Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Porovnání první knihy Euklidových Základů s Proklovým komentářem

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce: Doc. Dr. Ladislav Kvasz
Student: Veronika Svobodová

Červen 2009

Ráda bych poděkovala vedoucímu Doc. Dr. Ladislavu Kvaszovi za zapůjčení literatury ke zpracování bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou práci zpracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 30.6.2009 Veronika Svobodová

Název práce: Porovnání první knihy Euklidových Základů s Proklovým komentářem
Autor: Veronika Svobodová
Katedra: Matematiky a didaktiky matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. Dr. Ladislav Kvasz, Katedra matematiky a didaktiky matematiky pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze, M. D. Rettigové 4, Praha 1
e-mail vedoucího: kvasz@fmph.uniba.sk

Abstrakt: Tento text je určen všem, kdo se zajímají o matematiku, konkrétně geometrii v rovině. Jeho cílem je ukázat, kde se Euklid vyjádřil nepřesně a jak by to mělo být ošetřeno jinou formulací či jiným důkazem. Je strukturován tak, že bere postupně Euklidovy definice, postuláty, axiomy a tvrzení, které jsou porovnány s komentováním Prokla. Je možno shledat větší či menší rozdíly v jejich názorech, zřídka úplnou shodu. Porovnání přináší návody na zamyšlení se, že ačkoliv se daná věc zdá evidentní, je možno ji precizně dokázat.

Title: The comparison of the first book of Euclid´s Elements with the commentary of Proclus
Author: Veronika Svobodová
Department: Mathematics and didactics of mathematics
Supervisor: : Doc. Dr. Ladislav Kvasz, Katedra matematiky a didaktiky matematiky pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze, M. D. Rettigové 4, Praha 1
Supervisor´s e-mail address: kvasz@fmph.uniba.sk

Abstract: This text is indeed for everybody who is interested in mathematics, concretely in the planimetrie. The intention is to demonstrate where the Euclid´s expression is not clear and how could it be modify by another formulation or proof. The structure is the succession of Euclid´s definitions, postulates, axioms and propositions which are compared with the commentary of Proclus. It´s possible to observe less or greater difference between their oppinions but rarely the whole accord. The comparison makes the instrictions to speculate that altough the concrete thing is evident, it´s possible to prove it at great length.

OBSAH

ÚVOD

Téma práce a důvod výběru

Již slavné jméno v názvu bakalářské práce napovídá, že se bude téma týkat geometrie, první kniha Základů je konkrétně o geometrii v rovině. Euklides shromáždil za svého života mnoho pravidel nejen od napínačů provazů, kteří využívali poznatky geometrie převážně v praxi, ale i od svých učitelů matematiky. Byl prvním, kdo je uvedl v uceleném díle Základy, které jsou, dalo by se říci, jakousi biblí geometrie. Publikoval v nich definice, pravidla pro jejich užívání a vlastnosti, jež dokazoval. Ne vždy se setkal s pochopením těch, co je opisovali. Jedni několik vět vypustili, další zas pár slov přidali. Proto minulí i současní překladatelé vykládají některé pojmy různě. Kvůli tomu byly k vydáním Základů přidávány komentáře, popřípadě návrhy na jiné řešení a dokazování. Jedním, kdo do nich výrazně zasáhl, byl filozof a matematik Proklus.

Téma práce je zaměřeno na porovnání Euklidových myšlenek a toho, jak je chápal Proklus. Důvodem výběru bylo, že ačkoliv jsou Základy velmi starou knihou, jejich způsob výkladu geometrie se zachoval až dodnes. Chtěla jsem proniknout k původním zněním definic, které jsou pilířem současné školské geometrie.

Cíl práce

Cílem mé práce je porovnat Euklidovu formu a obsah první knihy Základů vydanou ve třetím století před Kristem s komentářem Prokla o osm století později. Proklus vyžadoval precizní formulace a důkazy, které podle něj Euklid ne vždy dovedl do úplného a zřejmého konce. Nesrovnalosti v jejich názorech jsou způsobeny buď opomenutím záznamů opisovačů knih, nebo zcela odlišným pohledem Proklovým na konkrétní danou věc.

Porovnávání se již zhostilo mnoho překladatelů a vědců ve více než 40 jazycích, avšak v českém jazyce se tomuto tématu věnovalo jen pár odborníků a spíše porovnávalo více staletí a autorů mezi sebou, než jen dva konkrétní. Hlavním zdrojem mi budou anglické verze Základů s komentáři vědců od Antiky po současnost.

0. PREZENTACE DVOU ÚSTŘEDNÍCH POSTAV

Kdo byl Euklides

Euklides nebo také Eukleides, zkráceně Euklid, Eukleid, je jedna z nejvýznamnějších osobností řecké matematiky. Data jeho narození a úmrtí nejsou přesně známa, různé zdroje se v jejich uvádění liší. Našla jsem, že se narodil v roce 325, ale i v roce 365 p. n. l. a zemřel v roce 260 p. n. l. (jinde 280 p. n. l.). Tato data jsou nejistá, neboť existoval ještě jeden Euklides (z Megar), který byl dříve považován za autora Základů.

Euklides (z Alexandrie) se narodil v Řecku, ale většinu života strávil v Alexandrii a Egyptě. Studoval v Athénách, kde byli jeho učiteli Eudoxos a Theaitétos. Král Ptolemaios mu nabídl práci v nové knihovně v Alexandrii, kde Euklid pravděpodobně i učil. Mezi jeho žáky bývá považován Aristoteles, avšak domněnka nikdy nebyla potvrzena.

Mezi obory, kterým se věnoval, patří základy geometrie, sférická geometrie, kuželosečky, teorie čísel a perspektiva. Hlavní dílo Základy, sestavené z 13 knih, začínají stanovením axiomů a pokračují systémem věta – důkaz, který, nejpodrobněji rozebrán, končí u axiomů. Přispělo do nich několik matematiků a filozofů, Euklid tedy není autorem všech poznatků v nich obsažených.

Obsah Základů

- 1. kniha: pojednání o základech geometrie, rovnoběžkách, trojúhelnících a rovnoběžnících, končí důkazem Pythagorovy věty
- 2. kniha: pojednání o planimetrii
- 3. kniha: pojednání o kružnici a kruhu
- 4. kniha: pojednání o tětivových a tečnových mnohoúhelnících a kružnici vepsané a opsané
- 5. kniha: pojednání o poměrech
- 6. kniha: pojednání o geometrické podobnosti
- 7. kniha: pojednání o teorii čísel - ta je budována pomocí geometrie a délek úseček
- 8. kniha: pokračování pojednání o teorii čísel
- 9. kniha: teorie čísel - prvočísla, důkaz, že prvočísel je nekonečně mnoho
- 10. kniha: teorie iracionálních čísel
- 11. kniha: stereometrie - pojednání o geometrii těles
- 12. kniha: pojednání o povrchu a objemu těles
- 13. kniha: pojednání o pravidelných (Platonských) tělesech

Kdo byl Proklus

Proklus žil v pátém století n. l. mezi lety 410 – 485 hlavně v Athénách, kam přišel po studiích v Alexandrii, aby se tam stal učitelem. Sám sebe považoval za matematika, ale byl to hlavně filozof. O jeho životě se dochovalo mnohem méně informací, než jeho komentářů, přesto je v zahraničních zdrojích uváděno, že působil jako učitel propedeutiky (tj. předmětu, který připravuje žáky pro jinou vědu), odkud vzešly jeho komentáře. Geometrii také považoval za propedeutiku, protože má široké uplatnění. Ve škole tedy dával možnost přednášet svým studentům, které poté okomentoval.

Jak jsou chápáni v současnosti

Euklides měl snahu všechny definice a tvrzení co nejprecizněji vystihnout. Nechtěl, aby v nich nějaká slova chyběla, ale ani přebývala. Přesto se mu to ne vždy úplně podařilo. U některých definic a tvrzení se tedy setkáváme s nepochopením, jak je Euklid vlastně myslel.

Například v definici přímky (úsečky). Už samotné překlady, které uvádějí jednu nebo druhou možnost, jsou toho důkazem. V překladu měly definice i tuto podobu: „Úsečka (přímka) je čára, na které leží rovnoměrně body." Nebo: „Úsečka (přímka) je to, co má svůj prostředek mezi oběma konci". Je vidět, že definice v sobě zahrnují nuance vzdálenosti, a proto se lze domnívat, že Euklid zamýšlel úsečku. Taky to lze usuzovat z toho, že se zabýval jen těmi objekty, které jsou v zorném poli geometra. Ale při pročítání propozic z angličtiny, jsem našla výrazy „finite/infinite straight line", což znamená konečná/nekonečná úsečka anebo přímka" a opět jsem váhala, jaký pojem použít. Slovní spojení „táhnout se rovně" není také nikde Euklidem ozřejměno. Moderní pojetí definuje úsečku jako část přímky, zaujímající určitou vzdálenost, což je naprosto odlišné od Euklida, ne však od Prokla. Ten poznamenal, že úsečka (přímka) souvisí se vzdáleností.

Podobně je problém s pochopením i jiných definic, např. úhel v polokruhu, který svírá oblouk kružnice s průměrem, byl tehdy chápán jako úhel, kdežto v současnosti by ho jen málokdo označil jako úhel.

1. EUKLIDOVY DEFINICE

1.1 Bod jest to, co nemá části.

Koncepce bodu podle Euklida je taková, že bod je nedělitelný, nemá tělo ani hmotnost.

Bod přirovnává k pojmu „teď“ v čase. „Teď“ netvoří v čase žádnou část. Lze určit začátek, konec i předěl nějaké doby, ale pojem sám o sobě nemá žádný rozměr (podobně jako u úsečky).

Je to dostatečná definice? Podle Prokla je bod pouze věcí sporu o tom, co je nedělitelné. Definice bodu byla sice pro tehdejší vědu postačující, na druhou stranu, obsahovala negaci (namající části). Ale i takové definice, v nichž je použito negace, vyhovují Euklidových zásadám. Proklus se domnívá, že Euklid užil negaci proto, že nedoplnil definici o to, že bod musí mít umístění. V pojednání oddělil rovinu od tělesa, přímku od roviny a nakonec bod od přímky. Zatímco těleso má dimenzi 3, bod nemá žádnou dimenzi, a tudíž nemá žádné další části.

1.2 Čára je délka bez šířky.

Zatímco definice bodu obsahuje negaci, čára již ne. Navíc čára zavádí pojem dimenze. Proklus souhlasí s definicí, ale polemizuje nad tím, že čára obsahuje body (tedy má v sobě negace) a tím popírá další dimenze. Nakonec přistupuje na to, že čára má dimenzi jedna. Nemá šířku ani hloubku, což je zahrnuto pod jeden pojem bez šířky. Kdyby měla hloubku a šířku, byly by to dimenze dvě a to by neodpovídalo Euklidovým zásadám. Alternativní Proklovou definicí jest „velikost jedné dimenze“ či „neustálá změna bodu“. Ukazuje na nich původ přímky, tedy sestává se z bodů.

1.2.1 Rozdělení čar.

Euklid definicí čáry míní pouze jeden druh, a to úsečku. Proklus zavádí rozdělení na čáry rovné, oblé a ty, jež jsou kombinací obou předchozích, jako je například šroubovitá čára. Dále zavádí třídy zvlášť pro některé křivky, jako kissoida, parabola anebo křivka mající smyčku. Jiným dělením jsou čáry kombinované (např. lomená čára) a nekombinované, které jsou dvojího druhu, a to tvořící útvar (kružnice) a netvořící útvar (úsečka).

Poznámka k pojmům přímka a úsečka: Podle mnohých překladů by jazykově správně byl pojem přímka, ale jelikož se Euklid zabývá tím, co je v zorném poli geometra, myslel všude tam, kde je zmíněna přímka, zřejmě úsečku. Proto i já dám přednost úsečce, protože z hlediska matematického, které pokládám za důležitější, byla prvotní úsečka a až potom přímka, kdežto z hlediska lingvistického tomu bylo naopak.

1.3 Hranicemi čáry jsou body.

Euklid v definici čáry (z předchozí definice víme, že čárou myslel přímou čáru, úsečku) definuje úsečku. Proklus naráží na to, že některé čáry nemají hranice, jako je právě úsečka nebo kružnice, že tuto definici lze aplikovat pouze na části těchto čar. Dále postrádá doplnění definice o to, že rozdělení úsečky je bod a průsečík dvou úseček je také bod.

1.4 Úsečka je čára, která se svými body táhne rovně.

