Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavel Sůva

Drawdown v úlohách optimalizace portfolia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2009

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu své bakalářské práce RNDr. Ing. Miloši Kopovi, Ph.D., za čas, který mi věnoval, za jeho rady a připomínky a taktéž za poskytnuté materiály a data.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29. 5. 2009 Pavel Sůva

Obsah

Název práce: Drawdown v úlohách optimalizace portfolia
Autor: Pavel Sůva
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme drawdown míry rizika navržené v [4] a jejich použití v úlohách optimalizace portfolia. Zkonstruujeme drawdown míry rizika (maximální, průměrný a podmíněný drawdown), a formulujeme některá tvrzení o jejich vlastnostech v kontextu obecných měr rizika. Připomínáme také často diskutované alternativní míry rizika VaR a CVaR. Formulujeme úlohy optimalizace portfolia s podmíněným drawdownem a CVaR jako mírami rizika. V numerické studii optimalizujeme akciové portfolio Pražské burzy cenných papírů za použití těchto měr. Analyzujeme rozdíly těchto dvou přístupů.

Klíčová slova: optimalizace portfolia, míry rizika, drawdown, CVaR.

Title: Drawdown in portfolio selection problems
Author: Pavel Sůva
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work, Drawdown risk measures suggested in [4] and their usage in portfolio optimization problems are studied. Drawdown risk measures (Maximum, Average and Conditional Drawdown) are defined and some statements about their properties are formulated in context of general risk measures. Frequently discussed alternative risk measures VaR and CVaR are recalled. The portfolio optimization problems with Conditional Drawdown and CVaR risk measures are formulated. In a numerical study, a Prague stock exchange portfolio is optimized using these measures. The differences of these two approaches are analysed.

Keywords: portfolio optimization, risk measures, Drawdown, CVaR.

Kapitola 1

Úvod

V úlohách optimalizace portfolia usilujeme o nalezení investiční strategie, která nám nabídne takové využití našich finančních prostředků, které můžeme v nějakém smyslu označit za nejlepší, „optimální“. To zpravidla znamená, že usilujeme o maximalizaci očekávaného výnosu. Problémem v takovém případě ovšem je, že vysoký očekávaný zisk ještě neznamená, že neexistuje nezanedbatelná pravděpodobnost velkých ztrát. Tento problém řeší „mean-risk“ optimalizační modely, v nichž se hledá portfolio nejen s co nejvyšším výnosem, ale zároveň i s nejmenším rizikem.

Existuje mnoho způsobů, jak riziko měřit. Jeden z nejstarších pochází od H. M. Markowitze, který jej publikoval v roce 1952 v [6]. V takzvaném Markowitzově modelu usilujeme o maximalizaci očekávaného výnosu a minimalizaci rozptylu výnosů. Jelikož tato dvě kritéria zpravidla nelze splnit naráz, jedná se o úlohu vícekriteriální optimalizace, kterou lze formulovat několika způsoby. Můžeme maximalizovat očekávaný výnos za podmínky, že rozptyl nepřesáhne určitou mez, nebo naopak minimalizovat rozptyl za podmínky, že očekávaný výnos bude aspoň roven určité dané hodnotě. Je taktéž možné maximalizovat rozdíl očekávaného výnosu a nějakou konstantou přenásobeného rozptylu výnosů. Lze ale dokázat, že všechny tyto formulace jsou si navzájem ekvivalentní. Přestože Markowitzův model je nejznámějším „mean-risk“ modelem, ukázalo se, že má svoje nevýhody. Když počítáme rozptyl, nerozlišujeme, jestli jsou odchylky od očekávaného výnosu směrem dolů nebo nahoru. Přitom odchylky směrem nahoru nám nevadí, nepovažujeme je za riziko. Řešením může být nahradit rozptyl takzvanou semivariancí, která penalizuje pouze odchylky směrem dolů.

V současné době se v praxi k měření rizika hojně využívá tzv. Value at

Risk (VaR), který udává maximální možnou ztrátu při zanedbání ztráty, ke které může dojít s pravděpodobností menší než $1 - \alpha$, kde α volíme dostatečně blízko jedné. Protože však ani tento způsob měření rizika není považován za ideální (některé důvody jsou stručně vyjmenovány v kapitole 3.1), je výzkum způsobů měření rizika velmi aktuální. Rockafellar a Uryasev představili v [8] podmíněný Value at Risk (CVaR), který udává střední hodnotu ztráty, k níž může dojít v $(1-\alpha) \cdot 100\%$ nejhorších případů. CVaR má „hezčí" matematické vlastnosti, než VaR (jedná se totiž o tzv. koherentní míru rizika) a v poslední době se začíná používat v praxi. Jedním z nejnovějších způsobů měření rizika jsou drawdown míry rizika, které představili Chekhlov, Uryasev a Zabarankin v [4] a které mají oproti CVaR tu vlastnost, že „mají paměť" a měří dlouhodobější ztráty, konkrétně rozdíly mezi nejvyšší dříve dosaženou hodnotou portfolia a jeho hodnotou v daném okamžiku. Drawdown mírami rizika se zabývá tato práce.

Struktura práce je následující. V kapitole 2 nejprve stručně představíme pojmy míra rizika a koherentní míra rizika. Poté se budeme věnovat drawdown mírám, a to konkrétně pro diskrétní rozdělení výnosů (ztrát) – nejprve pro jeden scénář a poté pro více scénářů. Zadefinujeme maximální a průměrný drawdown a především podmíněný drawdown (CDaR) pro jeden i více scénářů výnosů a zformulujeme tvrzení o některých jejich vlastnostech. V kapitole 3 stručně představíme další již zmiňované míry rizika VaR a CVaR. Ukážeme, jak vypadá CVaR v případě, že výnosy (ztráty) mají diskrétní rozdělení. V kapitole 4 ukážeme, jak spočítat CDaR a CVaR jako řešení úloh lineárního programování. Představíme optimalizační modely, v nichž budeme za předpokladu na očekávaný výnos minimalizovat riziko měřené pomocí těchto dvou měr. Konečně v kapitole 5 aplikujeme tyto modely na data z Pražské burzy cenných papírů. Pomocí obou měr budeme hledat optimální portfolia a analyzovat rozdíly těchto dvou přístupů.

Kapitola 2

Drawdown míry rizika

V této kapitole se nejprve seznámíme s pojmem míry rizika. Dále definujeme pojem drawdownu a s jeho pomocí pak drawdown míry rizika.

2.1 Míry rizika

Abychom mohli říci, co jsou drawdown míry rizika, musíme nejprve osvětlit několik základních pojmů. Jako investoři chceme sestavit portfolio, které pro nás bude nějakým způsobem optimální. Zpravidla to znamená, že chceme dostat co největší výnos, ale také chceme co nejméně riskovat. Právě rizikovost portfolia budeme chtít měřit pomocí měr rizika, které v této podkapitole obecně zadefinujeme stejným postupem, jako v [2].

Definice 2.1. *Ztrátovou funkcí* rozumíme náhodnou veličinu $Z = g(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$, která je funkcí vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\mathsf{T} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ a náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^\mathsf{T}$ se složkami definovanými na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a majícími hodnoty v $(E, \mathcal{B}(E))$, kde $\mathcal{B}(E)$ je Borelovská σ-algebra generovaná metrickým prostorem $E \subset \mathbb{R}$.

Veličiny z předchozí definice můžeme interpretovat následovně: máme m aktiv, do nichž lze investovat. Množina $\mathcal{X}$ je množinou možných rozhodnutí, jak a do kterých aktiv investovat (váhy, alokace portfolia). Jednotlivé složky náhodného vektoru $\mathbf{Y}$ představují výnosy jednotlivých aktiv.

Definice 2.2. Nechť $\mathcal{Z}$ je množina ztrátových funkcí. Potom *mírou rizika* rozumíme funkcionál $\rho : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$.

Pokud bychom ztrátovou funkci definovali jako náhodný proces (resp. posloupnost, vektor), můžeme analogicky zavést *dynamickou míru rizika*. Více o nich lze nalézt např. v [2]. Mezi dynamické míry rizika patří i drawdown míry.

Definice 2.3. [1] Nechť ρ je míra rizika a nechť $X, Z \in \mathcal{Z}$. Řekneme, že ρ je *koherentní*, jestliže pro ni platí

1. Ekvivariance vůči posunutí: $\rho(Z + c) = \rho(Z) + c$.
2. Pozitivní homogenita: $\rho(\lambda Z) = \lambda\rho(Z)$, $\forall\lambda \geq 0$.
3. Monotonie: Nechť $X \leq Z$ všude na Ω, potom $\rho(X) \leq \rho(Z)$.
4. Subaditivita: Nechť navíc $X + Z \in \mathcal{Z}$, pak $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Z)$.

Definice 2.4. Nechť ρ je míra rizika a nechť $X, Z, \lambda X + (1 - \lambda)Z \in \mathcal{Z}$ $\forall\lambda \in (0, 1)$ Řekneme, že ρ je *konvexní*, jestliže pro ni platí

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Z) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Z) \quad \forall\lambda \in (0, 1).$$

Tvrzení 2.5 (Vztah konvexity a subaditivity)**.** *Nechť ρ je míra rizika. Pak ρ je konvexní a pozitivně homogenní právě tehdy, když je subaditivní a pozitivně homogenní.*

Důkaz. Nejprve dokážeme implikaci zleva doprava. Z konvexity speciálně pro $\lambda = \frac{1}{2}$ máme

$$\rho(\tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}Z) \leq \tfrac{1}{2}\rho(X) + \tfrac{1}{2}\rho(Z).$$

Obě strany nerovnosti vynásobíme dvěma a dostáváme

$$2\rho(\tfrac{1}{2}(X + Z)) \leq 2(\tfrac{1}{2}\rho(X) + \tfrac{1}{2}\rho(Z)).$$

Na levé straně nerovnosti potom použijeme pozitivní homogenitu a dostáváme

$$\rho(X + Z) \leq \rho(X) + \rho(Z),$$

což je žádaná subaditivita.
Nyní dokážeme opačnou implikaci. Ze subaditivity speciálně pro λX, $(1 - \lambda)Z$, $\lambda \in (0, 1)$ máme

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Z) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Z).$$

Na pravé straně nerovnosti stačí použít pozitivní homogenitu a dostáváme

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Z) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Z),$$

což je žádaná konvexita. ☐

2.2 Základní drawdown míry

Základní předpoklady a definice převezmeme z [4]. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor. Nechť $[0, T]$ je časový interval, který je rozdělen na konečný počet podintervalů $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$. Nechť máme na výběr m aktiv, do kterých můžeme investovat a nechť $(r_1(t_k), \ldots, r_m(t_k))^\mathsf{T}$ je náhodný vektor výnosů těchto aktiv v čase t_k, $k = 1, \ldots, N$ definovaný na pravděpodnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Uvažujeme přitom aritmetické výnosy, tj.

$$r_i(t_k) = \tfrac{p_i(t_k) - p_i(t_{k-1})}{p_i(t_{k-1})},\ k = 1, \ldots, N,$$

kde $p_i(t_k)$ je cena i-tého aktiva v čase t_k. Dále předpokládáme, že máme k dispozici bezrizikové aktivum s konstantním výnosem r_0, a definujeme vektor $\mathbf{r}(t_k) = (r_0(t_k), r_1(t_k), \ldots, r_m(t_k))^\mathsf{T}$. Nechť $\mathbf{x}(t_k) = (x_0(t_k), x_1(t_k), \ldots, x_m(t_k))^\mathsf{T}$ je vektor vah určujících složení portfolia v čase t_k, $k = 1, \ldots, N$, tj. vektor splňující podmínky $\sum_{i=0}^m x_i(t_k) = 1$. Obecně lze model doplnit ještě o další lineární podmínky (může to být například zákaz prodejů nakrátko, tj. $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$), pak píšeme $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, kde $\mathcal{X}$ je konvexní polyedrická množina určená těmito podmínkami.

