Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Šimon Axmann

Fourierova transformace distribucí a aplikace v PDR

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Milan Pokorný Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

2010

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce, doc. Milanu Pokornému, za čas a ochotu při konzultacích. Poděkování patří také mým rodičům, kteří mne podporovali v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26. května 2010 Šimon Axmann

Obsah

Název práce: Fourierova transformace distribucí a aplikace v PDR
Autor: Šimon Axmann
Katedra (ústav): Matematický ústav Univerzity Karlovy
Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Milan Pokorný Ph.D.
e-mail vedoucího: Milan.Pokorny@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme základní vlastnosti temperovaných distribucí, jejich Fourierovy transformace a aplikace v parciálních diferenciálních rovnicích. V první části definujeme temperované distribuce a uvádíme jejich základní vlastnosti, ovšem s ohledem na to, že tato teorie není hlavním předmětem této práce, uvádíme většinu tvrzení bez důkazů. Zvláštní důraz pak klademe na distribuce závislé na parametru, neboť tato část teorie není prezentována tak často a v našem přístupu pro nás bude mít v dalším klíčový charakter. V následujících částech podáváme definici Fourierovy transformace temperované distribuce a uvádíme teorii, důležitou pro početní techniky, které ilustrujeme na konkrétních příkladech. V závěrečné kapitole je jako příklad četných aplikací Fourierovy transformace distribucí odvozeno fundametální řešení Laplaceova operátoru.

Klíčová slova: temperovaná distribuce, Fourierova transformace, fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Title: Fourier transform of distributions and aplications in PDE's
Author: Šimon Axmann
Department: Mathematical Institute, Charles University
Supervisor: doc. Mgr. Milan Pokorný Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Milan.Pokorny@mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study basic properties of tempered distributions, their Fourier transforms and applications in partial differential equations. In the first section, the tempered distributions are defined and their basic properties are introduced, mainly without proofs, given the fact that this theory is not the main point of this thesis. A special emphasis is put on the theory of distributions depending on a parameter, because it is rarely presented and, at the same time, it is crucial in our approach of the problem. In the subsequent sections, we outline the definition of Fourier transform of a tempered distribution and a theory, necessary for techniques of calculations, which are illustrated by particular examples. In the last section, the fundamental solution of Laplace equation is derived, as an example of multifarious applications of the theory of Fourier transforms of tempered distributions.

Keywords: tempered distribution, Fourier transform, fundamental solution of Laplace equation

Kapitola 1

Úvod

1.1 Distribuce jako zobecnění pojmu funkce

Klasická analýza používá k popisu mnoha fyzikálních veličin pojem spojité funkce, reflektující představu spojitého rozložení hmoty, náboje, atp. Tento pojem však není schopen zachytit skutečnost, že tyto veličiny mají ve skutečnosti diskrétní charakter, ani popsat ve fyzice často uvažované objekty, jako ideální jednotkový elektromagnetický impulz, či bodový náboj. Jak se píše v [3], fyzici proto poměrně dlouho používali takzvané singulární funkce, které ovšem nemohly být popsány klasickou teorií funkcí. Nejjednodušším příkladem takové singulární funkce je tak zvaná δ-funkce[1], která je „rovna nule všude kromě bodu nula, kde je rovna nekonečnu, přičemž její integrál je roven jedné". Taková funkce ovšem zřejmě odporuje klasické teorii funkcí, neboť Lebesgueův integrál z funkce skoro všude nulové je nutně roven nule. Na druhou stranu se fyzici při používání δ-funkce, jako účinného nástroje při řešení rozmanitých úloh matematické fyziky, do sporu nikdy nedostali, neboť se tato singulární funkce obvykle neobjevovala samostatně, nýbrž jen na specifických místech v průběhu výpočtu a sice pod integrálem s nějakou „dostatečně pěknou" funkcí.

Prvním, kdo podal rigorózní vysvětlení pojmu zobecněné funkce (distribuce) jako spojitého lineárního funkcionálu na jistém prostoru „dostatečně pěkných" testovacích funkcí, byl v roce 1936 sovětský matematik Sergej Lvovič Sobolev ve svém článku *Méthode nouvelle à resoundre le problème de*

[1] Jako první použil δ-funkci britský teoretický fyzik Paul Dirac (celým jménem Paul Adrien Maurice Dirac) při studiu kvantové mechaniky na konci dvacátých let minulého století.

Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, kde jsou využívány distribuce při řešení Cauchyho úlohy pro hyperbolické parciální diferenciální rovnice. Na jeho práci navázal po druhé světové válce francouzský matematik Laurent Schwartz[2] monografií *Théorie des Distributions* (1950-51), ve které je systematicky vybudována teorie distribucí na základě teorie lineárních lokálně konvexních topologických prostorů. V následujících letech se staly distribuce neobyčejně populární a mnoho matematiků začalo dále intezivně rozvíjet jejich teorii. Od té doby byla teorie distribucí podstatně prohloubena a našla četné aplikace ve fyzice a matematice, především v teorii parciálních diferenciálních rovnic a v kvantové mechanice, a stává se tak „*každodenním nástrojem fyziků, matematiků i inženýrů*“([6] str. VI).

Distribuce je tedy zobecněním klasického pojmu funkce, které umožňuje vyjádřit některé singulární koncepty matematické fyziky. Navíc, jak poznamenává Vladimirov ([6] str. 5)„*...pojem distribuce zachycuje skutečnost, že v reálném světě neumíme měřit hodnotu fyzikální veličiny v konkrétním bodě, nýbrž pouze střední hodnoty v dostatečně malých okolích bodu a pak uvažovat jejich limitu za hodnotu v tomto bodě...*“.

Jak uvidíme později, tzv. temperované distribuce mají navíc některé velmi „pěkné“ matematické vlastnosti. Každá distribuce má například v distributivním smyslu derivace všech řádů, konvergentní řady distribucí lze libovolněkrát derivovat člen po členu, každá distribuce má Fourierovu transformaci, a tak dále. To nám umožní, abychom je využili při řešení parciálních diferenciálních rovnic.

[2]Laurent Schwartz získal v roce 1950 za svou práci právě v oblasti teorie distribucí Fieldsovu medaili.

1.2 Použité značení

$\mathbb{R}^m$ reálný m-rozměrný prostor s euklidovskou metrikou; písmeno m budeme průběžně rezervovat pro dimenzi prostoru

$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ množina všech reálných kladných, resp. záporných čísel

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ multiindex a jeho řád
$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$
$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$

$C^\infty = C^\infty(\mathbb{R}^m)$ množina všech nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}^m$

$\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}} = \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ prostor funkcí, které jsou lokálně integrovatelné na $\mathbb{R}^m$ v Lebesgueově smyslu

$s.v.$ skoro všude

log přirozený logaritmus, inverzní funkce k e^x

f_+ kladná část f, $\big(f(x)\big)_+ := \max\{f(x), 0\}$

$B_R(0), S_R(0)$ koule, resp. sféra v $\mathbb{R}^m$ se středem v 0 a poloměrem R

κ_m povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^m$

$\varphi \dotplus \psi$ spojení na sebe navazujících křivek φ a ψ

$PSym$ množina všech pozitivně definitních symetrických matic $\mathbb{R}^{m\times m}$

$Orth$ množina všech ortogonálních matic $\mathbb{R}^{m\times m}$

Kapitola 2

Temperované distribuce

2.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 2.1. Buď $m \in \mathbb{N}$, φ komplexní funkce reálné proměnné taková, že $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Pak řekneme, že funkce φ je *rychle klesající v nekonečnu*, jestliže pro každý multiindex α a každý polynom P existuje konstanta K tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ platí

$$|P(x)D^\alpha\varphi(x)| \le K.$$

Říkáme také, že φ *rychle klesá v nekonečnu* a píšeme $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$.

Poznámka. Každá nekonečněkrát spojitě diferencovatelná funkce s kompaktním nosičem rychle klesá v nekonečnu.

Definice 2.2. Buď $m \in \mathbb{N}$ a $\varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{C}$ komplexní C^∞ funkce. Pak řekneme, že φ je *pomalu rostoucí v nekonečnu*, jestliže je spolu se všemi svými derivacemi omezená v nekonečnu polynomy, to jest, existují polynomy P_α tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ platí

$$|D^\alpha\varphi(x)| \le |P_\alpha(x)|.$$

Říkáme také, že φ *pomalu roste v nekonečnu.*

Poznámka. Funkce z $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ tvoří tak zvaný *Schwartzův prostor*, což je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, který je navíc uzavřený vzhledem k derivování i k násobení C^∞ funkcemi splňujícími navíc podmínku pomalého růstu v nekonečnu.

Definice 2.3. Definujme na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ pro $p = 0, 1, 2, \ldots$ spočetně mnoho norem:

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ |\alpha| \leq p}} (1 + |x|^2)^{\frac{p}{2}} |D^\alpha \varphi(x)| .$$

Řekneme, že posloupnost funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *konverguje v* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ k 0, jestliže pro všechna $p = 0, 1, \ldots$ platí $\|\varphi_k\|_p \to 0$ pro $k \to \infty$.

Poznámka. Pro každou $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ zřejmě platí

$$\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \ldots$$

Definice 2.4. Řekneme, že zobrazení $f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathbb{C}$ je *temperovanou distribucí*, nebo zkráceně jen *distribucí*, jestliže je spojitým lineárním funkcionálem na prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, v tom případě píšeme $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. To jest, temperované distribuce jsou zobrazení prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ do $\mathbb{C}$ splňující

1. $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $f(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda f(\varphi) + \mu f(\psi)$
2. $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \Rightarrow f(\varphi_n) \to f(\varphi)$.

Místo $f(\varphi)$ budeme psát $\langle f, \varphi \rangle$.

Značení. Pro zjednodušení označení budeme dále, nebude-li moci dojít k nedorozumění, psát místo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ jen $\mathscr{S}$ a místo $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ jen $\mathscr{S}'$, přičemž m budeme průběžně vyhrazovat pro označení dimenze uvažovaného prostoru.

Příklad 2.1. Buď $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, f pomalu rostoucí v nekonečnu, pak je předpisem

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x) \mathrm{d}x \ \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

definována tzv. *regulární temperovaná distribuce generovaná funkcí* f, kterou budeme opět značit f. Z kontextu bude vždy jasné, zda máme na mysli generující funkci, či distribuci.

Definice 2.5. Řekneme, že posloupnost distribucí $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{S}'$ *konverguje v* $\mathscr{S}'$ k distribuci f, jestliže $\forall \varphi \in \mathscr{S}$ platí $\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$.

Příklad 2.2. Buď $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost funkcí, $f_n \to f, s.v.$ pro $n \to \infty$, $f_n \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, f_n, f pomalu rostoucí v nekonečnu, pak z Lebesgueovy věty vyplývá, že $f_n \in \mathscr{S}'$ *konverguje v* $\mathscr{S}'$ k distribuci f.

