čísel 1 nebo 5.

Kladných výsledků je v případě hodu pěti kostkami většina, přesně 7176 z 7776. Šance, že v takovém hodu hodíme bodovanou figuru, je skoro 92,3%.

Bodové hodnoty kladných výsledků

Pro zhodnocení vhodnosti házet v další části práce je třeba spočítat průměrnou hodnotu jednoho hodu při hodu pěti kostkami.

a) Pro pětice platí 4000 (jedničky) bodů + 800 bodů (dvojky) + 1200 bodů (trojky) + 1600 bodů (čtyřky) + 2000 bodů (pětky) + 2400 bodů (šestky).

b) U čtveřic je nutné rozlišit hody, kdy poslední kostkou je kostka bodovaná a nebodovaná. Pro hody, kdy je poslední kostka nebodovaná, je jejich hodnota rovná bodovému zisku čtveřice (tedy $2000/400/600/800/1000/1200$ bodů). Počet takových hodů pro čtveřici dvojek, trojek, čtyřek nebo šestek je pokaždé stejný: ke čtveřici vybírám pátou kostku jako jednu ze tří zbývajících (ke čtveřici dvojek může být pátá kostka trojkou, čtyřkou nebo šestkou). Tedy $\binom{3}{1} * \frac{5!}{4!} = 15$.

Pro čtveřici jedniček nebo pětek vybírám na poslední kostce jedno číslo ze čtyř: $\binom{4}{1} * \frac{5!}{4!} = 20$

Padne-li bodovaná pátá kostka, pak pro čtveřici dvojek, trojek, čtyřek a šestek platí, že kombinací hodů je pokaždé $\binom{2}{1} * \frac{5!}{4!} = 10$. Pro čtveřici čtyřek je pět hodů s jedničkou a pět hodů s pětkou – jedná se o jednoduchou permutaci. Pro čtveřici jedniček a pětek pak ke kombinací pět a pět – pátá kostka je vybírána jako jedna z jediné možné: pro čtveřici jedniček pětka, pro čtveřici pětek jednička. Bodová hodnota hodu se rovná součtu bodů za čtveřici a pátou bodovanou kostku.

c) Padne-li na kostkách trojice a dvojice, pak pro trojici dvojek, trojek, čtyřek a šestek může padnout ve dvou pětinách případů bodovaná dvojice jedniček nebo pětek. Například k padesáti trojicím dvojek padne deset dvojic jedniček, trojek, čtyřek, pětek a šestek.

Pro trojice jedniček a pětek pak vybíráme dvojici z pěti zbývajících stran kostek, z nichž jediná dvojice je bodovaná. Pro trojici jedniček je to dvojice pětek, pro trojici pětek pak dvojice jedniček. Z padesáti hodů trojice jedniček, ve kterých padne dvojice, padne v deseti případech dvojice pětek. Analogicky pro trojici pětek.

d) Při hodu trojice a dvou navzájem různých kostek padne z dvanácti set hodů dvě stě trojic jedniček, dvě stě trojic dvojek. Obdobně pro zbylá čísla.

K dvěma stům trojic čtyřek padne $\binom{3}{2} * \frac{5!}{3!} = 60$ kombinací nebodovaných kostek. Dále padne$\binom{3}{1} * \frac{5!}{3!} = 60$ trojic s jedničkou a stejný počet dvojic s pětkou.

Kombinací, ve kterých k trojici čtyřek padne jednička i pětka zároveň, je $\frac{5!}{3!} = 20$. Počty kombinací lze převést na trojice dvojek, trojek a šestek.

K dvěma stům trojic jedniček padne $\binom{4}{2} * \frac{5!}{3!} = 120$ dvojic bez pětky a $\binom{4}{1} * \frac{5!}{3!} = 80$ dvojic s pětkou. Obdobné výpočty platí pro trojici pětek.

e) Padnou-li při hodu pěti kostkami na kostkách dvě dvojice, pro výpočet bodových hodnot budeme rozlišovat případy, kdy padají bodované jedničky a pětky, a kdy nikoli. Celkem padne 1800 různých kombinací, z čehož 1440 je bodovaných.

Padne-li dvojice jedniček i dvojice pětek zároveň, pak takových hodů je právě $\binom{4}{1} * \frac{5!}{2!*2!} = 120$. Jejich bodová hodnota je tři sta bodů.

Padne-li dvojice jedniček a na páté kostce pětka, možných kombinací je $\binom{4}{1} * \frac{5!}{2!*2!} = 120$. Bodová hodnota takového hodu je 250 bodů.

Obdobně pro dvojici pětek a jednu jedničku platí, že kombinací je 120. Jejich bodová hodnota je dvě stě bodů.

Hodů, při kterých padne dvojice jedniček a zbytek jsou nebodované kostky, padne $\binom{4}{1} * \binom{3}{1} * \frac{5!}{2!*2!} = 360$. Bodová hodnota těchto hodů je dvě stě bodů.

Hodů, při kterých padne dvojice pětek a zbytlé kostky nejsou bodované, je taktéž 360. Bodová hodnota těchto hodů je sto bodů.

Jednička a dvě nebodované dvojice padne v $\binom{4}{2} * \frac{5!}{2!*2!} = 180$ případech. Bodová hodnota hodu je sto bodů.

Pětka s ostatními nebodovanými kostkami padne také ve 180 případech, bodová hodnota těchto hodů je padesát bodů.

f) Padne-li dvojice stejných čísel a ostatní tři jsou navzájem různá, pak pro každou dvojici je možné zbylou trojici vybrat šesti sty způsoby.

Pro dvojici dvojek, trojek, čtyřek a šestek platí, že v $\binom{3}{3} * \frac{5!}{2!} = 60$ případech nepadne na kostkách ani bod. Dále, padne-li ve zbylé trojici jednička, počet takových hodů se rovná $\binom{3}{2} * \frac{5!}{2!} = 180$. Bodová hodnota těchto hodů je sto bodů. Obdobně, padne-li ve zbylé trojici pětka, těchto hodů je opět 180. Bodová hodnota hodů je 50 bodů.

Padnou-li na zbylých kostkách jednička i pětka, pak počet těchto hodů je roven $\binom{3}{1} * \frac{5!}{2!} = 180$. Bodová hodnota těchto hodů je sto padesát bodů.

Počty hodů je třeba vynásobit čtyřmi, a to za každé z čísel $(2, 3, 4, 6)$.

Pro dvojici jedniček platí, že nepadne-li ve zbývajících kostkách pětka, pak těchto hodů je $\binom{4}{3} * \frac{5!}{2!} = 240$. Bodová hodnota těchto hodů je dvě stě bodů. Padne-li ve zbývajících kostkách pětka, pak je hodů $\binom{4}{2} * \frac{5!}{2!} = 360$. Bodová hodnota těchto hodů je dvě stě padesát bodů.

Pro dvojici pětek platí stejné výpočty, s jediným rozdílem, a to bodovými hodnotami. 240 hodů má hodnotu sto bodů a 360 hodů má hodnotu dvou set bodů.

g) Padne-li pět navzájem různých kostek, rozdělíme je na tři případy.

Padnou-li zároveň jednička a pětka, takových hodů je $\binom{4}{3} * 5! = 480$. Bodová hodnota těchto hodů je sto padesát bodů.

Padne li pětice bez pětky, hodů je $\binom{4}{4} * 5! = 120$. Bodová hodnota těchto hodů je sto bodů.

Padne-li pětice bez jedničky, pak je hodů 120 a jejich bodová hodnota je padesát bodů.

Po podrobném rozebrání všech výsledků je třeba sečíst počty hodů s příslušnou bodovou hodnotou a dosadit do vzorce pro střední hodnotu

$EX = \sum(\frac{1}{7776} * 4000 + \frac{1}{7776} * 800 + \frac{1}{7776} * 1200 + \frac{1}{7776} * 1600 + \frac{1}{7776} * 2000 + \frac{1}{7776} *$
$2400+57776*2050+207776*2000+57776*1300+57776*1250+157776*1200+1577$
$76*1100+807776*1050+1807776*1000+57776*900+57776*850+257776*800+20$
$7776*750+857776*700+657776*650+1957776*600+207776*550+2457776*500+$
$857776*450+1857776*400+807776*350+2807776*300+5407776*250+11707776*$
$200+12007776*150+16207776*100+10207776*50)=17557507776=225{,}79$ bodu.

Vrh šesti kostkami

Počet všech možných výsledků na kostkách je 6^6, tedy 46656. Stejně jako v předchozích případech, i v této podkapitole bude nutné pro řádné sečtení všech možných kombinací rozdělit hody na jednotlivé typy – šestice, pětice, čtveřice, trojice, dvojice a všechny jejich možné kombinace.

Kombinace s nulovou bodovou hodnotou

Jakmile se objeví ve výsledcích trojice, čtveřice, pětice nebo šestice, vždy se jedná o bodovaný výsledek. Pouze ve dvou typech hodů se nám objeví nebodované figury. Jedná se o tři dvojice a dvě dvojice se dvěma nestejnými kostkami. V případě hození kombinace jedné dvojice a čtyř navzájem různých kostek na kostkách padne pět ze šesti různých hodnot kostky, přičemž je zřejmé, že alespoň jedno z čísel 1,5 se bude na kostkách vyskytovat.

Tři dvojice

V případě, že padnou nebodované tři dvojice kostek, vybíráme ze čtyř hodnot $(2, 3, 4, 6)$ tři a ty mezi sebou necháme permutovat:

$$\binom{4}{3} * \frac{6!}{2!*2!*2!} = 360.$$

Tři sta šedesát takových hodů (z 1800) bude nebodovanaých.

Dvě dvojice a dvě navzájem různé kostky

U tohoto typu hodu vybíráme ze čtyř nebodovaných kostek dvě, na místa různých kostek pak vybíráme dvě kostky ze dvou. Následně je necháme permutovat:

$$\binom{4}{2} * \binom{2}{2} * \frac{6!}{2!*2!} = 1080.$$

Z celkového počtu 10800 hodů, ve kterých padnou dvě dvojice a dvě nestejné kostky, bude rovná desetina nebodovaná.

