Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ivan Soukup

Spektrum operátoru a stabilita řešení diferenciálních rovnic

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2009

Zde bych rád poděkoval vedoucímu své bakalářské práce RNDr. Tomáši Bártovi, Ph.D., za odbornou pomoc, cenné rady a rovněž za poskytnutou literaturu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 30. července 2009 Ivan Soukup

Obsah

Název práce: Spektrum operátoru a stabilita řešení diferenciálních rovnic
Autor: Ivan Soukup
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
e-mail vedoucího: barta@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme řešení diferenciální rovnice (DE) $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), u(0) = x$, kde A je omezený lineární operátor na Banachově prostoru $\mathbf{X}$, a rovnice (FE) $u(t+s) = u(t)u(s)$, $\forall t, s \geq 0$, která nám, jak ukážeme, umožní chápat řešení (DE) jako lineární dynamický systém. Toto řešení označíme symbolem $e^{tA}x$ a zkoumáme hlavně asymptotické chování tohoto řešení. Cílem bude ukázat vztah této normy a spektra operátoru A, vztah spektra operátoru A a operátoru e^{tA} či aplikace těchto výsledků na řešení diferenciálních rovnic v Banachových prostorech konečné i nekonečné dimenze.

Obecněji vzato tedy ukážeme, že růst stejnoměrně spojité semigrupy $(e^{tA})_{t\geq 0}$ je daný jejím spektrem a že tato semigrupa splňuje rovnice (FE) a (DE).

Klíčová slova: Semigrupa, stabilita, omezenost, exponenciála.

Title: Spectrum of an operator and stability of solutions of differential equations
Author: Ivan Soukup
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: barta@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study solutions of diferential equation (DE) $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), u(0) = x$, where A is a linear bounded operator on a Banach space $\mathbf{X}$, and equation (FE) $u(t+s) = u(t)u(s)$, $\forall t, s \geq 0$, which, as we show, allow us to perceive the solutions of (DE) as a linear dynamical system. We denote this solution by symbol $e^{tA}x$ and we examine especially its asymptotic behaviour. The goal of this work is to show the relation of this norm and the spectrum of operator A, the relation of the spectrum of operator A and operator e^{tA} and to apply these results to diferential equations in finite and infinite dimensional Banach spaces.

More generally, we show that the growth of a uniformly continious semigroup $(e^{tA})_{t\geq 0}$ is given by its spectrum and that this semigroup satisfies equations (FE) and (DE).

Keywords: Semigroup, stability, boundedeness, exponential function.

Kapitola 1

Úvod

V této práci se zaměříme na řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)\,, \quad u(0) = x$$

a funkcionální rovnice

$$u(t+s) = u(t)u(s)\,, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Budeme zkoumat hlavně asymptotické chování těchto řešení jako je stabilita a omezenost. Zároveň ukážeme souvislost těchto vlastností s tvarem spektra operátoru A.

Motivací k tomuto studiu a zároveň motivací pro zkoumání stejnoměrně spojitých semigrup nám bude aplikace na diferenciální rovnice v konečně rozměrných i nekonečně rozměrných Banachových prostorech.

Konkrétněji. V druhé kapitole naší práce se seznámíme se základními definicemi pojmů, s kterými budeme pracovat, a také vysvětlíme význam exponenciály. V další kapitole se již zaměříme na konkrétní vlastnosti operátorové exponenciály na konečně dimenzionálních Banachových prostorech, na asymptotické chování stejnoměrně spojitých semigrup na těchto prostorech a také na aplikaci našich výsledků v problematice diferenciálních rovnic. Ve čtvrté kapitole se pokusíme získat podobné výsledky jako v kapitole předchozí jenomže v nekonečně dimenzionálních Banachových prostorech. V poslední kapitole shrneme výsledky našeho snažení.

Důležitým bodem naší práce bude to, jak budeme chápat funkci od operátoru. Pokusíme se získat výsledky, které jsou většinou dokazovány za po-moci Dunfordova funkčního kalkulu, jiným způsobem. A to pomocí nekonečných řad. Většinou budeme postupovat tak, že v případech, kdy budeme potřebovat vyjádřit nějakou funkci od operátoru, zjistíme, zda je ona funkce holomorfní na dostatečně velké množině a tedy zda se dá na této množině vyjádřit nekonečnou řadou (viz. [6], str. 105, Věta 5.5.3), do které následně dosadíme operátor, čímž definujeme onu funkci od daného operátoru. Nejvýznamnějším výsledkem tohoto počínání bude alternativní důkaz Věty o obrazu spektra, která bývá dokazována pomocí Dunfordova funkčního kalkulu (viz. [3], str. 569, Theorem VII.3.11) a která nám v konečném důsledku umožňuje zkoumat asymptotická chování řešení našich rovnic, aniž bychom tato řešení znali.

Kapitola 2

Spektrum operátoru a stabilita řešení diferenciálních rovnic

2.1 Základní definice

Budeme pracovat s lineárními omezenými operátory na prostoru $\mathbf{X}$, přičemž $\mathbf{X}$ bude komplexní Banachův prostor s normou $\|.\|$. Prostor všech lineárních omezených operátorů na $\mathbf{X}$ budeme značit $(\mathcal{L}(\mathbf{X}), \|.\|)$, zkráceně jen $\mathcal{L}(\mathbf{X})$, přičemž $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ tvoří Banachovu algebru, tj. mimo jiné platí $\|ab\| \leq \|a\| \; \|b\|$ pro $a, b \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$. Normou operátoru $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ máme na mysli reálné číslo $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbf{X}; \|x\| \leq 1\}$.

Pro začátek zdůrazněme dvě věci:

- budeme striktně rozlišovat mezi případy, kdy $\mathbf{X}$ bude konečně dimenzionální (Kapitola 3) a kdy bude nekonečně dimenzionální (Kapitola 4)
- požadavek na omezenost je pro tuto práci zásadní, studium neomezených operátorů nebude našim cílem a zmíníme je jen v závěru

V dalším nás bude zajímat řešení diferenciální rovnice

$$(DE) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}T(t) = AT(t) & t \geq 0 \\ T(0) = I \, , \end{cases}$$

kde $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$, $T(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ $\forall t \geq 0$ a I značí identický operátor, a navíc budeme zkoumat asymptotické chování tohoto řešení.

Rovněž budeme hledat zobrazení splňující následující rovnost

$$(FE) \qquad \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) & t, s \geq 0 \\ T(0) = I\,, \end{cases}$$

kde $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbf{X})$. Důvodem zkoumání rovnice (FE) je, že si rovnice (DE) a (FE) v určitém smyslu odpovídají.