Věta 2.1. *$\mathscr{S}$ je hustý v $\mathscr{S}'$. Přesněji, regulární distribuce generované funkcemi z $\mathscr{S}$ tvoří hustý podprostor prostoru $\mathscr{S}'$.*

Důkaz lze nalézt například v [6] na str. 105.

Poznámka. Buď f funkce generující regulární distribuci a $x = Ay + b$ regulární lineární transformace, pak platí pro každou $\varphi \in \mathscr{S}$ věta o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(Ay+b)\varphi(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi\left(A^{-1}(x-b)\right)\mathrm{d}x.$$

Touto identitou definujeme lineárně transformované distribuce i pro neregulární distribuce (viz následující definice).

Definice 2.6. Buď $f \in \mathscr{S}'$ a $x = Ay + b$ regulární lineární transformace, pak definujeme distribuci $f(Ay+b)$ předpisem:

$$\langle f(Ay+b), \varphi(y)\rangle = \left\langle f(x), \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right\rangle, \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Definice 2.7. Buď $f \in \mathscr{S}'$ a $a \in C^\infty$ funkce pomalu rostoucí v nekonečnu, pak definujeme *součin* af předpisem:

$$\langle af, \varphi\rangle = \langle f, a\varphi\rangle, \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Nyní směřujeme k definici derivace v distributivním smyslu, motivací nám bude následující příklad.

Příklad 2.3. Buď f spojitě diferencovatelná funkce pomalu rostoucí v nekonečnu taková, že $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ pomalu roste v nekonečnu. Pak pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$ platí díky integraci per partes a skutečnosti, že φ rychle klesá v nekonečnu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int_{B_R(0)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{R\to\infty}(-1)\int_{B_R(0)} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\mathrm{d}x + \int_{S_R(0)} f(x)\varphi(x)\vec{\nu}_k(x)\mathrm{d}S(x) = \\ &= (-1)\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Indukcí lze pomocí Fubiniho věty snadno ukázat, že za vhodných předpokladů platí obecněji:

$$\int_{\mathbb{R}^m} D^\alpha f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Definice 2.8. Buď $f \in \mathscr{S}'$, α multiindex, pak definujeme *derivaci distibuce* f předpisem

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \text{, pro všechna } \varphi \in \mathscr{S}.$$

Poznámka. Derivace distribuce je distribucí, neboť je složením spojitého lineárního operátoru D^α na testovacích funkcích ($\varphi \in C^\infty$) a spojitého lineárního funkcionálu f.

Příklad 2.4. Definujme *Diracovu/delta distribuci* předpisem

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Označme ještě pro $a \in \mathbb{R}^m$ *posunutou Diracovu distribuci* $\delta_a = \delta(x-a)$. Spočtěme (distributivní) derivaci δ-distribuce, podle definice máme pro libovolný multiindex α:

$$\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0), \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Příklad 2.5. Definujme *Heavisideovu distribuci* θ jako regulární distribuci generovanou charakteristickou funkcí intervalu $[0, +\infty)$. To jest

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) \mathrm{d}x, \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Pak pro distributivní derivaci máme $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \theta', \varphi \rangle = - \langle \theta, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) \mathrm{d}x = - [\varphi(x)]_{x=0}^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle .$$

2.2 Distribuce závislé na parametru

V této části se budeme zabývat spojitou závislostí distribucí na komplexním parametru a jistou formou holomorfnosti distribucí, podrobněji o této teorii viz například [3]. Klíčová pro nás bude úplnost prostoru distribucí, viz následující věta.

Věta 2.2. *Mějme posloupnost distribucí $f_k \in \mathscr{S}'$ takovou, že $\langle f_k, \varphi \rangle$ konverguje pro $k \to \infty$ pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$. Pak je funkcionál definovaný pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$ jako $\langle f, \varphi \rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle f_k, \varphi \rangle$ temperovanou distribucí.*

Důkaz. Důkaz je analogií standardního důkazu Banach-Steinhausovy věty z funkcionální analýzy a lze jej nalézt například v [6] na str. 96. $\square$

Definice 2.9. Buď $G \subset \mathbb{C}$ oblast, nechť pro každé $\lambda \in G$ existuje distribuce f_λ (závislá na parametru λ) a nechť $\lambda_0 \in G$. Řekneme, že $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda = g$, jestliže pro každou posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\lambda_n} = g$ ve smyslu definice 2.5.[1]

S takto definovanou limitou můžeme nyní přirozeně definovat pojem spojitosti, resp. derivace distribuce podle komplexního parametru.

Definice 2.10. Buď $G \subset \mathbb{C}$ oblast, nechť pro každé $\lambda \in G$ existuje distribuce f_λ (závislá na parametru λ).

1. Řekneme, že f_λ je *spojitá v λ na G*, jestliže pro každé $\lambda_0 \in G$ platí $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda = f_{\lambda_0}$.

2. Řekneme, že distribuce g_λ je *derivací distribuce f_λ podle parametru λ na G* a píšeme $g_\lambda = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$, jestliže pro každé $\lambda_0 \in G$ platí

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = g_{\lambda_0}.$$

Poznámka. Derivace $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ v bodě $\lambda = \lambda_0$ existuje právě tehdy, když má pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$ funkce $\langle f_\lambda, \varphi \rangle$ derivaci vzhledem k λ v $\lambda = \lambda_0$.

Definice 2.11. Buď f_λ distribuce závislá na parametru $\lambda \in G$, $G \subset \mathbb{C}$ oblast. Řekneme, že f_λ je *holomorfní v λ na G*, jestliže je diferencovatelná vzhledem k λ na G.

[1] Limitu tedy chápeme ve smyslu Heineho definice limity pomocí posloupností.

Poznámka. Buď f_λ holomorfní v λ na $G \subset \mathbb{C}$, pak na G existují derivace vzhledem k λ všech řádů a v okolí libovolného bodu $\lambda_0 \in G$ lze psát Taylorův rozvoj

$$f_\lambda = f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2} + \dots$$

Tvrzení 2.3. Mějme dvě distribuce f_λ a g_λ holomorfní pro $\lambda \in G$ a předpokládejme, že se shodují na množině obsahující hromadný bod. Pak jsou si f_λ a g_λ rovny na celé G.

Důkaz. Stačí uvážit, že pro všechna $\varphi \in \mathscr{S}$ se $\langle f_\lambda, \varphi \rangle$ a $\langle g_\lambda, \varphi \rangle$ shodují na G díky větě o jednoznačnosti pro obyčejné holomorfní funkce. $\square$

V dalším pro nás bude důležitá tzv. *metoda holomorfního prodlužování* f_λ v λ:

Tvrzení 2.4. Nechť je f_λ holomorfní v λ na oblasti G' a nechť lze holomorfně rozšířit funkci $\langle f_\lambda, \varphi \rangle$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{S}$ na oblast $G \supset G'$. Pak $\langle f_{\lambda_0}, \varphi \rangle$ definuje pro všechna $\lambda_0 \in G$ distribuci.

Důkaz. Důkaz založený na skutečnosti, že každé holomorfní prodloužení lze vždy získat konečnou posloupností Taylorových rozvojů, lze nalézt například v knize [3]. $\square$

Poznámka. Buď f_λ distribuce holomorfní na okolí izolované singularity λ_0, pak lze f_λ na tomto okolí rozvinout do *Laurentovy řady*

$$f_\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

kde a_n jsou distribuce nezávislé na λ. Pro každé pevné $\varphi \in \mathscr{S}$ totiž existuje Laurentova řada tvaru

$$\langle f_\lambda, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\varphi)(\lambda - \lambda_0)^n,$$

přičemž koeficienty $a_n(\varphi)$ jsou dány Cauchyovým vzorcem pro mezikruží:

$$a_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\psi \frac{\langle f_\lambda, \varphi \rangle}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\psi \left\langle \frac{f_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}, \varphi \right\rangle \mathrm{d}\lambda,$$

kde ψ je libovolná uzavřená křivka obíhající λ_0 ležící v oblasti holomorfnosti distribuce f_λ. Z uvedeného je vidět, že a_n je spojitým lineárním funkcionálem a můžeme tedy psát $a_n(\varphi) = \langle a_n, \varphi \rangle$ a $f_\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n$.

Příklad 2.6. *Funkce* $x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$ generuje pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re}\lambda > -1$, regulární distribuci $x_+^\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$

$$\left\langle x_+^\lambda, \varphi \right\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

Pokusme se distribuci holomorfně rozšířit i na některá $\operatorname{Re}\lambda < -1$. Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ taková, že $\operatorname{Re}\lambda > -1$ je $\int_0^1 x^{\lambda+k-1}\mathrm{d}x = 1/(\lambda+k)$ a tedy platí vyjádření:

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) \right\} \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)}, \quad (2.1)$$

přičemž výraz na pravé straně rovnosti je definovaný pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, splňující $\operatorname{Re}\lambda > (-n-1)$ a $\lambda \neq -1, -2, \ldots$. Obě strany rovnosti jsou holomorfní v λ na svém definičním oboru, lze tedy použít metodu holomorfního prodlužování. Hodnotu $\left\langle x_+^\lambda, \varphi \right\rangle$ pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ tedy definujeme pravou stranou (2.1). Z vyjádření je vidět, že x_+^λ má v bodech $\lambda = -1, -2, \ldots$ póly násobnosti jedna, přičemž

$$\operatorname{res}_{-k} \left\langle x_+^\lambda, \varphi(x) \right\rangle = \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = (-1)^{k-1} \frac{\left\langle \delta^{(k-1)}, \varphi \right\rangle}{(k-1)!}.$$

Nechť $|\operatorname{Re}\lambda + n| < 1$, $\lambda \neq -n$, pak z rovnosti $\int_1^\infty x^{\lambda+k-1}\mathrm{d}x = 1/(\lambda+k)$ a z vyjádření (2.1) plyne, že

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) \right\} \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) \right\} \mathrm{d}x + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}. \quad (2.2)$$

Pro zjednodušení definujme pro všechna λ z pásu $|\operatorname{Re}\lambda + n| < 1$ novou holomorfní distribuci[2] $R_n^\lambda(x_+)$ pomocí součtu integrálů na pravé straně (2.2), to jest:

$$\left\langle R_n^\lambda(x_+), \varphi \right\rangle =$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\theta(1-x) \right\} \mathrm{d}x.$$

Pro $|\operatorname{Re}\lambda + n| < 1$, $\lambda \neq -n$ tedy máme

$$x_+^\lambda = R_n^\lambda(x_+) + \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}}{(n-1)!(\lambda+n)}. \tag{2.3}$$

Příklad 2.7. *Funkce* $x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & , x < 0 \\ 0 & , x \geq 0 \end{cases}$ generuje pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re}\lambda > -1$, regulární distribuci $x_-^\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$

$$\left\langle x_-^\lambda, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\mathrm{d}x.$$

Pokusme se distribuci holomorfně rozšířit i na některá $\operatorname{Re}\lambda < -1$ analogicky jako v předchozím příkladě. Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ taková, že $\operatorname{Re}\lambda > -1$ je $\int_0^1 x^{\lambda+k-1}\mathrm{d}x = 1/(\lambda+k)$ a tedy platí vyjádření:

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) \right\} \mathrm{d}x$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(-x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)}, \tag{2.4}$$

kde výraz na pravé straně rovnosti je definovaný pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re}\lambda > (-n-1)$ a $\lambda \neq -1, -2, \dots$ a lze jím tedy definovat distribuci x_-^λ pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -1, -2, \dots$ Z vyjádření je navíc vidět, že takto definovaná $\left\langle x_-^\lambda, \varphi(x) \right\rangle$ má pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$ v bodech $\lambda = -1, -2, \dots$ póly násobnosti jedna, přičemž

$$\operatorname{res}_{-k} \left\langle x_-^\lambda, \varphi(x) \right\rangle = (-1)^{k-1}\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = \frac{\left\langle \delta^{(k-1)}, \varphi \right\rangle}{(k-1)!}.$$

[2] Jedná se vlastně o regulární část Laurentova rozvoje distribuce x_+^λ v bodě $\lambda = -n$.

