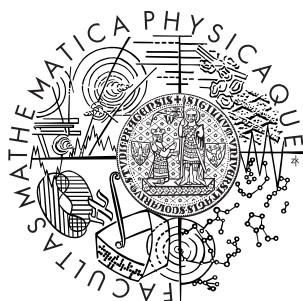


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavel Kubas

Kvaterniony, oktoniony a dál?

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. David Stanovský, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2009

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce, RNDr. Davidu Stanovskému, PhD., za ochotnou spolupráci, cenné rady a přípomínky. Velký dík patří také mým rodičům za jejich podporu během mého studia.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28. května 2009

Pavel Kubas

Obsah

1	Úvod	5
1.1	Pohled do historie	5
1.2	Představení a definice	6
2	Hurwitzův teorém	10
2.1	Pravidla pro počítání	10
2.2	Důkaz Hurwitzova teorému	13
3	Vlastnosti kvaternionů a oktonionů	18
3.1	Základní vlastnosti	18
3.2	Reprezentace kvaternionů	21
3.3	Fanova rovina a jiné obrázky	23
4	Praktické využití	27
4.1	Kvaterniony a rotace ve třech dimenzích	27
4.2	Další aplikace	31

Název práce: Kvaterniony, oktoniony a dál?

Autor: Pavel Kubas

Katedra (ústav): Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. David Stanovský, Ph.D.

e-mail vedoucího: David.Stanovsky@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá algebrou kvaternionů a oktonionů. Po úvodním představení a zavedení nezbytných pojmu je prezentován důkaz Hurwitzova teorému, který říká, že jediné kompoziční algebry jsou $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a \mathbb{O} . Předvedeny jsou základní vlastnosti těchto algeber a související grafická znázornění. Ve vlastnostech více rozvádíme reprezentace kvaternionů pomocí matic. Dále uvádíme praktické využití kvaternionů pro popis rotací v 3-dimensionálních prostorech a zmiňujeme některé další zajímavé aplikace, např. z oblasti teorie čísel a kvantové mechaniky.

Klíčová slova: kvaterniony, oktoniony, Hurwitzův teorém, kompoziční algebry

Title: Quaternions, octonions and...?

Author: Pavel Kubas

Department: Department of Algebra

Supervisor: RNDr. David Stanovský, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: David.Stanovsky@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis delas with the algebra of quaternions and octonions. After preliminary introduction and implementation of necessary terminology is presented the proof of Hurwitz's theorem which states that the only composition algebras are $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a \mathbb{O} . The basic charecteristics of these algebras are demonstrated and graphic illustrations as well. Concerning the characteristics, we specify representations of quaternions through the use of matrices. Furthermore we list practical use of quaternions to describe rotations in 3-dimensional spaces and mention some other interesting applications, for example from the areas of number theory and quantum mechanics.

Keywords: quaternions, octonions, Hurwitz's theorem, composition algebras

Kapitola 1

Úvod

1.1 Pohled do historie

V roce 1835 William R. Hamilton přišel na to, jak reprezentovat komplexní čísla pomocí párů čísel reálných. Velmi jej zaujal vztah mezi komplexními čísly a 2-dimenzionální geometrií, snažil se tedy objevit větší algebru dimenze 3, která by hrála podobnou roli v 3-dimenzionální geometrii. To se mu ovšem nemohlo povést, protože taková algebra neexistuje.

Dne 16. října 1843 šel se ženou podél Royal Canalu, když ho náhle napadly zásadní rovnice popisující vztah mezi základními jednotkami kvaternionů i , j a k :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Aby je nezapomněl, vyryl je do kamene na Broughamském mostu, kde nám to dodnes připomíná pamětní deska. Zbytek života strávil zkoumáním vlastností kvaternionů a jejich aplikací v geometrii.

Objev oktonionů se váže k Hamiltonovu příteli Johnu T. Gravesovi, který se pokusil Hamiltonovu myšlenku rozšířit. To se mu povedlo 26. prosince 1843, kdy mu poslal dopis, v němž popisoval novou 8-dimenzionální algebru, kterou nazval oktávy. Později se snažil toto rozšířit na obecnou teorii o 2^m -nionech, narazil však na neočekávané obtíže.

Nezávisle na něm publikoval v březnu 1845 Arthur Cayley článek, ve kterém byla i část o oktonionech. Proto se také oktoniony někdy nazývají Cayleyho čísla.

V tomto textu objasníme, proč Gravesovy 2^m -niony nefungovaly, a to důkazem tzv. Hurwitzova teorému.

1.2 Představení a definice

Na úvod vymezíme některé základní pojmy, se kterými budeme v celém textu pracovat. Předpokládáme, že je čtenář obeznámen s algebrou reálných a komplexních čísel (\mathbb{R} a \mathbb{C}). Podobně jako je u komplexních čísel jedna imaginární jednotka, u kvaternionů budou tyto jednotky tři a u oktonionů jich bude dokonce sedm. Nejprve si tedy řekneme, co to vlastně kvaterniony a oktoniony jsou.

Definice 1.1. *Kvaternionem nazveme číslo ve tvaru*

$$x_0 + x_1i + x_2j + x_3k,$$

kde x_0, x_1, x_2, x_3 jsou reálná čísla a i, j, k jsou základní jednotky splňující rovnice

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Kvaterniony budeme značit písmenem \mathbb{H} .

Z definice nám plynou následující vztahy mezi i, j a k :

$$\begin{aligned} ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \\ ji &= -k, & kj &= -i, & ik &= -j. \end{aligned}$$

Díky těmto rovnostem snadno vyjádříme součet a součin dvou kvaternionů:

$$\begin{aligned} & (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) + (y_0 + y_1i + y_2j + y_3k) \\ &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)i + (x_2 + y_2)j + (x_3 + y_3)k, \\ & (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k)(y_0 + y_1i + y_2j + y_3k) \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i \\ &+ (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)j + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)k. \end{aligned}$$

Definice 1.2. Oktonionem nazveme číslo ve tvaru

$$x_\infty + x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6,$$

kde $x_\infty, x_0, \dots, x_6$ jsou reálná čísla a i_0, \dots, i_6 základní jednotky splňující rovnice

$$\begin{aligned} i_n^2 &= -1, \\ i_{n+1} i_{n+2} &= i_{n+4} = -i_{n+2} i_{n+1}, \\ i_{n+2} i_{n+4} &= i_{n+1} = -i_{n+4} i_{n+2}, \\ i_{n+4} i_{n+1} &= i_{n+2} = -i_{n+1} i_{n+4}, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a indexy běží modulo 7.

Oktoniony budeme značit písmenem \mathbb{O} .

Vztah mezi imaginárními jednotkami lze v případě kvaternionů vyjádřit jednoduchou tabulkou:

	i	j	h
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	i	-1

V případě oktonionů už je ovšem situace daleko nepřehlednější:

	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
i_0	-1	i_3	i_6	$-i_1$	i_5	$-i_4$	$-i_2$
i_1	$-i_3$	-1	i_4	i_0	$-i_2$	i_6	$-i_5$
i_2	$-i_7$	$-i_4$	-1	i_5	i_1	$-i_3$	i_0
i_3	i_1	$-i_0$	$-i_5$	-1	i_6	i_2	$-i_4$
i_4	$-i_5$	i_2	$-i_1$	$-i_6$	-1	i_0	i_3
i_5	i_4	$-i_6$	i_3	$-i_2$	$-i_0$	-1	i_1
i_6	i_2	i_5	$-i_0$	i_4	$-i_3$	$-i_1$	-1

Komplexní čísla jsou vzhledem k operaci násobení komutativní a asociativní. Kvaterniony a oktoniony komutativní nejsou, jak vidíme přímo z definice.

