Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zuzana Marchalínová

Metody sčítání číselných a funkčních řad

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Černý, Ph.D.

Studijní program: Matematika, obecná matematika

2009

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu bakalářské práce RNDr. Robertovi Černému, Ph.D. za cenné rady a připomínky.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze, 6. srpna 2009 Zuzana Marchalínová

Obsah

Název práce: Metody sčítání číselných a funkčních řad
Autor: Zuzana Marchalínová
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Černý, Ph.D.
e-mail vedoucího: rcerny@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Cílem této práce je sestavit přehled metod sčítání číselných a funkčních řad. K tomuto uvádíme potřebné definice a základní věty, které jsou užitečné pro řešení daných úloh. Metody jsou uváděny od elementárních až po pokročilé a obsahují například i využití komplexní analýzy. Důležitou roli mají mocninné řady, pomocí kterých sčítáme řady číselné. Pokročilejší metody jsou založeny na užití řad Fourierových, díky kterým jsme schopni sčítat např. řady typu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. Na závěr je uvedena metoda zrychlování konvergence pro případ, že danou řadu neumíme uvedenými metodami sečíst.

Klíčová slova: číselná řada, řada funkcí, mocninná řada, Fourierova řada, Kummerova transformace

Title: Summation methods for number series and series of functions
Author: Zuzana Marchalínová
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: RNDr. Robert Černý, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: rcerny@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The goal of this work is to present a list of summation methods for number series and series of functions. We mention definitions as well as theorems useful for solving given problems. Presented methods vary from elementary ones to more advanced ones and include for example applications of complex analysis. We show an application of power series to sum number series. The more advanced methods are based on using Fourier series and can be used to sum series such as $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. The last method presented is the acceleration method used to obtain approximate results in cases unsolvable with any of the previously mentioned methods.

Key words: number series, series of functions, power series, Fourier series, Kummer transformation

Kapitola 1

Úvod

Číselné a funkční řady se využívají ve všech oborech matematiky, fyziky i informatiky. Jejich praktické využití je nezbytné např. v oblasti pravděpodobnosti a teoretické informatiky.

Speciálními případy funkčních řad jsou řady mocninné a řady Fourierovy. Mocninné řady se využívají například v matematické analýze k řešení diferenciálních rovnic nebo k součtu číselných řad, v teorii pravděpodobnosti k výpočtu charakteristické funkce nebo v teoretické informatice k analýze algoritmu atd. Periodické funkce lze rozvinout do Fourierovy řady, tyto rozvoje umožňují sčítání jinak obtížně sčitatelných číselných řad.

Cílem této práce je uvést různé postupy pro sčítání řad. Některé metody lze použít i na řady, které lze sečíst i jiným způsobem. Všechny metody jsou pro ilustraci aplikovány na příkladech. V závěru práce je uvedena metoda zrychlování konvergence mocninných řad, která popisuje úpravy řad pro případ, že je nutné sečíst příliš mnoho členů pro výpočet součtu řady s předepsanou přesností.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. Následující, tj. druhá kapitola obsahuje značení. Třetí kapitola poskytuje teoretické základy v oblasti číselných a funkčních řad jako jsou například kritéria konvergence. Čtvrtá kapitola se věnuje samotným metodám sčítání a jejich aplikaci na příkladech. Pátá kapitola je pak doplněním k některým uvedeným metodám a pojednává o zrychlování konvergence mocninných řad.

Kapitola 2

Značení

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r\},\ r > 0$ – koule okolo bodu x s poloměrem r

$\mathbb{N}$ – množina přirozených čísel

$\mathbb{N}_0$ – $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$ – množina reálných čísel

$\mathbb{Z}$ – množina celých čísel

$\mathbb{Z}^-$ – množina celých záporných čísel

$\mathbb{C}$ – množina komplexních čísel

$\operatorname{Re} z$ – reálná část čísla $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$

$\operatorname{Im} z$ – imaginární část čísla $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z = y$

$\log x$ – přirozený logaritmus

st. Q – stupeň polynomu Q

$L^2(a,b) = \Big\{ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ měřitelná, $\big(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \big)^{\frac{1}{2}} < \infty \Big\}$

Kapitola 3

Základní definice a vlastnosti

V této kapitole připomeneme základní definice a vlastnosti nezbytné pro uvedené metody a výpočty.

3.1 Číselná řada

Definice 3.1.1. Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

je řada reálných čísel. Nechť $n \in \mathbb{N}$, položme

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Číslo s_n se nazývá *n-tý částečný součet* řady (3.1). Řekneme, že řada (3.1) *konverguje* (resp. *diverguje, osciluje*), jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (resp. diverguje, osciluje), tj. má vlastní limitu (resp. má nevlastní limitu, limita neexistuje).
Součtem řady (3.1) nazveme hodnotu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, pokud tato limita existuje; v opačném případě řekneme, že řada (3.1) *nemá součet.*

Definice 3.1.2. Řekneme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má *omezené částečné součty*, jestliže existuje $K > 0$ tak, že pro všechna přirozená n platí: $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right| \leq K$.

3.1.1 Základní věty

Věta 3.1.3. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Nechť* c, A, B *jsou reálná čísla. Pak konvergují i řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(Aa_n + Bb_n)$ *a platí, že* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(Aa_n + Bb_n) = A\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + B\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Viz [2], věta 77, str.121. □

Věta 3.1.4. *(Nutná podmínka konvergence)*
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Důkaz. Viz [2], věta 80, str.123. □

Věta 3.1.5. *(Bolzanova-Cauchyho podmínka)*
Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyho podmínku:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq n_0, m, n \in \mathbb{N}, m < n : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Viz [3], věta 31, str.86. □

3.1.2 Řady s nezápornými členy

Řada s nezápornými členy je taková, že pro $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí: $a_n \geq 0, \; n \in \mathbb{N}$.

Věta 3.1.6. *(Srovnávací kritérium)*
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy. Nechť existuje přirozené číslo* n_0 *tak, že pro všechna přirozená* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$. *Potom platí :*

(i) Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje, pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje.*

Důkaz. Viz [2], věta 82, str.125. □

Věta 3.1.7. *(Limitní srovnávací kritérium)*
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy. Nechť existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in [0, \infty]$. *Pak*

(i) Jestliže $K \in (0, \infty)$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (resp. diverguje) právě tehdy, když konverguje (resp. diverguje)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Jestliže $K = 0$, *pak z konvergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *plyne konvergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a z divergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *plyne divergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

(iii) Jestliže $K = \infty$, *pak z konvergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *plyne konvergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *a z divergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *plyne divergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz.
(i) viz [6], věta 10.10, str.171.
(ii), (iii) aplikace věty 3.1.6. □

Věta 3.1.8. *(Srovnávací podílové kritérium)*
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy. Je-li* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *pro všechna přirozená* n, *pak z konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *plyne konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a z divergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *plyne divergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Viz [6], věta 10.11, str.172. □

Věta 3.1.9. *(Cauchyho odmocninové kritérium)*
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

(i) Jestliže $\exists\, q \in (0,1)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(iii) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ *(popř.* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$*), pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz.
(i) viz [2], věta 83 I., str.126,
(ii),(iii) viz [2], věta 84, str.126. □

Věta 3.1.10. *(Limitní d'Alembertovo kritérium)*
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy, tj.* $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. *Potom*

(i) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *(popř.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$*), pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Viz [2], věta 87, str.128. □

Poznámka 3.1.11. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nelze pomocí vět 3.1.9 a 3.1.10 o konvergenci rozhodnout (uvažme divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ či konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). Často pomůže integrální kritérium.

Věta 3.1.12. *(Integrální kritérium)*
Nechť f *je spojitá, nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu* $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{Z}$. *Pak řada* $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ *konverguje právě tehdy, když konverguje integrál* $\int_a^{\infty} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$.

