Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petra Šachová

Principy stanovení pojistného

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program: Matematika

2009

Ráda bych poděkovala RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D. za vedení bakalářské práce a Mgr. Martinu Pilátovi za korekční čtení a pomoc s editorem LaTeX.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 4. srpna 2009 Petra Šachová

Obsah

Název práce: Principy stanovení pojistného
Autor: Petra Šachová
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
e-mail vedoucího: mazurova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme principy stanovení pojistného. Vysvětlujeme základy teorie užitku a popisujeme základní metody pro stanovení pojistného. Tyto metody diskutujeme a charekterizujeme jak po matematické tak i po ekonomické stránce. Odvozujeme některé metody a dokazujeme jejich vlastnosti.
Klíčová slova: pojištění, pojistné, stanovení pojistného

Title: Premium Principles
Author: Petra Šachová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: mazurova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study the premium principles. We explain the basics of theory of expected utility and describe the basic methods for stating the premiums. We discuss and describe these methods both in the mathematics and economics point of view. We derive some of these methods and prove their features.
Keywords: Insurance, Premium, Premium Principles

Kapitola 1

Úvod

V této práci se zabýváme různými principy stanovení pojistného. V počátečních kapitolách si za pomoci teorie užitku zdůvodníme, proč jsou lidé ochotni se pojišťovat, vysvětlíme pojem pojistného a také sestavíme seznam vlastností, které by pojistné mělo mít jak z hlediska ekonomie a managementu tak i z hlediska matematického. V následujících kapitolách již definujeme metody stanovení pojistného. Metody ad hoc jsou vyjmenovány v přehledu i s jejich charakteristikami a odvozením některých jejich vlastností. Metoda top-down odvozuje pojistné, jak už název říká, odshora dolů. Nejprve se stanoví pojistné pro portfolio a to se následně spravedlivě rozpočítá na jednotlivá pojištění patřící do portfolia. A metoda charakterizační je založena na vlastnostech, které pro pojistné požadujeme.

1.1 Pojištění a teorie užitku

Pojišťovnictví je založeno na principu příjmů a výdajů, kde příjmy jsou tvořeny především přijatým pojistným a úroky, zatímco výdaje jsou tvořeny pojistnými plněními. Úkolem pojišťovny je stanovení minimálního pojistného, které je dostatečné pro stabilní pojistné portfolio a pro pokrytí pojistých závazků pojišťovny.

Cena, kterou lidé platí za pojištění, je vyšší nežli očekávaná výše škod. Proč jsou tedy lidé ochotni platit pojistné vyšší než netto pojistné, což je očekávaná výše škod? Teorie říká, že rozhodující se člověk ocení svůj majetek w cenou $u(w)$, kde u je užitková funkce. Zároveň se musí rozhodnout mezi ztrátami X a Y tak, že srovná $E[u(w-X)]$ a $E[u(w-Y)]$ a ze ztrát X, Y si vybere tu s vyšším očekávaným užitkem. Pak je schopen stanovit maximální pojistné P^+, které je ochoten zaplatit za náhodnou ztrátu X. Toto pojistné je stanoveno rovnicí $E[u(w-X)] = u(w-P)$.

Stejný model se dá použít i pro pojistitele, který stanoví minimální pojistné P^-, za které je ochoten převzít riziko X. V případě, že $P^+ > P^-$, pak to pro obě strany znamená zvýšení jejich užitku, pokud pojistné je mezi P^+ a P^-. Přestože není možné stanovit přesně užitkovou funkci pro jednotlivce, je možné získat některé její vlastnosti:

- Větší hodnoty majetku obecně znamenají vyšší míru užitku, tedy $u(w)$ je neklesající funkce.
- Pro úvahy související s pojišťovnictvím budeme předpokládat, že člověk upřednostňuje fixní ztrátu před ztrátou náhodnou.

1.2 Pojistné z hlediska ekonomie a managementu

Dle zákona o pojišťovnictví je pojistné cena za pojistnou ochranu před škodami způsobenými nahodilou událostí poskytovaná pojištěnému, neboli úplata za přenesení negativních finančních důsledků nahodilosti z jednotlivých subjektů na pojistitele. Obecně můžeme říci, že výše pojistného závisí těchto aspektech:

- velikosti rizika a odhadu výše škody z něj plynoucí
- výše nákladů pojistitele spojených s provozem pojištění

Zároveň by pojistné mělo být tak vysoké, aby:

- pokrylo předpokládané budoucí náklady za pojistná plnění
- umožnilo pojišťovně vytvořit pojistně technické rezervy vztahující se k danému riziku
- pokrylo provozní a běžné náklady pojistitele spojené s poskytováním pojistného produktu
- reagovalo na ekonomické podmínky (inflaci, úrokovou míru)

- bylo marketingově přijatelné s ohledem na cenu srovnatelné služby u konkurenčních pojistitelů

Kapitola 2

Vlastnosti pojistného

V této části práce vyjmenujeme a popíšeme některé vlastnosti, které požadujeme od pojistného. Zároveň také zavedeme označení, které budeme používat v celé práci.

Nechť (Ω, F, P) je pravděpodobnostní prostor a χ je množina nezáporných náhodných veličin na tomto pravděpodobnostním prostoru. Množina χ je tedy vlastně množinou pojistných rizik. Dále nechť X, Y, Z patří do χ. Nechť H značí pojistné, což je funkce z χ do nezáporných reálných čísel. Je tedy možné, že $H[X]$ nabývá hodnoty ∞. Dále je možné rozšířit definiční obor pojistného $H[X]$, aby případně obsahoval i záporné náhodné veličiny. Což se nám může hodit pokud budeme pracovat s náhodnou veličinou celkové ztráty pojistitele, tedy výplatou pojistných událostí mínus pojistného. V [6] a [3] jsou uvedené následující vlastnosti pojistného a jejich charakteristiky.

1. Nezávislost
   Pojistné $H[X]$ závisí pouze na dekumulativní distribuční funkci náhodné veličiny X. Tato funkce, kterou budeme značit S_X, je definována předpisem $S_X(t) = P[\omega \in \Omega : X(\omega) > t]$.

   Tato vlastnost říká, že pojistné závisí pouze na rozdělení finanční ztráty a nezávisí na její příčině.

2. Bezpečnostní přirážka
   $H[X] \geq EX$ pro $\forall X \in \chi$
   Bezpečnostní přirážka je určena ke krytí výkyvů v pojistném plnění oproti předpokládanému průměru. Tato podmínka je nutná z toho důvodu, že chceme pokrýt alespoň předpokládané výplaty

pojistného plnění na pojistném riziku X, tedy EX. V opačném případě by se pojistitel dostával do ztráty.

3. Žádná neopodstatněná bezpečnostní přirážka
   Pokud riziko $X \in \chi$ je rovno konstantě c skoro všude, pak $H[X] = c$.

   Na rozdíl od předchozí vlastnosti, pokud s jistotou, tedy pravděpodobností 1, víme, že pojistné plnění bude rovno konstantě c, pak nemáme žádný důvod pro zahrnutí bezpečnostní přirážky, neboť zde není žádná nejistota ohledně výše pojistného plnění.

