

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce, doc. Marku Wolfovi, za poskytnutí užitečných rad při tvorbě práce a za poskytnutí pozorovacích dat. Také děkuji své rodině za podporu ve studiu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 26.5.2009

Michal Bílek

Obsah

| | |
|--|----|
| Abstrakt | 3 |
| Úvod | 4 |
| 1 Proč používat CCD | 5 |
| 2 Konstrukce a činnost CCD kamery | 7 |
| 3 Šum a redukce | 10 |
| 4 Formát FITS | 14 |
| 5 Poměr signál-šum | 16 |
| 6 Vlivy působící při fotometrii | 18 |
| 7 Fotometrie | 19 |
| 8 Fotometrie hvězd z CCD snímku | 21 |
| 9 Optimální apertura a její vlastnosti | 23 |
| Použitá literatura | 30 |

Abstrakt český

Název práce: Fotometrická analýza nedokonalého CCD obrazu

Autor: Michal Bílek

Katedra (ústav): Astronomický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Marek Wolf, CSc.

e-mail vedoucího: wolf@cesnet.cz

Abstrakt: V práci se zabýváme CCD kamerami a jejich použitím k fotometrii hvězd. Práce začíná porovnáním CCD s jejich předchůdci, fotografickými emulzemi, a je upozorněno na jejich klady a zápory. Dále je na základní úrovni vysvětlena konstrukce a činnost CCD kamery. Následuje kapitola o významu a praktickém provedení redukce snímků. Zařadili jsme kapitolu o datovém formátu FITS, s nímž přichází uživatelé CCD často do styku. Poté se zcela začínáme věnovat fotometrii hvězd. Zavádíme poměr signál-šum a zkoumáme jeho vlastnosti. V dalších kapitolách objasňujeme použití barevných filtrů a způsob korekce na atmosférickou extinkci světla. Popisujeme, jak se provádí diferenciální a celooblohová fotometrie hvězd a jak se zpracovávají výsledné snímky. Závěr je věnován určení optimální velikosti a tvaru apertury při aperturní fotometrii a její přesnosti.

Klíčová slova: CCD, fotometrie, CCD redukce, FITS, optimální apertura

Abstract english

Title: Photometric Analysis of the Defective CCD Image

Author: Michal Bílek

Department: Astronomical Institute of the Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Marek Wolf, CSc.

Supervisor's e-mail address: wolf@cesnet.cz

Abstract: The work is about CCDs and their use in stellar photometry. The work begins with a comparison of CCDs and their immediate ancestors, photographic emulsions. We point to their pros-and-cons. Then we explain basic features of CCD construction and we describe it's running. Follows a chapter about the goal of CCD image calibration and it's practical implementation. We have included a chapter about data format of FITS, what is a data format frequently used when working with a CCD. Then we begin to fully attend to the stellar photometry. We define the signal-to-noise ratio and we investigate it's properties. Next we clarify the use of color filters and the correction for the atmospherical extinction. We describe, how to do the stellar photometry and how to process resulting images. We consider both differential and all-sky photometry. At the end we investigate the optimal dimensions and shape of the aperture when doing aperture photometry and we discuss it's precision.

Keywords: CCD, Photometry, CCD Calibration, FITS, Optimal Aperture

Úvod

Když jsem se s vedoucím práce, doc. Wolfem, radil, jakou formu by měla práce mít, obzvláště se mi zalíbila možnost napsat ji jako příručku pro amatérské pozorovatele mající zájem o CCD fotometrii. Protože jsem nechtěl, aby práce byla jen školním cvičením, snažil jsem se ji napsat opravdu tak, aby v ní takový člověk našel většinu potřebných faktů, jež je nutno k provádění fotometrie znát. Jistě, sám jsem před sepsáním práce o tématu také mnoho nevěděl, ale tu vždy přišel na pomoc doc. Wolf a vždy si sepsanou část práce přečetl. Takže by se v ní žádný zásadní nesmysl neměl vyskytnout. Jemu vděčím i za řadu informací praktického rázu, které se v žádných knihách ani nevyskytují.