	Vržená kombinace	Počet možných vrhů	Počet záporných vrhů	Počet kladných vrhů
a)	šestice	$\binom{6}{1} = 6$	0	6
b)	Pětice + samostatná kostka	$\binom{6}{1} * \binom{5}{1} * \frac{6!}{5!} = 180$	0	180
c)	Čtveřice + dvojice	$\binom{6}{1} * \binom{5}{1} * \frac{6!}{4! * 2!} = 450$	0	450
d)	Čtveřice + dvě nestejné kostky	$\binom{6}{1} * \binom{5}{2} * \frac{6!}{4!} = 1800$	0	1800

e)	Dvě trojice	$\binom{6}{2} * \frac{6!}{3! * 3!} = 300$	0	300
f)	Trojice, dvojice a samostatná kostka	$\binom{6}{1} * \binom{5}{1} * \binom{4}{1} * \frac{6!}{3! * 2!} = 7200$	0	7200
g)	Trojice a tři nestejné kostky	$\binom{6}{1} * \binom{5}{3} * \frac{6!}{3!} = 7200$	0	7200
h)	Tři dvojice	$\binom{6}{3} * \frac{6!}{2! * 2! * 2!} = 1800$	$\binom{4}{3} * \frac{6!}{2! * 2! * 2!} = 360$	1440
i)	Dvě dvojice a dvě nestejné kostky	$\binom{6}{2} * \binom{4}{2} * \frac{6!}{2! * 2!} = 16200$	$\binom{4}{2} * \binom{2}{2} * \frac{6!}{2! * 2!} = 1080$	15120
j)	Dvojice a čtyři navzájem různé kostky	$\binom{6}{1} * \binom{5}{4} * \frac{6!}{2!} = 10800$	0	10800
k)	Šest různých kostek (postupka)	$\binom{6}{6} * 6! = 720$	0	720

Z celkového počtu 46656 kombinací je 45216 bodovaných. Jedná o více než 96,9% hodů

Bodování kladných výsledků

a) Šestice jsou hodnoceny jako osminásobek hodnoty trojice danými kostkami. Šestice jsou tedy hodnoceny 8000/1600/2400/3200/4000/4800 body.

b) U pětice a samostatné kostky je třeba bodově rozlišit pětice samostatně nebodovaných kostek (dvojky, trojky, čtyřky a šestky) a pětice jedniček a pětek.

Ze sto osmdesáti kombinací s péticemi je pětic každé hodnoty šestina, tedy třicet. Pro pětice samostatně nebodovaných kostek platí, že ze zbývajících pěti kostek vybíráme jednu – tři jsou nebodované, jedničku a pětku. K osmnácti pěticím dvojky padne nebodovaná kostka, hodnota hodu se tak rovná bodové hodnotě pětice. K šesti péticím připadne jednička, bodová hodnota takového hodu je rovná součtu bodové hodnotě pětice a stobodů za jedničku. K šesti péticím dvojky padne pětka, bodová hodnota hodu je pak rovná součtu bodové hodnotě pětice a padesáti bodů za hozenou pětku. Obdobně pro pětice trojek, čtyřek a šestek.

K dvaceti čtyřem pěticím jedniček padne nebodovaná kostka, bodová hodnota těchto hodů je tak rovná 4000 bodů za pětici jedniček. Zbylých šest hodů je vyhrazeno pro pětici jedniček společně s pětkou. Bodová hodnota těchto hodů je rovná 4050 bodů.

K dvaceti čtyřem pěticí pětek padne nebodovaná kostka, bodová hodnota těchto hodů je tak rovná 2000 bodů za pětici pětek. Zbylých šest hodů je vyhrazeno pro pětici pětek společně s jedničkou. Bodová hodnota těchto hodů je rovná 2100 bodů.

c) Čtveřic a dvojic zároveň v jednom hodu může padnout celkem 450. Pro výpočet bodové hodnoty rozdělíme hody na ty, ve kterých na pozici dvojice jsou bodované kostky (dvě jedničky nebo dvě pětky) a kdy padnou kostky nebodované.

Ze sedmdesáti pěti kombinací pro každou ze šesti čtveřic platí, že patnáct kombinací tvoří s každou dvojicí. V případě čtveřice dvojek, trojek, čtyřek a šestek jich je 45 s nebodovanou dvojicí, bodová hodnota hodu se rovná bodům čtveřice ($400/600/800/1200$). Patnáct hodů připadá kombinacím s dvojicí jedniček, bodová hodnota hodu je rovná součtu bodům hozené čtveřice a dvou set bodů za dvojici jedniček ($600/800/1000/1400$). Zbylých patnáct hodů připadá na kombinace s dvojice pětek. Bodová hodnota hodu je pak rovna 500 bodům v případě čtveřice dvojek, 700 bodům v případě čtveřice trojek a 900, respektive 1300 bodů v případě čtveřice čtyřek, respektive čtveřice šestek.

Ze 75 kombinací pro čtveřici jedniček je patnáct společně s dvojicí pětek, bodová hodnota hodu je pak 2100 bodů. Zbylých 60 hodů je pak s dvojicí nebodovaných kostek. Bodová hodnota je pak rovná bodům za čtveřici, tedy 2000 bodů.

Ze 75 kombinací pro čtveřici pětek je patnáct společně s dvojicí jedniček, bodová hodnota hodu je pak 1200 bodů. Zbylých 60 hodů je pak s dvojicí nebodovaných kostek. Bodová hodnota je pak rovná bodům za čtveřici, tedy 1000 bodů.

d) Kombinací pro čtveřici a dvě navzájem různé kostky je 1800 Každá čtveřice se v takových hodech vyskytuje třistakrát.

V případě čtveřic dvojek, trojek, čtyřek a šestek platí, že $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{3}{1} * \frac{6!}{4!} = 90$ hodů obsahuje jedničku a nebodovanou kostku, bodová hodnota hodu je pak dána jako součet bodů za čtveřici plus sto bodů za hozenou jedničku, tedy $500/700/900/1300$ bodů.

Totožně 90 hodů obsahuje pětku a nebodovanou kostku. Bodová hodnota hodu je pak $450/650/850/1250$ bodů.

Padne-li ke čtveřici dvojek, trojek, čtyřek nebo šestek zároveň jednička i pětka, takovýcho hodů je $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \frac{6!}{4!} = 30$. Bodová hodnota hodů je pak dána jako součet bodů za čtveřici spolu se stopadesáti body za hozenou jedničku a pětku, tedy $550/750/950/1350$ bodů.

V $\binom{1}{1} * \binom{3}{2} * \frac{6!}{4!} = 90$ hodech pak padne pouze bodovaná čtveřice s bodovou hodnotou $400/600/800/1200$ bodů.

Z 300 čtveřic jedniček, které padnou v kombinaci se dvěma navzájem různými kostkami, jich $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \frac{6!}{4!} = 120$ padne společně s pětkou. Bodová hodnota hodu je 2050 bodů.

Dále pak $\binom{1}{1} * \binom{4}{2} * \frac{6!}{4!} = 180$ hodů padne bez pětky. Bodová hodnota hodu je pak 2000 bodů.

Obdobné výpočty platí pro čtveřice pětek. 120 hodů padne společně s jedničkou, bodová hodnota hodu je 1100 bodů.

180 hodů pak padne bez jedničky, bodová hodnota hodu je 1000 bodů.

e) Všech tři sta hodů dvou trojic najednou je bodovaných. Pro další výpočty je více než vhodné rozepsat všechny hodnoty, kterých hody nabývají. Pro každé dvě trojice platí, že počet permutací v jednom hodu je roven $\frac{6!}{3!*3!} = 20$. Každá z následujících patnácti bodových hodnot, které mohou na kostkách při hodu dvou trojic nastat, tak padne dvacetkrát.

Trojice jedniček a dvojek mají hodnotu 1200 bodů. Trojice jedniček a trojek mají hodnotu 1300 bodů. Trojice jedniček a čtyřek mají hodnotu 1400 bodů. Trojice jedniček a pětek mají hodnotu 1500 bodů. Trojice jedniček a šestek mají hodnotu 1600 bodů (nejvyšší hodnota hodu). Trojice dvojek a trojek mají hodnotu 500 bodů (nejnižší hodnota hodu). Trojice dvojek a čtyřek mají hodnotu 600 bodů. Trojice dvojek a pětek mají bodovou hodnotu 700 bodů a trojice dvojek a šestek mají hodnotu 800 bodů. Trojice trojek a čtyřek mají hodnotu 700 bodů, trojice trojek a pětek pak hodnotu 800 bodů. Trojice trojek a šestek mají hodnotu 900 bodů. Trojice čtyřek a pětek mají hodnotu 900 bodů a trojice čtyřek a šestek mají hodnotu 1000 bodů. Konečně trojice pětek a šestek mají bodovou hodnotu 1100 bodů.

f) Trojice společně se dvojicí a šestou, odlišnou kostkou, padne v celkem 7200 kombinacích, 1200 kombinací pro trojici od každého čísla.

Pro trojice dvojek, trojek, čtyřek a šestek platí, že $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 60$ kombinací bude složeno z trojice , dvojice jedniček (jedničku vybírám jako $\binom{1}{1}$) a pětky (pětka je opět vybrána jako $\binom{1}{1}$). Bodová hodnota hodu je daná součem bodové hodnoty trojice a dvě stě padesáti bodů za zbylé kostky, tedy $450/550/650/850$ bodů.

Dále pro dvojici pětek a jedničku spolu s trojicí platí stejný výpočet, tedy 60 kombinací. Bodová hodnota takových hodů je $400/500/600/800$ bodů.

Pro trojici dvojek, trojek, čtyřek a šestek dále platí, že padne-li dvojice jedniček a nebodovaná šestá kostka, pak takových kombinací na kostkách může padnout $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{3}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 180$. Nebodovanou šestou kostku vybírám ze tří zbývajících- například pro trojici šestek ze zbylých kostek $2, 3, 4$. Bodová hodnota hodu je daná jako součet bodů za trojici a dvou set bodů za hozenou dvojici jedniček, tedy $400/500/600/800$ bodů.