Definice 2.1.1. *Buď* $\mathbf{X}$ *Banachův prostor,* $T(t)$ *lineární omezený operátor na* $\mathbf{X}$ $\forall t \geq 0$ *a* I *identita na* $\mathbf{X}$*. Pak* $(T(t))_{t\geq 0} := \{T(t); t \geq 0\}$ *nazveme (jednoparametrickou) semigrupou operátorů na* $\mathbf{X}$*, pokud:*

1. $T(0) = I$
2. $T(t)T(s) = T(t+s) \qquad t, s \geq 0.$

Poznámka 2.1.1. *Pro lepší pochopení významu rovnice* (FE) *a semigrup samotných je dobré si uvědommit jejich souvislost s lineárními dynamickými systémy. Uvažujme následující:*

- t *buď parametr času*
- $\mathbf{X}$ *buď stavový prostor*
- $x_0 \in \mathbf{X}$ *buď počáteční stav v čase* $t_0 = 0$

Potom $T(t)$ *splňující* (FE) *popisuje časovou evoluci lineárního dynamického systému na X. Totiž, definujeme-li*

$$x(t) := T(t)[x_0],$$

značí $x(t)$ *stav systému v čase* $t \geq 0$*. Navíc*

$$x(t+s) = T(t+s)[x_0] = T(t)T(s)[x_0] = T(t)[x(s)],$$

tzn. že stav systému je v čase $t+s$ *stejný jako by byl stav v čase* t *při počátečním stavu* $x(s)$*. Jinými slovy,* $(T(t))_{t\geq 0}$ *můžeme chápat jako dopředný orbit* x_0 *v našem dynamickém systému.*

Při studiu asymptotického chování semigrup operátorů nás budou zajímat hlavně následující pojmy:

Definice 2.1.2. *Semigrupu operátorů $(T(t))_{t\geq 0}$ na $\mathbf{X}$ nazveme stabilní, pokud*

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0.$$

Definice 2.1.3. *Řekneme, že semigrupa operátorů $(T(t))_{t\geq 0}$ na $\mathbf{X}$ je exponenciálně stabilní, pokud $\exists \varepsilon > 0$, $\exists M \geq 1$, že*

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Definice 2.1.4. *Řekneme, že semigrupa operátorů $(T(t))_{t\geq 0}$ je omezená, pokud existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $\|T(t)\| \leq M \, \forall t \geq 0$.*

2.2 Význam exponenciály

Tato práce se zaměřuje hlavně na studium operátorové exponenciály. Jako motivaci můžeme brát výsledek v následujícím elementárním příkladě.

Příklad 2.2.1. *Uvažme, že $\mathbf{X} = \mathbb{R}$. Potom jediným spojitým řešením rovnic (DE) a (FE) je semigrupa $(e^{at})_{t\geq 0}$, kde $a \in \mathbb{R}$. V souladu s definicemi stability a omezenosti můžeme prohlásit, že tato semigrupa je stabilní a exponenciálně stabilní, právě tehdy když $a < 0$ a omezená, právě když $a \leq 0$.*

V následujících pasážích se již budeme samozřejmě zabývat obecnějšími případy.

Definice 2.2.1. *Mějme operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$, pak pro libovolné $t \geq 0$ definujeme operátorovou exponenciálu:*

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Poznámka 2.2.1. *Tato definice je skutečně korektní, uvedená řada konverguje absolutně $\forall t \geq 0$ a $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$, neboť její částečné součty tvoří cauchyovskou posloupnost a vzhledem k úplnosti $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ je tedy řada konvergentní. Pro jistotu ověřme cauchyovskost částečných součtů dané řady:*

- *buď $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!}$, $t \geq 0$, $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$. A je omezený operátor, takže existuje $M > 0$, že $\|A\| < M$, pak BÚNO pro $n > m$:*

$$\begin{aligned}\|s_n - s_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{t^k \left\|A^k\right\|}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} \overset{m\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

A z této limity ihned plyne, že $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq n_0 :$ $\|s_n - s_m\| < \varepsilon.$

Z důkazu Poznámky 2.2.1 je také snadno vidět, že $\left\|e^{tA}\right\| < e^{t\|A\|}$. Také je evidentní, že můžeme bez problémů definovat operátorovou exponenciálu na celém $\mathbb{R}$ (dokonce i na celém $\mathbb{C}$) a v tom případě tvoří $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ grupu operátorů. Pro naše účely je však postačující brát v úvahu jen kladná t, avšak faktu, že jsme schopni definovat operátorovou exponenciálu i pro záporná t, využijeme v důkazu Tvrzení 3.2.1 (resp. 4.2.1).

V dalších kapitolách budeme zkoumat důležitost exponenciály v souvislosti s cíli naší práce.

Kapitola 3

Konečně dimenzionální operátory

3.1 Úvod

V této kapitole budeme pracovat pouze v konečně dimenzionálním Banachově prostoru $\mathbf{X} = \mathbb{C}^n$, tedy $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ můžeme ztotožnit s prostorem $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ všech komplexních matic $n \times n$ (viz. [2], str. 76, Věta 10.22). Práce na konečně dimenzionálním prostoru $\mathbf{X}$ je v jistém smyslu „ideální“, jelikož spektrum operátorů z $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ (tj. matic $n \times n$) splývá s jejich bodovým spektrem (tj. vlastními čísly matic z $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$). V nekonečně dimenzionálním prostoru bude situace složitější, protože tam tomu tak není.

V tomto případě můžeme lineární dynamický systém charakterizovat semigrupou operátorů $(T(t))_{t\geq 0}$, kde $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ splňuje (FE), tedy parametr t symbolizuje čas, x_0 počáteční stav systému v čase t_0 a $(T(t))_{t\geq 0}$ můžeme chápat jako dopředný orbit x_0.

Za zmíněných podmínek můžeme upřesnit definici operátorové exponenciály z první kapitoly následujícím způsobem:

Definice 3.1.1. *Buď $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ a $t \geq 0$, pak e^{tA} je definováno jako:*

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Tato definice je korektní, jak jsme ukázali v Poznámce 2.2.1

3.2 Vlastnosti maticové exponenciály

Nyní se zaměříme na vztah exponenciály a rovnic (FE) a (DE) a ukážeme jejich propojenost.

Tvrzení 3.2.1. *Buď $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, potom je zobrazení $T : t \to e^{tA}$ spojité a splňuje (FE).*

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že zobrazení $T : t \to e^{tA}$ splňuje (FE). Jelikož v Poznámce 2.2.1 jsme ukázali, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ konverguje absolutně, jsou následující úpravy korektní:

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{n-k}s^k}{(n-k)!k!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} t^{n-k}s^k \frac{n!}{(n-k)!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} t^{n-k}s^k \binom{n}{k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = e^{(t+s)A} \qquad \forall t, s \geq 0. \end{aligned}$$

K důkazu spojitosti nyní využijeme (FE), konkrétně:

$$e^{(t+h)A} - e^{tA} = e^{tA}(e^{hA} - I) \qquad t, h \geq 0.$$

V souladu s úvahami po Pozn. 2.2.1 však můžeme korektně pracovat i s zápornými h. Chceme tedy ukázat, že $\forall t \geq 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall |h| < \delta$:

$$\left\| e^{(t+h)A} - e^{tA} \right\| < \varepsilon,$$

přičemž:

$$\left\| e^{(t+h)A} - e^{tA} \right\| \leq \left\| e^{tA} \right\| \left\| e^{hA} - I \right\|.$$

A jelikož $\left\| e^{tA} \right\|$ je konečné číslo (A je omezená), stačí následující:

$$\left\| e^{hA} - I \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n \|A\|^n}{n!} = e^{|h| \, \|A\|} - 1 \leq e^{\delta \|A\|} - 1 \overset{\delta \to 0}{\to} 0$$

□

Tvrzení 3.2.2.
(i) Buď $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ a $T(t) := e^{tA}$. Potom $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ je diferencovatelné a splňuje (DE).
(ii) $T(t) := e^{tA}$, $\forall t \geq 0$, je jediným řešením (DE).

