Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Soňa Kyseľová

Analýza investic

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Studijní program: Matematika
Obor: Finanční matematika

2009

Rada by som sa na tomto mieste poďakovala vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc. za cenné rady a pomoc s dokončovaním práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať Bc. Martinovi Švecovi za pomoc s tvorbou grafov.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním. V Prahe dňa 26.5.2009 Soňa Kyseľová

Obsah

Názov práce: Analýza investícií
Autor: Soňa Kyseľová
Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky
Vedúci bakalárskej práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
e-mail vedúceho: Jan.Hurt@mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci študujeme deterministické, náhodné a obecné peňažné toky. Hlavnou náplňou v prvej časti práce je oceňovanie dlhopisov a výpočet ich výnosu, durácie a konvexity. Druhá časť sa zaoberá teóriou portfólia zloženého z cenných papierov, ktorých výnos je neistý. Cieľom je konštrukcia vhodného portfólia z pohľadu investora, pričom budeme brať do úvahy výnos a riziko. Budeme skúmať základnú matematickú metódu pre určenie očakávaného výnosu - analýzu očakávanej hodnoty a rozptylu portfólia s využitím teórie pravdepodobnosti.

Kľúčové slová: cenný papier, dlhopis, portfólio, očakávaný výnos, Markowitzov model

Title: Investment analysis
Author: Soňa Kyseľová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: Jan.Hurt@mff.cuni.cz

Abstract: In this thesis we study deterministic, random and general cash-flows. Main contents of the first part of this thesis will be bond pricing and computation of its yield, duration and convexity. The second part deals with theory of a portfolio consisting of securities with uncertain returns. The goal of this thesis is construction of an appropriate portfolio from the point of view of an investor considering return and risk. We will investigate the basic mathematical method for determination of expected return - mean - variance portfolio analysis with using theory of probability.

Keywords: security, bond, portfolio, expected return, the Markowitz model

Kapitola 1

Úvod

Témou tejto bakalárskej práce sú investície a ich analýza. Budem klásť dôraz na to, ako ohodnocovať cenné papiere a ako ich využiť pri konštrukcii portfólií. Na začiatku sa budem venovať cenným papierom s pevným výnosom, hlavne oceňovaniu dlhopisov a vysvetleniu faktorov, ktoré ovplyvňujú pohyb ich kurzov. Ukážem, ako sa určí výnos dlhopisu či jeho durácia alebo konvexita.

Investori však len zriedkakedy sústredia všetko svoje bohatstvo do jedného inštrumentu. Namiesto toho vytvárajú portfólia, čo znamená, že konštruujú určité skladby investičných a neinvestičných inštrumentov, ktoré spĺňajú ich predstavy. Základnou myšlienkou teórie portfólia je taká alokácia aktív, pri ktorej je dosiahnutý primeraný výnos vo vzťahu k riziku. Tento problém popisuje Markowitzova teória portfólia, na ktorú sa zameriam v druhej časti práce.

Kapitola 2

Cenné papiere s pevným výnosom

História cenných papierov siaha až do ďalekej minulosti. Už v dobe alexandrijskej môžeme nájsť zmienku o týchto veľmi obľúbených finančných inštrumentoch, kde dlžník potvrdzoval bankérovi svoj záväzok vystavením a podpísaním dlžného listu. Na druhej strane bankér vystavil dlžníkovi potvrdenie o prijatí dokladu. Výrazným bolo obdobie stredoveku. Cenné papiere sa podobali tým dnešným a vystavovali ich kniežatá, pápeži a iní vysokí hodnostári. Rozhodujúci význam získali cenné papiere s rozvojom kapitalismu a ich použitie sa rozšírilo vďaka rýchlemu zdokonaľovaniu techniky bankových operácií. Dnes sú cenné papiere klasickým nástrojom investovania a obiehajú na národných aj medzinárodných trhoch. Podľa [3] **cenný papier** predstavuje zastupiteľný a prevoditeľný finančný nástroj. Práve vlastnosť obchodovateľnosti je dôležitá, aby sme daný nástroj mohli považovať za cenný papier. V tejto kapitole sa budeme venovať **cenným papierom s pevným výnosom**, ktoré poskytujú vlastníkovi príjem s vopred stanovenou štruktúrou. Jediná neistota je spojená s tým, že emitent nedodrží podmienky (napr. kvôli bankrotu), vtedy je príjem prerušený. S cennými papiermi sa obchoduje na dobre rozvinutých trhoch a sú dôležité hlavne pre investorov uzatvárajúcich obchody na týchto finančných trhoch.

2.1 Typy cenných papierov

Nie je možné poskytnúť prehľad všetkých cenných papierov s pevným výnosom, pretože ich existuje veľké množstvo. Spomeniem aspoň niektoré hlavné typy:

Sporiteľné vklady

Patria medzi najznámejšie inštrumenty s pevným výnosom. Sporiace účty ponúkajú komerčné banky, sporiteľné alebo úverové spoločnosti. Peniaze na účte sú úročené úrokovou sadzbou. Takýto účet poskytuje značnú bezpečnosť istiny, malú pravdepodobnosť nezískania úroku, vysokú likviditu a relatívne nízku výnosnosť.

Inštrumenty peňažného trhu

S inštrumentami peňažného trhu (so splatnosťou menej ako 1 rok) sa obchoduje na OTC trhoch spoločne s peniazmi centrálnej národnej banky. Tieto trhy sú veľmi dobre organizované a inštrumenty vysoko štandardizované. Účastníkmi sú hlavne banky a iné finančné inštitúcie. Dôvodmi pre obchodovanie môžu byť optimalizácia likvidity, zaistenie rizika a iné. Môžeme ich rozlišovať podľa viacerých kritérií, napr. kotácie. Medzi inštrumenty kótované na výnosovej báze (tj. kupované a predávané za ich nominálnu hodnotu) patria depozitá peňažného trhu. Sú to pevne úročené cenné papiere so štandardnými splatnosťami do 1 roku (cez noc, tzv. overnight, denná, týždenná,...). Úrok a nominálna hodnota sa spláca ku dňu splatnosti. Ďalšími inštrumentami sú depozitné certifikáty. Depozitný certifikát (CD) je poukážka na termínovaný vklad, ktorá sa môže predávať pred dňom splatnosti. Z inštrumentov kótovaných na depozitnej báze (tj. predávaných pod svoju nominálnu hodnotu) spomenieme zmenku - cenný papier, kde sa osoba, ktorá zmenku vystavuje, zaväzuje zaplatiť osobe uvedenej na zmenke určenú čiastku v určenom termíne a na určenom mieste.

Vládne dlhopisy

České vládne dlhopisy emituje ministerstvo financií, ale o vlastnú emisiu sa stará Česká národná banka (ČNB). V súčasnosti sa jedná o dva druhy dlhopisov[1]:

- krátkodobé dlhopisy (štátne pokladničné poukážky) - bezkupónové dl-

[1] zdroj: www.cnb.cz

hopisy s nominálnou hodnotou 1 mil. KČ, nie sú verejne obchodovateľné, investor musí mať založený účet v SKD ČNB

- strednedobé a dlhodobé kupónové dlhopisy (SD) s nominálnou hodnotou 10 000 KČ a pevným ročným kupónom - sú verejne obchodovateľné cenné papiere, investor musí mať zriadený účet cenných papierov v SCP.

SPD a SD sa predávajú na trhu účastníkom formou aukcií.

Anuity

Anuita je kontrakt, pri ktorom sú držiteľovi anuity vyplácané peniaze v pravidelných splátkach v dohodnutom období. Táto čiastka je po celú dobu rovnaká, mení sa len pomer splátka : úrok. Spočiatku tvorí väčšinu čiastky úrok, pomer se posúva v prospech splátok a na konci splatnosti tvorí väčšinu čiastky splátka a zvyšok úrok. Niekedy anuita poskytuje fixnú čiastku každý rok po celú dobu života; v tomto prípade je cena anuity založená na veku držiteľa a počte rokov, po ktoré sú už splátky vyplácané.