Oktoniny navíc nejsou ani asociativní. Tyto vlastnosti nám přímo vyplynou z důkazu Hurwitzova teorému.

Nyní zavedeme několik pojmu, které budeme potřebovat v další kapitole.

Definice 1.3. *Algebrou R nad tělesem T rozumíme (obecně nekomutativní, neasociativní) okruh, který je zároveň vektorový prostor nad T a platí*

$$t \cdot (r \cdot_R s) = r \cdot_R (t \cdot s) = (t \cdot r) \cdot_R s$$

pro všechna $t \in T, r, s \in R$.

Příklad 1.1.

- Je-li S těleso a T jeho podtěleso, pak S je algebrou nad T .
- Libovolný maticový okruh $R \leq M_n(T)$ je algebrou nad T dimenze $\leq n$.
- Libovolný okruh polynomů $R \leq T[X]$ je algebrou nad T (nekonečné dimenze, pokud $R \neq T$).
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ a \mathbb{O} jsou algebrou nad \mathbb{R} .

Definice 1.4. *Kompoziční algebrou X nazveme algebru nad \mathbb{R} obsahující prvek 1, s vlastností $1x = x1 = x$ pro všechna $x \in X$, na které je zavedena netriviální kvadratická norma $|\cdot|$, která splňuje $|xy| = |x||y|$ pro všechna $x, y \in X$.*

Definice 1.5. Bud' X kompoziční algebra. *Skalárním součinem* na X nazveme reálnou funkci $|\cdot, \cdot|$ danou předpisem

$$|x, y| = \frac{|x + y| - |x| - |y|}{2} \quad (\text{Z})$$

pro $x, y \in X$ (pracujeme nad reálnými čísly, takže 2 je invertibilní a definice je korektní). Platí $|x, x| = |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tedy řekneme, že vektory x, y jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $|x, y| = 0$.

Definice 1.6. Bud' x z nějaké kompoziční algebry. Pak výraz $2|x, 1| - x$ nazveme *sdružené číslo*. Značíme \bar{x} .

Snadno ověříme, že poslední definice není v rozporu se standardní definicí sdruženého čísla v \mathbb{C} .

Definice 1.7. Bud' H vlastní n -dimenzionální podalgebra kompoziční algebry X , $1 \in H$ a i jednotkový vektor kolmý na H . Pak *Dicksonovou algebrou* algebry H je $H + iH = \{x + iy \mid x, y \in H\}$.

Jelikož H je vlastní, pro každou takovou H Dicksonova algebra existuje: zvolíme $i \in H^\perp$, ortogonálního doplňku H , takové, že $|i| = 1$. To je vždy možné, protože pro nenulové $j \in H^\perp$, $|j| \neq 1$ snadno zkonstruujeme $\tilde{j} = \frac{j}{|j|}$, $|\tilde{j}| = 1$.

Pro $H = \mathbb{R}$ vidíme, že Dicksonovou algebrou algebry reálných čísel jsou komplexní čísla \mathbb{C} . V následující kapitole bude naším cílem ukázat, že jediné kompoziční algebry jsou nám již známé $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a \mathbb{O} , což je obsahem již zmíněného Hurwitzova teorému.

Použité zdroje

Úvodní povídání je volně převzato z [3], s. 7 - 9, definice 1.1, 1.2 převzaty z [3], s. 21, 65. Definice 1.4, 1.5 jsou zformulovány na základě [3], s. 67 - 69, definice 1.3 je převzatá společně s příkladem z [7], s. 101, 102.

Kapitola 2

Hurwitzův teorém

2.1 Pravidla pro počítání

Pro důkaz Hurwitzova teorému bude užitečné vědět, jak funguje skalární součin, sdružení a násobení v Dicksonových algebrách. V důkazech následujících tvrzení se opakovaně používá jednoduchý princip, který si předem dokážeme v následujícím tvrzení.

Tvrzení 2.1. Bud' $x, y \in X$, X kompoziční algebra. Jestliže pro všechna $t \in X$ platí $|x, t| = |y, t|$, pak $x = y$.

Důkaz. Položme $w = x - y$. Chceme dokázat, že jestliže pro všechna $t \in X$ platí $|w, t| = 0$, pak $w = 0$. Předpokládejme $w \neq 0$. Pro $t = w$ tedy $|w, w| = |w| = 0$ a nutně $w = 0$, spor. \square

Ukažme si nejprve některé základní vlastnosti skalárního součinu a sdružených čísel.

Tvrzení 2.2. Pro všechna x, y, z, u z nějaké kompoziční algebry platí

$$1. |xy| = |x||y| \quad (\text{M1})$$

$$2. |xy, xz| = |x||y, z|, |xz, yz| = |x, y||z| \quad (\text{M2})$$

$$3. |xy, uz| = 2|x, u||y, z| - |xz, uy| \quad (\text{M3})$$

$$4. |xy, z| = |y, \bar{x}z|, |xy, z| = |x, z\bar{y}| \quad (\text{C1})$$

$$5. \bar{\bar{x}} = x \quad (\text{C2})$$

$$6. \overline{xy} = \overline{y}\overline{x} \quad (\text{C3})$$

Důkaz.

1. Přímo z definice kompoziční algebry.

$$2. |xy, xz| \stackrel{(Z)}{=} \frac{|xy+xz|-|xy|-|xz|}{2} \stackrel{(M1)}{=} \frac{|x||y+z|-|x||y|-|x||z|}{2} = |x|\frac{|y+z|-|y|-|z|}{2} \stackrel{(Z)}{=}$$

$$|x||y, z|$$

Druhou rovnost dokážeme zcela analogicky.

3. Víme, že

$$|xy + uy, xz + uz| = |xy, xz| + |xy, uz| + |uy, xz| + |uy, uz|, \text{ tedy}$$

$$|xy, uz| = |(x+u)y, (x+u)z| - |xy, xz| - |uy, xz| - |uy, uz| \stackrel{(M2)}{=}$$

$$|x+u||y, z| - |x||y, z| - |uy, xz| - |u||y, z| \stackrel{(Z)}{=} (|x| + 2|x, u| + |u|)|y, z| -$$

$$|x||y, z| - |uy, xz| - |u||y, z| = 2|x, u||y, z| - |xz, uy|.$$

$$4. |xy, z| = |xy, 1z| \stackrel{(M3)}{=} 2|x, 1||y, z| - |xz, 1y| = |y, 2|x, 1|z| - |y, xz| =$$

$$|y, (2|x, 1| - x)z| = |y, \bar{x}z|$$

Druhou rovnost dokážeme zcela analogicky.

5. Nechť t je libovolný prvek ze stejné kompoziční algebry jako x . Pak
 $|x, t| = |x1, t| \stackrel{(C1)}{=} |1, \bar{x}t| = |\bar{x}t, 1| \stackrel{(C1)}{=} |t, \bar{x}1| = |\bar{x}1, t| = |\bar{x}, t|$ pro všechna t , tedy $x = \bar{\bar{x}}$.

6. Nechť t je libovolný prvek ze stejné kompoziční algebry jako x a y .

Pak

$$|\bar{y}\bar{x}, t| \stackrel{(C1)}{=} |\bar{x}, yt| \stackrel{(C1)}{=} |\bar{x}\bar{t}, y| \stackrel{(C1)}{=} |\bar{t}, xy| = |\bar{t}, xy.1| \stackrel{(C1)}{=} |\bar{t}\bar{x}\bar{y}, 1| \stackrel{(C1)}{=}$$

$$|\bar{x}\bar{y}, t| \text{ pro všechna } t, \text{ tedy } \bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}.$$

□

A nyní již můžeme přikročit k důkazu avizovaných vlastností prvků Dicksonovy algebry.