Důkaz.
(i) Chceme ukázat, že $T(.)$ splňuje (DE). Z Tvrzení 3.2.1 víme, že $T(.)$ splňuje (FE), tj. $T(0) = I$ a také platí:

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{T(h) - I}{h} T(t) \qquad t, h \geq 0.$$

Tedy $\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d}{dt}T(t)\big|_{t=0} T(t)$, pokud existuje derivace v nule. Takže nám zbývá ukázat, že ona derivace v nule existuje a že $A = \frac{d}{dt}T(t)\big|_{t=0}$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| &= \left\| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!}}{h} - A \right\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1} A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-1} \|A\|^k}{k!} \\ &= \frac{e^{|h| \, \|A\|} - 1}{h} - \|A\| \overset{h \to 0}{\to} \frac{d}{dt} e^{|t| \, \|A\|} \big|_{t=0} - \|A\| = 0 \end{aligned}$$

(ii) Nechť $S(.)$ splňuje (DE) a z (i) víme, že $T(t) := e^{tA}$ také řeší (DE), přičemž $A = \frac{d}{dt}T(t)\,|_{t=0}$. Definujme $Q(s) := T(s)S(t-s)$, $s \in [0,t]$, t libovolné pevné. Pak

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}Q(s) &= \left(\frac{d}{ds}T(s)\right)S(t-s) + T(s)\frac{d}{ds}S(t-s) = \\ &= AT(s)S(t-s) - T(s)AS(t-s) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tzn. že Q je konstantní na $[0,t]$, tedy:

$$T(t) = Q(t) = Q(0) = S(t).$$

A jelikož byla volba t libovolná, dostáváme, že $S \equiv T$, tedy i $\frac{d}{dt}S(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}T(t)\big|_{t=0} = A$. $\square$

Věta 3.2.1. *Buď $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ spojité zobrazení splňující (FE). Potom existuje $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, že $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$.*

Důkaz. Jelikož $T(.)$ je spojité na celém $\mathbb{R}_+$, můžeme korektně definovat funkci $V(.)$ jako $V(t) := \int_0^t T(s)\, \mathrm{d}s$, $\forall t \geq 0$. Takto definovaná funkce $V(t)$ je dle Věty o derivaci integrálu podle horní meze diferencovatelná a $\frac{d}{dt}V(t) = T(t)$. Tedy $\frac{d}{dt}V(t)\big|_{t=0} = T(0) = I$, tzn. že $V(t)$ je nenulová a prostá na nějakém okolí počátku, tudíž $\det V(t_0) \neq 0$ a tedy existuje inverze $V^{-1}(t_0)$ pro dost malé $t_0 \geq 0$ (plyne z [2], str. 57, Věta 8.4). Díky tomu použitím (FE) platí:

$$\begin{aligned} T(t) &= V^{-1}(t_0)V(t_0)T(t) = V^{-1}(t_0)\int_0^{t_0} T(s)T(t)\, \mathrm{d}s = \\ &= V^{-1}(t_0)\int_0^{t_0} T(s+t)\, \mathrm{d}s = V^{-1}(t_0)\int_t^{t_0+t} T(s)\, \mathrm{d}s = \\ &= V^{-1}(t_0)(V(t+t_0) - V(t)), \end{aligned}$$

což je diferencovatelná funkce a jelikož t bylo libovolné, tak je i T(t) diferencovatelné $\forall t \geq 0$. Zároveň:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{T(h) - I}{h}T(t) = \\ &= \frac{d}{dt}T(t)\Big|_{t=0} T(t) \quad , \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Tedy evidentně $T(.)$ splňuje (DE) pro $A = \frac{d}{dt}T(t)\big|_{t=0}$, z čehož použitím Tvrzení 3.2.2 plyne, že $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$. $\square$

Ukázali jsme tedy, že spojitým řešením (FE) a (DE) je právě námi zkoumaná semigrupa $(e^{tA})_{t\geq 0}$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Nyní se zaměříme na zkoumání asymptotického chování naší semigrupy a vztahu mezi normou operátoru e^{tA} a spektrem operátoru A (i když pracujeme s maticemi, je dobré mít na paměti, že jde o operátory).

3.3 Norma, spektrum a asymptotické chování

Při zkoumání asymptotického chování řešení (DE) budeme vyžadovat znalost normy a spektra operátoru e^{tA}. Než si ukážeme, jak spolu norma potažmo spektrum e^{tA} a spektrum A souvisí, tak uvedeme pár elementárních příkladů, které budou ale ve své podstatě klíčové.

Příklad 3.3.1.

(i) Buď $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ diagonální matice s prvky $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ na diagonále, potom

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{t\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

(ii) Buď $A \in \mathbf{M}_k(\mathbb{C})$ Jordanův blok velikost $k \times k$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \lambda \in \mathbb{C}.$$

Potom můžeme A zapsat jako součet $D + L$, kde D je diagonální matice s λ na diagonále a $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$. Navíc D a L spolu komutují, takže $e^{tA} = e^{tD}e^{tL}$ (přičemž důkaz se provede analogicky jako v Tvrzení 3.2.1, kde se dokazovala (FE)). Důležité je, že L je nilpotentní:

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots L^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, L^k = 0.$$

Tvar e^{tD} zjistíme elementárně použitím bodu (i) a tvar e^{tL} je následující:

$$e^{tL} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy celkově dostaneme, že $e^{tA} = e^{t\lambda}e^{tL}$.

Při počítání exponenciály libovolné matice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ bychom nejspíše neměli moc šancí na rozumné dopočítání, ale naštěstí můžeme využít toho, že každá matice je podobná Jordanově normální matici (viz. [2], str. 116, Věta 17.8), tj. existuje invertibilní $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, že $A = S^{-1}JS$, přičemž J má na diagonále vlastní čísla matice A a skládá se z Jordanových bloků J_k; navíc platí následující lemma:

Lemma 3.3.1. *Buď $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ a nechť S je invertibilní matice z $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Potom semigrupa generovaná maticí $A := S^{-1}BS$ je podobná semigrupě generované maticí B a platí $e^{tA} = S^{-1}e^{tB}S$.*

Důkaz. Zřejmě $A^k = S^{-1}B^kS$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tedy platí:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kA^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kS^{-1}B^kS}{k!} = S^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kB^k}{k!}S = S^{-1}e^{tB}S$$

□

Tedy při výpočtu e^{tA}, kde $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ je obecného tvaru, můžeme již snadno dojít ke konečnému výsledku. Víme, že existuje $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ invertibilní a taková, že $A = S^{-1}JS$, kde

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_k} \end{pmatrix},$$

přičemž $\boxed{J_i}$ jsou příslušné Jordanovy bloky.