4. Maximální ztráta neboli no rip off
   $H[X] \leq min[p, F_X(p) = 1]$, kde F_X je distribuční funkce

   Tato vlastnost se dá ještě chápat tímto způsobem – víme, že škoda nepřekročí maximální hodnotu m, pak by pojistné nemělo překročit výši očekávané ztráty a naopak. Zapsáno matematicky

$$X \leq m \Leftrightarrow H[X] \leq m$$

5. Konzistence
   $H[X + a] = H[X] + a \; \forall X \in \chi$ a $\forall a \geq 0$

   Tato vlastnost říká, že pokud riziko X navýšíme o konstantu a, pak pojistné pro nové riziko $X + a$ bude pojistné pro riziko X navýšené o konstantu a.

6. Ekvivariance vůči změně měřítka
   $H[bX] = bH[X] \; \forall X \in \chi$ a $\forall b \geq 0$

   Pro zdůvodnění se často používá pojem arbitráže. Pokud by pojistné například za dvojnásobné riziko bylo více než dvakrát větší než za jednoduché riziko, pak by si lidé raději pořídili pojištění pro riziko 2X tak, že by si pořídili pojištění pro riziko X u dvou různých pojistitelů, nebo u jednoho pojistitele ale pod dvěma pojistnými smlouvami.

   Podobné vysvětlení máme i pro opačný případ, tedy pro případ kdy by pojistné pro riziko 2X stálo méně, než dvakrát tolik co pojistné pro riziko X. V tomto případě by se totiž dalo zakoupit pojištění pro riziko 2X, které by následně bylo rozprodáno po částech, tedy rizicích X, a dotyčný by z tohoto profitoval.

Tuto podmínku lze zpochybnit pouze pokud riziko X je velké. V tomto případě by pojistné pro riziko 2X mohlo být více než dvakrát větší než pro riziko X.

V případě, že existuje riziko Y takové, že $H[Y] < \infty$, pak vlastnosti 5 a 6 implikují vlastnost 3.
Odvození:
Nechť

$$X \equiv c,$$

pak

$$\begin{aligned} H[X] &= H[c] = H[0 + c] = \\ &= H[0] + c = 0 + c = c, \end{aligned}$$

protože

$$H[0] = 0$$

$$\begin{aligned} H[0] &= H[0Y] = \\ &= 0H[Y] = 0 \end{aligned}$$

7. Aditivita
$H[X + Y] = H[X] + H[Y] \ \forall X, Y \in \chi$

   Jde o silnější variantu vlastnosti 6. Pro vysvětlení této vlastnosti lze opět využít argument arbitráže.

8. Subaditivita
$H[X + Y] \leq H[X] + H[Y] \ \forall X, Y \in \chi$

   Někteří autoři upřednostňují tuto vlastnost před vlastností aditivity a to z toho důvodu, že v reálném světě nemůže kupující rozprodat pojištění po částech.

9. Superaditivita
$H[X + Y] \geq H[X] + H[Y] \ \forall X, Y \in \chi$

Tato podmínka je ospravedlnitelná v případě omezených kapitálových rezerv pojišťovny. Ta pak může u velkých rizik požadovat vyšší pojistné pro riziko $X+Y$ nežli součet pojistných pro samostatná rizika X a Y. Na trhu tedy můžeme pozorovat situace, kdy například $H[2X] > 2H[X]$.

Poznámka: Obě předchozí vlastnosti (Subaditivitu i superaditivitu) můžeme použít i ve slabších verzích. A to pokud požadujeme: $H[bX] \leq bH[X]$ nebo $H[bX] \geq bH[X]$, kde $b \geq 0$.

10. Aditivita pro nezávislá rizika
    $H[X+Y] = H[X] + H[Y]$ $\forall X, Y \in \chi$ nezávislá

    Někteří autoři se domnívají, že podmínka 7 je příliš silná a že argument arbitráže platí pouze pro nezávislá rizika. Tím se lze vyhnout i problémům s omezenými rezervami.

11. Aditivita pro komonotónní rizika
    $H[X+Y] = H[X] + H[Y]$ $\forall X, Y \in \chi$, kde X, Y jsou komonotónní

    Definice Dvě rizika X a Y jsou komonotónní, jestliže jejich dvourozměrná distribuční funkce splňuje podmínku $F_{X,Y}(x,y) = min(F_X(x), F_Y(y))$ pro $\forall x, y \geq 0$.

12. Monotonie
    Jestliže $X(\omega) < Y(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$, pak $H[X] \leq H[Y]$.

13. Zachování stochastické dominance
    Jestliže $S_X(t) \leq S_Y(t)$ $\forall t \geq 0$, pak $H[X] \leq H[Y]$.

14. Zachování S - L uspořádání
    Jestliže $E[X-d]_+ \leq E[Y-d]_+$ $\forall d \geq 0$, pak $H[X] \leq H[Y]$.

15. Spojitost
    Nechť $X \in \chi$, pak $\lim_{a \to 0^+} H[max(X-a, 0)] = H[X]$
    a $\lim_{a \to \infty} H[min(X, a)] = H[X]$.

Kapitola 3

Metoda Ad Hoc

V této kapitole se nachází přehled nejznámějších principů stanovení pojistného spolu s vlastnostmi z předchozí kapitoly, které tyto principy splňují.

Bezpečnostní přirážka je definována jako $H[X] - EX$, kde $H[X]$ je pojistné a EX ryzí pojistné. V [3, 6, 2, 5] jsou uvedeny tyto metody.

3.1 Ryzí pojistné

$H[X] = EX$

Toto pojistné není závislé na pojistném riziku. Jde spíše o základní modelový případ, kdy pojistitel předpokládá, že riziko neexistuje pokud prodá dostatek stejně rozdělených a nezávislých pojistek.

Teorie ruinování, což je odvětví aktuárských věd studující náchylnost pojišťovny k insolventnosti, říká, že toto pojistné bez zahrnutí bezpečnostní přirážky je z dlouhodobého hlediska neudržitelné, a to i v případě značných rezerv pojišťovny.

Splněné vlastnosti: 1 - 15

Příklad 1 *Dokažte aditivitu, konzistenci a ekvivarianci vůči změně měřítka tohoto principu.*

Řešení

- aditivita – ano

$$H[X_1 + X_2] = E[X_1 + X_2] = EX_1 + EX_2 = H[X_1] + H[X_2]$$

- konzistence – ano

$$Y = X + c$$

$$H[Y] = EY = E[X + c] = c + EX = H[X] + c$$

- ekvivariance vůči změně měřítka – ano

$$H[bX] = E[bX] = bEX = bH[X]$$

3.2 Princip očekávané hodnoty

$H[X] = (1 + \theta)EX$, kde $\theta > 0$

Tato metoda je založena na předchozí metodě ryzího pojistného, ale již počítá se zahrnutím bezpečnostní přirážky. Jde o snadno pochopitelný princip, který lze jednodušše vysvětlit i běžným pojišťěncům, kteří nemají rozsáhlejší finanční vzdělání. Odborníky je však velmi často kritizován hlavně kvůli tomu, že nezávisí na míře fluktuací rizika X.