Hypotečné úvery

Pojem hypotečný úver predstavuje pohľadávku zaistenú reálnym alebo finančným majetkom. Oproti tomu hypotéka znamená len zaistenie pohľadávky týmto majetkom. V praxi sa však pojem hypotéka používa v zmysle hypotečného úveru. Je to strednedobý až dlhodobý úver, ktorého účelom je investícia do nehnuteľnosti. Hypotéky nepatria obvykle medzi cenné papiere, pokým nie sú uzatvorené ako kontrakt medzi dvoma stranami, napríklad bankou a vlastníkom domu.

Dlhopisy

Dlhopisy sú zo spomínaných cenných papierov najlikvidnejšie a v praxi majú veľký význam, takže sa im budem venovať dôkladnejšie. Spomeniem iba základnú charakteristiku, pretože každý druh dlhopisu má svoje špecifické črty a vlastnosti, ktoré by sa dali nájsť v odbornej literatúre. **Dlhopis** je cenný papier, ktorý vyjadruje záväzok vydavateľa dlhopisu (emitenta) platiť peniaze držiteľovi dlhopisu (veriteľovi) podľa dohodnutých pravidiel v čase vydania dlhopisu. Dlhopis vypláca konkrétnu sumu, jeho **nominálnu hodnotu**, v dobe splatnosti. Okrem toho väčšina dlhopisov vypláca pravidelne **kupónové platby**. Posledná kupónová platba je realizovaná v dátume splatnosti, to znamená, že sa vyplatí nominálna hodnota + kupón.

Cena kupónu býva uvádzaná v percentách z nominálnej hodnoty. Obdobie medzi platbami kupónu musí byť minimálne jeden rok. V realite však veľmi zriedkavo dochádza ku kúpe dlhopisu presne jedno obdobie pred výplatou kupónu. S ohľadom na to, že kupón nabieha každým dňom, je treba túto skutočnosť zohľadniť v cene dlhopisu pomocou **alikvotného úrokového výnosu (AÚV)**. Ak kúpime dlhopis počas obdobia, keď kupón nabieha, AÚV musí byť vyplatený predchádzajúcemu vlastníkovi dlhopisu. Táto platba sa realizuje v čase predaja dlhopisu, nie v dobe výplaty kupónu, a pripočíta sa k nominálnej hodnote. Alikvotný úrokový výnos je určený lineárnou interpoláciou založenou na počte dní:

$$\text{AÚV} = \frac{\text{počet dní od poslednej kupónovej platby}}{\text{počet dní medzi dohodnutými výplatami kupónov}} * \text{cena kupónu.}$$

Hoci dlhopisy ponúkajú pevný výnos, v prípade finančných ťažkostí emitenta môže dôjsť k nezaplateniu. Mieru rizika určujú ratingové organizácie. Hodnotia **bonitu dlhopisu**, tj. schopnosť splácať finančné záväzky. Štátne dlhopisy nie sú ohodnocované, pretože sú považované za bezrizikové. Často sa používa širšia rada kategórií. **Dlhopisy investičného stupňa** sú také, ktorým bolo priradené jedno z najvyšších hodnotení - vysoké alebo stredné. Naopak, **dlhopisom špekulatívneho stupňa** bolo priradené najnižšie hodnotenie. Niekedy sa takto nízko hodnotené cenné papiere nazývajú *prašivé dlhopisy (junk-bonds)*. Určenie ratingovej triedy je založené predovšetkým na finačnej situácii emitenta, ako napríklad pomer zadĺženosti vzhľadom ku kapitálu alebo stav aktív a pasív.

2.2 Výpočet súčasnej hodnoty anuity

Väčšina inštrumentov s pevným výnosom zahŕňa povinnosť vyplácať pravidelne rovnakú čiatku, ako napríklad anuity, štandardné kupónové dlhopisy, hypotéky alebo iné pôžičky. Ukážeme si niektoré základné vzorce na výpočet súčasnej hodnoty daného konštantného peňažného toku a ich použitie.

Ako prvú spomenieme **perpetuitu (večnú anuitu)**, ktorá vypláca fixnú sumu doživotne. Takéto anuity sú pomerne zriedkavé. Súčasná hodnota perpetuity sa dá jednoducho odvodiť. Budeme predpokladať, že A je čiastka vyplácaná na konci každého obdobia a r je úroková miera v danom období.

Potom súčasnú hodnotu vyjadríme

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^k}. \tag{2.1}$$

Je vidieť, že výraz vo vnútri sumy reprezentuje geometrickú radu, ktorá sa dá spočítať podľa štandardného vzorca:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^k} = A. \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} - 1 \right) = \frac{A}{r}. \tag{2.2}$$

Vzorec (2.2) je **základný vzorec pre výpočet súčasnej hodnoty perpetuity**, kde A je výška splátky vyplácaná v každom období začínajúca v súčasnosti a r je úroková miera.

Oveľa častejší je však prípad, keď sa peňažný tok skladá z konečného množstva n platieb vo výške A. Súčasná hodnota konečného peňažného toku vzhľadom k úrokovej miere r je

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{(1+r)^k}. \tag{2.3}$$

Ako v prípade (2.1) sčítaním geometrickej rady sa dostaneme k **základnému vzorcu pre výpočet súčasnej hodnoty anuity**, ktorá vypláca pravidelne čiastku A po n období pri úrokovej miere r:

$$P = \frac{A}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]. \tag{2.4}$$

2.3 Dlhopisy

2.3.1 Výnos dlhopisu

Tzv. "spravodlivá" cena obligácie (vnútorná hodnota dlhopisu) je rovná súčasnej hodnote všetkých budúcich peňažných tokov danej obligácie. Diskontný faktor použitý pri výpočte tejto hodnoty by mal vychádzať z tržnej úrokovej miery obdobných investičných príležitostí (rovnakej triedy obligácií). **Výnosnosť do splatnosti** (yield-to-maturity) je vnútorná miera výnosnosti peňažného toku $(-MV, C, C, ..., C + F)$, kde MV je okamžitá tržná hodnota dlhopisu, F nominálna hodnota dlhopisu a C kupón. Hľadám vlastne úrokovú sadzbu, za ktorú by som musela alternatívne uložiť dané peňažné prostriedky na termínovaný účet, aby som mohla realizovať výbery zhodné s príjmami z dlhopisu. Inými slovami, výnosnosť do splatnosti je vlastne vnútorná miera výnosnosti dlhopisu pri súčasnej cene. U nás sú dlhopisy väčšinou obchodovateľné s nominálnou hodnotou 10 000 KČ, ročnými výplatami kupónu a s dobou splatnosti do 10 rokov.

Budem predpokladať dlhopis s nominálnou hodnotou F, ktorý vypláca m-kupónov ročne s hodnotou C/m a n je zostávajúci počet výplatných období. Kupónová platba za rok je teda C. Nech P je súčasná hodnota dlhopisu. Potom výnosnosť do splatnosti λ je hodnota, ktorá spĺňa vzťah

$$P = \frac{F}{[1 + (\lambda/m)]^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{C/m}{[1 + (\lambda/m)]^n}. \tag{2.5}$$

Hodnota λ je daná úrokovou sadzbou, kedy je úrok pripisovaný m-krát ročne. Je vidieť, že prvý výraz vo vzorci je súčasná hodnota nominálnej hodnoty platby a k-ty člen sumy znamená súčasnú hodnotu k-teho vyplácaného kupónu vo výške C/m. Súčet týchto všetkých súčasných hodnôt udáva cenu dlhopisu. Sumu v (2.5) môžem nahradiť vzorcom používaným pri anuitách, pretože táto suma vyjadruje súčasnú hodnotu rovnú kupónovým platbám C/m:

$$P = \frac{F}{[1 + (\lambda/m)]^n} + \frac{C}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{[1 + (\lambda/m)]^n}\right], \tag{2.6}$$

kde F značí nominálnu hodnotu dlhopisu, C je ročná kupónová platba a m je počet kupónových platieb za rok.

Aby som stanovila výnos, musím riešiť rovnicu (2.6) s neznámou λ. Podobne ako pri iných výpočtoch vnútornej miery výnosnosti, používa sa iteratívny postup ľahko realizovateľný pomocou počítača. Vzorec (2.6) však predpokladá presný počet zostávajúcich kupónových platieb do dátumu splatnosti, preto je nutná úprava o počet dní medzi dátumami kupónových platieb.