Potom $e^{tA} = S^{-1}e^{tJ}S$ a

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{tJ_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{e^{tJ_k}} \end{pmatrix}.$$

Z Příkladu 3.3.1 (ii) víme jak spočítat e^{tJ_i}, $\forall i = 1, \dots, k$ a máme tedy teoretické nástroje jak spočítat e^{tA}.

Předchozích výsledků nyní využijeme k ukázání vztahu normy matice e^{tA} a spektra jejího generátoru A a také ke zjištění požadavků na stabilitu respektive omezenost semigrupy $(e^{tA})_{t\geq 0}$.

Z Příkladu 3.3.1 (ii) víme, že $e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i}L_i^m(t)$, kde e^{tJ_i} je i-tý Jordanův blok matice A, λ_i je příslušné vlastní číslo a $L_i^m(t)$ je příslušná nilpotentní matice velikosti $m+1$, tvaru:

$$L_i^m(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^m}{m!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc existuje $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, že $\forall t \in \mathbb{R}$: $c_1 \leq \|L_i^m(t)\| \leq c_2(1 + |t|^m)$. A tak můžeme nyní snadno odvodit klíčový odhad:

$$(KO) \qquad c_1\, e^{tRe\,\lambda_i} \leq \left\|e^{tJ_i}\right\| = |e^{t\lambda_i}|\; \|L_i^m(t)\| \leq e^{tRe\,\lambda_i}c_2(1 + |t|^m).$$

Jeho důležitost si uvědomíme, pokud si všimneme, že $(e^{tA})_{t\geq 0}$ je omezená respektive stabilní, právě tehdy když je omezená resp. stabilní $(e^{tJ})_{t\geq 0}$, a to je právě tehdy když jsou omezené resp. stabilní všechny $(e^{tJ_i})_{t\geq 0}$, $i = 1, \dots, k$. Naše výsledky shrňme do následující věty.

Věta 3.3.1. *Buď $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Pak*

(i) $(e^{tA})_{t\geq 0}$ je omezená $\Leftrightarrow \forall\lambda \in \sigma(A)$: $Re\,\lambda \leq 0$ a pokud $Re\,\lambda = 0$, pak m (velikost každé Jordanovy buňky příslušné λ) je jedna.

(ii) Pokud $\forall\lambda \in \sigma(A)$: $Re\,\lambda < 0$, potom $\exists\alpha, c > 0$, že

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq c\,e^{-\alpha t} \qquad , \forall t \geq 0.$$

(iii) $(e^{tA})_{t\geq 0}$ je stabilní $\Leftrightarrow \forall\lambda \in \sigma(A)$: $Re\,\lambda < 0$.

Důkaz. Body (i) a (iii) plynou ihned z úvah před větou a z klíčového odhadu (KO). Tedy zbývá nám dokázat bod (ii):

Platí, že $c_2(1 + |t|^m) \leq c\,e^{\varepsilon t}$, kde $\varepsilon > 0$ a c závisí na volbě ε. Pokud následně volíme za $\bar{\alpha} := \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$, dostaneme z klíčového odhadu (KO):

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq c\,e^{t\varepsilon}e^{-t\bar{\alpha}} = c\,e^{-t(\bar{\alpha}-\varepsilon)}$$

Volbou dostatečně malého ε (tak aby $\bar{\alpha} - \varepsilon > 0$) dostaneme hledané $\alpha := \bar{\alpha} - \varepsilon$. □

Zřejmým důsledkem této věty je mimo jiné to, že stabilita a exponenciální stabilita semigrupy $(e^{tA})_{t\geq 0}$ na konečně dimenzionálním Banachově prostoru jsou ekvivalentní pojmy.

V následující části se podíváme na pár jednoduchých typových příkladů, kde tyto naše výsledky použijeme a názorně uvidíme jejich význam.

3.4 Aplikace

Příklad 3.4.1. *Uvažujme následující diferenciální rovnici:*

$$x'' + x = 0.$$

Jednoduchým trikem ji převedeme na systém rovnic, na který můžeme aplikovat naše výsledky:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x, \end{aligned}$$

tj. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Označme* $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Potom řešením naší rovnice bude funkce* $e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, *kde* (x_0, y_0) *jsou počáteční podmínky rovnice. Jelikož spektrum matice* A *je* $\sigma(A) = \{-i, i\}$ *je díky našim výsledkům z předchozích částí práce zřejmé, že semigrupa* $(e^{tA})_{t\geq 0}$, *kterou chápeme jako dopředný orbit dynamického systému daného naší rovnicí, je nestabilní, ale omezená. Navíc jsme schopni upočítat konkrétní tvar matice* e^{tA}:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Využití našich poznatků však můžeme nalézt i u složitějších rovnic typu $x^{'} = f(x)$. Tento typ rovnice totiž můžeme za určitých předpokladů na funkci f a bod stavového prostoru, ve kterém budeme zkoumat vlastnosti řešení (stabilita, ...), převést na rovnici typu $u^{'} = Au$. Větu, která to říká, zde uvedeme bez důkazu (viz. [1], str. 263, Theorem 19.9) - jen informativně:

Věta 3.4.1. *(Hartman-Grobman)*
Mějme bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *takový, že* $f(x_0) = 0$ *(*f *je alespoň* C^1 *na okolí* x_0*) a navíc* $\forall \lambda \in \sigma(A)$: *Re* $\lambda \neq 0$, *kde* $A := \nabla f(x_0)$. *Potom existuje okolí* $U(x_0)$ *a* $V(0)$ *a homeomorfismus* $\Phi : U \to V$, *který převádí řešení rovnice* $x^{'} = f(x)$ *na řešení tzv. linearizované úlohy* $u^{'} = Au$.

Hartman-Grobmanova věta společně s našimi výsledky má za následek následující dvě věty, které opět uvedeme jen informativně bez důkazu (viz. [1], str. 202,204, Theorem 15.3,15.5).