Obdobně padne-li dvojice pětek a nebodovaná šestá kostka, kombinací je opět 180. Bodová hodnota hodů je dána jako součet bodů za trojici a sta bodů za dvojici pětek, tedy $300/400/500/700$ bodů.

Padne-li společně s trojicí dvojek, trojek, čtyřek a šestek nebodovaná dvojice a samotná jednička, takových hodů je $\binom{1}{1} * \binom{3}{1} * \binom{1}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 180$. Prohodí se tak pouze kombinační čísla pro výběr dvojice a samostatné kostky. Bodová hodnota hodu je $300/400/500/700$ bodů.

Shodný počet hodů platí i pro trojice dvojek, trojek, čtyřek a šestek společně s nebodovanou dvojicí a samostatnou pětkou. Bodová hodnota hodů je $250/350/450/650$ bodů.

Poslední možností pro trojici dvojek, trojek, čtyřek a šestek je hod společně s nebodovanou dvojicí a nebodovanou samostatnou kostkou. Takových hodů je $\binom{1}{1} * \binom{3}{1} * \binom{2}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 360$. Bodová hodnota hodů je rovná bodům za trojici, tedy $200/300/400/600$ bodů.

Pro trojici jedniček spočteme body zvlášť. Padne-li společně s dvojicí pětek a nebodovanou šestou kostkou, kombinací pro tyto hody je $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 240$. Bodová hodnota těchto hodů je dána jako součet bodů za trojici a sta bodů za dvě pětky. Hody jsou ohodnoceny 1100 body.

Pro trojici jedniček s nebodovanou dvojicí a pětkou platí obdobný výpočet: $\binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \binom{1}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 240$. Bodová hodnota hodů je 1050 bodů.

Zbývajících $\binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \binom{3}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 720$ hodů, kdy padnou ostatní kostky nebodované, je hodnoceno 1000 body.

Trojic pětek s dvojicí jedniček a nebodovanou šestou kostkou je $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 240$. Bodová hodnota hodů je 700 bodů.

Pro $\binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \binom{1}{1} * \frac{6!}{3!*2!} = 240$ hodů, kdy ke trojici pětek padne jednička a nebodovaná dvojice, je bodová hodnota hodu dána jako součet za trojici a sta bodů za jedničku, tedy 600 bodů.

Zbylých 720 hodů je ohodnoceno 500 body.

g) Trojic se třemi navzájem různými kostkami může padnout 7200, 1200 pro každou trojici.

Pro trojice dvojek, trojek, čtyřek a šestek platí, že v $\binom{1}{1} * \binom{3}{2} * \binom{1}{1} * \frac{6!}{3!} = 360$ hodech padne pětka a nikoli jednička. Bodová hodnota hodů je dána jako součet bodů za trojici a padesáti bodů za pětku, tedy $250/350/450/650$ bodů.

Ve stejném počtu, tedy 360 hodech, padne jednička a nikoli pětka. Bodová hodnota hodů je rovná $300/400/500/700$ bodům.

Hodů, ve kterých padne ke trojici dvojek, trojek, čtyřek a šestek jednička a zároveň pětka, je $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{3}{1} * \frac{6!}{3!} = 360$. Bodová hodnota hodů je $350/450/550/750$ bodů.

Hodů, kdy ke trojici nepadne ani jednička ani pětka, je $\binom{1}{1} * \binom{3}{3} * \frac{6!}{3!} = 120$. Bodová hodnota hodů je rovná bodům za trojici, tedy $200/300/400/600$ bodů.

Pro trojice jedniček, kterých je také 1200, platí, že $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{2} * \frac{6!}{3!} = 720$ hodů padne současně s pětkou. Bodová hodnota hodů je 1050 bodů.

Trojic jedniček se třemi různými kostkami, ve kterých není pětka je $\binom{1}{1} * \binom{4}{3} * \frac{6!}{3!} = 480$. Bodová hodnota hodů je 1000 bodů.

Pro trojice pětek platí shodné výpočty, pouze s rozdílnou bodovou hodnotou. 720 hodů je hodnoceno 600 body, kdy ke trojici padne jednička.

Trojic pětek bez jedničky je 480. Bodová hodnota hodů je 500 bodů.

h) Hodů, ve kterých padnou tři dvojice, je 1800.

Hodů, ve kterých padne dvojice jedniček a pětek, je $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \frac{6!}{2!*2!*2!} = 360$. Bodová hodnota hodů je rovná součtu dvou set bodů za dvojici jedniček a sta bodů za dvojici pětek, tedy 300 bodů.

Hodů, ve kterých padne dvojice jedniček, ale nikoli dvojice pětek, je je $\binom{1}{1} * \binom{4}{2} * \frac{6!}{2!*2!*2!} = 540$. Bodová hodnota hodů je 200 bodů.

Hodů, ve kterých padne dvojice pětek a nikoli jedniček, je také 540. Bodová hodnota hodů je 100 bodů.

Hodů, ve kterých nepadne dvojice jedniček ani pětek je $\binom{4}{3} * \frac{6!}{2!*2!*2!} = 360$. Bodová hodnota hodu je nula.

i) Kombinací dvojice-dvojice-dvě navzájem různé kostky je 16200.

Případů, kdy padne dvojice jedniček i pětek je $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{2} * \frac{6!}{2!*2!} = 1080$. Bodová hodnota těchto hodů je 300 bodů.

Kombinací, ve kterých padne dvojice jedniček a jedna pětka je $\binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \binom{1}{1} * \binom{3}{1} * \frac{6!}{2!*2!} = 2160$. Bodová hodnota hodů je 250 bodů.

Hodů, ve kterých padne dvojice jedniček a ostatní kostky jsou nebodované, je $\binom{1}{1} * \binom{4}{1} * \binom{3}{2} * \frac{6!}{2!*2!} = 2160$. Bodová hodnota těchto hodů je 200 bodů.

Případů, kdy ke dvojici pětek padne samostatná jednička je 2160. Bodová hodnota těchto hodů je 200 bodů.

Ve 2160 případech padne pouze dvojice bodovaných pětek. Hodnota těchto hodů je 100 bodů.

V tuto chvíli zbývá rozebrat kombinace, kdy dvojice jsou vždy nebodované. Padne-li na posledních dvou kostkách jednička i pětka, takových kombinací je $\binom{4}{2} * \binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \frac{6!}{2!*2!} = 1080$. Bodová hodnota hodů je 150 bodů.

Případů, kdy na šesti kostkách padne z bodovaných kostek pouze jednička, je $\binom{4}{2} * \binom{1}{1} * \binom{2}{1} * \frac{6!}{2!*2!} = 2160$. Bodů za tyto hody je uděleno vždy 100.

Shodně 2160 hodů patří kombinaci, ve které padne pouze pětka. Bodová hodnota hodů je 50 bodů.

Hody, ve kterých nepadne jediná bodovaná kostka, popisuje výpočet $\binom{4}{2} * \binom{2}{2} * \frac{6!}{2!*2!} = 1080$. Tyto hody nejsou bodově hodnoceny.

j) Celkem existuje 10800 hodů s kombinací jedné dvojice a čtyř navzájem různých kostek.

Padne-li dvojice jedniček společně s pětkou, pak počet těchto hodů určuje výpočet $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{3} * \frac{6!}{2!} = 1440$. Bodová hodnota hodu je dána součtem dvou set bodů za dvojici jedniček a padesáti bodů za hozenou pětku. Bodová hodnota hodu je 250 bodů.

Padne-li dvojice jedniček bez pětky, je takových hodů $\binom{1}{1} * \binom{4}{4} * \frac{6!}{2!} = 360$. Bodová hodnota těchto hodů je 200 bodů.

Hodů, ve kterých padne dvojice pětek s jedničkou, je 1440. Bodová hodnota hodů je stanovena na 200 bodů.

Hodů, ve kterých padne dvojice pětek a nikoli jednička, je 360. Bodová hodnota hodů je 100 bodů.

Zbývají rozebrat hody, kdy padne nebodovaná dvojice. Padnou-li zároveň jednička a pětka, pak počet hodů je dán jako $\binom{4}{1} * \binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{3}{2} * \frac{6!}{2!} = 4320$. Bodů za takovou kombinaci je uděleno 150.

Případů, kdy padne samotná jednička, je $\binom{1}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{3} * \frac{6!}{2!} = 1440$. Bodová hodnota hodu je 100 bodů.

Hodů, kdy padne pouze pětka, je taktéž 1440. Bodovány jsou 50 body.

k) Hody, ve kterých padne šest navzájem různých čísel, je 6!, tedy 720. Jsou dle pravidel hodnoceny 2000 body.

Střední hodnota vrhu

Po podrobném rozebrání všech výsledků je třeba sečíst počty hodů s příslušnou bodovou hodnotou a dosadit do vzorce pro střední hodnotu

$$EX = \sum(\frac{1}{46656} * 8000 + \frac{1}{46656} * 1600 + \frac{1}{46656} * 2400 + \frac{1}{46656} * 3200 + \frac{1}{46656} * 4000 +$$

146656∗4800+646656∗4050+2446656∗4000+646656∗2500+646656∗2450+184665
6∗2400+2146656∗2100+12046656∗2050+98446656∗2000+646656∗1700+646656∗
1650+3846656∗1600+2046656∗1500+3546656∗1400+3046656∗1350+13146656∗1
300+9646656∗1250+18846656∗1200+38046656∗1100+96046656∗1050+14754665
6∗1000+3046656∗950+15146656∗900+15646656∗850+44846656∗800+39046656∗
750+110546656∗700+69046656∗650+185046656∗600+45046656∗550+228546656
∗500+105046656∗450+157546656∗400+90046656∗350+264046656∗300+4140466
56∗250+714046656∗200+540046656∗150+666046656∗100+360046656∗50)=1709
100046656=366,32 bodu.