Poznámka 2.6. K několika následujícím pojmům, které budeme definovat, je nutné poznamenat, že je lze brát jako funkce náhodých vektorů $\mathbf{r}(t_1), \ldots, \mathbf{r}(t_N)$. My ovšem nyní budeme považovat $\mathbf{r}(t_1), \ldots, \mathbf{r}(t_N)$ za realizace těchto náhodných vektorů, tedy vektory čísel, a nazveme je *scénářem výnosů*. Formálně správnější vzhledem k definici míry rizika by sice bylo tak nečinit, nicméně vzhledem k tomu, že směřujeme k praktickému využití drawdown měr při formulaci optimalizačních úloh (viz kapitola 4), které budeme aplikovat na historická data (tj. scénáře), je tento přístup nejen jednodušší, ale i názornější.

Definice 2.7. *Výnos portfolia v čase t_k* je

$$r_k^{(p)}(\mathbf{x}(t_k)) = \mathbf{r}(t_k)^\mathsf{T}\mathbf{x}(t_k) = \sum_{i=0}^m r_i(t_k) x_i(t_k).$$

Definice 2.8. *Částečný součet výnosů portfolia do času t_k (uncompounded cumulative portfolio rate of return)* definujeme jako

$$w_k(\mathbf{x}(t_k)) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^k r_l^{(p)}(\mathbf{x}(t_l)), & k = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Pro zjednodušení značíme $w_k = w_k(x(t_k))$. Dále definujeme vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)^\mathsf{T}$.

Definice 2.9. *Drawdown* portfolia definujeme jako vektor

$$\mathcal{AD}(\mathbf{w}) = \mathcal{AD} = (AD_1, \dots, AD_N)^\mathsf{T}, \quad AD_k = \max_{0 \le j \le k} w_j - w_k.$$

Číslo AD_k, které nazýváme *drawdown* portfolia *v čase* t_k, nám říká, jaký největší nezáporný rozdíl byl mezi některým z předešlých částečných součtů výnosů (tj. těch v časech $t_0, \dots, t_k$) a částečným součtem výnosů v čase t_k, tedy „o kolik nejvíc jsme na tom v minulosti byli lépe než v čase t_k“.

Povšimněme si, že vektory $\mathbf{w}$ a $\mathcal{AD}$ jsou vlastně časovými řadami $w_1, \dots, w_N$ a $AD_1, \dots, AD_N$, kde k-tá složka $\mathbf{w}$ a $\mathcal{AD}$ odpovídá času t_k. Zřejmě $AD_0 = w_0 = 0$.

V textu [4] se drawdownu říká *absolutní drawdown.*

Obecně bychom mohli drawdown definovat i bez diskretizace časového intervalu, viz [3]. My ovšem budeme rovnou předpokládat diskrétní verzi, která je vhodná pro praktické účely (optimaliazce a aplikace na historická data).

Tvrzení 2.10 (Vlastnosti drawdownu)**.** *Nechť $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_a$ a $\mathbf{w}_b$ jsou vektory částečných součtů výnosů portfolia. Drawdown $\mathcal{AD}$ má následující vlastnosti:*

1. *Nezápornost:* $\mathcal{AD}(\mathbf{w}) \ge 0$.

2. *Invariance vůči posunutí:* $\mathcal{AD}(\mathbf{w} + \mathbf{c}) = \mathcal{AD}(\mathbf{w})$, *kde* $\mathbf{w} + \mathbf{c} = (w_1 + c, w_2 + c, \dots, w_N + c)$.

3. *Pozitivní homogenita:* $\mathcal{AD}(\lambda \mathbf{w}) = \lambda \mathcal{AD}(\mathbf{w})$, $\forall \lambda \ge 0$.

4. *Konvexita:* $\mathcal{AD}(\lambda \mathbf{w}_a + (1-\lambda)\mathbf{w}_b) \le \lambda \mathcal{AD}(\mathbf{w}_a) + (1-\lambda)\mathcal{AD}(\mathbf{w}_b)$ $\forall \lambda \in [0, 1]$.

5. *Rekurzivita:* $AD_k = [AD_{k-1} - r_k^{(p)}(x(t_k))]^+$, $k = 1, \dots, N$.

Důkaz tohoto tvrzení je možné nalézt v [4].

Nyní pomocí výše uvedených pojmů postupně zadefinujeme tři drawdown míry: maximální drawdown, průměrný drawdown a podmíněný drawdown. Tyto definice převezmeme z [4], značení pak z [2].

Definice 2.11. Nechť $[0, T]$ je časový interval, který je rozdělen na konečný počet podintervalů $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$. *Maximální drawdown* na tomto intervalu je definován jako

$$\mathrm{MaxDD}(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) = \max_{1 \leq k \leq N} AD_k.$$

a *průměrný drawdown* na tomto intervalu jako

$$\mathrm{AvDD}(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} AD_k.$$

Protože maximální drawdown bere v úvahu pouze nejvyšší drawdown ve scénáři, a průměrný drawdown naopak může některé vysoké drawdowny „zamaskovat“, budeme v dalším směřovat k definici podmíněného drawdownu. K tomu si v souladu s [4] zadefinujeme funkci $\pi_{\mathcal{AD}}$ vzorcem

$$\pi_{\mathcal{AD}}(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}_{\{AD_k \leq z\}},$$

kde $\mathbb{I}_{\{AD_k \leq z\}}$ je indikátorová funkce (tj. funkce, která je rovna jedné, je-li podmínka ve složené závorce splněna, a rovna nule jinak), a funkci $\pi_{\mathcal{AD}}^{-1}$ vzorcem

$$\pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha) = \begin{cases} \inf\{z \mid \pi_{\mathcal{AD}}(z) \geq \alpha\}, & \alpha \in (0, 1] \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Vidíme, že pokud by $\pi_{\mathcal{AD}}$ byla prostá (což speciálně v tomto diskrétním případě není), $\pi_{\mathcal{AD}}^{-1}$ by k ní byla funkcí inverzní.

Dále zadefinujeme množinu

$$\Xi_\alpha = \{AD_k \mid AD_k > \pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha),\ k = 1, \dots, N\}$$

Za podmíněný drawdown (Conditional Drawdown at Risk, CDaR) bereme průměr $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ nejvyšších drawdownů. Pro taková α, pro něž jsme schopni přesně spočítat $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ nejvyšších drawdownů (tzn. platí rovnost $\mathrm{card}(\Xi_\alpha)/N = (1 - \alpha)$) platí $\pi_{\mathcal{AD}}(\pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha)) = \alpha$. Obecně ale počet $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ nejvyšších drawdownů přesně spočítat nelze a rovnost vždy neplatí. Ze vzorce (2.1) vidíme, že platí $\pi_{\mathcal{AD}}(\pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha)) \geq \alpha$ (viz [4]). Proto CDaR zadefinujeme jako vážený průměr „hraniční hodnoty“ $\pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha)$ a drawdownů, které tuto hodnotu ostře překračují.

Definice 2.12. Nechť $\alpha \in [0, 1)$. *Podmíněný drawdown (Conditional Drawdown at Risk)* na hladině α definujeme jako

$$\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) = \left(\frac{\pi_{\mathcal{AD}}(\pi^{-1}_{\mathcal{AD}}(\alpha)) - \alpha}{1-\alpha}\right)\pi^{-1}_{\mathcal{AD}}(\alpha) + \frac{1}{(1-\alpha)\cdot N}\sum_{AD_k \in \Xi_\alpha} AD_k. \tag{2.2}$$

Je zřejmé, že podmíněný, maximální a průměrný drawdown jsou dynamickými mírami rizika, považujeme-li $\mathcal{AD}$ za náhodné vektory (což je zřejmě tehdy, když vektory výnosů považujeme za náhodné vektory, viz pozn. 2.6).

Tvrzení 2.13 (Vlastnosti CDaR)**.** *Nechť $\mathcal{AD}$, $\mathcal{AD}^a$ a $\mathcal{AD}^b$ jsou drawdowny a nechť $\alpha \in (0, 1)$. Potom pro* CDaR_α *platí:*

1. *Ekvivariance vůči posunutí:* $\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD} + \mathbf{c}) = \mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}) + c$*, kde* $\mathbf{c} = (c, \ldots, c)$.
2. *Pozitivní homogenita:* $\mathrm{CDaR}_\alpha(\lambda\mathcal{AD}) = \lambda\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD})$, $\forall\lambda \geq 0$.
3. *Monotonie: Nechť $AD^a_k \leq AD^b_k$, $k = 1, \ldots, N$, potom* $\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}^a) \leq \mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}^b)$.
4. *Konvexita:* $\mathrm{CDaR}_\alpha(\lambda\mathcal{AD}^a + (1-\lambda)\mathcal{AD}^b) \leq \lambda\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}^a) + (1-\lambda)\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}^b)$ $\forall\lambda \in [0, 1]$.

Tvrzení 2.14 (Vztah podmíněného, maximálního a průměrného drawdownu)**.** MaxDD *a* AvDD *jsou speciální případy* CDaR_α*, platí pro ně*

$$\begin{aligned}\mathrm{MaxDD}(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) &= \lim_{\alpha\to 1_-} \mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}(\mathbf{w}))\\ \mathrm{AvDD}(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) &= \mathrm{CDaR}_0(\mathcal{AD}(\mathbf{w}))\end{aligned}$$

Zájemce o důkazy předchozích tvrzení odkazujeme na [4]. Z tvrzení 2.13 a 2.5 plyne, že CDaR je koherentní mírou rizika.

2.3 Zobecnění drawdown měr

V praxi se může stát, že nám nestačí drawdown míra na pevné hladině α, ale chceme se zajistit i proti takovým extrémním propadům, které mohou být ve scénáři výnosů natolik výjimečné, že je dostatečně zohlední pouze drawdown míra na extrémně vysoké hladině α_1. Zároveň ale nechceme přijít o „rozumný odhad", který nám dá drawdown míra na nižší hladině α_2. Těchto hladin, které chceme vzít do úvahy, může být i více.

Následující definice převezmeme z [4]. Podmíněný drawdown lze zobecnit jako konvexní kombinace podmíněných drawdownů s různými úrovněmi spolehlivosti. V takovém případě uvažujeme *diskrétní rizikový profil* χ, což jsou váhy splňující

1. $\chi(\alpha_l) \geq 0$, $\alpha_l \in (0,1)$, $l = 1, \ldots, L$,
2. $\sum_{l=1}^{L} \chi(\alpha_l) = 1$.

Definice 2.15. Nechť je dán diskrétní rizikový profil χ. Potom definujeme *smíšený podmíněný drawdown* jako

$$\mathrm{CDaR}_{\chi}(\mathcal{AD}) = \sum_{l=1}^{L} \chi(\alpha_l)\mathrm{CDaR}_{\alpha_l}(\mathcal{AD}).$$

Lze uvažovat i spojitý rizikový profil – příslušné definice lze nalézt v [4].

