UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH ROVNICEMI

Bakalářská práce

Autor: Stanislava Chromá

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2009

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Praze dne ....

Stanislava Chromá

Děkuji doc. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za odborné rady a vedení mé bakalářské práce.

OBSAH

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je seznámit s problematikou řešení slovních úloh rovnicemi, uvést přístupy různých autorů zabývajících se touto problematikou a tyto přístupy porovnat. Úvodní část práce se věnuje slovním úlohám obecně. Je vymezen pojem slovní úloha, jak tento pojem definují různí autoři a jaké uvádí způsoby a postupy řešení slovních úloh. V dalším textu jsou charakterizovány základní typy rovnic. Ke každému druhu rovnice je vybrána jedna typická slovní úloha, v níž se uvádí několik různých způsobů řešení.

Klíčová slova: slovní úloha, algebraická rovnice, nealgebraická rovnice

Abstract

The aim of this work is to get acquainted with the issue of solving verbal tasks by means of equation formulas, to state approaches of various authors dealing with this issue and to compare such approaches. The introductory part of the work deals with verbal tasks in general. The term “verbal task” is specified, how various authors define the verbal task and which methods and means of solution they state. In the consequent text, basic types of equation formulas are characterized. For each type of equation formula, one typical verbal task with various means of solving is chosen.

Key words: verbal task, algebraic equation formula, non-algebraic equation formula

Úvod

Při výběru tématu mé bakalářské práce na katedře matematiky a didaktiky matematiky jsem zvolila téma s problematikou slovních úloh. Chtěla jsem se zabývat něčím, co dělá často řešitelům potíže, čemu často nerozumí. Slovní úlohy vedoucí k řešení rovnicí jsou obvykle považovány za náročnou oblast.

Problematika řešení slovních úloh je bohatá a v literatuře studovaná z různých pohledů. Věnují se jí matematici, didaktici i samotní učitelé. Je to především pohled na otázky: „Jak řešit slovní úlohy? Jaký způsob řešení je nejvhodnější? Jaké zkušenosti jsou s různými postupy řešení? Jaké potíže mají řešitelé? Jakým způsobem se dají překonat?“ Ve své práci se věnuji řešení slovních úloh rovnicemi. Snažím se ukázat, že slovní úlohy vedoucí k řešení rovnicí lze řešit i jiným způsobem. Za odlišný způsob řešení jsem vybrala řešení úsudkem. Je to způsob, ke kterému se uchýlí nejvíce řešitelů, pokud nemají zvládnutý potřebný typ rovnice.

V první části práce uvádím různé pohledy na problematiku slovních úloh. Nejde zde o vyčerpávající pohled, ale spíše o charakteristiku prostředí slovních úloh, o pojetí slovních úloh autory, z jejichž děl ve své práci nejvíce čerpám. Dále se zabývám různými způsoby řešení slovních úloh.

V další části práce uvádím obecné definice rovnice a definice jednotlivých typů rovnic a soustav rovnic. Ke každému typu rovnice vybírám typickou slovní úlohu, která vede k řešení tímto typem rovnice. Snažím se ukázat, že je pro řešitele často snazší řešit tyto slovní úlohy úsudkem. Řešitel, který nemá danou problematiku rovnic zvládnutou, často volí pro své řešení slovní úlohy řešení úsudkem. V práci uvádím kromě řešení rovnicí také řešení úsudkem (aproximací, aritmeticky či obrázkem).

Cíl celé práce spatřuji ve vytvoření ucelené představy o slovních úlohách se zaměřením na úlohy vedoucí k řešení rovnicí či soustavou rovnic.

1 Uvedení do problematiky

Řešení slovních úloh je velmi důležitou složkou studia matematiky a je řešiteli vnímáno jako velmi obtížné. Slovní úlohy a jejich řešení mají významnou roli proto, že jsou jednou z mála oblastí v matematice, která slovně popisuje reálné situace z každodenního života. Pokud člověk není schopen aplikovat své teoretické znalosti při řešení úloh, nemůže tvrdit, že daný úsek učiva zvládl.

Matematickými úlohami a jejich řešením se zabývalo a zabývá mnoho našich i zahraničních autorů ve svých publikacích. Jejich přístupy a názory na pojetí úlohy a jejího řešení se různí podle celkového zaměření autora. V této práci nejčastěji vycházím z materiálů autorů F. Kuřiny, J. Vyšína, J. Divíška, K. Hruši a J. Novotné.

2 Vymezení pojmu slovní úloha

V literatuře jsem nenašla přesnou a vyčerpávající definici pojmu slovní úloha. Uvedu zde pět definic slovní úlohy, ze kterých vycházím v této práci.

„Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy.“ (Vyšín, 1962, s. 104) V této práci uvádím aritmetické i algebraické slovní úlohy. Dále se v kapitole 3.1 zabývám Vyšínovým přístupem k řešení slovních úloh, které vychází z této definice.

„Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky.“ (Divíšek, 1989, s. 123) Podle Divíška je slovní úloha především úloha z reálné situace a řešit tyto úlohy lze buď matematicky, nebo v realitě. Řešením slovních úloh matematicky nebo v realitě se dále zabývám v kapitole 3.3.

Definice Kuřiny je obecná a dále z ní vycházím v kapitole 3.2 při způsobu řešení slovních úloh. *„Slovní úlohy jsou úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.“* (Kuřina, 1990, s. 61)

Uvádím zde i obecnou definici Hruši, protože se v této práci jeho přístupem k řešení slovních úloh zabývám (např. kapitola 4). *„Slovní úloha je početní úloha, ve které je souvislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací a ve* *které je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, které početní výkony musíme s danými čísly provést, abychom dospěli k číslu, jež máme vypočítat."* (Hruša, 1967, s. 162)

„Slovní úlohou nazýváme požadavek určit číselnou hodnotu nějakého souboru věcí nebo veličiny ze známých číselných hodnot jiných souborů nebo veličin, které jsou určitým způsobem závislé mezi sebou a hodnotou hledanou." (Kníže, 1966, s. 5) Podle Knížete lze mezi slovní úlohy zařadit i úlohy typu „Řešte v množině všech přirozených čísel…" apod. Takovými slovními úlohami se zabývám v kapitolách 6.2.2, 6.2.4.1 a 6.2.4.2.

3 Způsoby řešení slovních úloh

Řešením slovních úloh se zabývá mnoho autorů. V následujícím textu cituji tři autory, jejichž způsoby řešení slovních úloh ve své práci nejvíce využívám. Je to J. Divíšek, který uvádí dva základní způsoby řešení, a to buď v realitě, nebo matematicky. F. Kuřina rozděluje řešení také na dvě skupiny, experimentování v realitě a modelování slovní úlohy. Třetím autorem je J. Vyšín, který rozlišuje řešení úsudkem a řešení rovnicí.

3.1 Řešení slovních úloh podle J. Vyšína

Podle Vyšína (1962) existují dva způsoby řešení slovních úloh, řešení rovnicí a řešení úsudkem. Dále však toto dělení zobecňuje, protože, jak uvádí, se týká jen úloh, které je možno řešit pomocí algebraického aparátu. Vyšínovo zobecnění zní: *„jde v podstatě o to, zda při řešení úlohy, lépe řečeno při jejím rozboru můžeme použít nějakého kalkulu (výpočtu v širším slova smyslu), či zda takový kalkul není k dispozici."* (Vyšín, 1962, s. 105)

Vyšín uvádí, že způsob řešení kalkulem (výpočtem) je ekonomičtější a schůdnější. Řešení bez kalkulu (úsudkem) umožní řešiteli lépe vniknout do podstaty úlohy, ale nehodí se pro řešení složitějších slovních úloh.

Dále se Vyšín zmiňuje o dvou metodách řešení, o tzv. metodě syntetické a metodě analytické. Analytickou metodu popisuje takto: *„Analytická metoda se obvykle charakterizuje tím, že vycházíme z otázky úlohy a pátráme po dalších údajích, které je třeba získat, abychom na otázku mohli odpovědět."* (Vyšín, 1962,

s. 110) Naproti tomu syntetickou metodu charakterizuje takto: *„…při syntetické metodě určujeme z daných údajů údaje další, až se dopracujeme k odpovědi na otázku úlohy.“* (Vyšín, 1962, s. 110)

3.2 Řešení slovních úloh podle F. Kuřiny

Podle Kuřiny (1990) lze rozdělit řešení slovní úlohy na dvě skupiny, na experimentování v realitě a na modelování slovní úlohy. O experimentování v realitě píše: *„Tento postup je často nemožný, zpravidla drahý a z hlediska matematického vzdělávání málo významný.“* (Kuřina, 1990, s. 61) O druhém způsobu píše: *„Úlohu vhodným způsobem modelujeme tak, abychom pomocí modelu získali odpovědi na položené otázky.“* (Kuřina, 1990, s. 61)

Za nejdůležitější typy modelů považuje modely činnostní, ikonické, jako je obrázek či schéma, a symbolické, což jsou například rovnice a soustavy rovnic. Jako činnostní model může být použito například počitadlo, soubor knoflíků, kamínků atd. Činnostní modely umožňují reprezentovat aritmetické operace činnostmi, a tak pomáhají řešitelům osvojit si hlouběji vlastnosti početních úkonů. Ikonický model je přepis textu úlohy s minimálním použitím slov a s názorným vyjádřením vztahů. Symbolický model je podle Kuřiny popis určité reálné situace v jednoduchém jazyku. Nejčastěji se užívá symbolů pro prvky množin, pro množiny, relace a operace.

Tyto modely mají: *„…umožnit myšlenkově proniknout k podstatě souvislostí. Sestavení modelu úlohy vlastně znamená překlad jejího textu do jazyka, který umožňuje snáze úlohu řešit.“* (Kuřina, 1990, s. 62)

3.3 Řešení slovních úloh podle J. Divíška

Podle Divíška (1989) existují dva základní způsoby řešení slovních úloh: v realitě nebo matematicky. Aby mohl řešitel úlohu řešit matematicky, musí umět daný reálný problém formulovat jako aritmetickou nebo algebraickou úlohu a tu pak matematicky řešit.

„Slovní úloha je formulována tak, že zahrnuje určitý hlavní problém, který je předmětem otázky, ale k jeho vyřešení nejsou dány všechny potřebné údaje. Úkolem řešitele je formulovat dílčí úlohu nebo i několik úloh, pomocí kterých se potřebné údaje zjistí.“ (Divíšek, 1989, s. 138)

Dále Divíšek uvádí dvě základní fáze řešení. První je fáze analytická, ve které řešitel nashromáždí potřebné podmínky, vztahy a údaje. Dále zformuluje dílčí úlohy, kterými vypočítá údaje potřebné pro hlavní úlohu. Druhá fáze je syntetická, ve které se řešitel snaží realizovat plán řešení, tzn. vyřeší dílčí úlohy a hlavní úlohu, provede kontrolu a vysloví odpověď.