Důkaz. Viz [3], věta 243, str.580. □

Příklad 3.1.13. (Srovnávací škály)

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Důkaz: Pro $\alpha \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence. Pro $\alpha > 0$ použijeme větu 3.2.12, její předpoklady jsou zřejmě splněny, tedy:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\xi^\alpha}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{\xi^\alpha}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{x\to\infty}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1), & \alpha > 1 \\ \log x, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1), & \alpha < 1 \end{array}\right\}$$
$$= \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1. \end{array}\right.$$

(ii) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot log^\alpha n}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Důkaz: Pro $\alpha \leq 0$ řada diverguje podle věty 3.1.7 (srovnáme s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). Pro $\alpha > 0$ opět použijeme větu 3.2.12, její předpoklady jsou zřejmě splněny, tedy:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x \overset{y=\log x}{=} \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y = \lim_{t\to\infty}\int_{\log 2}^t \frac{1}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{1-\alpha}((\log 2)^{1-\alpha}-t^{1-\alpha}), & \alpha > 1 \\ \log t - \log\log 2, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}((\log 2)^{1-\alpha}-t^{1-\alpha}), & \alpha < 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{1-\alpha}(\log 2)^{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1. \end{array}\right.$$

Poznámka 3.1.14. V případě, že v příkladě (ii) je $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\beta \cdot log^\alpha n}$, kde $\beta \neq 1$, je příklad nezajímavý, neboť pro $\beta < 1$ řada diverguje podle věty 3.1.7 (srovnáme s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) a pro $\beta > 1$ řada konverguje podle 3.1.7 (srovnáme s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}$, $(\beta-\varepsilon) > 1$), a to nezávisle na α.

Poznámka 3.1.15. Opakovaným použitím substituce za logaritmus lze vyšetřit konvergenci i pro $a_n = \frac{1}{n\log n \log^\alpha(\log n)}$, $\frac{1}{n\log(\log n)\log^\alpha(\log(\log n))}$ atd.

3.1.3 Absolutní a neabsolutní konvergence

Definice 3.1.16. Řekneme, že řada (3.1) *konverguje absolutně*, jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Řekneme, že řada (3.1) *konverguje neabsolutně*, jestliže řada (3.1) konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Věta 3.1.17. *(Abelovo-Dirichletovo kritérium)*
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ *jsou poslupnosti reálných čísel. Nechť* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq$

$b_n \geq \cdots \geq 0$. *Jestliže navíc buď*

$$(Abel) \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

nebo

$$(Dirichlet) \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ má omezené částečné součty a } \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důkaz. Viz [3], věta 44, str.110. □

3.2 Řada funkcí

Definice 3.2.1. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\mathbb{R}$. Pak řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \tag{3.2}$$

nazýváme *funkční řadou* definovanou na $\mathbb{R}$. *Oborem konvergence* řady (3.2) nazýváme množinu všech $x_0 \in \mathbb{R}$, pro která konverguje číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

3.2.1 Stejnoměrná konvergence

Definice 3.2.2. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f jsou funkce definované na (a,b). Řekneme, že *posloupnost f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na* (a,b), jestliže platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definice 3.2.3. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f jsou funkce definované na (a,b). Řekneme, že řada (3.2) *konverguje bodově k funkci f na* (a,b), jestliže pro posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ platí:

$$\forall\, x \in (a,b) : \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

Řekneme, že řada (3.2) *konverguje stejnoměrně k funkci f na* (a,b), značíme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$, jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, konverguje stejnoměrně k funkci f na (a,b).

Řekneme, že řada (3.2) *konverguje lokálně stejnoměrně k funkci f*, značíme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$, jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, konverguje lokálně stejnoměrně k f, tj. jestliže

$$\forall\, x \in (a,b)\ \exists\, r > 0 : s_n \rightrightarrows s \text{ na } B(x,r).$$

Věta 3.2.4. *(Bolzanova-Cauchyho podmínka stejnoměrné konvergence)*
Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Řada (3.2) konverguje stejnoměrně na (a,b) právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyho podmínku:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq n_0, m,n \in \mathbb{N}, m < n, \ \forall x \in (a,b) : \Big| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

Důkaz. Viz [3], věta 52, str.132. □

Věta 3.2.5. *(Weierstrassovo kritérium)*
Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce definované na (a,b) a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada. Jestliže $|f_n(x)| \leq a_n$ pro všechna x z intervalu (a,b) a všechna přirozená n, pak řada (3.2) konverguje stejnoměrně na (a,b).

Důkaz. Viz [3], věta 54, str.135. □

Věta 3.2.6. *(Abelovo-Dirichletovo kritérium)*
Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti funkcí definovaných na (a,b), nechť $s_n(x)$ je n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, pro všechna $x \in (a,b)$ nechť $g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots \geq 0$. Nechť $K > 0$ je konečné číslo. Potom platí:

(i) Jestliže $|s_n(x)| \leq K$ pro všechna přirozená n a všechna x z (a,b) a jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ stejnoměrně na (a,b), potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$ konverguje stejnoměrně na (a,b).

(ii) Jestliže $g_1(x) \leq K$ pro všechna x z (a,b) a jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a,b), pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$ konverguje stejnoměrně na (a,b).

Důkaz. Viz [3], věta 55, str.136. □

Věta 3.2.7. *(Záměna sumy a derivace)*
Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí, $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, které mají vlastní derivaci pro všechna n přirozená a pro všechna x z intervalu (a,b). Nechť platí:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b),

(ii) existuje x_0 z intervalu (a,b) tak, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje.

Pak řada (3.2) konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n' = \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\Big)'$ na (a,b).

Důkaz. Viz [3], věta 61, str.144. □

Věta 3.2.8. *(Záměna limity a derivace)*
Nechť

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.3}$$

je posloupnost funkcí definovaných na omezeném otevřeném intervalu (a, b) takových, že mají vlastní derivace

$$\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.4}$$

v intervalu (a, b). Nechť posloupnost (3.3) je konvergentní alespoň v jednom bodě intervalu (a, b) a nechť posloupnost (3.4) je stejnoměrně konvergentní v (a, b). Potom platí:

(i) Posloupnost (3.3) je stejnoměrně konvergentní v (a, b).

(ii) Pokud definujeme funkci $f(x)$ v (a, b) rovnicí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, pak má funkce f v (a, b) derivaci $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Důkaz. Viz [3], věta 57, str.139. □

3.2.2 Mocninné řady

Definice 3.2.9. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost a $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{3.5}$$

nazýváme *mocninnou řadou* s koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ o středu x_0.

Věta 3.2.10. *Ke každé řadě (3.5) existuje číslo R ($0 \le R \le +\infty$) tak, že řada (3.5) je absolutně konvergentní pro $|x - x_0| < R$ a divergentní pro $|x - x_0| > R$. Číslo R je dáno vzorcem $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ a nazývá se poloměr konvergence řady (3.5).*

Důkaz. Viz [3], věta 219, str.528. □

Věta 3.2.11. *(Derivování mocninné řady)*
Nechť řada (3.5) má poloměr konvergence $R \in (0, \infty]$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}$ má také poloměr konvergence R a platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Důkaz. Viz [9], lemma 16.2.5, str.415 a věta 16.2.7, str. 416. □

Věta 3.2.12. *(Integrování mocninné řady)*
Nechť řada (3.5) má poloměr konvergence $R \in (0, \infty]$*. Pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *má také poloměr konvergence* R *a platí*

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) \mathrm{d}x = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \ \forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Důkaz. Viz [9], lemma 16.2.5, str.415, a věta 16.2.7, str. 416. □

Věta 3.2.13. *(Abelova)*
Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence 1, pro* $|x| < 1$*. Je-li řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{3.6}$$

konvergentní, pak je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *stejnoměrně konvergentní v* $[0, 1]$ *a existuje limita* $\lim\limits_{x \to 1-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a rovná se součtu řady (3.6).*

Důkaz. Viz [3], věta 236 I., str.548. □

Nyní si uvedeme příklady Taylorova rozvoje některých funkcí, které budeme využívat v kapitole 4:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1, 1], \tag{3.10}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \ x \in (-1, 1], \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ x \in (-1, 1), \tag{3.12}$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in (-1, 1), \tag{3.13}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Poznámka 3.2.14. Rozvoje $\operatorname{arctg} x$ a $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ najdeme v [3] na str. 304 a 310, rozvoj (3.12) je geometrická řada a ostatní rozvoje najdeme v [8] na str. 61, kde jsou uvedeny pro $z \in \mathbb{C}$, a tedy speciálně platí pro $z \in \mathbb{R}$.