V dalším textu zadefinujeme drawdown míry pro více scénářů výnosů. Základní předpoklady a definice opět převzmeme z [4], značení z [2]. Nechť $\Omega = \{\omega_s \,|\, s = 1, \ldots, S\}$ je konečná množina náhodných jevů a nechť p_s je pravděpodobnost jevu ω_s, $s = 1, \ldots, S$. Nechť $\mathbf{r}_s(t_k) = (r_{0s}(t_k), r_{1s}(t_k), \ldots, r_{ms}(t_k))^\mathsf{T}$, $k = 1, \ldots, N$ je s-tý scénář pro hodnoty náhodného vektoru výnosů m aktiv a bezrizikového aktiva označeného opět indexem 0, odpovídající náhodnému jevu $\omega_s \in \Omega$ a časovému intervalu $[0, T]$ rozdělenému na konečný počet podintervalů $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$. Nechť $\mathbf{x}(t_k) = (x_0(t_k), x_1(t_k), \ldots, x_m(t_k))^\mathsf{T}$ je vektor vah určujících složení portfolia v čase t_k. Potom můžeme definovat s-tý scénář výnosu portfolia v čase t_k a s-tý scénář částečného součtu výnosů portfolia do času t_k následujícími vzorci

$$r_{sk}^{(p)}(\mathbf{x}(t_k)) = \mathbf{r}_s(t_k)^\mathsf{T}\mathbf{x}(t_k) = \sum_{i=0}^{m} r_{is}(t_k)x_i(t_k),$$

$$w_{sk}(\mathbf{x}(t_k)) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{k} r_{sl}^{(p)}(\mathbf{x}(t_l)), & k = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Pro zjednodušení opět píšeme $w_{sk} = w_{sk}(\mathbf{x}(t_k))$. Symbolem $\mathbf{w}$ budeme značit matici $(w_{sk})_{s=1,k=0}^{S\ \ N}$. Obdobně jako pro jeden scénář nyní zadefinujeme drawdown a drawdown míry.

Definice 2.16. *Drawdown pro více scénářů* definujeme jako

$$\mathcal{ADS}(\mathbf{w}) = \mathcal{ADS} = (AD_{sk})_{s=1,k=0}^{S\ \ N}, \quad AD_{sk} = \max_{0\leq j\leq k} w_{sj} - w_{sk},\ s = 1, \ldots, S.$$

Definice 2.17. *Maximální* a *průměrný drawdown pro více scénářů* jsou definované vzorci

$$\mathrm{MaxDD}(\mathcal{ADS}(\mathbf{w})) = \max_{1\leq s\leq S,\, 1\leq k\leq N} AD_{sk}.$$

$$\mathrm{AvDD}(\mathcal{ADS}(\mathbf{w})) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{S} p_s AD_{sk}.$$

Maximální drawdown pro více scénářů je tedy definován jako maximum ze všech drawdownů (přes všechny scénáře a časové okamžiky). Průměrný drawdown pro více scénářů je pak střední hodnotou průměrných drawdownů pro jednotlivé scénáře.

Analogicky jako v případě pro jeden scénář zadefinujeme i následující:

$$\pi_{\mathcal{ADS}}(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{S} p_s \mathbb{I}_{\{AD_{sk}\leq z\}},$$

$$\pi^{-1}_{\mathcal{ADS}}(\alpha) = \begin{cases} \inf\{z \mid \pi_{\mathcal{ADS}}(z) \geq \alpha\}, & \alpha \in (0,1] \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

$$\Xi_\alpha = \{AD_{sk} \mid AD_{sk} > \pi^{-1}_{\mathcal{ADS}}(\alpha),\ k = 1, \ldots, N\ s = 1, \ldots, S\}$$

Definice 2.18. Nechť $\mathcal{ADS}$ je drawdown pro více scénářů a $\alpha \in (0,1)$. *Podmíněný drawdown pro více scénářů (Multi-scenario* CDaR*)* na hladině α definujeme jako

$$\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\mathbf{w})) = \\ \left(\frac{\pi_{\mathcal{ADS}}(\pi^{-1}_{\mathcal{ADS}}(\alpha)) - \alpha}{1-\alpha}\right)\pi^{-1}_{\mathcal{ADS}}(\alpha) + \frac{1}{(1-\alpha)\cdot N}\sum_{AD_{sk}\in\Xi_\alpha} p_s AD_{sk}.$$

Tvrzení 2.19 (Vlastnosti MCDaR). *Nechť* $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}^a$ *a* $\mathbf{w}^b$ *jsou matice částečných součtů výnosů portfolia pro více scénářů a nechť* $\alpha \in (0,1)$. MCDaR_α *má následující vlastnosti:*

1. *Nezápornost:* $\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\mathbf{w})) \geq 0$.
2. *Invariance vůči posunutí* $\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\mathbf{w}+\mathbf{c})) =$
   $= \mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\mathbf{w}))$, *kde* $\mathbf{w}+\mathbf{c} = (w_{sk}+c)_{s=1,k=0}^{S\ \ N}$.
3. *Pozitivní homogenita:* $\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\lambda\mathbf{w})) = \lambda\cdot\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\mathbf{w}))$, $\forall\lambda \geq 0$.
4. *Konvexita:* $\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\lambda\mathbf{w}^a+(1-\lambda)\mathbf{w}^b)) \leq \lambda\cdot\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\mathbf{w}^a))+(1-\lambda)\cdot\mathrm{MCDaR}_\alpha(\mathcal{ADS}(\mathbf{w}^b))$ $\forall\lambda \in [0,1]$.

Důkaz. Pro jednorozměrný případ (jeden scénář) plyne z tvrzení 2.10 a 2.13, pro více scénářů je jednoduchým zobecněním. Pro detaily viz [4]. □

Nakonec ještě můžeme, opět analogicky k případu pro jeden scénář, definovat MCDaR_χ pro (diskrétní) rizikový profil χ.

Definice 2.20. Nechť χ je diskrétní rizikový profil. Definujeme MCDaR_χ předpisem

$$\mathrm{MCDaR}_\chi(\mathcal{ADS}(\mathbf{w})) = \sum_{l=1}^{L} \chi(\alpha_l)\mathrm{MCDaR}_{\alpha_l}(\mathcal{ADS}(\mathbf{w})).$$

Kapitola 3

Alternativní míry rizika

V této kapitole představíme další moderní míry rizika: Value at Risk a Conditional Value at Risk, v souladu s [9].

3.1 Value at Risk

Value at Risk (VaR) a Conditional Value at Risk (CVaR) nejsou narozdíl od drawdown míry mírami dynamickými, což znamená, že závisí pouze na hodnotě portfolia v čase 0 a v čase T. Základní model bude podobný tomu v kapitole 2. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor. Nechť máme na výběr m aktiv, do kterých můžeme investovat a nechť $(r_1, \ldots, r_m)^\mathsf{T}$ je náhodný vektor výnosů těchto aktiv za období $[0, T]$ definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Dále předpokládáme, že máme k dispozici bezrizikové aktivum s konstantním výnosem r_0, a definujeme $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_m)^\mathsf{T}$. Nechť $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_m)^\mathsf{T}$ je vektor vah určujících složení portfolia, tj. vektor splňující podmínky $\sum_{i=0}^m x_i = 1$, popřípadě nějaké další lineární podmínky. Potom výnos portfolia je náhodná veličina

$$r^{(p)}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{m} r_i x_i,$$

a ztrátu porfolia (ztrátovou funkci) definujeme jako

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = -\mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}.$$

Protože $\mathbf{r}$ je náhodný vektor, je $g(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ náhodná veličina. Její distribuční funkce je

$$\psi(\mathbf{x}, \xi) = \mathsf{P}[g(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \leq \xi].$$

Value at Risk na hladině α budeme definovat podle [9] jako hodnotu ztráty, která bude překročena s pravděpodobností nejvýše $1-\alpha$.

Definice 3.1. Nechť $\alpha \in (0,1)$ a $g(\mathbf{x},\mathbf{r})$ je ztrátová funkce. *Value at Risk* $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$ definujeme předpisem

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \min\{\xi \,|\, \psi(\mathbf{x},\xi) \geq \alpha\}.$$

Dále definujeme *horní* VaR jako

$$\mathrm{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}) = \inf\{\xi \,|\, \psi(\mathbf{x},\xi) > \alpha\}.$$

Je zřejmé, že platí $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) \leq \mathrm{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x})$.

Přestože je VaR jedním z fundamentálních způsobů měření rizika, má několik velkých nevýhod: není subaditivní a tedy není koherentní, není konvexní, vede na úlohu MIP (viz např. [7]) a neobsahuje žádnou informaci o tom, jak moc závažná je ztráta ve zbývajících $(1-\alpha)\cdot 100\%$ případů. Proto zavádíme CVaR, který je v těchto ohledech vhodnější k měření rizika.

3.2 Conditional Value at Risk

Conditional (podmíněný) Value at Risk (CVaR) na hladině α definujeme podle [9] jako střední hodnotu $(1-\alpha)\cdot 100\%$ největších ztrát. Podobně jako v případě podmíněného drawdownu může být v případě diskrétního rozdělení $g(\mathbf{x},\mathbf{r})$ problém přesně najít $(1-\alpha)\cdot 100\%$ nejhorších případů.

Definice 3.2. Nechť $\alpha \in (0,1)$ a $g(\mathbf{x},\mathbf{r})$ je ztrátová funkce. Definujeme *horní* a *dolní* CVaR vzorci

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}) &= \mathsf{E}[g(\mathbf{x},\mathbf{r}) \,|\, g(\mathbf{x},\mathbf{r}) > \mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})],\\ \mathrm{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}) &= \mathsf{E}[g(\mathbf{x},\mathbf{r}) \,|\, g(\mathbf{x},\mathbf{r}) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})],\end{aligned}$$

Lze nahlédnout, že je-li v bodě $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$ pravděpodobností atom rozdělení $g(\mathbf{x},\mathbf{r})$, bude platit $\mathrm{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}) < \mathrm{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x})$. Proto je nutné zavést CVaR_α „složitějším předpisem“.

Definice 3.3. Nechť $g(\mathbf{x},\mathbf{r})$ je ztrátová funkce. Definujeme α-*chvost* jako náhodnou veličinu T_α s distribuční funkcí

$$\psi_\alpha(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < \mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}),\\ \dfrac{\psi(\mathbf{x},\xi)-\alpha}{1-\alpha}, & \xi \geq \mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}).\end{cases}$$

Definice 3.4. Za předpokladů daných definicí 3.3 definujeme

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathsf{E}T_\alpha.$$

Názorněji lze však CVaR_α, vyjádřit jako vážený průměr VaR_α a střední hodnoty $(1-\alpha)\cdot 100\%$ nejhorších ztrát, tj. ztrát ostře překračujících VaR_α.

Tvrzení 3.5 (CVaR jako vážený průměr)**.** *Nechť* $\lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \psi_\alpha(\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}))$, *tedy*

$$\lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{x}, \mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})) - \alpha}{1-\alpha}.$$

Pro $\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$ *platí rovnost*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \lambda_\alpha(\mathbf{x})\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) + (1-\lambda_\alpha(\mathbf{x}))\mathrm{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}). \tag{3.1}$$

Přímo ze vzorce 3.1 plyne následující důsledek.

Důsledek 3.6 (Vztah VaR a CVaR)**.** *Pro každé* $\alpha \in (0,1)$ *a váhy* $\mathbf{x}$ *platí* $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) \leq \mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$. *Rovnost nastane pouze tehdy, když pravděpodobnost ztráty větší než* $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$ *je nulová.*

Bude-li mít vektor výnosů $\mathbf{r}$ diskrétní rozdělení, bude mít i $g(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ diskrétní rozdělení. Můžeme tak modelovat riziko při konečném počtu scénářů výnosů.