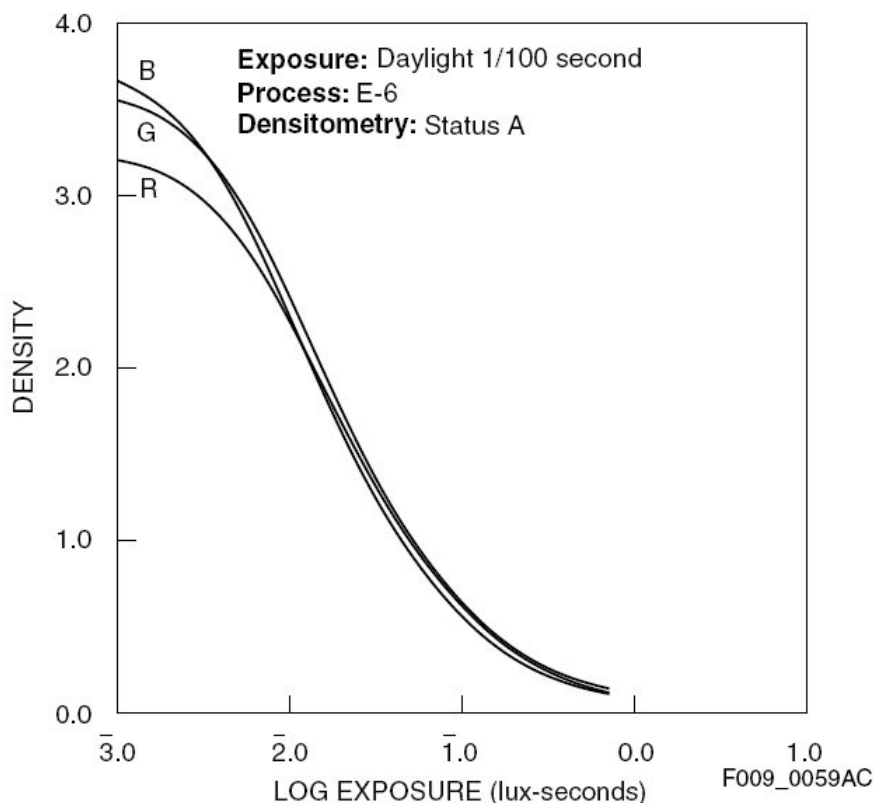
Text tedy začíná u všeobecných otázek spjatých s fyzikálními principy CCD detektoru a postupně se jeho téma zužuje přes redukci CCD snímků a fotometrii, aby nakonec došlo k naplnění názvu práce. Prvních několik kapitol bylo psáno tak, aby v nich našel užitečné informace i ten, kdo se zabývá astrofotografií jen pro „estetické účely“. Přitom bude čtenáři stačit gymnaziální vzdělání, případně si nevysvětlené pojmy velmi snadno najde na internetu.

Podkladem pro mé studium byly především knihy [1] a [2], z nichž jsem se ve své práci snažil obsáhnout vše důležité a přitom nezacházet do nepotřebných (k našim účelům) podrobností. Chybějící, nebo dle mého názoru užitečné informace jsem doplňoval z internetových zdrojů uvedených v seznamu literatury. Jako vydatný zdroj informací o CCD technice a redukci snímků se ukázala být webová stránka firmy Moravské přístroje, jež je v seznamu literatury v nečíslovaných položkách uvedena jako první. Podle zdroje [2] byly z větší části zpracovány kapitoly 5 a 8, poslední kapitola 9 je vlastní, zbytek čerpá hlavně z [1].

Závěrem úvodu bych chtěl vyjádřit naději, že se po opravě na připomínky váženého pana oponenta, stane tím, čím měla být, tedy vzdělávací příručkou pro širokou veřejnost.

1 Proč používat CCD

Ze všech různých druhů záznamových médií se v dnešní době v astronomii využívají především CCD kamery. Abychom zjistili, proč tomu tak je, srovnáme je s jejich předchůdci, fotografickými emulzemi.