Nechť $|\mathrm{Re}\,\lambda + n| < 1$, $\lambda \neq -n$, pak z rovnosti $\int_1^\infty x^{\lambda+k-1}\mathrm{d}x = 1/(\lambda+k)$ a z vyjádření (2.4) plyne:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) \right\} \mathrm{d}x \\
+ \int_1^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(-x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0) \right\} \mathrm{d}x \\
+ \frac{(-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!\,(\lambda+n)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Pro zjednodušení definujme pro všechna λ z pásu $|\mathrm{Re}\,\lambda + n| < 1$ novou holomorfní distribuci[3] $R_n^\lambda(x_-)$ pomocí součtu integrálů na pravé straně (2.5), to jest:

$$\begin{aligned}
&\left\langle R_n^\lambda(x_-), \varphi \right\rangle = \\
&= \int_0^\infty x^\lambda \cdot \left\{ \varphi(-x) - \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{x^k \varphi^{(k)}(0)}{k!} + (-1)^n \frac{x^{n-1}\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\theta(1-x) \right\} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pro $|\mathrm{Re}\,\lambda + n| < 1$, $\lambda \neq -n$ tedy máme

$$x_-^\lambda = R_n^\lambda(x_-) + \frac{\delta^{(n-1)}}{(n-1)!(\lambda+n)}. \tag{2.6}$$

Příklad 2.8. Definujme pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ *distribuce* $|x|^\lambda$ a $|x|^\lambda \operatorname{sign} x$ následovně:

$$\begin{aligned}
|x|^\lambda &= x_+^\lambda + x_-^\lambda \\
|x|^\lambda \operatorname{sign} x &= x_+^\lambda - x_-^\lambda.
\end{aligned}$$

Dosaďme v okolí bodu $\lambda = -n$ do právě zavedených definic vyjádření (2.3) a (2.6):

$$\begin{aligned}
|x|^\lambda = R_n^\lambda(x_+) + R_n^\lambda(x_-) + \frac{\left[(-1)^{n-1}+1\right]\delta^{(n-1)}}{(n-1)!(\lambda+n)} \\
|x|^\lambda \operatorname{sign} x = R_n^\lambda(x_+) - R_n^\lambda(x_-) + \frac{\left[(-1)^{n-1}-1\right]\delta^{(n-1)}}{(n-1)!(\lambda+n)}.
\end{aligned}$$

[3] Jedná se vlastně o regulární část Laurentova rozvoje distribuce x_-^λ v bodě $\lambda = -n$.

Distribuci $|x|^\lambda$ lze tedy holomorfně rozšířit na všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -1, -3, \ldots$ a distribuci $|x|^\lambda \operatorname{sign} x$ na všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -2, -4, \ldots$

Označme ještě (přirozeně)

$$x^{-2k} = |x|^{-2k} = R_{2k}^{-2k}(x_+) + R_{2k}^{-2k}(x_-) \tag{2.7}$$

a

$$x^{-2k-1} = |x|^{-2k-1} \operatorname{sign} x = R_{2k+1}^{-2k-1}(x_+) - R_{2k+1}^{-2k-1}(x_-). \tag{2.8}$$

Distribuce x_+^λ a x_-^λ mají v komplexní rovině λ póly násobnosti jedna, je tedy přirozené pokusit se tyto singularity odstranit vydělením uvažovaných distribucí nějakou holomorfní funkcí[4], která má singularity s nenulovými rezidui ve stejných bodech komplexní roviny λ jako funkce $\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle$ a $\langle x_-^\lambda, \varphi\rangle$, viz následující příklad.

Příklad 2.9. Jak známo, *gamma funkce* je komplexní funkce komplexní proměnné, která je pro $\operatorname{Re}\lambda > 0$ definována pomocí integrálu

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Funkci Γ lze holomorfně rozšířit na množinu $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, a to následujícím zbůsobem: Pro $\operatorname{Re}\lambda > 0$ lze z (2.9) získat integrací per partes indukcí $\Gamma(\lambda + n + 1) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)\Gamma(\lambda)$. Funkce na levé straně rovnosti je však holomorfní na $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > -n-1\}$, tedy dle věty o jednoznačnosti lze i funkci na pravé straně rovnosti holomorfně rozšířit na tutéž množinu, viz také [5]. Pro $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq 0, 1, \ldots, -n$ tedy definujeme

$$\Gamma(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}.$$

Vzhledem k tomu, že n bylo libovolné, dostáváme holomorfní rozšíření funkce gamma na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Funkce $\Gamma(\lambda+1)$ je tedy meromorfní funkce s jednoduchými póly v bodech $-1, -2, \ldots$ s rezidui

$$\operatorname{res}_{-k} \Gamma(\lambda+1) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Uvědomme si nyní, že integrál na pravé straně (2.9) lze chápat také jako $\langle x_+^{\lambda-1}, \mathrm{e}^{-x}\rangle$, respektive $\langle x_-^{\lambda-1}, \mathrm{e}^{x}\rangle$. Z věty o jednoznačnosti pro holomorfní

[4]Hovoří se o tak zvané regularizaci distribucí.

funkce vyplývá, že se rozšíření gamma funkce na $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$ shoduje s holomorfními rozšířeními $\langle x_+^{\lambda-1}, \mathrm{e}^{-x}\rangle$, respektive $\langle x_-^{\lambda-1}, \mathrm{e}^{x}\rangle$ definovanými pomocí vzorců (2.1), (2.4). Máme tedy $\Gamma(\lambda) = \langle x_+^{\lambda}, \mathrm{e}^{-x}\rangle$ a

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\left[\mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\right]\mathrm{d}x, \text{ pro } -n-1 < \operatorname{Re}\lambda \le -n, \lambda \ne -n.$$

Díky tomu, že funkce $\Gamma(\lambda+1)$ má ve svých pólech nenulová rezidua jsou distribuce $\dfrac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ a $\dfrac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ holomorfní na celé komplexní rovině.

Příklad 2.10. *Funkce* $f(z) = z^\lambda$ je pro každé pevné $\lambda \in \mathbb{C}$ holomorfní funkcí na $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$. Pišme $z = (x+iy)$, $x, y \in \mathbb{R}$ a uvažme limity pro $y \to 0+$ resp. $y \to 0-$.

$$\begin{aligned}(x+i0)^\lambda &:= \lim_{y\to 0+}(x+iy)^\lambda = \lim_{y\to 0+}\exp\Big\{\lambda\big[\ln|x+iy| + i\arg(x+iy)\big]\Big\}\\ &= \lim_{y\to 0+}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\exp\big\{\lambda i \arg(x+iy)\big\} = \begin{cases}\mathrm{e}^{i\lambda\pi}|x|^\lambda, & x<0\\ x^\lambda, & x \ge 0\end{cases}\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}(x-i0)^\lambda &:= \lim_{y\to 0-}(x+iy)^\lambda = \lim_{y\to 0-}\exp\Big\{\lambda\big[\ln|x+iy| + i\arg(x+iy)\big]\Big\}\\ &= \lim_{y\to 0-}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\exp\big\{\lambda i \arg(x+iy)\big\} = \begin{cases}\mathrm{e}^{-i\lambda\pi}|x|^\lambda, & x<0\\ x^\lambda, & x \ge 0\end{cases}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Z vyjádření (2.10) resp. (2.11) plyne, že pro $\operatorname{Re}\lambda > -1$ se uvažované funkce shodují s funkcemi definujícími regulární distribuce.

Vezmeme-li v úvahu, že jsme tyto distribuce definovali pro všechna $\lambda \ne -1, -2, \ldots$, je přirozené definovat *distribuce* $(x+i0)^\lambda$ *a* $(x-i0)^\lambda$ pomocí již známých distribucí následovně:

$$\begin{aligned}(x+i0)^\lambda &= x_+^\lambda + \mathrm{e}^{i\lambda\pi}x_-^\lambda\\ (x-i0)^\lambda &= x_+^\lambda + \mathrm{e}^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ukažme, že takto definované distribuce lze holomorfně rozšířit na celou komplexní rovinu. Dosaďme pro λ z okolí bodu $-n$ do vztahů (2.12) vyjádření (2.3) a (2.6) a uvažme limitu pro $\lambda \to -n$ s využitím Taylorova rozvoje exponenciály $\mathrm{e}^{i\lambda\pi} = (-1)^n[1 + i(\lambda + n)\pi + O(\lambda + n)^2],\ \lambda \to -n.$

$$(x{+}i0)^\lambda = R_n^\lambda(x_+) + (-1)^n \left[1 + i(\lambda + n)\pi + O(\lambda + n)^2\right] R_n^\lambda(x_-) +$$
$$+ \left\{(-1)^{n-1} + (-1)^n \left[1 + i(\lambda + n)\pi + O(\lambda + n)^2\right]\right\} \frac{\delta^{(n-1)}}{(n-1)!(\lambda + n)}$$

$$(x{-}i0)^\lambda = R_n^\lambda(x_+) + (-1)^n \left[1 - i(\lambda + n)\pi + O(\lambda + n)^2\right] R_n^\lambda(x_-) +$$
$$+ \left\{(-1)^{n-1} + (-1)^n \left[1 - i(\lambda + n)\pi + O(\lambda + n)^2\right]\right\} \frac{\delta^{(n-1)}}{(n-1)!(\lambda + n)}$$