Důsledek 3.7 (CVaR pro více scénářů)**.** *Nechť náhodný vektor výnosů* $\mathbf{r}$ *má diskrétní rozdělení soustředěné v konečně mnoha bodech. Potom ztráta portfolia* $g(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ *bude mít pro pevné* $\mathbf{x}$ *rovněž diskrétní rozdělení soustředěné v konečně mnoha bodech* $v_1 < v_2 < \ldots < v_S$, *pro něž bude platit* $\mathsf{P}[g(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = v_s] = p_s$, $\sum_{s=1}^S p_s = 1$. *Pro* $\alpha \in (0,1)$ *najdeme právě jeden index* s_α *takový, že*

$$\sum_{s=1}^{s_\alpha - 1} p_s < \alpha \leq \sum_{s=1}^{s_\alpha} p_s.$$

Pak platí

$$\mathrm{VaR}_\alpha(x) = v_{s_\alpha}$$

a

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\left(\sum_{s=1}^{s_\alpha} p_s - \alpha\right) v_{s_\alpha} + \sum_{s=s_\alpha+1}^{S} p_s v_s\right].$$

Formulace a důkazy předchozích tvrzení je možné najít v [9].

Kapitola 4

Optimalizační modely

V této kapitole představíme minimalizační formule pro drawdown míry a CVaR a také model optimalizace portfolia pomocí těchto měr.

4.1 Model založený na drawdown míře

Abychom dokázali spočítat CDaR z definice, viz vzorec (2.2), potřebujeme nejprve znát hodnotu $\pi^{-1}_{\mathcal{AD}}(\alpha)$, což zdvojnásobuje dobu výpočtu. Výpočet CDaR lze ale také zformulovat jako optimalizační úlohu, jejímž vyřešením dokážeme vypočíst obě hodnoty najednou. Předpokládejme teď tedy, že máme nějaké dané portfolio nebo aktivum a chceme spočítat jeho podmíněný drawdown. Následující tvrzení jsou odvozeny v [4]. Nejprve budeme formulovat úlohu pro jeden scénář výnosů a pevnou hladinu rizika α. Základní předpoklady jsou stejné, jako v kapitole 2.2.

Věta 4.1 (Minimalizační formule pro CDaR)**.** *Nechť* $\mathcal{AD}(\mathbf{w}) = (AD_1, \dots, AD_N)^\mathsf{T}$ *je drawdown funkce a* $\alpha \in (0,1)$. *Výpočet hodnoty* $\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}(\mathbf{w}))$ *lze redukovat na úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned}\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) = \quad & \min_{y,\mathbf{z}} \quad y + \tfrac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{k=1}^{N} z_k \\ & s.t. \quad z_k \geq AD_k - y,\ z_k \geq 0,\ k = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

vedoucí k jediné optimální hodnotě $y^* = \pi^{-1}_{\mathcal{AD}}(\alpha)$ *nebo k uzavřenému intervalu optimálních hodnot* $y^* \in [\pi^{-1}_{\mathcal{AD}}(\alpha), \pi^{-1}_{\mathcal{AD}}(\alpha_+)]$ *(kde* α_+ *značí limitu zprava).*

Důsledek 4.2. *Nechť* $\mathbf{r}^{(p)} = (r_1^{(p)}, \dots, r_N^{(p)})^\top$ *jsou výnosy daného portfolia nebo aktiva odpovídající okamžikům* $t_1, \dots, t_N$ *a* $\alpha \in (0,1)$. *Hodnotu* $\mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}(\mathbf{w}))$ *lze vypočíst vyřešením úlohy lineárního programování*

$$\begin{aligned} \mathrm{CDaR}_\alpha(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) = \quad \min_{\mathbf{u},y,\mathbf{z}} \quad & y + \tfrac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{k=1}^{N} z_k \\ s.t. \quad & z_k \geq u_k - y, \\ & u_k \geq u_{k-1} - r_k^{(p)},\ u_0 = 0, \\ & z_k \geq 0,\ u_k \geq 0,\ k = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{4.1}$$

vedoucí k jediné optimální hodnotě $y^* = \pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha)$ *nebo k uzavřenému intervalu optimálních hodnot* $y^* \in [\pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha), \pi_{\mathcal{AD}}^{-1}(\alpha_+)]$.

Následující tvrzení zobecňuje předchozí úlohu pro více scénářů výnosů a pro diskrétní rizikový profil namísto pevné úrovně α.

Tvrzení 4.3. *Nechť* $\mathbf{r}_s^{(p)} = (r_{s1}^{(p)}, \dots, r_{sN}^{(p)})^\top$ *jsou výnosy daného portfolia nebo aktiva odpovídající okamžikům* $t_1, \dots, t_N$ *a s-tému scénáři majícímu pravděpodobnost* p_s, $s = 1, \dots, S$ *(viz kapitola 2.3) a* χ *je diskrétní rizikový profil jako v definici 2.15. Hodnotu* $\mathrm{MCDaR}_\chi(\mathcal{AD}(\mathbf{w}))$ *lze vypočíst vyřešením úlohy lineárního programování*

$$\begin{aligned} \mathrm{MCDaR}_\chi(\mathcal{AD}(\mathbf{w})) = \quad \min_{\mathbf{u},\mathbf{y},\mathbf{z}} \quad & \sum_{l=1}^{L} \chi(\alpha_l) \left(y_l + \tfrac{1}{(1-\alpha_l)N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} p_s z_{lsk} \right) \\ s.t. \quad & z_{lsk} \geq u_{sk} - y_l, \\ & u_{sk} \geq u_{s(k-1)} - r_{sk}^{(p)},\ u_{s0} = 0, \\ & z_{lsk} \geq 0,\ u_{sk} \geq 0, \\ & l = 1, \dots, L,\ s = 1, \dots, S,\ k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

V dalším budeme chtít drawdown míru $CDaR_\alpha$ pro jeden scénář výnosů použít k optimalizaci portfolia. Úlohu budeme formulovat následovně: naším cílem bude minimalizovat riziko vyjádřené drawdown mírou za podmínky, že náš výnos bude alespoň roven dané konstantě μ. Tedy

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & CDaR_\alpha\left(\mathcal{AD}\left(\mathbf{w}\left(\mathbf{x}\right)\right)\right) \\ s.t. \quad & \tfrac{1}{N} w_N(\mathbf{x}) \geq \mu, \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde $\mathcal{X}$ je množina omezení pro váhy $\mathbf{x}$. Důvod, proč je levá strana podmínky přenásobena konstantou $\frac{1}{N}$ je, aby tato podmínka odpovídala podmínce v úloze 4.4 – ozřejmíme níže.

Budeme předpokládat, že váhy jsou konstantní na celém časovém intervalu $[0,T]$, tedy $\mathbf{x}(t_k)=\mathbf{x}\ \forall t_k\in\{1,\ldots,N\}$, kde $\mathbf{x}$ je vektor konstant, $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$.

Věta 4.4 (Optimalizace portfolia pomocí drawdown míry)**.** *Problém 4.2 lze za předpokladů důsledku 4.2 formulovat jako úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X},\mathbf{u},y,\mathbf{z}} \quad & y+\tfrac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{k=1}^{N} z_k\\
s.t. \quad & \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_k^{(p)}(\mathbf{x})\geq \mu,\\
& z_k\geq u_k-y,\ z_k\geq 0,\\
& u_k\geq u_{k-1}-r_k^{(p)}(\mathbf{x}),\ u_0=0,\\
& u_k\geq 0,\ k=1,\ldots,N.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.2 Model založený na CVaR

Analogicky k CDaR, lze i výpočet CVaR zformulovat jako úlohu linárního programování. Následující tvrzení jsou odvozeny v [9]. Základní předpoklady jsou stejné, jako v kapitole 3.

Věta 4.5 (Minimalizační formule pro CVaR)**.** *Nechť $g(\mathbf{x},\mathbf{r})$ je ztráta portfolia a $\alpha\in(0,1)$.* $\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$ *lze vypočítat vyřešením úlohy*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \quad \min_y \quad y+\tfrac{1}{1-\alpha}\mathsf{E}\left[[g(\mathbf{x},\mathbf{r})-y]^+\right]$$

vedoucí k jediné optimální hodnotě $y^*=\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$ nebo k uzavřenému intervalu optimálních hodnot $y^*\in[\mathrm{VaR}_\alpha(\mathbf{x}),\mathrm{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x})]$.

Nyní předchozí tvrzení zformulujeme pro konkrétní případ - konečný počet scénářů výnosů.

Důsledek 4.6. *Nechť náhodný vektor výnosů $\mathbf{r}$ má diskrétní rozdělení soustředěné v konečně mnoha bodech $\mathbf{r}_s$, $s=1,\ldots,S$, s pravděpodobnostmi p_s, $s=1,\ldots,S$. Nechť $r_s^{(p)}=\mathbf{r}_s^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Pak lze lze* $\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$ *vypočítat vyřešením úlohy*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \quad \min_y \quad y+\tfrac{1}{1-\alpha}\sum_{s=1}^{S} p_s\left[-r_s^{(p)}-y\right]^+.$$

Nyní bychom chtěli formulovat optimalizační úlohu tak, aby byla snadno srovnatelná s úlohou 4.4, tedy abychom ji mohli aplikovat stejným způsobem na stejná data a se stejným omezením. Proto za jednotlivé scénáře budeme brát to, co v modelu s drawdown mírou považujeme za pozorování v jednotlivých okamžicích jednoho scénáře. Budeme mít proto N scénářů (a abychom sjednotili značení, budou indexovány písmenem k), z nichž každý bude mít pravděpodobnost $p_k = \frac{1}{N}$. Budeme chtít minimalizovat riziko vyjádřené pomocí CVaR za podmínky, že náš výnos (v tomto případě střední hodnota výnosů při jednotlivých scénářích) bude alespoň roven dané konstantě μ. Tato podmínka je ekvivalentní podmínce v úloze 4.4, neboť $w_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} r_k^{(p)}(\mathbf{x})$. Úlohu tedy zapíšeme jako

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \quad & \mathrm{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) \\ s.t. \quad & \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_k^{(p)}(\mathbf{x}) \geq \mu, \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $\mathcal{X}$ je množina omezení pro váhy $\mathbf{x}$.

Věta 4.7 (Optimalizace portfolia pomocí CVaR)**.** [7] *Nechť náhodný vektor výnosů* $\mathbf{r}$ *má diskrétní rozdělení soustředěné v konečně mnoha bodech* $\mathbf{r}_k$, $k = 1, \dots, N$, *s pravděpodobnostmi* $p_k = \frac{1}{N}$, $k = 1, \dots, N$. *Nechť* $r_k^{(p)} = \mathbf{r}_k^\mathsf{T}\mathbf{x}$. *Problém 4.4 lze potom formulovat jako úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X},y,\mathbf{z}} \quad & y + \tfrac{1}{(1-\alpha)N}\sum_{k=1}^{N} z_k \\ s.t. \quad & \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_k^{(p)}(\mathbf{x}) \geq \mu, \\ & z_k \geq -r_k^{(p)} - y,\ z_k \geq 0,\ k = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Kapitola 5

Empirická aplikace

V této kapitole vyřešíme představené optimalizační úlohy 4.3 a 4.5 pro reálný historický scénář výnosů, konkrétně pro data z Burzy cenných papírů Praha. Zájemce o další aplikace drawdown měr na historická data odkazujeme zejména na práce [3], [4], [5] a [11].