Divíšek dále definuje, co je to analytický a syntetický postup řešení slovní úlohy. *„Analytický postup v řešení slovní úlohy znamená, že vyjdeme z otázky a sestavíme jednoduchou slovní úlohu, pomocí níž lze na otázku odpovědět. Přitom však aspoň jeden potřebný údaj k řešení této úlohy není znám. K určení tohoto údaje sestavíme další jednoduchou slovní úlohu, a tak pokračujeme, dokud všechny údaje ještě neznáme.“* (Divíšek, 1989, s. 143)

Syntetický postup definuje takto: *„Při syntetickém postupu vycházíme naopak z daných údajů a ze dvou z nich vhodně zvolených vypočteme v jednoduché slovní úloze další potřebný údaj. Z tohoto nového údaje a dalšího údaje z textu úlohy sestavíme pak další úlohu, a tak pokračujeme, dokud nezískáme údaj potřebný k odpovědi na otázku celé úlohy.“* (Divíšek, 1989, s. 143)

Z obou těchto definic vidíme, že je analytický postup cílevědomější a syntetický více spekulativní. V praxi tyto dvě metody od sebe nelze oddělit, proto se nejčastěji používá postup analyticko-syntetický.

3.4 Porovnání Vyšínova, Kuřinova a Divíškova pojetí

Všichni tři autoři rozdělují způsoby řešení slovních úloh na dvě skupiny. Vyšínovo řešení výpočtem odpovídá Divíškovu matematickému řešení, řešení úsudkem je shodné s Divíškovým řešením v realitě.

Kuřina, který rozděluje způsoby řešení na experimentování v realitě a řešení modelem, se svým pojetím trochu liší. Jeho modelování slovních úloh obsahuje řešení výpočtem (popř. matematicky) a zároveň část řešení úsudkem (v realitě). Kuřinovy modely symbolické jsou totožné s řešením výpočtem (matematicky), modely ikonické a činnostní spolu s Kuřinovým druhým způsobem řešení (experimentováním v realitě) se dají srovnat s řešením úsudkem (v realitě).

Z porovnání vyplývá, že se Vyšínovo a Divíškovo pojetí prakticky neliší. Kuřina mluví o stejných konkrétních způsobech řešení, ale rozděluje je jiným způsobem než další dva autoři. Vyšín i Divíšek (na rozdíl od Kuřiny) se dále zmiňují o řešení slovních úloh syntetickou či analytickou metodou.

4 Postup řešení slovních úloh

Řešení slovních úloh lze dělit do různých fází. Jako příklad zde uvedu dělení slovních úloh od tří autorů: J. Divíška, K. Hruši a J. Novotné.

Hruša uvádí, že je účelné rozčlenit postup při řešení slovní úlohy do několika kroků. Úkolem těchto kroků je:

1. *„určit na základě rozboru popsané situace příslušný početní výkon,*
2. *vyjádřit hledané číslo pomocí daných čísel a zvoleného početního výkonu,*
3. *provést příslušný početní výkon,*
4. *přesvědčit se o správnosti výpočtu a*
5. *odpovědět na otázku slovní úlohy."*

(Hruša, 1967, s. 164)

Podle Novotné lze řešení rozdělit do tří etap. Tyto etapy jsou:

1. *„Etapa uchopování, která obsahuje*
   - *uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc",*
   - *hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu,*
   - *hledání a nalezení sjednocujícího pohledu,*
   - *získání celkového vhledu do struktury problému.*
2. *Etapa transformace odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.*
3. *Etapa návratu do kontextu zadání úlohy."*

(Novotná, 2000, s. 21)

Divíšek řešení rozděluje do pěti fází:

1. *„rozbor úlohy,*
2. *matematizace problému úlohy,*
3. *řešení,*
4. *zkouška,*
5. *odpověď."*

(Divíšek, 1989, s. 125)

4.1 Porovnání postupů řešení slovní úlohy Divíška, Hruši a Novotné

Všichni tito autoři rozdělují řešení slovních úloh do několika kroků. Divíšek a Hruša rozděluje řešení do pěti fází. Oba tito autoři je nazývají a popisují jinak, ale obsahově jsou shodné.

Novotná rozděluje řešení slovní úlohy do tří etap. První etapa odpovídá Divíškově a Hrušově první fázi (rozboru). Ve druhé etapě má Novotná zahrnuty druhou a třetí fázi řešení Divíška a Hruši (matematizace problému úlohy a řešení). Třetí etapa popisuje stejnou problematiku jako čtvrtá a pátá fáze Divíškova a Hrušova řešení (zkoušku a odpověď).

Z porovnání vyplývá, že se Novotné, Divíškovo a Hrušovo pojetí prakticky neliší. Každý z těchto autorů rozděluje řešení slovní úlohy jinak, ale obsahově se neliší.

4.2 Fáze řešení slovních úloh podle J. Divíška

Postup řešení slovní úlohy se u Novotné, Divíška a Hruši neliší, proto se zde budu více zabývat rozdělením řešení pouze jednoho autora, a to Divíška. Podle Divíška probíhá řešení slovní úlohy v pěti fázích, které nejsou vždy stejně významné.

V **rozboru** úlohy je potřeba dokonale pochopit text, ujasnit si to, co známe, a to, co máme vypočítat. Řešitel se snaží objevit vztahy mezi danými údaji a hledaným předmětem otázky, které se pak snaží vyjádřit matematicky.

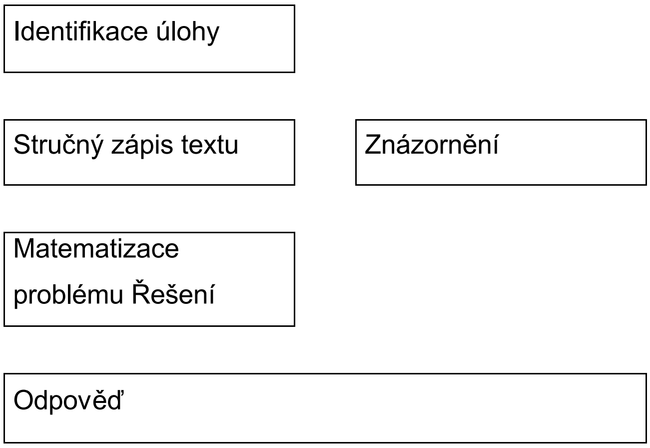
Matematizace problému je podle Divíška logickým vyústěním rozboru. Řešitel zapíše rovnici nebo jen úlohu, která vystihuje podstatu problému. Matematizace může být provedena i graficky. Grafické znázornění nahrazuje konkrétní reálnou situaci, ale je mnohem schematičtější. Toto grafické znázornění by mělo být oporou při řešení a řešení by mělo z něho vycházet. Je to prostředek k řešení úlohy, avšak není cílem. Divíšek uvádí, že je třeba odlišit grafické znázornění slovní úlohy od grafického řešení, které charakterizuje takto: *„tj. takové znázornění, které matematizuje danou situaci natolik, že z něho lze výsledek přímo vyčíst a není již potřeba provádět další výpočet.“* (Divíšek, 1989, s. 126)

*„**Řešení** matematicky formulované úlohy znamená řešení sestavené rovnice nebo nerovnice, popřípadě výpočet vytvořeného početního příkladu nebo nalezení výsledku na grafickém znázornění.“* (Divíšek, 1989, s. 125)

Zkouškou ověřujeme, zda nalezený výsledek je opravdu řešením dané slovní úlohy. Každý matematicky správně nalezený výsledek nemusí být ještě výsledkem dané reálné úlohy. Vytvořená matematická úloha nemusí zachycovat všechna omezení daná kontextem. Zkoušku provádíme tak, že výsledek dosadíme do textu slovní úlohy.

*„**Odpověď** nutí žáka konfrontovat výsledek s realitou a pomáhá vytvářet pocit odpovědnosti za správné vyřešení úlohy.“* (Divíšek, 1989, s. 125)

Na obrázku je uvedeno schéma zápisu slovní úlohy a jejího řešení podle (Divíšek, 1989, s. 127).



5 Rovnice, vymezení pojmu

Různé definice rovnic můžeme nalézt ve většině matematických knih. Problematikou rovnic se zabývá mnoho autorů a každý z těchto autorů při popisu rovnice používá jiný matematický aparát. Mezi některými definicemi můžeme nalézt větší nebo menší rozdíly.

Většinu definic můžeme rozdělit do tří skupin: rovnice definované pomocí množin, rovnice definované pomocí n-tic a rovnice definované pomocí výrazů.

1. <u>Rovnice definované pomocí množin</u>

„Máme určit všechna čísla z daného číselného oboru M, pro něž jsou definovány dané funkce f, g proměnné x a nabývají týchž funkčních hodnot. Za množinu M se zpravidla volí obor R nebo K a také funkční hodnoty jsou z těchto oborů. Tuto úlohu a její zápis ve tvaru f(x) = g(x), kde $x \in M$ *, nazýváme rovnicí s neznámou x; f(x) se*

nazývá levá strana rovnice, g(x) pravá strana rovnice. Je-li g(x) = 0, říkáme, že rovnice je v anulovaném tvaru.“ (Polák, 1980, s. 157)

„Rovnice, úloha najít všechny prvky z dané množiny, pro které platí daná rovnost, dosadíme-li je za neznámou. Každý takový prvek i proces jeho hledání je řešení rovnice.“ (Rossiová, 1988, s. 215)

2. Rovnice definované pomocí n-tic

„Úlohu najít všechny neznámé uspořádané n-tice čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *pro které se dva dané výrazy sobě rovnají, nazýváme rovnice (o neznámých* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*). Každou n-tici, která má požadovanou vlastnost (pokud vůbec nějaká existuje), nazýváme řešení rovnice. U rovnic o jedné neznámé nazýváme řešení také kořen rovnice.“* (Hruša, 1977, s. 137)

„Rovnice o n neznámých v oboru M – rovnice tvaru $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *kde* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ *jsou neznámé, f a g funkce proměnných* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$. *Řešit rovnici o n neznámých v daném oboru znamená najít všechny uspořádané n-tice* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *prvků daného oboru, pro které nabývají funkce f a g týchž funkčních hodnot.“* (Sedláček, 1981, s. 176)

