Oponentský posudek bakalářské práce

Miroslav Kolář: „Kmitající znaménkové míry"

Předložená práce se zabývá kmitajícími mírami na lokálně kompaktních prostorech, což jsou takové míry, jejichž kladná i záporná část má za nosič celý prostor. V jistém smyslu jde o zobecnění nikde monotónních funkcí, tj. funkcí, které nejsou monotónní na žádném intervalu.

Kapitola 1 se věnuje nikde monotónním funkcím, zejména existenci Köpckeho funkcí, což jsou funkce f definované na $\mathbb{R}$, které mají na $\mathbb{R}$ omezenou derivaci a přitom množiny $\{f' > 0\}$ i $\{f' < 0\}$ jsou husté v $\mathbb{R}$. V Kapitole 2 se konstruují kmitající míry s různými dodatečnými vlastnostmi.

Téma není triviální. Práce ovšem trpí řadou nedostatků, jejichž společným rysem jsou vágní formulace v důkazech, občasný zmatek v terminologii a nedostatečné odkazy na literaturu. Jsem přesvědčen, že libovolná práce by se měla psát s ohledem na možného čtenáře, tedy s ohledem na to, že to někdo bude číst a bude chtít pochopit, oč jde. Některé z nedostatků lze odstranit snadno, některé obtížněji.

Nejprve uvedu nejzávažnější nedostatky:

1. V důkazu Lemmatu 1.1 zcela chybí důkaz existence limity $\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h}$. Snadno se (s využitím nezápornosti sčítanců) ověří, že pro $x \in \mathbb{Q}$ je limita rovna $+\infty$; a že stejně tomu tak je, pokud $x \notin \mathbb{Q}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(x-q_n)^2}} = +\infty$. Ovšem v případě, že tato řada konverguje, pak to asi není jednoduché a rozhodně to neplyne jen z toho, že sčítance jsou nezáporné. Věta tvaru

Nechť u_n jsou nezáporné funkce definované na témže prstencovém okolí 0, které mají v bodě 0 limitu. Pak funkce $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ má v nule limitu.

totiž neplatí, jak se lze přesvědčit snadným protipříkladem. Předpokládám, že pro případ z lemmatu limita skutečně existuje, ale je to třeba dokázat.

2. Strana 10, odstavec 5: Zde autor asi chce popsat konstrukci tzv. dlouhé přímky. Ale popis je vágní a tak, jak je mu rozumět, je navíc špatně. Přesná definice je, že dlouhá přímka je lexikografický součin $[0, \omega_1) \cdot [0, 1)$ (případně doplněný o poslední bod, chceme-li kompaktní prostor). Intuitivně se to dá říci, že mezi každé dva po sobě jdoucí ordinály vlepíme **otevřený** interval $(0, 1)$. Kdybychom tam dali uzavřený, zůstaly by izolované body. Navíc se tvrdí, že jde o kompaktní prostor, takže by tam měl být buď skutečný důkaz nebo odkaz na skutečný důkaz.

3. Strana 11, Příklad 2.1, bod 3: Nalezení K^+ a K^- je samozřejmě standardní operace. Ale vysvětlení zde je příliš stručné, a navíc používá vnitřní regularitu μ_0^+ a μ_0^- pro měřitelné množiny. Přitom v definici Radonovy míry na straně 9 se vnitřní regularita požaduje jen pro otevřené množiny. To je třeba vysvětlit.

4. Strana 14: Pojmy týkající se diferencovatelnosti měr a Lebesgueových bodů jsou nejasné.

(i) Lebesgueovy body (narozdíl od mnoha jiných vlastností funkcí) závisí na volbě reprezentanta z třídy ekvivalence. To by se mělo zdůraznit. A také, že skoro všechny body jsou Lebesgueovy

(ii) Není definováno, co je to $\frac{D\mu}{D\lambda}$. Za Radon-Nikodýmovu derivaci považuji hustotní funkci z Radon-Nikodýmovy věty, která je určena až na množinu míry 0. Pokud se vybírá speciální reprezentant, mělo by se to napsat a vysvětlit.

(iii) Jak je to s tou diferencovatelností: Je-li μ absolutně spojitá vzhledem k ν, pak existuje Radon-Nikodýmova derivace $f \in L^1(\nu)$. Ta je určena jako třída ekvivalence s rovností ν-skoro všude. Ale Lebesgueovy body jsou vzhledem k Lebesgueově míře. Tedy znamená to, že existuje reprezentant, který je lokálně integrovatelný vzhledem k Lebesgueově míře a všechny body jsou Lebesgueovy? Pokud ν je Lebesgueova míra, je to snad srozumitelné. Ale tak, jak je to napsáno, je to nejasné.

5. Strana 15, závěrečné nerovnosti důkazu Tvrzení 2.5: Předem nevíme, zda limita existuje, proto je třeba psát limsup. Navíc nevím, proč na závěr je uvedeno $(2M+1)\varepsilon$, mně vychází prostě ε.

6. Strana 19, důkaz Tvrzení 2.11. Není vysvětleno, jak z toho, že d-vnitřek měřitelné množinu se od ní liší jen o množinu míry nula, a z toho, že každou měřitelnou množinu lze zevnitř aproximovat F_σ množinou, plyne, že každou měřitelnou množinu lze zevnitř aproximovat množinou, co je **zároveň** F_σ i d-otevřená. (Samozřejmě to je jednoduché, ale má to vysvětlit autor, ne si domýšlet čtenář.)