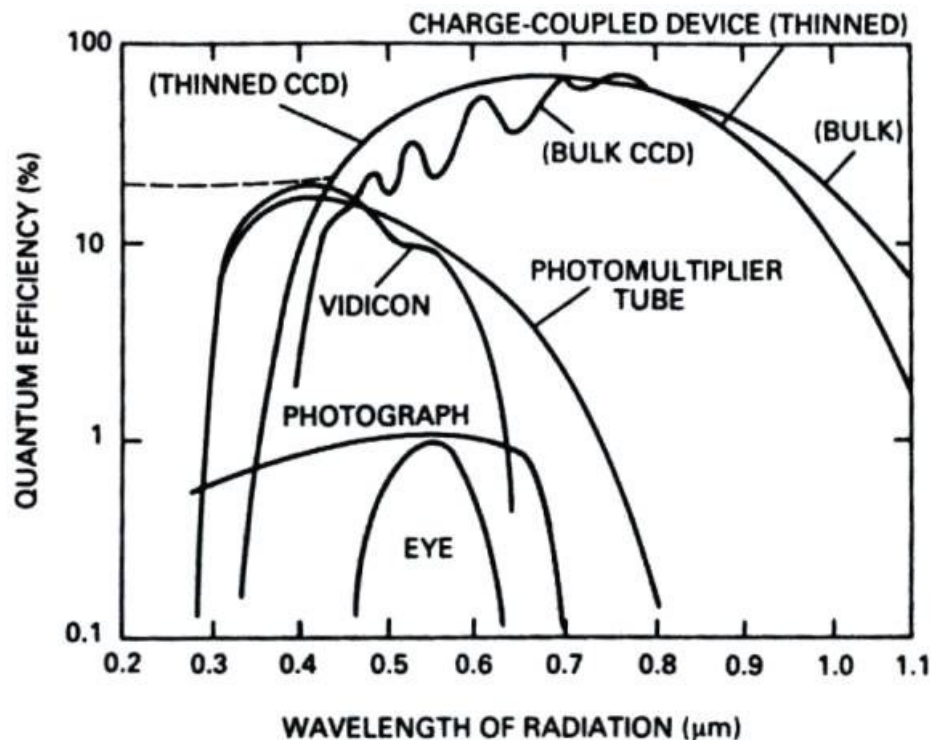
Obr. 1: Závislost logaritmu citlivosti fotografické emulze na logaritmu osvětlení. Jedná se o film Kodak Ektachrome E 200, jež se nejčastěji používá v amatérské astrofotografii.

Ohromnou předností CCD čipů je jejich relativně vysoká kvantová účinnost (tj. podíl detekovaných a dopadnutých fotonů vyjádřený v procentech), která dosahuje desítek procent. U některých čipů překračuje 90%, pro vhodnou vlnovou délku záření. To je znatelný rozdíl proti filmům a fotografickým deskám, kde se kvantová účinnost pohybuje v nejlepších případech mezi 1-3%. Pomocí procesu hypersenzibilizace lze kvantovou účinnost emulze zvýšit na asi 10%. To je však proces vyžadující další složité přístrojové vybavení a navíc se po něm zvyšuje zrnitost výsledného obrázku. Další vlastností CCD, velmi výhodnou pro fotometrii, je jejich linearita. To znamená, že exponujeme-li např. hvězdu (neproměnnou) dvakrát delší dobu, dostaneme dvakrát větší odezvu. U fotografických emulzí to neplatí. Po uplynutí jisté doby, kdy je reakce přibližně lineární, dochází k exponenciálnímu poklesu citlivosti fotografické emulze (Schwarzschildův jev). Linearita CCD čipů se projevuje i v druhém směru: exponujeme-li stejnou dobu dvakrát jasnější zdroj, naměříme opět dvakrát větší hodnoty. Závislost reakce

fotografické emulze na intenzitě světla je složitá a lze ji zjistit jen experimentálně. Liší se podle jejího chemického složení, stáří, způsobu vyvolání atd. Z toho plyne, že měření pomocí CCD jsou lépe opakovatelná.