5.1 Formulace úlohy

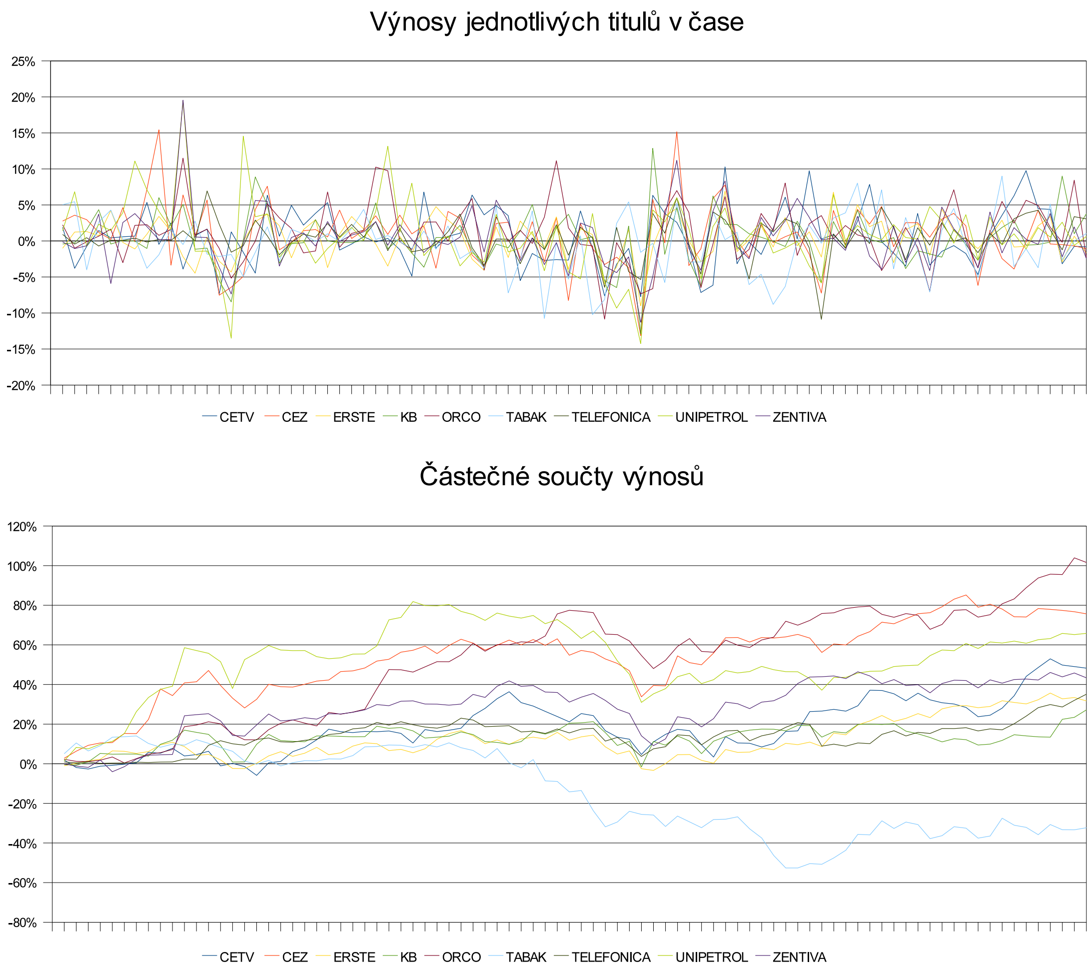
S pomocí CDaR a CVaR budeme hledat optimální portfolio akcií obchodovaných na Pražské burze cenných papírů, z nichž se ke dni 28. 2. 2007 skládalo portfolio Pražské burzy – index PX. Konkrétně se jedná o tituly CETV, ČEZ, Erste Bank, Komerční banka, Orco, Phillip Morris ČR, Telefónica O2 C.R., Unipetrol a Zentiva. Využijeme k tomu údaje o týdenních výnosech za období od 1. 9. 2005 do 28. 2. 007.

Tato data byla původně použita v práci [10], kde bylo také představeno, jak se k nim došlo: „Výnosy byly spočteny z uzavíracích akciových kurzů na konci každého obchodovacího týdne od 1. 9. 2005 do 28. 2. 2007, s odpovídajícím dividendovým výnosem. Označíme-li $K(t_k)$ kurz dané akcie na konci k-tého týdne, D dividendu vyplacenou v l-tém týdnu (uvažujeme-li období od 1. 9. 2005 do 28. 2. 2007, ve kterém byly dividendy vypláceny pouze jednou), pak týdenní výnos dané akcie je dán vzorcem

$$r(t_k) = \frac{K(t_k) - K(t_{k-1}) + \frac{D}{52}\mathbb{I}_{\{k \leq l\}}}{K(t_{k-1})},$$

kde $\mathbb{I}$ je indikátorová funkce. Týdenní data od 1. 9. 2005 do 28. 2. 2007 dávají 86 pozorování pro každou akcii.“ Tato data může čtenář nalézt v příloze A.

Dále počítáme s tím, že bezriziková úroková míra je 4% p.a., tedy týdenní výnos bezrizikového aktiva je $r_0 \approx 0,0769\%$. Dále jsme si spočetli, že průměrný týdenní výnos indexu PX za toto období byl přibližně 0,5274%.



Obrázek 5.1: Grafy výnosů akcií

Naším úkolem tedy bude najít portfolio složené z výše zmíněných titulů, které bude při daném minimálním očekávaném týdenním výnosu nejméně rizikové. Riziko přitom budeme měřit pomocí měr CDaR a CVaR na hladině 0,95. Prodeje na krátko nebudou povoleny. Ukážeme, jak se výsledky změní, pokud neumožníme vkládat prostředky do bezrizikového aktiva. Za minimální očekávaný týdenní výnos vezmeme týdenní výnos indexu PX (0,5274%) a dále 0,25%, 0,75% a 1,0% a také výnos bezrizikového aktiva, pokud do něj neumožníme vkládat prostředky. Úlohu řešíme v programu GAMS.

5.2 Výsledky s bezrizikovým aktivem

V tabulce 5.1 je vidět, jakých výsledů jsme dosáhli za předpokladu, že lze vkládat prostředky do bezrizikového aktiva. V prvním řádku tabulky vidíme použitou míru rizika, ve druhém požadovaný očekávaný výnos, následuje rozložení (váhy) portfolia a v posledním řádku je pak hodnota rizika měřená pomocí dané míry.

	$CDaR_{0,95}$				$CVaR_{0,95}$			
pož.výnos	**0,25%**	**PX**	**0,75%**	**1,0%**	**0,25%**	**PX**	**0,75%**	**1,0%**
CETV	-	-	-	-	-	-	-	-
CEZ	4,9%	9,2%	12,7%	16,6%	4,3%	11,1%	16,6%	22,7%
ERSTE	-	-	-	-	-	-	-	-
KB	-	-	-	-	-	-	-	-
ORCO	12,1%	34,1%	51,7%	71,5%	12,6%	32,7%	48,9%	67,0%
TABAK	-	-	-	-	-	-	-	-
TELEFON.	-	-	-	-	-	-	-	-
UNIPET.	-	-	-	-	-	-	-	-
ZENTIVA	-	-	-	-	-	-	-	-
bezrizikové	83,0%	56,7%	35,6%	11,9%	83,2%	56,2%	34,5%	10,2%
riziko	0,032	0,092	0,141	0,195	0,011	0,030	0,045	0,062

Tabulka 5.1: Optimalizace s bezrizikovým aktivem

Z tabulky vidíme, že portfolia kromě bezrizikového aktiva budou obsahovat pouze tituly CEZ a ORCO a to jak při použití míry $CDaR_{0,95}$, tak při použití míry $CVaR_{0,95}$. Portfolia jsou si velmi podobná, rozdíl je pouze v tom, že při každém pevném požadovaném výnosu bude při použití míry $CDaR_{0,95}$ titul CEZ v portfoliu zastoupen v poměru o několik procentních bodů menším než při použití $CVaR_{0,95}$, a to z větší části na úkor titulu ORCO.

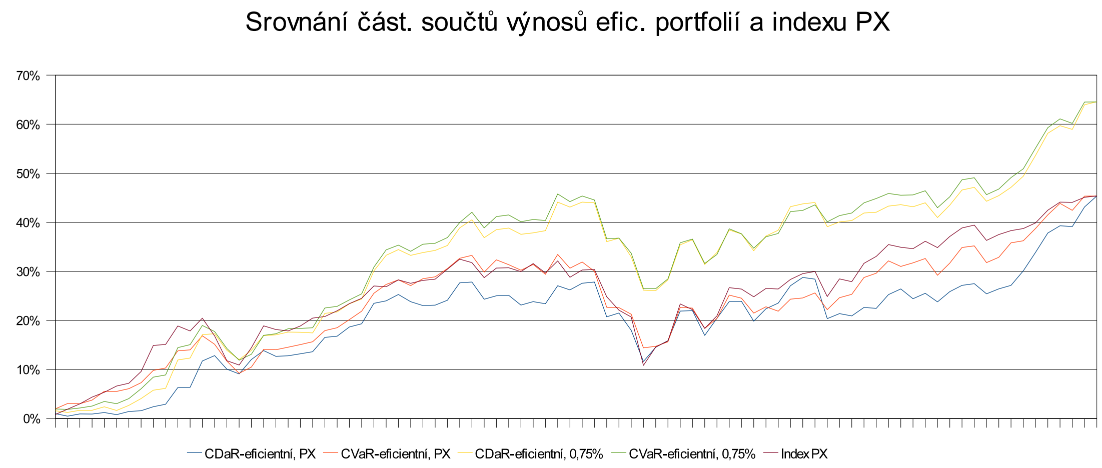
5.3 Výsledky bez bezrizikového aktiva

Pokud nepovolíme nákup bezrizikového aktiva (viz tabulka 5.2), portfolia už budou rozmanitější, než v předchozích případech. Pro vysoké výnosy opět budeme nakupovat především tituly CEZ a ORCO. Pokud se spokojíme s nižším výnosem, ale budeme požadovat menší úroveň rizika, budeme nakupovat zejména titul TELEFONICA. Zatímco za použití míry rizika $CDaR_{0,95}$ bychom jako konzervativní investor preferovali dále KB a CETV, za použití míry rizika $CVaR_{0,95}$ to budou především ERSTE, TABAK a CETV.

	$CDaR_{0,95}$					$CVaR_{0,95}$				
pož.výnos	**b.r.**	**0,25%**	**PX**	**0,75%**	**1,0%**	**b.r.**	**0,25%**	**PX**	**0,75%**	**1,0%**
CETV	14,5%	14,5%	-	-	-	3,0%	-	4,3%	7,1%	-
CEZ	-	-	-	8,3%	15,1%	-	-	14,0%	13,7%	35,3%
ERSTE	-	-	-	-	-	40,9%	30,0%	13,5%	-	-
KB	33,5%	33,5%	8,8%	-	-	-	-	-	-	-
ORCO	-	-	16,5%	39,2%	67,3%	3,5%	5,7%	24,2%	39,2%	55,0%
TABAK	-	-	-	-	-	27,6%	25,7%	17,2%	4,7%	-
TELEFON.	51,9%	51,9%	74,7%	52,6%	17,6%	25,0%	27,5%	26,7%	35,4%	9,7%
UNIPET.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ZENTIVA	-	-	-	-	-	-	11,1%	-	-	-
riziko	0,124	0,124	0,128	0,158	0,201	0,049	0,049	0,053	0,057	0,065

Tabulka 5.2: Optimalizace bez bezrizikového aktiva

Za neatraktivní tituly (tj. tituly, které jsou v optimálních portfoliích obsaženy jen velmi okrajově nebo vůbec) považuje míra $CDaR_{0,95}$ tituly ERSTE, TABAK, UNIPETROL a ZENTIVA, zatímco $CVaR_{0,95}$ pouze tituly UNIPETROL a KB. Z tabulky je ale vidět, že zatímco v portfoliích sestaveném za pomoci $CDaR_{0,95}$ jsou pro naše data a dané požadované výnosy vždy nejvýše (dokonce právě) tři tituly, v těch sestavených za pomoci $CVaR_{0,95}$ je to až šest titulů. Z toho je vidět, že $CVaR_{0,95}$ nám dává více diverzifikovaná portfolia, než $CDaR_{0,95}$. Vzhledem k tomu, že CVaR počítá pouze průměr nejhorších ztrát z jednotlivých týdnů a CDaR „má paměť“, tj. počítá průměr největších propadů v rámci celého období, lze tento fakt interpretovat tak, že $CDaR_{0,95}$ do portfolia zařadil pouze ty tituly, které neměly dlouhodobě klesající trend, zatímco $CVaR_{0,95}$ zařadil i takové, které mohly i dlouhodoběji (několik týdnů za sebou) klesat (tj. mít velké drawdowny), ale průměr jednotlivých nejhorších týdenních propadů nebyl velký (srovnej obrázek 5.1).