Shrnutí charakteristik jednotlivých vrhů

Počet kostek	1	2	3	4	5	6
Kladné vrhy	33,3%	55,6%	72,2%	84,3%	92,3%	96,9%
Záporné vrhy	66,7%	44,4%	27,8%	15,7%	7,7%	3,1%
Střední hodnota vrhu	25	50	86,81	142,75	225,79	366,32

Jednoduchým vhledem do situace popsané v tabulce, která shrnuje bodovou charakteristiku vrhů, lze učinit prvotní závěr: padnou-li v hodu šesti kostkami kostky s hodnotami $1, 3, 3, 4, 4, 5$, pak je hráč nucen odložit alespoň jednu bodovanou kostku, aby mohl pokračovat ve hře. Rozhodovací proces ho vede k úvaze:

* odložím jedničku hodnocenou sty body a s pěti kostkami dosáhnu průměrného bodového zisku 225,8 bodu, celkem tedy 325,8 bodu.

* odložím jedničku a pětku hodnocené celkem sto padesáti body a budu pokračovat pouze se čtyřmi kostkami, kdy v hodu dosáhnu průměrně 142,8 bodu, celkem 292,8 bodu.

Ve snaze o dosažení maximálního bodového zisku hráč (nebere-li potaz aktuální stav hry) bude volit první variantu, při které si nechá pouze jedničku, neboť jeho pravděpodobný zisk je vyšší. Další část práce se bude zabývat vylepšením rozhodovacího procesu.

Faktor silně ovlivňující hru – padnutí všech šesti bodovaných kostek

Nezanedbatelným faktorem ovlivňujícím hru je situace, kdy hráč postupně odloží všech šest kostek, které jsou bodované a vrhat musí znovu. Dostat se do tohoto bodu hry bývá výhodné, neboť střední hodnota hodu šesti kostkami je vyšší než střední hodnota vrhu jakýmkoli jiným počtem kostek. Tento fakt vychází z vysokého bodového ohodnocení šestic a postupky, které lze hodit pouze šesti kostkami.

Střední hodnotu hodu **S(*x*)** je třeba upravit o pravděpodobnost, se kterou hráč vrhne šest bodovaných kostek, a to v jakémkoli počtu hodů.

Střední hodnotu hodu upravenou o prohození nazveme **U**.

Pravděpodobnost, že všechny kostky vrhu budou bodované nazveme **P**.

Z předchozí části víme, že

$S(6) = 366{,}32$

$S(5) = 225{,}79$

$S(4) = 142{,}75$

$S(3) = 86{,}81$

$S(2) = 50$

$S(1) = 25$

Pro výpočet pravděpodobnosti, že všechny kostky vrhu budou bodované, rozebereme vrhy z předchozí části a vybereme takové, které splňují podmínky, že všechny padlé kostky budou bodované.

Při hodu jednou kostkou jsou pro pravděpodobnost **P** pozitivními hody jednička a pětka, tedy jedna třetina hodů.

Při hodu dvěma kostkami jsou pozitivními hody jednička s pětkou, a to dvakrát, a dvojice jedniček a dvojice pětek. Celkem tedy čtyři hody ze třiceti šesti.

Při hodu třemi kostkami padnou všechny bodované kostky v případě trojic a kombinací dvou jedniček s pětkou a naopak dvou pětek s jedničkou. Šest trojic a šest kombinací jedniček s pětkami dávají celkem dvanáct možností z 216.

Při hodu čtyřmi kostkami počítáme do kladných hodůpradvěpodobnosti**P** čtveřice (šestkrát), trojice a jedničku (dvacet, neboť bereme v úvahu pouze trojice dvojek, trojek, čtyřek, pětek a šestek, trojice jedniček s jedničkou totiž tvoří čtveřici. Každou takovou trojici necháme permutovat), trojice a pětku (opět dvacet) a dvojici jedniček s dvojicí pětek (šest možností). Celkem tedy padesát dva kombinací z 1296.

V hodu pěti kostkami budeme vybírat následující kombinace:

-pětice (celkem šest)

-čtveřice s jedničkou (čtveřice dvojek, trojek, čtyřek, pětek a šestek, celkem dvacet pět)

-čtveřice s pětkou (totožně dvacet pět kombinací)

-trojice dvojek, trojek, čtyřek a šestek s dvojicí jedniček (každou dvojici desetkrát, celkem tedy čtyřicet), stejné trojice s dvojicí pětek (taktéž čtyřicet)

-stejné trojice s jedničkou i pětkou (každou trojici dvacetkrát, celkem osmdesát kombinací)

-trojici jedniček s dvojicí pětek (deset kombinací) a

-trojice pětek s dvojicí jedniček (shodně deset kombinací).

Tyto mezivýpočty nás vedou k 236 kombinacím z 7776 možných hodů.

V hodu šesti kostkami může padnout 46656 kombinací. Z nich budeme vybírat

-postupky (sedm set dvacet kombinací)

-šestice (celkem šest možností)

-pětice dvojek, trojek, čtyřek, pětek a šestek s jedničkou (každá pětice tvoří šest kombinací, celkem tedy třicet kombinací)

-pětice jedniček, dvojek, trojek, čtyřek a šestek s pětkou (taktéž třice kombinací)

-čtveřice dvojek, trojek, čtyřek a šestek s dvojicí jedniček (každá čtveřice generuje patnáct kombinací, celkem tedy šedesát kombinací)

-totožné čtveřice s dvojicí pětek (shodně šedesát kombinací)

-totožné čtveřice s jedničkou a pětkou (sto dvacet kombinací)

-čtveřice jedniček s dvojicí pětek (patnáct kombinací)

-čtveřice pětek s dvojicí jedniček (taktéž patnáct kombinací)

-dvě trojice (třicet šest možných kombinací trojic, každá z těchto možností tvoří dvacet permutací, celkem tedy sedm set dvacet možných kombinací)

Tyto úvahy vedou k číslu 1776 pozitivních hodů z 46656.

Pravděpodobnost padnutí všech bodovaných kostek v jednom vrhu

Pravděpodobnost je vypočtena jako počet pozitivních hodů dělený všemi možnými hody pro daný počet kostek.

$P(6) = 0{,}038$

$P(5) = 0{,}030$

$P(4) = 0{,}040$

$P(3) = 0{,}056$

$P(2) = 0{,}111$

$P(1) = 0{,}333$

Upravená střední hodnota

Upravená střední hodnota hodu **U** zohledňuje možnost hození všech šesti bodovaných kostek. Položme

$$\mathrm{U}(x) = \mathrm{S}(x) + \mathrm{P}(x) * \mathrm{U}(6) + \mathrm{P}(x) * \mathrm{P}(6) * \mathrm{U}(6) + \mathrm{P}(x) * \mathrm{P}(6) * \mathrm{P}(6) * \mathrm{U}(6) + \ldots$$

U(x) zde reprezentuje upravenou střední hodnotu pro daný počet x kostek.

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že hodnota $U(6)$ dosáhne maximálně 400 bodů. Pak poslední vypsaný člen výše dosahuje hodnoty $0{,}038 * 0{,}038 * 0{,}038 * 400 = 0{,}02$ bodu, což je natolik malá hodnota, že všechny další členy lze bez újmy na obecnosti zanedbat.

$$\mathrm{U}(6) = 366{,}32 + 0{,}038 * \mathrm{U}(6) + 0{,}038 * 0{,}038 * \mathrm{U}(6) + 0{,}038 * 0{,}038 * 0{,}038 * \mathrm{U}(6)$$

Po úpravách dostáváme upravenou střední hodnotu **U**:

$\mathrm{U}(6) = \frac{366{,}32}{1-0{,}038-0{,}038*0{,}038-0{,}038*0{,}038*0{,}038}$;

$\mathrm{U}(6) = 381{,}38$ bodu

Obdobně pro další počty kostek:

$\mathrm{U}(5) = 237{,}68$ bodu

$\mathrm{U}(4) = 158{,}61$ bodu

$\mathrm{U}(3) = 109{,}01$ bodu

$\mathrm{U}(2) = 94{,}00$ bodu

$\mathrm{U}(1) = 157{,}01$ bodu

Do této chvíle hráč hrál tak, že porovnal své kostky se střední hodnotou upravenou o prohození pro příslušný počet kostek, vzal nejvýhodnější bodovou kombinaci a případně vrhal kostky v dalším kole.

Při vržení kombinace $1 - 2 - 2 - 2 - 4 - 5$ je hodnota hodu stanovena dle pravidel na 350 bodů. Hráč vybírá z možností

a) Vzít 350 bodů a ukončit tah.
b) Nechat si jedničku a očekávat dle U(5) bodový zisk 337,68 bodů;
c) Nechat si pětku a očekávat dle U(5) bodový zisk 287,68 bodů;
d) Nechat si jedničku s pětkou a očekávat dle U(4) bodový zisk 308,61 bodů;
e) Nechat si jedničku s trojicí dvojek a očekávat dle U(2) bodový zisk 394 bodů;
f) Nechat si pětku s trojicí dvojek a očekávat dle U(2) bodový zisk 334 bodů;
g) Nechat si trojici dvojek a očekávat dle U(3) bodový zisk 309,01 bodů;
h) Nechat si všech pět kostek a očekávat dle U(1) bodový zisk 507,01 bodů.

Výše vypsané možnosti jasně ukazují, že nechávat si pětku není vhodným řešením (varianty c),d),f)), nechat si trojici dvojek ve variantě g) též není optimálním řešením. Je třeba však určit míru rizika, kdy hráč v dalším vrhu vrhne nebodované kostky, obzvláště velký rozdíl lze očekávat u varianty h).

Ukončení hodu nebodovanou kombinací

Střední hodnota upravená o prohození **U** na první pohled přináší vysoké bodové zisky, do hry ale nevnáší důležitý faktor, který je při hře všudypřítomný – vržení kombinace kostek, kdy ani jedna nepřinese body. V takovou chvíli hráč končí tah a ztrácí body v tomto tahu dosud uložené. V tuto chvíli je třeba zavést parametr míry rizika **M**. Míra rizika musí brát v potaz jak potenciální bodový zisk **U**, tak pravděpodobnost, že hráč ukončí hod nebodovanou kombinací.