Príklad: 8% dlhopis s dobou do splatnosti 18 rokov má výnos 9%. Aká je cena dlhopisu?

Riešenie: Cenu dlhopisu P vypočítam dosadením daných hodnôt do rovnice (2.6). Ako nominálnu hodnotu použijem hodnotu vládnych dlhopisov 10 000 KČ:

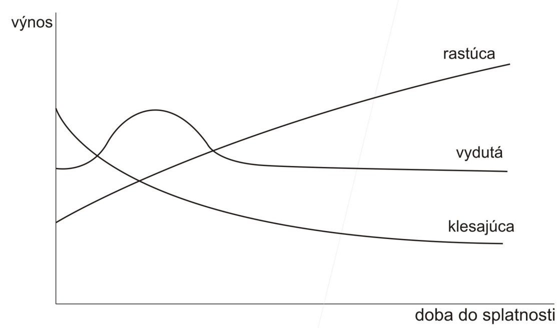
$$P = \frac{10000}{(1 + 0,09)^{18}} + \frac{8}{0,09}\left(1 - \frac{1}{(1 + 0,09)^{18}}\right) = 9117 \text{ KČ}$$

2.3.2 Výnosová krivka

Budeme skúmať vzťah medzi výnosom a splatnosťou dlhopisov, ktoré sú si až na splatnosť podobné. Závislosť medzi mierou výnosu a dobou splatnosti je nazývaná výnosovou krivkou. Pre správnu konštrukciu výnosovej krivky je nutné uvažovať len výnosy dlhopisov z homogénnej skupiny (napr. z pohľadu likvidity alebo rizika).

Najznámejšia je výnosová krivka z výnosnosti do splatnosti (YTM). Graficky znázorňuje závislosť medzi výnosnosťou do splatnosti a dobou splatnosti homogénnej skupiny dlhopisov. Na obr.2.1[2] sú ukázané tri typické priebehy výnosových kriviek.

Pri konštrukcii výnosovej krivky narážame na niektoré problémy. Z defi-



Obr. 2.1: Vzťah medzi výnosom dlhopisu a dobou splatnosti

nície YTM vyplýva predpoklad reinvestovania kupónov za výnos zhodný s YTM. Tržné úrokové miery sa však menia, preto sa tu objavuje tzv. *reinvestičné riziko.* Iba jediný typ dlhopisu nenesie toto riziko - bezkupónový dlhopis. Ďalším problémom je, že výnosová krivka nerozlišuje medzi dlhopismi s malým a vysokým kupónom s rovnakou dobou do splatnosti. Inými slovami, kupónové platby vyplývajúce z dlhopisu nie sú diskontované zodpovedajúcou úrokovou sadzbou. Z toho dôvodu sa konštruuje celá rada iných výnosových kriviek.

[2]str. 144 [1]

2.3.3 Durácia

Kvantifikovať úrokové riziko cenného papiera, tj. cenovú citlivosť na zmenu spotovej výnosovej krivky, je možné len pomocou jediného parametra, ktorým je **durácia**. Durácia zahŕňa vplyv všetkých faktorov ovpyvňujúcich cenovú citlivosť dlhopisu - splatnosť, peňažné toky a výnosnosť do splatnosti. V našom prípade durácia cenného papiera s pevným výnosom je vážený priemer časov, v ktorých sú realizované platby. Váhové faktory predstavujú súčasné hodnoty jednotlivých platieb. Za predpokladu, že diskontované peňažné toky $PV(t_0), PV(t_1), ..., PV(t_n)$ sú prijaté postupne v časoch $t_0, t_1, ..., t_n$, duráciu vyjadrím výrazom

$$D = \frac{PV(t_0)t_0 + PV(t_1)t_1 + ... + PV(t_n)t_n}{PV},$$

pričom výraz v menovateli $PV = \sum_{k=1}^{n} PV(t_k)$.

Keďže durácia predstavuje priemernú splatnosť, je vyjadrená v jednotkách času, obvykle v rokoch. Je tiež zrejmé, že platí vzťah $t_0 \leq D \leq t_n$, tj. hodnota durácie je vždy čas medzi splatnosťou prvého a posledného peňažného toku. Pri určovaní súčasnej hodnoty dlhopisu je prirodzené použiť ako úrokovú mieru výnosnosť dlhopisu. V takomto prípade hovoríme o **Macaulayho durácií**. Budem predpokladať dlhopis realizujúci kupónové platby m-krát ročne s platbami c_k v časoch k a zostávajúcou periódou dĺžky n. Macaulayho durácia je definovaná vzťahom

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} (k/m)c_k / \left[1 + (\lambda/m)\right]^k}{PV},$$

kde

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\left[1 + (\lambda/m)\right]^k}$$

a λ je výnosnosť do splatnosti. V nasledujúcom texte symbolom D budem označovať Macaulayho duráciu. V prípade, že všetky kupónové platby sú rovnaké, pre sumu v čitateli zlomku môžem použiť explicitný vzorec. Dostanem ďalsie možné vyjadrenie durácie pre dlhopis s kupónovými platbami m-krát ročne vo výške c, úrokovou mierou y a zostávajúcim počtom období n:

$$D = \frac{1+y}{my} - \frac{1 + y + n(c-y)}{mc\left[(1+y)^n - 1\right] + my}.$$

Durácia a citlivosť(senzitivita)

Ako som už spomínala, durácia vyjadruje citlivosť dlhového nástroja na zmenu úrokových mier a je úmerná prvej derivácií ceny dlhopisu podľa výnosnosti do splatnosti:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dPV_k}{d\lambda} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k/m)PV_k}{1+(\lambda/m)} = -\frac{1}{1+(\lambda/m)} DP \equiv -D_M P, \quad (2.7)$$

pričom som použila skutočnosť, že $P = \sum_{k=1}^{n} PV_k$. D_M sa nazýva *modifikovaná durácia*. Hodnoty Macaulayho a modifikovanej durácie sa pre veľké hodnoty m alebo malé hodnoty λ líšia iba nepatrne, preto sa v praxi niekedy medzi nimi nerobí rozdiel; platí $D_M \approx D$. Rovnica (2.7) je dôležitý vzťah pre výpočet citlivosti ceny dlhopisu. Použitím aproximácie $dP/d\lambda \approx \Delta P/\Delta\lambda$ (2.7) prepíšem do tvaru

$$\Delta P = -D_M P \Delta\lambda. \quad (2.8)$$

Tento vzťah udáva zmenu reálnej ceny dlhopisu pri zmene úrokových mier.

Durácia portfólia

Duráciu jedného cenného papiera už určiť vieme - teraz budeme predpokladať, že sme vlastníkom niekoľkých dlhopisov. Sú nám vyplácané kupóny z jednotlivých dlhopisov, výšky platieb sa však môžu líšiť kvôli rôznym dátumom splatností. Pozrieme sa, čo môžeme povedať o takomto portfóliu. Najprv použijeme predpoklad, že úrokové miery všetkých inštrumentov sú rovnaké. V takom prípade je durácia portfólia vážená suma durácií jednotlivých dlhopisov s váhovými koeficientmi určenými úmerne vzhľadom k cenám dlhopisov. Nech je dané portfólio K akcií so súčasnými hodnotami PV_k a duráciami $D_k, k = 0, ..., K$.Potom platí:

$$D_{portflio} = \frac{D_1 PV_1 + D_2 PV_2 + ... + D_K PV_K}{PV_1 + PV_2 + ... PV_K}.$$

Overíme tento vzťah pre portfólio zložené z dvoch inštrumentov A a B, teda jeho hodnota je $P = P^A + P^B$. Pre durácie platí

$$D^A = \frac{\sum_{k=0}^{n} t_k PV_k^A}{P^A}$$

$$D^B = \frac{\sum_{k=0}^{n} t_k PV_{k^B}}{P^B}.$$

Sčítaním týchto dvoch rovností dostávame

$$P^A D^A + P^B D^B = \sum_{k=0}^{n} t_k (PV_k^A + PV_k^B),$$

čo je po vydelení P durácia portfólia:

$$\frac{P^A D^A}{P} + \frac{P^B D^B}{P}.$$

Takisto by sme to mohli overiť pre portfólio skladajúce sa z viacerých dlhopisov.