3. Rovnice definované pomocí výrazů

„Buďte V, W dva výrazy, z nichž alespoň jeden obsahuje proměnnou. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *všechny proměnné, které jsou obsaženy buď ve V, nebo W, nazýváme zápis V = W rovnicí o n neznámých* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Výraz V je levá strana, výraz W je pravá strana rovnice. Speciálně zápis tvaru V = 0, kde V obsahuje aspoň jednu proměnnou, je rovnice v základním tvaru.“* (Novotná, Trch, 2004, s. 49-50)

4. Rovnice definované pomocí výrokové formy

„Rovnice je výroková forma o rovnosti dvou výrazů; může být platná v celém průniku definičních oborů obou výrazů nebo v jeho podmnožině (i prázdné). Řešení rovnice je prvek definičního oboru rovnice, pro nějž je výrok o rovnosti pravdivý. Řešit rovnici znamená najít všechna její řešení.“ (Novotná, 2000, s. 340)

6 Typy rovnic

Rovnice lze rozdělit do dvou základních skupin, algebraické rovnice a nealgebraické rovnice (transcendentní rovnice). V algebraických rovnicích jsou známé a neznámé veličiny vzájemně vázány pouze algebraickými početními operacemi. Algebraické rovnice se také nazývají polynomické rovnice a patří do nich např. lineární rovnice, kvadratická rovnice, kubická rovnice, binomická rovnice,…

Nealgebraické rovnice obsahují neznámou v transcendentní funkci, například exponenciální rovnice, logaritmická rovnice, goniometrická rovnice,…

6.1 Algebraické rovnice

Většina autorů definuje algebraickou rovnici pomocí polynomů, přesto se autoři ve svých definicích trochu liší. Pro tuto práci definice rozdělím do dvou skupin. První můžeme nazvat obecná definice algebraické rovnice pomocí polynomů a druhou jako definice algebraické rovnice z pohledu polynomické algebry.

1. <u>Algebraické rovnice definované nad číselným tělesem</u>

„Rovnice tvaru f(x) = g(x), jejichž levá i pravá strana jsou mnohočleny v proměnné x, se nazývá algebraická rovnice. Algebraickou rovnicí n-tého stupně s neznámou x nazýváme rovnici, kterou lze v anulovaném tvaru vyjádřit takto: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$; *čísla* $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) *se nazývají koeficienty rovnice.“* (Polák, 1980, s. 191)

„Ak je f polynóm n-tého stupňa, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$; *nazývá se rovnica algebraickou rovnicou n-tého stupňa; ak nie je polynómom, hovoríme o transcendentnej rovnici.“* (Šalát, 1981, s. 300)

„Algebraická r. je r. typu P(x) = 0, kde P(x) je polynom. Koeficienty polynomu jsou koeficienty rovnice, stupeň polynomu je stupeň rovnice. Tzv. základní věta algebry říká: Každá a. r. alespoň 1. stupně má v oboru komplexních čísel řešení.“ (Rossiová, 1988, s. 215)

2. <u>Algebraické rovnice definované nad obecným tělesem</u>

„Buď $f(x) = b_0 x^k + \dots + b_{k-1} x + b_k$ *libovolný polynom jedné neurčité x nad tělesem T. Algebraickou rovnicí jedné neznámé x stupně k (nad tělesem T) rozumíme každou rovnici* $b_0 x^k + \dots + b_{k-1} x + b_k = 0$. *Je-li T' nadtěleso tělesa T, potom řešením (resp. kořenem) rovnice v tělese T' rozumíme každý kořen* $\alpha \in T''$ *polynomu f.“* (Novotná, Trch, 2000, s. 106)

„Nechť T je těleso, T' jeho nadtěleso (příp. nadobro integrity), $n \in N$. *Obecnou algebraickou rovnicí (v jedné neznámé x) nad tělesem T rozumíme každý zápis tvaru f(x) = g(x), kde* $f, g \in T[x]$. *Prvek* $\alpha \in T'$ *nazveme řešením této rovnice, jakmile v T' platí rovnost* $f(\alpha) = g(\alpha)$. *Množinu všech řešení rovnice v T' budeme značit P. Je-li*

f = g, nazýváme rovnici triviální rovnicí (zřejmě v tomto případě P = T'). Je-li g = 0 a f polynom stupně n, pak rovnici f(x) = 0 nazýváme algebraickou rovnicí stupně n.“
(Novotná, Trch, 2000, s. 115)

*„Nad oborem integrity (I; +, *) budiž dán polynom*
*$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$; $a_n \neq 0$. Výraz $f(\xi) = 0$, ξ je neznámá, nazýváme algebraickou rovnicí n-tého stupně nad oborem integrity (I; +, *). Prvek $\alpha \in I^+$, kde I^+ je nadoborem oboru integrity (I; +, *) $\left(I \subset I^+\right)$, nazýváme kořenem této algebraické rovnice právě tehdy, když platí $f(\alpha) = 0$. Prvek α též nazýváme nulovým bodem polynomu f(x). Podle této definice pod algebraickou rovnicí n-tého stupně nad oborem integrity (I; +, *) rozumíme výraz*
$a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$. To že α je kořenem algebraické rovnice, znamená splnění rovnosti
$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0, a_n \neq 0$. Řešit algebraickou rovnici znamená nalézt všechny kořeny této algebraické rovnice.“
(Drábek, Hora, 2001, s. 13-14)

Ekvivalentní úprava rovnice je úprava, kterou dostaneme rovnici ekvivalentní s původní rovnicí. Dvě rovnice se nazývají ekvivalentní, pokud každý kořen první rovnice je i kořenem rovnice druhé a naopak. Nejčastější ekvivalentní úpravy jsou: přičtení k oběma stranám rovnice stejného čísla, vynásobení obou stran rovnic stejným nenulovým číslem.

6.1.1 Algebraická rovnice prvního stupně

Algebraická rovnice prvního stupně se nazývá lineární rovnice a má tvar $ax + b = 0$, kde $a \neq 0$. Má vždy právě jedno řešení ve tvaru $x = -\frac{b}{a}$.

Slovní úlohy řešené lineární rovnicí

Příklad: Na třech hromadách bylo složeno 260 tun písku. Na první bylo o 35 tun písku více než na druhé a na třetí hromadě o 60 tun méně než na druhé hromadě. Kolik tun písku bylo na jednotlivých hromadách?

(Polák, 1980, s. 173)

1. Řešení rovnicí

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámou x. Sestavíme lineární rovnici o jedné neznámé a řešíme ji.

1. hromada ....x + 35

2. hromada x

3. hromada ....x – 60

Celkem...........................260 tun

x + 35 + x + x – 60 = 260

3x = 285

x = 95

Vypočítali jsme neznámou x = 95, která určuje, že na druhé hromadě je 95 tun písku. Tuto neznámou dosadíme do zadání a vypočteme, kolik tun písku bylo na všech hromadách.

1. hromada ....95 + 35 = 130 tun

2. hromada ....95 tun

3. hromada ....95 – 60 = 35 tun

Naše výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Na první hromadě bylo 130 tun, na druhé 95 tun a na třetí 35 tun písku.

2. Řešení úsudkem (aproximací)

Připravíme tabulku, kde sloupce znamenají hromady. Do řádků budeme psát počty tun v jednotlivých hromadách. Do prvního řádku zapíšeme to, co víme ze zadání:

- Na 2. hromadě je o 60 tun písku více než na 3. => Zvolíme si počáteční stav 3. hromady jako nulu, tzn. ve 2. hromadě je 60 tun.
- Na 1. hromadě je o 35 tun více než na 2., tzn. je tam (60 + 35) tun
- Jako počáteční stav tedy máme ve všech hromadách celkem 155 tun písku.

Ze zadání víme, že celkem musí být na všech hromadách 260 tun písku. Množství písku máme zapsané v prvním řádku, aby se zachoval rozdíl množství písku v jednotlivých hromadách, musíme ke všem hromadám přidávat stejné množství. Nejprve zkusíme přidávat např. po 10 tunách a budeme zkoumat počet tun celkem.

		1.	**2.**	**3.**	**celkem**
		95	60	0	155
+	10	105	70	10	185
+	10	115	80	20	215
+	10	125	90	30	245
+	10	135	100	40	275
-	1	134	99	39	272
-	2	133	98	38	269
-	3	132	97	37	266
-	4	131	96	36	263
-	5	130	95	35	260
-	6	129	94	34	257

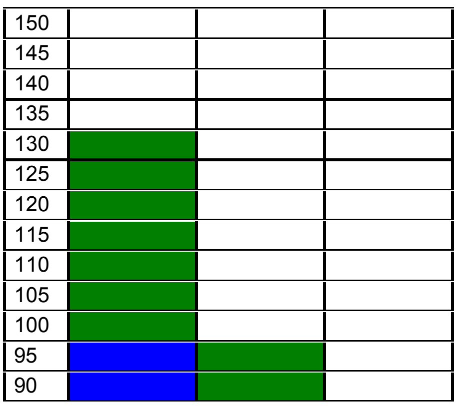
Vidíme, že po přidání 30 tun je celkem na hromadách 245 tun, což je stále málo. Po přidání dalších 10 tun, je celkem 275 tun, což už je moc. Takže zkusíme postupně odčítat po jedné tuně od každé hromady. Z tabulky vidíme, že 260 tun je na všech hromadách, pokud v 1. hromadě je 130 tun, 2. hromadě 95 tun a 3. hromadě 35 tun písku. Nyní už jen zformulujeme odpověď.

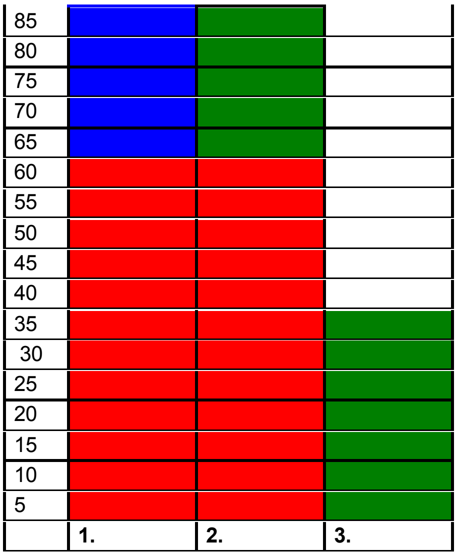
Odpověď: Na první hromadě bylo 130 tun, na druhé 95 tun a na třetí 35 tun písku.

V tomto příkladu jsem zvolila způsob řešení „přidáváním a ubíráním“. Záleží na volbě řešitele, po kolika tunách bude „přidávat a ubírat“, než se dobere výsledku.

3. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Nakreslíme tři hromady. Do každé nejprve dáme to, co víme ze zadání: v 1. a 2. hromadě je o 60 tun více než ve 3., v 1. hromadě je o 35 tun více než ve 2.





260 – 2 * 60 – 35 = 260 – 155 = 105

Spočítali jsme, že máme už na hromadách 155 tun písku a zbývá rozdělit 105 tun. Postupně se pokusíme např. po 5 tunách je rozdělit rovnoměrně do všech hromad.

Vyšlo, že v 1. hromadě je 130 tun, ve 2. hromadě 95 tun a ve 3. hromadě 35 tun písku. Ještě jsme přidali na každou hromadu 35 tun.

Ověříme to výpočtem: 105 : 3 = 35.

Odpověď: Na první hromadě bylo 130 tun, na druhé 95 tun a na třetí 35 tun písku.

Porovnání způsobů řešení slovní úlohy

Pokud má řešitel zvládnutou problematiku lineárních rovnic, uchyluje se nejčastěji ke způsobu řešení slovní úlohy rovnicí. Pokud řešitel tuto problematiku zvládnutou nemá, používá jiné způsoby řešení, nejčastěji řešení úsudkem.

Předpokládáme, že řešitel správně pochopil text úlohy, správně určil vztahy mezi danými a hledanými údaji. Řešení lineární rovnicí ho bez větších problémů dovede ke správnému výsledku. Pokud řešitel zvolil způsob řešení slovní úlohy úsudkem, mohou nastat různé problémy v průběhu řešení.

Pro řešení této slovní úlohy jsem zvolila dva časté způsoby řešení, řešení aproximací a aritmetické řešení. Oba způsoby řešení mají různé výhody a nevýhody. U řešení aproximací je nebezpečí, že řešitel zvolí nepřehlednou formu zápisu dílčích výsledků, mezi kterými nenajde potřebné vztahy ke správnému vyřešení slovní úlohy.

U aritmetického způsobu řešení je nebezpečí v tom, že řešitel špatně převede zadání slovní úlohy na početní příklad. V této úloze jsem zvolila grafické znázornění, které pomůže řešiteli správně sestavit početní příklad.

Z porovnání vyplývá, že řešení lineární rovnicí je pro řešitele bezpečným způsobem, jak dosáhnout správného výsledku, pokud má zvládnutou problematiku lineárních rovnic. Pokud ji zvládnutou nemá, uchyluje se ke způsobu řešení úsudkem.

6.1.2 Algebraická rovnice druhého stupně

Algebraická rovnice druhého stupně se nazývá kvadratická rovnice. Tato rovnice lze vyjádřit v obecném tvaru ($ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$) a v normovaném tvaru ($x^2 + px + q = 0$), který dostaneme tím, že rovnici v obecném tvaru vydělíme nenulovým číslem *a*.

Diskriminantem této rovnice nazýváme číslo $D = b^2 - 4ac$. Pro $D \neq 0$ má rovnice dva různé kořeny, pro $D = 0$ má rovnice jediný dvojnásobný kořen. Má-li rovnice reálné koeficienty, pak

- pro $D > 0$ má dva různé reálné kořeny;
- pro $D < 0$ má dva koplexně sdružené kořeny;
- pro $D = 0$ má jediný reálný kořen.

Tuto rovnici lze řešit dvěma způsoby:

a. rozkladem v součin kořenových činitelů

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Vietovy vzorce: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Odvození (použitím Vietových vzorců):

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - xa(x_1 + x_2) + ax_1x_2 = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) =$$

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \underline{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

b. vzorcem: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Odvození:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4c}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a} - c}\right)^2$$

$$\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a} - c}$$

$$\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

$$\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Slovní úlohy řešené kvadratickou rovnicí

Příklad: Ze stanice se má vypravit 11 vlaků, z nichž každý má po 35 vagónech. Aby se ušetřilo několik lokomotiv, zmenšili počet vlaků tím, že ke každému vlaku přidali tolikrát po pěti vagónech, kolik lokomotiv ušetřili. Tak byly opět vypraveny všechny vagóny. Kolik lokomotiv se ušetřilo, kolik vagónů měl každý vlak?

(Bušek, 1988, s. 37)

1. Řešení rovnicí

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme si neznámou x. Sestavíme kvadratickou rovnici o jedné neznámé a řešíme ji.

11 vlaků .... 385 vagónů

Ušetřených lokomotiv x

1 vlak .... (35 + 5x) vagónů

(11 - x) (35 + 5x) = 385

$385 + 55x - 35x - 5x^2 = 385$

$-5x^2 + 20x = 0$ /:(-5)

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x_1 = 0$ .... nevyhovuje

$\underline{\underline{x_2 = 4}}$

Vypočítali jsme dva kořeny, z toho zadání vyhovuje pouze jedna $x = 4$, která určuje, kolik lokomotiv jsme ušetřili. Tuto hodnotu dosadíme do zadání a vypočteme, kolik vagónů měl každý vlak.

1 vlak .... $35 + 5x = 35 + 5 \times 4 = 55$ vagónů

Výsledek zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Ušetřily se 4 lokomotivy a každý vlak měl 55 vagónů.

2. Řešení úsudkem (systematický pokus)

Vytvoříme postupně několik tabulek, kde budeme postupně ubírat po jednom vlaku a rozdělovat tolikrát po pěti vagónech ke každému vlaku, aby byl stále stejný počet všech vagónů.

Do první tabulky vepíšeme 10 vlaků (tj. o 1 méně) a rozdělíme 35 vagónů po 5. Vidíme, že vagóny nevystačí na všechny vlaky. Do druhé tabulky vepíšeme 9 vlaků (tj. o 2 méně) a rozdělíme 70 vagónů po 5. Vidíme, že opět nevystačí na všechny vlaky. Tento postup opakujeme.

Po vytvoření tabulky, kde je 7 vlaků, vidíme, že rozdělení $(11 - 7) \times 35 = 140$ vagónů vystačí na všech 7 vlaků. Z toho plyne, že jsme dospěli k výsledku.

10	5
9	5
8	5
7	5
6	5
5	5
4	5
3	
2	
1	

9	5	5
8	5	5
7	5	5
6	5	5
5	5	5
4	5	5
3	5	5
2		
1		

8	5	5	5
7	5	5	5
6	5	5	5
5	5	5	5
4	5	5	5
3	5	5	5
2	5	5	5
1			

7	5	5	5	5
6	5	5	5	5
5	5	5	5	5
4	5	5	5	5
3	5	5	5	5
2	5	5	5	5
1	5	5	5	5

Ušetřeno: $11 - 7 = 4$

Vagónů: 35 + 5 + 5 + 5 + 5 = 55

Výsledek zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Ušetřily se 4 lokomotivy a každý vlak měl 55 vagónů.

3. Řešení úsudkem (aproximací)

Vytvoříme tabulku, kde budeme v prvním sloupci postupně ubírat počet vlaků. Ve druhém sloupci přidáme vždy tolikrát po 5 vagónech, kolik lokomotiv jsme ubrali. Ve třetím sloupci vypočítáme, kolik vagónů má nově vzniklý vlak.

vlaky	vagóny/1 lokom.	vagónů
11	35	385
10	40	400
9	45	405
8	50	400
7	55	385
6	60	360
5	65	325

Z tabulky vyčteme, že pokud máme 7 vlaků, tak máme i stejný počet vagónů jako na začátku.

ušetřeno.................. 11 – 7 = 4 lokomotiv

1 vlak .... 35 + 4×5 = 55 vagónů

Nyní již pouze zformulujeme slovní odpověď.

Odpověď: Ušetřily se 4 lokomotivy a každý vlak měl 55 vagónů.

Porovnání způsobů řešení slovní úlohy

Má-li řešitel zvládnutou problematiku kvadratických rovnic, uchyluje se nejčastěji ke způsobu řešení slovní úlohy rovnicí. Předpokládáme, že řešitel správně pochopil text a vztahy úlohy. Pokud řešitel řeší slovní úlohu kvadratickou rovnicí a neudělá v řešení numerickou chybu, dospěje ke správnému řešení rovnice. Nesmí však zapomenout ověřit, zda oba výsledky odpovídají kontextu slovní úlohy. Je zde nebezpečí, že si řešitel neuvědomí, že kořen rovnice 0 není řešením slovní úlohy, protože máme zjistit, kolik se ušetří lokomotiv.

K dalším dvěma často používaným způsobům řešení, řešení systematickým pokusem a řešení aproximací, se řešitelé uchylují, pokud problematiku řešení kvadratických rovnic nemají zvládnutou. U systematického pokusu je nebezpečí, že řešitel zvolí nevhodný způsob řešení a nedospěje k výsledku, nebo jeho řešení bude dlouhé. U řešení aproximací je nebezpečí, že řešitel zvolí nepřehlednou formu zápisu dílčích výsledků, mezi kterými nenajde potřebné vztahy ke správnému vyřešení slovní úlohy.

Z porovnání vyplývá, že řešení kvadratickou rovnicí je pro řešitele bezpečným způsobem, jak dosáhnout správného výsledku, pokud má zvládnutou problematiku kvadratických rovnic. Při řešení tohoto příkladu je nejvhodnějším způsobem řešení aproximací. Řešitel nepotřebuje k řešení žádný speciální postup. Tento způsob řešení je časově nejméně náročný.

6.2 Nealgebraické rovnice

Nealgebraické rovnice jsou ostatní druhy rovnic, které nejsou algebraické. Tyto rovnice jsou velmi rozmanité. U většiny těchto rovnic neexistuje obecný vzorec pro řešení.

6.2.1 Rovnice obsahující neznámou ve jmenovateli

Máme dva mnohočleny *f*, *g*, rovnici $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$; $g(x) \neq 0$, řešíme tak, že nalezneme kořeny algebraické rovnice $f(x) = 0$. Vyloučíme kořeny rovnice $f(x) = 0$, pro které je jmenovatel zlomku na levé straně roven nule. Takto nalezneme všechny kořeny původní rovnice.

<u>Slovní úlohy řešené rovnicí obsahující neznámou ve jmenovateli</u>

<u>Příklad:</u> Cena vápna byla snížena o 5 Kčs na tuně a stavební závod dostane nyní za 9 765 Kčs o 2,1 t vápna více. Kolik stálo vápno dosud a kolik tun vápna dostával závod za uvedený obnos dosud?