Pravděpodobnost případu, kdy na vržených kostkách nepadne jediný hod, je stanovena výpočtem z celkového počtu možných hodů. Parametr **O** popisující tuto pravděpodobnost nabývá hodnot

$$O(6) = \frac{1440}{46656} = 0{,}031$$

$$O(5) = \frac{600}{7776} = 0{,}077$$

$$O(4) = \frac{204}{1296} = 0{,}157$$

$$O(3) = \frac{60}{216} = 0{,}278$$

$$O(2) = \frac{16}{36} = 0{,}444$$

$$O(1) = \frac{4}{6} = 0{,}667$$

Parametr **O** je třetí charakteristikou každého vrhu.

Míra rizika **M** je stanovena jako:

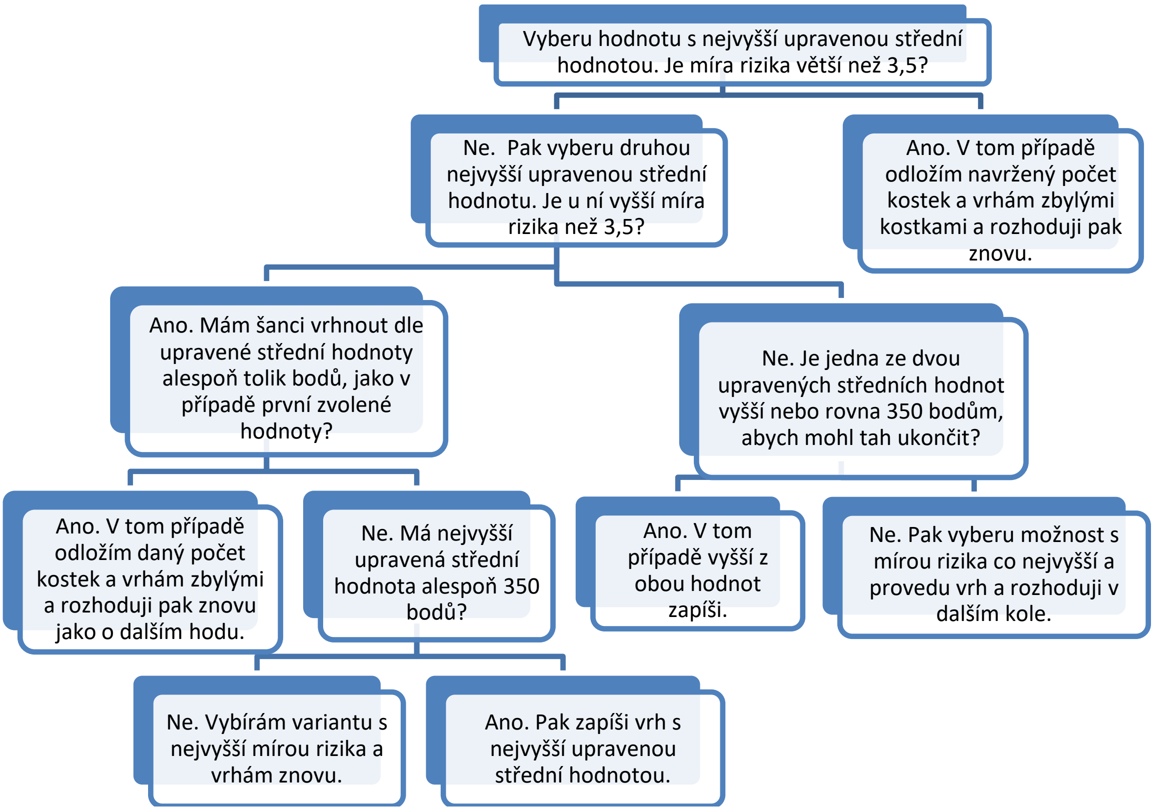
$$M = \frac{U(x) * (1 - O(x))}{aktuální\ skóre * O(x)}$$

a svým vyjádřením svazuje šanci dosáhnutí upravené střední hodnoty s aktuálním skóre hráče v daném hodu. Spolu s pravděpodobností nebodovaných vrhů tak upravuje dosavadní postup hráče tak, aby mohl ovlivňovat míru rizika.

Míra rizika byla stanovena empiricky na základě vypočtených hodnot pro vzorek více než stovky různých referenčních kombinací vržených kostek. Díky této analýze lze rozhodnout o tom, jakou hru považovat za bezpečnou, a kterou již ne. Přiměřená míra rizika $\mathbf{M} = 3{,}5$, kdy hráč při dostatečně velkém opakování totožného vrhu skončí na jeho aktuálním skóre.

Vychází-li ve výpočtu míry rizika číslo nižší, pak je statisticky pravděpodobnější, že v dostatečně velkém vzorku shodných situací bude hra ztrátová. Vychází-li z výpočtu míra rizika vetší než 3,5, pak je statisticky pravděpodobnější, že při dostatečně dlouhém opakování vrhu se stejnými vstupními hodnotami bude hra zisková, tedy hráč získá víc bodů, než kolik by zapsal, kdyby v daném kole hru ukončil (a pokud by mu to umožnila pravidla). Míra rizika vyšší než 30 je považována za dostatečně bezpečnou v tom, že hráč hodí v dalším hodu alespoň padesát bodů.

Hráč, který chce dosáhnout co nejlepšího bodového výsledku v neomezeném množství tahů, pak tedy volí strategii závislou jak na upravené střední hodnotě, tak na míře rizika. Padne-li ve vrhu alespoň jedna bodovaná kostka, pak myšlenkový postup hráče lze popsat následujícím schematem:



Obrázek 1: algoritmus uvažování ideálního hráče

Rozbor jednotlivých situací ve hře

Rozbor 1

Hráč hází dvěma kostkami, z předchozích hodů má 350, 400, 500nebo více bodů. Na kostkách padla jednička s dvojkou.

Hráč rozhoduje mezi vzetím jedničky za sto bodů a ukončením hry a vzetím jedničky a pokračovat dalším hodem. Upravená střední hodnota **U** hráči slibuje 157 bodů, nicméně hráč si je také vědom toho, že šance na úspěch je jedna třetina –musí hodit bodovanou jedničku nebo pětku, v opačném případě kolo pro něj skončí nulou. Míra rizika pro 350 bodů vychází 0,72, pro vyšší bodové zisky z předchozích kol pak ještě méně. Hráč, který si chce zachovat rozumný bodový zisk nebude riskovat a ukončí hod vzetím jedničky.

Naopak v případě, kdy je protihráč blízko konci hry, tedy 10 000 bodů, hráč volí další hod, neboť s třetinovou pravděpodobností dostane šest nových kostek, se kterámi může vrhnout dostatek bodů pro to, aby zvrátil průběh hry.

Hráč hází dvěma kostkami, z předchozích hodů má dvě stě bodů. Na kostkách padla jednička s dvojkou.

Míra rizika v daném případě je 0,76, což hráči nedoporučuje hrát dál, nicméně pravidla hry mu nedovolují hru ukončit a je nucen pokračovat dalším hodem.

Rozbor 2

Hráč hází čtyřmi kostkami, z prvních dvou hodů má sto bodů (dvě pětky). Na kostkách padnou dvě jedničky a dvě nebodované kostky (například dvojka a trojka). Hráč vybírá ze dvou variant pokračování hry:

Hráč vezme jednu jedničku, celkem bude mít odloženo dvě stě bodů a s upravenou střední hodnotou pro tři kostky, 109 bodů, se pokusí docílit 309 bodů. Míra rizika je pro tuto variantu 4,01.

Hráč vezme obě jedničky, celkem bude mít odloženo tři sta bodů a s upravenou hodnotou pro dvě kostky, 94 bodů, se pokusí docílit 394 bodů. Míra rizika pro tuto variantu je 1,65.

Popisovaná situace je nevýhodná. V obou případech hráč nebude mít dost bodů k tomu, aby ukončil tah. Rozhodovací proces hráči říká, aby zkontroloval variantu s oběma jedničkami – ta má vyšší upravenou střední hodnotu. Nicméně míra rizika je v tomto případě příliš nízká, vychází z pravděpodobnosti přes 44%, že na kostkách nepadne jediná bodovaná figura. Hráči tak rozhodovací proces nedoporučuje vzít tuto variantu. Rozhodovací proces pokračuje výběrem varianty hodu s mírou rizika vyšší než 3,5, tedy variantu vzít jednu jedničku a pokračovat v hodu. Upravená střední hodnota pro tuto variantu je vyšší než aktuálně hozená hodnota, $309 > 300$, míra rizika je také dostatečně vysoká, hráč tak odloží jednu jedničku a pokračuje v dalším vrhu.

Rozbor 3

Z prvních dvou kol si hráč přinesl 150 bodů. Na kostkách padly tři dvojky a čtyřka. Hráč je pravidly nucen vzít tři dvojky, čímž dosáhne na 350 bodů. Jinou možnost v tomto tahu nemá. Míra rizika 0,72 hráči jednoznačně říká, že není výhodné pokračovat v hodu a tah ukončí.

V případě, kdy si hráč z prvních dvou kol přinese pouze sto bodů, dosáhne třemi dvojkami pouze na tři sta bodů, které nestačí k ukončení kola. Ač mu míra rizika 0,76 nedoporučuje pokračovat ve hře, je pravidly donucen vrhat znovu s jednou kostkou, u které má třetinovou šanci, že hodí bodovanou kostku a dostane dalších šest kostek, se kterými bude hrát dál.