Definici by Proklus upravil na „Úsečka je to, co reprezentuje natažení čáry“. To proto, že čarami rozuměl i křivky, nejen přímky jako Euklid. Dodává, že jakmile vytyčíme dvěma body nějakou část na křivce, vždy bude vzdálenost po křivce větší, než po přímce vedené stejnými body. Dále připojuje seznam poddefinic, které se vztahují k úsečce. Jakákoliv čára nemůže ležet v dané rovině, jestliže určitá část čáry by ležela o něco výš. Co tím rozumím, ukážu na modelu z pevné látky. Mějme model čáry (křivky) zhotovené z drátu. Držme ji na rovině (hladině vody). Model čáry v ní může, ale i nemusí ležet. Vždy nastane taková možnost, že kus čáry leží výš než její pokračování. K úsečce ještě dodává, že všechny její části pasují dohromady a chovají se stejně. Jestliže má dva pevné konce, sama přímka zůstává neměnná. A nakonec doplňuje, přímkou je ta čára, která sama se sebou netvoří žádný útvar.

1.5 Plocha je to, co má pouze délku a šířku.

Pojem plocha dostaneme při vyměřování a značení hranic území. A dále pak pozorováním svých stínů získáme schopnost vnímat plochu bez hloubky. Tak Proklus vysvětluje původ pojmu plocha. Další poznámkou vyjadřuje nedostatky definice – dle něj je nutné zavést dělení podobně jako u čar. Původní definice by tak vyhovovala pouze rovině a jiným plochám ne.

1.5.1 Rozdělení ploch.

Podobně, jako Proklus zavedl rozdělení čar, zmiňuje rozdělení ploch. Plochami jednoduchými byly rovina a kulová plocha, plochami složenými všechny ostatní. V následném dělení třídí složené plochy na homogenní (povrch mnohostěnu) a nehomogenní (kuželová plocha), které nejsou uzavřené.

1.6 Hranicemi plochy jsou čáry.

Proklus upravuje definici tak, že hranicemi plochy je čára jedna. Například když vezmeme část kulové plochy, má pouze jednu hranici a tou je její obvod. K tomuto rozdílu došlo opět tím, že Euklid za plochu uvažoval pouze rovinu, kdežto Proklus měl zavedené své dělení.

1.7 Rovina je plocha, kterou určují úsečky, které jí náleží.

Záměnou pojmů bod za úsečku, čáru za plochu a úsečku za rovinu dostáváme variantu definice číslo 4. Kromě tohoto dodatku Proklus přidává další.

1.7.1 Komentáře k rovině.

Rovina je plocha, která je co nejvíce natažena. Rovina je plocha, která je nejmenší z ploch, které mají shodné hranice. Rovina je plocha, ve které když umístíme přímku, všechny body přímky budou ležet na této ploše.

1.8 Úhel je vzájemný sklon dvou protínajících se čar, jejichž prodloužení neleží v jedné úsečce.

1.9 Jestliže vzájemný sklon dvou čar tvoří jednu úsečku, úhel nazveme přímým.

Euklid uvádí tyto dvě definice jako oddělené, protože původně zamýšlel definovat úhel přímý, ale pak si uvědomil, že úhly vznikají tímto způsobem i mezi křivkami.

Proklova připomínka se týká toho, jak je možné, že jeden sklon vytváří dva úhly. Zmiňuje, že definice nepočítá s možností, že by jedna křivka tvořila sama se sebou úhel, tak jako kissoida. Potom, co rozdělil čáry a plochy do podskupin, zavádí též dělení úhlů. Základní rozdělení úhlů je na ty, co leží v prostoru a ty, co leží na ploše. Plošné úhly jsou dvojího druhu – na jednoduchých plochách a na složených plochách. Podle definice 1.5.1 víme, co Proklus jednoduchými plochami myslel. Tedy plošné úhly jsou buď v rovinné nebo v kulové ploše. Rovinné úhly mohou být tvořeny jednoduchými čarami, složenými čarami (např. úhel tvořený křivkou jako je kissoida) anebo kombinací jednoduché a složené čáry (např. úhel vzniklý z elipsy a jejích os). U kategorie úhlů tvořených jednoduchými čarami existují tři možnosti, jak úhel složit, a to buď pomocí dvou úseček, úsečky a obvodu kruhu anebo pomocí dvou obvodů kruhů. Nejpodrobnější rozdělení úhlů se týká toho, zda čáry jsou konvexní/konkávní.

Tímto výčtem ukazuji, že Proklus se nespokojil s prostou definicí pro všechny úhly. Každý úhel je charakterizován kvantitou, kvalitou a vztahem. Kvantita představuje jeho rozměr, kvalita jeho formu a vztah je dán čarami a plochami, které jej vytváří.

1.10. Jestliže se úsečka postaví na úsečku tak, že sousední úhly se rovnají, každý z těchto úhlů je pravý a úsečka postavená se nazývá kolmice k té, na které stojí.

1.11. Tupý úhel je ten, který je menší než pravý.

1.12 Ostrý úhel je ten, který je menší než pravý.

Poznámka k úhlům se krátce týká i pojmenování čáry, kterou Euklid nazývá kolmicí. Proklus ji nazval gnómonem (podle svislé tyče slunečních hodin). Pomocí kolmice nejen že zjišťujeme velikost úhlů, ale můžeme i snadno porovnat velikost útvarů co se výšky tyče.

Tvrzení, že úhel menší než pravý je ostrý, je nepravdivé, jestliže není uvedena klasifikace úhlu jako jsem nastínila v poznámce v definici 1.8 a 1.9. Vezmeme-li úhel mezi kružnicí a její tečnou, pak mezi nimi je jistě menší než pravý, ale není to úhel ostrý. Podobně úhel mezi kružnicí a jejím průměrem je menší než pravý, ale není ostrý.

1.13 Mez je to, co je něčí hranicí.

Až na pojmenování mez, které se spíše hodí do zeměměřictví, byl Proklus s definicí spokojen. Sám jiné pojmenování neuvádí.

1.14 Útvar je to, co je ohraničené mezí nebo mezemi.

Proklus uvádí komentář na konkrétním případu kruhu a kružnice. Euklid se dívá na kruh jako na rovinný útvar, který v sobě nezahrnuje kružnici (svou hranici), narozdíl od Prokla, který nahlíží na útvar včetně jeho hranic. Tedy vytýká Euklidovi, že striktně odděluje meze a to, co meze obklopují.

1.15 Kruh je rovinný útvar obklopený jednou čárou, k níž vedou od jednoho bodu uvnitř útvaru úsečky navzájem rovné.

1.16 A tento bod se nazývá střed kruhu.

Euklid na definici 1.15 ukazuje, jak vlastně kruh sestrojit. Proklus středem kruhu rozumí pouze bod uvnitř kruhu, ale nepřijímá definici, že pouze on je ekvidistantou kružnice. To, co má stejnou vzdálenost od středu kruhu, on nazval pólem. Pólem je tedy celá přímka vztyčená ve středu kruhu kolmá na rovinu kruhu.

1.17 Průměr kruhu je každá úsečka procházející středem a končící na obou stranách na obvodu kruhu, která ho také půlí.

Thales byl prvním, kdo dokázal, že kruh je rozdělen svým průměrem na dvě stejné části – na něj Proklus odkazuje jako na původce předchozí definice, ale zároveň připomíná, že není známo, jak to dokázal. Proklus tedy doplňuje matematický důkaz, a to tak, že stačí vytvořit průměr a obě vzniklé části položit na sebe. Jestliže se kryjí, je důkaz proveden.

1.18 Polokruh je útvar vzniklý z obvodu kruhu a jeho průměru, který ho přetíná. Střed polokruhu je shodný se středem kruhu.

Definice se stala inspirací pro rozdělení útvarů podle toho, kolik čar jej obklopuje. Jsou tedy útvary obklopené jednou čárou (kruh), dvěma čarami (například polokruh), třemi čarami (trojúhelník) atd. Dvojčaré útvary mohou být tvořeny:

(1) dvěma obvody kruhu, a to buď protínajících se (např. srpek měsíce), nebo neprotínajících se, tvořený dvěma soustřednými kruhy, tedy mezikruží, které bylo tehdy nazývané koróna

(2) obvodem kruhu a přímkou (např. polokruh a všechny další části kruhu menší než polokruh vzniklé „uříznutím“ kruhu)
(3) dvěma křivkami (např. útvar vzniklý průnikem dvou elips)
(4) křivkou a obvodem kruhu (např. útvar vzniklý průnikem elipsy a kruhu)
(5) přímkou a křivkou (např. poloelipsa)

1.19 Přímočaré útvary jsou tvořené úsečkami, třístranné jsou tvořené třemi, čtyřstranné čtyřmi a vícestranné více než čtyřmi úsečkami.

1.20 Z třístranných útvarů je rovnostranným trojúhelníkem ten, jenž má všechny tři strany stejně dlouhé, rovnoramenným ten, jenž má dvě strany stejně dlouhé a kosým trojúhelníkem, který má strany různě dlouhé.

1.21 Pravoúhlý trojúhelník je ten, který má pravý úhel, tupoúhlý ten, co má tupý úhel a ostroúhlý ten, co má všechny tři úhly ostré.

Trojúhelníky Euklid klasifikoval nejprve pomocí stran a až potom pomocí úhlů, Proklus z toho vyvodil sedm druhů trojúhelníků:

(1) rovnostranný
(2) rovnoramenný pravoúhlý
(3) rovnoramenný tupoúhlý
(4) rovnoramenný ostroúhlý
(5) různostranný pravoúhlý
(6) různostranný tupoúhlý¨
(7) různostranný ostroúhlý.

Dvojí klasifikace je podle něj přebytečná a nevyhovující všem případům. Dále demonstruje příklad, že existuje trojúhelník se čtyřmi stranami, který nazývá paradoxem geometrie. Na pomoc si bere útvar, který se na první pohled tváří jako trojúhelník, ve skutečnosti se jedná o čtyřúhelník. Můžeme si útvar představit jako trojúhelník s vpadlým úhlem a to, že je zařazen mezi trojúhelníky, je způsobeno nerozpoznáním právě toho zubu v jedné jeho straně, kdy úhel je větší než dva úhly pravé.

1.22 Ze čtyřstranných útvarů je čtverec ten, který má shodné strany a je pravoúhlý, obdélník ten, který je pravoúhlý, ale nemá všechny strany stejně dlouhé, kosočtverec ten, který má všechny strany stejně dlouhé, ale nemá pravý úhel a kosodélník ten, který má protější strany a úhly stejně velké, ale nemá shodné strany ani pravý úhel. Ostatní čtyřstranné útvary jsou lichoběžníky.

Podobně jako Proklus připojil poznámku o čtyřstranném trojúhelníku, připojuje jistou paralelu i k této definici, a to, že bychom mohli dostat čtyřúhelník s více než čtyřmi stranami, ale příklad neuvádí. K definici kosočtverce by využil již tu, postihující čtverec, že kosočtverec je pootočený čtverec. Protože v Základech Euklid nepoužívá výrazy pro obdélník, kosočtverec a kosodélník, domnívá se Proklus, že definice byly převzaty z dřívějších spisů o geometrii. Dosud Euklid nedefinoval rovnoběžky a tedy ani rovnoběžník. Následující klasifikace podle rovnoběžek, jejímž autorem je Heron, byla shledána Proklem za propracovanější:

(1) Rovnoběžníky

- (a) pravoúhlé
  - (i) čtverec
  - (ii) obdélník
- (b) nepravoúhlé
  - (i) kosočtverec
  - (ii) kosodélník

(2) Nerovnoběžníky

- (a) mající dvě strany rovnoběžné
  - (i) rovnoramenný lichoběžník
  - (ii) obecný lichoběžník
- (b) různoběžníky.

Proklus zjistil, že v jiné knize Euklid uvádí výraz lichoběžník ve spojení se dvěma rovnoběžnými stranami, ale v Základech to zřejmé není.

1.23 Rovnoběžky jsou úsečky, které leží ve stejné rovině, které nekonečně prodloužené v obou směrech se nikdy neprotínají.

Zde Proklus vyzdvihuje definici Posidonia, která říká, že rovnoběžky jsou úsečky v jedné rovině, nekonvergující ani nedivergující, které mají všechny kolmice vedené z bodů jedné úsečky ke druhé stejně dlouhé. Kolmice mezi rovnoběžkami postupně konvergují jedna k druhé a je pro ně dostatečné definovat délku a výšku plochy vymezenou dvěma rovnoběžnými úsečkami. Potom jestliže jsou kolmice stejně velké, je i vzdálenost mezi rovnoběžkami stejná, ale pokud je jedna větší než druhá, zmenšuje se odstup rovnoběžek a tím rovnoběžky konvergují ve směru, ve kterém se zmenšují kolmice.