Tvrzení 2.3. Budě $H + iH$ Dicksonova algebra kompoziční algebry H . Pak $\bar{i} = -i$ a pro všechna $a, b, c, d \in H$ platí $|i, a| = 0$ a

$$1. |a + ib, c + id| = |a, c| + |b, d| \quad (\text{D1})$$

$$2. \overline{a+ib} = \bar{a} - ib \text{ (a tedy } ib = \bar{b}i\text{)} \quad (\text{D2})$$

$$3. (a+ib)(c+id) = (ac - d\bar{b}) + i(cb + \bar{a}d) \quad (\text{D3})$$

Důkaz. Výraz $|i, a|$ je pro všechna a z H roven 0, protože i je kolmé na všechny prvky H , tedy zřejmě $\bar{i} = -i$. Nyní dokážeme rovnosti (D1) - (D3):

$$1. |a+ib, c+id| = |a, c| + |a, id| + |ib, c| + |ib, id| \stackrel{(C1)}{=} |a, c| + |a\bar{d}, i| + |i, c\bar{b}| + |ib, id| \stackrel{(M2)}{=} |a, c| + 0 + 0 + |i||b, d| = |a, c| + |b, d|$$

$$2. \overline{a+ib} = \bar{a} + \bar{ib} = \bar{a} + (2|i, 1| - ib) \stackrel{(C1)}{=} \bar{a} + 2|i, 1\bar{b}| - ib = \bar{a} - ib$$

Tedy $-ib = \bar{ib} \stackrel{(C3)}{=} \bar{b}\bar{i} = -\bar{b}i$ a $ib = \bar{b}i$.

$$3. (a+ib)(c+id) = ac + a(id) + (ib)c + (ib)(id)$$

První člen roznásobení ponecháme, zbývající tři členy upravíme pomocí dříve dokázaných rovností:

- $|a(id), t| \stackrel{(C1)}{=} |id, \bar{a}t| \stackrel{(M3)}{=} 0 - |it, \bar{a}d| \stackrel{(C1)}{=} |t, i(\bar{a}d)|$
- $|(ib)c, t| \stackrel{(C1)}{=} |ib, t\bar{c}| \stackrel{(D2)}{=} |\bar{b}i, t\bar{c}| \stackrel{(M3)}{=} 0 - |\bar{b}\bar{c}, ti| \stackrel{(C1)}{=} |(\bar{b}\bar{c})i, t| \stackrel{(D2)}{=} |i(cb), t|$
- $|(ib)(id), t| \stackrel{(C1)}{=} -|ib, t(id)| \stackrel{(M3)}{=} 0 + |i(id), tb| \stackrel{(C1)}{=} -|id, i(tb)| \stackrel{(M2)}{=} -|i||d, tb| \stackrel{(C1)}{=} -|db, t|$

Rovnosti platí pro všechna t , tedy máme

$$(a+ib)(c+id) = ac + a(id) + (ib)c + (ib)(id) = ac + i(\bar{a}d) + i(cb) - d\bar{b} = (ac - d\bar{b}) + i(cb + \bar{a}d).$$

□

Důsledek 2.1. Buď H vlastní podalgebra kompoziční algebry K a $H+iH$ její Dicksonova algebra. Pak $H+iH$ je podalgebrou K .

Důkaz. Snadno ověříme, že $a+b \in H+iH$ a $ra \in H+iH$, pro všechna $a, b \in H+iH$ a $r \in \mathbb{R}$. V Tvrzení 2.3 (D3) jsme ukázali, že $ab \in H+iH$, pro všechna $a, b \in H+iH$, tedy $H+iH$ je podalgebra K .

□

2.2 Důkaz Hurwitzova teorému

Věta 2.1. (Hurwitzův teorém) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a \mathbb{O} jsou jediné kompoziční algebry.

Před důkazem předchozí věty si zformulujeme několik pomocných tvrzení a lemmat, ze kterých nám již vlastní důkaz snadno vyplyně.

Nejprve se podívejme na to, jak je to s dimenzí Dicksonovy algebry.

Tvrzení 2.4. Bud' H vlastní n -dimenzionální podalgebra kompoziční algebry Z , $1 \in H$ a i jednotkový vektor kolmý na H . Pak dimenze Dicksonovy algebry algebry H je dvojnásobek dimenze algebry H , tedy

$$\dim(H + iH) = 2\dim(H)$$

Důkaz. Vezměme $a, b \in H$. Pokud bychom věděli, že a je kolmé na ib pro libovolné a, b , pak žádný prvek báze H neleží v iH a naopak. Tedy báze H a iH jsou disjunktní a $\dim(H + iH) = 2\dim(H)$.

Chceme tedy $|a, ib| = 0$ pro všechna $a, b \in H$, což snadno dostáváme z Tvrzení 2.3: $|a, ib| = |ib, a| \stackrel{(C1)}{=} |i, a\bar{b}| = 0$ pro všechna $a, b \in H$, protože i je kolmé na všechny prvky z H .

□

Důsledek 2.2. Bud' K kompoziční algebra konečné dimenze. Pak $\dim(K) = n = 2^m$ pro nějaké $m, n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Předpokládejme opak. Jelikož $\mathbb{R}, \dim(\mathbb{R}) = 1$, je vlastní podalgebra K , pak podle Důsledku 2.1 můžeme vytvořit zdvojováním (tj. postupným tvořením Dicksonových algeber) vlastní podalgebru $H \leq K, \dim(H) = 2^k < n$, pro $k \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{k+1} > n$. Pak ale $H + iH \leq K$ a zároveň $\dim(H + iH) > \dim(K)$, spor.

□

Tedy pokud má kompoziční algebra Z konečnou dimenzi, lze ji získat zdvojováním z její nejmenší podalgebry \mathbb{R} , speciálně tedy musí být Dicksonovou algebrou nějaké její podalgebry Y , ta zase Dicksonovou algebrou nějaké její podalgebry X , atd.

Máme-li tedy $Z = Y + i_Z Y, Y = X + i_Y X, \dots$, vyvstává otázka, co musí Y splňovat, aby Z byla kompoziční algebra, co musí dále splňovat X , aby

Y byla „ta správná“ kompoziční algebra pro Z , tj. aby $Z = (X + i_Y X) + i_Z(X+i_Y X)$ byla kompoziční algebra, a tak dále. Na tuto otázku si odpovíme důkazem následujících tří lemmat.

Lemma 2.1. Nechť $Z = Y + i_Z Y$, $i_Z \in Z$ je jednotkový vektor kolmý na Y , pak Z je kompoziční algebra právě tehdy, když Y je asociativní kompoziční algebra.

Důkaz. Z je kompoziční algebra, pokud splňuje podmínku z definice: pro všechna $a, b, c, d \in Y$ musí platit $|(a + i_Z b)(c + i_Z d)| = |a + i_Z b||c + i_Z d|$. Použitím pravidel pro počítání a vzorečku $|x + y| = |x| + |y| + 2|x, y|$ z definice skalárního součinu dostaváme:

$$\begin{aligned} |(ac - d\bar{b}) + i_Z(cb + \bar{a}d)| &= |a + i_Z b||c + i_Z d| \\ |ac| + |d\bar{b}| - 2|ac, d\bar{b}| + |cb| + |\bar{a}d| + 2|cb, \bar{a}d| &= (|a| + |i_Z b| + 2|a, i_Z b|)(|c| + |i_Z d| + 2|c, i_Z d|) \\ 2|cb, \bar{a}d| &= 2|ac, d\bar{b}| \\ |a(cb), d| &= |(ac)b, d| \end{aligned}$$

což platí právě tehdy, když $a(cb) = (ac)b$ pro všechna $a, b, c \in Y$, tj. Y je asociativní kompoziční algebra.

□

Lemma 2.2. Nechť $Y = X + i_Y X$, $i_Y \in Y$ je jednotkový vektor kolmý na X , pak Y je asociativní kompoziční algebra právě tehdy, když X je komutativní a asociativní kompoziční algebra.