3.2.3 Fourierovy řady

Definice 3.2.15. Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel, pak řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

nazýváme *trigonometrickou řadou.* Je-li navíc dáno $n \in \mathbb{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně n.*

Definice 3.2.16. Nechť f je 2π-periodická funkce definovaná na $\mathbb{R}$ s konečným Lebesgueovým integrálem na $[0, 2\pi]$. Pak čísla

$$a_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \;\mathrm{d}x, \; k = 0, 1, \ldots \tag{3.16}$$

a

$$b_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \;\mathrm{d}x, \; k = 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty funkce f* a trigonometrickou řadu

$$\mathfrak{F}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \tag{3.18}$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce f.*

Poznámka 3.2.17. Definice 3.2.15 a 3.2.16 lze rozšířit na libovolnou periodu délky l. Pak má Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{l} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{l} kx\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

a její koeficienty

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{l} kx\right) \;\mathrm{d}x, \; k = 0, 1, \ldots,$$
$$b_k := \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{l} kx\right) \;\mathrm{d}x, \; k = 1, 2, \ldots$$

Definice 3.2.18. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je interval, f je funkce definovaná na $[a,b]$. *Totální variací funkce f přes interval* $[a,b]$ nazýváme veličinu

$$V(f;a,b) := \sup_D \Big\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \Big\},$$

kde $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $[a,b]$. Je-li $V(f;a,b) < \infty$, pak říkáme, že *funkce f má konečnou variaci.*

Věta 3.2.19. *(Dirichletova-Jordanova)*
Nechť f je 2π-periodická reálná funkce s konečným Lebesgueovým integrálem na $[0,2\pi]$, která má konečnou variaci v $[a,b]$. Potom platí:

(i) V každém bodě $x \in (a,b)$ je Fourierova řada funkce f konvergentní a má součet $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ (tedy součet $f(x)$, je-li f spojitá v bodě x).

(ii) Je-li mimo to f spojitá v $[a,b]$, je tato Fourierova řada stejnoměrně konvergentní v každém intervalu $[a+\lambda, b-\lambda]$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}(b-a)$ (neboli je stejnoměrně konvergentní uvnitř (a,b)).

Poznámka 3.2.20. Výraz $f(x+)$ (resp. $f(x-)$) značí limitu funkce f zprava (resp. zleva) v bodě x.

Důkaz. Viz [5], věta 185, str.490. $\square$

Věta 3.2.21. *Nechť funkce f je 2π-periodická a (k+1)-krát ($k \geq 0$) spojitě derivovatelná na $\mathbb{R}$, a_n, b_n jsou její Fourierovy koeficienty. Pak pro $s = 0,1,\ldots,k$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^s\left(|a_n(f)| + |b_n(f)|\right)$ konverguje, Fourierova řada funkce f konverguje k f stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a lze ji k-krát derivovat po členech, přičemž tato derivovaná řada konverguje stejnoměrně k $f^{(k)}$ na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Viz [7], věta 16.3, str. 16 (používáme slabší verzi). $\square$

Věta 3.2.22. *(Parsevalova rovnost)*
Nechť $f \in L^2(0,2\pi)$ je 2π-periodická funkce a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Pak platí

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.19}$$

Rovnost (3.19) se nazývá Parsevalovou rovností.

Důkaz. Viz [5], poznámka 3., str.554, a poznámka 1., str.560. $\square$

Věta 3.2.23. *(Fejérova věta)*
Nechť f je 2π periodická funkce definovaná na $\mathbb{R}$ s konečným Lebesgueovým integrálem na $[0,2\pi]$. Nechť $s_m(x)$ je součet prvních m+1 členů Fourierovy řady funkce f v bodě x. Položme $\sigma_m(x) = \frac{1}{m+1}\sum\limits_{k=0}^{m} s_k(x)$, $m = 0,1,2,\ldots$ Potom platí:

(i) *Je-li x bod takový, že existuje konečná* $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = A$, *pak je* $\lim_{m \to \infty} \sigma_m(x) = A$.

(ii) *Je-li $f(x)$ konečná a spojitá v $[a, b]$ a navíc spojitá zleva v bodě a a zprava v bodě b, je pro každé $x \in [a, b]$* $\lim_{m \to \infty} \sigma_m(x) = f(x)$ *a tato konvergence je stejnoměrná v $[a, b]$.*

Důkaz. Viz [5], věta 191, str.518. $\square$

Kapitola 4

Metody sčítání řad

V této kapitole uvedeme některé metody na sčítání řad.

4.1 Elementární metody

4.1.1 Geometrická řada

Definice 4.1.1. *Geometrická řada* je definována výrazem

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n,$$

kde $a_1,\ q \in \mathbb{R}$.

Pozorování 4.1.2. *Součet prvních n členů geometrické řady je dán vzorcem*

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{4.1}$$

Je-li tedy $|q| < 1$, pak je řada konvergentní a její součet je dán vzorcem

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Obráceně, je-li $|q| \geq 1$, pak řada diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady.

Důkaz. Součet prvních n členů řady (4.1) lze vyjádřit takto:

(1) $s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}$.

Obě strany rovnice (1) přenásobíme číslem q a dostaneme

(2) $s_n q = a_1 (q + q^2 + \cdots + q^n)$.

Po odečtení rovnic (1) a (2) vyjde $s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$ a tedy

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

□

4.1.2 Parciální zlomky

Metoda parciálních zlomků je velmi užitečná, pokud a_n v $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je podílem dvou polynomů, tedy $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, a stupeň polynomu $Q(n)$ je alespoň o dva vyšší než stupeň polynomu $P(n)$ a $Q(n)$ je různé od nuly pro všechna přirozená n. V tom případě nám rozklad na parciální zlomky a následná aplikace uvedených tvrzení usnadní výpočet.

Věta 4.1.3. *Nechť $Q(x)$ je polynom, pro který platí rovnice*

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_n)^{k_n},$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_n$ jsou přirozená čísla, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou navzájem různá reálná čísla, $a_0 \neq 0$. Nechť $P(x)$ je polynom, jehož stupeň je nižší než stupeň polynomu $Q(x)$. Pak existují reálná čísla $A_1, \dots, A_{k_1}, A_1^1, \dots, A_{k_2}^1, \dots, A_1^{n-1}, \dots A_{k_n}^{n-1}$ tak, že pro všechna x různá od nulových bodů $Q(x)$ platí:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{A_1^1}{x-\alpha_2} + \frac{A_2^1}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{k_2}^1}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \dots \\ & + \frac{A_1^{n-1}}{x-\alpha_n} + \frac{A_2^{n-1}}{(x-\alpha_n)^2} + \dots + \frac{A_{k_n}^{n-1}}{(x-\alpha_n)^{k_n}}.\end{aligned}$$

Důkaz. Viz [4], věta 57, str.89. □

Tvrzení 4.1.4. *Nechť $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, $(b-a) \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{(n+a)(n+b)} = \frac{c}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \dots + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{b} \right).$$

Důkaz.
Rozložíme výraz $\frac{1}{(n+a)(n+b)}$ podle věty 4.1.3 na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+b},$$

odkud dostaneme, že $A = -B = \frac{1}{b-a}$. A tedy

$$\frac{c}{(n+a)(n+b)} = c\left(\frac{\frac{1}{b-a}}{n+a} + \frac{\frac{1}{a-b}}{n+b} \right) = \frac{c}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right).$$

Dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{c}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{c}{b-a}\left(\frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+N+1} - \dots - \frac{1}{b+N}\right) =$$
$$= \frac{c}{b-a}\left(\frac{1}{1+a} + \dots + \frac{1}{b}\right).$$

□

Příklad 4.1.5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{5}{2})}$$

Podle tvrení 4.1.4 ($a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2},\ c = 3$) platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{5}{2})} = \frac{3}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}}\right) = \frac{46}{15}.$$

Tvrzení 4.1.6. *Nechť $P(n)$ je polynom tvaru*

$$P(n) = (n+c)(n+c+a_1)\dots(n+c+a_k),$$

kde $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ jsou přirozená čísla, $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ a $k \in \mathbb{N}$. Nechť $Q(n)$ je takový polynom, že $\mathrm{st.}\,Q(n) \le \mathrm{st.}\,P(n) - 2$. *Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{P} = \frac{A_1}{a_1}\left(\frac{1}{1+c} + \dots + \frac{1}{c+a_1}\right) + \dots + \frac{A_k}{a_k}\left(\frac{1}{1+c} + \dots + \frac{1}{c+a_k}\right), \quad (4.2)$$

kde $A_1, \dots, A_k$ jsou jednoznačně určené koeficienty větou 4.1.3.