Věta 3.4.2. *(Věta o linearizované nestabilitě)*
Je dána rovnice $x^{'} = f(x)$. *Nechť* $f(x_0) = 0$, f *je* C^1 *na okolí bodu* x_0. *Nechť* $\exists \lambda \in \sigma(A)$, *Re* $\lambda > 0$, *kde* $A = \nabla f(x_0)$. *Pak je* x_0 *nestabilní.*

Věta 3.4.3. *(Věta o linearizované stabilitě)*
Je dána rovnice $x^{'} = f(x)$. *Nechť* $f(x_0) = 0$, f *je* C^1 *na okolí bodu* x_0. *Nechť Re* $\lambda < 0$ *pro* $\forall \lambda \in \sigma(A)$, *kde* $A = \nabla f(x_0)$. *Za těchto předpokladů je* x_0 *stabilní.*

Uveďme opět jednoduchý příklad, na kterém budeme tyto věty demonstrovat:

Příklad 3.4.2. *Uvažujme následující soustavu:*

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= -x + 2y \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1. \end{aligned}$$

Budeme chtít ověřit stabilitu počátku $x_0 = (0,0)$. *Ověříme předpoklady:* $f(x_0) = 0$, *f je C^1 a* $A := \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *má spektrum* $\sigma(A) = \{1\}$. *Tedy jsou splněny předpoklady Hartman-Grobmanovy věty a dostáváme úlohu:*

$$\begin{aligned} u' &= Au \\ u(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Řešením je tedy $u(t) = e^{tA}$ *a z tvaru spektra výše vidíme, že semigrupa* $(e^{tA})_{t\geq 0}$ *je opět nestabilní a navíc není ani omezená. Takže ani řešení původní nelineární úlohy není stabilní ani omezené.*

3.5 Závěr

Ukázali jsme tedy propojenost operátorové exponenciály s rovnicemi (FE) a (DE) v komplexních Banachových prostorech konečné dimenze a tedy i její význam v lineárních dynamických systémech a při řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Rovněž jsme popsali souvislost mezi normou operátoru e^{tA} a spektrem jeho generátoru A a s tím spojená tvrzení kolem stability a omezenosti semigrup. Využili jsme přitom mimo jiné i postup pro odvození předpisu matice e^{tA}. Podrobnější výklad problematiky spojené se stabilitou popřípadě zkoumání lineárních dynamických systémů nebylo našim cílem, ale spíše motivací. Proto případné zájemce o tato témata odkážeme na příslušnou literaturu a to [4] pro lineární dynamické systémy a [1] pro obyčejné diferenciální rovnice.

Kapitola 4

Nekonečně dimenzionální operátory

4.1 Úvod

Nyní se posuneme o úroveň výše, a to ke zkoumání rovnic (FE) a (DE) v nekonečně dimenzionálních prostorech.

V dalším budeme pracovat již s obecným nekonečně dimenzionálním Banachovým prostorem $\mathbf{X}$ s normou $\|.\|$. Jako $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ opět značíme Banachovu algebru všech omezených lineárních operátorů na $\mathbf{X}$.

Cílem bude získat podobné výsledky jako v kapitole 3, tj. ukázat význam operátorové exponenciály v souvislosti s (FE) a (DE) a charakterizovat asymptotické chování semigrupy $(e^{tA})_{t\geq 0}$ jako například omezenost a stabilitu.

V kontextu rovnice (FE) je dobré mít stále na paměti, že semigrupu $(e^{tA})_{t\geq 0}$ můžeme chápat jako lineární dynamický systém (viz. Poznámka 2.1.1).

V následující podkapitole budeme dokazovat vlastnosti operátorové exponenciály, které budou naprosto analogická s těmi v třetí kapitole. Pro větší zajímavost uvedeme následující definici, díky které budeme moci známá tvrzení formulovat jinak při zachování jejich významu.

Definice 4.1.1. *Semigrupu operátorů $(T(t))_{t\geq 0}$ na $\mathbf{X}$ nazveme stejnoměrně spojitou, pokud je zobrazení*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$$

spojité.

4.2 Vlastnosti operátorové exponenciály

Tvrzení 4.2.1. *Buď $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$, potom zobrazení $T : t \mapsto e^{tA}$, $t \geq 0$ je stejnoměrně spojitá semigrupa.*

Důkaz. Jelikož $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ tvoří algebru a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ je absolutně konvergentní (viz. Poznámka 2.2.1), můžeme postupovat naprosto totožně jako v důkazu Tvrzení 3.2.1. □

Tvrzení 4.2.2.
(i) Buď $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ a $T(t) := e^{tA}$. Potom $T(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbf{X})$ je diferencovatelné a splňuje (DE)
(ii) $T(t) := e^{tA}$, $\forall t \geq 0$, je jediným řešením (DE).

Důkaz. Stejný jako v Tvrzení 3.2.2. □

Věta 4.2.1. *Každá stejnoměrně spojitá semigrupa $(T(t))_{t\geq 0}$ na $\mathbf{X}$ je tvaru $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$ pro nějaký operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$.*

Důkaz. Pokud si uvědomíme, že operátorová semigrupa z definice splňuje (FE), je důkaz totožný jako u Věty 3.2.1. až na jeden rozdíl. V nekonečně dimenzionálním prostoru nemáme nic jako determinant definováno, tedy existenci inverzního prvku k $V(t_0)$ musíme získat jinak. Tedy invertibilitu operátoru $V(t)$ pro dostatečně malá t z pravého prstencového okolí 0 získáme jako důsledek Věty o implicitní funkci případně přímo z Věty o inverzní funkci ($V(0) = 0$ a v nule má V nenulovou derivaci). Existuje tedy bod t_0 takový, že existuje $V^{-1}(t_0)$. □

Celkově jsme tedy zjistili, že každá stejnoměrně spojitá semigrupa operátorů $(T(t))_{t\geq 0}$ na $\mathbf{X}$ je tvaru $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$ a řeší (FE) a (DE).

4.3 Norma, spektrum a asymptotické chování

Jelikož v nekonečné dimenzi už začíná být práce se spektrem operátorů složitější a nejsme schopni vždy spočítat e^{tA} až na vcelku speciální případy (viz. Příklad 4.4.1), nebudeme očekávat tak konkrétní výsledky jako v kapitole 3. Avšak i přesto jsme schopni ty nejdůležitější poznatky o stabilitě a omezenosti získat i tu.

Naprosto stěžejním bodem při zkoumání vztahu spektra operátoru, jeho normy a asymptotického chování bude následující věta. Nejdříve však uvedeme pomocné lemma:

Lemma 4.3.1. *(pomocné lemma)*
Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ a g, f jsou holomorfní na otevřeném $G \subseteq \mathbb{C}$ takovém, že $B(0, \|A\|) \subset G$. Potom $g(A)f(A) = (gf)(A)$, kde $g(A)$, $f(A)$ a $(gf)(A)$ definujeme pomocí příslušných mocninných řad jak jsme se dohodli v úvodní kapitole.

Důkaz. Právě z toho, že holomorfní funkce na G můžeme rozepsat do konvergentních mocninných řad, plyne celé lemma. Stačí pouze dosadit operátor A do těchto řad a tvrzení již snadno plyne. $\square$

Věta 4.3.1. *(o obrazu spektra)*
Pro každou stejnoměrně spojitou semigrupu operátorů $(e^{tA})_{t\geq 0}$ na $\mathbf{X}$ a její generátor $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ platí:

$$\sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)} := \{e^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\} \qquad , \forall t \geq 0.$$

Důkaz. V triviálním případě, kdy $t = 0$, je lemma zřejmě pravdivé. V dalším uvažujme libovolné pevné $t > 0$ a $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$.