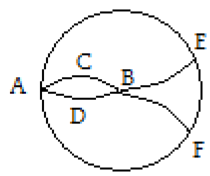
Další poznámka se týká všech čar, které se neprotínají (tedy rovnoběžky jsou jen její podskupinou). Tato „ekvidistanční“ definice mi přijde mnohem obecnější. Proklus cituje slova Geminova: „Čáry, které se neprotínají, leží nebo neleží v jedné rovině. Ty, které leží v jedné rovině a protínají se, některé z nich mají stále stejnou vzdálenost jedna od druhé, jiné vzdálenost postupně zmenšují, tak jako tomu je u hyperboly a přímky nebo konchoidy a přímky (přímky tvoří jejich asymptoty). Ač k sobě konvergují, nikdy se nesešběhnou úplně. Toto je jeden z paradoxů geometrie, protože ukazuje, že sbíhavost čar je nekonvergující.
Ty čáry, jež mají stejnou vzdálenost od sebe a nikdy ji nezmenšují a jsou k tomu přímé a ležící v jedné rovině, jsou rovnoběžné.“

Proklova poznámka o všech čarách a zmínka o hyperbole je vhodně umístěná, avšak dle mého názoru nepotřebná, protože problém s hyperbolou nenastane, jelikož Euklid v definici užil pojmu úsečka, pod kterou hyperbola nespadá.

2. EUKLIDOVY POSTULÁTY

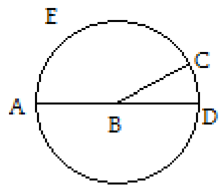
Postuláty jsou prvotné úkoly, které jsou brány jako pravdivé, ale nejsou dokázané ani dokazatelné. Z nich se pak vytváří další tvrzení, které lze posuzovat pravdivě či nepravdivě například pomocí experimentů.

2.1 Vytvořit úsečku, která prochází dvěma body.



Protože z postulátu neplyne, že taková úsečka může být jen jedna, přidává Proklus poznámku o tom, že dvě úsečky nemohou uzavírat prostor. Zároveň to pokouší dokázat s použitím definice průměru kruhu. Sporem předpokládá, že dvě úsečky ACB, ADB uzavírají prostor. Obě ať jsou prodlouženy do nekonečna za bod B. Kolem bodu B je opsán kruh s poloměrem AB, který protíná úsečky v bodech F, E. Jelikož ACBF, ADBE jsou průměry polokruhů, pak oblouky AE, AEF jsou stejné, což je nemožné.

2.2 Prodloužit úsečku kontinuálně v přímku.



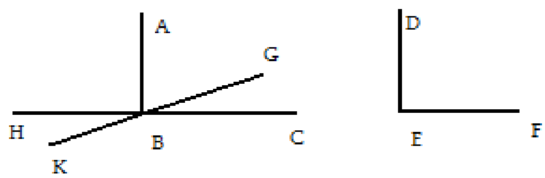
Takové prodloužení může být pouze jedno, ale úplně to z tvrzení neplyne. Proklus se snažil o důkaz opět s užitím definice průměru kruhu. Předpokládal, že, že dvě úsečky AC, AD mají společnou část AB. Kolem B opsal kruh s poloměrem AB, který protíná AC v C , AD v D. Jelikož ABC je úsečka vedená středem, pak AEC je polokruh. Podobně, ABD je úsečka skrz střed, AED je polokruh. Potom AEC, AED jsou sobě rovné, což je nemožné.

Protože Proklus byl napadán za to, že důkaz není platný, poznamenává Servít, že v jiných překladech Základů bývá nejednoznačnost různě doplňována.

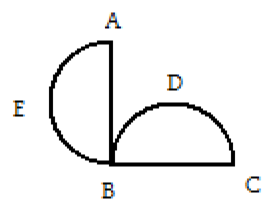
2.3 Vytvořit kruh s daným středem a poloměrem

Lingvistická poznámka Proklova se týká slovesa – Euklid uvádí, že „kruh může být vytvořen". Proklus uvádí aktivum – „kruh tvoří". Nepoznamenává však jeho velikost, myslí tím libovolný poloměr, kterým vyjadřoval nekonečnost prostoru.

2.4 Všechny pravé úhly jsou si rovné.

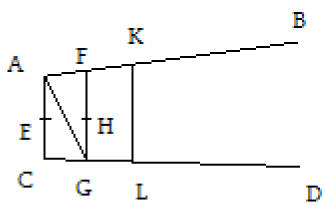


Proklus by tento postulát zařadil mezi axiomy, protože vzhledem k prvním třem, vyjadřuje vlastnosti pravých úhlů a ne jejich konstrukci. Dokazuje jej následovně. Nechť jsou dány dva pravé úhly ABC, DEF (B, E jsou vrcholy pravých úhlů). Jestliže úhly nejsou pravé, pak jeden z nich musí být větší. Položme DE na AB, EF bude vycházet z úhlu ABC jako BG. Prodlužme CB za bod B a označme H jejím prodloužení. Pak jelikož ABC je pravý, tak ABH je pravý (podle definice je pravý úhel roven sousednímu úhlu). Tudíž úhel ABH je větší než úhel ABG. Protáhněme GB do bodu K. Dostaneme podobně dva úhly ABK, ABG, oba pravé a navzájem stejné. Tudíž úhel ABH je menší než úhel ABG. Ale on je také větší, což je spor.



Nedostatek důkazu tkví v tom, že CB, GB jsou prodlouženy pouze jedním směrem a BK jde mimo úhel ABH. Proklus tedy uvádí jiný příklad. Cituje Pappa, že obrácená věta tohoto postulátu není nutně pravdivá. Předpokládá dvě shodné úsečky BA, BC, respektive dva polokruhy, které po přiložení na sebe se kryjí. Úhly EBA,DBC jsou stejné. Připojme ke každému „úhel“ ABD. Pak srpkovitý úhel EBD je rovný pravému úhlu ABC.

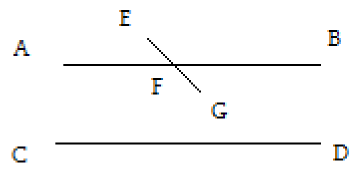
2.5 Nechť úsečka *u* protíná dvě úsečky *p, q* tak, že součet vnitřních úhlů *α, β*, které svírají úsečky *p, q* s úsečkou *u* na jedné straně úsečky *u*, je menší než než dva pravé úhly. Potom na této straně lze úsečky *p, q* prodloužit tak, aby se jejich prodloužení protla.



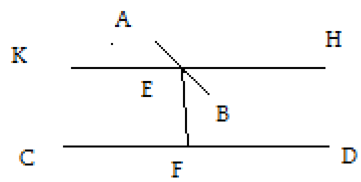
Na úvod Proklus zmiňuje argument, který přirovnává k Achillovi a želvě, aby ukázal, že je nemožné, aby se úsečky z postulátu protťaly. Nechť AB, CD jsou protťaté AC a součet úhlů BAC, ACD je menší než dva pravé. E půlí AC a vzdálenost AE je nanesena na úsečky AB, CD (průsečíky označme F, G). Úsečku FG rozpůlíme bodem H a vzdálenost FH naneseme na úsečky AB od bodu F a na úsečku CD od bodu G. Pak AF, CG se neprotnou v žádném bodu na úsečce FG. Kdyby takový případ nastal, dvě strany trojúhelníka by se rovnaly třetí, což je spor. Podobně FK, GL se neprotnou na úsečce KL a kdybychom tak pokračovali do nekonečna, tj. opakovali postup jako s úsečkou AC, nikdy by se přímky neprotnuly.

Z toho vyplývá, že některé úsečky se protnou, jiné ne. Zásadně neodmítá Euklidův postulát. Sám v příkladu poznamenává, že AG, CG se protínají, ale dvojice AB, CD ne, i když oboje dvojice mají součet úhlů menší než dva pravé.

Proklus pokračuje rozvojem předchozího argumentu na základě Aristotelova tvrzení, že vesmír je konečný: „Jestliže dvě úsečky procházející daným bodem tvoří úhel a jsou-li prodlouženy do nekonečna, vzdálenost mezi nimi (rozpětí) bude převyšovat každou konečnou veličinu.“ Tvrzení vzal jako axiom, k tomu přidává:



(1) „Jestliže úsečka protíná jednu ze dvou rovnoběžek, protíná také druhou rovnoběžku.“ AB, CD jsou rovnoběžky a EFG protíná AB. BF, FG jsou dvě úsečky procházející bodem F, které, prodloužené do nekonečna, budou mít mezi sebou rozpětí větší než jakákoliv daná veličina, tedy i délka vzdálenosti mezi rovnoběžkami. Proto FG protne CD.



(2) AB, CD jsou dvě úsečky, EF je protíná. Úhly BEF, DFE mají součet menší než dva pravé. Úhel HEB je roven rozdílu dvou pravých úhlů a součtu BEF, EFE. HE prodlužme do bodu K. Protože úsečka EF protíná KH a CD a součet vnitřních úhlů HEF, DFE je rovem dvěma pravým, úsečky HK, CD jsou rovnoběžné. Protože AB protíná KH, protíná i CD (viz bod 1). Tedy AB, CD se protnou na té straně, kde je součet vnitřních úhlů menší než dva pravé.

I když úvodním příměrem nastínil, že pátý Euklidův postulát neplatí, později se přiklání k jeho opaku. Tento postulát je stále otevřen diskuzím, nebyl dosud potvrzen ani vyvrácen.

3. OBECNÉ EUKLIDOVY POJMY (AXIOMY)

Axiomy jsou obecné zásady, které jsou natolik evidentní, že je není třeba dokazovat. Proklus, jakožto specialista na dokazování, pokoušel se přijít s ozřejměním, že jsou pravdivé. Nejednoznačnost nadpisu je z toho důvodu, že Euklid používal ve svém označení obecné pojmy, kdežto Proklus to, co komentoval, nazýval axiomy. Obecných pojmů je dle Prokla pět. Upozorňuje, že někdo jich uvádí víc, někdo méně. Například

Heronovy axiomy byly tři, z nichž některé se objevily v překladech Základů: „Celek je větší než část“, „Co se kryje, je navzájem rovné.“

3.1 Veličiny témuž rovné, jsou si také navzájem rovny.

Proklův důkaz předpokládá dvě věci, a to, že (1) veličiny, které zaujímají stejný prostor, jsou si navzájem rovny a (2) veličiny, které zaujímají stejný prostor se stejnou veličinou, zaujímají stejný prostor navzájem. Vysvětluje zřejmé něčím nejasným, konkrétně pojem prostor je více nejasný, než veličiny existující v prostoru. Odůvodnění se týká tedy jen hmotných věcí, Euklidův axiom v sobě zahrnuje více, tedy i nehmotné veličiny, jako je rychlost nebo opakující se časové intervaly.

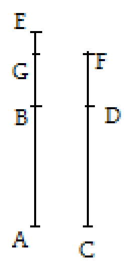
Ale dvě časové období se nemohou krýt (čas přeci plyne), avšak lze je změřit a porovnat. Tudíž nehmotné veličiny nevyhovují axiomu.

3.2 Když se stejné veličiny přidají ke stejným, celky se rovnají.

3.3 Když se stejné veličiny odejmou od stejných, zbytky jsou rovny.

V Základech se objevily další axiomy, které Proklus považuje za odvozené z výše zmíněných. Jsou tak přebytečné. Byly to:

(a) Když se rovné přidají k nerovným, celky jsou nerovné
(b) Veličiny, které jsou dvojnásobkem téhož, navzájem rovny jsou.
(c) Veličiny, které jsou poloviční téhož, navzájem rovny jsou.
(d) Odejmou-li se rovné od nerovných, zbytky jsou nerovné.
(e) Když nerovné je přidáno k rovnému, Rozdíl mezi celky je roven rozdílu mezi přidanými částmi.
(f) Když rovné je přidáno k nerovnému, rozdíl mezi celky je roven rozdílu původních nerovných veličin.



Důkaz axiomu ukazuje následovně: Veličiny AB, CD jsou rovné. Jsou k nim přidány veličiny EB, FD, z nichž EB je větší. AE převyšuje CF o stejný rozdíl, jako BE převyšuje DF. Odejmeme veličinu BG z BE, která je rovna DF. Potom, protože AE převyšuje AG o GE a AG je rovno CF a BG rovno

DF, pak AE převyšuje CF o stejný rozdíl, jako BE převyšuje DF.

3.4 Co se navzájem kryje, je navzájem rovné.

Proklus tvrdí, že tento výrok byl již Euklidem použit a jako axiom je teď pouze odvozen. Jestliže se v prvním postulátu bude BC krýt s EF, budou si úsečky navzájem rovny.

3.5 Celek je větší než část.

Stejný původ, jako má předešlý axiom, má i tento. Je odvozený od toho, co již bylo řečeno, k porovnání celku a části došlo, například úsečka jako část přímky, kruh a polokruh atd.