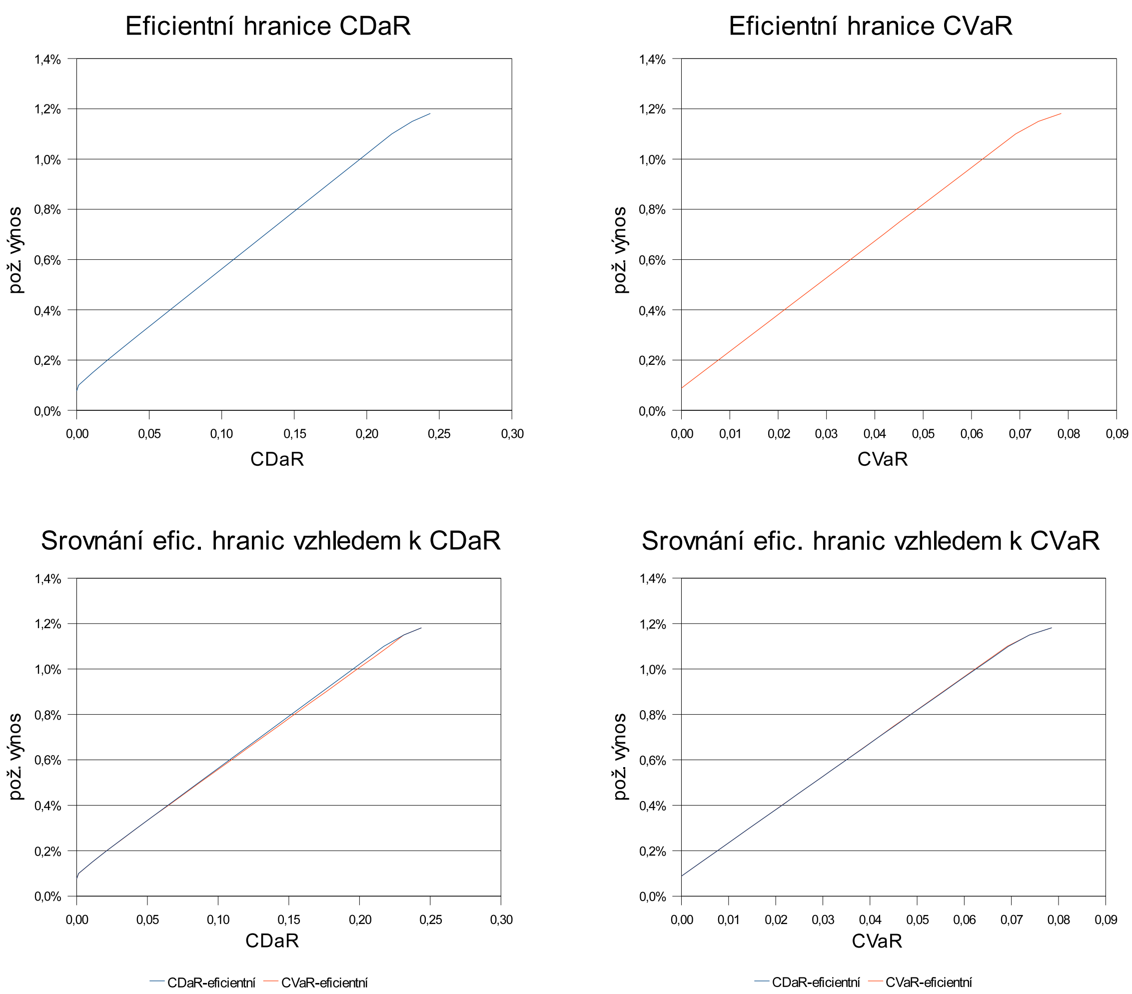
Obrázek 5.2: Grafy výnosů portfolií

Naměřené riziko je vždy větší (a to dokonce výrazně) pro míru $\mathrm{CDaR}_{0,95}$. To opět souvisí s konstrukcí těchto měr – s tím že CDaR je míra dynamická, „s pamětí“, a počítá propady v rámci celého období. Když se podíváme na vstupní data pro naše úlohy, viz příloha A, vidíme, že CDaR míra v tomto případě umožňuje lépe se vyhnout dlouhodobému riziku: jediným titulem, který měl za celé období od 1.9.2005 do 28.2.2007 záporný průměr týdenních výnosů, byl titul TABAK, který se v portfoliích vzniklých optimalizací pomocí CDaR vůbec nevyskytl, zatímco v některých vzniklých optimalizací pomocí CVaR ano.

Pro zajímavost uvádíme i graf částečných součtů výnosů optimálních portfolií s požadovanými očekávanými výnosy rovnými alespoň výnosu PX a alespoň 0,75% (obrázek 5.2). Především na optimálních portfoliích s očekávanými výnosy rovnými výnosu PX si je možné všimnout, že portfolio optimalizované pomocí $\mathrm{CDaR}_{0,95}$ má skutečně menší drawdowny, ale to za cenu toho, že po většinu času jsou částečné součty výnosů menší. Srovnáme-li tato dvě portfolia s portfoliem odpovídajícím indexu PX, lze si všimnout, že index PX má po většinu času vyšší částečné součty výnosů, než každé z těchto dvou portfolií.

5.4 Eficientní hranice

Nyní prostudujeme eficientní hranice, tedy křivky znázorňující očekávaný výnos optimálního (vzhledem k nějaké míře rizika) portfolia v závislosti na riziku. Budeme pracovat se stejnými daty i mírami rizika jako v předchozí části. Nejprve se podíváme na eficientní hranice v případě, že povolíme nákup bezrizikového aktiva. Jak je vidět z grafů (obrázek 5.3), eficientní hranice pro



Obrázek 5.3: Eficientní hranice (portfolia s bezrizikovým aktivem)

$\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$ i $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$ jsou téměř lineární, pouze těsně u hranice maximálního možného dosažitelného očekáváného výnosu (v oblasti, kde už v portfoliích není obsaženo bezrizikové aktivum) se růst mírně zpomaluje. Maximální dosažitelný očekávaný výnos je přitom zhruba 1,1816% a je ho dosaženo, pokud se portfolio bude skládat pouze z titulu ORCO.

Ve spodních grafech vidíme srovnání eficientních hranic. Toto srovnání bylo vytvořeno tak, že jsme vzali portfolia patřící do obou eficientních hranic, a k nim spočetli velikost rizika pomocí jedné dané míry. Jak je vidět, eficientní hranice jsou si velmi podobné, pouze na levém grafu je vidět, že portfolia z $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$-eficientní hranice mají při daném $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$ o něco málo menší výnos (rozdíl je ale nejvýše v setinách procentních bodů).

V případě, že nákup bezrizikového aktiva nepovolíme, bude situace zajímavější (viz obrázek 5.4). Eficientní hranice budou konkávní křivky (viz [4]). Eficientní hranice pro $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$ roste v oblasti, kde dosahuje hodnot mezi 0,6% a 1,05%, přibližně lineárně.

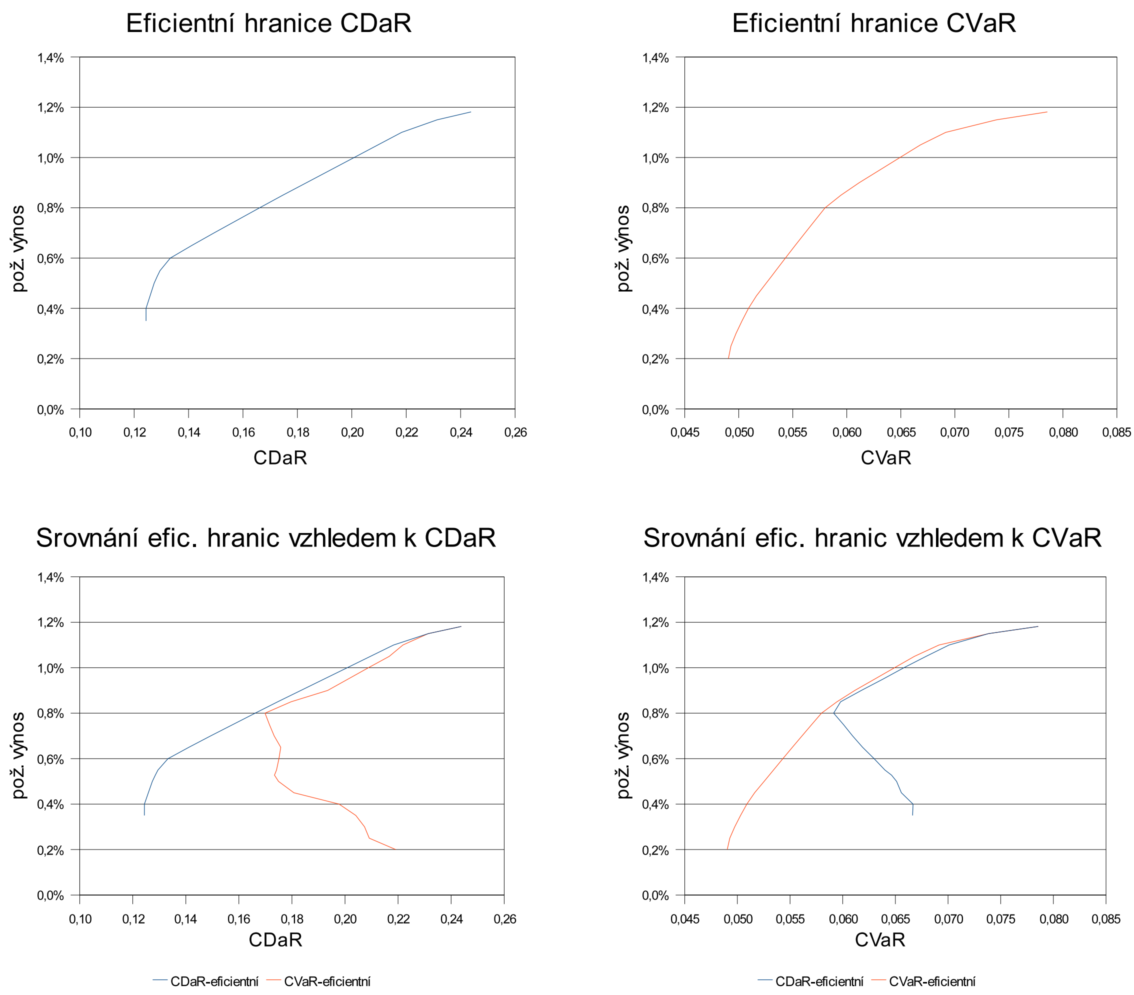
Další věcí, které si zde můžeme všimnout, je, že snižováním požadovaného výnosu pod cca 0,4% už nezmenšíme $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$ optimálního portfolia, zatímco u $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$ je tato hranice až někde u 0,2%. Lze zjistit, že úlohy v těchto bodech dosahují svého globálního minima a ani odstraněním požadavku na očekávaný výnos už nelze riziko zmenšit.