(Jarník, 1969, s. 158)

1. Řešení rovnicí

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámou x. Sestavíme rovnici s jednou neznámou ve jmenovateli a řešíme ji.

původně .... x Kčs/t

nyní........................ (x – 5) Kčs/t

cena........................ 9 765 Kčs

původně................. $\frac{9765}{x}$ tun

nyní........................ $\frac{9765}{x-5}$ tun

$$\frac{9765}{x} + 2{,}1 = \frac{9765}{x-5} \quad /x(x-5)$$

Nesmíme zapomenout na podmínky existence řešení, protože máme neznámou ve jmenovateli.

$x \neq 0$

$x \neq 5$

Tuto rovnici postupnými úpravami převedeme na kvadratickou rovnici s jednou neznámou a tu dále řešíme.

$9765(x-5) + 2{,}1x(x-5) = 9765x$

Roznásobením závorek a vydělením celé rovnice číslem 2,1 dostaneme:

$x^2 - 5x - 23250 = 0$

$D = 25 + 93000 = 93025$

$\sqrt{D} = 305$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 305}{2}$ = - 150 (nevyhovuje kontextu úlohy, tj. cena není záporná)

$= \underline{\underline{155 \text{ Kčs}}}$

9765/155 = $\underline{\underline{63 \text{ t}}}$ vápna

Vypočítali jsme dvě neznámé, z toho zadání vyhovuje pouze jedna x = 155, která určuje, jaká byla cena vápna před snížením. Tuto neznámou dosadíme do zadání a vypočteme, kolik tun vápna za 9 765 Kčs dostával dříve závod. Zformulujeme slovní odpověď.

Odpověď: Cena vápna před snížením byla 155 Kčs. Za 9 765 Kčs dostával závod 63 tun vápna.

2. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Vytvoříme tabulku, kde zvolíme původní cenu vápna, dopočítáme příslušnou novou cenu a spočítáme, kolik vápna dostal závod v obou případech za 9 765 Kčs. Do posledního sloupce zapíšeme rozdíl toho, kolik tun dostal závod dříve a dnes.

původní cena	za 9765,-	nová cena	za 9765,-	rozdíl za 9765,-
50	195,3	45	217	21,7
100	97,65	95	102,7895	5,139473684
150	65,1	145	67,34483	2,244827586
200	48,825	195	50,07692	1,251923077
160	61,03125	155	63	1,96875
151	64,668874	146	66,88356	2,214687472
152	64,243421	147	66,42857	2,185150376
153	63,823529	148	65,97973	2,156200318
154	63,409091	149	65,53691	2,127821843
155	63	150	65,1	2,1
156	62,596154	151	64,66887	2,072720326

Nejprve volíme původní cenu po padesáti a porovnáváme poslední sloupec s rozdílem 2,1. Vidíme, že toto číslo je mezi cenou 150 a 200. Začneme zvyšovat původní cenu např. po deseti. Již u 160 vidíme, že rozdíl 2,1 je mezi 150 a 160. Začneme zvyšovat původní cenu např. po jedné. Z tabulky opět vyčteme, že rozdíl 2,1 je, když je původní cena 155 Kčs. V tabulce také vidíme odpověď na druhou otázku. Za 9 765 Kčs dostával závod 63 tun.

Odpověď: Cena vápna před snížením byla 155 Kčs. Za 9 765 Kčs dostával závod 63 tun vápna.

Porovnání způsobů řešení slovní úlohy

Řešení této slovní úlohy vede k řešení rovnicí s neznámou ve jmenovateli. Pokud řešitel pochopil údaje v této slovní úloze, pak tento způsob řešení je jednoduchý na porozumění. Je zde nebezpečí toho, že řešitel zapomene na podmínky existence některého zlomku. Pokud řešitel neprovede zkoušku, může získat jedno, či více, nesprávných řešení.

Aritmetický způsob řešení je v řešení této slovní úlohy neefektivní a je zde velká pravděpodobnost, že se řešitel splete a dospěje ke špatnému výsledku, nebo se nedopočítá výsledku žádného.

6.2.2 Rovnice s absolutními hodnotami

Obsahují-li rovnice absolutní hodnoty výrazů s neznámou v oboru R, řeší se tak, že užitím definice absolutní hodnoty reálného čísla se převedou na soustavu rovnic bez absolutních hodnot.

Definice absolutní hodnoty reálného čísla zní: *„K libovolnému reálnému číslu a se přiřazuje reálné číslo* $|a|$ *zvané absolutní hodnota čísla a. Definice: je-li* $a \geq 0$*, pak* $|a| = a$ *(tj. číslo samo), je-li a < 0, pak* $|a| = -a$ *(tj. číslo opačné).“* (Polák, 1980, s. 30)

Základní vlastnosti absolutní hodnoty:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
5. $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

<u>Slovní úlohy řešené rovnicí s absolutní hodnotou</u>

<u>Příklad:</u> Řešte v **R** rovnici $\frac{|x+2|}{|x+6|} = \frac{|x-1|}{|x-4|}$.

(Bušek, 1988, s. 66)

<u>1. Řešení rovnicí</u>

Určíme podmínky existence výrazu:

$x \neq -6$

$x \neq 4$

Zadanou rovnici vynásobíme jmenovateli zlomků a vyjádříme ji ve tvaru:

$|(x+2)(x-4)| = |(x-1)(x+6)|$

Z vlastností absolutní hodnoty plynou dvě rovnice:

$(x + 2)(x - 4) = (x – 1)(x + 6) \;\vee\; (x + 2)(x - 4) = - (x – 1)(x + 6)$

$x^2 - 2x - 8 = x^2 + 5x - 6 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 8 = - x^2 - 5x + 6$

$- 7x = 2 \quad \vee \quad 2x^2 + 3x - 14 = 0$ (D = 121, $\sqrt{D} = 11$, $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 11}{4}$)

$x_1 = - \frac{2}{7} \quad \vee \quad x_2 = 2,\ x_3 = - \frac{7}{2}$

Zkouška:

- $x_1 = - \frac{2}{7}$: $L(- \frac{2}{7}) = \frac{\left|-\frac{2}{7}+2\right|}{\left|-\frac{2}{7}+6\right|} = \frac{\left|\frac{12}{7}\right|}{\left|\frac{40}{7}\right|} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

  $P(- \frac{2}{7}) = \frac{\left|-\frac{2}{7}-1\right|}{\left|-\frac{2}{7}-4\right|} = \frac{\left|-\frac{9}{7}\right|}{\left|-\frac{30}{7}\right|} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

  $\underline{\underline{L = P}}$

- $x_2 = 2$: $L(2) = \frac{|2+2|}{|2+6|} = \frac{|4|}{|8|} = \frac{1}{2}$

  $P(2) = \frac{|2-1|}{|2-4|} = \frac{|1|}{|-2|} = \frac{1}{2}$

  $\underline{\underline{L = P}}$

- $x_3 = - \frac{7}{2}$: $L(- \frac{7}{2}) = \frac{\left|-\frac{7}{2}+2\right|}{\left|-\frac{7}{2}+6\right|} = \frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{\left|\frac{5}{2}\right|} = \frac{3}{5}$

  $P(-\frac{7}{2}) = \frac{\left|-\frac{7}{2}-1\right|}{\left|-\frac{7}{2}-4\right|} = \frac{\left|-\frac{9}{2}\right|}{\left|-\frac{15}{2}\right|} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

  $\underline{\underline{L = P}}$

Provedením zkoušky jsme ověřili, že všechna tři řešení jsou správná.

$$\underline{\underline{P = \left\{-\frac{7}{2}, -\frac{2}{7}, 2\right\}}}$$

2. Řešení rovnicí a tabulkou

Určíme podmínky existence výrazu:

$x \neq -6$

$x \neq 4$

Zadanou rovnici vynásobíme jmenovateli zlomků a vyjádříme ji ve tvaru:

$|x+2||x-4| = |x-1||x+6|$

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot. Tyto body rozdělí R na pět intervalů, v nichž výrazy v absolutní hodnotě nemění znaménko.

$x_0 \in \{-6, -2, 1, 4\}$

$I_1 = (-\infty; -6\rangle$, $I_2 = (-6; -2\rangle$, $I_3 = (-2; 1\rangle$, $I_4 = (1; 4\rangle$, $I_5 = (4; +\infty\rangle$

Vytvoříme tabulku, kde v prvním sloupci jsou jednotlivé intervaly, v prvním řádku jednotlivé výrazy z absolutních hodnot. Do tabulky doplňujeme + nebo - podle toho, jakých hodnot výraz v daném intervalu nabývá.

	x + 2	x - 4	x - 1	x + 6
I_1	-	-	-	-
I_2	-	-	-	+
I_3	+	-	-	+
I_4	+	-	+	+
I_5	+	+	+	+

V každém intervalu řešíme rovnici, ve které nahradíme absolutní hodnoty příslušnými výrazy bez absolutních hodnot. Pokud výraz v daném intervalu nabývá záporných hodnot, vynásobíme tento výraz -1. Pokud nabývá kladných hodnot, výraz se nemění. Jednotlivé výrazy mezi sebou násobíme (ze zadání).

V každém intervalu musíme zjistit, zda je řešení rovnice z tohoto intervalu. Pokud není, oborem pravdivosti v daném intervalu je prázdná množina.