Rozbor 4

Z prvního kola si hráč přináší padesát bodů, tedy jednu pětku. Na kostkách padla jednička, trojice dvojek a šestka. Hráči se otevírají tři scénáře:

vzít jedničku a se sto padesáti body usilovat o 309 bodů. Míra rizika je vysoká,11,06.

vzít trojici dvojek a se dvěma sty padesáti body usilovat o 344 bodů. Míra rizika je pouze1,72.

vzít všechny bodované kostky a s třemi sty padesáti body usilovat dle upravené střední hodnoty o 507 bodů. Míra rizika činí v tomto případě pouze 0,72.

Hráč se v první řadě podívá nejprve na upravené střední hodnoty, ze kterých vyčnívá poslednívarianta, 507 bodů. Míra rizika mu ji doporučuje zavrhnout. Vysokou míru rizika vykazuje první scénář – vzít pouze jedničku a pokračovat dál.

Nicméně v tomto případě rozhodovací proces říká hráči, aby porovnal upravenou střední hodnotu hodu s hodnotou, kterou na kostkách hodil nyní. 309 bodů $<$ 350 bodů, tudíž hráč hrající podle navrhovaného modelu vezme všechny bodované kostky a ukončí tah.

V případě, kdy by protihráč byl blízko vítězství, je výhodné vzít všechny bodované kostky a vrhnout poslední kostkou. S pravděpodobností 33,3% padne jednička nebo pětka a hráč obdrží šest nových kostek, které mu umožní snížit bodový náskok soupeře.

Srovnání ideálního modelu s ústně předávanými radami

Z generace na generaci hráčů jsou předávané rady, jak má hráč hrát. Rady doporučují brát vysoce bodované figury (postupky, šestice, pětice, čtveřice), brát trojice, pokud to nejsou trojice dvojek nebo trojice trojek. Nepadnou-li vysoce bodované digury, pak je třeba padlé jedničky obodované stem bodů, a až v poslední řadě brát padlé pětky hodnocené padesáti body. Trojice dvojek nebo trojek brát pouze tehdy, pokud k tomu nutí pravidla (pokud nepadla žádná jiná další bodovaná kostka. Se dvěma a méně kostkami není radno házet, pokud k tomu hráče nedonutí pravidla.

Jako ponechané body jsou v případech, kdy se nejedná o první vrh hráče v daném kole počítány jak body z prvního vrhu, tak aktuálně odložené bodované kostky.

Případ první

Při padnutí kombinace kostek $1-2-2-2-4-5$ má hráč brát pouze jedničku a s pěti kostkami hrát dál.

Navrhovaný model ideálního hráče potřebuje k ověření následující tabulku.

Ponechané body	Kostky do dalšího vrhu	U	F	Ponechané body + U	Míra rizika
100	5	238	0,077	338	40,5161
300	2	94	0,444	394	1,644625
150	4	159	0,157	309	11,06102
350	1	157	0,667	507	0,7232

Hráč vybere nejvyšší hodnotu z pátého sloupce, tedy ponechané body společně s upravenou střední hodnotou. Ta mu radí ponechat všechny bodované figury. Míra rizika je však nízká, méně než $3{,}5$ a je málo pravděpodobné, že poslední kostka, kterou by si nechal do druhého hodu, padne bodovaná. To se stane pouze ve třetině případů. Hráč vybírá variantu s nejvyšší mírou rizika, tedy ponechat si jedničku a házet dál. Rozhodovací proces však říká, že průměrná bodová hodnota, kterou může naházet, je nižší než jeho aktuální maximální bodový zisk, tedy $338 < 350$ a hru v tomto kole ukončí zapsáním tří set padesáti bodů.

V případě, že je protihráč výrazně napřed, tedy má výrazně více bodů, je varianta vzít jedničku a pokusit se vrhnout alespoň bodovanou trojici, žádaná. Nicméně v dostatečně obsáhlém souboru hodů se toto rozhodnutí ukazuje jako nesprávné, v nadpoloviční většině hodů na hranici nutnou k zapsání, tedy 350 bodů, nedosáhne. V tomto konkrétním případě model ideálního hráče navrhuje odlišné rozhodnutí, než nabízí léta předávané rady.

Případ druhý

Při padnutí kombinace kostek $1-1-2-2-4-5$ má hráč brát dvě jedničky a se čtyřmi kostkami hrát dál.

Navrhovaný model ideálního hráče potřebuje k ověření následující tabulku.

Ponechané body	Kostky do dalšího vrhu	U	F	Ponechané body + U	Míra rizika
100	5	238	0,077	338	40,5161
200	4	159	0,157	359	9,638121
250	3	109	0,278	359	3,729468

Figury s nejvyšší upravenou střední hodnotou jsou v tomto případě dvě. Hráč vždy vybírá tu s vyšší mírou rizika, tedy ponechání dvou jedniček. Ponechané body společně s upravenou střední hodnotou jsou vyšší než maximální bodový zisk z tohoto vrhu, tedy$359 > 250$. Míra rizika je vysoká, hráč zvolí ponechání dvou jedniček stejně, jako radí léty předávané rady.

Případ třetí

Na kostkách padlo$2-4-4-4-5-6$. Dle předávaných rad má hráč vzít vysoce bodovanou figuru, k ní pětku a se dvěma kostkami dál neházet.

Navrhovaný model ideálního hráče potřebuje k ověření následující tabulku.

Ponechané body	Kostky do dalšího vrhu	U	F	Ponechané body + U	Míra rizika
50	5	238	0,077	288	69,04519
400	3	109	0,278	509	3,304838
450	2	94	0,444	544	1,513834

Varianta s nejvyšší upravenoustřední hodnotou je ponechání všech bodovaných kostek a hod do dalšího kola. To však silně nedoporučuje míra rizika, která je nižší než $3{,}5$. Ani varianta uložení trojice čtyřek a vrhem zbylých tří kostek docílit více než pěti set bodů není vhodná, neboť míra rizika je nižší než požadovaných $3{,}5$. V úvahu padá ponechání si pouze pětky, kdy je míra rizika velmi vysoká, avšak ponechané body společně s upravenou střední hodnotou pro pět kostek nedají dohromady více bodů než v tuto chvíli hozené figury. Rozhodovací proces radí vzít všechny bodované figury a ukončit kolo. To je v souladu s léty předávanými radami.

Případ čtvrtý

Z prvního hodu si hráč odnáší pětku za padesát bodů. Na kostkách padlo $3-3-3-4-5$. Dle předávaných rad je doporučeno vzít všechny bodované figury a ukončit kolo.

Navrhovaný model ideálního hráče potřebuje k ověření následující tabulku.

Ponechané body	Kostky do dalšího vrhu	U	F	Ponechané body + U	Míra rizika
100	4	159	0,157	259	13,90682
350	2	94	0,444	444	1,588571
400	1	157	0,667	557	0,695206

Nejvyšší upravená hodnota hodu, vzetí všech vržených kostek, vykazuje nízkou míru rizika a hráči není doporučeno hrát dál. Ani uložení tří trojek není dostatečně dobrá varianta, neboť i zde je míra rizika nízká. Varianta ponechání si pouze pětky již vysokou míru rizika má, nicméně ponechané body společně se střední hodnotou vrhu pro čtyři kostky nedosahuje bodové hodnoty doposud vržené, $259 < 400$. Hráč tedy po průchodu celým rozhodovacím procesem volí ponechání si všech bodovaných figur a se čtyřmi sty body ukončí kolo. To je v souladu s léty předávanými radami.

Případ pátý

V prvním vrhu daného kola se hráči příliš nedařilo, byl nucen zapsat dvě stě bodů za trojici vržených trojek. V druhém kole padla na kostkách jednička, dvojka a pětka. Dle předávaných rad hráč nemá znovu vrhat se dvěma kostkami a má ukončit svůj tah zapsáním tři sta padesáti bodů.

Navrhovaný model ideálního hráče potřebuje k ověření následující tabulku.

Ponechané body	Kostky do dalšího vrhu	U	F	Ponechané body + U	Míra rizika
300	2	94	0,444	394	1,644625
350	1	157	0,667	507	0,7232

Nejvyšší upravená hodnota hodu společně s doposud uloženými dvěma sty body z prvního kola, vzetí všech vržených kostek, vykazuje nízkou míru rizika a hráči není doporučeno hrát dál. Ani druhá nejvyšší upravené střední hodnota, kdy hráč uloží jedničku a bude pokračovat do dalšího vrhu se dvěma kostkami, nevykazuje požadovanou míru rizika. Hráč zapíše všechny bodované kostky a se tři sta padesáti body ukončí tah. To je v souladu s léty předávanými radami.

Případ šestý

Z prvního vrhu si hráč uložil pouze pětku. V druhém kole padla dvojice jedniček, dvojice dvojek a pětka ($1 - 1 - 2 - 2 - 5$). Dle předávaných rad má hráč vzít dvě jedničky a s 250 body pokračovat v dalším vrhu.

Navrhovaný model ideálního hráče potřebuje k ověření následující tabulku.

Ponechané body	Kostky do dalšího vrhu	U	F	Ponechané body + U	Míra rizika
100	4	159	0,157	259	13,90682

150	4	159	0,157	309	11,06102
250	3	109	0,278	359	3,729468
300	2	94	0,444	394	1,644625

Nejvyšší upravená hodnota vrhu společně s doposud uloženými padesáti body je 394 bodů. Míra rizika je však příliš nízká a navrhovaný model nedoporučuje hráči tuto variantu z důvodu nízké míry rizika. Navrhovaný model doporučuje hráči vzít dvě jedničky, uložit si celkem dvě stě padesát bodů a pokračovat s třemi kostkami do dalšího kola. To je v souladu s léty předávanými radami.

V tomto příkladě je jako jedno z možných řešení nabízeno vzetí pouze pětky a pokračování do dalšího vrhu. Ve srovnání vzetím jedničky nebo pětky a pokračování do dalšího vrhu je sice míra rizika pro uložení jedničky nižší, avšak upravená střední hodnota vrhu nedosahuje takové výše, jako právě uložení jedničky. Má-li hráč možnost vybrat, zda uloží jedničku nebo pětku, model mu vždy doporučí uložení jedničky.