3.6 Poznámky k axiomům

Axiomy vycházející z definic byly Proklem odmítnuty jako přebytečné. Zařadím je k seznamu odmítnutých v komentáři 3.3. Příkladem jsou:

(g) Všechny části roviny nebo úsečky kryjí se navzájem.

(h) Bod dělí čáru, přímka plochu a plocha těleso. (Proklus dodává k tomuto odmítnutému axiomu, že každá z těch veličin je dělena stejnou věcí, jaká ji ohraničuje.)

3.7 Princip kontinuity

Užívání konstrukcí jako metody důkazu existence útvarů majících určitou vlastnost je jednou z charakteristik Základů. Konstrukce jsou prováděny za pomoci úseček a kruhů v souladu s postuláty 1-3. Průsečíky úseček a kružnic ovlivňují spolu s danými body další úsečky a kružnice. Takovému sledu říkáme princip kontinuity.

Takové průsečíky by měly být dokázány stejnou cestou, jako čáry, které jim dávají vznik. Například v konstrukci rovnostranného trojúhelníka je vrchol průnikem dvou kruhů. Euklid tvrdí, že je to zřejmé, ale není. Později tedy přidává podmínky pro sestrojení trojúhelníku, že dvě jeho strany musí být dohromady větší než třetí, ale opět tu není nic, co by ukázalo, že je konstrukce vždy možná. Své usuzování založil na definici kruhu v kombinaci s faktem, že když střed a bod z obvodu kruhu tvoří úsečku, která náleží také druhé kružnici tak, že střed prvního kruhu leží na obvodu druhého kruhu a střed druhého kruhu leží na obvodu prvého, pak se kruhy musí protnout.

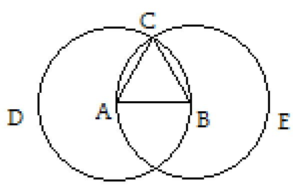
Jiné důkazy Euklid neuvádí a Proklus tedy nemá co komentovat. Důkazu se zhostil až mnohem později (počátkem 20. století) německý matematik Dedekind. Aplikovat svůj postulát na průsečíky úsečky a kruhu a průsečíky kruhu s kruhem. Pro zajímavost uvedu, jak zněl: Jestliže je úsečka AB rozdělena na dvě části tak, že každý bod úsečky AB náleží jedné části, bod A náleží první části, bod B druhé a každý bod první části předchází jakýkoliv bod druhé části v pořadí AB, pak existuje bod C na úsečce AB takový, že každý bod, který mu předchází, patří do první části úsečky AB, a každý následují do druhé v původně předpokládaném rozdělení.

4. EUKLIDOVY PROPOZICE (TVRZENÍ)

Využitím předchozích definic, postulátů a axiomů, přichází Euklid s návody konstrukcí a jejich vlastnostmi. To, co se v geometrii nazývá euklidovskou konstrukcí, jsou následující úkony. První konstrukce nebo důkaz pod propozicí je řešení Euklidovo, ostatní jsou návrhy Proklovy.

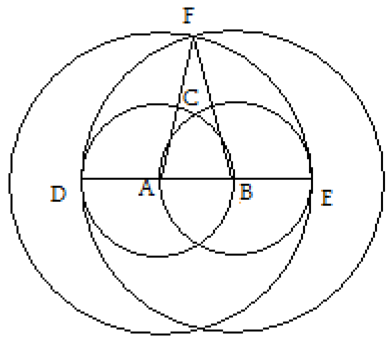
4.1 Na dané úsečce postavit rovnostranný trojúhelník.

Konstrukce: Je dána úsečka AB, ze středu A je narýsován kruh BCD, ze středu B kruh ACE. Od bodu C, průsečíku kruhů jsou vedeny spojnice AC, CB. Je-li A středem kruhu CDB, AC se rovná AB (poloměry v kruhu se shodují), podobně se rovnají BA, BC. Tedy AC, AB, BC se navzájem kryjí, tudíž jsou si rovny.

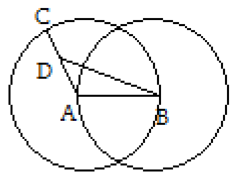


Bez použití principu kontinuity by Euklid těžko vysvětlil existenci bodu C. Proklus míní, že je nutné přijmout fakt, že dvě kružnice s různými středy nemohou mít společnou část. Řešení prý stačí najít pouze jedno. Avšak počet průsečíků nebyl do této fáze Základů ještě dokázán (v tomto případě dva průsečíky a tedy i dvě možné řešení sestrojení trojúhelníka).

Jako existuje rovnostranný troúhelník sestrojený s danou úsečkou AB, existuje též rovnoramenný a obecný. Proklus úsečku využívá k jejich konstrukci a ukazuje, jak je sestrojit:



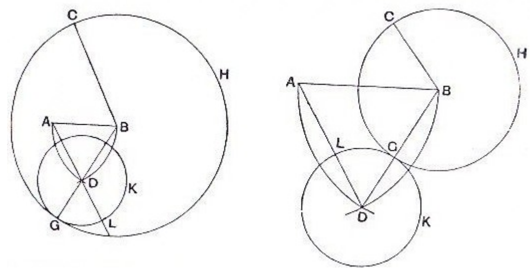
(1) rovnoramenný – prodloužíme AB na obě strany do bodů D, E jako průsečíky AB s již vytvořenými kruhy. Pak opíšeme kruhy se středy A, B s poloměry AE, resp. BD. Průsečík těchto kružnic je F. Narýsujeme úsečky AF, BF. Trojúhelník ABF má dvakrát větší rameno než jeho základna.



(2) obecný – AC je poloměr jednoho ze dvou kruhů a D bod na úsečce AC tak, že leží v části kruhu se středem A, ale neleží v kruhu se středem B. Spojením B s D dostaneme různostranný trojúhelník.

4.2 Daným bodem vést úsečku rovnou dané úsečce.

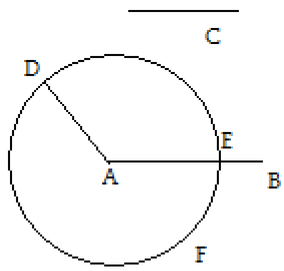
Konstrukce: A je daný bod, BC daná úsečka. Spojením A, B dostaneme úsečku, na níž postavíme rovnostranný trojúhelník DAB (Post. 1). Prodloužíme DA, DB (Post. 2) v úsečky AE, BF. Narýsujeme kruh CGH se středem B a poloměrem BC a kruh GKL se středem D a poloměrem DG. Potom, je-li B středem kruhu CGH, BC = BG. Dále D je středem kruhu GKL, DL = DG. Z toho plyne, že DA = DB. Potom rozdíly příslušných délek DL, DA (mají rozdíl AL) a DG, DB (rozdíl BG) jsou stejné (axiom 3), AL se rovná BG (axiom 1).



Proklus rozlišuje několik případů konstrukcí podle toho, v jakém vztahu jsou výchozí objekty. Bod může ležet (1) na úsečce nebo (2) mimo úsečku. Pokud mimo, pak může ležet (a) na jejím prodloužení nebo (b) šikmo při pohledu na úsečku. Pokud bod leží na úsečce, pak může být (a) jejím krajním bodem nebo (b) vnitřním bodem úsečky. Proklova snaha o rozdělení vede k tomu, že v případě (1a) není co řešit, protože je dáno to, co je požadováno vyřešit. V případě (1b) sleduje Proklus jinou možnost konstrukce, a to vzít do kružítka vzdálenost BC a vytvořit průsečík s prodloužením úsečky BD. To ale podle Euklida je nesprávný postup, neboť pohybuje s útvarem. V Euklidově geometrii ale pohybovat s objekty nelze.

Poslední možnost, kdy bod leží šikmo při pohledu na úsečku Proklus rozdělil na případy, kdy úsečka AB (1) je rovna, (2) je větší nebo (3) je menší než úsečka AB. Je-li rovna, je opět případ vyřešen na začátku, je-li větší, bod G leží uvnitř úsečky BD, je-li menší, bod G leží na prodloužení úsečky BD. V tom je podle něj potřeba modifikovat původní znění pro tyto případy.

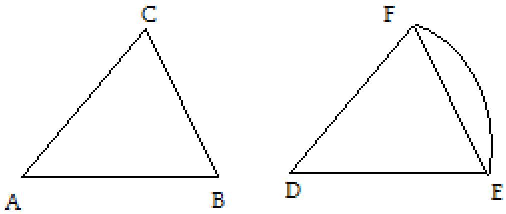
4.3 Jsou-li dány dvě nestejně dlouhé úsečky, pak lze od delší odečíst kratší.



Konstrukce: Je dána úsečka AB, větší než úsečka C. Je tedy požadováno odečíst C od AB. Při bodu A umístíme úsečku AD rovnou úsečce C, pak opíšeme kruh s poloměrem AD a středem A. Protože A je středem kruhu DEF, poloměry AD, AE se rovnají. Tedy AE a C se rovnají AD, proto AE je rovno C.

Proklus uskutečňuje opět několik případů, které jsou obsaženy v úvahách v předešlé propozici.

4.4 Jestliže dva trojúhelníky mají dvě strany stejné a mají-li úhly sevřené stejnými stranami stejně velké, budou mít i stejně velké základny a trojúhelníky budou shodné a zbývající úhly budou shodné se zbývajícími úhly, respektive ty úhly, které leží proti stejným stranám.



Důkaz: Trojúhelníky ABC, DEF mají strany AB, AC rovné stranám DE, DF, jmenovitě AB je rovno DE a AC rovno DF a úhel BAC je rovný úhlu EDF. Říkám, že základna BC se také rovná základně EF, trojúhelník ABC bude roven trojúhelníku DEF a zbývající úhly budou rovny zbývajícím úhlům, jmenovitě ty, které jsou protilehlé stejným stranám, to je úhel ABC úhlu DEF a úhel ACB úhlu DFE.

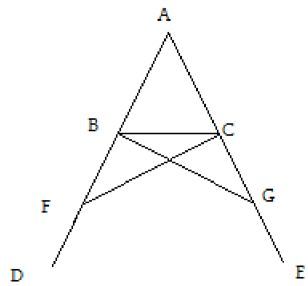
Je-li trojúhelník ABC přiložen na trojúhelník DEF a jestliže bod A je přiložen na bod D a úsečka AB na DE, pak bod B bude také splývat s E, protože AB je rovna DE.

A když úsečka AB kryje DE, pak úsečka AC bude krýt DF, protože úhel BAC je roven úhlu EDF. A tedy i bod C bude také splývat s bodem F, protože AC je opět rovno DF. Ale také B se kryje s E, a tak základna BC se bude krýt se základnou EF. (Kdyby se B krylo s E a C s F, nikoli však základna BC s EF, pak by dvě úsečky uzavíraly prostor, což je nemožné. Proto se základna BC bude krýt s EF a budou si rovny.)

A tak celý trojúhelník ABC se bude krýt s trojúhelníkem DEF a budou si rovny. Zbývající úhly budou také splývat se zbývajícími uhly a budou si rovny. Úhel ABC = DEF, ACB = DFE.

Proklus shledal, že Euklid ve svém důkazu použil obrácenou větu čtvrtého axiomu, konkrétně slova „bod B bude splývat s E, protože AB je rovna DE“ a že tato věta platí pouze pro objekty stejné formy, to je sestaveny ze stejných úseček, oblouků kruhů a úhlů stejně umístěných. Nedostatek by skryl upravením původní propozice, pro které objekty platí.

4.5 V rovnoramenných trojúhelnících jsou si úhly při základně rovny, a jestliže ramena jsou prodloužena, pak úhly pod základnou si budou rovny.



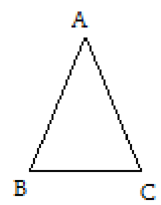
Důkaz: Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník s rameny AB, AC a nechť ramena jsou prodlouženy o úsečky BD, CE. Říkám, že úhel ABC je roven úhlu ACB a úhel CBD roven úhlu BCE. Nechť F je libovolný bod úsečky BD. Od větší úsečky AE uřízněme úsečku rovnou AG a spojme FC, GB. Potom, protože AF a AG se rovnají, AB a AC také, dvě strany FA, AC se rovnají dvěma stranám GA, AB; a svírají společný úhel FAG. Potom základna FC je rovna základně GB a trojúhelník AFC je roven trojúhelníku AGB a zbývající úhly budou rovny zbývajícím úhlům, proti nimž leží, tedy úhel ACF roven úhlu ABG a úhle AFC úhlu AGB. A protože celá AF je rovna celé AG a z nich AB je rovna AC, pak i zbytky BF a CG jsou rovné. Ale bylo dokázáno, že FC je rovno GB; tedy dvě strany BF, FC jsou rovny příslušným stranám CG, GB. Rovněž úhel BFC je roven úhlu CGB, protože mají společnou základnu BC.