$I_1 = (-\infty; -6\rangle$: $(-x-2)(-x+4) = (-x+1)(-x-6)$

$x^2 - 2x - 8 = x^2 + 5x - 6$

$-7x = 2$

$x = -\frac{2}{7}$ (není z I_1)

$P_1 = \{\ \}$

$I_2 = \left(-6;-2\right\rangle$: $(-x-2)(-x+4) = (-x+1)(x+6)$

$x^2 - 2x - 8 = -x^2 - 5x + 6$

$2x^2 + 3x - 14 = 0$ ($D = 121$, $\sqrt{D} = 11$)

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 11}{4} = -\frac{7}{2}$ a 2 (není z I_2)

$P_2 = -\frac{7}{2}$

$I_3 = \left(-2;1\right\rangle$: $(x+2)(-x+4) = (-x+1)(x+6)$

$-x^2 + 2x + 8 = -x^2 - 5x + 6$

$7x = -2$

$x = -\frac{2}{7}$

$P_3 = -\frac{2}{7}$

$I_4 = \left(1;4\right\rangle$: $(x+2)(-x+4) = (x-1)(x+6)$

$-x^2 + 2x + 8 = x^2 + 5x - 6$

$-2x^2 - 3x + 14 = 0$ ($D = 121$, $\sqrt{D} = 11$)

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 11}{-4} = -\frac{7}{2}$ (není z I_4) a 2

$P_4 = 2$

$I_5 = \left(4;+\infty\right\rangle$: $(x+2)(x-4) = (x-1)(x+6)$

$x^2 - 2x - 8 = x^2 + 5x - 6$

$-7x = 2$

$x = -\frac{2}{7}$ (není z I_5)

$P_5 = \{\ \}$

$$\underline{\underline{P = \left\{-\frac{7}{2}, -\frac{2}{7}, 2\right\}}}$$

6.2.3 Iracionální rovnice

Iracionální rovnice jsou rovnice, kde se výrazy obsahující neznámou vyskytují pod odmocninou. Neumíme-li iracionální rovnici zjednodušit jinak, upravíme ji umocněním jejích obou stran na rovnici algebraickou. K těmto úpravám lze přistupovat dvojím způsobem:

1. *„Jako k úpravám důsledkovým, pak je nutnou součástí řešení zkouška, která z možných kořenů vybere skutečné kořeny dané rovnice.“*
2. *„Jako k úpravám ekvivalentním, pak je třeba stanovit podmínky (dané nerovnicemi), za nichž nastává ekvivalence původní a upravené rovnice. Tento postup je však vhodný jen u jednodušších iracionálních rovnic.“*

(Polák, 1980, s. 200)

Slovní úlohy řešené iracionální rovnicí

Příklad: Od čtverce oddělujeme jeho části, jednou získáme obrazec s obsahem o 9 m^2 menším, podruhé obrazec s obsahem o 24 m^2 menším. Sestrojíme-li čtverce, jejichž obsahy jsou rovny obsahům získaných obrazců, je součet délky strany prvního a délky strany druhého čtverce roven délce strany původního čtverce. Jaký je obsah původního čtverce?

(Bušek, 1988, s. 28)

1. Řešení rovnicí

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámou x. Sestavíme iracionální rovnici o jedné neznámé a řešíme ji.

původní .... x m^2
1. obrazec.............. $(x - 9)$ m^2
2. obrazec.............. $(x - 24)$ m^2

Ze zadání víme, že součet stran nových čtverců se má rovnat délce strany původního čtverce, tedy

$\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = \sqrt{x}$

Nesmíme zapomenout na podmínky existence odmocniny.

$x \geq 0 \wedge x \geq 9 \wedge x \geq 24$, tj.

$\underline{\underline{x \geq 24}}$

$\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = \sqrt{x}$ $/^2$

$x - 9 + \sqrt{(x-9)(x-24)} + x - 24 = x$

$x - 33 = - 2\sqrt{x^2 - 33x + 216}$ $/^2$

$x^2 - 66x + 1089 = 4(x^2 - 33x + 216)$

$3x^2 - 66x - 225 = 0$

$(x - 25)(x + 3) = 0$

$x_1 = -3$ nevyhovuje podmínkám

$\underline{\underline{x_2 = 25}}$

$L(25) = \sqrt{16} + \sqrt{1} = 5$

$P(25) = \sqrt{25} = 5$

$\underline{\underline{L = P}}$

Výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Původní čtverec má obsah 25 m^2.

2. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Vytvoříme tabulku, kde volíme délku strany původního čtverce a dopočítáváme délky stran nových obrazců. Dále počítáme obsahy všech čtverců a součet stran nových čtverců.

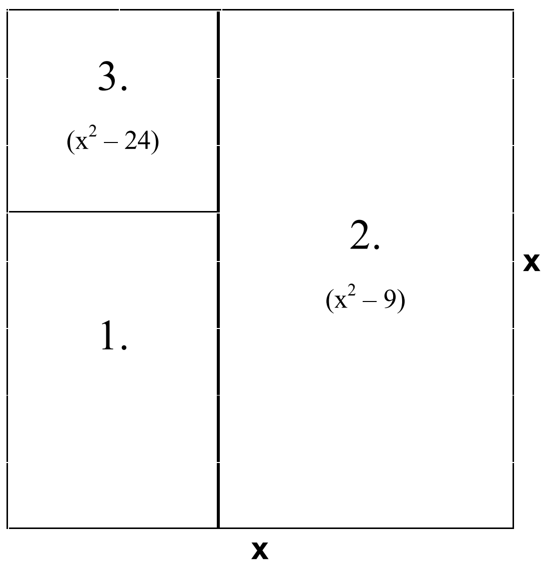
strana 1.	**obsah 1.**	**obsah 2.** (-9)	**strana 2.**	**obsah 3.** (-24)	**strana 3.**	**strana 2. + strana 3.**
1	1	-8	nelze	-23	nelze	nelze
2	4	-5	nelze	-20	nelze	nelze
3	9	0	0	-15	nelze	nelze
4	16	7	2,645751	-8	nelze	nelze
5	25	16	4	1	1	5
6	36	27	5,196152	12	3,464102	8,660254038
7	49	40	6,324555	25	5	11,32455532
8	64	55	7,416198	40	6,324555	13,74075381
9	81	72	8,485281	57	7,549834	16,03511581
10	100	91	9,539392	76	8,717798	18,2571899
11						
12						

Ze zadání víme, že součet stran nových čtverců se má rovnat délce strany původního čtverce. Z tabulky vyčteme, že je to tehdy, pokud původní čtverec má délku strany 5 m a obsah 25 m^2.

Odpověď: Původní čtverec má obsah 25 m^2.

3. Řešení úsudkem (obrázkem)

Nakreslíme obrázek, který vystihuje situaci ze zadání.



Z obrázku ze zadání vyčteme různé vztahy:

$S = x^2$

$S_2 = x^2 - 9$

$\underline{S_3 = x^2 - 24}$

$S_1 = S - S_2 - S_3$

$S_1 = x^2 - x^2 + 9 - x^2 + 24$

$S_1 = - x^2 + 33$

$x^2 < 33 \Rightarrow x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Vyzkoušíme všechna x:

$\mathbf{S_2 = x^2 - 9}$

$1^2 - 9 < 0$

$2^2 - 9 < 0$

$3^2 - 9 < 0$

$\underline{4^2 - 9 = 7}$

$\underline{5^2 - 9 = 16}$

$\mathbf{S_3 = x^2 - 24}$

$4^2 - 24 < 0$

$\underline{5^2 - 24 = 1} \Rightarrow \underline{x = 5}$

$\underline{\underline{S = 25}}$

Výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Původní čtverec má obsah 25 m^2.

Porovnání způsobů řešení slovní úlohy

Řešení rovnicí v této slovní úloze vede k řešení iracionální rovnicí. Při tomto řešení je nebezpečí, že řešitel zapomene na podmínky existence odmocniny a dospěje ke špatným výsledkům. Další chybou může být, že řešitel výsledky iracionální rovnice neporovná se zadáním úlohy a zapomene vyloučit záporný kořen. (Máme zjistit obsah původního čtverce, který nemůže být záporný.)

Aritmetické řešení je v této úloze neúčelné a zdlouhavé. Je důležité, aby řešitel zvolil přehlednou grafickou úpravu postupu řešení. Pokud tak neučiní, je zde velká pravděpodobnost, že nedospěje k výsledku, nebo k němu dospěje za dlouhou dobu.

Považuji za nejpřehlednější a nejefektivnější řešení mnou navrhovaný třetí způsob řešení, řešení pomocí obrázku. V tomto způsobu je jen třeba, aby se řešitel správně orientoval v zadání úlohy, dovedl ho zakreslit do obrázku a znal vzorce pro obsah čtverce a obdélníka.

6.2.4 Transcendentní rovnice

Transcendentní rovnice jsou rovnice, kde se neznámá vyskytuje v transcendentní funkci. Transcendentní funkce jsou například exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce. Při řešení transcendentních rovnic je třeba vždy vyloučit, které hodnoty neznámé nepatří do oboru hodnot funkcí, které stojí na obou stranách rovnice. Zkouška je zde nutná.

6.2.4.1 Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnice mají neznámou v mocniteli. Nejčastěji se řeší logaritmováním, kterým se je snažíme převést na rovnice algebraické. Také se řeší za využití vlastnosti mocnin: *„Rovnají-li se sobě dvě mocniny se stejným základem (který je kladný a není roven číslu 1), rovnají se sobě i jejich mocnitele.“* (Jarník, 1969, s. 109)

Slovní úlohy řešené exponenciální rovnicí

Příklad: Řešte v **R** rovnici $2^x\left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}+2^{1-x}\left(\frac{1}{8}\right)^{x}=1$.

(Bušek, 1988, s. 86)

Řešení rovnicí:

$$2^x\left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}+2^{1-x}\left(\frac{1}{8}\right)^{x}=1$$

Všechny mocniny převedeme na mocniny o základu 2.

$$2^x\cdot 2^{-3(1-x)}+2^{1-x}\cdot 2^{-3x}=1$$

$$2^{4x-3}+2^{1-4x}=1$$

$$\frac{2^{4x}}{2^3}+\frac{2}{2^{4x}}=1\ldots/\cdot 2^3\cdot 2^{4x}$$

$$2^{4x}\cdot 2^{4x}+2\cdot 2^3=2^3\cdot 2^{4x}$$

$$2^{8x}+2^4=8\cdot 2^{4x}$$

$$2^{8x}-8\cdot 2^{4x}+16=0$$

Zavedeme substituci:

$$\underline{y=2^{4x}}$$

$$y^2-8y+16=0$$

$$(y-4)^2=0$$

$$y=4$$

$$4=2^{4x}$$

$$2^2=2^{4x}$$

$$2=4x$$

$$\underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$$

Zkouška:

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{2}}+2^{1-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}*2^{-3*\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}*2^{-3*\frac{1}{2}}=2^{-1}+2^{-1}=1$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\underline{\underline{\mathrm{L}=\mathrm{P}}}$$

Zkouškou jsme ověřili správnost výpočtu a můžeme tedy napsat obor pravdivosti.

$$\underline{\underline{P=\left\{\frac{1}{2}\right\}}}$$

6.2.4.2 Logaritmická rovnice

Logaritmická rovnice je nealgebraická rovnice, která obsahuje neznámou v argumentu logaritmu. V logaritmické rovnici se aspoň na jedné straně rovnice nachází logaritmická funkce. Některé rovnice lze převést vhodnými neekvivalentními úpravami na algebraické rovnice, také proto je vždy nutné ověřit správnost výsledku zkouškou.

Slovní úlohy řešené logaritmickou rovnicí

Příklad: Řešte v **R** rovnici $4\log_3(2x+1)+\log_3\sqrt{2x+1}=\frac{3}{2}\log_3^2(2x+1)-6$.

(Petáková, 2003, s. 35)

Řešení rovnicí:

$$4\log_3(2x+1)+\log_3\sqrt{2x+1}=\frac{3}{2}\log_3^2(2x+1)-6$$

Stanovíme hodnoty, ve kterých nejsou logaritmus a odmocnina definovány.