Po úpravě

$$(x{+}i0)^\lambda = R_n^\lambda(x_+) + (-1)^n R_n^\lambda(x_-) + O(\lambda + n) - i\pi \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}}{(n-1)!}$$
$$(x{-}i0)^\lambda = R_n^\lambda(x_+) + (-1)^n R_n^\lambda(x_-) + O(\lambda + n) + i\pi \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}}{(n-1)!}.$$

Tedy dodefinováváme

$$(x + i0)^{-n} := R_n^{-n}(x_+) + (-1)^n R_n^{-n}(x_-) - \frac{(-1)^{n-1} i\pi}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}$$
$$(x - i0)^{-n} := R_n^{-n}(x_+) + (-1)^n R_n^{-n}(x_-) + \frac{(-1)^{n-1} i\pi}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}.$$

$(x{+}i0)^\lambda$, $(x{-}i0)^\lambda$ jsou pak dobře definované holomorfní distribuce na $\mathbb{C}$. Přitom pro sudé $n = 2k$ platí

$$R_{2k}^{-2k}(x_+) + (-1)^{2k} R_{2k}^{-2k}(x_-) = R_{2k}^{-2k}(x_+) + R_{2k}^{-2k}(x_-) = |x|^{-2k} = x^{-2k}$$

a pro liché $n = 2k + 1$

$$R_{2k+1}^{-2k-1}(x_+) + (-1)^{2k-1} R_{2k+1}^{-2k-1}(x_-) =$$
$$= R_{2k+1}^{-2k-1}(x_+) - R_{2k+1}^{-2k-1}(x_-) = |x|^{-2k-1} \operatorname{sign} x = x^{-2k-1}.$$

Celkem tedy máme $R_n^{-n}(x_+) + (-1)^n R_n^{-n}(x_-) = x^{-n}$ a tudíž můžeme psát:

$$(x + i0)^{-n} = x^{-n} - \frac{(-1)^{n-1} i\pi}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x) \tag{2.13}$$

$$(x - i0)^{-n} = x^{-n} + \frac{(-1)^{n-1} i\pi}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x). \tag{2.14}$$

Příklad 2.11. Buď $x \in \mathbb{R}^m$, $r := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$.
Buď $\operatorname{Re}\lambda > -m$, pak definujeme *regulární distribuci* r^λ rovností

$$\left\langle r^\lambda, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} r^\lambda \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

Použitím sférických souřadnic dostáváme

$$\left\langle r^\lambda, \varphi \right\rangle = \int_0^\infty r^\lambda \kappa_m S_\varphi(r) r^{m-1} \mathrm{d}r, \tag{2.15}$$

kde κ_m značí povrch jednotkové sféry v $\mathbb{R}^m$ a $S_\varphi(r)$ střední hodnotu funkce φ na sféře o poloměru r (integrální průměr).
$S_\varphi(r)$ je nekonečněkrát spojitě diferencovatelná funkce, rychle klesající v nekonečnu. Diferencovatelnost pro $r \neq 0$ je snadná (derivace integrálu podle parametru), v nule dostáváme rozvojem funkce φ do Taylorovy řady

$$\kappa_m S_\varphi(r) = \int \cdots \int_{S_1(0)} \left[\varphi(0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_j} x_j + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \ldots \right] \mathrm{d}\omega.$$

Z definice funkce $S_\varphi(r)$ je jasné, že se členy s lichým počtem x_k musí nulovat, tedy, že $S_\varphi(r)$ má v nule derivace všech řádů spojité, přičemž derivace lichých řádů jsou nulové. Vyjádření (2.15) lze nyní chápat také jako aplikaci distribuce $\kappa_m x_+^{\lambda+m-1}$ na funkci $S_\varphi(r) \in \mathscr{S}$. Distribuci $x_+^{\lambda+m-1}$ jsme však již definovali pro všechna $\lambda + m - 1 \neq -1, -2, \ldots$ $(\lambda \neq -m, -m+1, \ldots)$, přitom si uvědomme, že má v bodech $\lambda + m - 1 = -k, k \in \mathbb{N}$ póly násobnosti (nejvýše) jedna s rezidui

$$\frac{\left\langle (-1)^{k-1} \delta^{(k-1)}(x), S_\varphi(r) \right\rangle}{(k-1)!} = \frac{S_\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

Z předchozího však víme, že derivace lichého řádu funkce $S_\varphi(r)$ jsou v nule nulové, tedy pro $k - 1 = -\lambda - m$ liché, se ve skutečnosti v tomto případě o póly nejedná.
Podobně jako v případě distribuce x_+^λ tedy dostáváme, že po holomorfním rozšíření je $\dfrac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}\right)}$ distribuce dobře definovaná pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.3 Fourierova transformace

Věta 2.5. *Fourierova transformace* ($\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)}\mathrm{d}x$) *zobrazuje prostor* $\mathscr{S}$ *bijektivně na* $\mathscr{S}$*, přičemž pro všechna* $\varphi \in \mathscr{S}$ *platí*

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right] = \varphi,$$

kde $\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\mathrm{e}^{2\pi i(\xi,x)}\mathrm{d}x$. $\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{F}^{-1}$ *jsou navíc spojité na* $\mathscr{S}$.

Důkaz lze nalézt v [4], či [6].

Poznámka. Buď $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ funkce generující distribuci f, pak existuje klasická Fourierova transformace $\mathcal{F}[f] \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, která generuje regulární distribuci $\mathcal{F}[f]$, přičemž pro každou $\varphi \in \mathscr{S}$ platí

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi)\mathcal{F}[f](\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi)\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathcal{F}[\varphi](x)\mathrm{d}x = \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle .\end{aligned}$$

Integrál dle předpokladu konverguje, lze tedy použít Fubiniho větu. Právě tuto identitu použijeme pro definici Fourierovy transformace obecné temperované distribuce.

Definice 2.12. Buď $f \in \mathscr{S}'$, pak definujeme *Fourierovu transformaci distribuce* $\mathcal{F}[f]$ a *inverzní Fourierovu transformaci distribuce* $\mathcal{F}^{-1}[f]$ pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$ předpisy :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle &= \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle \\ \left\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi\right\rangle &= \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right\rangle .\end{aligned}$$

Poznámka. Díky předeslané větě je přímá i inverzní Fourierova transformace temperované distribuce temperovanou distribucí, neboť je složením spojitého lineárního operátoru Fourierovy transformace na testovacích funkcích a spojitého lineárního funkcionálu f.

Věta 2.6. *Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace distribucí jsou inverzní zobrazení na* $\mathscr{S}'$.

Důkaz. Buď $f \in \mathscr{S}'$ a zvolme $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolně, počítejme:

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[f]\right], \varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}[\varphi]\right\rangle = \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]]\right\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$
$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right\rangle = \left\langle f, \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right]\right\rangle = \langle f, \varphi\rangle . \quad \square$$

Následující tvrzení pro nás bude mít zásadní důležitost, neboť naznačuje, že aplikací Fourierovy transformace se jisté parciální diferenciální rovnice s distribucemi budou transformovat na rovnice algebraické.

Tvrzení 2.7. Buď $f \in \mathscr{S}'$, α multiindex, pak platí

$$\mathcal{F}[D^\alpha f] = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}[f] . \tag{2.16}$$

Důkaz. Zvolme $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolně, ale pevně, pak

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[D^\alpha f], \varphi\rangle = \langle D^\alpha f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f(x), D_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}\xi \right\rangle \\
=(-1)^{|\alpha|} \left\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^m} D_x^\alpha \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}\xi \right\rangle \\
=(-1)^{|\alpha|} \left\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^m} (-2\pi i \xi)^\alpha \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}\xi \right\rangle \\
=(-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \mathcal{F}[(-2\pi i\xi)^\alpha \varphi](x)\rangle = \langle \mathcal{F}[f], (2\pi i \xi)^\alpha \varphi\rangle \\
= \langle (2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f], \varphi\rangle .
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že s integrovatelnou majorantou pro záměnu derivace a integrálu v třetí rovnosti nemáme potíže, neboť φ pronásobená libovolným polynom (zde $(-2\pi i\xi)^\alpha$) stále klesá v nekonečnu rychleji než libovolný polynom. $\square$

Tvrzení 2.8. Buď $f \in \mathscr{S}'$, α multiindex, pak platí

$$D^\alpha \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\alpha f] . \tag{2.17}$$

Důkaz. Zvolme $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolně, ale pevně, pak

$$\begin{aligned}
(D^\alpha \mathcal{F}[f], \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}[f], D^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \mathcal{F}[D^\alpha \varphi]\rangle \\
=(-1)^{|\alpha|} \left\langle f(\xi), \int_{\mathbb{R}^m} D_x^\alpha \varphi(x) \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}x \right\rangle \\
\overset{\text{p.p.}}{=} (-1)^{|\alpha|} \left\langle f(\xi), (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) D_x^\alpha \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}x \right\rangle .
\end{aligned}$$

Okrajové členy z integrace per partes jsou nulové vzhledem ke skutečnosti, že φ ubývá v nekonečnu k nule rychleji než jakákoli mocnina, dostáváme tedy

$$\begin{aligned}(D^\alpha \mathcal{F}[f], \varphi) = (-1)^{|\alpha|} &\left\langle f(\xi), (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) D_x^\alpha \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}x \right\rangle \\ =& (-1)^{|\alpha|} \left\langle f(\xi), (-1)^{|\alpha|} (-2\pi i \xi)^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}x \right\rangle \\ =& (-1)^{|\alpha|} \langle f(\xi), (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}[f] \rangle = \langle (-2\pi i \xi)^\alpha f(\xi), \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ =& \langle \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\alpha f], \varphi \rangle . \quad \square\end{aligned}$$

Tvrzení 2.9. Buď $f \in \mathscr{S}'$, pak platí

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = f(-x). \tag{2.18}$$

Důkaz. Zvolme $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolně, ale pevně, pak $\mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi(x)]] = \varphi(-x)$. Vskutku, označíme-li $g(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$, máme

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)] = \int_{\mathbb{R}^m} g(\xi) \mathrm{e}^{2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}\xi = \varphi(x)$$

a tedy

$$\mathcal{F}[g(\xi)] = \int_{\mathbb{R}^m} g(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}\xi = \varphi(-x).$$

Což dává

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x), \varphi(x) \rangle &= \langle \mathcal{F}[f](\xi), \mathcal{F}[\varphi](\xi) \rangle = \\ &= \langle f(x), \mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi]](x) \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle = \langle f(-x), \varphi(x) \rangle . \quad \square\end{aligned}$$

Tvrzení 2.10. Buď $f \in \mathscr{S}'$ a $y = Ax$ regulární lineární transformace, pak platí

$$\mathcal{F}[f(Ax)](\xi) = \frac{1}{|\det A|} \mathcal{F}[f(x)](A^{-T}\xi). \tag{2.19}$$