Z hlediska další analýzy získaných dat na počítači opět vedou CCD. Protože získaná data jsou sama o sobě digitální, odpadá vnášení chyb do výsledků při digitalizaci, k němuž docházelo u filmových obrázků. Elektronická data zaberou v archivu pozorování samozřejmě méně prostoru, než kdybychom měli skladovat každou fotografickou desku nebo papír s fotografií zvlášť. Z elektronických záznamů lze vytvářet bezchybné kopie v libovolném množství. Jeden CCD čip lze použít, narozdíl od chemických detektorů, opakovaně.

Přesto všechno zůstávají filmy v některých ohledech nepřekonány. Cena CCD čipu o rozměrech i jen políčka kinofilmu (36×24 mm) se totiž pohybuje ve stovkách tisíc korun. Chceme-li tedy zachycovat velké plochy oblohy a zaznamenávat relativně jasné objekty, např. sledovat přelety bolidů (velmi jasných meteorů), bohatě stačí, když použijeme film. Pro účely, v nichž naopak na velikosti detektoru tolik nezáleží, ale jde nám o to co nejpřesněji určit jasnost objektu, jako je tomu u fotometrie hvězd, je pro nás použití CCD kamery jasnou volbou.



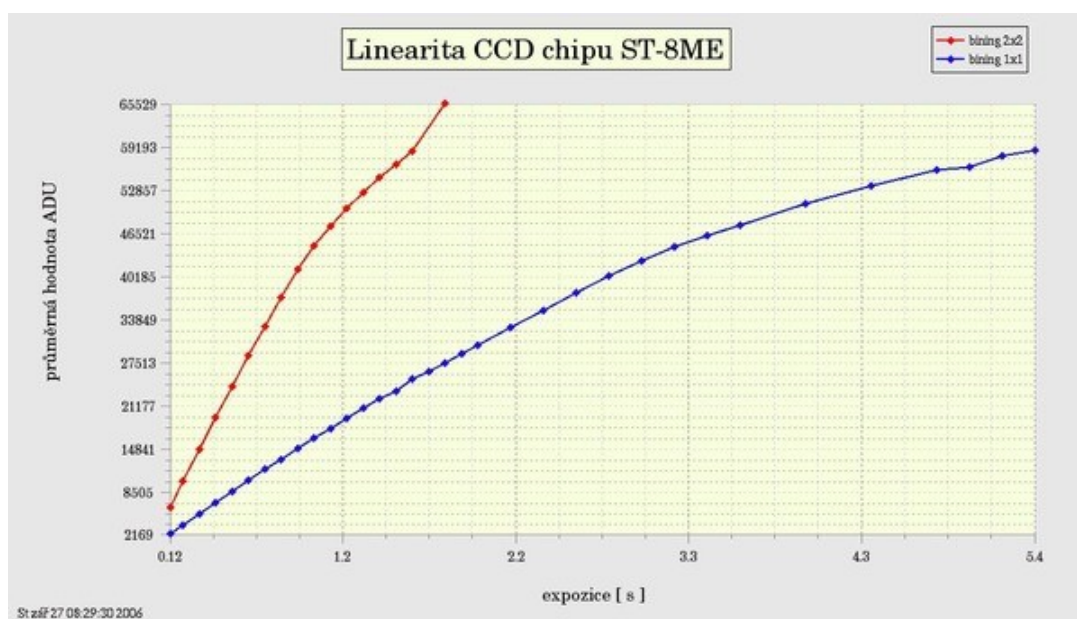
Obr. 2: Závislost kvantové účinnosti různých detektorů na vlnové délce.

Na příkladu s bolidy upozorníme na další slabinu CCD. Přenést data z čipu do počítače trvá relativně dlouho, pro velké čipy až několik minut. Za tu dobu by nám meteor mohl přeletět, aniž by byl zaznamenán.

V přesnosti fotometrických výsledků jsou CCD překonávány fotonásobiči. Jestliže jsme schopni dosáhnout s CCD nejistoty výsledků 0,01 mag, činí nejistota výsledků fotonásobiče jen 0,001 mag. Z CCD ale můžeme naráz zjistit jasnosti všech objektů na snímku. Fotonásobičem získáme jen jediný údaj o celkovém světelném toku přicházejícím z malého výseku oblohy.