Splněné vlastnosti: 1, 2, 6 - 15

Příklad 2 *Dokažte, že tento princip splňuje aditivitu a ekvivarianci vůči změně měřítka, monotonii, ale nesplňuje konzistenci a vlastnost maximální ztráty.*

Řešení

- aditivita – ano

$$H[X_1 + X_2] = (1 + \theta)E[X_1 + X_2] = (1 + \theta)(EX_1 + EX_2) = H[X_1] + H[X_2]$$

- konzistence – ne

$$
\begin{aligned}
Y &= X + c \\
H[Y] &= (1+\theta)EY = (1+\theta)E[X+c] = (1+\theta)(EX+c) = \\
&= (1+\theta)EX + (1+\theta)c \neq H[X] + c
\end{aligned}
$$

- ekvivariance vůči změně měřítka – ano

$$H[bX] = (1+\theta)E[bX] = (1+\theta)bEX = bH[X]$$

- maximální ztráta – ne
  Předpokládejme, že riziko X je konstantní a je rovno své maximální hodnotě,tedy:

$$X = m.$$

  Pak

$$H[m] = (1+\theta)E[m] = (1+\theta)m > m.$$

- monotonie – ano
  Nechť

$$
\begin{aligned}
X \leq Y &\Leftrightarrow \\
X - Y \leq 0 &\Rightarrow \\
E[X-Y] \leq 0 &\Rightarrow \\
EX \leq EY &\Leftrightarrow \\
(1+\theta)EX &\leq (1+\theta)EY.
\end{aligned}
$$

3.3 Princip rozptylu

$H[X] = EX + \alpha \operatorname{var} X$, kde $\alpha > 0$

Jako již předchozí metoda, i tato je založena na principu ryzího pojistného. V tomto případě je však bezpečnostní přirážka závislá na rozptylu. Viz.[4]

Splněné vlastnosti: 1, 2, 3, 5, 10, 15

Příklad 3 *Dokažte, že princip rozptylu splňuje vlastnost konzistence a nesplňuje vlastnosti aditivity, subaditivity, ekvivariance vůči změně měřítka a maximální ztráty.*

Řešení

- aditivita – ne

$$\begin{aligned}H[X_1+X_2] &= E[X_1+X_2] + \alpha \operatorname{var}[X_1+X_2] = \\ &= EX_1 + EX_2 + \alpha(\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 + \operatorname{cov}(X_1, X_2)) = \\ &\neq H[X_1] + H[X_2]\end{aligned}$$

- subaditivita – ne
  Uvažujme dvě rizika $\frac{X}{2}$ a $\frac{X}{2}$.
  Pak

$$\begin{aligned}H[\frac{X}{2}] + H[\frac{X}{2}] &= 2(E[\frac{X}{2}] + \alpha \operatorname{var}[\frac{X}{2}]) = \\ &= 2(\frac{1}{2}EX + \alpha\frac{1}{4}\operatorname{var} X) = \\ &= EX + \frac{\alpha}{2}\operatorname{var} X < \\ &< EX + \alpha \operatorname{var} X = H[X].\end{aligned}$$

- konzistence – ano

$$\begin{aligned}Y &= X + c \\ H[Y] &= EY + \alpha \operatorname{var} Y = E[X+c] + \alpha \operatorname{var}[X+c] = \\ &= EX + c + \alpha \operatorname{var} X = EX + \alpha \operatorname{var} X + c = H[X] + c\end{aligned}$$

- ekvivariance vůči změně měřítka – ne

$$H[bX] = E[bX] + \alpha \operatorname{var}[bX] = bEX + \alpha b^2 \operatorname{var} X$$

- maximální ztráta – ne
  Uvažujme, že X je náhodná veličina s alternativním rozdělením, taková že:

$$\begin{aligned}P(X = m) &= p \\ P(X = 0) &= 1 - p > 0.\end{aligned}$$

Vyjádříme pojistné jako funkci g proměnné p:

$$g(p) = H[X] = mp + \alpha m^2 p(1-p) = mp(1 + \alpha m(1-p)).$$

Pro funkci g platí:

$$\begin{aligned} g(p) > m \Leftrightarrow mp(1 + \alpha m(1-p)) > m \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p + p\alpha m(1-p) > 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p\alpha m(1-p) > 1 - p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p\alpha m > 1. \end{aligned}$$

Pak lze vybrat proměnné p, m, α takové, že vlastnost maximální ztráty nebude splněna.

- monotonie – ne
  Zde platí stejný argument jako u principu směrodatné odchylky dále.

3.4 Princip směrodatné odchylky

$H[X] = EX + \beta\sqrt{\operatorname{var} X}$, kde $\beta > 0$

Bezpečnostní přirážka je v tomto případě proporcionálně závislá na směrodatné odchylce. Velmi často je tato metoda používána pro stanovení pojistného majetkového a úrazového pojištění.

Splněné vlastnosti: 1, 2, 3, 5, 6, 15

Příklad 4 *Dokažte, že princip směrodatné odchylky splňuje vlastnosti konzistence a subaditivity, ekvivariance vůči změně měřítka a nesplňuje vlastnost aditivity, maximální ztráty.*

Řešení

- aditivita – ne

$$\begin{aligned} H[X_1 + X_2] &= E[X_1 + X_2] + \beta\sqrt{\operatorname{var}[X_1 + X_2]} = \\ &= EX_1 + EX_2 + \beta\sqrt{\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 + \operatorname{cov}[X_1 + X_2]} \end{aligned}$$

- subaditivita – ano
  Víme, že platí

$$
\begin{aligned}
Cov[X_1, X_2] &= E[(X - EX)(Y - EY)] \leq \\
&\leq \sqrt{E(X - EX)^2}\sqrt{E(Y - EY)^2} = \\
&= \sqrt{\operatorname{var} X}\sqrt{\operatorname{var} Y} \\
\sqrt{\operatorname{var}[X_1 + X_2]} &= \sqrt{\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 + 2\operatorname{cov}[X_1, X_2]} \leq \\
&\leq \sqrt{\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 + 2\sqrt{\operatorname{var} X_1}\sqrt{\operatorname{var} X_2}} = \\
&= \sqrt{(\sqrt{\operatorname{var} X_1} + \sqrt{\operatorname{var} X_2})^2} = \\
&= \sqrt{\operatorname{var} X_1} + \sqrt{\operatorname{var} X_2}
\end{aligned}
$$

  Pak tedy

$$
\begin{aligned}
H[X_1 + X_2] &= E[X_1 + X_2] + \beta\sqrt{\operatorname{var}[X_1 + X_2]} \leq \\
&\leq EX_1 + EX_2 + \beta(\sqrt{\operatorname{var} X_1} + \sqrt{\operatorname{var} X_2}) = \\
&= H[X_1] + H[X_2]
\end{aligned}
$$

- konzistence – ano

$$
\begin{aligned}
Y &= X + c \\
H[Y] &= EY + \beta\sqrt{\operatorname{var} Y} = E[X + c] + \beta\sqrt{\operatorname{var}[X + c]} \\
&= EX + c + \beta\sqrt{\operatorname{var} X} = H[X] + c
\end{aligned}
$$