Důkaz. Buď $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolné. Pak

$$\langle \mathcal{F}[f(Ax)](\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle f(Ax), \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \left\langle f(y), \frac{\mathcal{F}[\varphi(x)](A^{-1}y)}{|\det A|} \right\rangle ,$$

ale

$$\frac{\mathcal{F}\left[\varphi(x)\right](A^{-1}y)}{|\det A|} = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\mathrm{e}^{-2\pi i(A^{-1}y,x)}\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m}\varphi(A^T\xi)\mathrm{e}^{-2\pi i(A^{-1}y,A^T\xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^m}\varphi(A^T\xi)\mathrm{e}^{-2\pi i(y,\xi)}\mathrm{d}\xi =$$
$$= \mathcal{F}\left[\varphi(A^Tx)\right](y),$$

tedy

$$\langle \mathcal{F}\left[f(Ax)\right](\xi), \varphi(\xi)\rangle = \left\langle f(y), \mathcal{F}\left[\varphi(A^Tx)\right](y)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[f(x)\right](y), \varphi(A^Ty)\right\rangle =$$
$$= \left\langle \mathcal{F}\left[f(x)\right](A^{-T}\xi), \frac{\varphi(\xi)}{|\det A|}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{|\det A|}\mathcal{F}\left[f(x)\right](A^{-T}\xi), \varphi(\xi)\right\rangle. \quad \square$$

Důsledek. Buď f radiální distribuce, tj. invariantní vůči rotacím, pak je $\mathcal{F}[f]$ rovněž radiální.

Důkaz. Pro libovolnou rotaci u dle předpokladu máme $f(x) = f(ux)$. Tedy podle (2.19) $\mathcal{F}[f](\xi) = |\det u|^{-1}\mathcal{F}[f](u^{-T}\xi)$. Přitom ale každá rotace splňuje $u^{-T} = u$ a $|\det u| = 1$, čímž je důkaz dokončen. $\square$

2.4 Příklady

V této části spočteme několik typických, ilustrativních příkladů na Fourierovu transformaci distribucí.

Příklad 2.12. Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ pozitivně definitní symetrická matice, pak

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-(Ax,x)}\right](\xi) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{|\det A|}} \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2(\xi,A^{-1}\xi)}.$$

Pro každou $A \in PSym$ existuje ortogonální matice $B \in Orth$ taková, že $B^TAB = I$. Potom po provedení linearní transformace $x = By$ dostáváme $(Ax, x) = (ABy, By) = (B^TABy, y) = |y|^2$. Přitom $A^{-1} = B^TB$, tedy platí $\det A \cdot |\det B|^2 = 1$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-(Ax,x)}\right](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-(Ax,x)-2\pi i(\xi,x)}\mathrm{d}x \\
&= |\det B| \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-(ABy,By)-2\pi i(\xi,By)}\mathrm{d}y \\
&= |\det B| \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{-y_j^2-2\pi i(B^T\xi)_j y_j}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \prod_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(y_j+\pi i(B^T\xi)_j)^2 y_j} \cdot \mathrm{e}^{(\pi i(B^T\xi)_j)^2}\mathrm{d}y_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{-\pi^2((B^T\xi)_j)^2} \int\limits_{\operatorname{Im} z=\pi(B^T\xi)_j} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

kde jsme použili větu o substituci, definici skalárního součinu, vztah pro determinanty A a B a Fubiniho větu a znovu větu o substituci. Z Cauchyho věty použité na uzavřené křivky tvaru $\psi_R(\xi, j) := [-R, R] \dot{+} [-R, R + i\pi(B^T\xi)_j] \dot{+} [R + i\pi(B^T\xi)_j, -R + i\pi(B^T\xi)_j] \dot{+} [-R + i\pi(B^T\xi)_j, -R]$ a celou funkci $\exp(-z^2)$ dostáváme pro $R \to \infty$ s použitím $\lim\limits_{\substack{|\operatorname{Re} z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z=\pi(B^T\xi)_j}} \exp(-z^2) = 0$

$$\int\limits_{\operatorname{Im} z=\pi(B^T\xi)_j} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Celkem tedy

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-(Ax,x)}\right](\xi) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{|\det A|}}\,\mathrm{e}^{-\pi^2\left|B^T\xi\right|^2} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{|\det A|}}\,\mathrm{e}^{-\pi^2(\xi,BB^T\xi)} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{|\det A|}}\,\mathrm{e}^{-\pi^2(\xi,A^{-1}\xi)}.$$

Příklad 2.13. Buď $m = 2$. Definujme distribuci[5] $\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}$ identitou

$$\left\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}\mathrm{d}x + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2}\mathrm{d}x,\ \forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2).$$

Pak platí $\mathcal{F}\left[\mathrm{Pf}\frac{1}{|\xi|^2}\right] = -2\pi\log|x| + K$, kde K je konstanta.

Počítejme pro všechna $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}\left[\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi \right\rangle &= \left\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle \\
&= \int\limits_{|x|<1} \frac{\mathcal{F}[\varphi](x) - \mathcal{F}[\varphi](0)}{|x|^2}\mathrm{d}x + \int\limits_{|x|>1} \frac{\mathcal{F}[\varphi](x)}{|x|^2}\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{|x|<1} \frac{1}{|x|^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi)\cdot\left[\mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)} - 1\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int\limits_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \frac{1}{r} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{-2\pi i r|\xi|\cos\theta} - 1\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r \\
&\qquad + \int\limits_1^\infty \frac{1}{r} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-2\pi i r|\xi|\cos\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

kde jsme využili Fubiniho větu.

[5] partie finie - konečná část

Označíme-li nyní $J(y) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-2\pi i y \cos\theta} \mathrm{d}\theta$, dostáváme funkci spojitě diferencovatelnou funkci na $\mathbb{R}^+$ (derivace integrálu podle parametru), přičemž platí $J'(0) = 0$. Při tomto označení tedy máme

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}\left[\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi \right\rangle =& 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{r} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi)\left[J(r|\xi|) - 1\right] \mathrm{d}\xi \mathrm{d}r \\
& + 2\pi \int\limits_1^\infty \frac{1}{r} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) J(r|\xi|) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) \left[\int\limits_0^1 \frac{J(r|\xi|) - 1}{r} \mathrm{d}r + \int\limits_1^\infty \frac{J(r|\xi|)}{r} \mathrm{d}r\right] \mathrm{d}\xi \\
&= 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) \left[\int\limits_0^{|\xi|} \frac{J(u) - 1}{u} \mathrm{d}u + \int\limits_{|\xi|}^\infty \frac{J(u)}{u} \mathrm{d}u\right] \mathrm{d}\xi \\
&= 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) \Big\{ \log u[J(u) - 1]\Big|_{u=0}^{|\xi|} + \log u[J(u)]\Big|_{u=|\xi|}^{+\infty} \\
&\qquad - \int_0^\infty J'(u) \log u \, \mathrm{d}u \Big\} \mathrm{d}\xi \\
=& -2\pi \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi)(\log|\xi| + K) \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
$$

kde je K dáno

$$
K = \int\limits_0^1 \frac{1 - J(u)}{u} \mathrm{d}u - \int\limits_1^\infty \frac{J(u)}{u} \mathrm{d}u.
$$

Příklad 2.14. $\mathcal{F}[\delta] = 1$
Stačí uvážit, že pro každou $\varphi \in \mathscr{S}$ platí

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = & \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\cdot \mathrm{e}^{-2\pi i(x,0)}\mathrm{d}x \\ = & \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi\rangle .\end{aligned}$$

Příklad 2.15. $\mathcal{F}[1] = \delta$
Aplikujme Fourierovu transformaci na obě strany výsledku předchozího příkladu a využijme (2.18), potom

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta]] &= \mathcal{F}[1] \\ \delta(-x) &= \mathcal{F}[1](x) \\ \mathcal{F}[1](x) &= \delta(x).\end{aligned}$$

Což dává zajímavý výsledek, že pro každou $\varphi \in \mathscr{S}$ platí věta o průměru tvaru:

$$\varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}[1], \varphi\rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi)\cdot \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi.$$

Příklad 2.16. $\mathcal{F}[x^n] = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\delta^{(n)}$
Použijme (2.17) na $1 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, potom

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^n](\xi) =& \frac{1}{(-2\pi i)^n}\mathcal{F}[(-2\pi i x)^n](\xi) = \\ =& \frac{1}{(-2\pi i)^n}\left(\mathcal{F}[1]\right)^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\delta^{(n)}(\xi).\end{aligned}$$

Příklad 2.17. $\mathcal{F}\left[\delta^{(n)}\right] = (2\pi i)^n \xi^n$
Použijme (2.16) na $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, pak

$$\mathcal{F}\left[\delta^{(n)}\right](\xi) = (2\pi i\xi)^n \cdot \mathcal{F}[\delta](\xi) = (2\pi i)^n\xi^n \cdot 1 = (2\pi i)^n\xi^n.$$

Příklad 2.18. $\mathcal{F}\left[\exp(2\pi ibx)\right] = \delta_b$, $b \in \mathbb{R}$
Zvol $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ libovolně, pak

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}\left[\exp(2\pi ibx)\right], \varphi \right\rangle = \left\langle \exp(2\pi ibx), \mathcal{F}\left[\varphi\right] \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi ib\xi} \mathcal{F}\left[\varphi\right](\xi) \mathrm{d}\xi \\
= \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi ib\xi} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x} \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{e}^{-2\pi i(x-b)\xi} \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi \\
= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(z+b) \cdot \mathrm{e}^{-2\pi iz\xi} \mathrm{d}z \mathrm{d}\xi = \left\langle 1(z), \mathcal{F}\left[\varphi(z+b)\right] \right\rangle \\
= \left\langle \mathcal{F}\left[1\right](z), \varphi(z+b) \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[1\right](\xi - b), \varphi(\xi) \right\rangle = \left\langle \delta_b, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Příklad 2.19. $\mathcal{F}\left[\sin(2\pi bx)\right] = \frac{1}{2i}(\delta_b - \delta_{-b})$, pro $b \in \mathbb{R}$
Vskutku,

$$\mathcal{F}\left[\sin(2\pi bx)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi ibx} - \mathrm{e}^{-2\pi ibx}}{2i}\right] = \frac{1}{2i} \cdot \left\{\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi ibx}\right] - \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi i(-b)x}\right]\right\}.$$

Příklad 2.20. $\mathcal{F}\left[\cos(2\pi bx)\right] = \frac{1}{2}(\delta_b + \delta_{-b})$, pro $b \in \mathbb{R}$
Vskutku,

$$\mathcal{F}\left[\cos(2\pi bx)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi ibx} + \mathrm{e}^{-2\pi ibx}}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left\{\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi ibx}\right] + \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi i(-b)x}\right]\right\}.$$