<u>"$\supseteq$"</u>: Nechť $\lambda \in \sigma(A)$, definujme $g(\xi) := \frac{e^{t\lambda}-e^{t\xi}}{\lambda-\xi}$. Potom je g holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$, ale v bodě λ má g odstranitelnou singularitu, neboť v něm lze spojitě dodefinovat jako $g(\lambda) := \frac{d}{d\xi}e^{t\xi}\Big|_{\xi=\lambda}$. Tedy g je celá funkce (tzn. holomorfní na celém $\mathbb{C}$) a tzn. že existují $\{a_n\} \in \mathbb{C}$:

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \qquad , \xi \in \mathbb{C}.$$

Potom $g(A)$ můžeme definovat pomocí této konvergentní řady. Využitím pomocného lemmatu 4.3.1 dostaneme:

$$g(A)(\lambda I - A) = e^{t\lambda} I - e^{tA}.$$

Zřejmě, pokud by $e^{t\lambda} I - e^{tA}$ bylo invertibilní, pak bude $(\lambda I - A)$ také invertibilní a to je spor. Tedy nutně musí být $e^{t\lambda} \in \sigma(e^{tA})$.

"$\subset$": Nechť $\mu \in \sigma(e^{tA})$ a pro spor nechť $\mu \notin e^{t\sigma(A)}$. Definujme funkci $h(\lambda) := \frac{1}{e^{t\lambda}-\mu}$, která je definována na $\sigma(A)$ díky tomu, že $\mu \notin e^{t\sigma(A)}$.

Abychom mohli definovat $h(A)$, potřebujeme, aby h byla holomorfní na otevřené kouli $G := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq \|A\| + \varepsilon\}$, kde $\varepsilon > 0$ je malé, libovolné. Pak budeme h moci vyjádřit na G konvergentní řadou a definovat $h(A)$ pomocí této řady.

Avšak h holomorfní na takovém G není a budeme muset postupovat jinak. Problémem jsou jednonásobné póly funkce h, které mají tvar:

$$\xi_k := \frac{1}{t} \ln\,\mu + 2k\pi i\,;\ k \in \mathbb{Z},$$

kde $\ln \mu$ je hlavní hodnota přirozeného logaritmu μ. Označíme množinu $\mathbb{K} := \{k \in \mathbb{Z} : \xi_k \in G\}$ - ta je jistě konečná. Potom lze h vyjádřit (viz. [6], str. 146, Lemma 7.2.3) jako:

$$h(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{K}} \frac{a_k}{\lambda - \xi_k} + \tilde{h}(\lambda)\,;\ \lambda \in G,$$

kde a_k jsou příslušná residua a $\tilde{h}$ je holomorfní na G a tedy $\exists \{b_n\} \subset \mathbb{C}$, že $\tilde{h}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$, $\lambda \in G$. Můžeme tedy korektně definovat $\tilde{h}(A)$ pomocí této řady:

$$\tilde{h}(A) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n.$$

Zbývá nám zjistit, jak definovat jednotlivé funkce $\frac{a_k}{A-\xi_k}$, $\forall k \in \mathbb{K}$. Pokud si však uvědomíme, že z předpokladu $\mu \notin e^{t\sigma(A)}$ a z rovnosti $\mu = e^{t\frac{1}{t}(\ln\,\mu + 2k\pi i)}$, $\forall k \in \mathbb{K}$, plyne, že $\frac{1}{t}(\ln\,\mu + 2k\pi i) \notin \sigma(A)$, $\forall k \in \mathbb{K}$, budeme vědět, že existuje rezolventa $R(\xi_k, A) := (A - \xi_k)^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{K}$.

Tedy $h(A)$ můžeme korektně definovat jako:

$$h(A) := \sum_{k \in \mathbb{K}} a_k R(\xi_k, A) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n.$$

Nyní bychom chtěli ukázat, že $h(A)(e^{tA} - \mu I) = (e^{tA} - \mu I)h(A) = I$, abychom dostali kýžený spor, a to že $\mu \notin \sigma(e^{tA})$. Jedna možnost je zjistit hodnoty koeficientů a_k a b_n a s jejich pomocí ukázat onen spor, ale to je zbytečně technicky náročné a existuje jednodušší způsob, který ukážeme my.

Zřejmě platí:

$$h(\lambda)(e^{t\lambda} - \mu) = \frac{1}{e^{t\lambda} - \mu}(e^{t\lambda} - \mu) = 1 = (e^{t\lambda} - \mu)\frac{1}{e^{t\lambda} - \mu} = (e^{t\lambda} - \mu)h(\lambda),$$

$\lambda \in G$. Nyní provedeme pár technických příprav: $\forall k \in \mathbb{K}$:

- $e^{t\lambda} - \mu = e^{t\lambda} - e^{t\xi_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \xi_k^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(\lambda^n - \xi_k^n)$
- $\frac{e^{t\lambda} - \mu}{\lambda - \xi_k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^{m-l-1} \xi_k^l$.

Celkem tedy dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{K}} a_k (\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^{m-l-1} \xi_k^l) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n (\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(\lambda^j - \xi_k^j)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \quad \lambda \in G, \end{aligned}$$

kde koeficienty $\{c_n\}$ jsou jednoznačně určeny koeficienty $\{b_n\}$ a $\{a_k\}$ a mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ je konvergentní dokonce na celém $\mathbb{C}$ (tedy i na G), neboť $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = 1$, takže $c_0 = 1$ a $c_n = 0$, $\forall n > 0$.

Nyní se podíváme na výpočet $h(A)(e^{tA} - \mu I)$. Nejprve opět provedeme pár technických příprav: $\forall k \in \mathbb{K}$:

- $e^{tA} - \mu I = e^{tA} - e^{t\xi_k} I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \xi_k^n}{n!} I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(A^n - \xi_k^n I)$
- $(e^{tA} - \mu) R(\xi_k, A) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{l=0}^{m-1} A^{m-l-1} \xi_k^l$.

Tyto výsledky dáme dohromady a dostaneme:

$$\begin{aligned} h(A)(e^{tA} - \mu I) &= \sum_{k \in \mathbb{K}} a_k (\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{l=0}^{m-1} A^{m-l-1} \xi_k^l) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n (\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(A^j - \xi_k^j I)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n, \end{aligned}$$

kde $\{c_n\}$ jsou jako výše a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n = I$, což jsme přesně potřebovali. Navíc z výpočtu lehce nahlédneme, že $h(A)$ a $(e^{tA} - \mu I)$ komutují a tedy opravdu platí kýžená rovnost $h(A)(e^{tA} - \mu I) = (e^{tA} - \mu I)h(A) = I$ a tedy $\mu \notin \sigma(e^{tA})$, což je spor. Tzn. že nutně musí platit $\mu \in e^{t\sigma(A)}$. $\square$

Díky této větě jsme nyní schopni dokázat následující větu, která nám dává výsledky jako v kapitole 3.

Využijeme zde mimo jiné Větu 4.2.1 (považujme to za samozřejmost, kterou nebudeme připomínat).