Potom bude také trojúhelník BFC roven trojúhelníku CGB a zbývající úhly budou rovné zbývajícím, které jsou protilehlé shodným stranám. Úhel FBC bude roven úhlu GCB a úhel BCF úhlu CBG. Protože celý úhel ABG se ukázal rovným úhlu ACF, z nichž úhel CBG je roven úhlu BCF, zbývající úhel ABC je roven zbývajícímu ABC a jsou při základně trojúhelníka ABC. Ale bylo dokázáno, že úhel FBC je roven úhlu GCB a jsou pod základnou.

Proklus tvrdí, že před uvedením této propozice by mělo být zmíněno Aristotelovo tvrzení, že dva úhly v jakémkoliv segmentu (úseči) kruhu jsou shodné. (úhel tvořený křivkou a úsečkou) To lze dokázat přiložením vzniklých segmentů k sobě a tvrzením, že průměr kruhu svírá se segmenty při základně pravé úhly. Podrobnější vysvětlení k tomuto důkazu nepopisuje.

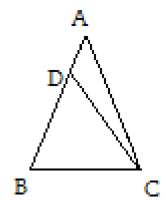
Jiný jeho důkaz spočívá v neprodloužení stran. Body D, E leží na neprodloužených úsečkách AB, AC. Metoda důkazu je úplně stejná jako Euklidova, avšak nepotvrzuje rovnost úhlů tak dobře, jako Euklid.

Třetí důkaz je dle Prokla nejjednodušší. Cituje Pappovu výpověď. AB je shodné s AC a AC s AB. Úhel BAC je roven úhlu CAB. Tudíž všechny korespondující části trojúhelníka jsou stejné, konkrétně BC je rovno BC, trojúhelník ABC se shoduje s ACB a úhel ACB se rovná úhlu ABC. A proto rovnoramenný trojúhelník má úhly při základně shodné.



4.6 Jestliže jsou si v trojúhelníku dva úhly rovny, strany proti těmto úhlům budou si rovny.

Nechť trojúhelníkem majícím úhel ABC shodný s úhlem ACB je ABC. Pravím, že strana AB je rovna straně AC. Jestliže se jí nerovná, jedna z nich je větší. Nechť AB je větší a je z ní uříznuta DB, která se rovná menší úsečce AC a body DC se spojí. Protože DB je shodná s AC, a BC je společná, dvě strany DB, BC jsou rovny příslušným stranám AC a CB a úhel DBC je roven úhlu ACB, tudíž základna DC je rovna základně AB. Trojúhelník DBC se bude rovnat trojúhelníku ACB, menší většímu, což je nesmyslné. AB tedy není rovna AC, jsou stejné.



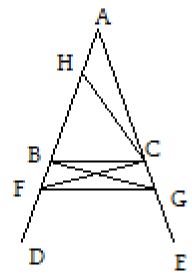
Podle Prokla stačilo místo nové propozice šikovně obrátit tu předchozí. Šlo by to dvěma způsoby:

(1) Jednoduchá konverze. Hypotéza a závěr změní pozice.
(2) Parciální konverze: Provádí se tam, kde je více hypotéz v první části tvrzení. Ty se modifikují v jednu a položí se jako výsledek obměněného tvrzení.

Proč Euklid neprovedl ani jednu konverzi, vysvětluje Poklus následovně:

(1) Druhá část páté propozice nebyla ta, kterou by Euklid chtěl použít za účelem konverze
(2) Může být vydedukována po přečtení propozice třináct. Lze pomocí ní dokázat, že jestliže úhly vytvořené protažením dvou stran trojúhelníka za základnu jsou stejné, úhly u základny jsou shodné.

Když konverzi neprovedl Euklid, provedl ji sám Proklus: Jestliže úhly tvořené protažením dvou stran trojúhelníka za základnu jsou stejné, trojúhelník je rovnoramenný.



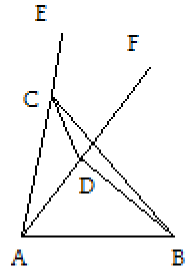
Důkaz: Nejprve pomocí čtvrté propozice dokážeme, že trojúhelníky BFC a CGB jsou shodné ve všech ohledech, tudíž FC je rovna GB a úhel BFC je roven CGB. Pak musíme dokázat, že AF, AG jsou shodné. Pokud ne, nechť AF je větší a je zní uříznuta část FH, která je rovna GA. CH spojím. Pak máme ve dvou trojúhelnících HFC, AGB dvě strany HF, FC rovné stranám AG, GB a úhel HFC je roven úhlu AGB. Tedy trojúhelníky HFC, AGB jsou shodné. Ale také trojúhelníky BFC, CGB jsou shodné. Tudíž trojúhelníky HBC, ABC jsou shodné což je nemožné. AF není nerovna AG, a jestliže od nich odečteme shodné úsečky BF, CG, dostaneme úsečky AB, AC, které jsou shodné.

4.7 Na téže úsečce z bodu jiného a jiného nepostavíš dvou úseček jiných týmž dvěma úsečkám střídavě rovných, majících tytéž paty na téže straně jako úsečky prvotní. (Servítův překlad propozice)

Jestliže je to možné, dvě úsečky AC, CB postavme na úsečku AB a protněme je v bodě C. Jiné dvě úsečky AD, DB postavme na stejnou úsečku AB, na stejné straně a mající tytéž paty, protínající se v jiném bodě D, takže by CA byla rovna DA mající s ní tu samou patu A, a CB byla rovna DB mající s ní tutéž patu B, a budiž spojeny body C, D.

Tedy AC je rovna AD, také úhel ACD je roven úhlu ADC, větší je tedy úhel ADC než DCB, tedy CDB je mnohem větší než DCB. Je-li zase CB rovna DB, také úhel CDB je roven úhlu DCB. Ale ukázalo se, že je mnohem větší, což je nemožné.

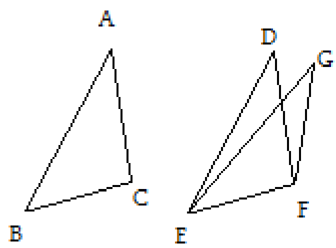
Proklus tvrdí, že důkaz není univerzální pravda, protože nepokrývá všechny případy. To, co Euklid popsal jako nemožné, může být pravda, jestliže jeden pár čar leží celý na dalším páru čar.



Je- li možné, úsečky AD, DB leží úplně na stranách trojúhelníka tvořeného stranami AC, CB s AB a nechť AC je rovno AD a BC rovno BD. Spojíme CD a prodloužíme AC, AD do bodů E, F. Potom, protože AC je rovna AD, trojúhelník ACD je rovnoramenný a úhly ECD, FDC pod základnou jsou shodné. Ale úhel ECD je větší než úhel BCD, tedy i úhel FDC he také větší než úhel BCD. A tak úhel BDC je větší mnohem více než BCD. Dále, protože DB je rovna CB, úhly u základny trojúhelníka BDC jsou shodné, to znamená, úhel BDC roven úhlu BCD. Takže stejný úhel BDC je větší i roven úhlu BCD, což je nemožné.

Případ, ve kterém D leží na AC nebo BC nevyžaduje důkaz. Nakonec ještě dodává, že propozice sedm se zachovala, protože byla požadována pro propozici osm.

4.8 Mají-li dva trojúhelníky příslušné strany shodné a mají-li základny shodné, budou mít stejné úhly sevřené stejnými úsečkami.



Důkaz: Nechť ABC, DEF jsou trojúhelníky mající shodné strany, AB je rovna DE, AC je rovna DF a základna BC je rovna základně EF. Říkám, že úhel BAC je roven úhlu EDF.

Je-li trojúhelník ABC přiložen na DEF a jestliže bod B je položen na bod E a úsečka BC na EF, bod C bude je krýt s F, protože BC je rovna EF.

Potom, BC splývající s EF, BA, AC se budou krýt s ED, DF. Neboť, bude-li základna BC krýt EF a strany BA, AC nebudou se krýt s ED, DF, ale budou-li se uchylovat jako EG, GF, potom, postaveny budou na téže úsečce z jiného (a jiného) bodu týmž dvěma úsečkám jiné dvě úsečky střídavě rovné, mající na stejné straně stejné paty.

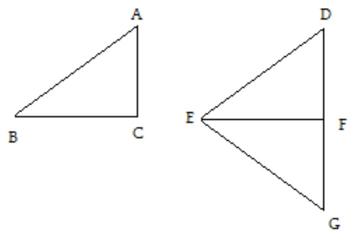
Ale není možné je postavit, jestliže základna BC je položena na základnu EF, strany BA, AC nemůžou splývat s ED, DF. Budou se tedy krýt, i úhel BAC bude splývat s úhlem EDF a budou shodné.

Proklus říká, že osmá propozice je částečnou konverzí propozice čtyři. A že Euklid se spokojil s důkazem rovnosti vrcholových úhlů a nepřipojuje, že trojúhelníky jsou shodné a zbývající odpovídající si úhly jsou také shodné jako v propozici čtyři z toho důvodu, že jestliže jsou jednou vrcholové úhly dokázány jako sobě rovné, ostatní vyplývají z propozice čtyři, která byla dokázána.

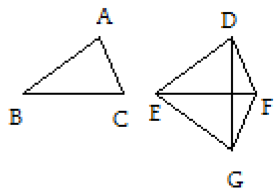
Alternativní důkaz se vyhýbá použití sedmé propozice: Nechť ABC, DEF jsou trojúhelníky mající shodné strany, AB je rovna DE, AC je rovna DF a základna BC je rovna základně EF. Nechť trojúhelník ABC je přiložen na DEF tak, že B leží na E a BC na EF, ale A se bude uchylovat na opačnou stranu úsečky EF od D, zaujímající pozici G. Pak C bude splývat s F, tedy BC je rovna EF.

FG bude vždy tvořit (1) jednu úsečku s DF nebo s ní tvořit úhel (v tom případě bude vždy (2) vnitřním nebo (3) vnějším bodem útvaru).

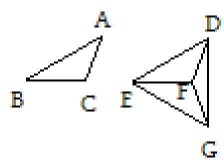
(1) Protože DE je rovna EG a DFG je úsečka, DEG je rovnoramenný trojúhelník a úhel u bodu D je roven úhlu u vrcholu G



(2) Nechť DG je prodloužena. Protože DE, EG jsou shodné, úhel EDG je roven EGD. A protože DF je rovna FG, úhel FDG je roven FGD. Tudíž celý úhel EDF je roven celému úhlu EGF.



(3) Nechť DG je spojena. Dále důkaz pokračuje jako předchozí příklad, kdy místo přičítání úhlů je odečítám a zbývající úhel EDF je roven úhlu EGF, to je úhlu BAC.

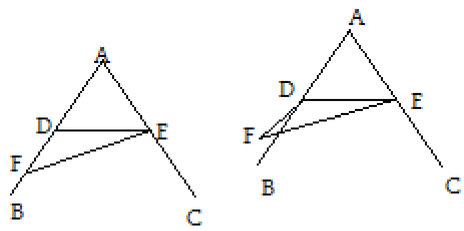


4.9 Rozpůlit daný úhel.

Konstrukce: Nechť BAC je daný úhel a má se rozpůlit. Nechť D je bod na AB a odřízněme od AC část, která se rovná AD, a spojme DE. Na DE postavme rovnostranný trojúhelník DEF a spojme AF. Říkám, že úhel BAC je úsečkou AF rozpůlen. Protože

AD je rovno AE a AF společná, tak obě úsečky DA, AF jsou příslušně rovny EA, AF. Základna DF se rovná základně EF, tudíž úhel DAF je roven EAF.

Proklus se zamýšlí, zda je bisekce vždy možná, říká, že daný úhel nesmí být tvořen křivkou. Také se zabývá umístěním bodu F, přidává náčrtky, které komentuje: FD je rovno FE a úhel FDE roven FED. Pak je úhel CED větší než úhel FDE a v druhém případě tím více větší. Ale protože ADE je rovnoramenný trojúhelník a ramena jsou prodloužena, úhly pod základnou jsou shodné, to je úhel CED je roven úhlu BDE. Ale úhel CED byl dokázán jako větší, což je nemožné.



Toto je druhý případ z Proklova pohledu, kdy je užitečná druhá část páté propozice pro vyvrácení námitek.