Důkaz. Z výrazu $\frac{Q}{P}$, vytkneme $\frac{1}{n+c}$ a zbytek, tj. $\frac{Q}{(n+c+a_1)\dots(n+c+a_k)}$, rozložíme na parciální zlomky podle věty 4.1.3. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{n+c}\left(\frac{A_1}{n+c+a_1} + \dots + \frac{A_k}{n+c+a_k}\right).$$

Zpět roznásobíme a dostaneme:

$$\frac{A_1}{(n+c)(n+c+a_1)} + \dots + \frac{A_k}{(n+c)(n+c+a_k)}.$$

Na každý člen tohoto součtu aplikujeme tvrzení 4.1.4, a tedy (4.2) platí. □

Příklad 4.1.7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Rozkladem výrazu $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ na parciální zlomky dostaneme: $A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = -1,\ A_3 = \frac{1}{2}$, a tedy podle tvrzení 4.1.6 ($\mathrm{st.}\,Q = 0,\ \mathrm{st.}\,P = 4,\ c = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$) platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{18}.$$

4.2 Sčítání přes Taylorův rozvoj

Tato metoda se používá u mocniných řad nebo konvergentních číselných řad, které volbou vhodné pomocné proměnné převedeme na řady mocninné. Mocninnou řadu upravujeme pomocí vět 3.2.11 a 3.2.12 do té doby, než řadu umíme sečíst (zde využíváme Taylorova rozvoje - příklady jsou uvedeny v kapitole 3 v sekci 3.2.2). Pak jsme schopni sečíst také řadu původní. V případě číselné řady získáme její součet aplikací věty 3.2.13. Podrobné postupy pro sčítání těchto řad jsou popsány v následujících příkladech.

Příklad 4.2.1.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ n\ x^n}{(2n+1)!},\ x\in(0,\infty) \tag{4.3}$$

Vypočteme poloměr konvergence podle věty 3.2.10:

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n\ n}{(2n+1)!}\right|}}=+\infty.$$

Nyní potřebujeme odstranit n v čitateli řady (4.3). Označme

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ n\ x^{n-1}}{(2n+1)!}.$$

Poloměr konvergnece se zřejmě nemění, takže můžeme použít větu 3.2.12 pro $x\in\mathbb{R}$ a zintegrujeme tedy funkci $g(x)$ člen po členu.
Nechť $G(x)=\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t$. Pak platí:

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}.$$

Nyní zavedeme substituci $t^2=x$ a dostaneme:

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Z $G(x)$ vytkneme $\frac{1}{t}$ sečteme pomocí Taylorova rozvoje (3.8):

$$G(x)=\frac{1}{t}(-t+\sin t).$$

Dosadíme zpět $x=t^2$ a dostaneme:

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}-1.$$

Nyní zderivujeme funkci $G(x)$:

$$G'(x)=g(x)=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{x}.$$

Celkem

$$f(x)=x\cdot g(x)=x\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\right).$$

Příklad 4.2.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} \tag{4.4}$$

Řadu (4.4) převedeme na mocninnou. Zvolme pomocnou proměnnou x a definujme funkci

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n(2n-1)}. \tag{4.5}$$

Vypočteme poloměr konvergence podle věty 3.2.10:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}\right|}} = 1.$$

Nyní potřebujeme odstranit jmenovatel řady (4.5). Použijeme větu 3.2.11 pro $x \in (-1, 1)$ a zderivujeme tedy řadu (4.5) člen po členu.
Platí:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{n} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^n}{n}.$$

Označme

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^n}{n}.$$

Pro funkci $g(x)$ jsou opět splněny předpoklady věty 3.2.11 a můžeme tedy opět derivovat člen po členu:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^2)^{n-1} \cdot 2x = \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Tuto řadu však umíme sečíst pomocí rozvoje (3.12), platí tedy

$$g'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Nyní zintegrujeme funkci $g'(x)$:

$$g(x) = \int g'(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{-2x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = -\log(1+x^2) + c_1$$

a také funkci $f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\ g(x) = \int \frac{1}{x^2} \left(-\log(1+x^2) + c_1\right)\ \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\log(1+x^2)}{x} - 2 \operatorname{arctg} x - \frac{c_1}{x} + c_2.$$

Výpočet c_1, c_2: dosadíme střed konevrgence $x = 0$:

$$-\log(1+0) + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2)}{x} - 2\,\mathrm{arctg}\, 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

A tedy

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x} - 2\,\mathrm{arctg}\, x.$$

Pro $x = 1$ tato řada konverguje dle věty 3.1.17, a tudíž jsou splněny předpoklady věty 3.2.13 a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \log 2 - \frac{\pi}{2}.$$

4.3 Mocninné řady s racionální funkcí

V tomto oddíle se budeme zabývat řadami splňujícími níže uvedené tvrzení, nejprve si však dokážeme následující pomocné lemma:

Lemma 4.3.1. *Nechť* $p \in \mathbb{N}_0,\ b_0, \dots, b_p \in \mathbb{R}$. *Položme* $R(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_p n^p$ *a* $Q_i = (n+1)(n+2)\dots(n+i)$ *pro* $i = 1, \dots, p$. *Pak existují jednoznačně určené koeficienty* $d_k,\ k = 0, 1, \dots, p$, *tak, že* $R(n) = d_p Q_p + d_{p-1} Q_{p-1} + \cdots + d_0$. *Navíc tyto koeficienty lze nalézt následujícím způsobem:*

$$\begin{pmatrix} d_p \\ \vdots \\ d_0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

kde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p-1}^{(p)} & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p-2}^{(p)} & c_{p-2}^{(p-1)} & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p-k}^{(p)} & c_{p-k}^{(p-1)} & \dots & c_{p-k}^{(p-k+1)} & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ c_0^{(p)} & c_0^{(p-1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a $c_k^{(j)}$ *je koeficient u* n^k *v* Q_j. *Dále pak platí:*

$$\begin{aligned} c_k^{(j)} &= j\, c_k^{(j-1)} + c_{k-1}^{(j-1)},\ j = 2, \dots, (p-1),\ k < j, \\ c_0^{(j)} &= j!,\ c_j^{(j)} = 1,\ j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme vzorce (4.7). Máme $Q_1 = n+1,\ Q_2 = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$, tedy

$$\begin{aligned} &c_0^{(1)} = 1 = 1!,\ c_1^{(1)} = 1, \\ &c_0^{(2)} = 2 = 2!,\ c_1^{(2)} = 3 = 2\, c_1^{(1)} + c_0^{(1)} = 2 \cdot 1 + 1,\ c_2^{(2)} = 1, \end{aligned}$$

takže pro $j = 2$ vzorec (4.7) platí. Dále nechť platí: $c_k^{(j)} = j\, c_k^{(j-1)} + c_{k-1}^{(j-1)}$, pak pišme $Q_j = c_j^{(j)} n^j + c_{j-1}^{(j)} n^{j-1} + \cdots + c_1^{(j)} n + c_0^{(j)}$. Nechť $Q_{j+1} = c_{j+1}^{(j+1)} n^{j+1} + c_j^{(j+1)} n^j + \cdots + c_1^{(j+1)} n + c_0^{(j+1)}$. Přenásobíme Q_j výrazem $(n + j + 1)$, tím dostaneme Q_{j+1}, a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin n:

$$\begin{aligned}
n^{j+1}:&\ \ c_j^{(j)} = c_{j+1}^{(j+1)}\\
n^{j}:&\ \ c_j^{(j+1)} = (j+1)\, c_j^{(j)} + c_{j-1}^{(j)}\\
&\ \ \vdots\\
n:&\ \ c_1^{(j+1)} = (j+1)\, c_1^{(j)} + c_0^{(j)}\\
1:&\ \ c_0^{(j+1)} = (j+1)\, c_0^{(j)} = (j+1)\, j! = (j+1)!,
\end{aligned}$$

takže vzorce (4.7) platí.
Soustavu (4.6) získáme metodou neurčitých koeficientů:

$$\begin{aligned}
b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \cdots + b_0 = d_p&\left(c_p^{(p)} n^p + c_{p-1}^{(p)} n^{p-1} + \cdots + c_0^{(p)}\right) +\\
&+ d_{p-1}\left(c_{p-1}^{(p-1)} n^{p-1} + c_{p-2}^{(p-1)} n^{p-2} + \cdots + c_0^{(p-1)}\right) + \cdots + d_0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Opět budeme porovnávat koeficienty u jednotlivých mocnin n:

$$\begin{aligned}
n^p:&\ \ b_p = d_p\\
n^{p-1}:&\ \ b_{p-1} = d_p c_{p-1}^{(p)} + d_{p-1}\\
n^{p-2}:&\ \ b_{p-2} = d_p c_{p-2}^{(p)} + d_{p-1} c_{p-2}^{(p-1)} + d_{p-2}\\
&\ \ \vdots\\
n^{p-k}:&\ \ b_{p-k} = d_p c_{p-k}^{(p)} + d_{p-1} c_{p-k}^{(p-1)} + \cdots + d_{p-k}\\
&\ \ \vdots\\
1:&\ \ b_0 = d_p c_0^{(p)} + d_{p-1} c_0^{(p-1)} + \cdots + d_0
\end{aligned}$$

Zapsáno maticově:

$$\begin{pmatrix} b_p \\ b_{p-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
c_{p-1}^{(p)} & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
c_{p-2}^{(p)} & c_{p-2}^{(p-1)} & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{p-k}^{(p)} & c_{p-k}^{(p-1)} & \dots & c_{p-k}^{(p-k+1)} & 1 & 0 & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\
c_0^{(p)} & c_0^{(p-1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_p \\ d_{p-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice C je roven 1, to znamená, že matice je regulární, a tudíž C^{-1} existuje a je určena jednoznačně. Z toho plyne, že soustava (4.6) má jednoznačné řešení pro libovolný vektor $(b_0, \dots, b_p)^T$. $\square$

Poznámka 4.3.2. Někdy může být výpočet inverzní matice obtížný, a proto může být vhodnější hledat rozklad $R(n)$ pomocí následujícího postupu:
V prvním kroku odečteme od polynomu $R(n)$ polynom Q_p, kde p je stupeň polynomu $R(n)$, přenásobený konstantou u nejvyšší mocniny n polynomu $R(n)$. Tímto vznikne zbytkový polynom stupně nejméně o jedna nižšího, než byl stupeň $R(n)$, označme ho $R_{p-1}(n)$. Ve druhém kroku odečteme od $R_{p-1}(n)$ polynom Q_{p-1} přenásobený konstantou u nejvyšší mocniny n polynomu $R_{p-1}(n)$, tak vznikne zbytkový polynom stupně nejméně o dva nižšího, než byl stupeň $R(n)$, označme ho $R_{p-2}(n)$. Takto postupujeme dál, tj. v i-tém kroku odečítáme od $R_{i-1}(n)$ polynom Q_{i-1} přenásobený konstantou u nejvyšší mocniny n polynomu $R_{i-1}(n)$, až dostaneme zbytkový polynom stupně nula, tj. $R_0(n)$. Rozklad $R(n)$ je pak součet všech $Q_k,\ k = 0, \dots, p$, přenásobených příslušnými konstantami u nejvyšších mocnin příslušného zbytkového polynomu, a zbytkového polynomu stupně nula.

Tvrzení 4.3.3. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$, $a_1 < a_2 < \dots < a_l$ jsou přirozená čísla a $c \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-$. Nechť $P(n)$ je polynom stupně k, a $S(n) = (n+c+a_1)\dots(n+c+a_l)$. Pak lze pomocí vět 3.2.11 a 3.2.12 sečíst řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{S(n)} x^n$ pro $|x| < 1$. Podrobněji, částečným podělením výrazu $\frac{P(n)}{S(n)}$ dostáváme čísla $b_0, \dots, b_{k-l} \in \mathbb{R}$ tak, že $\frac{P(n)}{S(n)} = R(n) + \frac{P_1(n)}{S(n)}$, kde $R(n) = b_{k-l}n^{k-l} + \dots + b_1 n + b_0$ a $\mathrm{st.}\, P_1 < \mathrm{st.}\, S$, aplikací věty 4.1.3 na podíl $\frac{P_1(n)}{S(n)}$ dostaneme jednoznačně určená čísla $A_1, \dots, A_l \in \mathbb{R}$ tak, že $\frac{P_1(n)}{S(n)} = \frac{A_1}{n+c+a_1} + \dots + \frac{A_l}{n+c+a_l}$ a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{A_1}{n+c+a_1} + \dots + \frac{A_l}{n+c+a_l} \Big) x^n = \sum_{j=1}^{l} \frac{A_j}{x^{c+a_j}} \int_0^x \frac{t^{c+a_j-1}}{1-t}\, \mathrm{d}t. \tag{4.9}$$

Dále existují reálná čísla $d_0, \dots d_{k-l}$ tak, že

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} R(n) x^n &= d_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + d_1 \sum_{n=0}^{\infty} Q_1(n) x^n + \dots + d_{k-l} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k-l} x^n = \\ &= d_0 f_0 + d_1 f_1 + \dots + d_{k-l} f_{k-l},\end{aligned}$$

kde $Q_i = (n+1)(n+2)\dots(n+i)$, $f_i = \left(\frac{x^i}{1-x}\right)^{(i)}$, $i = 1, \dots, (k-l)$, a čísla $d_j,\ j = 0, \dots, (k-l)$, najdeme pomocí lemmatu 4.3.1 nebo postupu uvedeném v poznámce 4.3.2.

Důkaz. Z věty 4.1.3 a částečného podělení máme:

$$\frac{P(n)}{S(n)} = R(n) + \frac{A_1}{n+c+a_1} + \dots + \frac{A_l}{n+c+a_l}, \text{ kde } \mathrm{st.}\, R(n) = k-l \text{ a } \mathrm{st.}\, P_1 < \mathrm{st.}\, S.$$

Pro $|x| < 1$ můžeme psát:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{S(n)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} R(n) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{A_1}{n+c+a_1} + \dots + \frac{A_l}{n+c+a_l} \Big) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} R(n) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_1}{n+c+a_1} x^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_l}{n+c+a_l} x^n.\end{aligned}$$

Řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A_j}{n+c+a_j} x^n,\ j = 1, \dots, l$, sečteme pomocí věty 3.2.11, a to takto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_j}{n+c+a_j} x^n = \frac{A_j}{x^{c+a_j}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+c+a_j}}{n+c+a_j} = \frac{A_j}{x^{c+a_j}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+c+a_j-1}\, \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{A_j}{x^{c+a_j}} \int_0^x \frac{t^{c+a_j-1}}{1-t}\, \mathrm{d}t$$

a tento integrál spočteme pro $c+a_j-1 = \frac{p}{q}$, p, $q \in \mathbb{N}$, substitucí $z = t^{1/q}$, a pro $q = 1$ substitucí $z = 1-t$. Nyní určíme součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R(n) x^n$. Podle lemmatu 4.3.1 najdeme koeficienty $d_j,\ j = 0, \dots, (k-l)$, pak $R(n) = d_p Q_p + d_{p-1} Q_{p-1} + \dots + d_0$, a tedy pro $|x| < 1$ platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(n) x^n = d_p \sum_{n=0}^{\infty} Q_p x^n + \dots + d_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$
$$= d_p \Big(\frac{x^p}{1-x} \Big)^{(p)} + \dots + d_0 \Big(\frac{1}{1-x} \Big).$$