Budeme uvažovať ešte prípad, že úrokové miery jednotlivých dlhopisov sa nerovnajú. Vtedy sa určí jednotná úroková miera, napríklad formou priemeru, a súčasné hodnoty PV sa prepočítajú pomocou nej (v takom prípade sa súčasné hodnoty dlhopisov nemusia rovnať ich cenám). Zvyšná časť výpočtu je rovnaká ako sme ukázali vyššie.

2.3.4 Konvexita

Modifikovaná durácia meria sklon cenovej krivky v danom bode. Cenová krivka však nie je lineárna, preto zavedieme ďalší pojem, ktorý graficky meria relatívnu zakrivenosť cenovej krivky dlhopisu - **konvexitu**. Konvexita je druhou deriváciou ceny dlhopisu podľa výnosnosti do splatnosti. Spresňuje cenovú zmenu dlhopisu na zmenu úrokových sadzieb, meria odchýlku, ktorá vyplýva z nelinearity cenovej krivky. Konvexita C je definovaná vzťahom

$$C = \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\lambda^2}. \tag{2.9}$$

Keďže P je súčet všetkých peňažných tokov plynúcich z obligácie, (2.9) môžeme prepísať do tvaru

$$C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2 PV_k}{d\lambda^2}.$$

2.3.5 Imunizácia

Imunizácia je proces vytvárania takého portfólia, ktoré bude odolné voči zmenám úrokovej miery. Je to jedna z najrozšírenejších metód formovania portfólia. Využívajú ju hlavne finančné inštitúcie ako penziové fondy alebo poisťovacie spoločnosti, ktoré majú budúce finančné záväzky. Zaobstarajú si portfólio, ktoré použijú na splácanie záväzkov v dobe ich vzniku. Portfólio je imunizované, ak sa jeho súčasná hodnota rovná peňažnému toku záväzkov a durácie sa zhodujú. To znamená, že nové portfólio tvorené z aktív s pevným výnosom a peňažného toku platieb záväzku má nulovú strednú hodnotu a nulovú duráciu.

Imunizácia poskytuje ochranu proti zmenám výnosov. Ak sa zmení výnos portfólia, nová hodnota portfólia by mala stále pokrývať budúce záväzky. Nové portfólio však už nebude imunizované voči ďalším zmenám úrokovej miery, preto je potrebné z času na čas reimunizácia.

V praxi imunizáciu sťažuje niekoľko vecí. Metóda tvorby portfólia predpokladá, že výnosy sa rovnajú, čo v skutočnosti nie je bežné. Zvyčajne dlhodobé dlhopisy poskytujú väščí výnos ako krátkodobé. Okrem toho, ak sa výnosy dlhopisov zmenia, je nepravdepodobné, že všetky sa zmenia rovnako, preto reimunizácia bude obtiažnejšia.

Kapitola 3

Analýza portfólia

V prvej časti práce sme sa zaoberali hlavne charakteristikou jednotlivých cenných papierov, ukázali sme si, ako sa zistí výnos dlhopisu, jeho durácia a podobne. V tejto kapitole budeme posudzovať dôvody pre spojenie inštrumentov peňažného trhu do portfólia. Pri kúpe cenného papiera vždy poznáme cenu, ktorú zaň musíme zaplatiť, ale výnos zostáva neistý. Obmedzíme sa len na investície s jednou periódou, to znamená, že na začiatku investujeme určitú čiastku a na konci periódy je realizovaná výplata. Ako príklad môžeme uviesť bezkupónový dlhopis držaný do splatnosti. Hoci veľa bežných investícií tento predpoklad nespĺňa, tiež sú pre zjednodušenie analyzované ako jedno-periodické. Na zostavenie portfólia pri neistom výnose sa používa viac metód. Budeme študovať základnú z nich, ktoru je *analýza strednej hodnoty a rozptylu portfólia.* Táto metóda využíva teóriu pravdepodobnosti a vedie k vhodnému matematickému vyjadreniu.

3.1 Návratnosť aktív a krátky predaj

Aktívum je inštrument, s ktorým sa môže obchodovať (t.j. kupovať a predávať). Budeme predpokladať, že sme vlastníkom nejakého aktíva. Nech X_0 je suma, ktorú sme do neho investovali a X_1 suma, ktorú sme zaň získali. Potom R značí *celkový výnos* a platí vzťah

$$R = \frac{X_1}{X_0}. \tag{3.1}$$

Ďalšou veličinou je *výnosová miera* r, pre ktorú platí

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}. \tag{3.2}$$

Pre celkový výnos aj výnosovú mieru sa niekedy skrátene používa výraz výnos, z kontextu by však malo byť jasné, o ktorú veličinu sa jedná. Z (3.1) a (3.2) vyplýva, že

$$R = 1 + r,$$

alebo inak prepísané

$$X_1 = (1 + r)X_0.$$

Niekedy je možné predať aktívum, aj keď ho nevlastníme. Hovorí sa tomu **krátky predaj** (*short selling*). Je to burzová transakcia založená na tom, že inštrumenty sa nakupujú za nižšiu tržnú cenu a predávajú za vyššiu. Investor si najprv požičia cenné papiere od ich vlastníka (brokerskej firmy). Následne aktívum predá a v budúcnosti splatí poskytnutý úver v cenných papieroch. Špekuluje pritom, že kurz pri predaji aktíva bude vysoký a pri jeho spätnej kúpe nízky. Brokerské firmy zapožičiavajú často cenné papiere bez úrokov, pretože majú k dispozícii peňažné príjmy klienta z krátkych predajov. Ak sú počas pôžičky akcie vyplácané dividendy, potom investor musí dividendy uhradiť. Na krátky predaj sa vzťahujú podobné marže ako na nákup na úver. Je však považovaný za dosť riskantný kvôli možnej veľkej strate, preto je medzi niektorými finančnými inštitúciami zakázaný.

Teraz určíme výnos spojený s krátkym predajom. Najprv prijmeme za aktívum sumu X_0 a v budúcnosti ho odkúpime naspäť za X_1, takže výdaj je $-X_0$ a príjem $-X_1$:

$$R = \frac{-X_1}{-X_0} = \frac{X_1}{X_0}.$$

Vidíme, že sme dostali rovnaký vzťah ako pri obyčajnej kúpe a následnom predaji. Takisto platí

$$-X_1 = -X_0 R = -X_1(1 + r).$$

Budeme uvažovať prípad, že máme portfólio zložené z n aktív, ktoré má hodnotu X_0. Ak $X_{0i}, i = 1, 2, ..., n$, reprezentuje i-te aktívum, potom $\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0$. Ak je povolený krátky predaj, niektoré X_{0i} môžu byť záporné. Nech $w_i, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, je váha i-teho aktíva v portfóliu:

$$X_{0i} = w_i X_0.$$

Nech ďalej R_i značí výnos i-teho aktíva. Potom *výnos portfólia* na konci jeho držania je

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i.$$

Podobne pre výnosovú mieru dostaneme

$$r = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i.$$

Celkový výnos aj miera výnosnosti portfólia sa rovná váženej sume príslušných výnosov jednotlivých aktív, pričom váhy vyjadrujú zastúpenie aktív v portfóliu.

3.2 Náhodné veličiny

Ako už bolo povedané na začiatku, výnos aktív pri kúpe nepoznáme. Môžeme ho len odhadnúť pomocou pravdepodobnostných charakteristík. Krátko sa budeme venovať základom teórie pravdepodobnosti, pretože ju budeme potrebovať v ďalšom texte (zdroj [6]).

Definícia 1 *Majme pravdepodobnostný priestor* (Ω, A, P)*. Reálna funkcia* X *definovaná na* Ω*, pre ktorú platí*

$$x \in R \Rightarrow [X < x] \in A, \tag{3.3}$$

sa nazýva ***náhodná veličina****. Reálna funkcia spĺňajúca 3.3 sa nazýva merateľná.*

Definícia 2 ***Strednou hodnotou*** *náhodnej veličiny* X *rozumieme číslo*

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

(pokiaľ existuje).