- ekvivariance vůči změně měřítka – ano

$$
\begin{aligned}
H[bX] &= E[bX] + \beta\sqrt{\operatorname{var}[bX]} = bEX + \beta\sqrt{b^2 \operatorname{var} X} \\
b &> 0 \\
H[bX] &= bEX + b\beta\sqrt{\operatorname{var} X} = bH[X]
\end{aligned}
$$

- maximální ztráta – ne
  Nechť X je veličina s alternativním rozdělením:

$$
\begin{aligned}
P(X = m) &= p \\
P(X = 0) &= 1 - p.
\end{aligned}
$$

Pak

$$
\begin{aligned}
EX &= mp \\
\operatorname{var} X &= pm^2 - (pm)^2 = m^2 p(1-p).
\end{aligned}
$$

Označme

$$
\begin{aligned}
g(p) = H[X] &= mp + \alpha\sqrt{m^2 p(1-p)} = \\
&= m(p + \alpha\sqrt{p(1-p)}).
\end{aligned}
$$

Pro funkci $g(p)$ platí :

$$
\begin{aligned}
g(0) &= 0 \\
g(1) &= m.
\end{aligned}
$$

Zderivujeme-li funkci g podle proměnné p, pak získáme:

$$
g'(p) = m(1 + \frac{1}{2}\frac{a(1-2p)}{\sqrt{p(1-p)}}).
$$

Dále spočítáme limity:

$$
\begin{aligned}
\lim_{p\to\, 0} g'(p) &= m(1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{0+}) = \infty \\
\lim_{p\to\, 1} g'(p) &= m(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{0+}) = -\infty.
\end{aligned}
$$

Pak ale musí existovat $p < 1$ takové, že

$$
g(p) = H[X] > m.
$$

- monotonie – ne
  Víme, že pro konstantu c platí:

  $$
  H[c] = E[c] + \alpha\sqrt{\operatorname{var} c} = c.
  $$

  Pokud po konstantě c požadujeme, aby splňovala monotonii, pak přejdeme k vlastnosti maximální ztráty, o níž už víme, že pro tento princip neplatí. Tedy pokud

  $$
  Y = m,
  $$

kde m je maximální hodnota ztráty, pak přecházíme k vyjádření monotonie:

$$X \leq m \Rightarrow H[X] \leq m = m,$$

což je opět vlastnost maximální ztráty, která není splněna.
Tedy ani monotonie není splněna.

3.5 Esscherův princip

$$H[X] = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]},$$

kde X je náhodná veličina a $h > 0$

Tato metoda stanovení pojistného byla odvozena Hansem Bühlmannem [1] při studiu rizika ztráty z devizových operací.

Splněné vlastnosti: 1, 3 - 5, 10, 15.

Příklad 5 *Dokažte, že Esscherův princip je konzistentní a aditivní.*

Řešení

- konzistence – ano
  Nechť $Y = X + c$

$$\begin{aligned} H[Y] &= \frac{E[Ye^{hY}]}{E[e^{hY}]} = \\ &= \frac{E[(X+c)e^{h(X+c)}]}{E[e^{h(X+c)}]} = \\ &= \frac{E[Xe^{hX}]e^{hc} + cE[e^{hX}]e^{hc}}{E[e^{hX}]e^{hc}} = \\ &= \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} + c = \\ &= H[X] + c. \end{aligned}$$

- aditivita – ano
  Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, pak

$$\begin{aligned} H[X_1 + X_2] &= \frac{(E[(X_1 + X_2)e^{h(X_1+X_2)}])}{E[e^{h(X_1+X_2)}]} = \\ &= \frac{(E[X_1 e^{hX_1}]E[e^{hX_2}] + E[e^{hX_1}]E[X_2 e^{hX_2}])}{E[e^{hX_1}]E[e^{hX_2}]} = \\ &= \frac{E[X_1 e^{hX_1}]}{E[e^{hX_1}]} + \frac{E[X_2 e^{hX_2}]}{E[e^{hX_2}]} = \\ &= H[X_1] + H[X_2]. \end{aligned}$$

3.6 Kvantilový princip

$H[X] = F_X^{-1}(1 - \epsilon)$, kde $\epsilon \in (0, 1)$ je dostatečně malé

$F_X^{-1}(1 - \epsilon)$ je kvantil rozložení škod a pojistitel chce pojistným pokrýt $(1 - \epsilon) * 100\%$ možných škod. Pravděpodobnost ztráty na riziku X je tedy nejvýše ϵ. Nejlépe je pak volit ϵ od 1 do 5 procent.

3.7 Princip střední hodnoty

$H[X] = v^{-1}(E[v(X)])$, kde v je konvexní vyhodnocovací funkce.

Pokud položíme $v(x) = x$, pak získáme ryzí pojistné a pokud položíme $v(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha > 0$, pak máme exponenciální princip viz. 3.10.

3.8 Princip maximální ztráty

$H[X] = min\{p, F_X(p) = 1\}$

Toto pojistné získáme pro speciální případy jiných principů:

- exponenciální pro $\alpha \to \infty$
- kvantilový pro $\epsilon \to 0$

3.9 Princip ekvivalentního užitku

$H[X]$ řeší rovnici

$$u(w) = E[u(w - X + H)],$$

kde u je rostoucí, konkávní užitková funkce bohatství (pojistitele) a w je počáteční bohatství pojistitele.

Zjednodušeně lze říct, že H je minimální pojistné, za které je pojistitel ochoten pojistit riziko X. Na levé straně rovnice je užitková funkce pojistitele, který není ochoten přijmout riziko, kdežto na pravé straně je očekávaná užitková funkce pojistitele, který je ochoten toto riziko přijmout za pojistné H. H má tu vlastnost, že pojistitel je nestranný/indiferentní, jestli pojistné riziko přijme, či ne. Právě proto se tomuto pojistnému říká indiferenční cena.

Lze se také zaměřit na změny indiferenční ceny při změně averze vůči riziku, což je vyjádřeno užitkovou funkcí. Pro malá rizika lze tuto metodu aproximovat principem rozptylu, kde

$$\alpha = -(1/2)(\frac{u(w)''}{u(w)'}),$$

což je vlastně polovina míry absolutní averze vůči riziku. Pokud stanovíme

$$u(w) = -e^{-\alpha w},$$

pak dojdeme k již exponenciálnímu principu viz. 3.10.

Podíváme-li se na problém z druhé strany, tedy ze strany pojištěného, pak maximální pojistné, které je pojištěný ochoten zaplatit za krytí pojistné události je řešení G této rovnice

$$E[u(w - X)] = u(w - G).$$

Výsledek $G[X]$ je pak indiferenční cena kupujícího, tedy při této výši pojistného je pojištěný nestranný, zda-li si pojištění pořídí, či ne.

