Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jindřich Lechner

Zobecněné metriky

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jaroslav Drahoš, CSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2010

Děkuji vedoucímu práce RNDr. Jaroslavu Drahošovi, CSc. za odborné vedení a za poskytnutí potřebné literatury.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 27.5. 2010 Jindřich Lechner

Obsah

Název práce: Zobecněné metriky
Autor: Jindřich Lechner
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jaroslav Drahoš, CSc.
e-mail vedoucího: drahos@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme základní vlastnosti zobecněných metrických prostorů, tzv. s-prostorů a q-prostorů. Funkce vzdálenosti definovaná na těchto prostorech nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost z definice metriky a místo ní vyhovuje nějaké slabší podmínce, která je určitým přirozeným zobecněním trojúhelníkové nerovnosti. Dále se věnujeme větám o pevných bodech zobrazení na s-prostorech. Cílem je zobecnit některé věty o pevných bodech zobrazení na metrických prostorech, které dokázal Kiyoshi ISEKI.

Klíčová slova: s-metriky, q-metriky, věty o pevných bodech.

Title: Generalized metrics
Author: Jindřich Lechner
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: RNDr. Jaroslav Drahoš, CSc.
Supervisor's e-mail address: drahos@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study basic properties of generalized metric spaces, called the s-spaces and q-spaces. Distance function defined on these spaces does not satisfy the triangle inequality from the definition of metrics and instead satisfies a weaker condition, which is a certain natural generalization of the triangle inequality. Furthermore, we deals with the fixed point theorems for maps on s-spaces. The aim is to generalize some fixed point theorems in metric spaces that Kiyoshi ISEKI proved.

Keywords: s-metrics, q-metrics, fixed point theorems.

Úvod

Záměrem práce je dokázat pro určitý druh zobecněných metrických prostorů analogická tvrzení, která platí v metrických prostorech.

V první kapitole definujeme dva typy zobecněných metrik, tzv. s-metriku a q-metriku, které místo trojúhelníkové nerovnosti splňují nějakou slabší podmínku. Následně se zabýváme základními vlastnostmi s-metrických a q-metrických prostorů a vzájemnou souvislostí těchto vlastností. Stejným způsobem jako v metrických prostorech definujeme úplnost, kompaktnost, sekvenciální kompaktnost, totální omezenost, omezenost, prekompaktnost, separabilitu a sledujeme v jakých vzájemných vztazích tyto vlastnosti jsou. Některá tvrzení platí úplně stejně jako v metrických prostorech. Například tvrzení, že každý kompaktní prostor je totálně omezený, platí i pro s-metrické prostory. Mnoho tvrzení ovšem v platnosti není a jako příklad uveďme, že ne každý totálně omezený s-prostor či q-prostor je omezený, že prekompaktnost není totéž co totální omezenost, apod. V takových případech často uvádíme protipříklady. Jeden zajímavým fakt, který by byl v metrických prostorech nemyslitelný, tvrdí, že ε-izolovaná posloupnost v q-prostoru může konvergovat. To je na první pohled možná překvapující. Příklad takového prostoru a posloupnosti je uveden v [1.12]. Konvergentní posloupnost tedy není v těchto zobecněných prostorech automaticky cauchyovská, ale v případě s-prostorů alespoň lze z každé konvergentní posloupnosti cauchyovskou vybrat [1.14]. Po přidání nějaké dodatečné vlastnosti, tedy po určitém zeslabení zobecnění metriky, jsou již některá tvrzení v platnosti v tom znění jako v metrickém prostoru. Jako příklad uveďme, že za určitého dodatečného předpokladu o s-metrice již platí, že každý totálně omezený prostor je omezený [1.19].

Ve druhé kapitole se speciálně věnujeme zobecňování některých vět o pevných bodech zobrazení na metrických prostorech (pro s-prostory). Některé věty jsme pro s-prostory zobecnili, u jiných jsme dokázali jejich určité analogie. Zaměřili jsme se především na věty, které pro metrické prostory dokázal Kiyoshi Iseki (1974).

Kapitola 1

Základní vlastnosti s-prostorů a q-prostorů

1.1 Pojem s-metriky a q-metriky

Pojem metriky zobecníme tak, že trojúhelníkovou nerovnost v definici metriky nahradíme nějakou slabší podmínkou. V následujících odstavcích uvádíme definice dvou různých zobecněných metrik, tzv. s-metriky a q-metriky.

Definice 1.1 (s-metrika a s-metrický prostor)**.** Nechť X je množina a s reálná funkce definovaná na $X \times X$ taková, že platí

(1) $\forall x, y \in X \;\; s(x,y) \geq 0$ a $s(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $\forall x, y \in X \;\; s(x,y) = s(y,x) \qquad$ (*symetrie*);

(S) $\forall x, y \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in X : \;\; s(y,z) < \delta \Rightarrow |s(x,z) - s(x,y)| < \varepsilon.$

Pak funkci s nazveme s-metrikou na X a dvojici (X,s) s-metrickým prostorem (krátce s-prostorem).

Definice 1.2 (q-metrika a q-metrický prostor)**.** Nechť X je množina a q reálná funkce definovaná na $X \times X$ taková, že platí (1), (2) z definice 1.1 a

$$\text{(Q)} \; \forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y, z \in X : \\ (q(x,y) < \delta \wedge q(y,z) < \delta) \Rightarrow q(x,z) < \varepsilon.$$

Pak funkci q nazveme q-metrikou na X a dvojici (X,q) q-metrickým prostorem (krátce q-prostorem).

Poznámka 1.3. (i) Vlastnost (S), respektive (Q), je v definici s-metriky, respektive q-metriky, místo trojúhelníkové nerovnosti. Je zřejmé, že každá metrika splňuje jak podmínku (S), tak (Q).

(ii) Nechť d je s-metrika nebo q-metrika. Pak

$$\mathcal{T} = \{G \subset X; \forall x \in G \ \exists \delta > 0 \ U(x,\delta) \subset G\},$$

kde $U(x,\delta) = \{y \in X;\ d(x,y) < \delta\}$, je topologie na X.

(iii) Podmínka (S) v definici s-metriky říká, že pro každé $x \in X$ je funkce $y \mapsto s(x,y)$ spojitá na X vzhledem k topologii definované v (ii).

Lemma 1.4. *Nechť (X,s) je s-metrický prostor a*

$$U(x,r) = \{y \in X;\ s(x,y) < r\}$$

je otevřená koule o středu x a poloměru r. Pak $U(x,r)$ je otevřená množina.

Důkaz. Zvolme $y \in U(x,r)$. Chceme ukázat, že existuje $\delta > 0$ takové, že $U(y,\delta) \subset U(x,r)$. Platí, že $s(x,y) < r$, tedy $r - s(x,y) > 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $\varepsilon < r - s(x,y)$. Podle podmínky (S) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $z \in X$ splňující $s(y,z) < \delta$ platí

$$|s(x,z) - s(x,y)| < \varepsilon \tag{1}$$

Z (1) pro každé $z \in U(y,\delta)$ dostaneme

$$s(x,z) < s(x,y) + \varepsilon < s(x,y) + r - s(x,y) = r$$

To znamená, že $z \in U(x,r)$, tedy $U(y,\delta) \subset U(x,r)$, a $U(x,r)$ je otevřená množina. $\square$

Poznámka 1.5. V q-prostoru není otevřená koule obecně otevřenou množinou. Konkrétní příklad uvedeme později [příklad 1.12]. Zatímco v s-prostoru je systém

$$\mathcal{B} = \{U(x,r);\ x \in X,\ r > 0\}$$

bází otevřených množin, v q-prostoru tomu tak není.