Definícia 3 *Nech* X *je náhodná veličina s diskrétnym rozdelením, ktoré nadobúda hodnoty* $x_1, x_2, \ldots$*Potom*

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P[x = X_i]$$

pokiaľ rada konverguje absolútne.

Definícia 4 *Nech náhodná veličina X má spojité rozdelenie s hustotou $f_x(x)$. Pokiaľ je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_x(x)dx < \infty,$$

potom

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx.$$

Poznámka 1 *Stredná hodnota má nasledujúce vlastnosti, ktoré využijeme neskôr:*

1. *Ak je Y známa hodnota (nie náhodná veličina), potom $E(Y) = Y$.*
2. *Ak Y a Z sú náhodné veličiny, potom $E(\alpha Y + \beta Z) = \alpha E(Y) + \beta E(Z)$ pre $\forall \alpha, \beta \in R$.*
3. *Ak Y je náhodná veličina, pre ktorú platí $Y \geq 0$, potom $E(Y) \geq 0$.*

Ďalšou používanou charakteristikou rozdelenia náhodnej veličiny je rozptyl. Popisuje veľkosť kolísania náhodnej veličiny okolo strednej hodnoty.

Definícia 5 *Nech X je náhodná veličina s konečnou strednou hodnotou. Potom výraz*

$$varX = E(X - EX)^2,$$

pokiaľ stredná hodnota na pravej strane existuje, sa nazýva ***rozptyl*** *náhodnej veličiny X. Pre rozptyl sa používa aj značenie $\sigma_x^2 = varX$. Odmocnina z rozptylu $\sigma_x = \sqrt{varX}$ sa nazýva* ***smerodatná odchýlka*** *náhodnej veličiny.*

Poznámka 2 *Rozptyl môžeme prepísať do tvaru*

$$\begin{aligned} var\,(X) &= E(X - EX)^2 \\ &= EX^2 - 2XE(X) + (EX)^2 \\ &= EX^2 - (EX)^2. \end{aligned}$$

Definícia 6 *Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ sú* ***nezávislé****, ak pre všetky $x_1, x_2, \ldots$ sú nezávislé náhodné javy $[X_1 < x_1], [X_2 < x_2], \ldots$ Ak majú náhodné veličiny X a Y diskrétne rozdelenie, potom je definícia nezávislosti totožná s požiadavkou*

$$P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i]P[Y = y_j]$$

pre všetky i a j.

Definícia 7 *Nech pre náhodné veličiny X, Y existujú rozptyly. Výraz*

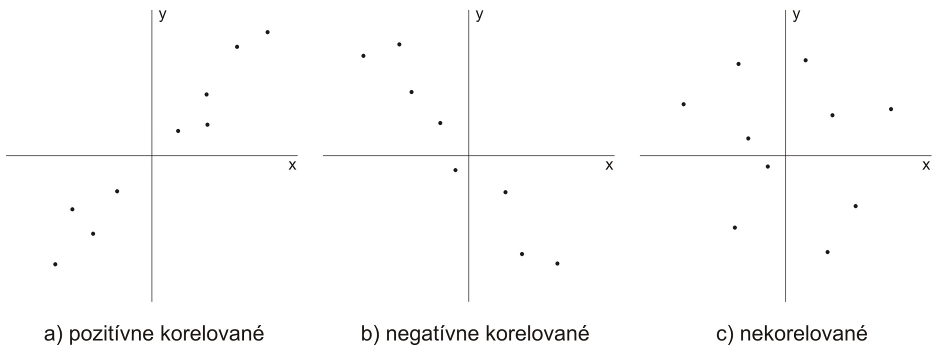
$$\sigma_{XY} = cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY)$$

sa nazýva ***kovariancia*** *náhodných veličín X, Y.*

Zrejme platí cov(X,Y)=cov(Y,X) a cov(X,X)=var(X). Analogicky ako pre rozptyl budeme vo výpočtoch používať rozpísaný tvar

$$cov(X, Y) = EXY - (EX)(EY).$$

Ak pre veličiny X, Y platí $\sigma_{XY} = 0$, nazývajú sa *nekorelované*. Platí to vtedy, keď X a Y sú nezávislé. V prípade $\sigma_{XY} > 0$, x a y sú *pozitívne korelované*, $\sigma_{XY} < 0$ *negatívne korelované*. Znázorňuje to nasledujúci graf:



Obr. 3.1: Korelácia dat

Pre kovarianciu dvoch náhodných veličín x, y platí

$$|\sigma_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

Ak $\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$, kovariancia nadobúda najväčšiu možnú hodnotu a veličiny sú *dokonale korelované*. Naopak, ak $\sigma_{XY} = -\sigma_X \sigma_Y$, hovoríme o *dokonale negatívne korelovaných* veličinách. Ďalším užitočným ukazateľom vzťahu dvoch náhodných veličín je *korelačný koeficient*, ktorý definujeme ako

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Z vlastností kovariancie vyplýva, že $|\rho_{XY}| \leq 1$.

Poznámka 3 *Pre náhodné veličiny X, Y, ktorých rozptyly existujú, platí:*

$$\begin{aligned} var(X + Y) &= E(X - EX + Y - EY)^2) \\ &= E((X - EX)^2 + 2E(X - EX)(Y - EY) + E(Y - EY)^2) \\ &= \sigma_X^2 + 2\sigma_{XY} + \sigma_Y^2. \end{aligned}$$

3.3 Očakávaný výnos a riziko portfólia

Podobne ako pri jednotlivých finančných nástrojoch, aj pri celkovom portfóliu sa investor rozhoduje na základe očakávaných výnosov a rizika. V ďalšom texte si ukážeme, ako sa výnos a riziko portfólia meria.

3.3.1 Očakávaný výnos portfólia

Nech je dané portfólio zložené z n aktív s výnosmi $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ a očakávanými výnosmi $E(\rho_1) = r_1, E(\rho_2) = r_2, ..., E(\rho_n) = r_n$. Nech $w_i, i = 1, 2, ..., n$ sú váhy jednotlivých aktív zastúpených v portfóliu. S využitím vlastnosti linearity strednej hodnoty dostaneme očakávaný výnos portfólia

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 + ... + w_n r_n.$$

3.3.2 Riziko portfólia

Riziko portfólia nie je určené len váženým priemerom rizík jednotlivých aktív v portfóliu, ale je tiež ovplyvňované vzájomným vzťahom ich výnosov. Označíme si σ_p^2 rozptyl potfólia, σ_i^2 rozptyl i-teho inštrumentu a σ_{ij} kovarianciu výnosu medzi aktívami i a j. Potom **rozpyl výnosu portfólia** vypočítame:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= E[(\rho_p - r_p)^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i \rho i - \sum_{i=1}^{n} w_i r_i)^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i(\rho_i - r_i)(\sum_{j=1}^{n} w_j(\rho_j - r_j))] \\
&= E[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (\rho_i - r_i)(\rho_j - r_j)] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}.
\end{aligned}$$

K výpočtu rizika portfólia nám stačí poznať váhy jednotlivých aktív a kovariancie dvojíc aktív. Kovariancia vyjadruje absolútne merítko smeru vzájomného pohybu investícií. Môže nadobúdať:

- kladnú hodnotu - výnos z oboch aktív sa pohybuje rovnakým smerom

- zápornú hodnotu - vyjadruje inverzný vzťah medzi výnosmi z týchto aktív
- nulovú hodnotu - výnosy sa pohybujú nezávisle.