7. Odkazy na literaturu: Pokud se odkazuje na konkrétní větu, je třeba uvést číslo věty případně číslo strany. (Co kdyby to někdo chtěl číst a hledat!) Odkazy typu *důkaz se najde v [3]* jsou nedostatečné. Zvláště když [3] není pětistránkový článek, ale skripta. Samozřejmě, tento typ odkazu je možný u tvrzení obecnějšího typu, jako třeba *tato problematika je podrobněji zkoumána v [3]*, ale i pak by bylo lépe odkaz zpřesnit, uvést například kapitolu.

Kromě uvedených závažnějších nedostatků uvádím některé drobnější, které čtenář odstraní snadněji:

(i) Strana 6: To, že funkce nemající nikde vlastní derivaci jsou nikde monotónní, a to, že Köpkeho funkce jsou (přesně ty?) nikde monotónní funkce, co mají všude (vlastní nebo omezenou?) derivaci, by stálo za vysvětlení.

(ii) Strana 7, poznámka: Konstrukci není třeba modifikovat, derivace funkce G je automaticky odražená od nuly. Ale když už ji modifikujete, možná proto, aby konstanta odražení vyšla pěkná (jiný důvod mne nenapadá), pak bych čekal, že tam bude nějaký výpočet, nějaké zdůvodnění, nebo aspoň uvedené ty konstanty.

(iii) Strana 7, definice prostoru X: Formulace je podivná. Asi myslíte, že $f \in X$, právě když f má primitivní funkci a množina $\{f=0\}$ je hustá.

(iv) Strana 7, Věta 1.2: Místo *monotónní* má být *nemění znaménko*.

(v) Strana 8, konec důkazu: Tu vhodnou lineární transformaci by bylo vhodné specifikovat. (Skládáme zevnitř či zvenku a co vlastně chceme docílit?)

(vi) Strana 8, Důsledek 1.3: Chtělo by to zmínit, proč je to důsledek. Že se totiž vezme primitivní funkce k nějakému prvku E.

(vii) Strana 9: Na větu o dualitě $\mathcal{C}_0(X)$ a $\mathcal{M}(X)$ by měl být nějaký odkaz.

(viii) Strana 11, Příklady 2.1.: To, že ν je impuls, nebylo definováno. Ale je samozřejmě jasné, co se tím míní.

(ix) Strana 11, Příklad 2.1.3 a důkaz Věty 2.2: Prostor $\mathcal{C}_C(X)$ resp. $\mathcal{C}_c(X)$ nebyl definován. Měla by být uvedena definice a mělo by se používat jednotné značení.

(x) Strana 11, Příklad 2.1.3: Závěrečná nerovnost by stála za alespoň nějaké zdůvodnění.

(xi) Strana 11, Příklad 2.1.3 a důkaz Věty 2.2: Používá se Urysohnovo lemma, ve Větě 2.2 se to ani nezmiňuje. Také by tam měl být odkaz na tu formu Urysohnova lemmatu, která se používá.

(xii) Strana 12, Poznámka: Zde se dokazuje, že hustá G_δ podmnožina Baireova prostoru je opět Baireův prostor. Ale tak, jak je to napsané, to není důkaz, protože to vypadá, jako když se nepoužívá, že A je G_δ. Přitom je to potřeba v klíčovém místě, kdy se tvrdí, že $\bigcap \widetilde{G}_n \cap A$ je G_δ hustá v Y. Je třeba buď zdůraznit, že průnik dvou G_δ hustých je zase hustá; nebo přímo vyjádřit A jako průnik posloupnosti otevřených hustých a pak použít, že Y je Baireův.

(xiii) Strana 12, důkaz Důsledku 2.3: Důkaz je formulován jako složité souvětí, které se hůře luští. Lepší by bylo to zformulovat jako více jednodušších vět.

(xiv) Strana 13: Tvrdí se, že f je aproximativně spojitá v bodě x, právě když existuje měřitelná množina s hustotou 1 v bodě x, přes níž limita funkce f v bodě x je rovna $f(x)$; a že aproximativně spojité funkce jsou měřitelné. To je sice pravda, ale měl by tam být odkaz nebo důkaz.

(xv) Strana 14: V důkaze Věty 2.4 chybí zmínka o množinách $\{f < \alpha\}$.

(xvi) Strana 14: Příklad s derivací funkce $|x|$ a příslušné míry by měl být vysvětlen.

(xvii) Strana 15, odstavec za koncem důkazu: Proč lze problém sestrojení derivace takto redukovat? Chybí vysvětlení.

(xviii) Strana 15, důkaz Tvrzení 2.6: Je třeba dokázat spojitost funkcí φ_n.

(xix) Strana 6, konec důkazu Tvrzení 2.7: Proč je to limsup rovné $\frac{1}{2}$? Bylo by třeba zdůvodnit.

(xx) Strana 17, důkaz Lemmatu 2.9: V první části se používají předchozí lemmata, takže by se na ně mělo odkázat. Ve druhém odstavci má být index k a ne n (ve druhé větě, dvakrát). Na konci druhého odstavce je jakýsi podivný znak místo $\emptyset$. Důkaz uzavřenosti E by měl být zformulován pořádně (takto je s mírnou námahou rozluštitelný). Závěrečné nerovnosti jsou správné, ale neškodilo by vysvětlit, jak vznikaly.

(xxi) Strana 18, konec stránky: Má být $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, ne jen φ a ψ.

(xxii) Strana 19, Tvrzení 2.11: Není definováno, co je to $\frac{D\mu}{D\lambda}$. Je to Radon-Nikodýmova derivace?

Přes uvedené nedostatky se domnívám, že práce spíše splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci. Navrhuji ji hodnotit stupněm **dobře**.

V Praze dne 15. 6. 2009

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, PhD.
KMA MFF UK