Poznámka 1.6. Pojmy konvergentní a cauchyovské posloupnosti definujeme v s-prostoru (q-prostoru) analogicky jako v metrickém prostoru. Pro pořádek: jestliže d je s-metrika nebo q-metrika na X a (x_n) je posloupnost v X, pak

$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \ \overset{def}{\Longleftrightarrow} \ \exists x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ d(x_n, x) < \varepsilon;$

(x_n) je *cauchyovská* v X $\ \overset{def}{\Longleftrightarrow} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$

Lemma 1.7 (jednoznačnost limity)**.** *Nechť (X, d) je s-prostor nebo q-prostor a (x_n) je posloupnost v X. Pak (x_n) má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Pro s-metriku: Postupujme sporem. Nechť (x_n) konverguje k $a \in X$ a zároveň k $b \in X$ a $a \neq b$. Pak $d(a, b) > 0$; zvolme $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. Podle podmínky (S) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $z \in X$ splňující $d(a, z) < \delta$ platí

$$|d(b, z) - d(b, a)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Konvergence (x_n) k a a b zaručuje existenci indexu n_0 takového, že pro každé $n \geq n_0$ je splněno

$$d(x_n, a) < \delta, \tag{2}$$

$$d(x_n, b) < \varepsilon. \tag{3}$$

Z (2) a (1) plyne, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|d(b, x_n) - d(b, a)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Z (4) a (3) dostáváme, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\frac{d(a, b)}{2} < d(b, x_n) < \varepsilon = \frac{d(a, b)}{2}\,.$$

A to je spor.

Pro q-metriku: Pro spor předpokládejme, že (x_n) konverguje k $a \in X$ a $b \in X$ a $a \neq b$. Položme $\varepsilon = d(a, b) > 0$. Podle podmínky (Q) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y, z \in X$ splňující $d(b, y) < \delta$ a $d(y, z) < \delta$ je $d(b, z) < \varepsilon$. Vzhledem ke konvergenci (x_n) k a a b existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ je $d(b, x_n) < \delta$ a $d(x_n, a) < \delta$. Tedy $d(b, a) < \varepsilon = d(a, b)$, a to je spor. □

Lemma 1.8. *Každý s-metrický prostor je Hausdorffův.*

Důkaz. Nechť (X, s) je s-metrický prostor. Zvolme prvky $x, y \in X$ takové, že $x \neq y$. Vzhledem k podmínce (S) existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $z \in X$ splňující $s(y, z) < \delta$ platí

$$|s(x, z) - s(x, y)| < \frac{s(x, y)}{2}\,.$$

Tedy pro všechna $z \in X$ taková, že $s(x, z) < \delta$ platí nerovnost

$$\frac{s(x, y)}{2} < s(x, z). \tag{1}$$

Označme $\varepsilon = \frac{s(x,y)}{2}$. Nyní stačí položit

$$G = U(x, \varepsilon), \qquad H = U(y, \delta).$$

Vzhledem k (1) dostáváme, že $G \cap H = \emptyset$ a tím je důkaz hotov. $\square$

Definice 1.9. Nechť (X, s) je s-metrický prostor. Řekneme, že s splňuje podmínku

- (CS) (s je *spojitá*), jestliže platí

$$\forall x, y \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall u, v \in X : \\ (s(x,u) < \delta \wedge s(y,v) < \delta) \Rightarrow |s(u,v) - s(x,y)| < \varepsilon.$$

- (UCS) (s je *polospojitá shora*), jestliže platí

$$\forall x, y \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall u, v \in X : \\ (s(x,u) < \delta \wedge s(y,v) < \delta) \Rightarrow s(u,v) < s(x,y) + \varepsilon.$$

- (ES) (funkce $f_x : y \mapsto s(x,y)$ jsou *stejně spojité*), jestliže platí

$$\forall y \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, z \in X : \\ s(y,z) < \delta \Rightarrow |s(x,z) - s(x,y)| < \varepsilon.$$

- (US) (funkce $f_x : y \mapsto s(x,y)$ jsou *stejnoměrně spojité*), jestliže platí

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y, z \in X : \\ s(y,z) < \delta \Rightarrow |s(x,z) - s(x,y)| < \varepsilon.$$

- (EUS) (funkce $f_x : y \mapsto s(x,y)$ jsou *stejně stejnoměrně spojité*), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y, z \in X : \; s(y,z) < \delta \Rightarrow |s(x,z) - s(x,y)| < \varepsilon.$$

Definice 1.10. Nechť (X, d) je s-metrický nebo q-metrický prostor. Řekneme, že d splňuje podmínku

- (U), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y, z \in X : \\ (s(x,y) < \delta \wedge s(y,z) < \delta) \Rightarrow s(x,z) < \varepsilon.$$

- (C), jestliže platí

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y, z \in X : \\ (s(x,y) < \delta \wedge s(x,z) < \delta) \Rightarrow s(y,z) < \varepsilon.$$

Poznámka 1.11.

1. $(US) \Rightarrow (Q)$.

   Důkaz. Potřebujeme ověřit podmínku (Q) z definice q-metriky. Zvolme libovolně $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Pak podle (US) existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $y, z \in X$ splňující $s(y,z) < \delta$ platí

   $$|s(x,y) - s(x,z)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

   Položme $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Pak pro každé $y, z \in X$ splňující $s(y,z) < \tilde{\delta}$ a $s(x,y) < \tilde{\delta}$ platí

   $$s(x,z) < s(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Tím je podmínka (Q) ověřena. □

2. $(ES) \Rightarrow (Q)$. Důkaz se provede analogicky jako v 1.

3. $(UCS) \Rightarrow (C)$.

   Důkaz. Zvolme $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Pak podle podmínky (UCS) existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $u, v \in X$ splňující $s(x,u) < \delta$ a $s(x,v) < \delta$ je $s(u,v) < s(x,x) + \varepsilon = \varepsilon$. □

4. $(EUS) \Rightarrow (CS)$.

   Důkaz. Zvolme $x, y \in X$ a $\varepsilon > 0$. Pak podle podmínky (EUS) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $a, b, c \in X$ splňující $s(b,c) < \delta$ platí

   $$|s(a,b) - s(a,c)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

   Zvolme $u, v \in X$ taková, že $s(x,u) < \delta$ a $s(y,v) < \delta$. Pak dostáváme

   $$\begin{aligned} |s(u,v) - s(x,y)| &\le |s(u,v) - s(u,y)| + |s(u,y) - s(x,y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

   □

5. $(EUS) \Rightarrow (U)$.

   Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak podle předpokladu (EUS) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y, z \in X$ splňující $s(y,z) < \delta$ platí

   $$|s(x,z) - s(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

   Položme $\tilde{\delta} := \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$ a zvolme $x, y, z \in X$ splňující $s(x,y) < \tilde{\delta}$ a $s(y,z) < \tilde{\delta}$. Pak platí $|s(x,z) - s(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy

   $$s(x,z) < s(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   □

6. Zřejmě: $(U) \Rightarrow (C)$.

V s-prostoru (q-prostoru) obecně neplatí, že konvergentní posloupnost je cauchyovská. O tom nás přesvědčí následující dva příklady.

Příklad 1.12 (v q-prostoru). Položme $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ a definujme funkci $q(0,n) = q(n,0) = 1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $q(m,n) = 1$ pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, $q(n,n) = 0$ pro $n \in X$. Zřejmě q je q-metrika na X. Posloupnost (n) konverguje k 0 a současně tvoří 1-izolovanou množinu, tedy (n) není cauchyovská, a dokonce ani neexistuje vybraná cauchyovská posloupnost.
Jak jsme slíbili v poznámce 1.5, ukážeme, že v tomto prostoru existuje otevřená koule, jež není otevřenou množinou. Vezměme kouli o středu 2 a poloměru 1. Do této koule jistě náleží 0. Pro spor předpokládejme, že $U(2,1)$ je otevřená množina. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $U(0,\delta) \subset U(2,1)$. Protože (n) konverguje k 0, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $q(n,0) < \delta$. Tedy $n \in U(0,\delta)$ a současně $q(n,2) = 1$. To znamená, že $n \notin U(2,1)$, a to je spor.

V metrickém prostoru je každá ε-izolovaná množina izolovaná (nemá v příslušném prostoru hromadný bod), ale podle předchozího příkladu tato implikace neplatí v q-metrických prostorech.