Důkaz. Jestliže Y je kompoziční algebra, pak z důkazu Tvrzení 2.3 víme, že platí $(i_Y b)c = i_Y(cb)$ pro všechna $b, c \in X$, navíc Y je asociativní, tedy $i_Y(bc) = i_Y(cb)$ a $bc = cb$ pro všechna $b, c \in X$ (i_Y je jednotkový vektor), tj. X je komutativní kompoziční algebra.

Opačnou implikaci dokážeme výpočtem: kdy nastává rovnost

$$[(a + i_Y b)(c + i_Y d)](e + i_Y f) = (a + i_Y b)[(c + i_Y d)(e + i_Y f)]$$

pro všechna $a, b, c, d, e, f \in X$?

Podle pravidel pro počítání upravíme levou stranu

$$[(a + i_Y b)(c + i_Y d)](e + i_Y f) = [(ac - d\bar{b}) + i_Y(cb + \bar{a}d)](e + i_Y f) =$$

$$\begin{aligned}
&= (ac - d\bar{b})e - f(\bar{b}\bar{c} + \bar{d}a) + i_Y[e(cb + \bar{a}d) + (\bar{c}\bar{a} - b\bar{d})f] = \\
&= (ac)e - (d\bar{b})e - f(\bar{b}\bar{c}) - f(\bar{d}a) + i_Y[e(cb) + e(\bar{a}d) + (\bar{c}\bar{a})f - (b\bar{d})f]
\end{aligned}$$

a obdobně i pravou stranu

$$\begin{aligned}
(a + i_Yb)[(c + i_Yd)(e + i_Yf)] &= (a + i_Yb)[(ce - f\bar{d}) + i_Y(ed + \bar{c}f)] = \\
&= a(ce - f\bar{d}) - (ed + \bar{c}f)\bar{b} + i_Y[(ce - f\bar{d})b + \bar{a}(ed + \bar{c}f)] = \\
&= a(ce) - a(f\bar{d}) - (ed)\bar{b} - (\bar{c}f)\bar{b} + i_Y[(ce)b - (f\bar{d})b + \bar{a}(ed) + \bar{a}(\bar{c}f)].
\end{aligned}$$

Rovnost nastane, jestliže X je komutativní a asociativní.

□

Lemma 2.3. Nechť $X = W + i_XW$, $i_X \in X$ je jednotkový vektor kolmý na W , pak X je komutativní a asociativní kompoziční algebra právě tehdy, když W je komutativní a asociativní kompoziční algebra s triviálním sdružením, tj. $\bar{w} = w$ pro všechna $w \in W$.

Důkaz. Jestliže X je kompoziční algebra, pak z Tvrzení 2.3 (D2) víme, že $i_Xe = \bar{e}i_X$ pro všechna $e \in W$, navíc X je komutativní, tedy $i_Xe = i_X\bar{e}$ a $e = \bar{e}$ (i_X je jednotkový vektor), tj. W je komutativní a asociativní kompoziční algebra s triviálním sdružením.

Naopak, obdobně jako v předchozím důkazu, rovnost levých stran

$$(a + i_Xb)(c + i_Xd) = (ac - d\bar{b}) + i_X(cb + \bar{a}d)$$

a

$$(c + i_Xd)(a + i_Xb) = (ca - b\bar{d}) + i_X(ad + \bar{c}b)$$

nastane, jestliže W je komutativní a má triviální sdružení.

□

Dosud jsme nevěděli, jak je to s dimenzí Z . Z Tvrzení 2.4 a předchozích lemmat nyní víme, že $\dim(Z) = 2\dim(Y) = 4\dim(X) = 8\dim(W)$. Kolik je ale dimenze W ?

Tvrzení 2.5. Bud' W kompoziční algebra. Jestliže $w = \bar{w}$ pro všechna $w \in W$, pak $\dim(W) = 1$.

Důkaz. Předpokládejme, že W má dimenzi větší než 1, tedy existuje nenulové $w \in W$ tak, že $|w, 1| = 0$, tj. w je kolmé k 1. Takové ovšem neexistuje, protože víme, že $\bar{w} = w$, tedy $2|w, 1| - w = w$ a nutně $w = 0$.

□

Tedy máme $\dim(Z) = 8$ a obdobně $\dim(Y) = 4$ a $\dim(X) = 2$; $\dim(W) = 1$ a tedy $W \cong \mathbb{R}$ (W je algebra nad \mathbb{R}).

Nyní již můžeme dokázat Větu 2.1.

Důkaz Hurwitzova teorému. Máme W , $\dim(W) = 1$, komutativní a asocia-tivní kompoziční algebru s triviálním sdružením. Dle Lemma 2.3 je X komutativní a asocia-tivní kompoziční algebra, ale vzhledem k $\dim(X) = 2$ nemůže mít triviální sdružení. Tedy dle Lemmat 2.3, 2.2, 2.1 je Y asocia-tivní kompoziční algebra, ale nekomutativní, Z kompoziční algebra, ale již ne asocia-tivní. Další zdvojená algebra $S = Z + i_S Z$ již není kompoziční alge-brou, protože Z nesplňuje nutnou podmínu asocia-tivity. Jediné kompoziční algebry jsou tedy dimenze 1, 2, 4 a 8, a to $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ a \mathbb{O} .

□

Toto zřejmě platí až na izomorfismus.

Tvrzení 2.6. Buď K kompoziční algebra, $\dim(K) = 2^n$, H_j navzájem různé podalgebry K , $H_j + i_j H_j$ Dicksonova algebra H_j a $\dim(H_j) = 2^{n-1}$, $j \in \{1, 2\}$, $n \in \{1, 2, 3\}$. Pak $H_1 + i_1 H_1 \cong H_2 + i_2 H_2$.

Důkaz. Buď A vektorový prostor nad \mathbb{R} dimenze m s bází $(e_0, e_1, \dots, e_{m-1})$. Pak $a \in A$ lze vyjádřit jako $\sum_{j=0}^{m-1} a_j e_j$, kde souřadnice vektoru a_0, \dots, a_{m-1} jsou jednoznačně určené. Pak zobrazení $f_A : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dané předpisem $f_A(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$ je bijektivní homomorfismus a tedy $A \cong \mathbb{R}^m$. To nám říká, že pokud máme dva vektorové prostory X, Y stejné dimenze, pak jsou izomorfní. Opačná implikace je zřejmá - pro $f : X \rightarrow Y$, f izomorfismus, máme $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(Y)$ a tudíž $\dim(X) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(Y)$. Tedy $X \cong Y \Leftrightarrow \dim(X) = \dim(Y)$. Podívejme se na případ $n = 1$. Položme $C = H_1 + i_1 H_1$. Dimenze C je 2, zvolme jeho bázi $(e_0, e_1) = (1, i_1)$. Pak $c = c_1 + i_1 c_2$, $c \in C$ má souřadnice (c_1, c_2) a f_C je izomorfismus vektorových prostorů. Pro $c' \in C$ máme $cc' = (c_1 + i_1 c_2)(c'_1 + i_1 c'_2) = (c_1 c'_1 - c_2 c'_2) + i_1(c_2 c'_1 + c_1 c'_2)$. Definujme na \mathbb{R}^2 násobení dvou vektorů vztahem $(r_1, r_2)(r'_1, r'_2) = (r_1 r'_1 - r_2 r'_2, r_2 r'_1 + r_1 r'_2)$.

Pak \mathbb{R}^2 je algebra nad \mathbb{R} , $f_C(c_1c_2) = f_C(c_1)f_C(c_2)$ pro všechna $c_1, c_2 \in C$ a f_C je izomorfizmus algeber, $C \cong \mathbb{R}^2$. Obdobně $D = H_2 + i_2H_2 \cong \mathbb{R}^2$, $C \cong \mathbb{R}^2 \cong D$.