Tři herní modely

Model minimálního ukládání

Hráč hrající podle modelu minimálního ukládání vždy ukládá nejmenší možný počet kostek, neboť hodlá maximalizovat své šance na hození vysoce bodovaného hodu. Končí s hody, zbývají-li mu poslední dvě kostky.

Model úzkostlivý hráč

Hráč, který hraje úzkostlivě, ukládá vždy všechny bodované figury, aby se co nejrychleji dotal ke spodní hranici zápisu, tj. 350 bodům.

Navržený (ideální) model

Hráč hrající dle navržené strategie volí a upravuje strategii v závislosti na jím vržených kostkách. Využívá vypočtených středních hodnot a míry rizika pro dosažení optimálního výsledku.

Hra nebude reflektovat aktuální stav hry – body ostatních hráčů apod. Hraje se na deset kol, pro každý z modelů se stejnými hody. V druhém a dalším hodu v rámci jednoho kola je zprava ubírán počet kostek, který je již odložený.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
1/1 Padlo 6-2-3-4-5-2	Odloženo: 5 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 5 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 5 Druhý vrh: 5 kostek
½ Padlo 1-2-4-6-4	Odloženo: 5/1 Třetí vrh: 4 kostky	Odloženo: 5/1 Třetí vrh: 4 kostky	Odloženo: 5/1 Třetí vrh: 4 kostky
1/3 Padlo 2-1-2-1	Odloženo: 5/1/1 Čtvrtý vrh: 3 kostky	Odloženo: 5/1/1,1 Konec kola	Odloženo: 5/1/1 Čtvrtý vrh: 3 kostky
¼ Padlo 2-5-6	Odloženo 5/1/1/5 Pátý vrh: 2 kostky		Odloženo 5/1/1/5 Pátý vrh: 2 kostky
1/5 Padlo 3-4	Zapsáno nula bodů		Zapsáno nula bodů

Hod 1/3, ideální model nabízí hráči tři scénáře:

* Nechat si obě jedničky a uzavřít kolo (350 bodů)

* Nechat si jen jedničku jednu (250 bodů) a pokračovat v hodu se třemi kostkami, střední hodnota hodu je pak 359 bodů.

* Nechat si obě jedničky (350 bodů) a pokračovat v hodu se dvěma kostkami. Střední hodnota hodu pak bude 444 bodů. Míra rizika je však nízká:1,59, tuto variantu nezvolí.

Hráč zvolí nechat si jedničku a s mírou rizika 3,73 pokračuje do dalšího kola.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
2/1 Padlo 1-5-4-1-1-6	Odloženo: 1,1,1 Druhý vrh: 3 kostky	Odloženo: 1,1,1,5 Konec kola	Odloženo: 1,1,1,5 Konec kola
2/2 Padlo 6-5-3	Odloženo: 1,1,1/5 Konec kola		

Hod 2/1, ideální model nabízí:

* odložit tři jedničky (1000 bodů) a s upravenou střední hodnotou 1109 házet znovu

* odložit tři jedničky s pětkou (1050 bodů) a házet znovu s upravenou střední hodnotou 1144 bodů.

Obě varianty mají nízkou míru rizika, hráč tak vezme co nejvíce bodovaných kostek a ukončí hru.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
3/1 Padlo 6-1-5-5-2-5	Odloženo 5,5,5 Druhý vrh: 3 kostky	Odloženo 5,5,5,1 Konec kola	Odloženo 5,5,5,1 Konec kola
3/2 Padlo 2-1-1	Odloženo 5,5,5/1 Konec kola		

Hod 3/1 klade hráči otázku: nechat si trojici pětek a házet znovu či trojici pětek s jedničkou a skončit?

* Pro hod se třemi kostkami platí, že střední hodnota hodu je 109 bodů. Celkem 609 bodů.

* Hodnota hodu tří pětek a jedničky je 600 bodů.

Pro obě varianty je míra rizika příliš nízká, házet dál je nevýhodné. Hráč ukončí hod a vezme co nejvíce bodovaných kostek.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
4/1 Padlo 1-2-3-1-5-5	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 1,1,5,5 Druhý vrh: 2 kostky	Odloženo: 1,1 Druhý vrh: 4 kostky
4/2 Padlo 6-4-4-2-2	Nula bodů ve čtvrtém kole	Nula bodů ve čtvrtém kole	Nula bodů ve čtvrtém kole

Hod 4/1, ideální model: hráč má možnost vybrat si z následujícího

* Nechat si včechny čtyři bodované kostky a házet dvojicí kostek, pro které je střední hodnota hodu 50 bodů. Celkem by tak docílil 350 bodů nutných pro zapsání.

* Nechat si tři kostky (1,1,5) a házet třemi kostkami znovu, pro které platí, že jejich střední hodnota je 109 bodů. Spolu s 250 odloženými body dociluje výsledku 359 bodů.

* Nechat si dvě jedničky a házet se čtyřmi kostkami, jejich střední hodnota je 159 bodů. Celkem by docílil výsledku také 359 bodů.

* Nechat si pouze jedničku a házet pěti kostkami, jejichž střední hodnota je 238 bodů. Celkem by tak docílil středního výsledku 338 bodů. Ty také nedosahují 350 bodů nutných k zapsání.

Házet dvěma kostkami je pro hráče nevýhodné, míra rizika je 1,64. Hráč vybírá z druhé a třetí varianty, kdy má šanci naházet počet bodů dostatečný k zapsání. Obě vykazují stejnou upravenou střední hodnotu hodu. Hráč tak vybere tu s vyšší mírou rizika (dvě jedničky).

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
5/1 Padlo 1-2-5-4-5-6	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 1,5,5 Druhý vrh: 3 kostky	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek
5/2 Padlo 5-3-4-6-3	Odloženo: 1/5 Třetí vrh: 4 kostky	Odloženo: 1,5,5/5 Třetí vrh: 2 kostky	Odloženo: 1/5 Třetí vrh: 4 kostky
5/3 Padlo 4-1-2-2	Odloženo: 1/5/1 Čtvrtý vrh: 3 kostky	Odloženo: 1,5,5/5/1 Konec kola	Odloženo: 1/5/1 Čtvrtý vrh: 3 kostky
5/4 Padlo 1-4-2	Odloženo: 1/5/1/1 Konec kola		Odloženo: 1/5/1/1 Konec kola

Hod 5/1, hráč hrající podle ideálního modelu vybírá z možností:

* Nechat si všechny tři bodované kostky s hodnotou 200 bodů a pokračovat se třemi kostkami. Dle modelu dosahuje středního výsledku $200 + 109 = 309$ bodů.

* Nechat si jedničku s pětkou za 150 bodů a pokračovat se čtyřmi kostkami. Střední hodnota hodu je pak $150 + 159 = 309$ bodů.

* Nechat si pouze jedničku za sto bodů a házet pěti kostkami. Střední hodnota takového hodu je 338 bodů.

Hráč volí variantu poslední, neboť má nejvyšší upravenou střední hodnotu a vysokou míru rizika.

Skóre po první polovině hry

Po pěti kolech má hráč hrající dle modelu minimálního ukládání 1300 bodů

Hráč hrající dle modelu úzkostlivý hráč si z prvních pěti kol odnáší 1650 bodů.

Hráč hrající dle navrhovaného modelu si odnáší 1300 bodů.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
6/1 Padlo 1-6-3-5-5-1	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 1,1,5,5 Druhý vrh: 2 kostky	Odloženo: 1,1 Druhý vrh: 4 kostky
6/2 Padlo 3-1-1-5-2	Odloženo: 1/1 Třetí vrh: 4 kostky	Odloženo 1,1,5,5/1 Konec kola	Odloženo 1,1/1,1,5 Konec kola
6/3 Padlo 5-5-6-6	Odloženo: 1/1/5 Čtvrtý vrh: 3 kostky		
6/4 Padlo 4-5-6	Odloženo: 1/1/5/5 (300 bodů, musí pokračovat) Pátý vrh: 2 kostky		
6/5 Padlo 6-1	Odloženo: 1/1/5/5/1 Konec kola		

Hod $6/1$ hráč rozhoduje totožně jako v hodu $4/1$

Hod $6/2$ hráči nabízí:

* nechat si jedničku (celkem 300 bodů) a pokračovat v dalším vrhu s upravenou střední hodnotou 409 bodů.

* nechat si dvě jedničky (celkem 400 bodů) a pokračovat s očekáváním 494 bodů dle upravené střední hodnoty hodu.

* nechat si všechny bodované kostky (450 bodů) a kvůli nízké míře rizika nepokračovat.

V úvahu přichází hráči první varianta, nechat si jedničku a vrhat dál (míra rizika je na hranici, $3{,}54$), avšak střední hodnota je nižší než body jisté, $409 < 450$, tedy hráč vezme všechny bodované kostky a ukončí tah.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
7/1 Padlo 3-5-4-5-1-2	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 1,5,5 Druhý vrh: 3 kostky	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek
7/2 Padlo 5-2-1-3-2	Odloženo 1/1 Třetí vrh: 4 kostky	Odloženo 1,5,5/1,5 Konec kola	Odloženo 1/1 Třetí vrh: 4 kostky

7/3 Padlo 5-5-5-2	Odloženo 1/1/5,5,5 Konec kola		Odloženo 1/1/5,5,5 Konec kola

Hod 7/1 rozhoduje hráč stejně jako hod 5/1

V hodu 7/2 se hráč dle ideálního modelu rozhoduje, zda

* Nechá pouze jedničku (spolu s body z prvního kola zatím 200 bodů) a bude házet čtyřmi kostkami, střední hodnota hodu bude 359 bodů

* Nechá si jedničku a pětku (celkem 250 bodů) a bude házet třemi kostkami, střední hodnota hodu je pak 359 bodů.