Příklad 1.13 (v s-prostoru). Následující příklad uvádí J. Drahoš v [1].
Položme

$$X = \{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\},$$

kde $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$ a $b_n = (0, \frac{1}{n})$. Definujme $s(a_n, b_n) = s(b_n, a_n) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$ a pro dvojice $(p,q) \in X \times X$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(p,q) \neq (a_n, b_n)$

a $(p,q) \neq (b_n, a_n)$, položme $s(p,q) = d(p,q)$, kde d je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^2$. Zřejmě s je s-metrikou na X. Definujme posloupnost $x_{2k} = a_k$ a $x_{2k-1} = b_k$, $k \in \mathbb{N}$. Pak posloupnost (x_n) konverguje k $(0,0)$, ale přitom $s(x_{2k}, x_{2k-1}) = 1$ pro $k \in \mathbb{N}$, tedy (x_n) není cauchyovská.

Položme si otázku, zda alespoň lze z konvergentní posloupnosti vybrat cauchyovskou. Co se týče q-prostorů, tak z příkladu 1.12 víme, že odpověď je záporná. U s-prostorů je tomu ovšem jinak. Platí totiž následující věta.

Věta 1.14. *Nechť (X,s) je s-metrický prostor a (x_n) je konvergentní posloupnost v X. Pak existuje vybraná posloupnost (x_{n_k}), která je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť (x_n) konverguje k $x \in X$. Indukcí zkonstruujeme vybranou cauchyovskou posloupnost. V prvním kroku zvolíme $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$s(x_{n_1}, x) < \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

Pak vzhledem k podmínce (S) existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $z \in X$ splňující $s(x,z) < \delta_1$ platí

$$|s(x_{n_1}, z) - s(x_{n_1}, x)| < \frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

Zvolme $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $n_2 > n_1$ a $s(x, x_{n_2}) < \min\{\delta_1, \frac{1}{4}\}$. Pak z (2) a (1) dostaneme $s(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Nechť je zkonstruováno k členů vybrané posloupnosti ($k > 1$) tak, že platí (1) a pro každé $i \in \{2, \ldots, k\}$ je splněno

$$s(x_{n_i}, x) < \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}, \frac{1}{2i}\}, \tag{3}$$

a dále pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ a každé $z \in X$ splňující $s(x,z) < \delta_i$ platí

$$|s(x_{n_i}, z) - s(x_{n_i}, x)| < \frac{1}{2i}\,. \tag{4}$$

Vzhledem k podmínce (S) lze k prvkům x_{n_k}, x nalézt $\delta_k > 0$ takové, že pro každé $z \in X$ splňující $s(x,z) < \delta_k$ platí (4), když místo i píšeme k. Zkonstruujme $(k+1)$. člen. Zvolme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tak, že $n_{k+1} > n_k$ a $s(x_{n_{k+1}}, x) < \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k, \frac{1}{2(k+1)}\}$. Pak z (4) a (3) dostaneme, že pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ platí $s(x_{n_i}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{i}$. Snadno se nyní ověří, že zkonstruovaná posloupnost (x_{n_k}) je cauchyovská. $\square$

Lemma 1.15. *Nechť (X, d) je s-metrický nebo q-metrický prostor splňující podmínku (C). Pak každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť (x_n) konverguje k $x \in X$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak podle (C) existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y, z \in X$ splňující $s(x, y) < \delta$ a $s(x, z) < \delta$ platí $s(y, z) < \varepsilon$. Protože (x_n) konverguje k x, existuje n_0 tak, že pro každé $n, m \geq n_0$ je $s(x_n, x) < \delta$ a $s(x_m, x) < \delta$. Pak podle (C) je $s(x_n, x_m) < \varepsilon$. □

1.2 Další vlastnosti

Definice 1.16. Nechť (X, d) je s-metrický nebo q-metrický prostor. Řekneme, že

- (X, d) je *omezený*, jestliže $diam\, X = sup\, \{d(x, y);\ x, y \in X\} < \infty$.
- (X, d) je *totálně omezený*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.
- (X, d) je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní v X.
- (X, d) je *prekompaktní*, jestliže ke každé posloupnosti v X existuje vybraná posloupnost, která je cauchyovská v X.
- (X, d) je *sekvenciálně kompaktní*, jestliže ke každé posloupnosti v X existuje vybraná posloupnost, která konverguje v X.
- (X, d) je *kompaktní*, jestliže ke každému otevřenému pokrytí prostoru X existuje vybrané konečné pokrytí X.
- (X, d) je *separabilní*, jestliže existuje spočetná hustá množina v X.

Víme, že každý totálně omezený metrický prostor je omezený. Jak to vypadá v případě q-metrických a s-metrických prostorů? Odpověď dávají následující dva příklady.

Příklad 1.17. Existuje q-metrický prostor, který je totálně omezený, ale není omezený.
Položme $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ a definujme $q(0, n) = q(n, 0) = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $q(m, n) = \max\{m, n\}$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \neq n$, $q(n, n) = 0$ pro $n \in X$.

Snadno nahlédneme, že q je q-metrika a X není omezený. Totální omezenost: zvolme libovolně $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pro $n \geq n_0$ je $q(n, 0) < \varepsilon$. Tedy množina $K_\varepsilon = \{0, 1, 2, \ldots, n_0\}$ je konečná ε-síť v X.

Tento příklad nám však nic neříká o s-prostoru, neboť q není zároveň s-metrikou. O tom se přesvědčíme sporem. Kdyby byla s-metrikou, pak platí podmínka (S), tedy pro 1 a 0, pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ splňující $q(x, 0) < \delta$ platí $|q(1, x) - q(1, 0)| < \varepsilon$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{m} < \delta$ a $m > 1$. Pak platí

$$1 \leq m - 1 = \left| m - \frac{1}{1} \right| = |q(1, m) - q(1, 0)| < \varepsilon = \frac{1}{2},$$

a to je spor.

Příklad 1.18. Existuje s-metrický prostor, který je totálně omezený, ale není omezený.
Opět položme $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definujme $s(0, n) = s(n, 0) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $s(m, n) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \neq n$, $s(n, n) = 0$ pro $n \in X$. Podmínka (S) plyne z toho, že prostor X je izolovaný. X je tedy s-metrický prostor, který zřejmě není omezený. Totální omezenost: zvolme libovolně $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tedy pro $n > n_0$ platí $s(n_0, n) < \varepsilon$. Množina $K_\varepsilon = \{0, 1, \ldots, n_0\}$ je konečná ε-síť v X.

Můžeme se ptát, jakou vlastnost je nutné přidat k s-metrice (q-metrice), aby každý totálně omezený prostor byl nutně omezený.

Lemma 1.19. *Nechť (X, s) je totálně omezený s-prostor a s splňuje podmínku (EUS). Pak (X, s) je omezený.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak vzhledem k podmínce (EUS) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $a, b, c \in X$ splňující $s(b, c) < \delta$ platí

$$|s(a, c) - s(a, b)| < \varepsilon.$$

Z totální omezenosti X plyne existence konečné δ-sítě, kterou označíme K_δ. Z konečnosti K_δ plyne, že $\operatorname{diam} K_\delta < \infty$. Zvolme libovolně $x, y \in X$. Pak existují $u, v \in K_\delta$ taková, že $s(y, v) < \delta$ a $s(x, u) < \delta$. Pak s ohledem na (EUS) dostáváme $|\, s(x, v) - s(x, y)| < \varepsilon$ a $|\, s(v, u) - s(v, x)| < \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned} s(x, y) &= |\, s(x, y) - s(x, v) + s(x, v) - s(v, u) + s(v, u)| \\ &\leq |\, s(x, y) - s(x, v)| + |\, s(x, v) - s(v, u)| + s(v, u) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + diam\, K_\delta =: c. \end{aligned}$$

Množina $\{s(x,y);\ x,y \in X\}$ je vskutku omezená v $\mathbb{R}$, průměr X je tedy menší než $+\infty$, a X je omezený. $\square$

Následující lemma v q-prostoru obecně neplatí, viz poznámku 1.22.