2 Konstrukce a činnost CCD kamery

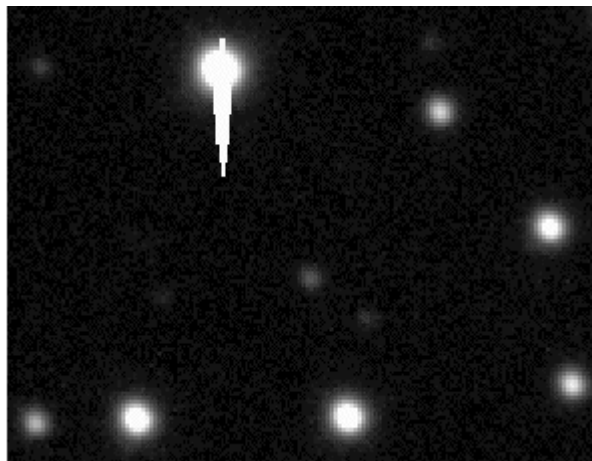
Hlavní součástí CCD kamery je CCD čip. Jeho činnost se zakládá na fotoelektrickém jevu v polovodičích, nejčastěji křemíku. Polovodič, jehož všechny atomy jsou v základním stavu se chová jako izolátor. Teprve pokud se atomy excitují, dostanou se jejich elektrony do vodivostního pásu, dost daleko od jádra mateřského atomu, aby mohly po přiložení elektrického napětí nést proud. CCD čip je vlastně soustava polovodičových kondenzátorů. Sama zkratka CCD znamená Charge Coupled Device, tj. zařízení s vázanými náboji.



Obr. 3: Odezva CCD čipu v závislosti na expoziční době snímku jisté hvězdy

Křemíkovou destičku pokrývá tenká vrstva oxidu křemičitého, jež plní funkci izolátoru. Na opačné straně izolátoru se nachází soustava kladně nabitých elektrod do sloupců a řad tak, že vytváří pravoúhlu mřížku. Na tyto elektrody se připojuje kladný pól napětí, na druhou stranu destičky záporné. Dopadne-li na takovou soustavu foton, může, má-li na to dostatečnou energii, vyrazit z nějakého atomu elektron. Vlivem přiloženého napětí elektron putuje k nejbližší anodě. Na jeho původním místě zůstane díra, kterou přitáhne záporný pól zdroje a zaplní ji elektronem. Pod anodami tak vznikají skupinky elektronů. Jejich počet je přímo úměrný počtu dopadnutých fotonů. Odtud pochází lineární odezva CCD. Každé oblasti čipu, z níž uvolněné elektrony proudí k jedné elektrodě, se říká pixel.

Samozřejmě každý pixel má jen omezenou kapacitu (full-well capacity). Nahromadí-li se pod jednou anodou větší množství elektronů, vyrovná jejich záporný náboj kladný náboj anody, elektrony přestanou mít vazbu ke svému pixelu a můžou přeskočit do sousedního. Tento jev zveve blooming. Na snímku ho snadno poznáme podle charakteristických „ocásků“ od jasných objektů.



Obr.4 : Blooming se objevuje u jasných objektů.