Věta 4.3.2. *Buď $(T(t))_{t\geq 0}$ stejnoměrně spojitá semigrupa operátorů na Banachově prostoru $\mathbf{X}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$(T(t))_{t\geq 0}$ je exponenciálně stabilní*
2. *$(T(t))_{t\geq 0}$ je stabilní*
3. *$\exists t_0 > 0$ takové, že $\|T(t_0)\| < 1$*
4. *$\exists t_1 > 0$ takové, že $r(T(t_1)) < 1$, kde $r(T(t))$ je spektrální poloměr $T(t)$*
5. *$\forall \lambda \in \sigma(A)$: $Re\,\lambda < 0$, kde $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ je generátor $(T(t))_{t\geq 0}$.*

Důkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2): Z bodu 1. plyne, že $\exists \varepsilon > 0$, $\exists M \geq 1$, že $\|T(t)\| \leq Me^{-t\varepsilon}$, což evidentně ukazuje, že $(T(t))_{t\geq 0}$ je stabilní.

(2) $\Rightarrow$ (3): Z předpokladu 2. vyplývá, že $\forall \varepsilon > 0$ $\exists t_0 > 0$ $\forall t \geq t_0$: $\|T(t)\| < \varepsilon$. Volme $\varepsilon = 1$, pak tedy $\exists t_0 > 0$, že $\|T(t_0)\| < 1$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Definujme $q := \|T(t_0)\| < 1$ a $M := \sup_{0\leq s\leq t_0} \|T(s)\|$, které existuje díky spojitosti zobrazení $t \longmapsto \|T(t)\|$ (složení spojitých zobrazení). Vezmeme libovolné $t \geq 0$, pak $t = kt_0 + s$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in [0, t_0)$ a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|T(kt_0)T(s)\| \leq \|T(kt_0)\|\,\|T(s)\| \leq M\left\|(T(t_0))^k\right\| \leq \\
&\leq Mq^k = Me^{k\ln q} \leq Me^{-(-\frac{\ln q}{t_0})t} = Me^{-t\varepsilon},
\end{aligned}$$

kde $\varepsilon := -\frac{\ln q}{t_0} > 0$, neboť $q < 1$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Jelikož spektrální poloměr je odhadnut normou operátoru, je evidentní, že pokud $\exists t_0 > 0$: $\|T(t_0)\| < 1$, pak $r(T(t_0)) \leq \|T(t_0)\| < 1$.

(4) $\Rightarrow$ (3): Spektrální poloměr lze vypočítat z Beurlingova vzorce takto:

$$r(T(t_1)) = \lim_{n\to\infty} \|(T(t_1))^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T(nt_1)\|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Tedy $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $\|T(nt_1)\|^{\frac{1}{n}} < 1$, tzn. že i $\|T(n_0 t_1)\| < 1$ a tedy hledané t_0 v 3. tvrzení je $t_0 = n_0 t_1$.

(4) $\Rightarrow$ (5): $\exists t_1 > 0$: $r(T(t_1)) < 1$, což znamená, že $\sigma(T(t_1))$ je obsaženo v jednotkové kouli. Nyní použitím Věty 4.3.1 o obrazu spektra (zdůrazněme, že implicitně uvažujeme $T(t) = e^{tA}$ díky Větě 4.2.1) zjistíme, že aby $\sigma(T(t_1))$ leželo v jednotkové kouli, musí nutně být $\sigma(A)$ obsaženo v levé polorovině komplexní roviny, tj. $\forall \lambda \in \sigma(A)$: $Re\, \lambda < 0$.

(5) $\Rightarrow$ (4): Použitím Věty 4.3.1 dostáváme okamžitě 4. tvrzení. $\square$

Ukázali jsme tedy stejně jako v druhé kapitole důležité vztahy mezi normou, spektrem a asymptotickým chováním semigrupy $(e^{tA})_{t\geq 0}$.

4.4 Aplikace

Jak jsme předznamenali v sekci 4.3, tak práce v nekonečné dimenzi už není vždy tak jednoduchá jako v dimenzi konečné. Např. konstrukce e^{tA} pro $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ je vesměs velice obtížná a řeší se zvlášť příklad od příkladu. I přesto uvedeme ilustrační (vcelku speciální) příklad, kdy toho lze dosáhnout relativně snadno.

Příklad 4.4.1. *Buď* $\mathbf{X} = l^p$, $1 \leq p \leq \infty$. *Vezměme tzv. shift-operátor daný nekonečnou maticí* $A = (a_{ij})$, *kde* $a_{ij} = 1$, *pokud* $j = i + 1$, $i, j \in \mathbb{N}$, *jinak je* a_{ij} *rovno nule. Tedy:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

A můžeme také ekvivalentně vyjádřit takto - pro $x \in l^p$, $x = (x_1, x_2, \dots)$ *je* $Ax = (x_2, x_3, \dots)$.

Potom $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$ *a podobným postupem jako u příkladu* 3.3.1*(ii) dostaneme:*

$$\begin{aligned} e^{tA} = (e_{ij}(t)) \quad , kde\ e_{ij}(t) &= \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} && , j-i \geq 0 \\ &= 0 && , j-i < 0\,;\ \forall t \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Rovněž si můžeme všimnout, že tento příklad odpovídá nekonečnému systému rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

kde řešeními $(x_1(t), x_2(t), \ldots)$ *jsou jednotlivé řádky nekonečné matice* e^{tA}*.*

V teoretické rovině pro nás může být v dalších pracích podstatný následující příklad resp. následující seznámení s multiplikativními semigrupami na prostoru (se supremovou normou)

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \forall \varepsilon > 0\ \exists\, kompakt\, K_\varepsilon : |f(s)| < \varepsilon, \forall s \in \Omega \setminus K_\varepsilon\}\,,$$

kde Ω je lokálně kompaktní prostor. Tyto semigrupy mají své využití například ve Fourierově analýze a nejsou navíc nijak "divoké", ale snadno konstruovatelné. Zajímavé pro nás je, že nemusí být vždy stejnoměrně spojité a tedy tvaru $(e^{tA})_{t\geq 0}$ a hlavně odpovídají řešení diferenciálních rovnic typu

$$\frac{d}{dt}u(t,x) = q(x)u(t,x).$$

Jelikož uvedeme následující část jen informativně (bez důkazu), odkážeme čtenáře na sekci 4.a v kapitole I knihy [4], pokud bude mít zájem o důkazy a podrobnější informace.

Definice 4.4.1. *Multiplikativní operátor* M_q *na prostoru* $C_0(\Omega)$ *odvozený od spojité funkce* $q : \Omega \to \mathbb{C}$ *definujeme jako*

$$\begin{aligned} M_q f &:= q \cdot f \qquad \forall f \in D(M_q),\ kde \\ D(M_q) &:= \{f \in C_0(\Omega) : q \cdot f \in C_0(\Omega)\}\,. \end{aligned}$$

Většina důležitých vlastností multiplikativního operátoru M_q může být odvozena z vlastností funkce q, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 4.4.1. *Pro operátor z definice 4.4.1 platí:*

1. *Operátor M_q je omezený právě tehdy, když je omezená funkce q.*
   V takovém případě platí: $||M_q|| = ||q|| := \sup_{s\in\Omega} |q(s)|$.