Lemma 1.20. *Nechť (Y,s) je s-metrický prostor, $X \subset Y$ je úplný. Pak X je uzavřený v Y*

Důkaz. Nechť (x_n) je posloupnost v X, která konverguje k $x \in Y$. Pak podle věty 1.14 existuje vybraná posloupnost (x_{n_k}), která je cauchyovská v Y. Vzhledem k tomu, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $x_{n_k} \in X$, posloupnost (x_{n_k}) je cauchyovská v X a protože X je úplný, též konverguje v X. Z jednoznačnosti limity plyne, že $x \in X$. $\square$

Lemma 1.21. *Nechť (Y,s) je úplný s-metrický prostor a $X \subset Y$. Pak X je uzavřený v Y, právě když X je úplný.*

Důkaz. Implikace zprava doleva byla dokázána v lemmatu 1.20 a opačná implikace se dokazuje stejně jako v metrickém prostoru. $\square$

Poznámka 1.22. Existuje úplný q-metrický prostor, který není v nějakém větším q-prostoru uzavřený.
Můžeme vzít množinu $\mathbb{N}$ opatřenou q-metrikou definovanou v příkladě 1.17. Prostor $\mathbb{N}$ je úplný, neboť v něm neexistuje žádná cauchyovská posloupnost a přitom není uzavřený v $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poznámka 1.23. Každý sekvenciálně kompaktní s-metrický prostor je úplný. Důkaz proběhne stejně jako v metrickém prostoru. V důkazu se využívá spojitosti funkcí $f_x : y \mapsto s(x,y)$. A tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou (S).

Lemma 1.24. *Každý sekvenciálně kompaktní q-metrický prostor je úplný.*

Důkaz. Nechť (x_n) je cauchyovská posloupnost v sekvenciálně kompkatním q-prostoru (X,q). Ukážeme, že (x_n) je konvergentní v X. Podle předpokladu existuje vybraná posloupnost (x_{n_k}), která konverguje k nějakému $x \in X$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle podmínky (Q) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y,z \in X$ splňující $q(x,y) < \delta$ a $q(y,z) < \delta$ platí

$$q(x,z) < \varepsilon. \tag{1}$$

Protože (x_n) je cauchyovská, existuje n_0 takové, že pro každé $m,n \geq n_0$ platí

$$q(x_m,x_n) < \delta. \tag{2}$$

Protože (x_{n_k}) konverguje k x a (n_k) je rostoucí, existuje k takové, že $n_k \geq n_0$ a $q(x_{n_k}, x) < \delta$. Zvolme $i \geq n_0$. Pak podle (2) dostaneme $q(x_i, x_{n_k}) < \delta$ a podle (1) platí $q(x_i, x) < \varepsilon$. Tím je důkaz hotov. □

Příklad 1.25. Sekvenciálně kompaktní s-metrický nebo q-metrický prostor není obecně omezený.
Položme $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definujme $d(n, n+1) = d(n+1, n) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $d(m, n) = \frac{1}{\min\{m,n\}}$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $|m - n| > 1$, $d(n, n) = 0$ pro $n \in X$, $d(0, n) = d(n, 0) = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě d je s-metrika i q-metrika. Z každé posloupnosti v X lze vybrat konvergentní a přitom $\operatorname{diam} X = \infty$, tedy X není omezený.

Lemma 1.26. *Nechť (X, s) je sekvenciálně kompaktní s-metrický prostor. Nechť s splňuje podmínku (UCS), tedy funkce s je polospojitá shora. Pak X je omezený.*

Důkaz. Postupujme sporem. Nechť X není omezený. To znamená, že ke každému $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in X$ taková, že $s(x_n, y_n) > n$. Podle předpokladu existují vybrané posloupnosti (x_{n_k}), (y_{n_k}) takové, že (x_{n_k}) konverguje k $x \in X$ a (y_{n_k}) konverguje k $y \in X$. Z podmínky (UCS) plyne, že od jistého k_0 je pro každé $k \geq k_0$ splněno $s(x_{n_k}, y_{n_k}) < s(x, y) + 1$. A to je spor, neboť $s(x_{n_k}, y_{n_k}) > n_k$ a (n_k) je rostoucí posloupnost přirozených čísel. □

Poznámka 1.27. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ je každá ε-izolovaná množina v X konečná, pak je X totálně omezený s-metrický nebo q-metrický prostor. Důkaz se provede stejně jako v metrickém prostoru. Důsledkem je, že každý prekompaktní s-prostor nebo q-prostor je totálně omezený. Zatímco v metrickém prostoru pojmy prekompaktnosti a totální omezenosti splývají, v námi zkoumaných zobecněných metrických prostorech tomu tak není. Z totální omezenosti obecně neplyne prekompaktnost. Co se týče q-prostorů, tak příklad 1.12 definuje totálně omezený q-prostor, který není prekompaktní. Příklad takového s-prostoru je následující.

Příklad 1.28. Existuje s-metrický prostor, který je totálně omezený a není prekompaktní.
Položme $X = \mathbb{N}$ a definujme $s(m, n) = s(n, m) = \frac{1}{n}$ v případě, že n je liché, m je sudé a $n < m$, $s(m, n) = s(n, m) = \frac{1}{m}$ v případě, že n je liché, m je sudé a $m < n$, $s(m, n) = 1$ pro m, n obě různá lichá, nebo m, n obě různá sudá, $s(n, n) = 0$ pro $n \in X$. Zřejmě s je s-metrika na X. Dále je X totálně omezený: zvolme $\varepsilon > 0$; pak existuje n liché takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Množina $K_\varepsilon = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ je konečná ε-síť v X. Ovšem prostor X není prekompaktní: například posloupnost po dvou různých sudých čísel tvoří 1-izolovanou množinu.

Lemma 1.29. *Nechť (X, d) je totálně omezený s-metrický nebo q-metrický prostor a d splňuje podmínku (U). Pak pro každé $\varepsilon > 0$ je každá ε-izolovaná množina konečná.*

Důkaz. Postupujme sporem. Nechť pro nějaké $\varepsilon > 0$ existuje ε-izolovaná množina, která je nekonečná. Označme ji A. Vzhledem k podmínce (U) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y, z \in X$ splňující $d(x, y) < \delta$ a $d(y, z) < \delta$ je $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože X je totálně omezený, existuje v něm konečná δ-síť K_δ. Vzhledem k nekonečnosti A existují dva prvky $u, v \in A$, $u \neq v$, a $w \in K_\delta$ takové, že $d(u, w) < \delta$ a $d(v, w) < \delta$. Pak ovšem $d(u, v) < \frac{\varepsilon}{2}$, a to je spor, neboť A je ε-izolovaná. □

Lemma 1.30. *Nechť (X, s) je sekvenciálně kompaktní s-metrický prostor. Pak X je totálně omezený.*

Důkaz. Postupujme nepřímo. Nechť X není totálně omezený. Pak podle poznámky 1.27 existuje pro nějaké $\varepsilon > 0$ nekonečná ε-izolovaná množina. Z této množiny vybereme nekonečnou posloupnost. Ta zřejmě není cauchyovská a ani z ní nelze vybrat cauchyovskou. Podle věty 1.14 z ní nelze vybrat konvergentní. Tedy X není sekvenciálně kompaktní. □

Lemma 1.31. *Nechť (X, q) je sekvenciálně kompaktní q-metrický prostor a q splňuje podmínku (C). Pak X je totálně omezený.*

Důkaz. Postupujme sporem. Nechť X není totálně omezený, tedy není ani prekompaktní. To znamená, že existuje posloupnost, ze které nelze vybrat cauchyovskou. Z této posloupnosti nelze vybrat ani konvergentní, neboť pak by podle podmínky (C) byla tato vybraná posloupnost cauchyovská. A vzhledem k tomu, že X je sekvenciálně kompaktní dostáváme spor. □

Lemma 1.32. *Nechť (X, q) je separabilní q-metrický prostor. Pak existuje spočetný soubor otevřených koulí takový, že každá otevřená množina je sjednocením nějakého jeho podsouboru.*