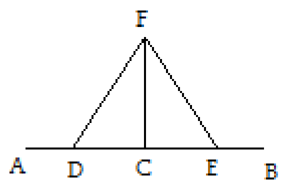
4.10 Rozpůlit danou úsečku

Nechť AB je daná úsečka, která se má rozpůlit. Nechť je na ní postaven rovnoramenný trojúhelník ABC a úhel ACB je úsečkou rozpůlen. Pravím, že úsečka AB je v bodě D rozpůlena. Protože AC je rovna CB a CD je společná, dvě strany AC, CD se rovnají příslušně dvěma stranám BC, CD a úhel ACD je shodný s BCD. Tedy základna AD je shodná se základnou BD a daná úsečka byla rozpůlena.

V komentáři Proklus upozorňuje, abychom nepřistoupili na původní hypotézu, že čára je vytvořena z nedělitelných částí. Těch částí je buď lichý, nebo sudý počet. Pokud lichý, bylo by nevyhnutelné popořadě půlit čáru, až bychom došli k nedělitelnému. V tomto případě ji není možné dělit. Jestliže není takto tvořena, je možné ji dělit nekonečněkrát. Tudíž dělitelnost nekonečných veličin bylo přijato jako geometrický princip, ne však nekonečná dělitelnost. Tedy, každou kontinuální úsečku lze dělit.

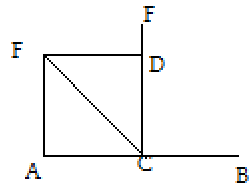
4.11 Na dané úsečce vztyčit kolmici v daném bodu na úsečce.

Konstrukce: Nechť je dána úsečka AB a bod C na ní. Nechť D je libovolný bod na AC a odřízněme CE rovnou CD. Postavme na úsečce DE rovnostranný trojúhelník FDE a spojme FC. Říkám, že na dané úsečce je vztyčena kolmice CF. Protože DC je rovna CF a



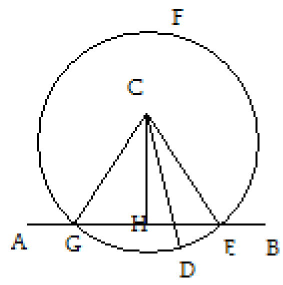
CF je společná, také strany DC, CF jsou rovny příslušným stranám EC, CF a základna DF je rovna základně FE, tudíž úhel DCF je roven ECF, protože jsou vedlejší. Když se potom postaví úsečka na úsečku tak, že vedlejší úhly jsou navzájem shodné, každý z nich je pravý. Tedy DCF i FCE jsou pravé úhly.

Proklova konstrukce se liší v tom, že je vztyčena v jednom z konců úsečky AB místo bodu na ní., protože prý nemáme dovoleno úsečku prodloužit. Je požadováno vztyčit kolmici v bodě A k úsečce AB. Na úsečce zvolme C a podle způsobu v propozici vytvořme CE s pravými úhly k AB. Z úsečky CE oddělme CD rovnou AC a rozpulme úhel ACE úsečkou CF a narýsujme úsečku DF s pravými úhly k úsečce CE protínající CF v bodě F. Spojme FA. Pak úhel FAC bude pravý. A protože v trojúhelnících ACF, DCF jsou strany AC, CF rovné příslušným stranám DC, CF a úhly ACF, DCF, trojúhelníky jsou shodné ve všech ohledech. Potom úhel u bodu A je roven tomu u bodu D a jsou pravé.



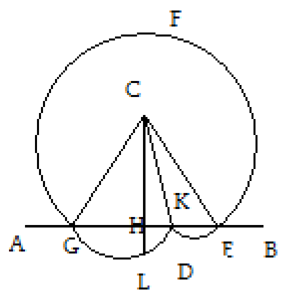
4.12 Z daného bodu spustit kolmici kolmici k dané úsečce.

Nechť AB je daná úsečka a bod C mimo ni. Vezměme libovolný bod D na druhé straně úsečky a narýsujme kruh EFG se středem C a poloměrem CD. Rozpulme úsečku EG v H a veďme spojnice CG, CH, CE. Říkám, že C je spuštěna kolmice CH na AB. Protože GH je rovna HE, HC je společná, obě úsečky GH, HC jsou rovny příslušným úsečkám EH, CH. Základna CG se rovná základně CE, tedy úhel CHG se rovná úhlu EHC. Jestliže se postaví úsečka na úsečku tak, že vedlejší úhly jsou stejné, každý z nich je pravý a úsečka se nazývá kolmicí.



Proklus rozlišoval dva druhy kolmic. Rovinné a prostorové, přičemž v tomto případě se podle něj jedná o rovinnou. Dále si pokládá otázku, jak si můžeme být jisti, že kruh protíná úsečku ve dvou bodech a ne ve třech a více? Bere v úvahu tři možné návrhy, ale dokazuje je nedostatečně. Jsou podobné a ten, který se mi zdál nejvíce věrohodný, uvedu.

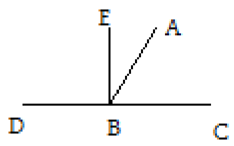
Předpokládejme, že kruh protíná AB ve třetím bodu K umístěném na GE. Rozpulme GE v H. Spojme CH a prodlužme ji, aby protnula kruh v L. Spojme CG, CK, CE.



Protože CG je rovno CE a CH je společná, zatímco základna CH je rovna HE, úhly CHG, CHE jsou shodné, protože jsou vedlejší, a jsou oba pravé. Protože CG je rovno CE, úhel u bodu G je roven tomu u bodu E. A protože je CG rovno CK a také CE, úhly CGK a CKG jsou shodné, rovněž úhly CKE, CEK. Tedy úhly CGK, CEK jsou shodné, následuje to, že úhly CKG, CKE jsou shodné a pravé. Potom úhel CKH je roven CHK a CH je rovna CK. Ale CK je rovna CL z definice kruhu. CH je tedy rovna CL, což je nemožné.

Nakonec důkazů připojuje, že není nutné umístit D mimo AB. Můžeme ho umístit kdekoliv na AB a opsat oblouk kruhu mezi D a bodem, ve kterém protne oblouk úsečku AB. Může se stát, že zvolený D je jediný, ve kterém kruh protíná AB. Stačí opsat kruh s poloměrem CD a pak, jestliže E je bodem kruhu, vzít F jako vzdálenější od C než bod E a opsat kruhový oblouk s poloměrem CF protínající AB ve dvou bodech.

4.13 Jestliže je úsečka tvoří postavena na jinou úsečku, bude s ní svírat dva pravé úhly nebo úhly rovné dvěma pravým.

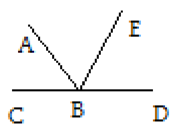


Důkaz: Nechť úsečka AB je postavena CD a tvoří úhly CBA, ABD, které jsou buď pravé, nebo rovny dvěma pravým. Je-li úhel CBA roven ABD, jsou to dva pravé. Pokud ne, veďme z bodu B k úsečce CD komici, BE, tedy úhel CBE a EBE jsou pravé. Platí, že CBE je roven součtu úhlů CBA a ABE, k oběma přičtěme úhel EBD. Tedy součet dvou úhlů CBE a ED je roven součtu tří úhlů CBA, ABE a EBD. Dále platí, že DBA je roven součtu DBE a EBA. K oběma přičtěme úhel ABC. Potom součet dvou úhlů DBA a ABC je roven součtu tří úhlů DBE, EBA, ABC. Ukázalo se, že i součet CBE a EBD se předchozím třem rovnají. Veličiny témuž rovné i navzájem jsou si rovny (postulát 1). Tudíž Součet CBE a EBD je roven součtu DBA a ABC, ale úhly CBE a EBD jsou pravé, tedy také DBA a ABC je rovnají dvěma pravým.

K tomuto důkazu Proklus nepřikládá komentář. Propozici zmiňuji pro jejich úplnost.

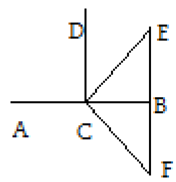
4.14 Jestliže s nějakou úsečkou a bodem na ní dvě úsečky neležící na stejné straně tvoří styčné úhly rovné dvěma pravým, ty dvě úsečky budou ležet v jedné úsečce.

Důkaz: Na nějaké úsečce AB v bodě B na ní vytvořte úsečky BC, BD ležící na různých stranách a tvořící styčné úhly ABC,



ABD, rovné dvěma pravým. Říkám, že BC a BD budou ležet v úsečce. Pokud tak neleží, leží v úsečce BE a BC. Úsečka AB tedy stojí na úsečce CBE, tudíž úhel ABC a ABE součet dvěma pravým. Ale také součet úhlů ABC a ABD je roven dvěma pravým. Tedy tyto součty se rovnají. Od nich odečtu úhel CBA, zbývající se tak musí rovnat. Rovná se menší většímu, což není možné. BE neleží v úsečce s BC. Podobně dokážeme, že žádná jiná kromě BD. Tedy, CB a BD leží v jedné úsečce.

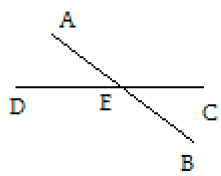
Proklův názor je následující. Dvě úsečky na stejné straně jako jiná úsečka a protínající ji v jednom a tom samém bodě, mohou tvořit s jednou a tou samou částí, ukončenou bodem, dva úhly rovné dvěma pravým. V tom případě nemohou úsečky ležet v jedné úsečce.



Vyzdvihuje konstrukci, kde dvě úsečky s danou úsečkou svírají úhly rovné polovině úhlu pravého. Přikládá obrázek, kde CE a CF jsou myšleny jako stanovené úsečky k CD, z kterého ale není vidět spojitost s popisem

4.15 Jestliže se dvě úsečky navzájem protínají, tvoří vrcholové úhly navzájem rovné.

Důkaz: Nechť úsečky AB, CD se protínají v bodě E. Říkám, že úhly AEC a DEB jsou shodné, též CEB a AED. Protože úsečka AE stojí na pečce CD, je součet úhlů CEA a AED rovný dvěma pravým (podle předchozí propozice). Dále úsečka DE stojí na AB, proto je součet úhlů AED a DEB rovný dvěma pravým. Bylo dokázáno, že součet CEA a AED je roven dvěma pravým úhlů. Tedy součet CEA a AED je roven součtu AED a DEB. Odečtěme společný úhel AED. Zbývající úhly CEA a BED se rovnají. Podobně se dokáže rovnost úhlů CEB a DEA.

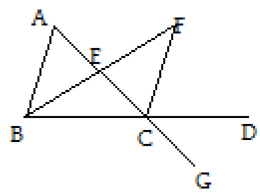


K této propozici přikládá obrácenou poučku, která by mohla stát na jejím místě. Jestliže se úsečka protne v jednom a tom samém bodě (leží na ní) s jinými dvěma přímkami na různých stranách a tvoří vrcholové úhly shodné, ty dvě úsečky na různých stranách tvoří úsečku jednu.

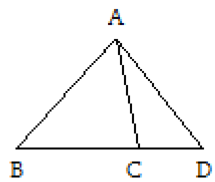
Důkaz neuvádí, což je u Prokla neobvyklé, protože je věta více než evidentní s ohledem na propozice 13, 14. Obsah této propozice je příkladem mající více podob. Takových příkladů je jen velmi málo a Proklus je nazývá výhrou nebo bonusem. Avšak je třeba dávat pozor, aby původní a obrácená věta vyjadřovaly totéž, jestliže chceme, aby obrácená zastupovala původní. Tak vznikají paradoxy geometrie, jestliže je mezi větami významová nuance.

Nakonec k propozici dodává, že jestliže úsečku protíná více úseček v jednom bodě na ní, součet všech vzniklých úhlů bude roven čtyřem úhlům pravým.

4.16 V každém trojúhelníku, jestliže jedna strana je prodloužena, je vnější úhel větší než kterýkoliv vnitřní úhel protější.



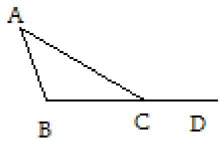
Důkaz: Nechť trojúhelníkem je ABC a prodloužená strana BC do D. Říkám, že vnější úhel ACD je větší než kterýkoliv vnitřní protější úhel CBA, BAC. Úsečku AC rozpulme v E a spojnici AC prodlužme do F. Úsečka BE se rovná EF. Spojme FC a prodlužme AC do G. Pak se budou rovnat úsečky AE s EC a BE s EF a součet AE s EB bude roven součtu CE s EF. Také úhly AEB a FEC budou shodné, protože jsou vrcholové. Základny AB a FC se též budou rovnat, proto trojúhelníky ABC a FEC se budou rovnat. Rovnat se budou i zbývající úhly, proti kterým leží stejné strany, tedy úhel BAE a ECF. Ale úhel ECD je větší než ECF, pak úhel ACD je větší než BAE. Podobně, pak úhel ACD je větší než ABC.