Příklad 2.21. $\mathcal{F}\left[\sinh(2\pi bx)\right] = \frac{1}{2}(\delta_{-ib} - \delta_{ib})$, pro $ib \in \mathbb{R}$
Vskutku,

$$\mathcal{F}\left[\sinh(2\pi bx)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi bx} - \mathrm{e}^{-2\pi bx}}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left\{\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi i(-ib)x}\right] - \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi i(ib)x}\right]\right\}.$$

Příklad 2.22. $\mathcal{F}\left[\cosh(2\pi bx)\right] = \frac{1}{2}(\delta_{-ib} + \delta_{ib})$, pro $ib \in \mathbb{R}$
Vskutku,

$$\mathcal{F}\left[\cosh(2\pi bx)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi bx} + \mathrm{e}^{-2\pi bx}}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left\{\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi i(-ib)x}\right] + \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{2\pi i(ib)x}\right]\right\}.$$

Příklad 2.23. $\mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = \mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda-1}(\xi - i0)^{-\lambda-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

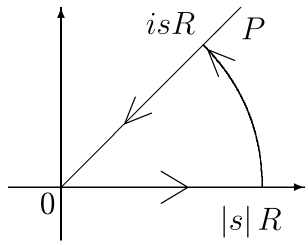
Idea výpočtu převzatá z [3] podstatně spočívá na holomorfnosti distribuce x_+^λ. Vzhledem k tomu, že x_+^λ má singularity v bodech $-1, -2, \ldots$ uvažujme nejprve $\lambda \in \mathbb{C}$ jen taková, že $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 0$ a zvolme parametr $\tau \in \mathbb{R}^-$, pak $\{x_+^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}\}/\Gamma(\lambda+1) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ a platí

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty x^\lambda \mathrm{e}^{-2\pi i\sigma x} \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty x^\lambda \mathrm{e}^{-2\pi i(\sigma+i\tau)x}\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty 2\pi i(\sigma+i\tau)\frac{(2\pi i(\sigma+i\tau)x)^\lambda}{(2\pi i(\sigma+i\tau))^{\lambda+1}}\mathrm{e}^{-2\pi i(\sigma+i\tau)x}\mathrm{d}x.$$

Označme pro pevné $\sigma \in \mathbb{R}$ $s := (\sigma + i\tau)$. Pak $s \in \mathbb{C}$ splňuje $-\pi < \arg s < 0$ a označíme-li P polopřímku $P = \{2\pi i s x, x \in \mathbb{R}^+\} \subset \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, máme z definice křivkového integrálu

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_P \left(\frac{\xi}{2\pi i s}\right)^\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\xi} \cdot \frac{1}{2\pi i s}\mathrm{d}\xi = \\ = \frac{(2\pi)^{-\lambda-1}(-i)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)s^{\lambda+1}}\int_P \xi^\lambda \mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}\xi\,.$$

Zpětným dosazením $\sigma + i\tau$ za s a použitím Cauchyho věty na uzavřené křivky tvaru $\psi_R := [0, |s| \cdot R] \dot{+} \eta_R \dot{+} [is \cdot R, 0]$, kde $\eta_R(t) := |s| \cdot R \cdot \mathrm{e}^{2\pi i t \arg(s)}, t \in [0,1]$ a funkci $z^\lambda \exp(-z)$ holomorfní na $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ dostáváme s použitím $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |z| \cdot z^\lambda \exp(-z) = 0$ pro $R \to \infty$ následující:



$$\mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) = \\ = \mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda-1}(\sigma+i\tau)^{-\lambda-1}\underbrace{\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty \xi^\lambda \mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}\xi}_{=1}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) = \mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda-1}(\sigma+i\tau)^{-\lambda-1}.$$

Limitním přechodem pro $\tau \to 0-$ dospějeme pro $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 0$ ke vztahu

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) = \mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda-1}(\sigma-i0)^{-\lambda-1}. \tag{2.20}$$

Obě strany rovnosti jsou však holomorfní v λ na celé komplexní rovině, z věty o jednoznačnosti tedy vyplývá, že vzorec platí pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$.

Příklad 2.24. $\mathcal{F}\left[x_+^n\right] = (2\pi i)^{-n-1}n!\xi^{-n-1} + \frac{1}{2}(2\pi i)^{-n}(-1)^{-n}\delta^{(n)}(\xi)$, $n \in \mathbb{N}$
Stačí do výsledku předchozího příkladu dosadit ze vztahu (2.14) vyjádření pro $(\sigma-i0)^{-n-1}$. Dostáváme:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[x_+^n\right] &= \Gamma(n+1)\mathrm{e}^{-i(n+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-n-1}(\xi-i0)^{-(n+1)}\\ &= n!(i)^{(-n-1)}(2\pi)^{(-n-1)}\cdot\left\{\xi^{-(n+1)} + \frac{(-1)^n i\pi}{n!}\delta^{(n)}(\xi)\right\}\\ &= (2\pi i)^{-n-1}n!\xi^{-n-1} + \frac{1}{2}(2\pi i)^{-n}(-1)^{-n}\delta^{(n)}(\xi).\end{aligned}$$

Příklad 2.25. Podle předchozího příkladu máme speciálně
$\mathcal{F}\left[\theta(x)\right] = \mathcal{F}\left[x_+^0\right] = \frac{1}{2\pi i}\xi^{-1} + \frac{1}{2}\delta(\xi)$.

Příklad 2.26. $\mathcal{F}\left[\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda-1}(\xi+i0)^{-\lambda-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Postupujme analogicky jako v případě x_+^λ. Vzhledem k tomu, že x_-^λ má singularity v bodech $-1, -2, \ldots$ uvažujme nejprve $\lambda \in \mathbb{C}$ jen taková, že $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 0$ a zvolme parametr $\tau \in \mathbb{R}^+$, pak $\dfrac{x_-^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ a platí

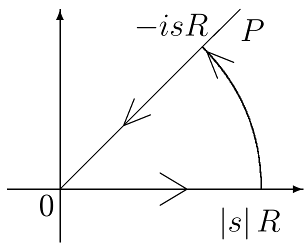
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{x_-^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_{-\infty}^0 |x|^\lambda\, \mathrm{e}^{-2\pi i\sigma x}\cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}\mathrm{d}x =\\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_0^\infty x^\lambda \mathrm{e}^{2\pi i(\sigma+i\tau)x}\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Označme pro pevné $\sigma \in \mathbb{R}$ $s := (\sigma + i\tau)$, pak $s \in \mathbb{C}$ splňuje $0 < \arg s < \pi$ a označíme-li polopřímku $P = \{-2\pi isx, x \in \mathbb{R}^+\} \subset \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, máme z definice křivkového integrálu

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_-^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_P \left(-\frac{\xi}{2\pi i s}\right)^\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\xi} \cdot \frac{(-1)}{2\pi i s} \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{(2\pi)^{-\lambda-1} i^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1) s^{\lambda+1}} \int\limits_P \xi^\lambda \mathrm{e}^{-\xi} \mathrm{d}\xi \,.$$

Zpětným dosazením $\sigma + i\tau$ za s a použitím Cauchyho věty na uzavřené křivky tvaru $\psi_R := [0, |s| \cdot R] \dot{+} \eta_R \dot{+} [-is \cdot R, 0]$, kde $\eta_R(t) := |s| \cdot R \cdot \mathrm{e}^{-2\pi i t \arg(s)}, t \in [0,1]$ a funkci $z^\lambda \exp(-z)$ holomorfní na $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ dostáváme s použitím $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |z| \cdot z^\lambda \exp(-z) = 0$ pro $R \to \infty$ následující:



$$\mathcal{F}\left[\frac{x_-^\lambda \cdot \mathrm{e}^{2\pi\tau x}}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) =$$

$$= \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}} (2\pi)^{-\lambda-1} (\sigma + i\tau)^{-\lambda-1} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty \xi^\lambda \mathrm{e}^{-\xi} \mathrm{d}\xi}_{=1} =$$

$$= \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}} (2\pi)^{-\lambda-1} (\sigma + i\tau)^{-\lambda-1}.$$

Limitním přechodem pro $\tau \to 0+$ dospějeme pro $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ ke vztahu:

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right](\sigma) = \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}} (2\pi)^{-\lambda-1} (\sigma + i0)^{-\lambda-1}. \qquad (2.21)$$

Obě strany rovnosti jsou však holomorfní v λ na celé komplexní rovině, z věty o jednoznačnosti tedy vyplývá, že vzorec platí pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$.

Příklad 2.27. Pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -1, -2, -3, \dots$ platí
$\mathcal{F}\left[|x|^{\lambda}\right](\xi) = -2\Gamma(\lambda+1)(2\pi)^{-\lambda-1}\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)\,|\xi|^{-\lambda-1}$.

Počítejme:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left[|x|^{\lambda}\right](\xi) = \mathcal{F}\left[x_+^{\lambda} + x_-^{\lambda}\right](\xi) = \mathcal{F}\left[x_+^{\lambda}\right](\xi) + \mathcal{F}\left[x_-^{\lambda}\right](\xi) \\
&\quad = \Gamma(\lambda+1)(2\pi)^{-\lambda-1}\cdot\left\{\mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi - i0)^{-\lambda-1} + \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi + i0)^{-\lambda-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Dosadíme-li do výrazu ve složených závorkách vyjádření ze vztahu (2.12), dostáváme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi - i0)^{-\lambda-1} + \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi + i0)^{-\lambda-1} = \\
&\quad = (-i)\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(\xi - i0)^{-\lambda-1} + i\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\xi + i0)^{-\lambda-1} \\
&\quad = (-i)\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\xi_+^{-\lambda-1} + \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\pi}\xi_-^{-\lambda-1}\right] + i\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\xi_+^{-\lambda-1} + \mathrm{e}^{i(-\lambda-1)\pi}\xi_-^{-\lambda-1}\right] \\
&\quad = (-i)\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\xi_+^{-\lambda-1} - \mathrm{e}^{i\lambda\pi}\xi_-^{-\lambda-1}\right] + i\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\xi_+^{-\lambda-1} - \mathrm{e}^{i(-\lambda)\pi}\xi_-^{-\lambda-1}\right] \\
&\quad = \xi_+^{-\lambda-1}\left[(-i)\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} + i\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\right] + \xi_-^{-\lambda-1}\left[(+i)\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}+i\lambda\pi} - i\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}-i\lambda\pi}\right] \\
&\quad = \xi_+^{-\lambda-1}\left[(-i)(2i)\frac{\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{2i}\right] + \xi_-^{-\lambda-1}\left[(+i)(2i)\frac{\mathrm{e}^{+i\lambda\frac{\pi}{2}} - i\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{2i}\right] \\
&\quad = \xi_+^{-\lambda-1}(-2)\sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) + \xi_-^{-\lambda-1}(-2)\sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) \\
&\quad = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)|\xi|^{-\lambda-1}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy:

$$\mathcal{F}\left[|x|^{\lambda}\right](\xi) = -2\Gamma(\lambda+1)(2\pi)^{-\lambda-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)|\xi|^{-\lambda-1}. \tag{2.22}$$

Příklad 2.28. Pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -1, -2, -3, \dots$ platí
$\mathcal{F}\left[|x|^{\lambda}\operatorname{sign} x\right](\xi) = -2i\Gamma(\lambda+1)(2\pi)^{-\lambda-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)|\xi|^{-\lambda-1}\operatorname{sign}(\xi)$.