Důkaz. Nechť množina M je spočetná hustá v X. Množina všech kladných racionálních čísel $\mathbb{Q}^+$ je hustá v $\mathbb{R}^+$. Definujme

$$\mathcal{K} = \{U(x, r);\ x \in M,\ r \in \mathbb{Q}^+\}$$

Množina $\mathcal{K}$ je zřejmě spočetná. Zvolme nyní otevřenou množinu G a $x \in G$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U(x, \varepsilon) \subset G$. Podle podmínky (Q) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y, z \in X$ splňující $q(x, y) < \delta$ a $q(y, z) < \delta$ platí

$$q(x, z) < \varepsilon. \tag{1}$$

Dále zvolme $r \in \mathbb{Q}^+$ splňující $r < \delta$. Vzhledem k hustotě M v X existuje $u \in M$ takové, že

$$q(x, u) < r. \tag{2}$$

Pak podle (1) pro každé $z \in U(u, r)$ platí $q(x, z) < \varepsilon$, tedy $z \in U(x, \varepsilon)$. Jinými slovy

$$U(u, r) \subset U(x, \varepsilon) \subset G.$$

A vzhledem k (2) platí, že $x \in U(u, r)$. Tím je důkaz dokončen. □

Lemma 1.33. *Nechť (X, s) je s-metrický prostor a s splňuje podmínku (ES) nebo (US). Pak X je separabilní, právě když existuje spočetná báze otevřených množin.*

Důkaz. Nejprve dokážeme implikaci zprava doleva. Nechť $\mathcal{B} = \{G_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná otevřená báze taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je G_n neprázdná. Tedy z každé G_n můžeme vybrat nějaký prvek x_n. Množina $\{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná a hustá v X, neboť když zvolíme $x \in X$ a $\varepsilon > 0$, pak $U(x, \varepsilon)$ je otevřená množina, a protože $\mathcal{B}$ je báze, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in G_n \subset U(x, \varepsilon)$, a tedy $s(x, x_n) < \varepsilon$.
Nyní přejděme k opačné implikaci. Protože s splňuje (ES) nebo (US), dostáváme podle poznámky 1.11, že s je q-metrika a podle lemmatu 1.32 platí závěr tvrzení, neboť otevřené koule jsou otevřené množiny. □

Lemma 1.34. *Nechť (X, q) je separabilní q-metrický prostor. Pak z každého otevřeného pokrytí prostoru X lze vybrat spočetné podpokrytí.*

Důkaz. Z lemmatu 1.32 víme, že existuje spočetný soubor otevřených koulí $\mathcal{K}$ (ne nutně jsou to otevřené množiny) takový, že pro každou otevřenou množinu G a $x \in G$ existuje $U \in \mathcal{K}$, že $x \in U \subset G$. Důkaz dále pokračuje stejně jako v metrickém prostoru. □

Poznámka 1.35. Každý kompaktní q-metrický nebo s-metrický prostor je sekvenciálně kompaktní. Důkaz je stejný jako v metrickém prostoru. Ptejme se, jak je to s opačnou implikací. O tom pojednávají následující lemmata.

Lemma 1.36. *Nechť (X, q) je sekvenciálně kompaktní q-metrický prostor a q splňuje podmínku (C). Pak X je kompaktní.*

Důkaz. Z lemmatu 1.31 plyne, že X je totálně omezený. Pak je X zřejmě separabilní. Podle lemmatu 1.34 lze tedy z každého otevřeného pokrytí X vybrat spočetné podpokrytí. Protože X je sekvenciálně kompaktní, lze z každého spočetného otevřeného pokrytí vybrat konečné podpokrytí. □

Lemma 1.37. *Nechť (X, s) je sekvenciálně kompaktní s-metrický prostor a s splňuje podmínku (ES) nebo (US). Pak X je kompaktní.*

Důkaz. Podle lemmatu 1.30 je X totálně omezený. A protože s splňuje alespoň jednu z podmínek (ES), (US), máme, že s je q-metrikou. Zbytek plyne z předchozího lemmatu. □

Lemma 1.38. *Nechť (X, s) je úplný s-metrický prostor a s splňuje podmínku (U). Nechť $A \subset X$ je totálně omezená množina. Pak $\overline{A}$ je sekvenciálně kompaktní.*

Poznamenáváme, že s-metrika ve znění lemmatu 1.38 je automaticky q-metrikou.

Důkaz. Ukážeme, že z každé posloupnosti v $\overline{A}$ lze vybrat konvergentní posloupnost. Nechť (x_n) je posloupnost v $\overline{A}$. Pak existuje posloupnost (y_n) v A taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$.
Nyní z (y_n) vybereme cauchyovskou posloupnost. Podle podmínky (U) existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro všechna $u, v, w \in X$ splňující $s(u, v) < \delta_1$ a $s(v, w) < \delta_1$ platí

$$s(u, w) < 1. \tag{1}$$

Protože A je totálně omezená množina, existuje v A konečná δ_1-síť. Označme ji K_1. Nutně existuje prvek $z \in K_1$ takový, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí $s(y_n, z) < \delta_1$. Z posloupnosti (y_n) vybereme posloupnost (y_n^1) takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s(y_n^1, z) < \delta_1$. Z (1) dostáváme, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ je $s(y_m^1, y_n^1) < 1$. Nechť jsme zkonstruovali vybranou posloupnost (y_n^k) z posloupnosti (y_n^{k-1}), kde $k \geq 1$ a $(y_n^0) = (y_n)$. Podle indukčního předpokladu platí pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$

$$s(y_m^k, y_n^k) < \frac{1}{k}\,.$$

Podle podmínky (U) existuje $\delta_{k+1} > 0$ takové, že pro každé $u, v, w \in X$ splňující $s(u,v) < \delta_{k+1}$ a $s(v,w) < \delta_{k+1}$ platí

$$s(u,w) < \frac{1}{k+1}\,. \tag{2}$$

Protože A je totálně omezená množina, existuje v A konečná δ_{k+1}-síť, kterou označíme K_{k+1}. Pak existuje $z \in K_{k+1}$ takové, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí $s(y_n^k, z) < \delta_{k+1}$. Vybereme tedy z (y_n^k) posloupnost (y_n^{k+1}) takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ bude splněno $s(y_n^{k+1}, z) < \delta_{k+1}$. Z (2) dostáváme, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$s(y_m^{k+1}, y_n^{k+1}) < \frac{1}{k+1}\,.$$

Nyní definujme posloupnost $\xi_n = y_n^n$. Posloupnost (ξ_n) je zřejmě vybraná posloupnost z (y_n) a zároveň je cauchyovská. Z toho plyne, že je konvergentní v X, neboť X je úplný. Její limitní bod označme y_0.
Ukažme, že posloupnost (x_n) má vybranou posloupnost, která konverguje k y_0. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Pak podle podmínky (U) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $u, v \in X$ splňující $s(u,v) < \delta$ a $s(u, y_0) < \delta$ platí

$$s(y_0, v) < \varepsilon. \tag{3}$$

Dále existuje k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ je splněno $s(\xi_k, y_0) < \delta$ a $s(\xi_k, x_{n_k}) < \delta$, kde (n_k) je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\xi_k = y_{n_k}$. Pro každé $k \geq k_0$ je podle (3) splněno $s(x_{n_k}, y_0) < \varepsilon$. Tedy (x_{n_k}) konverguje k y_0 v X a protože $\overline{A}$ je uzavřená v X, platí $y_0 \in \overline{A}$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Kapitola 2

Věty o pevném bodě

Naším cílem bude zobecnit některé věty o pevném bodě. Kiyoshi Iseki dokázal v článku [3] následující větu.

Věta 2.1. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Nechť T je spojité zobrazení prostoru X do X takové, že pro každé $x, y \in X$ splňující $x \neq y$, $x \neq Tx$, $y \neq Ty$ platí*

$$\begin{aligned}\rho(Tx, Ty) < \alpha\, \rho(x, y) &+ \beta\, [\rho(x, Tx) + \rho(y, Ty)] \\ &+ \gamma\, [\rho(x, Ty) + \rho(y, Tx)],\end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ a $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 1$. Jestliže existuje bod $x \in X$ takový, že z posloupnosti $(T^n x)$ lze vybrat konvergentní posloupnost $(T^{n_k} x)$, pak T má pevný bod.