$2x+1>0 \;\Rightarrow\; x>-\frac{1}{2}$

Nejprve upravíme logaritmy podle známých pravidel a poté zavedeme substituci. Vznikne kvadratická rovnice o jedné neznámé, kterou dále řešíme.

$$4\log_3(2x+1)+\frac{1}{2}\log_3(2x+1)=\frac{3}{2}\log_3^2(2x+1)-6$$

$$\underline{\log_3(2x+1)=y}$$

$$4y+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}y^2-6\ldots/\cdot 2$$

$$8y+y=3y^2-12$$

$$3y^2-9y-12=0\ldots/:3$$

$$y^2-3y-4=0$$

$$(y+1)(y-4)=0$$

$$\underline{y_1=-1}$$

$$\underline{y_2=4}$$

$$\log_3(2x+1)=-1$$

$$\log_3(2x+1)=\log_3\frac{1}{3}$$

$$2x+1=\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{3}}}$$

$$\log_3(2x+1) = 4$$
$$\log_3(2x+1) = \log_3 81$$
$$2x+1 = 81$$
$$\underline{\underline{x_2 = 40}}$$

$$\underline{\underline{P = \left\{-\frac{1}{3}; 40\right\}}}$$

6.2.4.3 Goniometrické rovnice

„Goniometrickými rovnicemi nazýváme rovnice, které kromě konstant obsahují neznámou x nebo výrazy s neznámou x jako argumenty jedné nebo několika goniometrických funkcí, tj. rovnice tvaru f(sin x, cos x, tg x, cotg x, x) = 0.

Základní goniometrickou rovnicí s neznámou x nazýváme rovnici typu g(x) = k, kde g je goniometrická funkce a k je reálné číslo.

Vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí má každá základní goniometrická rovnice buď prázdný, nebo nekonečný obor pravdivosti.“ (Bartsch, 2006, s. 372 - 373)

„Složitější goniometrické rovnice řešíme převedením na základní goniometrické rovnice. Toho dosahujeme nejčastěji zavedením pomocné neznámé nebo užitím vzorců pro goniometrické funkce.“ (Polák, 1980, s. 211)

Slovní úlohy řešené goniometrickou rovnicí

Příklad: Určete velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno
a = 16,9 cm, *b* = 26 cm, *c* = 27,3 cm.

(Odvárko, 1997, s. 102)

Řešení rovnicí

Jediný vhodný a pro řešitele efektivní způsob řešení této slovní úlohy je řešení goniometrickou rovnicí za použití kosinové věty.

Nejdříve ověříme, má-li daná úloha řešení, tj. je-li splněna trojúhelníková nerovnost pro délky stran trojúhelníku. Sestavíme rovnice pomocí kosinové věty ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, kde α je vnitřní úhel proti straně BC).

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{26^2 + 27{,}3^2 - 16{,}9^2}{2 \cdot 26 \cdot 27{,}3}$$

$$\cos\alpha = 0{,}8$$

$$\underline{\underline{\alpha = 36°50'}}$$

Stejným způsobem vypočítáme úhel β.

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\underline{\underline{\beta = 67°20'}}$$

Velikost třetího úhlu vypočítáme ze vztahu:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

$$\underline{\underline{\gamma = 75°50'}}$$

Odpověď: Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka jsou: $\alpha = 36°50'$, $\beta = 67°20'$ a $\gamma = 75°50'$.

6.3 Soustavy rovnic

Soustava rovnic je množina rovnic, ve které mají být rovnice splněny současně. V této práci rozděluji soustavy na dvě skupiny soustav rovnic, jsou to soustavy lineárních rovnic a soustavy nelineárních rovnic.

Definice soustavy rovnic zní: *„Soustavou k rovnic o n neznámých* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *rozumíme k rovnic* $V_1 = W_1, V_2 = W_2, \ldots, V_k = W_k$, *po řadě s množinami řešení* $P_1, P_2, \ldots, P_k$. *Množinou řešení této soustavy rozumíme množinu* $P = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_k$*.“* (Novotná, Trch, 2004, s. 52)

Soustavy rovnic se nazývají ekvivalentní, mají-li stejnou množinu řešení. Ekvivalentní úpravy soustavy (tj. úpravy převádějící danou soustavu na soustavu s ní ekvivalentní) jsou:

1. *„nahrazení kterékoli rovnice rovnicí s ní ekvivalentní“*
2. *„přičtení libovolného násobku jedné rovnice k jiné rovnici soustavy“*
3. *„vypuštění rovnice, která je ekvivalentní s některou jinou rovnicí soustavy“*
4. *„záměnou pořadí rovnic“*

(Novotná, Trch, 2004, s. 52)

6.3.1 Soustavy lineárních rovnic

„Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme soustavu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

($a_{11},\ldots,a_{mn},b_1,\ldots,b_m$ jsou daná reálná čísla, resp. komplexní čísla).

Řešením soustavy se nazývá každá taková uspořádaná n-tice (reálných, resp. komplexních) čísel $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, tj. n-členný vektor, že při dosazení čísel $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ za neznámé $x_1,\ldots, x_n$ jsou splněny všechny rovnice soustavy.“ (Rektorys, 1981, s. 61)

„Soustava m homogenních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$$

*má vždy nulové (triviální) řešení **0** = (0, 0,…, 0).“* (Rektorys, 1981, s. 62)

„Má-li soustava řešení $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, má i řešení $\alpha\xi = (\alpha\xi_1,\ldots,\alpha\xi_n)$, kde α je libovolné reálné, resp. komplexní číslo. Jsou-li vektory $\xi^{(1)} = (\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_n^{(1)}),\ldots,\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)},\ldots,\xi_n^{(k)})$ řešeními soustavy, pak každá jejich lineární kombinace $\alpha_1\xi^{(1)} + \alpha_2\xi^{(2)} + \ldots + \alpha_k\xi^{(k)}$ je řešením soustavy.“ (Rektorys, 1981, s. 62)

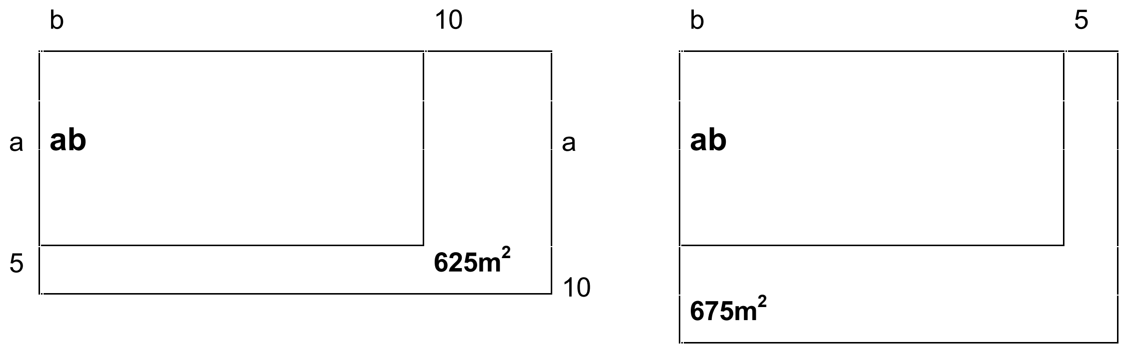
Slovní úlohy řešené soustavou lineárních rovnic

Příklad: Zvětšíme-li šířku obdélníka o 5 m a délku obdélníka o 10 m, zvětší se jeho obsah o 625 m^2; zvětšíme-li šířku o 10 m a délku o 5 m, zvětší se jeho obsah o 675 m^2. Jaké jsou rozměry obdélníka?

(Janeček, 2006, s. 98)

1. Řešení obrázkem a soustavou dvou lineárních rovnic

Nakreslíme obrázek, podle informací ze zadání.



$5b + 10a + 5 \cdot 10 = 625$ $\qquad$ $5a + 10b + 5 \cdot 10 = 675$

Sestavíme rovnice podle obrázku a tuto soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých řešíme.

$5b + 10a = 575$ /:5

$\underline{5a + 10b = 625}$ /:5

$2a + b = 115$

$\underline{a + 2b = 125} \Rightarrow a = 125 - 2b$

$2(125 - 2b) + b = 115$

$250 - 4b + b = 115$

$-3b = -135$

$\underline{\underline{b = 45}}$

$a = 125 - 2 \cdot 45$

$\underline{\underline{a = 35}}$

Nyní už stačí jen zformulovat slovní odpověď.

Odpověď: Rozměry obdélníka jsou 35 m a 45 m.

2. Řešení soustavou nelineárních rovnic

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámé x a y. Sestavíme nelineární rovnice o dvou neznámých, které musí platit současně. Převedeme soustavu dvou nelineárních rovnic na soustavu dvou lineárních rovnic a tuto soustavu řešíme.

šířka ....(x + 5) m .... (x + 10) m

délka ....(y + 10) m........... (y + 5) m

obsah...........(xy + 625) m^2...... (xy + 675) m^2

$(x + 5)(y + 10) = xy + 625$

$\underline{(x + 10)(y + 5) = xy + 675}$

$xy + 10x + 5y + 50 = xy + 625$

$\underline{xy + 5x + 10y + 50 = xy + 675}$

$10x + 5y = 575$

$\underline{5x + 10y = 625} \; / \cdot (-2)$

$10x + 5y = 575$

$\underline{-10x - 20y = -1250}$

$15y = 675$

$\underline{\underline{y = 45 \text{ m}}}$

$10x + 5 \cdot 45 = 575$

$10x = 350$

$\underline{\underline{x = 35 \text{ m}}}$

Výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Rozměry obdélníka jsou 35 m a 45 m.

3. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Vytvoříme tabulku, kam do sloupců budeme zapisovat rozměry útvarů. Šířku a délku původního obdélníka libovolně volíme a dopočítáváme zbylé hodnoty.

š	**d**	**S**	**š + 5**	**d + 10**	**S_1**	**š + 10**	**d + 5**	**S_2**	**S_1 - S**	**S_2 - S**
10	20	200	15	30	450	20	25	500	250	300
20	30	600	25	40	1000	30	35	1050	400	450
30	40	1200	35	50	1750	40	45	1800	550	600
40	50	2000	45	60	2700	50	55	2750	700	750

Z posledních dvou sloupců vidíme, že šířka původního obdélníka je mezi 30 a 40 a délka 40 a 50. Proto zkusíme například různé možnosti po pěti, teprve pokud nezjistíme výsledek, zkusíme měnit rozměry po jedné.