$\square$

Příklad 4.3.4. Sečteme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^6 + n^5 - 2n^4 + n^3 + n^2 - 4n + 5}{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24} x^n$$

Označme ji $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{S(n)} x^n$. Částečným podělením dostaneme:

$$\frac{P(n)}{S(n)} = 2n^2 - 19n + 118 - \frac{614n^3 + 3227n^2 + 5448n + 2827}{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24}.$$

Označme $R(n) = 2n^2 - 19n + 118$.
Pro ukázku rozložíme polynom $R(n)$ jak pomocí lemmatu 4.3.1, tak i metodou z poznámky 4.3.2:
Nejprve použijeme lemma 4.3.1:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice je pak:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -19 \\ 118 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -25 \\ 139 \end{pmatrix}.$$

Nyní použijeme postup z poznámky 4.3.2:

$$R(n) - 2Q_2 = -25n + 114 =: R_1(n)$$
$$R_1(n) - (-25)Q_1 = 139.$$

Z obou postupů dostaneme: $R(n) = 2Q_2 - 25Q_1 + 139$, a tedy podle tvrzení 4.3.3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(n)x^n = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{25}{(1-x)^2} + \frac{139}{1-x}.$$

Dále budeme sčítat řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{614n^3 + 3227n^2 + 5448n + 2827}{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24} x^n.$$

Označme ji $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{P_1(n)}{S(n)} x^n$ a polynom $S(n)$ rozložíme na kořenové činitele, tedy $S(n) = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Podle věty 4.1.3 rozložíme výraz $\frac{P_1(n)}{S(n)}$ na parciální zlomky:

$$\frac{P_1(n)}{S(n)} = -\frac{4}{3}\frac{1}{n+1} + \frac{72}{2}\frac{1}{n+2} - 526\frac{1}{n+3} + \frac{6629}{6}\frac{1}{n+4}.$$

A tedy dle tvrzení 4.3.3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_1(n)}{S(n)} x^n = \frac{4}{3}\frac{\log(1-x)}{x} - \frac{73}{2}\frac{x + \log(1-x)}{x^2} + 263\frac{x^2 + 2x + 2\log(1-x)}{x^3} - \\ - \frac{6629}{36}\frac{2x^3 + 3x^2 + 6x + 6\log(1-x)}{x^4}.$$

Takže celkem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{S(n)} x^n = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{25}{(1-x)^2} + \frac{139}{1-x} - \frac{4}{3}\frac{\log(1-x)}{x} - \\ - \frac{73}{2}\frac{x + \log(1-x)}{x^2} + 263\frac{x^2 + 2x + 2\log(1-x)}{x^3} - \\ - \frac{6629}{36}\frac{2x^3 + 3x^2 + 6x + 6\log(1-x)}{x^4}.$$

4.4 Sčítání pomocí komplexní exponenciály

V tomto oddíle budeme využívat komplexní exponenciálu

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x, \tag{4.10}$$

kde i je imaginární jednotka, a také větu 3.2.13. Dále budeme používat hlavní hodnotu logaritmu komplexní proměnné, která je definována výrazem $\log_0 z := \log|z| + i \cdot \arg z,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, kde $\arg z$ se nazývá argument z, $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = x + i \cdot y = \sqrt{x^2 + y^2}\ (\cos\varphi + i \sin\varphi),\ x, y \in \mathbb{R}$, a $\arg z := \varphi,\ \varphi \in (-\pi, \pi]$.

Pro výpočet argumentu z budeme používat následující vztahy (viz [3], věta 238, str.557):

$$\begin{aligned} \arg z &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ y \geq 0, \\ \arg z &= -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ y < 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Tuto metodu používáme u řad, kde se vyskytuje kosinus nebo sinus, neboť pomocí komplexní exponenciály převedeme řadu na mocninnou a princip je tedy stejný jako v sekci 4.2.

Příklad 4.4.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n},\ x \in (-\pi, \pi)$$

Sinus je imaginární část (4.10), počítejme však nejprve obecně:
Zavedeme substituci $z = -e^{ix}$ a dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

To je však mocninná řada, která konverguje pro $|z| < 1$ podle věty 3.1.10. Budeme tedy aplikovat již známé postupy na mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \int \left(\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) = \int \left(\frac{1}{1-z} \right) = -\log_0(1-z) + c.$$

Vypočítáme integrační konstantu c: dosadíme střed konvergence $x = 0$:

$$0 = -\log_0 1 + c \ \Rightarrow c = 0.$$

Dosadíme zpět $z = -e^{ix}$: $-\log_0(1-z) = -\log_0(1+e^{ix})$.
Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{n}$ konverguje podle věty 3.1.17, pokud $e^{ix} \neq -1$, tj. pro $x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, omezme se tedy na interval $(-\pi, \pi)$. Podle věty 3.2.13 pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{n} = \lim_{r \to 1-} -\log_0(1 + re^{ix}) = -\log_0(1+e^{ix}).$$

My však potřebujeme pouze imaginární část:

$$\operatorname{Im}\big(\log_0(1+e^{ix})\big) = -\arg(1+e^{ix}).$$

Argument spočítáme podle vzorců (4.11):

$$\begin{aligned} -\arg(1+e^{ix}) &= -\arccos \frac{1+\cos x}{\sqrt{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x}} = -\arccos \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \\ &= -\arccos \left| \cos \frac{x}{2} \right| = -\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2},\ x \in (-\pi, \pi).$$

4.5 Aplikace Dirichletovy-Jordanovy věty

Tuto metodu používáme v případě, že známe funkci, jejíž Fourierova řada po dosazení vhodné hodnoty za proměnnou x dává řadu zadanou. Dirichletova-Jordanova věta (věta 3.2.19) zaručuje, že Fourierova řada funkce f je rovna aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva funkce f v bodě x a tedy tímto dosazením a případnými úpravami dostaneme součet dané řady.

Příklad 4.5.1. Sečteme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

Tuto řadu dostaneme, pokud do funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3},\ x \in (-\pi, \pi)$ dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$. Jestliže tuto funkční řadu přenásobíme číslem $\frac{8}{\pi}$, je Fourierovou řadou funkce $f(x) = x(\pi - |x|)$ (to můžeme ověřit zpětným rozvojem). Funkce f je po částech hladká a v bodě $x = \frac{\pi}{2}$ je spojitá, tedy podle Dirichletovy-Jordanovy věty platí, že v tomto bodě je funkce f součtem své Fourierovy řady. Dosadíme tedy $x = \frac{\pi}{2}$ a dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{2}(\pi - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^3}{32}.$$

4.6 Aplikace Parsevalovy rovnosti

Parsevalova rovnost je užitečný nástroj při sčítání řad, neboť v mnoha případech její aplikací velmi rychle dostaneme součet dané řady. V této sekci si ukážeme její užití na sčítání řad typu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. Postup je takový, že najdeme vhodnou funkci, na jejíž Fourierovu řadu aplikujeme Parsevalovu rovnost a úpravami dostaneme součet požadované řady. V případě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ volíme funkci $x^k,\ k = 1, 2, \ldots$

Příklad 4.6.1. Sečteme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6},$$

pokud víme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Uvažujme funkci $f(x) = x^3$. Tuto funkci lze periodciky rozšířit na $\mathbb{R}$, my se však omezíme pouze na interval $(-\pi, \pi)$, kde ji rozvineme ve Fourierovu řadu.
Koeficienty Forurierovy řady vypočteme podle vzorců (3.16) a (3.17).
Funkce je lichá a tedy platí $a_k = 0$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots$