Poznamenáváme, že $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n\,\text{krát}}$

Věta 2.1 je zobecněním následující Edelsteinovy věty.

Věta 2.2 (Edelsteinova věta)**.** *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a T je zobrazení prostoru X do X takové, že pro všechna $x, y \in X$ splňující $x \neq y$ platí*

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y).$$

Jestliže existuje bod $x \in X$ takový, že posloupnost $(T^n x)$ má vybranou posloupnost $(T^{n_k} x)$, která konverguje k nějakému bodu x_0, pak $Tx_0 = x_0$.

Naším cílem je nyní dokázat určité analogie Edelsteinovy a Isekovy věty pro s-metrické prostory. Isekova věta pro s-prostory je zobecněním Edelsteinovy věty. Nejprve však dokažme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 2.3. *Nechť (X, s) je s-metrický prostor a s splňuje podmínku (ES). Nechť T je spojité zobrazení prostoru X do X. Pak funkce f definovaná předpisem*

$$f(x) = s(x, Tx), \qquad x \in X$$

je spojitá na X.

Důkaz. Zvolme libovolně $a \in X$ a $\varepsilon > 0$. Protože s splňuje podmínku (ES), existuje $\tilde{\delta} > 0$ takové, že pro všechna $u, v \in X$ splňující $s(u, Ta) < \tilde{\delta}$ platí

$$|s(v, u) - s(v, Ta)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že T je spojité a s splňuje (S), existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in X$ splňující $s(x, a) < \delta$ platí

$$s(Tx, Ta) < \tilde{\delta}\,, \tag{2}$$

$$|s(Ta, x) - s(Ta, a)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3}$$

Zvolme $x \in X$ takové, že $s(x, a) < \delta$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} |s(x, Tx) - s(a, Ta)| &\le |\, s(x, Tx) - s(x, Ta)| + |s(x, Ta) - s(a, Ta)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Použili jsme postupně (2), (1), kde jsme za v dosadili x, a nakonec (3). Tím je důkaz hotov. □

Lemma 2.4. *Nechť (X, s) je neprázdný sekvenciálně kompaktní s-metrický prostor a f je reálná zdola polospojitá funkce definovaná na X. Pak existuje bod $\xi \in X$, ve kterém funkce f nabývá svého minima na X.*

Důkaz. Protože X je neprázdná množina, je množina $f(X)$ též neprázdná. Označme $\imath = \inf f(X) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Nechť (y_n) je posloupnost reálných čísel z $f(X)$ taková, že $y_n \to \imath$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $x_n \in X$ takový, že $f(x_n) = y_n$. Z posloupnosti (x_n) lze vybrat konvergentní posloupnost (x_{n_k}), neboť X je sekvenciálně kompaktní. Limitu posloupnosti (x_{n_k}) označme ξ. Vzhledem k tomu, že f je v bodě ξ polospojitá zdola a $(f(x_{n_k}))$ konverguje k $\imath$, je nutně $\imath \in \mathbb{R}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index k_0 takový, že pro všechna $k \ge k_0$ platí

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x_{n_k}) < \imath + \varepsilon.$$

Zřejmě $\imath \leq f(\xi)$, a tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index k_0 takový, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x_{n_k}) < f(\xi) + \varepsilon.$$

Dostáváme, že $(f(x_{n_k}))$ konverguje k $f(\xi)$ a z jednoznačnosti limity plyne, že $f(\xi) = \imath$. Tedy funkce f nabývá v bodě ξ svého minima na X. $\square$

Věta 2.5. *Nechť (X, s) je neprázdný sekvenciálně kompaktní s-metrický prostor a s splňuje podmínku (ES). Nechť T je zobrazení prostoru X do X takové, že pro všechna $x, y \in X$ splňující $x \neq y$ platí*

$$s(Tx, Ty) < s(x, y). \tag{*}$$

Pak T má právě jeden pevný bod.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že T je slabou kontrakcí, je T spojité. Pak podle lemmatu 2.3 je funkce $f : x \mapsto s(x, Tx)$ spojitá na X. Protože X je sekvenciálně kompaktní, nabývá f v nějakém bodě ξ svého minima na X. Ukážeme, že ξ je pevným bodem T. Předpokládejme naopak, že $T\xi \neq \xi$. Pak podle (*) máme

$$f(T\xi) = s(T\xi, T^2\xi) < s(\xi, T\xi) = f(\xi).$$

To je spor s tím, že T nabývá v ξ svého minima na X. Platí tedy $T\xi = \xi$. Kdyby existoval bod $\theta \neq \xi$ takový, že $T\theta = \theta$, pak

$$s(\theta, \xi) = s(T\theta, T\xi) < s(\theta, \xi),$$

a to je spor. $\square$

Věta 2.6. *Nechť (X, s) je s-metrický prostor a s splňuje podmínku (CS) (s je spojitá). Nechť dále T je spojité zobrazení X do X takové, že pro každé $x, y \in X$ splňující $x \neq y$, $x \neq Tx$ a $y \neq Ty$ platí*

$$s(Tx, Ty) < \alpha\, s(x, y) + \beta\, [s(x, Tx) + s(y, Ty)], \tag{*}$$

kde $\alpha, \beta \geq 0$ a $\alpha + 2\,\beta = 1$. Jestliže existuje bod $x \in X$ takový, že z posloupnosti $(T^n x)$ lze vybrat posloupnost $(T^{n_k} x)$, která konverguje k nějakému bodu x_0, pak T má pevný bod, kterým je x_0 nebo Tx_0.

Důkaz. Postupujme sporem. Předpokládejme, že $Tx_0 \neq x_0$ a $T^2x_0 \neq Tx_0$. Definujme $\Delta = \{(x,x);\, x \in X\}$ a $\Lambda = \{(x,y) \in X \times X;\, Tx = x \vee Ty = y\}$. Množiny Δ a Λ jsou zřejmě uzavřené v $X \times X$. Položme $G = (X \times X) \setminus (\Delta \cup \Lambda)$. Pak je G otevřená v $X \times X$. Definujme funkci f předpisem

$$f(x,y) = \frac{s(Tx,Ty)}{\alpha\, s(x,y) + \beta\,[s(x,Tx) + s(y,Ty)]}\,.$$

Vzhledem ke spojitosti s na $X \times X$, T na X a tomu, že jmenovatel je na G nenulový, je funkce f spojitá na G. Body x_0, Tx_0 splňují předpoklady nerovnosti (*), tedy $f(x_0, Tx_0) < \xi < 1$ pro nějaké ξ. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby

$$U(x_0,\varepsilon) \times U(Tx_0,\varepsilon) \subset G \tag{1}$$

$$(x,y) \in U(x_0,\varepsilon) \times U(Tx_0,\varepsilon) \Rightarrow f(x,y) < \xi < 1 \tag{2}$$

$$2\,\varepsilon < s(x_0, Tx_0) \tag{3}$$

Podmínka (1) plyne z otevřenosti G a (2) ze spojitosti funkce f. Všechny tři podmínky mohou být zřejmě splněny najednou.
Protože s splňuje (CS), existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé u, v splňující $s(u, x_0) < \delta$ a $s(v, Tx_0) < \delta$ platí

$$|s(u,v) - s(x_0, Tx_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Podle předpokladu $(T^{n_k}x)$ konverguje k x_0 a ze spojitosti T plyne, že $(T^{n_k+1}x)$ konverguje k Tx_0. Tedy existuje k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $s(T^{n_k}x, x_0) < \min\{\varepsilon, \delta\}$ a $s(T^{n_k+1}x, Tx_0) < \min\{\varepsilon, \delta\}$. Vzhledem k (4) a (3) pak dostáváme

$$s(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x) > s(x_0, Tx_0) - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Máme tedy, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$s(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x) > \varepsilon. \tag{5}$$