3.3.3 Diverzifikácia

Diverzifikácia je proces kombinovania inštrumentov v portfóliu tak, aby bolo obmedzené celkové riziko bez zníženia výnosu. Ako mieru rizika budeme používať smerodatnú odchýlku, pretože sa udáva v rovnakých jednotkách ako výnos. Podľa [1] budeme skúmať tri prípady:

1. výnosy aktív sú dokonale kladne korelované
2. výnosy aktív sú dokonale záporne korelované
3. výnosy aktív sú nekorelované

Diverzifikácia, ak sú výnosy dokonale pozitívne korelované

Máme dané portfólio zložené z dvoch aktív s očakávanými výnosmi r_1, r_2 a váhami w_1, w_2. Korelačný koeficient je $\rho_{12} = 1$, oba výnosy aktív sa teda pohybujú rovnakým smerom. Očakávaný výnos portfólia je

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2. \tag{3.4}$$

Rozptyl portfólia je daný vzorcom

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 = (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2)^2, \tag{3.5}$$

odtiaľ smerodatná odchýlka

$$\sigma_p = w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2. \tag{3.6}$$

Prípustná množina portfólií pri ρ_{12} je lineárna. Z toho vyplýva, že diverzifikácia v tomto prípade nie je výhodná. Všetky portfólia totiž majú takú konfiguráciu rizika a výnosu, ktoré sú lineárnou kombináciou rizík a výnosov aktív x_1 a x_2. Nie je možné obmedziť riziko bez toho, aby sme prišli o časť výnosu.

Diverzifikácia, ak sú výnosy dokonale záporne korelované

Ako v predchádzajúcom prípade, očakávaný výnos portfólia obsahujúceho dve aktíva zostáva rovnaký, zmení sa vzťah pre rozptyl:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 - 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2 = (w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2,$$

pre smerodatnú odchýlku platí

$$\sigma_p = w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2.$$

Korelačný koeficient je $\rho_{12} = -1$, výnosy oboch aktív sa pohybujú opačným smerom. Portfólio v tomto prípade je celkom bezrizikové, ak spĺňa dve podmienky:

1. Výnosy oboch aktív musia byť dokonale negatívne korelované
2. Relatívne podiely aktív v portfóliu musia vyhovovať rovnici
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \tag{3.7}$$
Ak položíme $w_2 = 1 - w_1$, z (3.7) si vyjadríme
$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2},\ w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Výhody diverzifikácie pri zápornej korelácii aktív sú zrejmé.

Diverzifikácia, ak sú výnosy nekorelované

Posledný prípad bol extrémnym príkladom výhod diverzifikácie, ale v praxi je dosť nepravdepodobný. Výhody sa však prejavia, akonáhle sú výnosy aktív menej než dokonale pozitívne korelované, dokonca aj pri úplne nekorelovaných výnosoch. Teraz budeme uvažovať portfólio zložené z n aktív. Smerodatná odchýlka v tomto prípade je

$$\sigma_p = \sqrt{(w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + ... + w_n^2\sigma_n^2)}. \tag{3.8}$$

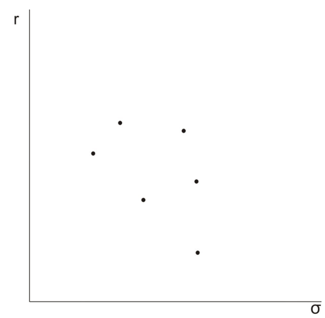
Ak majú všetky zložky portfólia rovnakú váhu (tj. $w_i = \frac{1}{n}$) a pre jednoduchosť rovnaký rozptyl (tj. $\sigma_i^2 = \sigma^2$), (3.8) sa upraví na

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} + ... + \frac{\sigma^2}{n^2}} = \sqrt{n\frac{\sigma^2}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

S rastúcim n smerodatná odchýlka (riziko portfólia) klesá k nule. Tento výsledok je dôsledok združovania rizík; keď sa združí viac nekorelovaných rizík, celkové riziko portfólia sa znižuje.

3.3.4 Grafické znázornenie očakávaného výnosu a rizika portfólia

Aby sme mali jasnejšiu predstavu o vytváraní portfólia, ukážeme si jeho grafické znázornenie. Očakávané výnosy aktív môžu byť reprezentované dvojrozmerným grafom, pričom vertikálna os je použitá pre očakávaný výnos aktíva r a horizontálna os pre smerodatnú odchýlku σ. Aktíva sú zakreslené ako body grafu s danými hodnotami r a σ:

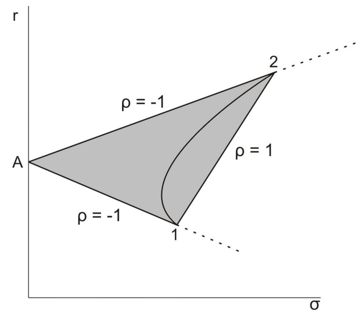


Obr. 3.2: r - σ diagram

Nech sú dané dve aktíva reprezentované týmto grafom. Tieto aktíva použitím rôznych váh formujú portfólio, ktoré môžeme brať ako nové aktívum. Strednú hodnotu a smerodatnú odchýlku nového aktíva vypočítame spôsobom odvodeným v 3.3. Keďže kovariancia v grafe nie je znázornená, existuje viac možností pre zakreslenie nového aktíva závisiacich práve na kovariancii dvoch pôvodných aktív.

Budeme sa zaoberať možnosťami vytvárania portfólia z dvoch aktív uvedených na obr.3.3[1]. Zastúpenie aktív v portfóliu je určené pomocou premennej α, kde $w_1 = 1 - \alpha$ a $w_2 = \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Podľa toho, aké α nadobúda hodnoty, portfólio sa môže skladať len z prvého aktíva, rôzneho pomeru oboch aktív alebo len druhého aktíva. Ak $\alpha \notin (0, 1)$, jedna váha (w_1 alebo w_2) je záporná a teda sa jedná o krátky predaj jedného z aktív.

[1]str. 153 [4]



Obr. 3.3: Kombinácia dvoch aktív

Ako sa α mení, nové portfólio sa pohybuje po krivke 12. Jej presný tvar je daný kovarianciou dvoch aktív. Plná čiara zodpovedá kladnej kombinácií dvoch aktív pre rôzne kovariancie, prerušovaná čiara krátkemu predaju jedného z aktív. Dokonca platí, že plná časť krivky musí ležať vo vnútri trojuholníka tvoreného bodmi 1,2 a bodom A ležiacim na vertikálnej osi. K lepšiemu porozumeniu tvaru krivky slúži nasledujúca veta:

Veta o grafickom znázornení portfólia: *Krivka tvorená nezápornými kombináciami dvoch aktív v $r-\sigma$ diagrame leží vo vnútri trojuholníkovej plochy ohraničenej pôvodnými aktívami a bodom na vertikálnej osi umiestneného vo vzdialenosti $A = (r_1\sigma_2 + r_2\sigma_1)/(\sigma_1 + \sigma_2)$.*
Dôkaz: Výnos portfólia definovaný pomocou α je

$$\rho(\alpha) = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2$$

a očakávaná hodnota výnosu

$$r(\alpha) = (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2.$$

Pre smerodatnú odchýlku portfólia platí vzťah

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} + \alpha^2\sigma_2^2}. \tag{3.9}$$

Použitím vzorca pre korelačný koeficient $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ prepíšem (3.9) do tvaru

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2}. \tag{3.10}$$

Výraz (3.10) nám na prvý pohľad toho veľa nepovie, takže do neho dosadím krajné hodnoty, ktoré môže ρ nadobúdať. Pre $\rho = 1$ dostanem horné ohraničenie

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha)^* &= \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\
&= \sqrt{[(1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2]^2} \\
&= (1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2
\end{aligned}$$

a pre $\rho = -1$ dolné ohraničenie

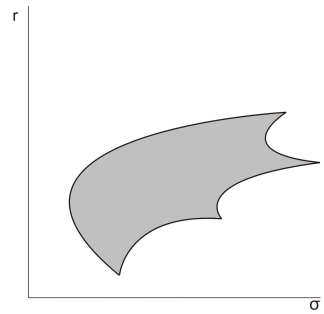
$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha)_* &= \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\
&= \sqrt{[(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2]^2} \\
&= |(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2| \,.
\end{aligned}$$

Je zrejmé, že výraz pre hornú hranicu, ako aj vzťah pre očakávanú hodnotu je pre α lineárny. Z toho vyplýva, že ako sa α mení, aj štandardná odchýlka a očakávaná hodnota sa menia lineárne v závislosti na α. Graficky sa teda ich hodnota pohybuje po úsečke tvorenej bodmi 1 a 2.