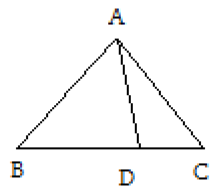
Proklus nám říká, že mnoho geometrů kombinovalo tuto propozici s tou následující do této podoby: V každém trojúhelníku, jestliže jedna strana je prodloužena, je vnější úhel větší než kterýkoliv z vnitřních protějších úhlů a každé dva vnitřní úhly jsou menší než dva úhly pravé. Euklid provedl podobnou věc, která bude zmíněna později. Nynější věta 16 umožňuje Proklovi uzavřít jednu z jeho poznámek z propozice 12, že k jedné úsečce nemůžou být z jednoho bodu vedeny tři shodné úsečky. Podle obrázku vysvětluje, že jestliže AB, AC jsou shodné, pak úhly ABC, ACB jsou shodné. Podobně AB, AD a úhly ABD, ADB. Pak se rovnají ACB a ADC, vnitřní vnějšímu, což je nemožné.

Dále se snaží dokázat, že pokud dvě úsečky, chýlící se k jiné další, tvoří vnější úhel rovný protějšímu vnitřnímu, nemohou tvořit trojúhelník. Protože v tom případě by byl jeden a ten samý úhel větší a roven najednou. Výsledek budou dvě rovnoběžky, které netvoří trojúhelník.

4.17 V každém trojúhelníku je součet jakýchkoli dvou úhlů menší než dva pravé.

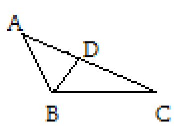


Důkaz: Nechť ABC je daný trojúhelník. Říkám, že je v něm součet jakýchkoli dvou úhlů menší než dva pravé. Prodlužme BC do D. Vnějším úhlem je ACD, je tedy větší než vnitřní protější úhel ABC. K oběma přičteme úhel ACB, pak součet ACD s ACB je větší než součet ABC s BCA. Ale Součet úhlů ACD s ACB je roven dvěma pravým, tedy součet ABC s BCA je menší než dva pravé úhly. Podobně i součet BAC s ACB je menší než dva pravé, stejně součet úhlů CAB a ABC.



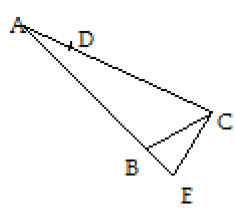
Proklus se snaží objevit příčinu této vlastnosti. Bere dvě úsečky tvořící pravý úhel s třetí příčkou a pozoruje, že trojúhelník vzniká sbíhavostí úseček a zmenšováním dvou pravých úhlů. Nespokojuje se s faktem, příčinou je vnější úhel větší než vnitřní protější úhel. Není dle něj nutné prodlužovat stranu a vytvářet vnější úhel. Pokládá si otázku, jak může to, co není nutné, být příčinou nutného? Jeho důkaz bez prodloužení strany je následující: V trojúhelníku ABC zvolí bod D na BC a spojí ho s bodem A. Vnější úhel ADC trojúhelníka ABD je větší než vnitřní protější úhel ACD. Součet úhlů ADB, ADC je větší než součet ABC s ACB, ale součet úhlů ADB, ADC je roven dvěma pravým. Pak součet ABC, ACB je menší než dva pravé. Nakonec dokazuje, že nemůže existovat více než jedna kolmice k úsečce z bodu mimo ni. Kdyby to bylo možné, dvě kolmice by tvořily trojúhelník, ve kterém jsou dva pravé úhly. To je nemožné, jelikož dva úhly (jakékoliv) jsou menší než dva pravé.

4.18 V každém trojúhelníku je proti větší straně větší úhel.



Důkaz: Nechť v trojúhelníku ABC je strana AC větší než AB. Říkám, že úhel ABC je větší než BCA. Odřízněme AD rovno AB od AC a spojme BD. Vnějším úhlem trojúhelníka BCD je ADB, je tedy větší než vnitřní protější úhel ADB, který je roven ABD. A protože strana AB je rovna AD, pak úhel ABD je větší než ACB a mnohem větší je tudíž ABC než ACB.

Propozice 18 a 19 mají mezi sebou podobný vztah jako propozice 5 a 6. A proto pomáhají studentům zapamatovat si, že jeden je demonstrován přímo a druhý nepřímo. Zmínka o studentech v Euklidově podání

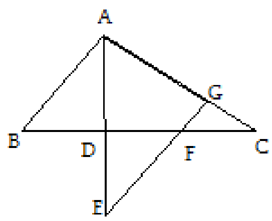


naznačuje, že vyučoval geometrii. Komentář ani důkaz Proklus nevyslovuje. Alternativní důkaz uvádí Porphyry, neoplatónský filozof 3. st. p. n. l. Začíná předpokladem, že délka rovna AB je uříznuta z druhého konce úsečky AC, to znamená, že CD je rovno AB a není rovno AD. Prodlužme AB do E tak, že BE je rovno AD a spojme EC. Pak, protože AB je rovno CD a BE rovno AD, AE je rovno AC. Úhel AEC je roven úhlu ACE. Nakonec úhel ABC je větší než úhel AEC, a proto větší než úhel ACE a úhel ABC je mnohem větší než ACB.

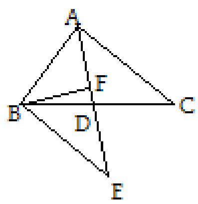
4.19 V každém trojúhelníku proti většímu úhlu leží delší strana.

Nechť v daném trojúhelníku ABC je úhel ABC větší než BCA. Říkám, že strana AC je delší než AB. Když tomu tak není, je AC rovno nebo menší straně AB. Strany AC, AB nejsou stejné. Kdyby ano, byly by stejné úhly ABC a ACB, ale nejsou. Tudíž AC, AB se nerovnají a ani AC není menší než AB, protože úhel ABC by byl menší než ACB, ale není. Tedy AC není menší ani rovna AB. Je větší než AB.

Podle Prokla Euklid ukazuje nemožnost býti menší nebo rovno právě rozdělením na jednotlivé případy, což je v rozporu s větou, která má být dokázána. Tento postup by byl možný, pokud by hypotéza, měla jinou podobu. Podává přímý důkaz, u kterého vyžaduje lemma: Pokud je úhel trojúhelníka rozpůlen a úsečka, která ho půlí, protíná základnu a rozděluje ji na dvě nestejné části, pak strany obsahující polovinu z rozdělovaného úhlu budou nerovné a větší bude ta z nich, která protíná větší část základny a menší ta, která protíná menší kus základny.



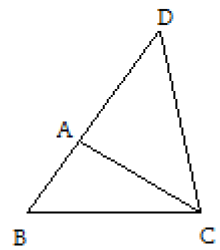
Lemma: AD půlí vrchol u bodu A trojúhelníka ABC a protíná stranu BC v bodě D, kde CD je větší než BD. Říkám, že AC je větší než AB. Prodlužme AD do E tak, že DE je rovna AD. A protože DC je větší než BD, odřízněme DF rovnou BD. Spojme EF a prodlužme ji do G. Protože strany AD, DB jsou rovny příslušně ED, DF a vrcholové úhly jsou shodné, AB je rovno EF, a úhel DEF úhlu BAD. Pak jsou AG, EG shodné a větší než EF nebo AB. AC je mnohem větší než AB.



Důkaz: V trojúhelníku ABC je úhel ABC větší než ACB. Rozpůlíme BC v D, Spojíme AD a prodloužíme ji do E tak, že DE je rovna AD. Spojíme BE. Pak BD, CD jsou stejné, též DE, DA a vrcholové úhly u D jsou shodné. Pak BE, AC jsou shodné, také úhly DBE a ten u vrcholu C. Ale vrchol u C je menší než ABC, pak úhel

DBE je menší než ABD. Tedy když BF půlí úhel ABE, protíná AE mezi A a D. Pak EF je větší než FA. Použitím lemma dostaneme, že BE je větší než BA, to je AC je větší než AB.

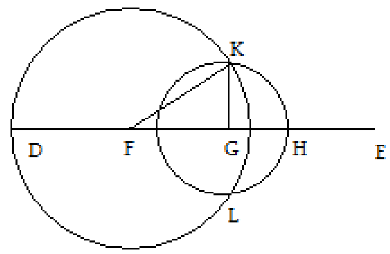
4.20 V každém trojúhelníku je součet kterýchkoli dvou stran větší než zbývající strana.



Důkaz: Prodlužme v trojúhelníku ABC BA do D tak, že AD, AC jsou shodné a spojme DC. Když DA, AC se rovnají, také úhly ADC, ACD se rovnají. Tedy úhel BCD je větší než ADC. A platí, že v trojúhelníku DCB je úhel BCD větší než BDC a proti větší mu úhlu leží větší strana, tedy DB je větší než BC. DA je ale rovna AC, tedy součet AB s BC je větší než CA, stejně i součet BC s CA je delší než AB.

Směšný důkaz této propozice byl přirovnáván k oslu, který stojí v jednom z vrcholů trojúhelníka a krmivo, které je v jiném vrcholu. Osel si vždy vybere tu cestu, která vede pouze jednou stranou, aby si cestu zkrátil. Z toho ale neplyne důkaz. Proklus tím chtěl obecně naznačit, že pouhá percepce nebo obhajoba toho, že je to tak evidentní bez vysvětlení proč, není důkazem.

4.21 Ze tří daných úseček sestrojit trojúhelník, v němž je součet kterýchkoli dvou stran větší než zbývající.



Konstrukce: Nechť DE je polopřímka. (Euklid nepoužil výraz polopřímka, ale úsečka ukončená v D a nekonečné délky ve směru E.) Nanesme na ni za sebou dané délky úseček trojúhelníka, ve kterém strana A je rovna DF, strana B rovna FG, strana C rovna GH. Středem F s poloměrem FD opišme kruh DKL a středem G s poloměrem GH opišme kruh KLH a spojme body KF, KG. Pak trojúhelník KFG je roven trojúhelníku sestaveného ze stran A, B, C. Protože F je středem kruhu DKL, jeho poloměry FD, FK jsou shodné. Dál, protože G je středem kruhu LKH, poloměry GH, GK jsou shodné. Úsečka FG je rovna B. Potom strany KF, FG, GK jsou rovny daným stranám A, B, C.

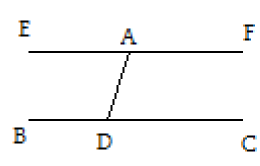
Proklus se ptá, jak si mohl být Euklid jist, že se oba kruhy protnou. Nabízí tři možnosti pozic kruhů: buď se dotýkají, nebo se neprotínají, nebo se protínají. Dál k případům připojil možnosti vnitřní a vnější dotyk/průnik/pozice. Z nich vyvodil, že v tomto případě se protínají (neřekl, v kolika v bodech, i když víme, že ve dvou).

Tuto konstrukci, říká Apollonius (3. - 2. st. p. n. l.), lze užít k jiné propozici, která dává úkol sestrojit na dané úsečce a bodu úhel, jenž je roven danému úhlu. Proklus tady vidí problém s polohou. V předchozí úloze máme tři úsečky a můžeme je umístit, jak je libo, kdežto při nanášení úhlu je poloha dána danou úsečkou. Proklus schvaluje Euklidovu samostatnou citaci propozice pro nanášení úhlu.

4.22 Shrnutí prozatímních propozic.

Převážná většina propozic se dosud týkala základních konstrukcí geometrických objektů a pak dokazováním, kdy jsou trojúhelníky shodné. Euklid uvádí podobnou sadu propozic pro trojúhelníky, které nejsou shodné, tu já nezmiňuji, neboť komentáře k nim jsou méně obsáhlé. Dále všechny předešlé mají tu společnou vlastnost, že ke své konstrukci nevyžadují existenci pátého postulátu o rovnoběžkách. V některých případech je nutné prodloužit úsečky ještě více, než kam dohlédneme, speciálně v případě, kdy se součet dvou úhlů jen o málo liší od dvou pravých, a když chceme dokázat součet úhlů v trojúhelníku. Euklid upozorňuje, že je nutné ho přijmout. Pokud ho tedy přijmeme, pak důkazy nikdy nebudou stoprocentní, protože nebude existovat nikdo, kdo potvrdí, že mnohem dál, kam naše oko dohlédne, se prodloužené úsečky protnou. V následujících propozicích by bez jeho užití nešly dokázat.

4.23 Daným bodem veď rovnoběžku s danou úsečkou.



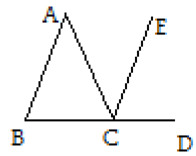
Konstrukce: Nechť je dána úsečka BC a bod A, kterým se má vést rovnoběžka. Vezměmě na BC libovolný bod D a spojme ho s A. Sestrojme úhel DAE rovný úhlu ADC a prodlužme úsečku EA do bodu F. Úsečka AD protíná dvě úsečky BC, EF a tvoří střídavé úhly EAD, ADC navzájem rovné, tedy EF je rovnoběžná s BC a bod A leží na úsečce EF.