Dále spočítáme b_k pomocí integrace per partes:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3 \sin kx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\Big[-x^3\,\frac{\cos kx}{k}\Big]_0^\pi + \frac{3}{k}\int_0^\pi x^2 \cos kx \,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}\pi^3}{k} + \frac{3}{k}\left(\Big[\frac{x^2}{k}\sin kx\Big]_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi x \sin kx \,\mathrm{d}x\right)\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}\pi^3}{k} - \frac{6}{k^2}\left(\Big[-\frac{x}{k}\cos kx\Big]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx \,\mathrm{d}x\right)\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}\pi^3}{k} - \frac{6}{k^2}\left(\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{1}{k}\Big[\frac{\sin kx}{k}\Big]_0^\pi\right)\right) = (-1)^k\,\frac{12-2\pi^2k^2}{k^3}.
\end{aligned}$$

A tedy podle (3.18) a věty 3.2.19 platí

$$x^3 = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k\,\frac{12-2\pi^2k^2}{k^3}\sin kx,\ \ x \in (-\pi,\pi).$$

Nyní použijeme Parsevalovu rovnost:

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{12-2\pi^2k^2}{k^3}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x^6 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{7}\pi^6.$$

Upravíme a protože jednotlivé sumy mají konečný součet, můžeme psát

$$144\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^6} - 48\pi^2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} + 4\pi^4\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{2}{7}\pi^6.$$

A tedy

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

4.7 Metoda Cèsarových součtů

Této metodě se také někdy říká metoda aritmetických průměrů. Uvažujme posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, při aplikaci této metody pracujeme s posloupností $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, kde $y_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k,\ n \in \mathbb{N}$.

Definice 4.7.1. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Pak říkáme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ má *zobecněnou limitu* rovnou x_0. Je-li $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ posloupnost částečných součtů nějaké řady, mluvíme o *Cèsarově metodě sčítání řady* a číslo x_0 nazýváme *Cèsarovým součtem prvního řádu* příslušné řady.

Cèsarovy součty používáme u řad konvergentních, které neumíme dříve uvedenými metodami sečíst. Po aplikaci Cèsarových součtů můžeme získat řadu, kterou již těmito metodami sečíst umíme.

Příklad 4.7.2.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos{(2n+1)x}}{(2n+1)^2},\ x\in[-\pi,\pi]$$

Pro určení součtu této řady bude snazší sečíst nejprve $f'(x)$:
Protože řada $f'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně podle věty 3.2.6 na $(-\pi,0)$ a $(0,\pi)$ a řada $f(x)$ konverguje např. pro $x=\frac{\pi}{2}$, platí podle věty 3.2.7

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{\sin{(2n+1)x}}{2n+1},\ x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

Dále položme

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}-\frac{\sin{(2k+1)x}}{2k+1}$$

a tedy

$$s_n'(x)=-\sum_{k=0}^{n}\cos{(2k+1)x}. \tag{4.12}$$

Upravíme výraz (4.12) pomocí komplexní exponenciály:

$$\begin{aligned}-s_n'(x)&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\ e^{i(2k+1)x}=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}e^{i(2k+1)x}=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{2ix}\right)^k\cdot e^{ix}=\\&=\mathrm{Re}\ e^{ix}\frac{1-\left(e^{2ix}\right)^{n+1}}{1-e^{2ix}}=\mathrm{Re}\ e^{ix}\frac{1-\left(e^{2ix}\right)^{n+1}}{1-e^{2ix}}\cdot\frac{1-e^{-2ix}}{1-e^{-2ix}}=\\&=\frac{\cos{(2n+3)x}-\cos{(2n+1)x}}{2-2\cos 2x}=\frac{\sin{(2n+2)x}}{2\sin x}.\end{aligned}$$

Tedy platí

$$-\sum_{k=0}^{n}\cos{(2k+1)x}=s_n'(x)=-\frac{\sin{(2n+2)x}}{2\sin x}.$$

Označme

$$\sigma_m(x)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}s_k(x),$$

pak platí

$$\sigma_m'(x)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}s_k'(x)=-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin{(2k+2)x}}{2\sin x}.$$

Dále platí:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin{(2k+2)x}}{2\sin x}&=\frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{m}\sin{(2k+2)x}=\frac{1}{2\sin x}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{m}e^{i(2k+2)x}=\\&=\frac{1}{2\sin x}\,\mathrm{Im}\,e^{4ix}\cdot\frac{1-e^{2mix}}{1-e^{2ix}}\cdot\frac{1+e^{-2ix}}{1+e^{-2ix}}=\\&=\frac{\sin 4x+\sin 2x-\sin 2x(m+2)-\sin 2x(m+1)}{-2\sin x\cdot 2\sin x}=\\&=\frac{1}{2\sin x}\left(\frac{\sin 3x}{-2\sin x}+\frac{\sin{(2m+3)x}}{2\sin x}\right).\end{aligned}$$

Nyní zvolme $x \in [\delta, \pi - \delta]$ pevné, pak:

$$\frac{1}{2\sin x}\left(\frac{\sin 3x}{-2\sin x} + \frac{\sin(2m+3)x}{2\sin x}\right) \leq \frac{1}{2\sin\delta}\left(\frac{1}{2\sin\delta} + \frac{1}{2\sin\delta}\right).$$

A tedy

$$\lim_{m\to\infty} \sigma'_m(x) = \lim_{m\to\infty} -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+2)x}{2\sin x} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} -\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2\sin\delta}\left(\frac{1}{2\sin\delta} + \frac{1}{2\sin\delta}\right) = 0.$$

Podle věty 3.2.8 (předpoklady splněny - stejnoměrná konvergence na $(-\pi, 0)$ a $(0, \pi)$ podle věty 3.2.6) dostáváme:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \int \lim_{m\to\infty} \sigma'_m(x)\ \mathrm{d}x = \int 0\ \mathrm{d}x = c.$$

Dopočítáme integrační konstantu c:

na $(0, \pi)$ dosadíme $\dfrac{\pi}{2}$:

$$c = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} -\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} = \lim_{n\to\infty} -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = -\frac{\pi}{4}.$$

na $(-\pi, 0)$ dosadíme $-\dfrac{\pi}{2}$:

$$c = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} -\frac{\sin(2k+1)(-\frac{\pi}{2})}{2k+1} = \lim_{n\to\infty} -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

A tedy

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{na } (0, \pi) \\ \frac{\pi}{4} & \text{na } (-\pi, 0). \end{cases}$$

Celkem

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}x + c_1 & \text{na } (0, \pi) \\ \frac{\pi}{4}x + c_2 & \text{na } (-\pi, 0). \end{cases}$$

Pro výpočet c_1, resp. c_2 dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, resp. $x = -\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2} = 0\ \forall\, n = 0, 1 \ldots,$$

a tedy $c_1 = c_2 = \frac{\pi^2}{8}$, neboť kosinus je sudá funkce.
Protože f je spojitá v 0 ($f(x)$ konverguje stejnoměrně na $(-\pi, \pi)$ podle věty 3.2.6) a $f(x)$ má vlastní limitu v krajních bodech intervalu $(-\pi, \pi)$ (ta je v obou těchto bodech rovna $-\frac{\pi^2}{8}$), lze ji touto limitou spojitě dodefinovat, konečný výsledek tedy je

$$f(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}|x|,\ \ x \in [-\pi, \pi].$$

Kapitola 5

Zrychlování konvergence

V případě, že pro bezprostřední výpočet součtu řady s předepsanou přesností je třeba sečíst příliš mnoho členů řady (tj. konverguje pomalu), použijeme takové úpravy (transformace) dané řady, které zrychlují její konvergenci. Jednou z takových úprav je následující Kummerova transformace.

5.1 Kummerova transformace

Nechť řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5.1}$$

konverguje a má součet X. Vytvoříme pomocnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ b_n \neq 0\ \forall\, n = 1, 2, \dots, \tag{5.2}$$

která je konvergentní a jejíž součet Y je nám známý, a to tak, aby existovala limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0$.