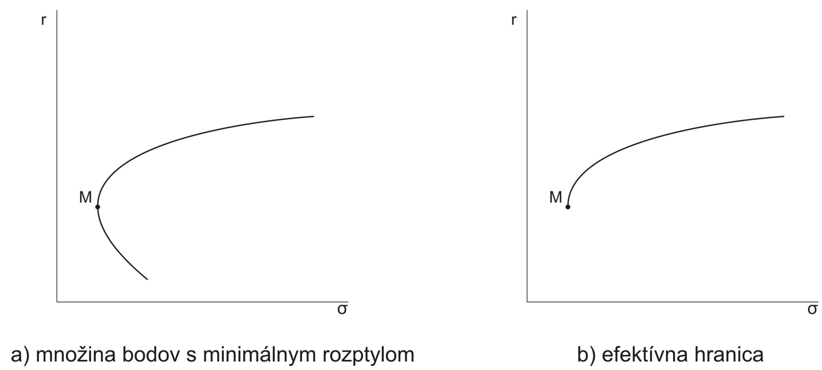
Výraz pre dolnú hranicu je tiež takmer lineárny, s výnimkou znamienka absolútnej hodnoty. Pre malé α je výraz vo vnútri absolútnej hodnoty kladný, takže ho môžem prepísať na $(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2$. Musí platiť $\alpha < \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$. Ak je $\alpha > \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$, výraz v absolútnej hodnote je $\alpha\sigma_2 - (1-\alpha)\sigma_1$. Zmena znamienka nastáva v bode A definovanom $\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$. Graficky je teda dolná hranica znázornená úsečkami A1 a A2. Odtiaľ je už zrejmé, že krivka vytvorená kombináciou dvoch aktív musí ležať vo vnútri takto určenej trojuholníkovej plochy a pre priemernú hodnotu korelačného koeficientu má tvar ako na obr.3.3.

3.4 Prípustná množina

Namiesto dvoch budeme teraz analyzovať n aktív a bude nás zaujímať vytvorenie portfólia z týchto aktív. Portfólio sa môže skladať z jedného aktíva, dvoch aktív alebo ľubovoľného počtu aktív až po n. Vznikne pridelením váhových koeficientov $w_i, \sum_{i=1}^{n} w_i$ všetkým aktívam. Nebudeme brať do úvahy portfólia, nad ktorými dominujú iné portfólia *(neefektívne portfólia)*. Jedno portfólio dominuje nad druhým vtedy, ak má nižšiu smerodatnú odchýlku pri rovnakom výnose alebo vyšší výnos pri rovnakej smerodatnej odchýlke. *Prípustná množina portfólií* vytvorených z n aktív je znázornená na obr.3.4, je zľava konvexná a má spravidla "dáždnikový tvar".



Obr. 3.4: Prípustná množina



Obr. 3.5: Špeciálne množiny

Ľavá hranica prípustnej množiny (obr.3.5a) sa označuje ako *prípustná množina portfólií s minimálnym rozptylom (smerodatnou odchýlkou)*, pretože pre každú hodnotu očakávaného výnosu platí, že bod s najmenšou smerodatnou odchýlkou leží práve v tejto množine. Bod M sa nazýva bod s minimálnou smerodatnou odchýlkou. Efektívna hranica (obr.3.5b) je tá časť prípustnej množiny, ktorá nezahŕňa neefektívne portfólia. Budeme si preto všímať len efektívnu množinu a v ďalšej časti si ukážeme, ako vypočítať body, ktorými je tvorená.

3.5 Markowitzov model

Jedna metóda výpočtu efektívnej množiny je známa ako Markowitzova metóda (podľa Markowitza[2]). Markowitz ukázal, že riziko investovania do aké-

[2]Harry Markowitz, 1959

hokoľvek aktíva nie je závislé na iných aktívach, ale na novú investíciu sa musí pozerať v tom zmysle, ako prispieva k zmene rizika a výnosu celkového portfólia.

Model je založený na nasledujúcich predpokladoch:

- investori sú rizikovo averzní
- všetci investori investujú na rovnako dlhé obdobie - jednu periódu
- investori vytvárajú svoje rozhodnutia na základe očakávaného výnosu a rizika portfólia
- investičné rozhodovanie je realizované na základe očakávaného úžitku
- neexistujú žiadne transakčné náklady a dane
- všetky aktíva sú obchodovateľné
- žiadny investor nemôže podstatne ovplyvniť výnosy aktív na trhu.

Opäť budeme predpokladať n aktív. Očakávané výnosy aktív sú $\mathbf{r} = (r_1, r_2, ..., r_n)$ a kovariancie medzi výnosmi $\mathbf{V} = (\sigma_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$. Váhy jednotlivých aktív v portfóliu označím $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n), \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Keďže krátky predaj je povolený, niektoré váhové koeficienty môžu byť záporné. Pre ľubovoľný zafixovaný očakávaný výnos μ budeme hľadať portfólio s minimálnou smerodatnou odchýlkou a týmto očakávaným výnosom. Matematicky sformulujeme tento problém (viď. [2]):

$$\text{minimalizuj} \quad \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\ \mathbf{w} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \text{s podmienkami} \quad \mathbf{r}^T\mathbf{w} &= \mu & (3.12)\\ \mathbf{1}^T\mathbf{w} &= 1. & (3.13) \end{aligned}$$

3.5.1 Riešenie Markowitzovho problému

Markowitzov problém sa rieši pomocou Lagrangeových multiplikátorov λ_1 a λ_2. Lagrangeova funkcia vyzerá nasledovne:

$$L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\ \mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{r}^T\mathbf{w} - \mu) - \lambda_2(\mathbf{1}^T\mathbf{w} - 1).$$

Zderivujeme ju podľa každej premennej w_i a výsledok položíme rovný 0. Pre lepšie pochopenie si najprv ukážeme diferencovanie pre dve aktíva. Lagrangeova funkcia má tvar

$$L = \frac{1}{2}(w_1^2\sigma_1^2+w_1w_2\sigma_{12}+w_2w_1\sigma_{21}+w_2^2\sigma_2^2)-\lambda_1(r_1w_1+r_2w_2-\mu)-\lambda_2(w_1+w_2-1).$$

Derivovaním dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_1} &= \frac{1}{2}(2\sigma_1^2 + \sigma_{12}w_2 + \sigma_{21}w_2) - \lambda_1 r_1 - \lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} &= \frac{1}{2}(\sigma_{12}w_1 + \sigma_{21}w_1 + 2\sigma_2^2 w_2) - \lambda_1 r_2 - \lambda_2. \end{aligned}$$

Použitím rovnosti $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ a položením týchto derivácií rovných nule

$$\sigma_1^2 w_1 + \sigma_{12}w_2 - \lambda_1 r_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\sigma_{21}w_1 + \sigma_2^2 w_2 - \lambda_1 r_2 - \lambda_2 = 0.$$

Máme dve rovnice, okrem toho ešte máme dve podmienky (3.12) a (3.13), takže budeme riešiť 4 rovnice so 4 neznámymi w_1, w_2, λ_1 a λ_2. Zovšeobecnenie riešenia pre n aktív je nasledovné:

Pre efektívne portfólio zložené z n aktív s očakávaným výnosom μ (s povoleným krátkym predajom) váhy $w_i, i = 1, 2, ..., n$ a Lagrangeove multiplikátory λ_1, λ_2 spĺňajú

$$\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda_1\mathbf{r} - \lambda_2\mathbf{1} = 0 \tag{3.14}$$

$$\mathbf{r}^T\mathbf{w} = \mu \tag{3.15}$$

$$\mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1. \tag{3.16}$$

Dostali sme $n+2$ lineárnych rovníc s $n+2$ neznámymi. Vyriešením týchto rovníc dostaneme váhové koeficienty w_i, ktoré určia zastúpenie jednotlivých aktív v portfóliu s očakávanou hodnotou výnosu μ. Podľa [5] sa v praxi používa zjednodušená verzia Markowitzovho modelu, ktorá sa nazýva jednoduchý indexný model[3].

Príklad: Sú dané tri aktíva s výnosmi ρ_1, ρ_2 a ρ_3. Kovariančná matica a očakávané hodnoty výnosov sú

[3]vytvoril ho W.Sharpe v roku 1963

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ a } r = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 0,8 \end{bmatrix}.$$

Nájdite portfólio s minimálnym rozptylom.