Proklus odvozuje propozici z té, která vyjadřuje, že jestliže je každá z úseček rovnoběžná s třetí úsečkou, budou i první dvě navzájem rovnoběžné. Říká, že kdyby mohly být dvě úsečky vedené skrz jeden bod rovnoběžné ke stejné úsečce, obě dvě úsečky by byly rovnoběžné, ač by se protínaly v jednom bodě, což je nemožné.

4.24 Jestliže v daném trojúhelníku prodloužíme jednu z jeho stran, vnější úhel se rovná dvěma vnitřním protějším a tři vnitřní úhly rovnají se dvěma pravým.

Důkaz: Nechť ABC je daný trojúhelník a strana BC je prodloužena do D. Říkám, že vnější úhel ACD se rovná dvěma vnitřním protějším úhlům CAB a ABC a součet vnitřních úhlů ABC, BCA, CAB je roven dvěma pravým.

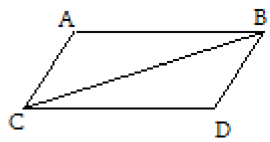
Bodem C veďme rovnoběžku s AB. Protože AB, CE jsou rovnoběžky proťaté příčkou AC, střídavé úhly BAC, ACE jsou si rovny. Dále jsou proťaty příčkou BD, proto úhly ECD a ABC jsou shodné (souhlasné úhly). Bylo dokázáno, že úhly ACE je roven BAC a tedy celý úhel ACD je roven součtu vnitřních protějších úhlů BAC, ABC. Jejich společným úhlem je ACB, tedy součet ACD, ACB je roven součtu ABC, BCA, CAB. Ale součet ACD, ACB je roven dvěma pravým, tedy také platí, že součet ACB, CBA, BAC je roven dvěma pravým.



Proklus začíná důkaz jinak, že vezmeme-li úsečku s dvěma kolmicemi a budeme je k sobě přibližovat tak, jako bychom chtěli vytvořit trojúhelník, uvidíme, že to bude záviset na postupném zmenšování stupně pravých úhlů. A to množství, jež se odebere od pravých úhlů, bude se přidávat k vrcholu trojúhelníka – a tak je vidět, že součet úhlů bude roven dvěma pravým. Tedy přijímá postulát pět, a fakt o vrcholovém úhlu můžeme spatřit zmíněním střídavých úhlů, které najdeme jako průsečík kolmice z vrcholu trojúhelníka na základnu, to je rovnoběžka ke každé z původních rovnoběžek.

4.25 V rovnoběžníkových plochách jsou protější strany i úhly navzájem stejné a úhlopříčka je půlí.

Nechť AB, CD jsou v rovnoběžníku rovnoběžné a BC úsečka, která je protíná. Střídavé úhly ACB, CBD jsou shodné. Trojúhelníky ABC, BCD mají úhly ABC, BCA rovné příslušně úhlům BCD, CBD a shodnou jednu stranu BC jim přilehlou. Zbývající strany a úhel bude také shodný. A protože úhly ABC, BCD jsou shodné a CBD, ACB také, pak i celý úhel ABD je roven celému ACD. Též úhly BAC, CDB jsou shodné. Pak i trojúhelníky ABC, BCD.



Podle Prokla současná propozice ukazuje rozdíl mezi obecnými a neobecnými teorémami. První část této je obecná, protože je pravdivá pouze ve všech rovnoběžnících, ale druhá část už nezahrnuje útvary, ve kterých je průměr/úhlopříčka (Euklid použil jeden výraz pro obojí, v angličtině diameter = průměr, úhlopříčka) také rozděluje na dvě shodné části (kruh, elipsa). Proklus by tento problém vyřešil nahrazením slova rovnoběžník v první části propozice, i když neví přesně čím, protože je těžké rozpoznat, co je společnou vlastností rovnoběžníků, kruhů a elips. Další problém vidí v tom, že protější úhly a strany mají shodné i některé mnohostěny, ale tam zas nemůže být řeč, že jsou půleny úhlopříčkou (leda nějakou plochou).

4.26 Rovnoběžníky se stejnou základnou mezi stejnými rovnoběžkami jsou shodné. (platí i pro trojúhelníky)

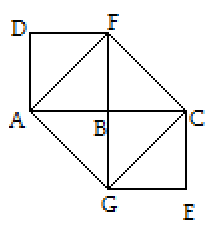
Důkaz je obdobný předchozímu, a to s využitím pátého postulátu, kritéria shodnosti úseček a úhlů. Proklus nazývá tyto propozice, kdy jde o porovnávání rovnoběžníku anebo trojúhelníku mezi dvěma rovnoběžkami, paradoxy. Paradoxem je podle něj to, že ačkoliv se strany rovnoběžníků (trojúhelníků) mění, jejich rovnost zůstává zachována, respektive jejich obsah zůstává zachován, i když budu pohybovat se stranami po rovnoběžkách do nekonečna. Vysvětlení hledal u starořeckého rozdělení tzv locus-theorem, v překladu zřejmě, tvrzení, které platí v celé v rovině/prostoru.

4.27 Nad danou úsečkou sestrojit čtverec.

Euklidův důkaz: Za pomoci rovnoběžek, kolmic a axiomu, co se kryje, je navzájem rovno.

Proklus vyslovuje tvrzení a jeho obrácenou větu, které se vztahují k této propozici a obě je dokazuje: Jestliže jsou čtverce narýsované na stejné úsečce, jsou stejné. A obráceně, jestliže jsou dva čtverce stejné, úsečky, na kterých jsou narýsovány, jsou shodné. První část důkazu je zřejmá, jestliže rozdělíme čtverce úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Druhá část říká, že umístíme dva shodné čtverce ABFD, CBGE tak, je AB, BC budou ležet v jedné úsečce. Pak, jelikož úhly jsou pravé, AB, BG bude též ležet v jedné úsečce. Spojme AF, FC, CG, GA. Teď, protože čtverce jsou shodné, trojúhelníky ABF, CBG jsou shodné.

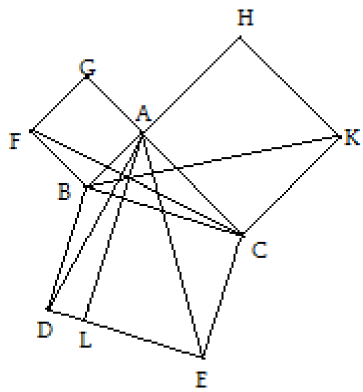
Připojme ke každému trojúhelník FBC, pak trojúhelníky AFC, GFC jsou shodné a tedy musí ležet mezi stejnými rovnoběžkami.



Potom jsou AG, AF rovnoběžky. A také, jelikož každý ze střídavých úhlů AFG, FGC je polovinou pravého úhlu, úsečky AF, cg jsou rovnoběžné. Tudíž AFCG je rovnoběžník a AF, CG jsou stejné. Tedy trojúhelníky ABF, CBG mají dva úhly a jednu stranu shodnou a AB je rovna BC a BF je rovna BG.

4.28 Důkaz Pythagorovy věty.

Důkaz Euklida: Nechť trojúhelník ABC má pravý úhel i vrcholu A. Tvrdím, že čtverec nad BC rovná se součtu čtverců nad BA a AC. Narýsujme čtverce nad všemi stranami. Z bodu A veďme rovnoběžku s BD a spojme AD, FC. Úhly BAC, BAG jsou pravé, proto na úsečce AB u bodu A tvoří dvě úsečky AC, AG s ní pravé úhly. Tedy AC, AG tvoří jednu úsečku. Ze stejné příčiny tvoří úsečku i BA, AH. Úhel DBC je roven úhlu FBA, protože jsou oba pravé. Přičtěme k nim úhel ABC, tedy celé úhly DBA a FBC se rovnají. Dále se rovnají DB, BC a FB, BA (strany čtverců). Potom úhly DBA, FBC jsou si rovny. Základna AD je rovna FC a trojúhelník ABD je roven trojúhelníku FBC. Dvakrát větší než trojúhelník ABD je rovnoběžník ABDL (mají stejnou základnu a jsou mezi týmiž rovnoběžkami). Dvakrát větší než trojúhelník FBC je čtverec ABFG (ze stejného důvodu). Pak i rovnoběžník ABDL se pak rovná čtverci ABFG. Vedením spojnic AE, BK se dokáže, že rovnoběžník ACEL se rovná čtverci ACKH. Celý čtverec BDEC se rovná součtu obou čtverců ABFG, ACKH.



Proklus tvrdí, že Euklidův důkaz, i když o dvě století po Pythagorovi, je mnohem zřetelnější a také mnohem rychlejší a že by tedy jeho provedení přisoudil Euklidovi. Proklus se zabýval aritmetickým stanoviskem, kdy budou strany určité délky tvořit pravoúhlý trojúhelník. Vzal náhodné liché číslo jako menší z odvěsen a z něho udělal čtverec. Odečetl od něj jednotku a toto číslo vydělil dvěma – dostal druhou odvěsnu. A k němu přičetl jednotu a dostal přeponu. Například vezme 3 jako náhodné liché číslo, které bude tvořit jednu z odvěsen a uděláme z něj čtverec, tedy devět. Odečteme jednotu, to je 8. Vydělíme dvěma a číslo 4 tvoří druhou odvěsnu. Přičtením jednotky dostáváme přeponu, tedy 5.

ZÁVĚR

Četba Základů, komentáře i dalších děl na dané téma mi otevřela brány do světa, který je bází dnešní školské geometrie. Porovnání mi nabídlo rozhled, jak který matematik zamýšlel své učení. Potvrdilo se, že matematika, konkrétně geometrie je svět velice pestrý a není to jen jedna verze předkládaná v seminářích.

V bakalářské práci jsem se pokusila porovnat postupy Euklida a Prokla, které shrnuji následovně:

Jak Euklides, tak Prokles své důkazy doplňují o názorné obrázky. I ty jsem já použila, aby čtenáři měli před očima konkrétní úsečky a úhly, o kterých mluvím. Oba se shodují na tom, že je třeba dát geometrii řád a sepsat pravidla, podle kterých se bude vyučovat. Při formulaci určitých jevů se neshodnou, a jelikož Proklus je mnohem mladší než Euklid, má sám možnost do spisů zasáhnout a opravit je k obrazu svému. A to také dělá.

Proklus by si často práci usnadnil odvozováním tvrzení z již předešlého tvrzení, případně by původní modifikoval tak, aby se dalo ještě použít nebo jeho obrácená verze, Euklid byl v tomhle ohledu opatrnější a o tvrzeních nepsal jako o obměněných, nýbrž jako samostatných.

Preciznější v dokazování byl Proklus, neboť velmi často nebral na zřetel to, co Euklid považoval za evidentní bez důkazu. Myslím, že někdy ta míra Proklova důkazu je nadměrná, že by se čtenář spokojil s míněním Euklida, že je to evidentní.

Co se týče využití dokázaných jevů, Euklid je použil hlavně na následné jevy, Proklus se je snažil co nejvíce zužitkovat. Například propozici 4.24 a její důsledky ke stanovení součtu úhlů v n-úhelníku. Pokaždé Proklus porovnal daný jev s dříve vyslovenými a hledal, jakou má návaznost na předešlé.

Obecnější stanoviska zaujímal Euklid, Proklus by nejraději vše rozděloval na jednotlivé podpřípady, aby si byl jist, že skutečně nenastane výjimka, pro kterou daná věta nebude platit.

Poznatky nastudované během zpracování práce mohou mi být užitečné v hodinách geometrie při demonstraci příkladů, ať už v budoucím studiu nebo následné profesi.
V práci by se dalo pokračovat v porovnávání, protože toto je jen jedna třináctina Euklidova díla.

Nezanedbatelný vliv má četba v angličtině, která přispěla k lepší schopnosti získávat informace v cizím jazyce.

LITERATURA

[1] EUCLID, *The Thirteen Books of Euclid´s Elements, Books 1 and 2*, Volume I, By Thomas L. Heath, Dover, 2007, 432 s., ISBN 0-486-60088-2

[2] EUKLEIDES, *Základy, Knihy I-IV,* překlad Servít, F, Vopěnka, P., Nymburk, 2007, 151 s., ISBN 80-903773-6-X

[3] VOPĚNKA, P. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci, Souborné vydání rozprav s geometrií,* Praha: Práh 2000, 918 s., ISBN 80-7252-022-9

[4] BUNT, L., JONES, P. *The historical roots of elementary mathematics,* Dover, 2002, 299 s., ISBN 0-486-25563-8

WEB

http://en.wikipedia.org/wiki/Proclus
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html