Pro všechna $k \geq k_0$ je splněno $T^{n_k}x \in U(x_0, \varepsilon)$ a $T^{n_k+1}x \in U(Tx_0, \varepsilon)$. Podle (2) tedy platí

$$\begin{aligned} s(T^{n_k+1}x, T^{n_k+2}x) &< \alpha\,\xi\, s(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x) \\ &\quad + \beta\,\xi\,[s(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x) + s(T^{n_k+1}x, T^{n_k+2}x)], \end{aligned}$$

po úpravě

$$s(T^{n_k+1}x, T^{n_k+2}x) < \frac{\alpha\,\xi + \beta\,\xi}{1 - \beta\,\xi}\, s(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x). \tag{6}$$

Pro každé $i \in \mathbb{N}$ splňují body $T^{i-1}x$ a $T^i x$ předpoklady nerovnosti (*). Dostáváme

$$\begin{aligned} s(T^i x, T^{i+1}x) &< \alpha\, s(T^{i-1}x, T^i x) \\ &\quad + \beta\,[s(T^{i-1}x, T^i x) + s(T^i x, T^{i+1}x)], \end{aligned}$$

po úpravě

$$s(T^i x, T^{i+1}x) < s(T^{i-1}x, T^i x). \tag{7}$$

Podle (7) a (6) dostáváme pro každé $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} s(T^{n_k}x, T^{n_k+1}x) &\leq s(T^{n_{k-1}+1}x, T^{n_{k-1}+2}x) \\ &< \frac{\alpha\,\xi + \beta\,\xi}{1 - \beta\,\xi}\, s(T^{n_{k-1}}x, T^{n_{k-1}+1}x) < \dots \\ &< \left(\frac{\alpha\,\xi + \beta\,\xi}{1 - \beta\,\xi}\right)^{k-k_0} s(T^{n_{k_0}}x, T^{n_{k_0}+1}x) \end{aligned} \tag{8}$$

Protože $\xi < 1$, je $\frac{\alpha\,\xi+\beta\,\xi}{1-\beta\,\xi} < 1$ a výraz napravo v (8) konverguje k 0 pro $k \to \infty$, což je spor s (5). Tedy $Tx_0 = x_0$ nebo $T^2x_0 = Tx_0$. $\square$

Z důkazu věty 2.6 okamžitě dostáváme následující výsledek.

Důsledek 2.7. *Nechť $T : X \to X$ je spojité zobrazení na s-metrickém prostoru (X, s) takové, že pro každé $x, y \in X$ splňující $x \neq Tx$, $y \neq Ty$ platí*

$$s(Tx, Ty) < \frac{1}{2}\,[s(x, Tx) + s(y, Ty)].$$

Jestliže existuje bod $x \in X$ takový, že z posloupnosti $(T^n x)$ lze vybrat konvergentní posloupnost $(T^{n_k}x)$, pak T má pevný bod.

Definice 2.8. Nechť X je s-metrický prostor. Pro každou množinu $A \subset X$ definujme $\gamma(A)$ jako infimum množiny sestávající z $r > 0$ takových, že existuje konečné pokrytí množiny A otevřenými koulemi o poloměru r. Funkci γ definovanou na množině všech podmnožin množiny X nazveme *mírou nekompaktnosti na X.*

Poznámka 2.9. Každá totálně omezená podmnožina X má nulovou míru nekompaktnosti. Opačná implikace však neplatí, jak uvidíme v následujícím příkladě. Zřejmě také platí, že $\gamma(A \cup B) = \max\{\gamma(A), \gamma(B)\}$.

Příklad 2.10. Existuje množina v s-metrickém prostoru taková, že není totálně omezená a přitom její míra nekompaktnosti je nula.
Položme $X = \mathbb{N}$ a definujme

$$s(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n, m \text{ různá lichá,} \\ \frac{1}{m} & \text{pro } m < n \text{ a } m \text{ nebo } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Pak s je zřejmě s-metrika. Míra nekompaktnosti množiny všech lichých čísel $\mathcal{L}$ je nula, neboť ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n sudé takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$ a množina $\mathcal{L}$ je pokryta koulemi o středech $1, 3, \ldots, n-1, n$ a poloměru ε. Množina $\mathcal{L}$ však není totálně omezená, neboť je 1-izolovaná a nekonečná.

Lemma 2.11. *Nechť (X, s) je s-metrický prostor a s splňuje podmínku (U). Jestliže množina $A \subset X$ má nulovou míru nekompaktnosti, pak A je totálně omezená.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že s splňuje podmínku (U), existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $u, v, w \in X$ splňující $s(u, v) < \delta$ a $s(v, w) < \delta$ platí

$$s(u, w) < \varepsilon. \tag{1}$$

Protože míra nekompaktnosti množiny A je nula, je A pokryta konečně mnoha koulemi o poloměru δ. Středy těchto konečně mnoha koulí označme $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $U(x_i, \delta) \cap A \neq \emptyset$. Ke každému $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vyberme $y_i \in U(x_i, \delta) \cap A$. Ukažme, že množina $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ je konečná ε-síť v A. Zvolme libovolně $z \in A$, pak existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $z \in U(x_i, \delta) \cap A$. Z (1) dostáváme, že $s(y_i, z) < \varepsilon$, a tímto je důkaz dokončen. □

Definice 2.12. Nechť X je s-metrický prostor a γ je míra nekompaktnosti na X. Řekneme, že zobrazení T prostoru X do X je *zhušťovací*, jestliže pro každou omezenou množinu $A \subset X$, která splňuje $\gamma(A) > 0$, platí

$$\gamma(T(A)) < \gamma(A).$$

Následující věta je analogií věty, kterou dokázal pro metrický případ K. Iseki v [2].

Věta 2.13. *Nechť (X, s) je neprázdný omezený úplný s-metrický prostor a s splňuje podmínku (ES) a (U). Nechť T je spojité zhušťovací zobrazení X do X. Jestliže pro všechna $x, y \in X$ taková, že $x \neq y$, $x \neq Tx$ a $y \neq Ty$ platí*

$$s(Tx, Ty) < \alpha\, s(x, y) + \beta\, [s(x, Tx) + s(y, Ty)], \tag{*}$$

kde $\alpha, \beta \geq 0$ a $\alpha + 2\beta = 1$, pak T má pevný bod.

Důkaz. Zvolme bod $x_0 \in X$ a uvažujme posloupnost $x_n = T^n x_0$. Definujme $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Pak zřejmě $T(A) \subset A$ a protože T je spojité, platí $T(\overline{A}) \subset \overline{T(A)} \subset \overline{A}$. Podle předpokladu je X omezený, a tedy $\overline{A}$ je omezená. Ukážeme, že míra nekompaktnosti množiny A je nula. Předpokládejme naopak, že $\gamma(A) > 0$. Protože $A = T(A) \cup \{x_0\}$ dostáváme

$$\gamma(A) = \max\{\gamma(T(A)), \gamma(x_0)\} = \gamma(T(A)).$$

Protože T je zhušťovací, je $\gamma(A) = 0$. Tedy A je totálně omezená a relativně kompaktní, neboť jsou splněny předpoklady lemmat 2.11 a 1.38, totiž, že X je úplný a s splňuje podmínku (U). Podle lemmatu 2.3 je funkce

$$x \mapsto s(x, Tx) \tag{1}$$

spojité na kompaktní množině $\overline{A}$, neboť s splňuje podmínku (ES) a T je spojité. Existuje tedy bod $\xi \in \overline{A}$, ve kterém funkce (1) nabývá svého minima na $\overline{A}$. Nyní ukážeme, že ξ nebo $T\xi$ je pevným bodem T. Předpokládejme naopak, že $\xi \neq T\xi$ a $T\xi \neq T^2\xi$. Podle (*) dostáváme

$$\begin{aligned} s(T\xi, T^2\xi) &< \alpha\, s(\xi, T\xi) + \beta\, [s(\xi, T\xi) + s(T\xi, T^2\xi)] \\ &\leq (\alpha + \beta)\, s(\xi, T\xi) + \beta\, s(T\xi, T^2\xi), \end{aligned}$$

po úpravě máme

$$s(T\xi, T^2\xi) < \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}\, s(\xi, T\xi) = s(\xi, T\xi),$$

což je spor, neboť zobrazení (1) nabývá v bodě ξ minima na $\overline{A}$. Tedy nutně ξ nebo $T\xi$ je pevným bodem T. Tím je důkaz dokončen. □