Po ukončení expozice zbývá změřit naakumulovaný náboj v jednotlivých pixelech. Podle konstrukce čipu se tak může dít třemi způsoby. Nejjednodušší je tzv. postupné vyčítání (progressive scan). Při něm se po ukončení expozice musí nejprve uzavřít závěrka kamery, aby se zamezilo dalšímu dopadu světla. Po jedné straně obdélníku CCD čipu je vyhrazen jeden řádek elektrod pro účely vyčítání zvaný registr. Pomocí periodických změn napětí na elektrodách se vytvoří jakési vlny napětí, které posunují hloučky elektronů od jedné elektrody k sousední. Na konci registru čeká AD převodník, který přeměňuje informaci o počtu elektronů ve skupině, jež k němu právě dorazila, na digitální hodnoty v jednotkách ADU (Analog to Digital Unit). Počet elektronů odpovídající jedné ADU se nazývá zisk (Gain) převodníku. Hodnoty ADU jsou jen celočíselné. Po vyprázdnění registru se každý sloupeček CCD čipu posune podobným způsobem o jednu pozici směrem k registru. Tím ho opět zaplní a proces se opakuje, dokud není celý čip přečten. Jiný druh CCD čipu nepoužívá závěrku, ale místo toho je rozdělen na dvě poloviny. Jednu z nich zakrývá neprůhledná vrstva, takže světlo detekuje jen druhá polovina. Při ukončení expozice se náboj z aktivního pole přemístí do zakryté poloviny. Přesun trvá kolem jedné milisekundy. Nyní můžou být data vyčtena stejně jako v předchozím případě. Poslední, třetí typ čipu, má zakrytý každý druhý sloupec elektrod. Světlo se opět nejprve zachycuje pod nezakrytými elektrodami a poté se vytvořený náboj přesune do vedlejšího pixelu v zakrytém sloupci. Doba přesunu se pohybuje v řádu mikrosekund. Aby měl čip se zakrytými sloupci větší účinnost, pokrývá se někdy jeho povrch soustavou drobných čoček, jež mají za úkol přeměřovat světlo ze zakrytých ploch do aktivních.

Dalším důležitým parametrem CCD čipu je účinnost přenosu elektronů mezi sousedními pixely. I když je velmi blízká 100%, nemusí být, vzhledem k velkému počtu přechodů elektronů při vyčítání, dostatečná. Kupříkladu, byla-li by účinnost přenosu 99,9%, tak bychom během přenosu elektronů z pixelu o souřadnicích [200, 200] přišli o $1 - (0,999)^{200+200} = 33\%$ signálu.

CCD čipy se ještě rozdělujeme podle toho, jestli jsou osvětlovány zepředu (front-side illuminated) nebo zezadu (back-side illuminated). Tím, že je čip osvětlen zepředu se myslí, že světlo dopadá na tu stranu křemíkové destičky, kde jsou rozmístěny anody. V tomto případě na tloušťce křemíku nezáleží, destička tudíž může být silnější. Protože však dopadajícímu světlu stíní samy elektrody, dosahuje

kvantová účinnost nejvíce asi 60%. Uvědomme si však, že jednodominutová expozice na takový čip se vyrovná hodinové expozici na film, co do množství zachyceného světla.

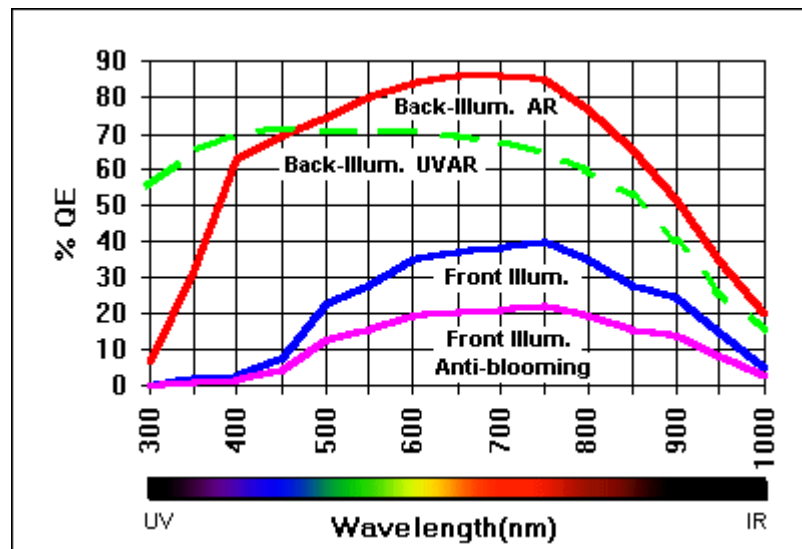
Problém se stíněním odpadá u čipů osvětlovaných ze zadní strany, střídá ho však jiný. Aby anody přitáhly elektrony uvolněné na opačné straně destičky, musí být destička mnohem tenčí, kolem $10\ \mu\text{m}$. S tím je spjata náročná výroba a vysoká cena. Získáme však detektor světla s kvantovou účinností až 90%.