Pro $n = 2$ si nejprve uvědomíme, že pro $E = H + iH$ můžeme položit $H = F + jF$, tedy $E = F + iF + jF + (ji)F$, a postupujeme analogicky jako v předchozím případě. Obdobně pro $n = 3$.

□

Použité zdroje

Věta 2.1, tvrzení 2.2 a 2.3 a lemmata 2.1, 2.2 a 2.3 pocházejí z [3], s. 68 - 72. Důkaz věty 2.1 je přeformulován s ohledem na [8], s. 194, podle [9], s. 9. Ostatní tvrzení pocházejí od autora, z čehož tvrzení 2.1, 2.4 a 2.5 jsou zformulována na základě [3], s. 67, 70, [8], s. 190, 191, a [9], s. 5, 9.

Kapitola 3

Vlastnosti kvaternionů a oktonionů

3.1 Základní vlastnosti

Pro snažší zápis zavedeme značení kvaternionů jako skaláru z \mathbb{R} a vektoru z \mathbb{R}^3 . Zápisem $q = [s, \mathbf{v}]$, kde $s \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, budeme rozumět kvaternion $q = s + ix + jy + kz$. Skalární součin vektorů v \mathbb{R}^3 označíme \cdot a vektorový součin \times . Pokud není uvedeno jinak, používáme značení $q = s + ix + jy + kz = [s, \mathbf{v}]$, $q' = s' + ix' + jy' + kz' = [s', \mathbf{v}']$.

Násobení kvaternionů jsme si ukázali hned v úvodní kapitole. Podívejme se na něj nyní znova, s novým značením.

Tvrzení 3.1. Budě $q, q' \in \mathbb{H}$, $q = [s, \mathbf{v}]$, $q' = [s', \mathbf{v}']$. Pak

$$qq' = [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}].$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} qq' &= [s, \mathbf{v}][s', \mathbf{v}'] = (s + ix + jy + kz)(s' + ix' + jy' + kz') = \\ &= ss' - (xx' + yy' + zz') + i(sx' + s'x + yz' - zy') + \\ &\quad + j(sy' + s'y + zx' - xz') + k(sz' + s'z + xy' - yx') = \\ &= [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}] \end{aligned}$$

□

Vektorový součin není komutativní, hned tedy vidíme, že ani kvaterniony nemůžou být komutativní.

Dále budeme uvádět tvrzení většinou bez důkazů, jelikož ty spočívají pouze v rozepsání s použitím sčítání a násobení a případném přerovnání členů.

Tvrzení 3.2. Bud' $p, q, q' \in \mathbb{H}$, $r \in \mathbb{R}$. Pak

- násobení je asociativní:

$$(pq)q' = p(qq')$$

- násobení je distributivní vzhledem ke sčítání:

$$p(q + q') = pq + pq'$$

$$(q + q')p = qp + q'p$$

- násobení skalárem komutativní:

$$rq = qr = [r, \mathbf{0}][s, \mathbf{v}] = [rs, r\mathbf{v}]$$

Podívejme se nyní na sdružení a s ním související normu.

Sdruženým kvaternionem ke kvaternionu $q = [s, \mathbf{v}]$ rozumíme $\bar{q} = [s, -\mathbf{v}]$.

Tvrzení 3.3. Bud' $p, q \in \mathbb{H}$. Pak

- $\bar{\bar{q}} = q$
- $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$
- $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$
- $q\bar{q} = \bar{q}q$

Norma kvaternionů definujeme právě pomocí sdružení:

Definice 3.1. Bud' $q \in \mathbb{H}$ a bud' zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definováno vztahem $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$. Pak $\|q\|$ nazveme *normou kvaternionu* q .

Tvrzení 3.4. Bud' $q, q' \in \mathbb{H}$. Pak

- $\|q\| = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$
- $\|\bar{q}\| = \|q\|$
- $\|qq'\| = \|q\| \|q'\|$

Důkaz. První dvě rovnosti jsou zřejmé, podívejme se na třetí.

$$\|qq'\| = \sqrt{qq' \bar{qq'}} = \sqrt{qq' \bar{q'} \bar{q}} = \sqrt{q \|q'\|^2 \bar{q}} = \sqrt{q\bar{q} \|q'\|^2} = \sqrt{\|q\|^2 \|q'\|^2} = \|q\| \|q'\|$$

□

Pomocí normy definujeme inverzní prvek:

Definice 3.2. Bud' $q \in \mathbb{H}$, q nenulové. Pak pro q definujeme prvek q^{-1} takový, že $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$, daný předpisem

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$$

Snadno ověříme, že takový prvek existuje a je dán jednoznačně.

Podívejme se nyní ještě na kvaterniony normy 1 - ty nás budou později zajímat v souvislosti s rotacemi v 3-dimensionálním prostoru. Jednotkovým kvaternionem označíme tedy kvaternion q takový, že $\|q\| = 1$. Množinu všech jednotkových kvaternionů označíme \mathbb{H}_1 .

Tvrzení 3.5. Bud' $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}_1$. Pak existuje jednotkový vektor $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ a θ , $-\pi < \theta \leq \pi$, takové, že $q = [\cos \theta, \mathbf{v}' \sin \theta]$.

Důkaz. Pro $q = [1, \mathbf{0}]$ položíme $\theta = 0$ a za \mathbf{v}' zvolíme libovolný jednotkový vektor z \mathbb{R}^3 .

Pro $q \neq [1, \mathbf{0}]$ položme $k = |\mathbf{v}|$ a $\mathbf{v}' = \frac{1}{k}\mathbf{v}$. Pak $\mathbf{v} = k\mathbf{v}'$, kde \mathbf{v}' je jednotkový vektor. Jelikož je q jednotkový kvaternion, dostáváme:

$$1 = \|q\|^2 = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = s^2 + k^2 \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = s^2 + k^2$$

Rovnice $s^2 + k^2 = 1$ popisuje kružnici v rovině. Jelikož kružnici můžeme také popsat rovnicí $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, existuje θ , $-\pi < \theta \leq \pi$, takové, že $s = \cos \theta$ a $k = \sin \theta$. Tedy $q = [s, \mathbf{v}] = [s, \mathbf{v}'k] = [\cos \theta, \mathbf{v}' \sin \theta]$.

□

Uvedeme ještě dvě důležité vlastnosti jednotkových kvaternionů.

Tvrzení 3.6. Budě $q, q' \in \mathbb{H}_1$. Pak $\|qq'\| = 1$ a $q^{-1} = \bar{q}$.

Důkaz. První vlastnost snadno vyplývá z Tvrzení 3.4: $\|qq'\| = \|q\| \|q'\| = 1$ a druhou dostáváme přímo z definice inverzního prvku.

□

Uvedli jsme všechny vlastnosti kvaternionů, které budeme potřebovat v dalším textu. Podívejme se nyní ještě krátce na oktoniony.

Zavedeme-li značení oktonionů jako skaláru z \mathbb{R} a vektoru z \mathbb{R}^7 , tj. $o \in \mathbb{O}$, $o = [s, \mathbf{v}]$, kde $s \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^7$, pak sdružený oktonion, normu a inverzi definujeme stejně jako u kvaternionů. Z důkazu Hurwitzova teorému víme, že oktoniony nejsou komutativní ani asociativní. Díky neasociativitě nejsou oktoniony většinou vhodné pro demonstraci jednoduše nahlédnutelných aplikací a používají se v pokročilejších partiích matematiky, které už ovšem jdou nad rámec tohoto textu. Pro zajímavost uvedeme, že oktoniony splňují slabší formu asociativity - pro $x, y, z \in \mathbb{O}$ platí rovnice:

1. $x(xy) = (xx)y, (yx)x = y(xx)$
2. $(xy)(zx) = (x(yz))x = x((yz)x)$

Algebraická struktura splňující druhou vlastnost se nazývá moufangovská.