V následující části zobecníme dvě věty o pevném bodě, které pro metrické prostory dokázal K. Iseki v článku [4]. Nejprve však dokážeme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 2.14. *Nechť (X, s) je úplný metrický prostor a s splňuje podmínku (U). Nechť T je zhušťovací zobrazení prostoru X do X. Jestliže pro nějaké $x_0 \in X$ je množina $A = \{T^n x_0 \; ; \, n = 1, 2, \dots\}$ omezená, pak $\overline{A}$ je sekvenciálně kompaktní.*

Důkaz. Podle definice A dostáváme, že

$$A = T(A) \cup \{x_0\}. \tag{1}$$

Podle lemmatu 1.38 stačí dokázat, že A je totálně omezená množina. Pro spor předpokládejme, že není totálně omezená, a tedy podle lemmatu 2.11 je $\gamma(A) > 0$. Protože A je podle předpokladu omezená a T zhušťovací zobrazení, platí $\gamma(T(A)) < \gamma(A)$. A to je spor, neboť platí (1). Tedy množina A je totálně omezená, a $\overline{A}$ je sekvenciálně kompaktní. □

Věta 2.15. *Nechť (X, s) je úplný s-metrický prostor a s splňuje podmínku (U). Nechť T je spojité zhušťovací zobrazení prostoru X do X a $\mathcal{F}$ je reálná zdola polospojitá funkce definovaná na $X \times X$ taková, že pro každé $x \in X$ splňující $x \neq Tx$ platí*

$$\mathcal{F}(Tx, T^2x) < \mathcal{F}(x, Tx). \tag{*}$$

Jestliže existuje bod $x_0 \in X$ takový, že posloupnost $(T^n x_0)$ je omezená, pak T má pevný bod v X.

Důkaz. Z lemmatu 2.14 dostáváme, že uzávěr množiny

$$A = \{T^n x_0 \; ; \, n = 1, 2, \dots\}$$

je sekvenciálně kompaktní. Protože $\mathcal{F}$ je zdola polospojitá na $X \times X$ a T je spojité zobrazení na X, je složená funkce $\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ (Id, T)$, kde Id je identita na X, zdola polospojitá na $\overline{A}$. Tedy podle lemmatu 2.4 existuje bod $\xi \in \overline{A}$ takový, že funkce $\mathcal{H}$ nabývá v bodě ξ svého minima na $\overline{A}$. Ukážeme, že ξ je pevným bodem zobrazení T. Pro spor naopak předpokládejme, že $\xi \neq T\xi$. Podle (*) platí

$$\mathcal{H}(T\xi) < \mathcal{H}(\xi).$$

Tedy funkce $\mathcal{H}$ nenabývá v bodě ξ minima, a to je spor. Bod ξ je tedy pevným bodem zobrazení T. □

Věta 2.16. *Nechť (X, s) je s-metrický prostor a s splňuje podmínku (ES). Nechť T je spojité zobrazení prostoru X do X a pro každé $x \in X$ takové, že $x \neq Tx$ platí*

$$s(Tx, T^2x) < s(x, Tx). \qquad (*)$$

Jestliže existuje bod $y \in X$ takový, že z posloupnosti iterací $(T^n y)$ lze vybrat konvergentní posloupnost, pak T má pevný bod.

Důkaz. Nechť $(T^{n_k}y)$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $(T^n y)$ a nechť tato vybraná posloupnost konverguje k prvku $x_0 \in X$. Ukážeme, že $Tx_0 = x_0$. Pro spor naopak předpokládejme, že $Tx_0 \neq x_0$. Pak $s(x_0, Tx_0) > 0$. Zvolme $0 < \varepsilon < s(x_0, Tx_0)$. Protože s splňuje podmínku (ES) a T je spojité zobrazení, existuje podle lemmatu2.3 $\delta > 0$ takové, že pro každé $u \in X$ splňující $s(u, x_0) < \delta$ a platí

$$0 < s(x_0, Tx_0) - \varepsilon < s(u, Tu). \qquad (1)$$

Definujme $A = \{x \in X;\ Tx \neq x\}$. Zřejmě $x_0 \in A$ a vzhledem k tomu, že X je Hausdorffův a T je spojité, je množina A otevřená v X. Definujme funkci f následovně

$$f(x) = \frac{s(Tx, T^2x)}{s(x, Tx)}, \qquad x \in A.$$

Funkce f je spojitá na otevřené množině A, neboť $x \mapsto s(x, Tx)$ i T jsou spojitá zobrazení a jmenovatel je na A nenulový. Použijme pro bod x_0 nerovnost (*). Dostáváme, že existuje $\xi > 0$ takové, že $f(x_0) < \xi < 1$. Vzhledem ke spojitosti funkce f v bodě x_0 existuje $\tilde{\delta} > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ splňující $s(x_0, x) < \tilde{\delta}$ platí

$$f(x) \leq \xi. \qquad (2)$$

Posloupnost $(T^{n_k}y)$ konverguje k x_0 a $(T^{n_k+1}y)$ konverguje k Tx_0, neboť T je spojité. Nutně tedy existuje k_0 takové, že pro všechna $k \geq k_0$ je splněno

$$s(T^{n_k}y, x_0) < \min\{\delta, \tilde{\delta}\}, \qquad (3)$$

Z (3) a (2) dostáváme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$f(T^{n_k}y) = \frac{s(T^{n_k+1}y, T^{n_k+2}y)}{s(T^{n_k}y, T^{n_k+1}y)} \leq \xi. \qquad (4)$$

Z (3) a (1) dostáváme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$s(T^{n_k}y, T^{n_k+1}y) > s(x_0, Tx_0) - \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Z (5) plyne, že pro $k \geq k_0$ je $T^{n_k}y \neq T^{n_k+1}y$, z čehož okamžitě máme, že pro všechna $N \in \mathbb{N}$ platí $T^N y \neq T^{N+1}y$. Opakovaným použitím (*) a (4) dostáváme pro všechna $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}
s(T^{n_k}y, T^{n_k+1}y) &< s(T^{n_k-1}y, T^{n_k}y) < \dots \\
&< s(T^{n_{k-1}+1}y, T^{n_{k-1}+2}y) \\
&\leq \xi\, s(T^{n_{k-1}}y, T^{n_{k-1}+1}y) < \dots \\
&< \xi\, s(T^{n_{k-2}+1}y, T^{n_{k-2}+2}y) \\
&\leq \xi^2\, s(T^{n_{k-2}}y, T^{n_{k-2}+1}y) < \dots \\
&\dots \\
&< \xi^{k-k_0-1}\, s(T^{n_{k_0}+1}y, T^{n_{k_0}+2}y) \\
&\leq \xi^{k-k_0}\, s(T^{n_{k_0}}y, T^{n_{k_0}+1}y).
\end{aligned}$$

Jestliže $k \to \infty$, pak pravá strana konverguje k nule, neboť $\xi < 1$, a tedy $s(T^{n_k}y, T^{n_k+1}y) \to 0$, což je spor s (5). Platí tedy $Tx_0 = x_0$. $\square$

Literatura

[1] Drahoš J.: *On Some Generalized Metrics And Norms I*, str. 14

[2] Iseki K.: *A Fixed Point Theorem*, Mathematics Seminar Notes, XXI, 1974.

[3] Iseki K.: *A Generalization of M. Edelstein Fixed Point Theorem*, Mathematics Seminar Notes, XXII, 1974.

[4] Iseki K.: *Fixed Point Theorems in Metric Spaces*, Mathematics Seminar Notes, XXIII, 1974.