Aby se zvýšila schopnost CCD čipu detekovat světlo, nanáší se na povrch antireflexní (AR) vrstvy. Ty omezují odraz světla od povrchu čipu. Nanesením vhodné antireflexní vrstvy lze oblast vlnových délek, na něž je CCD čip citlivý, protáhnout až do ultrafialové oblasti spektra.

Některé CCD jsou vybaveny tzv. antibloomingem, tedy potlačěním bloomingu. Dosáhne se toho přidáním dalších elektrod mezi pixely, které přitáhnou a odvedou přebytečné elektrony. Pro fotometrická měření nejsou tolik vhodné, protože odezva je lineární jen dokud jsou pixely zaplněny jen méně než asi z poloviny své kapacity. Kapacita pixelů je také snížena. Přidáním antibloomingových elektrod ještě více zastíníme čip, tudíž kvantová účinnost je nižší. Antiblooming se využívá u kamer určených ke kvalitativním měřením nebo k amatérskému fotografování hezkých obrázků.

Existují i barevné CCD čipy, jejich použití pro přesnou fotometrii se však neosvědčilo.

Vlivem tepelného kmitání atomů v CCD čipu dochází k uvolňování dalších elektronů, o které samozřejmě nestojíme. Proto se snažíme čip chladit. Nejlepší a nejdražší je chlazení pomocí zkapalněných plynů, nejčastěji heliem nebo dusíkem. O něco dostupnější je pevný oxid uhličitý (suchý led). Nejlevněji a nepohodlněji vyjde chlazení Peltierovým článkem, jenž pracuje na principu termoelektrického Peltierova jevu. S ním dosáhneme ochlazení čipu $20\text{-}40^\circ\text{C}$ oproti okolnímu prostředí. K odvedení ohřátého vzduchu napomáhá větráček.

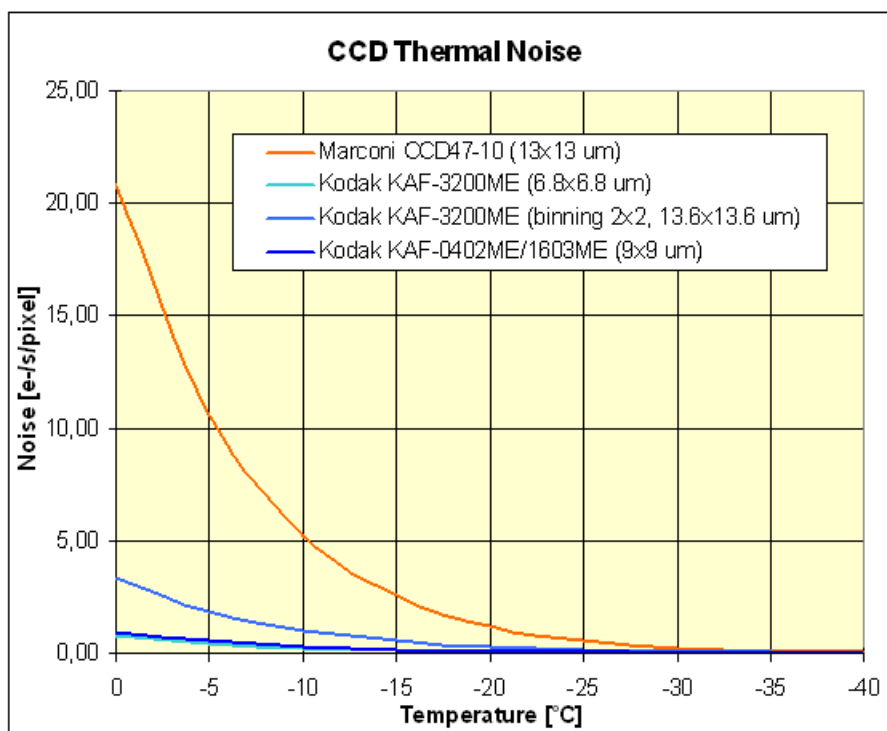


Obr. 5: Kvantová účinnost různých typů CCD v závislosti na vlnové délce.