3.2 Reprezentace kvaternionů

Vraťme se ještě ke kvaternionům. Kvaterniony můžeme reprezentovat několika různými způsoby jako:

- lineární kombinaci $1, i, j, k$
- vektor souřadnic této lineární kombinace

- skalár souřadnice u 1 a vektor souřadnic u i, j, k
- matice 2×2
- matice 4×4

Podívejme se nyní blíže na reprezentaci kvaternionů pomocí matic.

Komplexní čísla můžeme reprezentovat pomocí matic 2×2 . Bud' $z = a+bi \in \mathbb{C}$, pak

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2(\mathbb{R})$$

je maticový zápis čísla z . Položme tedy obdobně

$$\mathbb{H}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Lze každý prvek \mathbb{H} reprezentovat pomocí prvku z $\mathbb{H}_2(\mathbb{C})$? Zkusme najít imaginární jednotky splňující vlastnosti z definice kvaternionů. Položme

$$\tilde{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tilde{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $\tilde{1}, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k} \in \mathbb{H}_2(\mathbb{C})$ a chceme

$$\tilde{i}^2 = \tilde{j}^2 = \tilde{k}^2 = \tilde{i}\tilde{j}\tilde{k} = -\tilde{1}.$$

To však dostáváme snadno prostým výpočtem:

$$\begin{aligned} \tilde{i}^2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{j}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{k}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě $\tilde{1}, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$ jsou lineárně nezávislé, ukažme tedy, že každý prvek $h \in \mathbb{H}_2(\mathbb{C})$ se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj. $\tilde{1}, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$ tvoří bázi.
Položme

$$h = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

pro $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $w = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned} & a\tilde{1} + b\tilde{i} + c\tilde{j} + d\tilde{k} = \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a + bi & 0 \\ 0 & a - bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c + di \\ -c + di & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Umíme tedy reprezentovat kvaterniony pomocí matic s komplexními prvky. Nelze udělat reprezentaci kvaternionů pomocí matic s reálnými prvky? Z úvodu oddílu víme, že každé komplexní číslo může být reprezentováno maticí 2×2 s reálnými prvky. Tedy máme

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

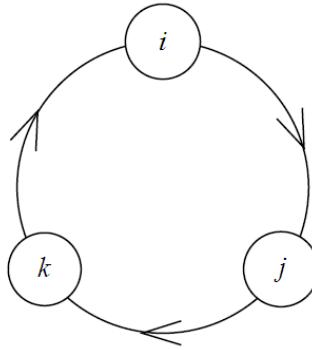
a každý kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ můžeme napsat jako

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_4(\mathbb{R}).$$

V reprezentaci $\mathbb{H}_4(\mathbb{R})$ odpovídá sdružení transpozici příslušné matice. V reprezentaci $\mathbb{H}_2(\mathbb{C})$ odpovídá sdružení transponované sdružené matici a normu kvaternionu spočítáme jako determinant odpovídající matice.

3.3 Fanova rovina a jiné obrázky

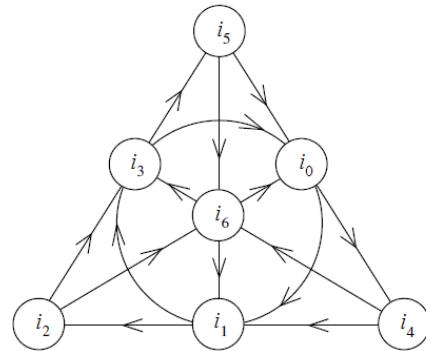
Jistě si vzpomínáte na tabulkou násobení imaginárních jednotek z první kapitoly - pro oktoniony byla velmi nepřehledná. Tyto vztahy můžeme pro kvaterniony názorně demonstrovat obrázkem 3.1: násobíme-li dva body na kružnici po směru hodinových ručiček, výsledkem je třetí bod, např. $ij = k$.



Obrázek 3.1: Násobení imaginárních jednotek kvaternionů

Proti směru hodinových ručiček platí totéž, jenom s znaménkem míňus, např. $ji = -k$.

Obdobně pro oktoniony tyto vztahy demonstруje Fanova rovina (obr. 3.2), která se skládá ze 7 bodů a 7 přímek, budeme-li uvažovat kružnice na obrázku jako přímku. Pak pro každé 3 body i_a, i_b, i_c seřazené na přímce ve směru šipky platí rovnice $i_a i_b = i_c = -i_b i_a$ s cyklickou záměnou.



Obrázek 3.2: Fanova rovina

Společně s tím, že 1 je multiplikativní jednotka a $i_j^2 = -1, j \in \{0, 1, \dots, 6\}$, Fanova rovnina kompletně popisuje algebraickou strukturu oktonionů.

Ukažme si ještě jednu pěknou geometrickou souvislost.
Pro komplexní čísla definujeme *Gaussova celá čísla*

$$G = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

která tvoří čtvercovou mřížku. Pro Gaussova celá čísla je důležitá vlastnost, že žádný bod komplexní roviny nemá od nejbližšího Gaussova celého čísla vzdálenost ≥ 1 . Tato vlastnost souvisí s jednoznačným rozkladem na prvočísla. Jinými slovy, pokud umístíme otevřené koule o poloměru $1/2$ se středy ve všech bodech mřížky, pak musí být disjunktní, ale nesmí zde zbýt místo pro umístění další koule poloměru $1/2$. Mřížku splňující tuto vlastnost nazveme „dobře zhuštěná“.

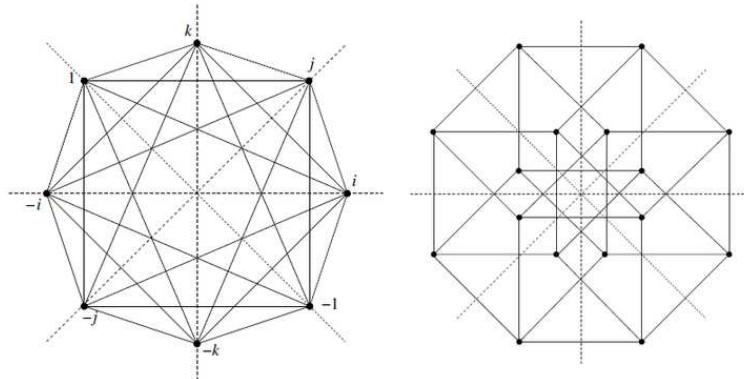
Pro kvaterniony můžeme obdobně definovat *Lipschitzova celá čísla*

$$L = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{Q} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\},$$

ale zjistíme, že jejich mřížka není dobře zhuštěná. To vedlo k definici *Hurwitzových celých čísel*

$$H = \left\{ a + bi + cj + dk \in \mathbb{Q} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \vee a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\},$$

kde $\mathbb{Z} + \frac{1}{2} = \{a + \frac{1}{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ jsou „polocelá“ čísla. Gaussova celá čísla obsahují 4 prvky, které mají normu 1, a to ± 1 a $\pm i$. Hurwitzova celá čísla mají takových prvků právě 24 a mají zajímavou souvislost s platónskými tělesy ve čtyřrozměrném prostoru. Totiž 8 z nich s celočíselnými koeficienty, $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$, tvoří vrcholy čtyřrozměrné analogie osmistěnu a 16 s „polocoeločíselnými“ koeficienty, $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$, tvoří vrcholy čtyřrozměrné analogie krychle (obr. 3.3). Dohromady tvoří vrcholy tzv. 24-nadstěnu, který ve třech rozměrech nemá analogické platónské těleso. Ve čtyřech rozměrech je totiž platónských těles šest, tedy právě o jedno více než ve čtyřech rozměrech.