Splněné vlastnosti:1 - 5, 12 - 15

Příklad 6 *Aproximujte maximální pojistné P^+ pro riziko pro danou užitkovou funkci $u(x)$.*

Řešení Označme μ a σ^2 střední hodnotu a rozpyl veličiny X.
Použitím prvních členů Taylorova rozvoje získáváme:

$$u(w - P^+) \approx u(w - \mu) + (\mu - P^+)u'(w - \mu)$$
$$u(w - X) \approx u(w - \mu) + (\mu - X)u'(w - \mu) + \frac{1}{2}(\mu - X)^2 u''(w - \mu).$$

Pak
$$E[u(w - X)] \approx u(w - \mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(w - \mu).$$

Dosadíme-li do předcházející rovnice vztah

$$E[u(w - X)] = u(w - P^+),$$

pak
$$\frac{1}{2}\sigma^2 u''(w - \mu) \approx (\mu - P^+)u'(w - \mu).$$

Tedy lze P^+ vyjádřit jako:

$$P^+ \approx \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(w - \mu)}{u'(w - \mu)}.$$

Definujeme koeficient averze vůči riziku $r(w)$ jako

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Pak můžeme P^+ vyjádřit pomocí tohoto koeficientu:

$$P^+ \approx \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r(w - \mu).$$

3.10 Exponenciální princip

$H[X] = (1/\alpha) * \ln E[e^{\alpha X}]$

Tato metoda je založena na principu ekvivalentního užitku, kde je užitková funkce exponenciální.

Toto pojistné je roustoucí funkcí proměnné α, která měří averzi vůči riziku.

Splněné vlastnosti: 1 - 5, 10, 12 - 15

Příklad 7 *Dokažte, že exponenciální princip splňuje vlastnost konzistence a nesplňuje vlastnosti aditivity a ekvivariance vůči změně měřítka.*

Řešení

- aditivita – ano
  Nechť X_1 a X_2 jsou vzájemně nezávislé veličiny,pak

$$\begin{aligned} H[X_1 + X_2] &= \frac{1}{\alpha} \log E[e^{\alpha(X_1+X_2)}] = \\ &= \frac{1}{\alpha} \log E[e^{\alpha X_1} e^{\alpha X_2}] = \\ &= \frac{1}{\alpha} \log(E[e^{\alpha X_1}]E[e^{\alpha X_2}]) = \\ &= \frac{1}{\alpha}(\log E[e^{\alpha X_1}] + \log E[e^{\alpha X_2}]) = \\ &= H[X_1] + H[X_2]. \end{aligned}$$

- konzistence – ano

$$Y = X + c$$

$$\begin{aligned} H[Y] &= (1/\alpha) \log E[e^{\alpha Y}] = \\ &= (1/\alpha) \log E[e^{\alpha(X+c)}] = \\ &= (1/\alpha) \log E[e^{\alpha X}]e^{\alpha c} = \\ &= (1/\alpha) \log E[e^{\alpha X}] + (1/\alpha)\alpha c = H[X] + c \end{aligned}$$

- ekvivariance vůči změně měřítka – ne

$$\begin{aligned} H[bX] &= (1/\alpha) \log E e^{\alpha b X} = \\ &= (1/\alpha) \log E[(e^{\alpha X})^b] \neq \\ &\neq (1/\alpha) \log E[e^{\alpha X}]^b = b(1/\alpha)E[e^{\alpha X}] \end{aligned}$$

Příklad 8 *Nechť pojistitel má exponenciální užitkovou funkci s parametrem α. Jaké je minimální pojistné P^- pro riziko X.*

Řešení Pojistitel s užitkovou funkcí $U(.)$ a kapitálem W pojistí ztrátu X za pojistné P pokud $E[U(W + P - X)] \geq U(W)$, kde $P \geq P^-$. Toto pojistné získáme vyřešením rovnice

$$U(W) = E[U(W + P^- - X)].$$

Do předchozí rovnice dosadíme exponenciální užitkovou funkci:

$$U(x) = -\alpha e^{-\alpha x}.$$

Po vyřešení získáme

$$P^- = (1/\alpha) \log[E(e^{\alpha x})],$$

což je exponenciální princip.

3.11 Wangův princip

$H[X] = \int_0^\infty g[S_X(t)]\, dt$, kde g je rostoucí, konkávní funkce $g : [0, 1] \to [0, 1]$ Funkce g se nazývá distorzní funkcí.

Jako další distorzní funkci můžeme použít takzvanou Wangovu transformaci $g(p) = \Phi[\Phi^{-1}(p) + \lambda]$, kde Φ je kumulativní distribuční funkce normálně rozdělené náhodné veličiny a λ je reálný parametr.

Splněné vlastnosti: 1 - 6, 8, 11 - 15

3.12 Princip proporcionálních rizik

$H[X] = \int_0^\infty [S_X(t)]^c\, dt$, kde $0 < c < 1$.
Jde o speciální případ Wangova principu, kde distorzní funkce g je dána takto $g(p) = p^c$ a $0 < c < 1$.

Splněné vlastnosti: 1 - 6, 8, 11 - 15

3.13 Švýcarský princip

Pojistné je dáno jako řešení H rovnice

$$E[u(X - pH)] = u((1 - p)H),$$

kde $p \in [0,1]$ a u je rostoucí, konvexní funkce.

Splněné vlastnosti: 1 - 4, 12 - 15

3.14 Holandský princip

$H[X] = EX + \theta E[(X - \alpha EX)_+]$, kde $\alpha \geq 1$ a $0 < \theta < 1$

Splněné vlastnosti: 1 - 4, 6, 8, 12 - 15

Kapitola 4

Metoda top-down

V [3] je uvedena metoda top-down pro stanovení pojistného, kterou roku 1985 popsal Hans Bühlmann, kdy nejprve stanovíme pojistné požadované pro celé portfolio, a to se pak snažíme spravedlivým způsobem rozdělit mezi jednotlivé smlouvy – jednotlivá rizika. K získání minimálního ročního pojistného použijeme diskrétní teorii ruinování. Výsledkem je exponenciální pojistné, jehož parametr je odvozen od maximální povolené pravděpodobnosti ruinování a počátečního kapitálu. Pokud budeme předpokládat, že akcionáři budou požadovat roční dividendu a že pojistné by mělo být na trhu co nejvíce konkurenceschopné, tak lze odvodit i optimální výši základního kapitálu.

Jak už jsme zmínili v základním popisu této metody, tak budeme používat diskrétní teorii ruinování, kde platí:

$$U_t = U_{t-1} + c - S_t,$$

kde $t = 1, 2, ...$ V tomto vztahu jednotlivé proměnné mají tento význam:

- U_t kapitál pojistitele v čase t
- c příjem z pojistného za jednotku času
- $S_t = X_1 + X_2 + ... + X_N$, kde X_i jsou pojistné nároky. Roční pojistné nároky pojištěných S_t jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny se složeným Poissonovým rozdělením, tedy $S_t \sim S$.

K ruinování dojde pokud pro nějaké t platí $U_t < 0$.

Jak vysoký by tedy měl být základní kapitál $U_0 = u$? A jak vysoké by mělo být pojistné $c = H[X]$, aby s velkou pravděpodobností nedošlo k ruinování?