Protože obě řady (5.1) i (5.2) mají konečný součet, platí podle věty 3.1.3, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = q \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - q\ b_n)$, tedy

$$X = q\ Y + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - q\ b_n). \tag{5.3}$$

Naše úloha se tedy redukuje na úkol nalézt součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - q\ b_n). \tag{5.4}$$

Zbytek řady (5.4) lze zapsat v následujícím tvaru:

$$\bar{R_N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - q\ b_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - q\frac{b_n}{a_n}\right) a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,$$

kde $\varepsilon_n = \left(1 - q\frac{b_n}{a_n}\right) \to 0$ pro $n \to \infty$. Z tohoto důvodu řada (5.4) konverguje obecně rychleji než původní řada (5.1), tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(a_n - q\ b_n)}{a_n} = 0$.

Racionální funkce

V tomto oddíle se budeme zabývat řadou (5.1), kde a_n je racionální funkce proměnné n, tedy

$$a_n = \frac{\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \dots + \beta_0}, \tag{5.5}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_p, \beta_q \neq 0$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, p-1$, a nechť a_n je definované pro všechna n. K tomu, aby řada s obecným členem tvaru (5.5) konvergovala, je nutné a postačující (dle věty 3.1.7), aby platilo, že $q \geq p+2$. Uvažme nyní pomocné řady

$$S^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)}, \; m \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Protože platí

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\right],$$

dostáváme pro částečný součet $S_N^{(m)}$ řady (5.6)

$$S_N^{(m)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{1\cdot 2\dots m} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\dots(N+m)}\right].$$

A tedy $S^{(m)} = \lim_{N\to\infty} S_N^{(m)} = \frac{1}{m \cdot m!}$.

Tvrzení 5.1.1. *Nechť $p, q \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_p, \beta_q \neq 0$, $q \geq p+2$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, p-1$, a a_n je vyjádřeno vzorcem (5.5). Pak jsou následující koeficienty dobře definovány:*

$$\begin{aligned}
A_1 &= \lim_{n\to\infty} n(n+1)a_n \\
A_2 &= \lim_{n\to\infty} \left[a_n - \frac{A_1}{n(n+1)}\right] n(n+1)(n+2) \\
&\vdots \\
A_m &= \lim_{n\to\infty} \left[a_n - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)}\right] n(n+1)\dots(n+m).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Položíme-li navíc $a_n^{(m)} = a_n - \frac{A_1}{n(n+1)} - \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} - \dots - \frac{A_m}{n(n+1)\dots(n+m)}$, pak platí $a_n^{(m)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2+m}}\right)$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že vzorce (5.7) jsou dobře definované:
Pro $m = 1$ limita existuje, neboť pro $q > p+2$ je limita rovna nule a pro $q = p+2$ je limita konečná a rovna $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$.
Dále dokazujeme indukcí podle m. Nechť

$$A_{m-1} = \lim_{n\to\infty} \left[a_n - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)}\right] n(n+1)\dots(n+m-1)$$

existuje a je konečná. Pak máme z aritmetiky limit:

$$\lim_{n\to\infty}\left[a_n - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)}\right]n(n+1)\dots(n+m-1) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[a_n - \sum_{i=1}^{m-2}\frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)}\right]n(n+1)\dots(n+m-1) - A_{m-1} =$$
$$= A_{m-1} - A_{m-1} = 0.$$

Výraz v první limitě lze převést na podíl dvou polynomů. Jelikož limita tohoto podílu je nulová, musí být stupeň polynomu ve jmenovateli aspoň o jedna vyšší než stupeň polynomu v čitateli. Pokud tento podíl přenásobíme výrazem $(n+m)$, musí být stupně jmenovatele a čitatele nejvýše rovny, tzn. že limita může být opět nulová nebo konečná. Takže $A_m = \lim\limits_{n\to\infty}\left[a_n - \sum\limits_{i=1}^{m-1}\frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)}\right]n(n+1)\dots(n+m)$ existuje a je konečná.
Dále chceme, aby $a_n^{(m)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2+m}}\right)$. Víme:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[a_n - \sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)}\right]n(n+1)\dots(n+m) &= \\ = \lim_{n\to\infty} a_n^{(m)} n(n+1)\dots(n+m) &= 0,\end{aligned} \tag{5.8}$$

to je definice toho, že $a_n^{(m)} = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$. Přenásobíme-li (5.8) výrazem $(n+m+1)$, bude limita zřejmě konečná, a tedy $a_n^{(m)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+2}}\right)$. □

Vzhledem k tvrzení 5.1.1 volme za pomocnou řadu (5.2) výraz

$$\begin{aligned}B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1)\dots(n+m)}\right] \\ &= A_1 S^{(1)} + A_2 S^{(2)} + \dots + A_m S^{(m)} = \frac{A_1}{1\cdot 1!} + \frac{A_2}{2\cdot 2!} + \dots + \frac{A_m}{m\cdot m!}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Navíc je zřejmé, že platí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$$
a
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}. \tag{5.10}$$

Rychlost konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}$ se projeví až při dostatečně velkém n, proto je při uvedené transformaci lepší začít teprve jistým členem a_{p+1}.
Položme $S = \sum\limits_{n=1}^{p} a_n + \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n = S_p + \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$ a upravujme:

$$
\begin{aligned}
S = S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \Bigg[& \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots \\
& \dots + \frac{A_m}{n(n+1)\dots(n+m)} + a_n^{(m)} \Bigg] = S_p + A_1 \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \\
& + \frac{A_2}{2} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] + \dots \\
& \dots + \frac{A_m}{m} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+m)} \right] + \\
& + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n^{(m)} = S_p + A_1 \frac{1}{p+1} + \frac{A_2}{2} \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \dots \\
& \dots + \frac{A_m}{m} \frac{1}{(p+1)\dots(p+m)} + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n^{(m)}.
\end{aligned}
$$

Příklad 5.1.2. Určíme součet řady

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \tag{5.11}
$$

s přesností 10^{-6}.
Zvolíme $m = 3$, protože už pro toto m je vidět, jak transformace funguje. Položme tedy

$$
\frac{1}{n^3} = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{A_3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + a_n^{(3)}.
$$

Koeficienty A_1, A_2 *a* A_3 vypočítáme podle vzorců (5.7):

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^3} = 0, \\
A_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{n^3} = 1, \\
A_3 &= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)(n+3)}{n^2} = 3,
\end{aligned}
$$

a tedy

$$
a_n^{(3)} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{6+11n}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)}.
$$

Podle vzorců (5.9) a (5.10) dostáváme

$$
S = \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{3}{3 \cdot 3!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+11n}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)}. \tag{5.12}
$$

Dále platí

$$
\frac{6+11n}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)} \le \frac{11}{n^5}.
$$

A tedy

$$\rho_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{6+11n}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)} < \int_N^{\infty} \frac{11}{x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{11}{4N^4}.$$

Proto, aby $\rho_N < 10^{-6}$, stačí vzít v součtu (5.12) N = 45 sčítanců.
Pro srovnání: pro zbytek původní řady (5.11) $R_N = \sum\limits_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ platí odhady

$$\frac{1}{2N^2} = \int_N^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x < R_N < \int_{N-1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(N-1)^2}.$$

A tedy ani po sečtení 700 členů nedosáhneme požadované přesnosti.

Literatura

[1] Děmidovič B.P., Maron I.A.: *Základy numerické matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury 1996.

[2] Jarník V.: *Diferenciílní počet I*, Nakladatelství Čs. akademie věd 1963.

[3] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, Nakladatelství Čs. akademie věd 1956.

[4] Jarník V.: *Integrální počet I*, Nakladatelství Čs. akademie věd 1963.

[5] Jarník V.: *Integrální počet II*, Nakladatelství Čs. akademie věd 1976.

[6] Kopáček J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.*, Matfyzpress 2007.

[7] Kopáček J.: *Matematická analýza pro fyziky IV.*, Matfyzpress 2003.

[8] Kopáček J.: *Příklady z matematiky pro fyziky IV.*, Matfyzpress 2003.

[9] Veselý J.: *Matematická analýza pro učitele, 2.díl*, Matfzypress 2001.