Počítejme:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left[|x|^{\lambda}\operatorname{sign} x\right](\xi) = \mathcal{F}\left[x_+^{\lambda} - x_-^{\lambda}\right](\xi) = \mathcal{F}\left[x_+^{\lambda}\right](\xi) - \mathcal{F}\left[x_-^{\lambda}\right](\xi) = \\
&\quad = \Gamma(\lambda+1)(2\pi)^{-\lambda-1}\left\{\mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi - i0)^{-\lambda-1} - \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi + i0)^{-\lambda-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Dosadíme-li do výrazu ve složených závorkách vyjádření ze vztahu (2.12), dostáváme podobně jako v předchozím příkladě

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi - i0)^{-\lambda-1} - \mathrm{e}^{i(\lambda+1)\frac{\pi}{2}}(\xi + i0)^{-\lambda-1} \\
&\quad = (-i)\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(\xi - i0)^{-\lambda-1} - i\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(\xi + i0)^{-\lambda-1} \\
&\quad = (-i)\left\{\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\xi_+^{-\lambda-1} - \mathrm{e}^{i\lambda\pi}\xi_-^{-\lambda-1}\right] + \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\xi_+^{-\lambda-1} - \mathrm{e}^{i(-\lambda)\pi}\xi_-^{-\lambda-1}\right]\right\} \\
&\quad = (-i)\left\{\xi_+^{-\lambda-1}\left[\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\right] - \xi_-^{-\lambda-1}\left[\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}+i\lambda\pi} + \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}-i\lambda\pi}\right]\right\} \\
&\quad = (-i)\left\{\xi_+^{-\lambda-1}\left[2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}}{2}\right] - \xi_-^{-\lambda-1}\left[2\cdot\frac{\mathrm{e}^{+i\lambda\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}}{2}\right]\right\} \\
&\quad = (-i)\left\{\xi_+^{-\lambda-1}2\cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - \xi_-^{-\lambda-1}2\cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\right\} \\
&= -2i\cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)|\xi|^{-\lambda-1}\operatorname{sign}(\xi).
\end{aligned}
$$

Celkem tedy:

$$
\mathcal{F}\left[|x|^\lambda \operatorname{sign} x\right](\xi) = -2i\Gamma(\lambda+1)(2\pi)^{-\lambda-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)|\xi|^{-\lambda-1}\operatorname{sign}\xi. \tag{2.23}
$$

Příklad 2.29. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$
\mathcal{F}\left[x^{-n}\right](\xi) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} i\pi(2\pi)^{n-1}|\xi|^{n-1}\frac{\operatorname{sign}\xi}{(n-1)!} & n \text{ liché} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{|\xi|^{n-1}\pi(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!} & n \text{ sudé.} \end{cases}
$$

1. $n = 2k-1$ liché

   Aplikujme Fourierovu transformaci na obě strany rovnosti (2.23) pro $\lambda = n-1$.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[|x|^{n-1}\right]\operatorname{sign} x\right] = \\
&\qquad = -2i\Gamma(n)(2\pi)^{-n+1-1}\cos\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)\mathcal{F}\left[|\xi|^{-n+1-1}\operatorname{sign}\xi\right]
\end{aligned}
$$

Podle (2.18) dostáváme

$$\begin{aligned}
|-x|^{n-1}\operatorname{sign}(-x) &= -2i(n-1)!(2\pi)^{-n}\cos\left(\frac{(2k-2)\pi}{2}\right)\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right]\\
|x|^{n-1}\operatorname{sign}x &= 2i(n-1)!(2\pi)^{-n}\cos((k-1)\pi)\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x)\\
2i\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x) &= |x|^{n-1}\frac{\operatorname{sign}x}{(n-1)!}(2\pi)^{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\\
-i\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x) &= |x|^{n-1}\frac{\operatorname{sign}x}{(n-1)!}\pi(2\pi)^{n-1}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\\
\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x) &= i(-1)^{\frac{n+1}{2}}\pi(2\pi)^{n-1}|x|^{n-1}\frac{\operatorname{sign}x}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Přeznačením x za ξ a naopak dostáváme:

$$\mathcal{F}\left[x^{-n}\right](\xi) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}i\pi(2\pi)^{n-1}|\xi|^{n-1}\frac{\operatorname{sign}\xi}{(n-1)!}.$$

2. $n = 2k$ sudé
   Aplikujme Fourierovu transformaci na obě strany rovnosti (2.22) pro $\lambda = n-1$.

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[|x|^{n-1}\right]\right] = -2\Gamma(n)(2\pi)^{-n+1-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\mathcal{F}\left[|\xi|^{-n+1-1}\right]$$

Podle (2.18) dostáváme

$$\begin{aligned}
|-x|^{n-1} &= -2(n-1)!(2\pi)^{-n}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)\mathcal{F}\left[|\xi|^{-n}\right]\\
|x|^{n-1}(2\pi)^{n} &= -2(n-1)!(-1)^{k+1}\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x)\\
|x|^{n-1}\pi(2\pi)^{n-1} &= (n-1)!(-1)^{k}\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x)\\
\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x) &= \frac{|x|^{n-1}\pi(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!}(-1)^{\frac{n}{2}}\\
\mathcal{F}\left[\xi^{-n}\right](x) &= (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{|x|^{n-1}\pi(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Přeznačením x za ξ a naopak dostáváme:

$$\mathcal{F}\left[x^{-n}\right](\xi) = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{|\xi|^{n-1}\pi(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Příklad 2.30. Z výsledku předchozího příkladu dostáváme speciálně pro

1. $n = 1$
$$\mathcal{F}\left[x^{-1}\right](\xi) = (-1)^{\frac{1+1}{2}} i\pi(2\pi)^{1-1} |\xi|^{1-1} \frac{\operatorname{sign}\xi}{(1-1)!},$$
tedy
$$\mathcal{F}\left[x^{-1}\right](\xi) = -i\pi\operatorname{sign}\xi.$$

2. $n = 2$
$$\mathcal{F}\left[x^{-2}\right](\xi) = (-1)^{\frac{2}{2}} \frac{|\xi|^{2-1}\pi(2\pi)^{2-1}}{(2-1)!},$$
tedy
$$\mathcal{F}\left[x^{-2}\right](\xi) = -|\xi| 2\pi^2.$$

Příklad 2.31. $\mathcal{F}\left[(x+i0)^\lambda\right] = \dfrac{\xi_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} \exp\{i\lambda\frac{\pi}{2}\}(2\pi)^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$
Aplikujme Fourierovu transformaci na obě strany rovnosti (2.21) pro $-\lambda-1$.

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{x_-^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda-1+1)}\right]\right] = \mathrm{e}^{i(-\lambda-1+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{\lambda+1-1}\mathcal{F}\left[(\xi+i0)^{\lambda+1-1}\right](x)$$

Podle (2.18) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{(-x)_-^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} &= \mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(2\pi)^\lambda\mathcal{F}\left[(\xi+i0)^\lambda\right](x) \\ \frac{(+x)_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda} &= \mathcal{F}\left[(\xi+i0)^\lambda\right](x). \end{aligned}$$

Přeznačením x za ξ a naopak dostáváme:

$$\mathcal{F}\left[(x+i0)^\lambda\right](\xi) = \frac{\xi_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}\mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda}.$$

Příklad 2.32. $\mathcal{F}\left[(x-i0)^\lambda\right] = \dfrac{\xi_-^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} \exp\{-i\lambda\frac{\pi}{2}\}(2\pi)^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$
Aplikujme Fourierovu transformaci na obě strany rovnosti (2.20) pro $-\lambda-1$.

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{x_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda-1+1)}\right]\right] = \mathrm{e}^{-i(-\lambda-1+1)\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{\lambda+1-1}\mathcal{F}\left[(\xi-i0)^{\lambda+1-1}\right](x)$$

Podle (2.18) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{(-x)_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} &= \mathrm{e}^{i\lambda\frac{\pi}{2}}(2\pi)^\lambda \mathcal{F}\left[(\xi-i0)^\lambda\right](x) \\ \frac{(+x)_-^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda} &= \mathcal{F}\left[(\xi-i0)^\lambda\right](x). \end{aligned}$$

Přeznačením x za ξ a naopak dostáváme:

$$\mathcal{F}\left[(x-i0)^\lambda\right](\xi) = \frac{\xi_-^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}\mathrm{e}^{-i\lambda\frac{\pi}{2}}(2\pi)^{-\lambda}.$$

Příklad 2.33. $\mathcal{F}\left[\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}\right)}\right](\rho) = \frac{\rho^{-\lambda-m}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\pi^{\lambda+\frac{m}{2}}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $r := |x|$

Uvažujme nejprve $\lambda \in \mathbb{C}, -m < \operatorname{Re}\lambda < 0$, pak r^λ je zřejmě sféricky symetrická distribuce, z toho plyne, že její Fourierova transformace bude také sféricky symetrická, tedy funkcí ρ, kde $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2}$. Pro každé $t > 0$ přitom platí:

$$\mathcal{F}\left[r^\lambda\right](t\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} r^\lambda \mathrm{e}^{-2\pi i(t\xi,x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} r^\lambda \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,tx)}\mathrm{d}x.$$

Po provedení substituce $tx = y$ dostáváme:

$$\mathcal{F}\left[r^\lambda\right](t\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} |y|^\lambda t^{-\lambda-m}\mathrm{e}^{-2\pi i(\xi,y)}\mathrm{d}y = t^{-\lambda-m}\mathcal{F}\left[r^\lambda\right](\xi).$$

$\mathcal{F}\left[r^\lambda\right](\xi)$ tedy lze psát ve tvaru $\mathcal{F}\left[r^\lambda\right](\xi) = C_\lambda \cdot \rho^{-\lambda-n}$. Nalezněme C_λ spočtením transformace pro speciální testovací funkci, definujme tedy $\varphi(x) := \exp(-r^2)$. Pak

$$\mathcal{F}\left[\varphi\right](\xi) = \pi^{\frac{m}{2}}\mathrm{e}^{-\pi^2 r^2}.$$