Z teorie ruinování víme, že horní hranice pravděpodobnosti ruinování je dána vztahem:

$$e^{-Ru},$$

kde R je adjustační koeficient, což je řešení rovnice

$$e^{Rc} = E[e^{RS}].$$

Nyní označíme horní mez jako ϵ, pak jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$R = |log\epsilon|/u.$$

Horní hranici pravděpodobnosti ruinování ϵ získáme zvolením pojistného c takového, že

$$c = \frac{1}{R} log(E[e^{RS}]),$$

kde

$$R = |log\epsilon|/u.$$

Vidíme, že c je pojistné podle exponenciálního principu a víme, že exponenciální pojistné je aditivní pro nezávislé náhodné veličiny. Tedy:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

Pak

$$\frac{1}{R}\log(E[e^{RS}]) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R}\log(E[e^{RX_j}]).$$

Další pojistné lze získat jako aproximaci k exponenciálnímu pojistnému s použitím prvních členů Taylorova rozvoje kumulantové distribuční funkce a za předpokladu, že adjustační koeficient je malý. Získáme tak princip rozptylu:

$$H[S] = ES + \alpha \operatorname{var} S,$$

kde $\alpha > 0$. Odvození pak vypadá takto:

$$H[S] = \frac{1}{R}\kappa_S(R)$$

Kumulantová vytvořující funkce je ve tvaru:

$$g(R) = \log(E[e^{SR}]).$$

Taylorův rozvoj kumulantové vytvořující funkce $g(t)$ vypadá takto:

$$\begin{aligned}\log(E[e^{SR}]) &= \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n(S)\frac{R^n}{n!} = \\ &= R * ES + \frac{R^2}{2}\operatorname{var} S + \dots,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\kappa_1(S) &= g'(0) = ES \\ \kappa_2(S) &= g''(0) = \operatorname{var} S \\ \kappa_n(S) &= g^{(n)}(0).\end{aligned}$$

Pak

$$H[S] = \frac{1}{R}[R * ES + \frac{R^2}{2}\operatorname{var} S] = ES + \frac{R}{2}\operatorname{var} S.$$

Tedy $\alpha = R/2$.

Můžeme pozorovat:

- Zdvojnásobení parametru α ve vzorečku $H[S] = ES + \alpha \operatorname{var} S$ sníží horní odhad pravděpodobnosti ruinování z ϵ na ϵ^2, neboť

  $$e^{-Ru}$$

  je klesající funkce a platí:

  $$\begin{gathered}\epsilon = e^{\frac{\alpha}{2}u} \\ e^{\alpha u} = e^{\frac{\alpha}{2}u}e^{\frac{\alpha}{2}u} = \epsilon^2.\end{gathered}$$

- Pokud snížíme počáteční kapitál na polovinu a chceme zachovat stejnou pravděpodobnost ruinování, tak je nutné parametr α zdvojnásobit, což vychází ze vzorce

  $$e^{-Ru}.$$

V této části práce se zaměříme na model, kde pojistné zahrnuje i roční dividendu pro akcionáře, kteří poskytli počáteční kapitál. Pojistné na úrovni portfolia se pro tento případ stanoví takto:

$$H[S] = ES + \frac{|\log \epsilon|}{2u} \operatorname{var} S + iu,$$

kde iu je požadovaná dividenda pro akcionáře.

Je nutné stanovit u, tak aby pojistné bylo na trhu co nejvíce konkurenceschopné a tedy aby pojistné bylo co nejnižší. To nastává pro

$$u = \sqrt{\frac{|\log \epsilon| \operatorname{var} S}{2i}}.$$

Což lze jednodušše odvodit položením derivace $H[S]$ podle u rovno nule:

$$\begin{aligned}
H[S] &= ES + \frac{|\log \epsilon|}{2u} \operatorname{var} S + iu \\
H'[S] &= \frac{-|\log \epsilon| \operatorname{var} S}{2u^2} + i \\
0 &= \frac{-|\log \epsilon| \operatorname{var} S}{2u^2} + i \\
0 &= -|\log \epsilon| \operatorname{var} S + 2iu^2 \\
u &= \sqrt{\frac{|\log \epsilon| varS}{2i}}.
\end{aligned}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu u do vzorce

$$H[S] = ES + \frac{|\log \epsilon|}{2u} \operatorname{var} S + iu,$$

zjistíme, že optimální je princip směrodatné odchylky

$$H[S] = ES + \sqrt{\operatorname{var} S}\,\sqrt{2i|\log \epsilon|}.$$

Odvození:

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt{\frac{|\log \epsilon| \operatorname{var} S}{2i}} \\
H[S] &= ES + \frac{|\log \epsilon|}{2u} \operatorname{var} S + iu \\
H[S] &= ES + \frac{|\log \epsilon| \operatorname{var} S}{2\sqrt{\operatorname{var} S}\sqrt{\frac{|\log \epsilon|}{2i}}} + i\sqrt{\frac{\operatorname{var} S |\log \epsilon|}{2i}} = \\
&= ES + \sqrt{\operatorname{var} S}\sqrt{\frac{|\log \epsilon|^2}{\frac{2|\log \epsilon|}{i}}} + \sqrt{\frac{i \operatorname{var} S |\log \epsilon|}{2}} = \\
&= ES + \sqrt{\operatorname{var} S}\sqrt{\frac{i|\log \epsilon|}{2}} + \sqrt{\operatorname{var} S}\sqrt{\frac{i|\log \epsilon|}{2}} = \\
&= ES + \sqrt{\operatorname{var} S}\sqrt{2i|\log \epsilon|}.
\end{aligned}
$$

V bodě, v němž nabývá pojistné jako funkce proměnné u svého minima se přirážka $H[S] - ES - iu$ rovná dividendě pro akcionáře iu.
Odvození:
Víme, že pojistné nabývá svého minima pro

$$u = \sqrt{\frac{|\log \epsilon| \operatorname{var} S}{2i}}$$

a že pokud toto u doplníme do vzorce

$$H[S] = ES + \frac{|\log \epsilon|}{2u} \operatorname{var} S + iu,$$

dostaneme

$$H[S] = ES + \sqrt{\operatorname{var} S}\sqrt{2i|\log \epsilon|}.$$

Dosadíme

$$
\begin{aligned}
H[S] - ES - iu = ES + \sqrt{\operatorname{var} S}\,\sqrt{2i|\log\epsilon|} - ES - iu = \\
&= \sqrt{2i\operatorname{var} S|\log\epsilon|} - i\sqrt{\frac{\operatorname{var} S|\log\epsilon|}{2i}} = \\
&= \sqrt{2i\operatorname{var} S|\log\epsilon|} - \sqrt{\frac{i\operatorname{var} S|\log\epsilon|}{2}} = \\
&= \sqrt{2}\,\sqrt{i\operatorname{var} S|\log\epsilon|} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sqrt{i\operatorname{var} S|\log\epsilon|} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sqrt{i\operatorname{var} S|\log\epsilon|} = \\
&= \sqrt{\frac{i\operatorname{var} S|\log\epsilon|}{2}} = \\
&= iu.
\end{aligned}
$$

Pokud se i zvětšuje, pak se u zmenšuje, ale iu se zvětšuje.

Pojistné pro jednotlivé smlouvy pak stanovíme takto:

1. Spočteme optimální vstupní kapitál

$$u = \sqrt{\frac{|\log\epsilon| varS}{2i}}$$

   pro dané S, i a ϵ.

2. Rozdělíme celkové pojistné mezi individuální rizika X_j podle následující formule

$$H[X_j] = EX_j + RvarX_j,$$

   kde

$$R = \frac{|\log\epsilon|}{u}.$$

   To můžeme udělat, neboť princip rozptylu je aditivní pro nezávislá rizika.