To nejzajímavější ale vidíme ve spodních grafech, které srovnávají eficientní hranice. Pokud očekávaný výnos přesahuje 0,8%, jsou si eficientní hranice podobné (to je způsobeno i podobným složením jejich portfolií, v nichž jsou v různých poměrech obsaženy především dva nejvýnosnější tituly: ORCO a CEZ), nicméně při nižších očekávaných výnosech je vidět velmi zajímavý jev – portfolia, která jsou eficientní vůči $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$, mají velmi vysoké riziko měřené pomocí $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$ a naopak, obě míry rizika zde tedy „jdou proti sobě".

Například portfolia eficientní vzhledem k $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$ s výnosností okolo 0,4% mají $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$ roven zhruba 0,20 (tedy stejně jako portfolia s mnohem vyšší výnosností okolo 0,95%), ale portfolia eficientní vzhledem k $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$ s výnosností okolo 0,8% mají $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$ zhruba pouhých 0,17.

Podobně při srovnání eficientních hranic vzhledem k $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$ vidíme, že $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$-eficientní portfolia s výnosnostmi zhruba 0,4% mají $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$ zhruba 0,067 (tj. stejně jako portfolio s výnosností cca 1,0%), ale $\mathrm{CDaR}_{0{,}95}$-eficientní portfolio s výnosností 0,8% má $\mathrm{CVaR}_{0{,}95}$ jen cca 0,059.

To může být způsobeno tím, co již bylo zmíněno výše – tituly které neměly dlouhodobější klesající trendy (a tím byly atraktivní pro drawdown míru), mohly mít velké jednorázové týdenní propady, naopak tituly s dlouhodobějšími klesajícími tendencemi nemusely mít velké mezitýdenní propady (a tak zůstat atraktivní pro $\mathrm{CVaR}_{0,95}$).Ostatně, jak je vidět z tabulky 5.2, portfolia s malými požadovanými očekávanými výnosy sestavená pomocí $\mathrm{CDaR}_{0,95}$ a $\mathrm{CVaR}_{0,95}$ se od sebe svým složením vzájemně skutečně liší (shodují se pouze v 28% svého složení pro požadovaný výnos rovný aspoň bezrizikovému, v 27,5% pro požadovaný výnos rovný aspoň 0,25% a v 43,2%



Obrázek 5.4: Eficientní hranice (portfolia bez bezrizikového aktiva)

pro požadovaný výnos rovný aspoň výnosu indexu PX).

Kapitola 6

Závěr

V této práci jsme se zabývali drawdown mírami rizika. Po definici pojmů míra rizika a koherentní míra rizika jsme zavedli maximální, průměrný a podmíněný drawdown (CDaR), který je koherentní mírou rizika. Představili jsme také alternativní míry VaR a CVaR. Ukázali jsme způsob výpočtu těchto měr jako řešení úlohy lineárního programování. Formulovali jsme úlohu optimalizace portfolia jako úlohu vícekriteriální optimalizace s maximalizací zisku a minimalizací rizika měřeného pomocí CDaR a CVaR. V obou případech se opět jedná o úlohu lineárního programování.

Tuto úlohu jsme vyřešili pro konkrétní historická data z Pražské burzy cenných papírů. Hledali jsme portfolio, které bude při daném požadovaném očekávaném výnosu nejméně rizikové. Riziko jsme přitom měřili pomocí $\mathrm{CDaR}_{0,95}$ a $\mathrm{CVaR}_{0,95}$. Našli jsme složení optimálních (eficientních) portfolií při několika daných hodnotách požadovaných výnosů a analyzovali jsme eficientní hranice. Zjistili jsme, že ve složení portfolií optimalizovaných pomocí CDaR a CVaR jsou značné rozdíly, a že portfolia, která jsou CVaR-eficientní, mají vysoký CDaR a naopak. Tento rozdíl jsme přičetli na vrub tomu, že CDaR přikladá větší důraz dlouhodobým propadům, než CVaR.

Pokud bychom měli k dispozici jiná data, v nichž by byly tituly s jinou charakteristikou, mohli bychom dosáhnout odlišných výsledků. Problematika by si jistě zasloužila širší prostudování – například aplikace na jiné typy aktiv a na delší časový horizont. Numerické studie, v nichž je podmíněný drawdown použit k optimalizaci portfolia, lze nalézt například v pracích [3] a [4]. V práci [5] jsou potom srovnávány CDaR a CVaR v úloze optimalizace portfolia hedge fondů, které jsou rizikovější než aktiva, s nimiž jsme pracovali my. V práci [11] je CDaR používán pro změnu v aplikaci na švédskou burzu v období před a během současné ekonomické krize.

V současné době se v praxi používá více CVaR než drawdown míry i z toho důvodu, že byl představen dříve a vychází ze zavedného Value at Risk.

Literatura

[1] Artzner P., Delbaen F., Elber J. M., Heath D. (1999). *Coherent Measures of Risk*. Math. Finance 9, no. 3, 203-228

[2] Branda M. (2006). *Míry rizika - dynamika, citlivost*, diplomová práce MFF UK.

[3] Chekhlov A., Uryasev S., Zabarankin M. (2000). *Portfolio Optimization With Drawdown Constraints*. Research Report 2000-5. ISE Dept., University of Florida.

[4] Chekhlov A., Uryasev S., Zabarankin M. (2004). *Drawdown Measure in Portfolio Optimization*. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 8, 1, 13-58.

[5] Krokhmal P., Uryasev S., Zrazhevsky G. (2003). *Numerical Comparison of CVaR and CDaR Approaches: Application to Hedge Funds*. The Stochastic Programming Approach to Asset Liability and Wealth Management (Zimba W. T., ed.). AMIR/Blackwell Publisher.

[6] Markowitz H. M. (1952). *Portfolio Selection*. Journal of Finance, 7, 77-91.

[7] Pflug G. (2000). *Some Remarks on the Value-At-Risk and the Conditional Value-At-Risk*. Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications (Uryasev S., ed.). Kluwer Academic Publishers, Norwell, 278-287.

[8] Rockafellar R. T., Uryasev S. (2000). *Optimization of Conditional Value-at-Risk*. Journal of Risk, 2, 21-41.

[9] Rockafellar R. T., Uryasev S. (2002). *Conditional Value-At-Risk for General Loss Distributions*. Journal of Banking and Finance, 26, 1443-1471.

[10] Slámová L. (2007). *Stochastická dominance a eficience akciového portfolia*, bakalářská práce MFF UK.

[11] Stolt M., Holmberg F. (2008). *Analysis of the Risk Measure CDaR*, An Assignment in Advanced Portfolio Theory, Royal Institue of Technology, Stockholm.

Příloha A

Data z BCPP

Následující tabulka obsahuje data popisovaná a používaná v kapitole 5. V prvním sloupci se nachází číslo týdne v období od 1. 9. 2005 do 28. 2. 2007, v dalších sloupcích potom týdenní výnosy jednotlivých titulů za daný týden.

týden	CETV	CEZ	ERSTE	KB	ORCO	TABAK	TELEF.	UNIP.	ZENT.	PX
1	1,90%	2,76%	-1,01%	-0,42%	2,24%	5,04%	0,91%	1,42%	-0,12%	0,83%
2	-3,80%	3,57%	1,23%	-0,26%	-1,02%	5,44%	-0,44%	6,83%	-1,05%	1,08%
3	-0,76%	2,95%	1,30%	1,59%	-0,11%	-4,01%	0,45%	-0,72%	-0,67%	1,08%
4	1,44%	1,19%	0,73%	4,34%	0,67%	2,64%	-0,70%	2,32%	3,72%	1,38%
5	0,42%	0,21%	4,25%	-0,43%	1,64%	4,28%	0,10%	1,43%	-5,90%	0,98%
6	0,58%	4,62%	-0,20%	0,09%	-3,01%	0,23%	0,08%	3,93%	2,56%	1,27%
7	0,66%	-0,13%	-1,11%	-0,04%	2,17%	0,41%	0,39%	11,09%	3,80%	0,57%
8	5,34%	7,15%	0,94%	-1,04%	2,26%	-3,78%	-0,16%	7,11%	2,00%	2,39%
9	-0,47%	15,43%	3,41%	6,00%	0,78%	-1,92%	0,21%	4,12%	0,18%	5,31%
10	2,51%	-3,35%	1,33%	2,06%	1,59%	1,56%	0,08%	1,63%	0,18%	0,20%
11	-3,90%	6,38%	-2,21%	5,08%	11,49%	-0,49%	1,42%	19,41%	19,55%	3,78%
12	0,72%	0,59%	-4,47%	-1,15%	0,86%	2,74%	0,01%	-1,43%	0,55%	-1,02%
13	1,66%	5,69%	0,56%	-1,00%	1,63%	-1,82%	6,94%	-1,40%	0,46%	2,62%
14	-7,38%	-7,54%	-2,81%	-5,53%	-1,03%	-2,16%	2,33%	-4,23%	-3,63%	-3,63%
15	1,26%	-6,43%	-4,31%	-8,46%	-5,16%	-1,88%	-1,56%	-13,50%	-7,36%	-5,04%
16	-1,57%	-4,93%	-0,06%	0,09%	-2,90%	-4,93%	-0,68%	14,55%	-0,28%	-0,88%
17	-4,46%	4,36%	2,66%	8,89%	-0,04%	-1,59%	2,90%	3,36%	5,61%	3,51%
18	6,34%	7,59%	3,72%	4,99%	5,16%	1,96%	0,71%	3,76%	5,50%	4,47%
19	0,66%	-1,23%	2,12%	-3,10%	3,20%	-2,78%	-1,91%	-2,27%	-3,48%	-0,74%
20	4,94%	-0,18%	-2,33%	-0,39%	1,74%	1,61%	-0,19%	-0,29%	0,48%	-0,29%
21	2,20%	1,41%	1,58%	-0,24%	-1,66%	1,00%	0,95%	0,04%	1,13%	1,01%
22	3,84%	1,59%	2,93%	2,95%	-1,39%	-0,08%	0,52%	-3,08%	-0,72%	1,61%
23	5,32%	0,56%	-3,70%	-0,01%	6,80%	1,00%	2,42%	-1,05%	2,69%	0,31%
24	-1,26%	4,28%	0,95%	-0,21%	-0,87%	-0,09%	0,54%	0,44%	-0,07%	1,17%