Použitím definice Fourierovy transformace distribuce r^λ dostáváme:

$$\begin{aligned} \left\langle C_\lambda \rho^{-\lambda-m}, \varphi\right\rangle &= \left\langle |x|^\lambda, \mathcal{F}\left[\varphi\right]\right\rangle \\ C_\lambda \int_{\mathbb{R}^m} |\xi|^{-\lambda-m}\mathrm{e}^{-|\xi|^2}\mathrm{d}\xi &= \pi^{\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^m} |x|^\lambda \mathrm{e}^{-\pi^2|x|^2}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Aplikujme sférické souřadnice:

$$\begin{aligned}
C_\lambda \int_0^\infty \kappa_m r^{m-1} r^{-\lambda-m} \mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r &= \pi^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \kappa_m r^{m-1} r^{\lambda} \mathrm{e}^{-\pi^2 r^2} \mathrm{d}r \\
C_\lambda \int_0^\infty r^{-\lambda-1} \mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r &= \pi^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty r^{\lambda+m-1} \mathrm{e}^{-\pi^2 r^2} \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Na pravé straně rovnosti substituujme $\tau = \pi r$.

$$\begin{aligned}
C_\lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty r^{-2\left(\frac{\lambda}{2}\right)-1} \mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r &= \pi^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\tau^{\lambda+m-1} \mathrm{e}^{-\tau^2}}{\pi^{\lambda+m-1}} \mathrm{d}\tau \\
\frac{C_\lambda \cdot \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{2} &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\pi^{\lambda+m}} \int_0^\infty \tau^{\lambda+m-1} \mathrm{e}^{-\tau^2} \mathrm{d}\tau \\
\frac{C_\lambda \cdot \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{2} &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\pi^{\lambda+m}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}\right)}{2} \\
C_\lambda &= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \cdot \pi^{\lambda+\frac{m}{2}}}.
\end{aligned}$$

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}, -m, -m-2, \ldots < \operatorname{Re} \lambda < 0$ tedy máme

$$\mathcal{F}\left[\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}\right)}\right](\rho) = \frac{\rho^{-\lambda-m}}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2}) \pi^{\lambda+\frac{m}{2}}}, \tag{2.24}$$

obě strany rovnosti jsou však holomorfní v λ v celé komplexní rovině, z věty o jednoznačnosti tedy vyplývá, že vzorec platí pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$.

Kapitola 3

Aplikace v parciálních diferenciálních rovnicích

3.1 Konvoluce distribucí

Definice 3.1. Řekneme, že distribuce $f \in \mathscr{S}'$ má *omezený nosič*, jestliže existuje $R > 0$ tak, že

$$\forall \varphi \in \mathscr{S} : \operatorname{supp} \varphi \cap B_R(0) = \emptyset \Rightarrow \langle f, \varphi \rangle = 0.$$

Definice 3.2. Buďte $f, g \in \mathscr{S}'$, g s omezeným nosičem. Pak definujeme *konvoluci distribucí* f a g předpisem:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Poznámka. Korektnost definice zaručuje následující věta, kterou však uvedeme bez důkazu.

Věta 3.1. *Buďte $f, g \in \mathscr{S}'$, g s omezeným nosičem, pak existují konvoluce $f * g$ i $g * f$ a rovnají se.*

Důkaz lze nalézt například v [2].

Tvrzení 3.2. Pro každé $f \in \mathscr{S}'$ a každý α multiindex platí $D^\alpha \delta * f = D^\alpha f$. Speciálně $f * \delta = f$.

Důkaz. Zvolme $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolně, pak

$$\langle f * D^\alpha \delta, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle D^\alpha \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \\ = (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), D^\alpha \varphi(x) \rangle = \langle D^\alpha f(x), \varphi(x) \rangle . \quad \square$$

Definice 3.3. Buď L diferenciální operátor (na prostoru distribucí). Řekneme, že $u_0 \in \mathscr{S}'$ je *fundamentálním řešením operátoru* L, jestliže platí

$$Lu_0 = \delta.$$

Věta 3.3. *Nechť $u_0 \in \mathscr{S}'$ je fundamentální řešení lineárního diferenciálního operátoru s konstantními koeficienty a $f \in \mathscr{S}'$ (pravá strana) má omezený nosič. Pak $u \stackrel{def}{=} f * u_0$ je řešením rovnice $Lu = f$.*

Důkaz. Z tvrzení 3.2 indukcí dostáváme pro $g \in \mathscr{S}'$ $L\delta * g = Lg$ a tedy

$$Lu = (L\delta) * u = (L\delta) * (f * u_0) = (L\delta * u_0) * f = Lu_0 * f = \delta * f = f. \quad \square$$

3.2 Laplaceova rovnice

Jak píše Folland [1] na str. 66, Laplaceův operátor Δ definovaný na $\mathbb{R}^m$ jako

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \partial_i^2 = \nabla \cdot \nabla$$

„*... je asi nejdůležitější ze všech parciálních diferenciálních operátorů.*“ Jak je tamtéž dokázáno, libovolný parciální diferenciální operátor L totiž komutuje s posunutími a rotacemi právě tehdy, když je polynomiální kombinací Laplaceova operátoru, to jest $L = \sum_{j=1}^{k} a_j \Delta^j$ pro nějaké konstanty a_j.

Hledejme fundamentální řešení Laplaceova operátoru v $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Uvažujeme tedy distributivní diferenciální rovnici pro neznámou distribuci E tvaru:

$$\Delta E = \delta.$$

Aplikujme na obě strany rovnice Fourierovu transformace, díky větě 2.3 se jedná o ekvivalentní úpravu, a dále upravujme

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}\right] &= \mathcal{F}[\delta] \\
\sum_{i=1}^{m} \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}\right] &= 1 \\
\sum_{i=1}^{m} (2\pi i \xi_i)^2 \mathcal{F}[E] &= 1 \\
-4\pi^2 |\xi|^2 \mathcal{F}[E] &= 1.
\end{aligned}$$

$$-4\pi^2 |\xi|^2 \mathcal{F}[E] = 1 \tag{3.1}$$

1. Pro $m = 2$ uvažme, že rovnici (3.1) řeší například distribuce splňující

$$-4\pi^2 \mathcal{F}[E] = \mathrm{Pf}\frac{1}{|\xi|^2},$$

kde je distribuce na pravé straně definována identitou

$$\left\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} \mathrm{d}x + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} \mathrm{d}x,$$

pak totiž

$$\left\langle |\xi|^2 \mathrm{Pf}\frac{1}{|\xi|^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{|\xi|^2}, |\xi|^2 \varphi \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{|\xi|<1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi) - 0}{|\xi|^2} \mathrm{d}\xi + \int\limits_{|\xi|>1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi)}{|\xi|^2} \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int\limits_{|\xi|<1} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi + \int\limits_{|\xi|>1} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi = \langle 1, \varphi \rangle .$$

Podle výsledku příkladu 2.13 máme

$$\begin{aligned}
-4\pi^2 \mathcal{F}[E] &= \mathrm{Pf}\frac{1}{|\xi|^2} \\
\mathcal{F}[\mathcal{F}[E]] &= \mathcal{F}\left[-\mathrm{Pf}\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2}\right] \\
E(-x) &= -\frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}\left[\mathrm{Pf}\frac{1}{|\xi|^2}\right] \\
E(x) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(-2\pi \log|x| + K\right) \\
E(x) &= \frac{1}{2\pi} \log|x| + \tilde{K}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že distribuce generovaná konstantní funkcí $\tilde{K}$ splňuje homogenní Laplaceovu rovnici, lze díky linearitě problému volit fundamentální řešení Laplaceova operátoru ve dvou dimenzích tvaru:

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|.$$

2. Pro $m > 2$ je funkce $\dfrac{1}{4\pi^2 |\xi|^2} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$, s využitím (2.24) tedy z (3.1) dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[E] &= -\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2} \\
\mathcal{F}[\mathcal{F}[E]] &= \mathcal{F}\left[-\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2}\right] \\
E(-x) &= -\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}\left[|\xi|^{(-2)}\right] \\
E(x) &= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{r^{2-m}\Gamma\left(\frac{-2+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\pi^{-2+\frac{m}{2}}} \\
E(x) &= -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}} r^{m-2}} = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{4\frac{m-2}{2}\pi^{\frac{m}{2}} r^{m-2}} \\
E(x) &= -\frac{1}{(m-2)\kappa_m r^{m-2}}.
\end{aligned}$$

Zdůrazněme, že jsme nenalezli všechna řešení rovnice (3.1), neboť existují nenulová řešení rovnice $|\xi|^2 g = 0$, jako například $g = \delta$.

Podle výsledku příkladu 2.14 je tedy řešením také například

$$E(x) = -\frac{1}{(m-2)\kappa_m r^{m-2}} + 1.$$

Závěr

V této práci jsme se seznámili se zajímavou a progresivní teorií distribucí. Přesvědčili jsme se, že při vhodné volbě testovacího prostoru lze řadu vlastností klasických funkcí poměrně přímočaře přenést na zobecněné funkce, neboli distribuce. Dále jsme připomněli Fourierovu transformaci v klasickém smyslu jako nástroj analytického řešení diferenciálních rovnic a přenesli jsme její základní vlastnosti do prostoru distribucí. V závěru jsme náhledli i do oblasti aplikací této teorie v parciálních diferenciálních rovnicích.

Doufám, že čtenář získal pocit, že hledání Fourierových transformací od distribucí většinou vyžaduje početní techniky zvládnutelné se základním kurzem matematické analýzy a že lze pomocí nich úspěšně řešit některé parciální diferenciální rovnice.

Jsem si vědom toho, že v této práci je prezentován pouze zlomek rozsáhlé teoretické oblasti, spojující poznatky funkcionální a komplexní analýzy s aplikacemi v matematické fyzice. Věřím však, že by se tento text mohl stát dobrým podkladem pro první seznámení s touto problematikou. Zvídavého čtenáře hledajícího hlubší teoretické poznatky odkažme například na Friedmanovu monografii [2] či na Vladimirovovu knihu [6], zaměřenou také na aplikace v matematické fyzice.

Literatura

[1] Folland G.B.: *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press , Princeton, 1995.

[2] Friedman A.: *Generalized functions and partial differential equations*, Prentice-Hall, London, 1963.

[3] Gelfand I.M., Šilov G.E.: *Generalized functions,* vol. I : *Properties and Operations*, Academic Press, New York and London, 1964.

[4] Hörmander L.: *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] Kopáček J.: *Matematická analýza pro fyziky IV.*, Matfyzpress, Praha, 2001.

[6] Vladimirov V.S.: *Generalized functions in Mathematical Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1979.