Ad 2: V případě principu rozptylu je parametr $\alpha = R$ dvojnásobný oproti případu, kdy by nebyla požadována dividenda pro akcionáře.

Typ	Počet rizik	Střední hodnota	Rozptyl	Exponenc. princip	Princip rozptylu	Princip směr. odch.
A	5	5	25	$-\frac{1}{R}\log(1-5R)$	$5+\frac{R}{2}25$	
B	20	1	1	$-\frac{1}{R}\log(1-R)$	$1+\frac{R}{2}1$	
Celkem	25	45	145			$45+(2i\lvert\log\epsilon\rvert 145)^{1/2}$

Tabulka 4.1:

Příklad 9 *Nechť máme portfolio skládající se ze dvou druhů exponenciálních rizik zadáno v tabulce 4.1. Spočítejte pro $i = 2\%$ a $\epsilon = 5\%$ pojistné na úrovni portfolia, optimální počáteční kapitál, adjustační parametr R a pojistné pro princip rozptylu a exponenciální princip pro samostatná rizika A a B.*

Řešení Nejprve spočítáme

$$|\log \epsilon| = 2,99573.$$

Pojistné na úrovni portfolia

$$H[S] = ES + \sqrt{\operatorname{var} S}\,\sqrt{2i|\log\epsilon|} = 49,1684.$$

Optimální počáteční kapitál

$$u = \sqrt{\operatorname{var} S}\frac{|\log\epsilon|}{2i} = 104,209.$$

Adjustační parametr

$$R = \frac{|\log\epsilon|}{u} = 0,0287473.$$

Princip rozptylu pro riziko A:

$$EX_A + R\operatorname{var} X_A = 5,71868.$$

Princip rozptylu pro riziko B:

$$EX_B + R\operatorname{var} X_B = 1,02875.$$

Exponenciální princip pro riziko A:

$$-\frac{1}{2R}\log(1-10R) = 5,89512.$$

Exponenciální princip pro riziko B:

$$-\frac{1}{2R}\log(1-2R) = 1,0299.$$

Kapitola 5

Charakterizační metoda

Dalším způsobem, jakým lze stanovit pojistné je charakterizační metoda. Touto metodou můžeme odvodit Wangův princip stanovení pojistného, což zaručuje následující věta, kterou uvádí [6].

Věta 1 *Nechť pojistné* $H : \chi \to R^+ = [0, \infty]$ *má vlastnosti:*

- *Nezávislost (vlastnost 1)*
- *Monotonie (vlastnost 12)*
- *Aditivita pro komonotónní rizika (vlastnost 11)*
- *Žádná neopodstatněná bezpečnostní přirážka (vlastnost 3)*
- *Spojitost (vlastnost 15).*

Pak existuje neklesající funkce $g : [0, 1] \to [0, 1]$ *taková, že* $g(0) = 0$*,* $g(1) = 1$ *a* $H[X] = \int_0^\infty g[S_X(t)]\, dt$*. Dále pokud* χ *obsahuje všechny náhodné alternativní veličiny, pak je funkce* g *právě jedna.*

Je důležité zmínit, že funkce g, jejíž existence plyne z věty 1, nemusí být konkávní. Pokud požadujeme, aby funkce princip pojistného splňoval vlastnost subaditivity, pak g bude konkávní a získáme tak Wangův princip stanovení pojistného.

Pokud k vlastnostem uvedeným ve větě 1 přidáme další vlastnosti, tak získáme princip proporcionálních rizik. [6]

Důsledek 2 *Nechť H má vlastnosti jako věta 1 a dále pak splňuje následující vlastnost: Nechť $X = IY$ je složená náhodná veličina, $X, Y, I \in \chi$ a kde náhodná alternativní veličina I je nezávislá na náhodné veličině Y. Pak $H[X] = H[I]H[Y]$. Z toho vyplývá, že existuje $c > 0$ takové, že $g(p) = p^c$ pro $\forall p \in [0, 1]$.*

Pokud přidáme k důsledku 2 ještě podmínku bezpečnostní přirážky, pak můžeme říci, že $c \in [0, 1]$. Tímto postupem jsme získali princip proporcionálních rizik.

Charakterizační metodou lze získat i další principy stanovení pojistného.

Kapitola 6

Příklady

Příklad 10 *Určete pojistné podle principu rozptylu pro veličinu se složeným Poissonovým rozdělením.*

Řešení
S má složené Poissonovo rozdělení.
N je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem λ.
Nechť $X_1, X_2, ..., X_N$ jsou vzájemně nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, které jsou nezávislé na N.

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

Víme

$$\begin{aligned} EN &= \lambda \\ \operatorname{var} N &= \lambda \\ H[S] &= ES + \beta \operatorname{var} S. \end{aligned}$$

Platí $ES = EXEN$.
Neboť

$$\begin{aligned} ES &= EE[S|N] = E[NEX] = \\ &= ENEX. \end{aligned}$$

Platí

$$\operatorname{var} S = EN(\operatorname{var} X + (EX)^2).$$

Neboť

$$\begin{aligned} \operatorname{var} S &= E[\operatorname{var}(S|N)] + \operatorname{var}(E[S|N]) \Leftrightarrow \\ \operatorname{var} S &= E[N \operatorname{var} X] + \operatorname{var}(NEX) = \\ &= EN \operatorname{var} X + (EX)^2 \operatorname{var} N. \end{aligned}$$

Ale $EN = \operatorname{var} N$ pro N s Poissonovým rozdělením,
tedy $\operatorname{var} S = EN(\operatorname{var} X + (EX)^2)$.

$$\begin{aligned} H[S] &= EXEN + \beta EN(\operatorname{var} X + (EX)^2) \\ &= \lambda EX + \beta\lambda(\operatorname{var} X + (EX)^2) = \\ &= \lambda EX + \beta\lambda(EX^2 - (EX)^2 + (EX)^2) = \\ &= \lambda EX + \beta\lambda EX^2 \end{aligned}$$

Příklad 11 *Nechť celkové škody S mají složené Poissonovo rozdělení a jednotlivé škody mají gamma rozdělení. Určete pojistné pro princip rozptylu.*

Řešení
Vycházíme z předchozího příkladu.
N má Poissonovo rozdělení s parametrem λ.
$X \sim$ gamma (α, β) .
$H[S] = \lambda ES + \gamma\lambda ES^2$.
Víme:

$$\begin{aligned} EX &= \alpha/\beta \\ varX &= \alpha/\beta^2. \end{aligned}$$

Dále potřebujeme zjistit EX^2:

$$\begin{aligned} EX^2 &= varX + (EX)^2 \\ EX^2 &= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} H[S] &= \lambda\frac{\alpha}{\beta} + \lambda\gamma(\frac{\alpha^2 + \alpha}{\beta^2}) = \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\beta} + \frac{\alpha\lambda}{\beta}\frac{\gamma}{\beta}(1 + \alpha) = \\ &= \frac{\lambda\alpha}{\beta}(1 + \frac{\gamma}{\beta}(1 + \alpha)). \end{aligned}$$

Příklad 12 *Nechť celkové škody S automobilového pojištění mají složené Poissonovo rozdělení a nechť škody za jednotlivé škody mají gamma rozdělení. Určete pojistné podle principu očekávané hodnoty s parametrem $\gamma = 10\%$.*

Řešení $S \sim$ složené Poissonovo rozdělení.
N má Poissonovo rozdělení s parametrem λ.
$X \sim gamma(\alpha, \beta)$
$H[S] = (1 + \gamma)ES$
Víme, že

$$
\begin{aligned}
ES &= EXEN \\
EX &= \frac{\alpha}{\beta} \\
EN &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$ES = \frac{\alpha\lambda}{\beta}.$$

Dostáváme

$$
\begin{aligned}
H[S] = (1 + 0,1)\frac{\alpha\lambda}{\beta} &= \\
&= 1,1\frac{\alpha\lambda}{\beta}.
\end{aligned}
$$

Příklad 13 *Nechť náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem λ.*
Určete obecně pojistné podle principu ryzího pojistného, principu očekávané hodnoty, principu rozptylu, principu směrodatné odchylky, exponenciálního principu a Esscherova principu. Následně dosaďte $\lambda = 1$.