týden	CETV	CEZ	ERSTE	KB	ORCO	TABAK	TELEF.	UNIP.	ZENT.	PX
25	-0,43%	0,34%	3,39%	-0,24%	1,04%	1,74%	2,30%	1,89%	0,83%	1,46%
26	0,57%	1,46%	1,65%	0,08%	1,48%	4,38%	0,55%	0,09%	1,26%	1,08%
27	-0,14%	3,49%	-0,42%	5,28%	10,25%	0,20%	2,68%	4,09%	2,66%	2,52%
28	0,36%	0,90%	-3,49%	-1,08%	9,75%	0,75%	-1,35%	13,14%	-0,58%	-0,16%
29	-1,20%	3,58%	0,63%	0,41%	-0,12%	-0,13%	1,71%	1,21%	2,26%	1,41%
30	-4,87%	0,98%	-1,71%	-1,68%	-1,17%	-1,06%	-1,51%	8,01%	0,18%	-0,71%
31	6,78%	2,10%	2,02%	-3,64%	2,61%	1,36%	-1,20%	-2,04%	-1,59%	0,60%
32	-0,99%	-3,78%	4,76%	0,47%	2,64%	-1,14%	-0,52%	-0,14%	-0,07%	0,26%
33	0,64%	4,10%	2,89%	0,47%	-0,03%	2,08%	1,29%	0,68%	-0,50%	2,01%
34	1,06%	3,14%	1,49%	2,17%	3,45%	-2,45%	3,74%	-3,46%	0,53%	2,04%
35	6,38%	-1,96%	-2,53%	-1,33%	5,89%	-1,40%	-0,93%	-1,62%	4,90%	-0,70%
36	3,62%	-3,51%	-4,08%	-3,54%	-4,04%	-3,78%	-3,38%	-2,93%	-1,54%	-3,07%
37	4,90%	2,43%	1,94%	-0,43%	3,33%	4,76%	0,26%	3,68%	5,66%	1,96%
38	3,52%	2,60%	-2,29%	-0,95%	-0,06%	-7,21%	0,24%	-1,53%	2,69%	0,07%
39	-5,50%	-2,40%	2,76%	1,38%	1,48%	-2,55%	-3,15%	-1,01%	-2,74%	-0,79%
40	-1,73%	2,67%	0,89%	5,05%	-0,34%	4,16%	0,41%	1,31%	0,41%	1,65%
41	-2,71%	-2,92%	-0,91%	-1,25%	3,31%	-10,75%	-1,16%	-4,13%	-3,28%	-1,92%
42	-2,59%	3,28%	3,34%	1,79%	11,13%	-0,26%	2,25%	2,10%	-0,23%	2,45%
43	-2,66%	-8,26%	-3,95%	3,70%	1,82%	-5,30%	-1,98%	-4,30%	-4,86%	-3,32%
44	4,17%	2,39%	1,69%	0,16%	-0,48%	0,72%	1,91%	-5,26%	2,49%	1,48%
45	-1,05%	-1,01%	0,88%	0,58%	-0,69%	-10,24%	0,41%	3,81%	1,85%	0,10%
46	-7,63%	-3,27%	-5,93%	-5,51%	-10,84%	-8,13%	-6,44%	-5,81%	-3,50%	-5,54%
47	-3,23%	-2,26%	-3,61%	-6,46%	-0,23%	2,44%	1,86%	-9,32%	-4,40%	-2,75%
48	-1,04%	-3,70%	1,56%	2,05%	-3,20%	5,42%	-4,26%	-6,71%	-2,20%	-1,39%
49	-7,72%	-13,14%	-9,00%	-12,90%	-7,35%	-1,58%	-5,35%	-14,24%	-11,28%	-9,86%
50	6,34%	5,77%	-0,85%	12,86%	-6,62%	-0,33%	3,83%	4,31%	-4,94%	3,75%
51	3,82%	-0,26%	3,41%	-1,86%	4,20%	-5,77%	1,08%	2,63%	3,39%	1,23%
52	2,58%	15,15%	4,53%	4,62%	6,99%	5,26%	5,98%	6,00%	11,19%	7,55%
53	-0,72%	-3,42%	0,08%	-2,58%	3,98%	-2,93%	-0,45%	1,76%	-1,03%	-1,16%
54	-7,15%	-1,09%	-2,92%	-6,32%	-6,48%	-2,93%	-4,59%	-5,23%	-4,07%	-3,83%
55	-6,15%	5,89%	-1,46%	6,25%	-0,43%	4,09%	4,03%	2,00%	4,14%	2,56%
56	10,28%	7,76%	6,92%	2,34%	6,14%	0,17%	2,93%	4,58%	8,33%	5,74%
57	-3,16%	0,12%	-1,46%	2,26%	-2,57%	1,21%	0,37%	-1,17%	-0,79%	-0,29%
58	-0,16%	-2,29%	0,16%	1,00%	-1,17%	-6,06%	-5,27%	0,69%	-2,47%	-1,57%
59	-1,87%	2,26%	2,03%	0,51%	3,81%	-4,63%	2,48%	2,60%	3,25%	1,70%
60	1,74%	-0,24%	-0,84%	-0,06%	1,43%	-8,81%	1,25%	-1,68%	0,70%	-0,12%
61	6,07%	0,59%	3,24%	-0,77%	8,04%	-6,32%	3,06%	-0,97%	2,78%	1,95%
62	0,29%	1,25%	-0,67%	2,73%	-2,01%	0,01%	2,38%	-0,05%	5,92%	1,19%
63	9,74%	-1,85%	1,28%	-0,09%	2,39%	2,18%	-0,97%	-3,47%	3,27%	0,45%
64	0,27%	-7,23%	-2,23%	-5,82%	3,52%	-0,31%	-10,88%	-5,83%	0,15%	-5,12%
65	0,86%	4,25%	6,76%	2,70%	0,32%	3,18%	0,98%	6,44%	0,39%	3,60%
66	-0,92%	-0,51%	-0,85%	-0,60%	2,14%	3,90%	-1,02%	0,05%	-1,31%	-0,57%
67	2,73%	4,39%	5,03%	4,26%	0,84%	8,02%	1,62%	2,14%	3,43%	3,74%
68	7,84%	2,35%	1,98%	0,23%	0,38%	-0,26%	-0,36%	0,90%	-2,11%	1,42%
69	-0,12%	4,78%	2,75%	-0,23%	-4,11%	7,09%	4,67%	0,15%	-3,92%	2,41%

týden	CETV	CEZ	ERSTE	KB	ORCO	TABAK	TELEF.	UNIP.	ZENT.	PX
70	-1,68%	-0,80%	-3,00%	0,47%	-1,51%	-3,86%	1,83%	2,27%	2,08%	-0,54%
71	-3,49%	2,53%	1,55%	-3,83%	1,86%	3,24%	-2,63%	0,48%	-2,98%	-0,30%
72	3,80%	2,53%	2,38%	-1,36%	-0,90%	-1,28%	1,83%	0,24%	0,40%	1,51%
73	-3,36%	0,51%	-2,01%	-1,81%	-7,02%	-7,09%	-0,58%	4,78%	-4,11%	-1,29%
74	-1,45%	3,02%	4,42%	-2,24%	2,45%	1,49%	2,51%	2,83%	4,70%	2,27%
75	-0,64%	3,83%	1,39%	1,59%	7,11%	4,51%	-0,04%	-0,31%	1,68%	1,75%
76	-1,74%	2,10%	0,25%	-0,50%	0,35%	-0,74%	0,44%	3,65%	-0,16%	0,58%
77	-4,66%	-6,17%	-1,06%	-2,68%	-3,75%	-5,01%	-1,63%	-2,58%	-3,71%	-3,13%
78	0,76%	1,50%	0,63%	0,45%	1,21%	1,06%	1,04%	3,31%	4,02%	1,20%
79	3,56%	-2,44%	2,87%	1,87%	5,48%	9,00%	-0,48%	-0,55%	-1,66%	0,80%
80	6,27%	-3,90%	-0,85%	2,88%	2,48%	-3,55%	3,08%	0,99%	1,84%	0,42%
81	9,76%	-0,12%	-0,73%	-0,58%	5,64%	-1,08%	3,85%	-1,10%	0,24%	1,14%
82	4,47%	4,28%	2,10%	-0,50%	4,93%	-3,71%	4,26%	1,85%	-0,47%	2,59%
83	4,39%	-0,42%	3,38%	-0,16%	1,91%	5,12%	1,57%	0,55%	3,79%	1,65%
84	-3,17%	-0,51%	-2,92%	9,01%	-0,18%	-2,63%	-1,23%	2,60%	-2,21%	-0,04%
85	-0,75%	-0,69%	0,66%	1,00%	8,43%	-0,01%	3,37%	-0,61%	1,94%	1,03%
86	-0,81%	-1,07%	-1,67%	3,77%	-2,31%	1,04%	3,06%	0,62%	-2,44%	0,26%

Příloha B

Zdrojový kód

Tato příloha obsahuje zdrojové kódy v GAMSu úloh řešených v kapitole 5. Jelikož jednotlivé konkrétní úlohy optimalizace pomocí CDaR, resp. CVaR se lišily pouze v hodnotách parametru `Mu` a v tom, jestli množina `Akcie` obsahovala prvek `NORISK`, uvádíme pouze zdrojový kód pro jednu konkrétní úlohu optimalizace pomocí CDaR, resp. CVaR. Kompletní zdrojové kódy lze nalézt na přiloženém CD.

Zdrojový kód optimalizace pomocí CDaR:

```
$Title Optimalizace portfolia pomoci CDAR

Set I Akcie /CETV,CEZ,ERSTE,KB,ORCO,TABAK,TELE,UNI,ZENT,NORISK/
    T Tydny /T1*T86/

Table R(T,I) Vynosy akcie I v case T
```

(Následuje tabulka, kterou pro přílišnou rozsáhlost vynecháváme. Viz příloha A.)

```
Parameter Mu Pozadovany vynos /0.0075/
          Alpha Hladina /0.95/;

Positive Variables Z(T) Pomocne promenne Z
                   U(T) Pomocne promenne U;
Variable Y Pomocna promenna Y;
Positive Variables X(I) Vahy portfolia;
```

```
Variable Risk Hodnota ucelove fce;

Equations Cdar Ucelova funkce tj riziko
          Omezeni Omezeni pozadovanym vynosem
          Omz(T) Omezeni na Z
          Omu(T) Omezeni na U
          Xsum Suma X je rovna jedne;

Cdar.. Risk =E= Y+(1/((1-Alpha)*86))*Sum(T,Z(T));
Omezeni.. (1/86)*Sum(T,Sum(I,R(T,I)*X(I))) =G= Mu;
Omz(T).. Z(T) =G= U(T)-Y;
Omu(T).. U(T) =G= U(T-1)-Sum(I,R(T,I)*X(I));
Xsum.. Sum(I,X(I)) =E= 1;

Model Optim /Cdar,Omezeni,Omz,Omu,Xsum/;

Solve Optim Minimizing Risk Using LP;
```

Zdrojový kód optimalizace pomocí CVaR:

```
$Title Optimalizace portfolia pomoci CVAR

Set I Akcie /CETV,CEZ,ERSTE,KB,ORCO,TABAK,TELE,UNI,ZENT,NORISK/
    T Tydny /T1*T86/

Table R(T,I) Vynosy akcie I v case T
```

(Následuje tabulka, kterou pro přílišnou rozsáhlost vynecháváme. Viz příloha A.)

```
Parameter Mu Pozadovany vynos /0.0075/
          Alpha Hladina /0.95/;

Positive Variables Z(T) Pomocne promenne Z;
Variable Y Pomocna promenna Y;
Positive Variables X(I) Vahy portfolia;
Variable Risk Hodnota ucelove fce;

Equations Cvar Ucelova funkce tj riziko
```

```
          Omezeni Omezeni pozadovanym vynosem
          Omz(T) Omezeni na Z
          Xsum Suma X je rovna jedne;

Cvar.. Risk =E= Y+(1/((1-Alpha)*86))*Sum(T,Z(T));
Omezeni.. (1/86)*Sum(T,Sum(I,R(T,I)*X(I))) =G= Mu;
Omz(T).. Z(T) =G= -Sum(I,R(T,I)*X(I))-Y;
Xsum.. Sum(I,X(I)) =E= 1;

Model Optim /Cvar,Omezeni,Omz,Xsum/;

Solve Optim Minimizing Risk Using LP;
```