Oponentský posudek bakalářské práce

Jindřich Lechner: „Zobecněné metriky“

Předložená práce se zabývá dvěma druhy zobecněných metrik – s-metrikami a q-metrikami. To jsou symetrické nezáporné funkce definované na $X \times X$, které jsou rovny nule právě na dvojicích stejných prvků, které navíc splňují jistou podmínku, kterou lze chápat jako oslabenou verzi trojúhelníkové nerovnosti.

První kapitola se věnuje s-metrickým a q-metrickým prostorům na abstraktní úrovni – obsahuje definice základních pojmů, definice silnějších vlastností a vztahy mezi nimi, definice topologických vlastností pomocí zobecněných metrik a vztahy mezi nimi.

Ve druhé kapitole jsou zformulovány a dokázány jisté věty o pevných bodech pro s-metrické prostory, které zobecňují některé výsledky pro metrické prostory.

V práci jsem nenašel žádnou vážnější matematickou chybu (tj. neplatné tvrzení nebo vážnou chybu v důkaze). Práce nicméně obsahuje některé nepřesnosti, ne vše je dostatečně vysvětleno, některé pojmy, s nimiž se pracuje, nejsou explicitně definovány (třebaže se dá uhodnout, co je jimi míní, bylo by dobré je vysvětlit, protože jsou tam jisté apriorní nejasnosti, viz níže). Dále uvádím seznam nedostatků a připomínek.

1. Chybí základní vyjasnění některých pojmů. Je definováno, co je to s-metrický prostor, q-metrický prostor; je definována topologie na těchto prostorech, dále konvergence posloupnosti, cauchyovská posloupnost, omezenost, totální omezenost, úplnost, prekompaktnost, sekvenciální kompaktnost, kompaktnost a separabilita. V případě metrického prostoru jsou některé z těchto pojmů silně závislé na metrice, některé jsou topologické. Není vyjasněno, jak je tomu v případě s-metrických prostorů a q-metrických prostorů. Konkrétně:

(i) Konvergence posloupnosti se definuje pomocí příslušné zobecněné metriky. Přitom na prostoru máme ještě topologii, tedy i pojem konvergence posloupnosti v této topologii. Není vyjasněna základní otázka, jaký je vztah těchto dvou konvergencí. Přitom jsou ekvivalentní: To, že z konvergence v zobecněné metrice plyne konvergence v topologii plyne triviálně z definice topologie. Obrácená implikace pro s-metriku je snadná (plyne z Lemmatu 1.4), pro q-metriku je obtížnější (plyne z toho, že x je vnitřním bodem $U(x,r)$, což lze dokázat (pokud se nemýlím) induktivní konstrukcí).

(ii) V definici separability se používá pojem husté množiny. Není-li specifikováno, co se myslí hustotou, předpokládám, že jde o hustotu v topologickém smyslu. Na některých místech (například v důkazu Lemmatu 1.32) se používá pojem hustoty v metrickém smyslu, aniž se diskutuje, zda tyto dva pojmy jsou ekvivalentní (a ony jsou, díky argumentům podobným těm použitým v bodě (i) výše).

(iii) Z výše uvedeného plyne, že zatímco omezenost, totální omezenost, úplnost a prekompaktnost jsou vlastnosti zobecněné metriky, sekvenciální kompaktnost, kompaktnost a separabilita jsou vlastnosti topologie.

2. Práce obsahuje řadu příkladů zobecněných metrik, které nejsou metrikami. Zcela však opomíjí klíčovou otázku, zda tyto zobecněné metriky dávají něco nového i topologicky. Přesněji, zda existuje s-metrický nebo q-metrický prostor, jehož topologie není metrizovatelná. V Lemmatu 1.8 se ukazuje, že s-metrický prostor je Hausdorffův. Analogická otázka pro q-metrický prostor není vůbec zmíněna. Přitom kladná odpověď plyne z toho, že x je vnitřním bodem $U(x,r)$. Navíc je snadné ukázat, že s-metrický prostor je úplně regulární. Jak je to s metrizovatelností obecně, nevím, ale ze známých výsledků například plyne, že pokud s-metrika splňuje vlastnosti (CS) a (U), pak je výsledná topologie metrizovatelná (na X lze zřejmým způsobem definovat uniformitu se spočetnou bází).

3. V práci se bez vysvětlení používá několik topologických pojmů – již zmíněná hustota, dále třeba spojitost a uzávěr, a bez vysvětlení se s nimi pracuje jako v metrickém prostoru. Tedy pro spojitost

se používá ε-δ definice s použitím zobecněné metriky, aniž se vysvětlí, že to je totéž jako spojitost v topologickém smyslu. (Pro q-metriku to není triviální.) A bez vysvětlení se používá, že uzávěr množiny lze popsat pomocí limit posloupností. Je to sice pravda, ale je třeba to zdůvodnit – například tím, že topologie má spočetný charakter. Konkrétní místa, která příslušná vysvětlení vyžadují, zmíním níže.