Řešení Víme

$$
\begin{aligned}
X &\sim exp(\lambda) \\
\lambda &> 0 \\
EX &= 1/\lambda \\
\operatorname{var} X &= \frac{1}{\lambda^2} \\
f(x) &= \lambda e^{-\lambda x}.
\end{aligned}
$$

- Ryzí pojistné
  Obecně:
  $$H[X] = EX = \frac{1}{\lambda}$$
  Po dosazení:
  $$H[X] = 1$$
- Princip očekávané hodnoty
  Obecně:
  $$H[X] = (1+\alpha)EX = \frac{1+\alpha}{\lambda}$$
  Po dosazení:
  $$H[X] = 1 + \alpha$$
- Princip rozptylu
  Obecně:
  $$H[X] = EX + \alpha \operatorname{var} X = \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda^2}$$
  Po dosazení:
  $$H[X] = 1 + \alpha$$
- Princip směrodatné odchylky
  Obecně:
  $$H[X] = EX + \beta \sqrt{\operatorname{var} X}$$
  $$\sqrt{\operatorname{var} X} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$
  $$H[X] = \frac{1}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda}$$
  Po dosazení:
  $$H[X] = 1 + \beta$$
- Exponenciální princip
  Obecně:
  $$H[X] = (1/\alpha) \ln E[e^{\alpha X}]$$

Potřebujeme znát $E[e^{\alpha X}]$:

$$\begin{aligned} E[e^{\alpha X}] &= \int_0^\infty \lambda e^{\alpha x} e^{-\lambda x}\, dx = \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{x(\alpha-\lambda)}\, dx = \\ &= \lambda[\frac{1}{\alpha-\lambda} e^{x(\alpha-\lambda)}]_0^\infty = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-\alpha}. \end{aligned}$$

Za podmínky, že

$$0 < \alpha < 1$$

platí

$$H[X] = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\lambda}{\lambda-\alpha}.$$

Po dosazení:

$$H[X] = \frac{1}{\alpha} \log(\frac{1}{1-\alpha}) = -\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}$$

- Esscherův princip

$$H[X] = (E[Xe^{hX}])/E[e^{hX}]$$

$$E[Xe^{hX}] = \int_0^\infty \lambda x e^{hx} e^{-\lambda x}\, dx$$

K výpočtu použijeme per partes :

$$\begin{aligned} u &= x \\ u' &= 1 \\ v &= \frac{e^{x(h-\lambda)}}{h-\lambda} \\ v' &= e^{x(h-\lambda)} \end{aligned}$$

Za podmínky

$$0 < h < 1.$$

$$
\begin{aligned}
E[Xe^{hX}] &= \lambda([\frac{xe^{x(h-\lambda)}}{h-\lambda}]_0^\infty - \frac{1}{h-\lambda}\int_0^\infty e^{x(h-\lambda)}\,dx) = \\
&= \lambda([\frac{xe^{x(h-\lambda)}}{h-\lambda}]_0^\infty - [\frac{e^{x(h-\lambda)}}{(h-\lambda)^2}]_0^\infty) = \\
&= \frac{\lambda}{(h-\lambda)^2}.
\end{aligned}
$$

Dále potřebujeme spočítat $E[e^{hX}]$ za podmínky

$$0 < h < 1$$

$$E[e^{hX}] = \int_0^\infty \lambda e^{x(h-\lambda)}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - h}$$

Tedy

$$H[X] = \frac{\frac{\lambda}{(h-\lambda^2)}}{\frac{1}{\lambda-h}} = \frac{1}{\lambda-h}.$$

Po dosazení:

$$H[X] = \frac{1}{1-h}.$$

Příklad 14 *Ukažte, že pro malé hodnoty h přechází Esscherův princip v princip rozptylu.*

Řešení

Použijeme první dva členy Taylorova rozvoje v okolí nuly.
Neboli

$$f(x) = f(h) + \frac{f'}{1!}(x-h) + ...$$

$$f(h) = H[X] = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]},$$

pro

$$h \to 0$$

platí

$$f(h) \to EX.$$

$$f'(h) = E[X^2 e^{hX}]/E[e^{hX}] - (E[Xe^{hX}]/E[e^{hX}])^2$$

pro

$$h \to 0$$

platí

$$f'(h) \to EX^2 - (EX)^2.$$

Tedy

$$f(x) - > EX + h \operatorname{var} X.$$

Příklad 15 *Ukažte, že Esscherův princip se rovná $\kappa'_X(\alpha)$, kde κ_X je kumulantová vytvořující funkce X.*

Řešení Kumulantová vytvořující funkce je ve tvaru

$$\kappa_X(\alpha) = \log(E[e^{\alpha X}]).$$

Pak

$$\kappa'_X(\alpha) = \frac{1}{E[e^{\alpha X}]} E[Xe^{\alpha X}],$$

což je Esscherův princip.

Kapitola 7

Závěr

V této práci jsme shrnuli poznatky z několika prací a podrobněji jsme odvodili některé poznatky, které tyto práce uvádějí, ale podrobně je neodvozují. Pro některé principy jsme odvodili některé z jejich vlastností a přidali sbírku ilustračních příkladů týkajících se stanovení pojistného, vztahy mezi některými pojistnými principy. V kapitole o metodě top-down jsme podrobněji rozvedli a odvodili jednotlivé kroky výpočtu pojistného touto metodou.

Literatura

[1] Hans Bühlmann. An economic premium principle. In *Astin Bulletin*, volume 11, pages 52–60. 1980.

[2] D. C. M. Dickson. *Insurance risk and ruin / David C.M. Dickson*. Cambridge University Press, New York :, 2005.

[3] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, and M. Denuit. *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[4] NATO Advanced Study Institute on Insurance Premiums, M. J. Goovaerts, Florent de. Vylder, J. Haezendonck, and North Atlantic Treaty Organization. *Premium calculation in insurance / edited by F. de Vylder and M. Goovaerts and J. Haezendonck*. D. Reidel Pub. Co., 1984.

[5] Vladimir I. Rotar. *Actuarial models : the mathematics of insurance*. 2007.

[6] Virginia R. Young. Premium principles. In J. L. Teugels and B. Sundt, editors, *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley, 2004.