2. *Operátor M_q má omezenou inverzi právě tehdy, když funkce q má omezenou inverzi $\frac{1}{q}$ (tj. když $0 \notin \overline{q(\Omega)}$). V takovém případe $M_q^{-1} = M_{\frac{1}{q}}$.*

3. *$\sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}$.*

Pokud nyní k funkci $q : \Omega \to \mathbb{C}$ přiřadíme funkci $e^{tq} : s \mapsto e^{tq(s)}$ pro $s \in \Omega$, $t \geq 0$, můžeme definovat odpovídající multiplikativní operátor následujícím způsobem:

$$T_q(t)f := e^{tq}f, \quad f \in C_0(\Omega),$$

který formálně splňuje (FE). Aby byla tato definice korektní, potřebujeme, aby byly operátory $T_q(t)$, $t \geq 0$ omezené na $C_0(\Omega)$. To je dle Tvrzení 4.4.1 právě tehdy, když

$$\sup_{s\in\Omega} \left|e^{tq(s)}\right| = \sup_{s\in\Omega} e^{tRe\, q(s)} = e^{t \sup_{s\in\Omega} Re\, q(s)} < \infty.$$

Z těchto úvah vyplývá následující definice.

Definice 4.4.2. *Nechť je $q : \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, která splňuje:*

$$\sup_{s\in\Omega} Re\, q(s) < \infty.$$

Potom semigrupu $(T_q(t))_{t\geq 0}$, kde $T_q(t)f := e^{tq}f$ pro $t \geq 0$ a $f \in C_0(\Omega)$, nazveme mulitplikativní semigrupa generovaná multiplikativním operátorem M_q (nebo také funkcí q) na $C_0(\Omega)$.

Takováto formulace upřednostňující exponenciálu místo obecné spojité funkce má svůj důvod, jelikož platí následující věta, která opět ukazuje důležitost exponenciály.

Věta 4.4.1. *Buď $t \geq 0$, $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ buď omezená, spojitá funkce a předpokládejme, že*

1. *odpovídající multiplikativní operátory $T(t)f := m_t \cdot f$ tvoří semigrupu $(T(t))_{t\geq 0}$omezených operátorů na $C_0(\Omega)$, a že*

2. *zobrazení $\mathbb{R}_0 \ni t \mapsto T(t)f \in C_0(\Omega)$ jsou spojitá pro každé $f \in C_0(\Omega)$.*

Potom existuje spojitá (nemusí být omezená!) funkce $q : \Omega \to \mathbb{C}$ splňující $\sup_{s\in\Omega} Re\, q(s) < \infty$ a taková, že $m_t(s) = e^{tq(s)}$ pro každé $s \in \Omega$, $t \geq 0$.

Dále dle Vety 4.2.1 je semigrupa $(T_q(t))_{t\geq 0}$ stejnoměrně spojitá právě tehdy, když je tvaru $(e^{tA})_{t\geq 0}$ pro nějaký omezený operátor A. V následujícím tvrzení uvidíme, že to opět závisí na vlastnostech funkce q.

Tvrzení 4.4.2. *Multiplikativní semigrupa $(T_q(t))_{t\geq 0}$ generovaná $q : \Omega \to \mathbb{C}$ je stejnoměrně spojitá právě tehdy, když je q omezená.*

Tedy v případě, kdy je q omezená, platí $T_q(t) = e^{tA}$ a lehce lze nahlédnout, že v takovém případě $A = M_q$. Tato poznání v kombinaci s Tvrzením 4.4.1, Větou o obrazu spektra 4.3.1 a s Větou 4.3.2 nám dává nástroje jak popsat stabilní, stejnoměrně spojité multiplikativní semigrupy. Zřejmě to jsou ty, jež jsou generovány spojitou a omezenou funkcí $q : \Omega \to \mathbb{C}$, která navíc splňuje:

- $\sup_{s\in\Omega} Re\, q(s) < \infty$
- $\overline{q(\Omega)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\, \lambda < 0\}$.

Z Tvrzení 4.4.2 také vidíme, že neomezeným spojitým funkcím $q : \Omega \to \mathbb{C}$, které splňují $\sup_{s\in\Omega} Re\, q(s) < \infty$ odpovídají multiplikativní semigrupy, které nejsou stejnoměrně spojité.

Pokud se nyní vrátíme k rovnicím typu $\frac{d}{dt}u(t,x) = q(x)u(t,x)$, můžeme díky předchozím poznatkům formulovat následující větu.

Věta 4.4.2. *Nechť Ω je lokálně kompaktní prostor a nechť funkce $q : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá, omezená a splňuje $\overline{q(\Omega)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\, \lambda < 0\}$ a $\sup_{s\in\Omega} Re\, q(s) < \infty$. Potom je řešení rovnice $\frac{d}{dt}u(t,x) = q(x)u(t,x)$ stabilní.*

Důkaz. Plyne inhed z poznatků výše. $\square$

4.5 Závěr

Stejně jako v třetí kapitole se nám povedlo získat užitečná kritéria pro zjištění stability a omezenosti stejnoměrně spojitých semigrup a povedla se nám dokázat Věta o obrazu spektra bez využití funkčního kalkulu, což byl jeden z hlavních cílů.

Navíc jsme se lehce seznámili s pokročilejší teorií týkající se multiplikativních semigrup, které jsou na teoretické úrovni relativně užitečné, a ukázali jsme jejich propojenost s našimi výsledky z předchozích sekcí. Pro hlubší studium této problematiky opět odkážeme na příslušnou literaturu, konkrétně [4], kde jsou i další příklady (nejen) multiplikativních semigrup (např. na l^p).

Kapitola 5

Závěr

Celkově vzato byl pro nás význam této práce především pedagogický a můžeme tento soupis brát jako teoretickou přípravu na práci s neomezenými operátory a vůbec na práci v nekonečné dimenzi. Také jsme si ukázali, že v nekonečné dimenzi stále dostáváme "pěkné" výsledky jako v dimenzi konečné a to díky předpokladu omezenosti operátorů, s kterými jsme pracovali, což se ukázalo býti nejdůležitějším kritériem pro dosažení našich cílů už jen kvůli tomu, že jsme se vyhnuli používání funkčního kalkulu a pracovali s nekonečnými řadami, což by u neomezených operátorů jen tak nešlo.

Většinu poznatků jsme čerpali z [5] (hlavně, co se týče práce s operátory) a především z [4] resp. z prvních pár kapitol této knihy, která se zaměřuje na studium lineárních dynamických systémů a která nám posloužila jako velká inspirace a do jisté míry předloha při vytváření struktury této práce.

Literatura

[1] Amann H.: *Ordinary differential equations: an introduction to nonlinear analisys*, de Gruyter, Berlin, 1990.

[2] Bican L.: *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2000.

[3] Dunford, Schwartz: *Linear operators (part I): General theory*, Interscience, New York-London, 1958.

[4] Engel, Nagel: *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, 2001.

[5] Lukeš J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, Praha, 2003.

[6] Veselý J.: *Komplexní analýza*, Karolinum, Praha, 2000.