Obrázek 3.3: Čtyřrozměrný osmistěn a hyperkrychle

Použité zdroje

Tvrzení oddílu 3.1 pocházejí z [4], s. 9 - 14, a [3], s. 73, s využitím [5]. Oddíl 3.2 je převážně čerpán z [9], s. 10 - 12. Oddíl 3.3 je volně zpracován podle [1], s. 1 - 7, a [2], s. 6, 7, ilustrace pocházejí z téhož zdroje.

Kapitola 4

Praktické využití

4.1 Kvaterniony a rotace ve třech dimenzích

Jedno z nejznámějších použití kvaternionů je pro rotace v 3-dimenzionálním prostoru. To je přesně to, co Hamilton chtěl - mít algebru, která hraje obdobnou roli pro geometrický popis 3-dimenzionálního prostoru jako komplexní čísla pro prostor 2-dimenzionální.

Vektor v 3-dimenzionálním prostoru můžeme reprezentovat jako kvaternion $q = ai + bj + ck$. Všiměme si následujících vztahů:

$$\begin{aligned} -iqi &= -i(ai + bj + ck)i = ai - bj - ck, \\ -jqj &= -j(ai + bj + ck)j = -ai + bj - ck, \\ -kqk &= -k(ai + bj + ck)k = -ai - bj + ck. \end{aligned}$$

Výsledkem jsou rotace bodu (a, b, c) v 3-dimenzionálním prostoru kolem osy x, y, z o 180° ! To nám dává motivaci k vyjádření rotaci pomocí kvaternionů. Pojděme se na to podívat podrobněji.

Tvrzení 4.1. Bud' $p, q \in \mathbb{H}$, q nenulový. Pak pro nenulové $r \in \mathbb{R}$ platí $(rq)p(rq)^{-1} = qpq^{-1}$.

Důkaz. Bud' r nenulové. Jelikož násobení skalárem je komutativní, máme $(rq)p(rq)^{-1} = rqpq^{-1}r^{-1} = qpq^{-1}rr^{-1} = qpq^{-1}$. \square

Vidíme, že pokud vynásobíme nenulový kvaternion q nenulovým skalárem, součin qpq^{-1} se nezmění. Můžeme tedy dále uvažovat pouze jednotkové kvaterniony.

Tvrzení 4.2. Bud' $q \in \mathbb{H}_1, p = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$. Pak $qpq^{-1} = p'$, kde $p' = [s, \mathbf{v}']$ a $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$.

Důkaz. Označme $S(q)$ skalární část kvaternionu q .

Ukažme, že pro $p = [s, \mathbf{0}], s \in \mathbb{R}$, máme $S(p) = S(p')$. To dostáváme okamžitě, neboť násobení skalárem je komutativní: $qpq^{-1} = q[s, \mathbf{0}]q^{-1} = [s, \mathbf{0}]qq^{-1} = [s, \mathbf{0}]$.

Nyní tuto rovnost ukážme pro $p = [0, \mathbf{v}], \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Máme $2S(q) = q + \bar{q}$ a tedy

$$\begin{aligned} 2S(qpq^{-1}) &= (qpq^{-1}) + \overline{(qpq^{-1})} = (qp\bar{q}) + \overline{(qp\bar{q})} = \\ &= qp\bar{q} + q\bar{p}\bar{q} = q(p + \bar{p})\bar{q} = q(2S(p))\bar{q} = \\ &= 2S(p) = 0 \end{aligned}$$

Dohromady pro $p = [s, \mathbf{v}] = [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$ dostáváme

$$\begin{aligned} qpq^{-1} &= q([s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}])q^{-1} = q[s, \mathbf{0}]q^{-1} + q[0, \mathbf{v}]q^{-1} = \\ &= [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}'] = [s, \mathbf{v}'] \end{aligned}$$

Jelikož je $q \in \mathbb{H}_1$, platí $\|p'\| = \|qpq^{-1}\| = \|q\| \|p\| \|q^{-1}\| = \|p\|$. Navíc $S(p) = S(p')$ pro všechna $p = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$, tj. s se nemění, nutně tedy $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$. \square

Důsledek 4.1. Bud' $q \in \mathbb{H}_1, p = [a, b\mathbf{v}] \in \mathbb{H}, a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Pak jestliže $q[a, \mathbf{v}]\bar{q} = [a, \mathbf{v}']$, pak $q[a, b\mathbf{v}]\bar{q} = [a, b\mathbf{v}']$.

Důkaz.

$$qp\bar{q} = q[a, b\mathbf{v}]\bar{q} = qb \left[\frac{a}{b}, \mathbf{v} \right] \bar{q} = b \left[\frac{a}{b}, \mathbf{v}' \right] = [a, b\mathbf{v}'].$$

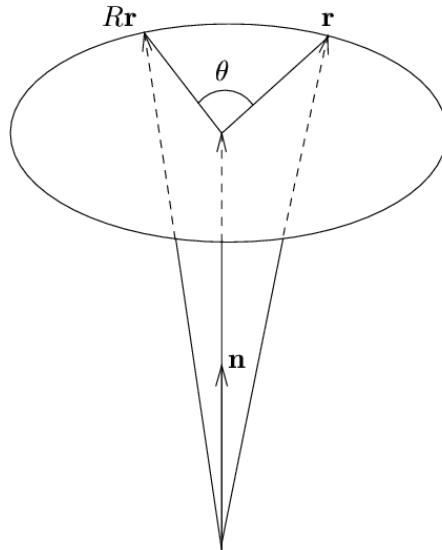
\square

Nyní již můžeme vyslovit souvislost mezi kvaterniony a rotací v \mathbb{R}^3 .

Věta 4.1. Bud' $q \in \mathbb{H}_1, q = [\cos \theta, \sin \theta \mathbf{n}], p = [0, \mathbf{r}] \in \mathbb{H}$, kde $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pak $p' = qpq^{-1}$ je p otočené kolem osy ve směru \mathbf{n} o úhel 2θ .

Důkaz. Podívejme se nejprve, jak otočit vektor \mathbf{r} o úhel θ okolo osy ve směru \mathbf{n} za použití sinu, cosinu a skalárního a vektorového součinu.

Předpokládejme tedy, že vektor \mathbf{r} je otočený o úhel θ na vektor $R\mathbf{r}$ okolo osy ve směru \mathbf{n} (viz obr. 4.1).



Obrázek 4.1: Otočení vektoru \mathbf{r} o úhel θ na vektor $R\mathbf{r}$ okolo osy ve směru \mathbf{n} .

Vektor \mathbf{r} můžeme napsat jako součet dvou vektorů, $\mathbf{r}_{||}$ a \mathbf{r}_{\perp} , kde $\mathbf{r}_{||}$ je projekce \mathbf{r} na \mathbf{n} a \mathbf{r}_{\perp} je kolmý k \mathbf{n} (viz obr. 4.2).