Obě varianty mají zhruba stejnou upravenou střední hodnotu hodu, hráč volí variantu s vyšší mírou rizika, tedy nechat si pouze jedničku.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
8/1 Padlo 2-5-5-2-3-4	Odloženo: 5 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 5,5 Druhý vrh: 4 kostky	Odloženo: 5 Druhý vrh: 5 kostek
8/2 Padlo 5-3-5-6-4	Odloženo 5/5 Třetí vrh: 4 kostky	Odloženo 5,5/5,5 Třetí vrh: 2 kostky	Odloženo 5/5 Třetí vrh: 4 kostky
8/3 Padlo 2-5-4-3	Odloženo 5/5/5 Čtvrtý vrh: 3 kostky	Odloženo 5,5/5,5/5 Čtvrtý vrh: 1 kostka	Odloženo 5/5/5 Čtvrtý vrh: 3 kostky
8/4 Padlo 6-1-4	Odloženo 5/5/5/1 Pátý vrh: 2 kostky	Nula bodů, pro hráče padla pouze šestka.	Odloženo 5/5/5/1 Pátý vrh: 2 kostky
8/5 Padlo 4-1	Odloženo 5/5/5/1/1 Konec kola		Odloženo 5/5/5/1/1 Konec kola

Hod 8/1 nabízí hráči vzít jednu nebo dvě pětky.

* Vezme-li jednu pětku, pak může očekávat dle upravené střední hodnoty 288 bodů pří míře rizika více než 69.

* Vezme-li dvě pětky, pak může očekávat 259 bodů při míře rizika 13,9.

Ideální model mu doporučuje vzít vyšší upravenou střední hodnotu (s vysokou mírou rizika), tedy jednu pětku a pokračovat do dalšího vrhu s pěti kostkami.

Hod 8/2 nabízí ideálnímu hráči vzít jednu nebo dvě pětky.

* Vezmi-li jednu pětku, pak dle upravené střední hodnoty vrhu může očekávat 259 bodů při míře rizika 13,9 (shodně s druhou variantou v hodu 8/1).

* Vezmi-li obě pětky, pak může očekávat dle upravené střední hodnoty vrhu 259 bodů při míře rizika 4,48.

V případě rovnosti upravené střední hodnoty vrhu hráč volí možnost s vyšší mírou rizika, tedy uložit jednu pětku a se čtyřmi kostkami pokračovat dalším vrhem.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
9/1 Padlo 5-5-6-5-6-2	Odloženo: 5-5-5 Druhý vrh: 3 kostky	Odloženo: 5,5,5 Konec kola	Odloženo: 5,5,5 Konec kola
9/2 Padlo 4-3-4	Nula bodů v devátém kole.		

Hod 9/1 nabízí hráči hrajícího dle ideálního modelu pokračovat dalším vrhem se třemi kostkami. Upravená střední hodnota vrhu je 609 bodů, avšak při míře rizika 3,16, což je dle modelu málo. Hráč ukončí tah. Ani varianta vzetí jedné pětky a pokračování hodem s mírou rizika přes 40 není dle modelu vhodným řešením situace, neboť upravená střední hodnota hodu je 288 bodů, což je výrazně méně než nyní vržených pět set bodů.

Kolo/hod	Minimální ukládání	Úzkostlivý hráč	Ideální model
10/1 Padlo 5-3-2-3-1-2	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek	Odloženo: 1,5 Druhý vrh: 4 kostky	Odloženo: 1 Druhý vrh: 5 kostek
10/2 Padlo 1-2-5-3-1	Odloženo: 1/1 Třetí vrh: 4 kostky	Odloženo: 1,5/1,5 Třetí vrh: 2 kostky	Odloženo: 1/1,1 Třetí vrh: 3 kostky
10/3 Padlo 4-3-5-5	Odloženo 1/1/5 Čtvrtý vrh: 3 kostky	V desátém vrhu nula bodů.	Odloženo 1/1,1/5 Konec kola
10/4 Padlo 4-5-6	Odloženo 1/1/5/5 Pátý vrh: 2 kostky		
10/5 Padlo 4-4	V desátém vrhu nula bodů.		

Ve vrhu 10/1 má hráč možnost uložit jedničku nebo jedničku s pětkou (uložit pouze pětku smysl nemá).

* Uložením pouze jedničky hráč dle modelu může očekávat dle upravené střední hodnoty vrhu 338 bodů při míře rizika 40,51.

* Uložením jedničky a pětky hráč může očekávat 309 bodů s mírou rizika 11,06.

Hráč vybírá vyšší upravenou střední hodnotu vrhu, která má vysokou míru rizika, tedy uložení jedné jedničky, a pokračuje v druhém vrhu pěti kostkami.

Ve vrhu 10/2 má hráč hned tři možnosti, jednu dokonce s ukončením tahu.

*Uložením pouze jedničky hráč může dle modelu předpokládat 359 při míře rizika 9,64.

*Uložením dvou jedniček hráč může očekávat 409 bodů při míře rizika 3,54, což je na hranici přiměřené míry rizika.

* Uloží všechny nahrané body a ukončí hru (se dvěma kostkami je míra rizika příliš nízká).

Varianta uložení dvou jedniček nabízí hráči upravenou střední hodnotu 409 bodů, což je více než současných tři sta padesát nahraných bodů, míra rizika je akceptovatelná a hráč bude hrát se třemi kostkami vrhat znovu.

Ve vrhu 10/3 hráč bere pětku a uvažuje o ukončení tahu. Lákavá upravená střední hodnota 444 bodů má však nízkou míru rizika (1,59), hrát tak ukončí tah.

Modelová hra tří hráčů - výsledky

SOUČET ZA DESET KOL	0 + 350 + 600 + 0 + 350 + 400 + 700 + 350 + 0 + 0 =2750	350 + 350 + 600 + 0 + 350 + 350 + 350 + 0 + 500 + 0 = 2850	0 + 350 + 600 + 0 + 350 + 450 + 700 + 350 + 500 + 350 = 3650

Pro modelovou hru tří hráčů byla použita fukce RANDBETWEEN pro zajištění maximální možné nezávislosti. V případě dalších her, vzhledem k náhodnosti výběru čísel, zcela jistě vyjdou odlišné bodové součty. V dostatečně velkém souboru her by model ideálního hráče měl v průměru dosahovat lepších výsledků než dva základní modely hráče.

V dalším, jedenáctém kole, lze předpokládat u hráče s mnimálním ukládáním dočasná změna stratagie, kdy bude brát jakoukoli bodovou hodnotu nutnou k zapsání bodů, aby nedocílil třetí nuly v řadě, která by vedla ke ztrátě všech jeho bodů

Počítačová simulace hry tří typů hráčů

Jedna krátká hra, ač podrobně popsaná, nemůže postihnout všechny aspekty hry a její typické situace. Na demonstraci postupu byla povolána technika, která

Závěr

Cílem práce bylo popsat postup při rozhodování hráče tak, aby při co nejmenším riziku dosáhl co největšího bodového zisku. Výše popsaný model ideálního hráče vykazuje již po odehrání několika kol hry, že je vhodným řešením tohoto problému. Navržený rozhodovací proces je aplikovatelný na jakoukoli fázi hry a je možné upravováním míry rizika reagovat na aktuální stav hry.

Rozhodovací proces modelového hráče je, až na drobné výjimky, v souladu s ústně předávanými radami, které obohacuje o náhled na tuto problematiku očima matematika.

Výsledky této práce je možné uplatnit v algoritmu, který hraje proti reálnému hráči. V budoucnu je na práci možné navázat rozšířením rozhodovacího procesu o korekci vzorce, která bude reflektovat aktuální skóre obou hráčů automaticky.

Jednoduché verze programů jsou k dispozici jako elektronické přílohy práce. Měření byla prováděna vždy pro vzorek dvě stě padesáti her do 10 000 bodů, kdy byly hry nastaveny do výchozího nastavení a začínaly odznovu. Měřitelnou jednotkou u každého algoritmu je počet vrhů, které musel počítač provést, aby se dostal dvěstěpadesátkrát k cílové metě.

V případě modelu umírněného hráče jde o výsledky – 7388, 7224 a 6949 vrhů, v případě hráče hrajícího s minimálním ukládáním byly naměřeny výsledky po dvě stě padesáti hrách 7931, 8068 a 8169 vrhů. Navržený model ideálního hráče dosahoval výsledků kolem 7000 vrhů, konkrétně 6993, 7061 a 7082 vrhů.

Model ideálního hráče tak vykazuje mírně lepší výsledky, závěrem je však nutno doplnit, že hra vždy vychází i z aktuální situace na stole, kterou ani jeden model není schopen obsáhnout.

Na základě představy o zákoně velkých čísel lze uvažovat, že se každá ze tří strategií bude limitně blížit k jedné konkrétní hodnotě z jejího rozsahu, a to se vzrůstajícím počtem pokusů. [12] str 58.-60.

Seznam literatury

[1] Otto, Jan. *Ottův slovník naučný*, 10. díl., str. 929-930

[2] Hodnocení a přehled výsledků provozování loterií a jiných podobných her za rok2014, www.mfcr.cz

[3] Přednáška RNDr. Marie Budíkové, Dr., Masarykova univerzita, Brno, https://www.math.muni.cz/~budikova/prf/historie.pdf

[4] Mačák, Karel. *Počátky počtu pravděpodobnosti*, Praha, 1997

[5] Mortimer, Ernest, *Blaise Pascal : the life and work of a realist*. Londýn, 1959

[6] Křivý, Ivan. *Úvod do teorie pravděpodobnosti*. Ostrava, 1983

[7] Bílková, Diana, Budínský, Petr, Vohánka, Václav, *Pravděpodobnost a statistika*. Praha, 2009.

[8] Calda, E., Dupač, V. *Matematika pro gymnázia, Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Praha, 2002

[9] Dvořák, Dalibor, *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*. Ostrava, 2003

[10]Holický, Milan, Aplikace teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Praha, 2015

[11] Scarne, John. *Scarne's encyclopedia of games*. Harpercollins, 1973.

[12] Kolda, Stanislav. *Úvod do počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. Praha. 1982

Přílohy

1) Evidenční list žadatelů o nahlédnutí do listinné podoby práce
2) Prohlášení žadatele o nahlédnutí do listinné podoby práce před její obhajobou