Riešenie: Príklad budem riešiť Markowitzovou metódou. Najprv si zostavím rovnice podľa 3.14 a podmienok 3.15, 3.16:

$$\begin{aligned} 2w_1 + w_2 - 0,4\lambda - \mu &= 0 \\ w_1 + 2w_2 + w_3 - 0,8\lambda - \mu &= 0 \\ w_2 + 2w_3 - 0,8\lambda - \mu &= 0 \\ 0,4w_1 + 0,8w_2 + 0,8w_3 &= r \\ w_1 + w_2 + w_3 &= 1. \end{aligned}$$

Dostala som sústavu piatich lineárnych rovníc s piatimi neznámymi w_1, w_2, w_3, λ a μ. Zostavím z nich maticu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -0,8 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -0,4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -0,8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0,4 & 0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 5r \end{array}\right).$$

Úpravami dostanem tvar

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -0,8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -0,8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5r-5 \end{array}\right).$$

Je zrejmé, že $2w_3 = 1$, teda $w_3 = \frac{1}{2}$. Zo symetrie $w_1 = w_3$ dostávam riešenie

$$\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$

3.5.2 Nezáporné obmedzenia

Doteraz sme uvažovali, že krátky predaj aktív je povolený. Ak by povolený nebol, všetky váhové koeficienty w_i budú nezáporné. Vedie to k alternatívnemu vyjadreniu Markowitzovho problému:

$$\text{minimalizuj} \qquad \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{vzhľadom k} & \mathbf{r}^T\mathbf{w} & = & \mu \\ & \mathbf{1}^T\mathbf{w} & = & 1 \\ w_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n. & & & \end{array}$$

Jedná sa o problém kvadratického programovania, tj. nájdenie extrému kvadratickej formy pri lineárnych obmedzeniach a podmienkach nezápornosti.

3.6 Veta o dvoch fondoch

Veta o dvoch fondoch *Ak máme dve portfólia $\boldsymbol{w}_a, \boldsymbol{w}_b$ s minimálnym rozptylom a očakávanými výnosmi r_a a r_b, $r_a \neq r_b$, potom je možné ich kombináciou vytvoriť nové portfólio $\boldsymbol{w}_c$ s minimálnym rozptylom tvaru*

$$\boldsymbol{w}_c = \alpha \boldsymbol{w}_a + (1 - \alpha)\boldsymbol{w}_b$$

pre nejaké α. Každé portfólio tvaru $\boldsymbol{w}_c = \alpha \boldsymbol{w}_a + (1 - \alpha)\boldsymbol{w}_b$ je portfólio s minimálnym rozptylom.

Overím, že to naozaj platí:

- $\alpha\mathbf{w}^1 + (1 - \alpha)\mathbf{w}^2$ je portfólio so súčtom váhových koeficientov rovným 1$\Rightarrow$ je splnený vzťah 3.16
- očakávaná hodnota $\alpha r_a + (1 - \alpha) r_b \Rightarrow$ 3.15
- ľavá strana oboch riešení je rovná 0 $\Rightarrow$ ich kombinácia bude takisto rovná 0

Veta o dvoch fondoch má pre investorov veľký význam. Investori si nemusia kupovať jednotlivé akcie, ale môžu investovať do spoločných fondov. Takisto má využitie aj pri výpočtoch. Na vyriešenie problému Markowitza pre všetky hodnoty μ je nutné nájsť len dve riešenia a kombinovať ich.

Zjednodušením je určiť si hodnoty λ_1 a λ_2. Vhodnou voľbou je položiť (a)$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a (b)$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$. V oboch prípadoch sa môže podmienka $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ porušiť; potom je potrebné výsledok normalizovať. Riešenie dosiahnuté voľbou (a) neberie do úvahy obmedzenie pre očakávanú hodnotu výnosu, preto je to bod s minimálnou smerodatnou odchýlkou.

3.7 Zahrnutie bezrizikového aktíva

Markowitzov model predpokladá, že portfólio je vytvorené len z rizikových aktív, pre ktoré $\sigma > 0$. Ak by však existovala možnosť využiť rizikové aj bezrizikové aktíva, investori by mohli investovať do obidvoch druhov inštrumentov. Bezrizikové aktíva sú charakteristické tým, že ich výnosová miera je istá, teda rozptyl očakávaných výnosov je rovný nule. Medzi bezrizikové aktíva patria napríklad krátkodobé štátne pokladničné poukážky. Zahrnutie bezrizikového aktíva výrazne modifikuje množinu portfólií aj krivku efektívnych portfólií.

Nech máme bezrizikové aktívum s výnosovou mierou r_0 a nejaké rizikové aktívum s výnosom ρ očakávaným výnosom r a rozptylom σ^2. Kovariancia týchto aktív je nula z definície $E[(\rho - r)(r_0 - r_0)] = 0$. Portfólio zložené z týchto aktív s váhovými koeficientmi má

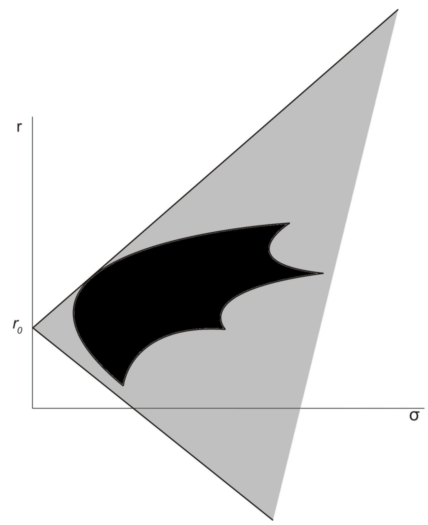
$$\text{očakávaný výnos} : r_p = \alpha r_0 + (1 - \alpha) r$$

a

$$\text{smerodatnú odchýlku} : (1 - \alpha)\sigma.$$

Tieto rovnice vedú k lineárnej prípustnej množine portfólií.

Teraz budeme predpokladať n rizikových aktív so známymi očakávanými výnosovými mierami r_i a kovarianciami σ_{ij} a bezrizikové aktívum s výnosom r_0. Najprv vytvoríme množinu prípustných portfólií zloženú iba z rizikových aktív. Ďalej pre každé aktívum z tejto množiny vytvorím kombinácie s bezrizikovým aktívom. Tieto kombinácie vytvoria nový tvar prípustnej množiny portfólií - nekonečný trojuholník na obr.3.6.



Obr. 3.6: Zahrnutie bezrizikového aktíva

Kapitola 4

Záver

Cenných papierov a možností, ako do nich investovať, je veľké množstvo. Obchody s cennými papiermi však samozrejme nie sú pre každého, pretože možnosť vyššieho výnosu je vždy spojená s vyššou mierou rizika. Pri investovaní a skladaní svojho portfólia (inštrumentov, do ktorých budeme vkladať svoje peniaze) je nutné rešpektovať radu aspektov, ktoré pramenia z odlišností jednotlivých nástrojov trhu. Inak bude investovať človek, ktorý chce mať zaistený stabilný príjem a inak ten, kto nie je nijako limitovaný časom a je ochotný podstúpiť určité riziko pre budúce zisky.

V práci som uviedla, ako sa cenné papiere, najmä dlhopisy oceňujú a ktoré faktory vplývajú na ich cenu. Ukázali sme si taktiež jednu z metód pre hľadanie portfólia s čo najmenším rizikom a výpočet zastúpenia jednotlivých aktív v portfóliu s využitím Markowitzovho modelu.

Literatúra

[1] Blake, D.: *Analýza finančních trhů*, Grada Publishing, Praha, 1995.

[2] Hurt, J.: *Finanční management LS 2006/2007*

[3] Jílek, J.: *Finanční trhy a investování*, Grada Publishing, Praha, 2009.

[4] Luenberger G. D.: *Investment Science*, Oxford University Press, New York, 1997.

[5] Musílek, P.: *Trhy cenných papírů*, Ekopress, s.r.o., Praha, 2002

[6] Štěpán, J., Zvára, K.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, Praha, 2002.