Máme

$$\mathbf{r}_{||} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n},$$

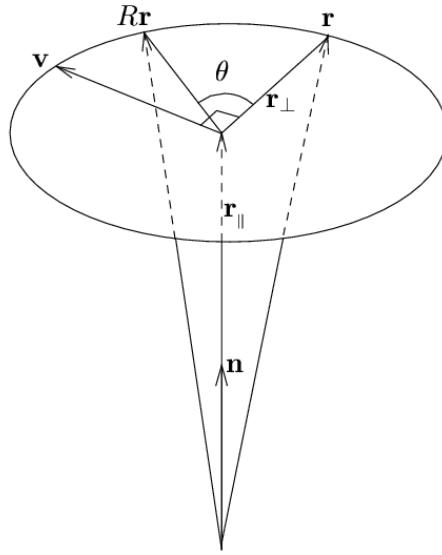
$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{||} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Pro výpočet $R\mathbf{r}$ zavedeme dvoudimenzionální souřadnicový systém do roviny, která je kolmá k \mathbf{n} a obsahuje body určené vektory \mathbf{r} a $R\mathbf{r}$. K tomu potřebujeme vektor \mathbf{v} , který je kolmý na \mathbf{r}_{\perp} a \mathbf{n} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{n} \times (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} - \mathbf{n} \times (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} - \mathbf{0} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

Z obrázku 4.2 vidíme, že komponentu $R\mathbf{r}$ kolmou k \mathbf{n} , $(R\mathbf{r})_{\perp}$ můžeme napsat jako $(R\mathbf{r})_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta$, tedy můžeme spočítat vektor $R\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} R\mathbf{r} &= (R\mathbf{r})_{||} + (R\mathbf{r})_{\perp} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp} \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta = \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta = \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{r} \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta = \\ &= (1 - \cos \theta)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{r} \cos \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta \end{aligned}$$



Obrázek 4.2: Znázornění úhlů a komponent vektorů.

Podívejme se nyní, jaký výsledek nám dá aplikace kvaternionu na vektor. Položme $R_q(p) = qpq^{-1}$, $p = [0, \mathbf{r}]$ a $q = [s, \mathbf{v}]$. Pak máme:

$$\begin{aligned}
R_q(p) &= [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, \mathbf{v}]^{-1} = [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, -\mathbf{v}] = [s, \mathbf{v}][\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \\
&= [s(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{v} \cdot (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}), s(s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v})] = \\
&= [0, s^2\mathbf{r} - s(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r}) - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})] = \\
&= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - 2s(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] = \\
&= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = \\
&= [0, (s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})]
\end{aligned}$$

V předposledním kroku jsme použili rovnost $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$.

Připomeňme, že q je jednotkový quaternion, tedy můžeme psát $q = [\cos \theta, (\sin \theta)\mathbf{n}]$, kde $|\mathbf{n}| = 1$. Dosazením do $R_q(p)$ dostáváme:

$$\begin{aligned}
R_q(p) &= \\
&= [0, (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}))\mathbf{r} + 2((\sin \theta)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(\sin \theta)\mathbf{n} + 2 \cos \theta ((\sin \theta)\mathbf{n} \times \mathbf{r})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [0, (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \mathbf{r} + (2\mathbf{n} \sin^2 \theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + 2 \cos \theta \sin \theta (\mathbf{n} \times \mathbf{r})] \\
&= [0, \mathbf{r} \cos 2\theta + (1 - \cos 2\theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin 2\theta]
\end{aligned}$$

Srovnáním tohoto výsledku s předchozím výpočtem zjistíme, že se výsledek liší pouze v úhlu! Místo θ zde máme 2θ . To znamená, že pro daný jednotkový vektor \mathbf{n} a úhel θ jednotkový kvaternion $[\cos \theta, (\sin \theta)\mathbf{n}]$ otočí \mathbf{r} o úhel 2θ kolem osy ve směru \mathbf{n} .

□

Důsledek 4.2. Libovolnou rotaci o úhel θ kolem osy ve směru \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$, v 3-dimensionálním prostoru můžeme získat pomocí jednotkového kvaternionu.

Důkaz. Požadovanou rotaci získáme, když v předchozí větě položíme $q = [\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}\mathbf{n}]$.

□

Tvrzení 4.3. Bud' $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$. Pak rotace pomocí q_1 následována rotací pomocí q_2 je ekvivaletní rotaci pomocí $q_2 q_1$.

Důkaz. Pro dané $p \in \mathbb{H}$ máme

$$\begin{aligned}
q_2(q_1 p q_1^{-1}) q_2^{-1} &= (q_2 q_1) p (q_1^{-1} q_2^{-1}) = (q_2 q_1) p (\overline{q_1} \overline{q_2}) = \\
&= (q_2 q_1) p \overline{(q_2 q_1)} = (q_2 q_1) p (q_2 q_1)^{-1}
\end{aligned}$$

□

Jinými slovy, skládání rotací docílíme znásobením odpovídajících kvaternionů.

4.2 Další aplikace

Kvaterniony i oktoniony mají mnoho souvislostí s různými oblastmi nejen matematiky.

Například v teorii čísel platí, že každé přirozené číslo je normou nějakého kvaternionu s celočíselnými koeficienty (Lipschitzova celého čísla). Takových kvaternionů je pro každé $n \in \mathbb{N}$ právě $8d(n)$, kde $d(n)$ je součet všech dělitelů

čísla n . Pro $n = 1$ je to osm kvaternionů, $1, i, j, k, -1, -i, -j, -k$. Pro $n = 2$ už 24:

$$\begin{aligned} & \pm(1+i), \pm(1+j), \pm(1+k), \pm(i+j), \pm(i+k), \pm(j+k), \\ & \pm(1-i), \pm(1-j), \pm(1-k), \pm(i-j), \pm(i-k), \pm(j-k). \end{aligned}$$

V kvantové mechanice si zase například nelze nevšimnout, jak Pauliho matice připomínají jednotky i, j, k zapsané ve tvaru matic 2×2 s komplexními koeficienty. Proč násobit matice, když stačí násobit jednotkové kvaterniony, pro jejichž násobení platí jednoduší pravidla? Oktoniony mají ke kvantové mechanice také blízko, např. v Heisenbergově pohybové rovnici se používá neasociativní komutátor.

Kromě rotací mají kvaterniony v 3-dimenzionálním prostoru další úlohu. Vezměme $u, v \in \mathbb{H}$, $u = ai + bj + ck$, $v = di + ej + fk$. Jejich součin je $uv = (-ad - be - cf) + i(bf - ce) + j(cd - af) + k(ae - bd)$. Ovšem $(a, b, c) \times (d, e, f) = (bf - ce, cd - af, ae - bd)$ - imaginární část součinu kvaternionů určuje jejich vektorový součin, když je uvážíme jako prvky \mathbb{R}^3 . Stejně tak oktoniony určují vektorový součin v 7-dimenzionálním prostoru.

Kvaterniony se dále používají v počítačové grafice při výpočtu fraktálů a vůbec nám tyto algebry dokazují, že nejsou jen vymyšlenou matematickou konstrukcí, ale mají základ v reálném světě.

Použité zdroje

Tvrzení oddílu 4.1 jsou převzatá z [4], oddíl 4.2 je zpracován s využitím [5], [6] a [9], s. 18, 23, 24.

Literatura

- [1] Baez J. C.: *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry by John H. Conway and Derek A. Smith*, 2004.
http://math.ucr.edu/home/baez/octonions/conway_smith/conway_smith.pdf
- [2] Baez J. C.: *The Octonions*, 2001.
<http://math.ucr.edu/home/baez/octonions/oct.pdf>
- [3] Conway J. H., Smith D. A.: *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*, A. K. Peters, Natick, 2003.
- [4] Dam E. B., Koch M., Lillholm M.: *Quaternions, Interpolation and Animation*, 1998.
<http://www.diku.dk/publikationer/tekniske.rapporter/1998/98-5.ps.gz>
- [5] Wikipedia: The Free Encyclopedia: *Octonions*
<http://en.wikipedia.org/wiki/Octonions>
- [6] Wikipedia: The Free Encyclopedia: *Seven-dimensional cross product*
http://en.wikipedia.org/wiki/Seven-dimensional_cross_product
- [7] Stanovský D.: *skripta k předmětu Základy algebry*.
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/vyuka/skripta_zalg.pdf
- [8] Ward J. P.: *Quaternions and Cayley Numbers: Algebra nad applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [9] Zaremsky M.: *Beyond Complex: An Inspection of Quaternions*, 2007.
<http://documents.kenyon.edu/math/Zaremsky07.pdf>