š	d	S	š + 5	d + 10	S_1	š + 10	d + 5	S_2	S_1 - S	S_2 - S
35	40	1400	40	50	2000	45	45	2025	600	625
40	45	1800	45	55	2475	50	50	2500	675	700
35	45	1575	40	55	2200	45	50	2250	625	675

Z prvního řádku vidíme, že je jeden rozměr správný, ale nevíme jaký. Proto zvětšíme oba rozměry například o 5 a opět vidíme, že je jen jeden rozměr správný. Nyní již z prvního a druhého řádku známe výsledek, ale ještě ho ověříme.

Známe tedy rozměry původního obdélníka a můžeme zformulovat slovní odpověď.

Odpověď: Rozměry obdélníka jsou 35 m a 45 m.

Porovnání způsobů řešení slovní úlohy

Předpokládáme, že řešitel správně pochopil text úlohy, správně určil vztahy mezi danými a hledanými údaji. K prvním dvěma způsobům řešení slovní úlohy je třeba, aby měl řešitel zvládnutou problematiku řešení soustavy rovnic. Pokud ji řešitel zvládnutou má, tak tyto způsoby řešení ho bez velkých problému dovedou ke správnému výsledku řešení slovní úlohy. Po získání vhledu do problematiky slovní úlohy je způsob řešení obrázkem a soustavou dvou lineárních rovnic časově výhodnější než řešení soustavou dvou nelineárních rovnic bez nakreslení obrázku.

Tuto slovní úlohu řešitelé často řeší i úsudkem. Použije-li řešitel aritmetické řešení je nutné, aby zvolil vhodný způsob řešení a zápisu dílčích výsledků. Řešení úsudkem je časově náročné a často vede ke špatnému řešení slovní úlohy.

6.3.2 Soustavy nelineárních rovnic

Soustava nelineárních rovnic je soustava rovnic, kde aspoň jedna rovnice není lineární. Soustavy nelineárních rovnic mohou obsahovat i rovnice nealgebraické.

Otázka řešitelnosti soustav nelineárních rovnic je složitá. Může nastat případ, kdy daná soustava nemá žádné řešení, nebo také může mít 1, 2, 3, 4, … až nekonečně mnoho řešení.

Při řešení soustavy dvou algebraických rovnic o dvou neznámých se můžeme řídit tímto tvrzením: *„Počet řešení soustavy dvou algebraických rovnic o dvou neznámých je roven nejvýše součinu stupňů obou rovnic nebo je nekonečný.“* (Jarník, 1969, s.221)

Slovní úlohy řešené soustavou nelineárních rovnic

Příklad: Jsou dány dva čtverce: rozdíl délek jejich stran je 3 cm a součet jejich obsahů je 65 cm^2. Určete délky stran čtverců.

(Benda, 1979, s. 32)

1. Řešení soustavou rovnic

Ze zadání vypíšeme, co víme a co máme zjistit. Sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, z nichž jedna je lineární a druhá kvadratická, a řešíme ji.

1. čtverec: délka strany............ a

obsah .... a^2

2. čtverec: délka strany............ b

obsah .... b^2

$a - b = 3 \Rightarrow a = 3 + b$

$a^2 + b^2 = 65$

$(3 + b)^2 + b^2 = 65$

$9 + 6b + b^2 + b^2 = 65$

$2b^2 + 6b - 56 = 0 \quad /:2$

$b^2 + 3b - 28 = 0$

$(b - 4)(b + 7) = 0$

$b_1 = -7$ (nevyhovuje kontextu úlohy, délka nemůže být záporná)

$b_2 = 4$

$a = 3 + b$

$a = 3 + 4$

$a = 7$

Odpověď: Délky stran čtverců jsou 4 cm a 7 cm.

2. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Sestavíme tabulku, ve které budeme mít délky stran a obsahy obou čtverců a také součet jejich obsahů. Délku strany jednoho čtverce volíme a ostatní dopočítáváme.

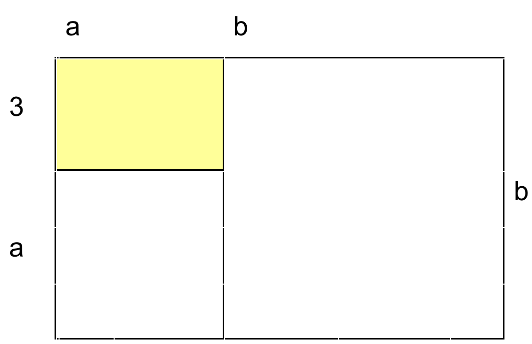
a	b	S_a	S_b	$S_a + S_b$
1	4	1	16	17
2	5	4	25	29
3	6	9	36	45
4	7	16	49	65
5	8	25	64	89
6	9	36	81	117
7	10	49	100	149
8	11	64	121	185
9	12	81	144	225
10	13	100	169	269

Ze zadání víme, že součet obsahů čtverců má být 65 cm^2. Z tabulky vyčteme, že to platí pro čtverce o stranách délek 4 cm a 7 cm.

Odpověď: Délky stran čtverců jsou 4 cm a 7 cm.

<u>3. Řešení úsudkem (obrázkem)</u>

Nakreslíme obrázek podle informací ze zadání.



Z obrázku můžeme vyčíst různé vztahy, které zapíšeme pomocí vzorců.

$S = (b - 3 + b) \cdot b$

$S = 2b^2 - 3b$

$\underline{a = b - 3}$

$S - 3a = 65$

$S - 3(b - 3) = 65$

$2b^2 - 3b - 3b + 9 = 65$

$b^2 - 3b - 28 = 0$

$(b + 4)(b - 7) = 0$

$b_1 = -4$ nevyhovuje (délka nemůže být záporná)

$\underline{\underline{b_2 = 7}}$

$a = b - 3$

$\underline{\underline{a = 4}}$

Zformulujeme slovní odpověď.

Odpověď: Délky stran čtverců jsou 4 cm a 7 cm.

Porovnání způsobů řešení slovní úlohy

Předpokládáme, že řešitel správně pochopil text úlohy, správně určil vztahy mezi danými a hledanými údaji. Řešení soustavou rovnic vyžaduje, aby měl řešitel zvládnutou problematiku řešení soustav nelineárních rovnic. Po získání vhledu do problematiky této slovní úlohy, je řešení soustavou rovnic nejefektivnějším způsobem řešení.

Aritmetické řešení je v této úloze neúčelné a zdlouhavé. Je důležité, aby řešitel zvolil přehlednou grafickou úpravu postupu řešení. Pokud tak neučiní, je zde velká pravděpodobnost, že nedospěje k výsledku, nebo k němu dospěje za dlouhou dobu.

Řešení pomocí obrázku je pro řešitele nenáročné. Pokud správně zapíše vztahy mezi údaji do vzorců.

Závěr

Cíl práce, který jsem si vytyčila v úvodu, tj. vytvořit ucelenou představu o slovních úlohách zaměřenou na úlohy řešené rovnicí či soustavou rovnic, považuji za splněný. Zpracovala jsem téma, které se dotýká různých postupů řešení slovních úloh. Více pozornosti jsem věnovala řešení slovních úloh rovnicí a soustavou rovnic.

Nejprve jsem uvedla různé pohledy na problematiku slovních úloh autorů, z jejichž děl jsem čerpala. V dalších částech práce jsem uvedla základní typy rovnic a soustav rovnic. Ke každému typu rovnice jsem uvedla jednu typickou slovní úlohu a její řešení rovnicí či soustavou rovnic. U některých slovních úloh jsem uvedla i další způsoby řešení, např. řešení úsudkem. Jednotlivé způsoby řešení jsem porovnala z různých pohledů.

V budoucnu chci v této práci pokračovat. Zaměřím se na řešení slovních úloh rovnicí či soustavou rovnic studenty na různých typech škol a budu analyzovat jejich řešení.

Použitá literatura

BARTSCH, H.: *Matematické vzorce.* Praha, Academia 2006.

BENDA, P. - DAŇKOVÁ, B. - SKÁLA, J.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky.* Praha, SPN 1979.

BLAŽKOVÁ, R. – MATOUŠKOVÁ, K. – VAŇUROVÁ, M.: *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty).* Brno, MU – Pedagogická fakulta 2007.

BUŠEK, I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Praha, SPN 1988.

DIVÍŠEK, J. a kol.: *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha, SPN 1989.

DRÁBEK, J. – HORA, J.: *Algebra: polynomy a rovnice.* Plzeň, Západočeská univerzita 2001.

FRANK, L. a kol.: *Matematika.* Praha, SNTL 1973.

HRUŠA, K. a kol.: *Metodika počtů pro pedagogické fakulty.* Praha, SPN 1967.

HRUŠA, K. a kol.: *Úvod do studia matematiky.* Praha, SPN 1977.

CHARVÁT, F. – ŠMELHAUS, J.: *Populární encyklopedie matematiky.* Praha, SNTL 1971.

CHARVÁT, J. – ZHOUF, J. – BOČEK, L.: *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice.* Praha, Prometheus 2006.

JANEČEK, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy.* Praha, Prometheus 2006.

JARNÍK, J. – ŠISLER, M.: *Jak řešit rovnice a jejich soustavy.* Praha, SNTL 1969.

KNÍŽE, G.: *Vztah celku a části při řešení slovních úloh.* Praha, SPN 1966.

KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice.* Praha, SPN 1990.

NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 3. část – Základy algebry.* Praha, UK v Praze 2004.

NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 1. část – Lineární algebra.* Praha, UK v Praze 2006.

NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 2. část – Polynomická algebra.* Praha, UK v Praze 2000.

NOVOTNÁ, J. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky (nejen) pro přípravu k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha, Scientia 2000.

NOVOTNÁ, J.: *Analýza řešení slovních úloh.* Praha, UK v Praze-Pedagogická fakulta 2000.

ODVÁRKO, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* Praha, SPN 1990.

ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia – Goniometrie.* Praha, Prometheus 1997.

PETÁKOVÁ, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha, Prometheus 2003.

POLÁK, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Praha, SPN 1980.

REKTORYS, K. a kol.: *Přehled užité matematiky.* Praha, SNTL 1981.

ROSSIOVÁ, A.: *Encyklopedie matematiky.* Praha, Mladá fronta 1988.

SEDLÁČEK, J. a kol.: *Slovník školské matematiky.* Praha, SPN 1981.

ŠALÁT, T.: *Malá encyklopédia matematiky.* Bratislava, Obzor 1981.

VYŠÍN, J.: *Metodika řešení matematických úloh.* Praha, SPN 1962.