4. Strana 7, Poznámka 1.3(iii) a Lemma 1.4: V poznámce se tvrdí, že z podmíky (S) plyne, že pro každé $x \in X$ je funkce $y \mapsto s(x,y)$ spojitá na X. To je pravda, ale vyžaduje to důkaz. Ten využívá stejnou myšlenku, jako důkaz Lemmatu 1.4. Lemma 1.4 je totiž speciálním případem, je důsledkem spojitosti funkce $y \mapsto s(x,y)$, protože $U(x,r)$ je vzorem otevřeného intervalu $(-\infty, r)$ při této funkci. Není šťastné obecnější tvrzení prohlásit za jasné, a pak podrobně dokazovat speciální případ.

5. Strana 10-11, Poznámka 1.11: Bylo by lepší uvést přehledný diagram, které implikace platí, a zmínit, jak je to s neuvedenými implikacemi.

6. Strana 11, Příklad 1.12: To, že q je q-metrika, je snadné, ale ne zřejmé. Je třeba si to rozmyslet. Bylo by dobré aspoň jeden takový důkaz uvést.

7. Strana 12, Příklad 1.13: Opět je to snadné, ale ne zřejmé, že s je s-metrika.

8. Strana 15, Lemma 1.20: Není vyjasněn vztah uzávěru množiny a limit posloupností (viz bod 3 výše).

9. Strana 15, Poznámka 1.23: Tvrzení platí, ale chvíli mi trvalo ho dokázat. Nevidím, jak by se to dělalo stejně, jako v metrickém prostoru. Zato Lemma 1.24, které se dokazuje, mi přijde přímočaré, jako v metrickém prostoru.

10. Strana 17, důkaz Lemmatu 1.31: Používá se bez odkazu Lemma 1.15.

11. Strana 18, důkaz Lemmatu 1.32: Používá se vyjádření hustoty pomocí q-metriky, což není triviální (viz body 1(ii) a 3 výše).

12. Strana 18, důkaz Lemmatu 1.33: Implikace $\Leftarrow$ platí v každém topologickém prostoru.

13. Strana 18, Poznámka 1.35: Tvrdit, že důkaz je stejný jako v metrickém prostoru, je poněkud odvážné. Pro metrický prostor existuje více důkazů, není hned jasné, který zvolit. A je potřeba vědět, že x je vnitřní bod $U(x,r)$.

14. Strana 19, Lemma 1.36: To, že X je separabilní, je snadné, ne zřejmé. To, že ze sekvenciální kompaktnosti plyne spočetná kompaktnost, je vlastnost topologických prostorů, což by bylo dobré zmínit.

15. Strana 19, Lemma 1.37: Nevidím, jak zbytek plyne z předchozího lemmatu. Tam se navíc předpokládá podmínka (C). Spíše se dá dokázat podobně (ukáže se, že X je separabilní a použije Lemma 1.33).

16. Strana 19, poznámka před důkazem Lemmatu 1.38: To, že s je automaticky q-metrikou, plyne snadno z definice. To by se mělo zmínit. Proč tato implikace nebyla uvedena v Poznámce 1.11?

17. Strana 22, Lemma 2.4: Jde o známé tvrzení platné pro topologické prostory (dokonce obecněji – lsc funkce na neprázdném spočetně kompaktním prostoru nabývá minima). Stálo by za poznámku, že zde zobecněné metriky nehrají žádnou roli.

18. Strana 25, nerovnost (7): Je to správně, jen trochu rychlé. Chtělo by poznamenat, že se použije rovnost $\frac{\alpha+\beta}{1-\beta} = 1$, která plyne z předpokladů. Podobně by to chtělo vysvětlit nerovnost $\frac{\alpha\xi+\beta\xi}{1-\beta\xi} < 1$ na konci důkazu.

19. Strana 25: Důsledek 2.7 je důsledkem Věty 2.6, nikoli jen jejího důkazu.

20. Pár překlepů:

(i) Strana 8, předposlední řádek: Má být $s(y, z)$.

(ii) Strana 15, řádek 8 zdola: Má být kompaktním.

21. Typografie: Odkazy typu [příklad 1.12] (na straně 7) nebo [1.12] atp. (v Úvodu) působí podivně.

22. Literatura: U reference [1] není uvedeno, kde a jakým způsobem je položka dostupná. Pokud jde o nepublikovaný rukopis, je třeba to uvést. U položek [2] až [4] je citace neúplná – v názvu periodika chybí poslední dvě slova (Kobe Univ.), chybí číslo ročníku (2) atp.

23. Ještě obecná otázka: Jde o pěkné pojmy, pěkná cvičení na důkazy, jejich varianty a protipříklady. Ale zajímaly by mne dvě věci. Jednak už výše zmíněná otázka, zda tyto pojmy dají topologicky něco nového. A dále, zda se při řešení nějakého netriviálního matematického problému přirozeně vyskytne nějaká s-metrika nebo q-metrika, která není metrikou, nebo zda jde jen o matematickou hříčku. (Nic proti tomu, hříčky jsou také dobrá věc.)

Celkově se domnívám, že práce **splňuje** předpoklady kladené na bakalářskou práci. S ohledem na uvedené nepřesnosti a nejasnosti ji navrhuji hodnotit stupněm **velmi dobře**.

[redacted]

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, PhD.
KMA MFF UK

V Praze dne 18. 6. 2010