3 Šum a redukce

Každé fyzikální měření je zatíženo chybami. Nejinak je tomu při měření pomocí CCD kamery. Právě protože používáme jako detektor stále stejný čip, můžeme pomocí jeho kalibrace (v tomto případě zvané redukci) systematické chyby do značné míry eliminovat.

Elektrony v CCD se neuvolňují jen v důsledku dopadu světla. Další zdroj excitace atomů představují jejich tepelný pohyb a kosmické záření. Signálu vytvářeném těmito parazitickými zdroji říkáme temný proud. V jednotlivých pixelech přidává náhodně hodnoty s Poissonovým rozdělením. Temný proud se vyjadřuje jako počet elektronů za hodinu na jeden pixel. Roste přibližně exponenciálně s teplotou. Zdvojnásobuje se vzrůstem teploty o asi 6-7 °C. Přestože jsou CCD kamery většinou vybaveny chlazením, určitá hladina temného proudu je vždy přítomna. Vliv temného proudu se dá snížit odečtením temného snímku (jinak dark frame, dark). Získáme ho tak, že pořídíme sérii snímků se zakrytou kamerou, z nichž každý exponujeme stejnou dobu jako objekt našeho zájmu a potom je způměrujeme na výsledný master dark. Standardně vytváříme alespoň 5 dílčích dark framů na každý snímek objektu. Tím se po odečtení master darku zvýší šum o méně než 10%. Musíme zajistit stejnou teplotu jaká byla při exponování objektu. Snímání dark framů provádíme nejlépe polovinu před expozicí objektu a polovinu po.

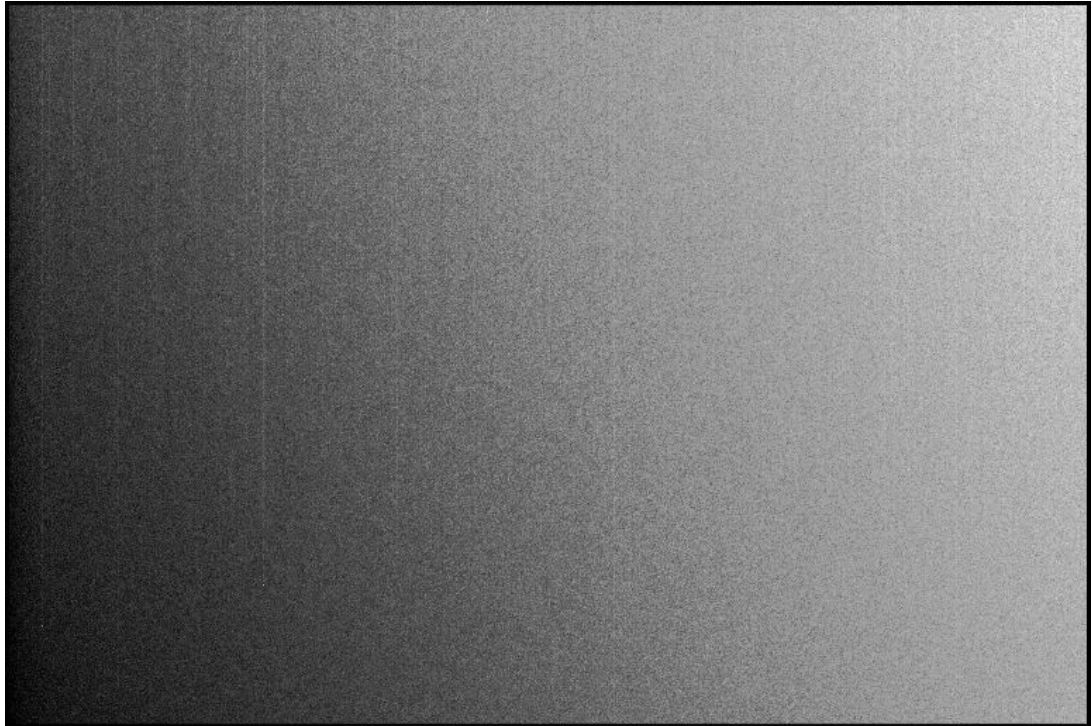


Obr.6 : Závislost temného proudu na teplotě několika CCD čipů



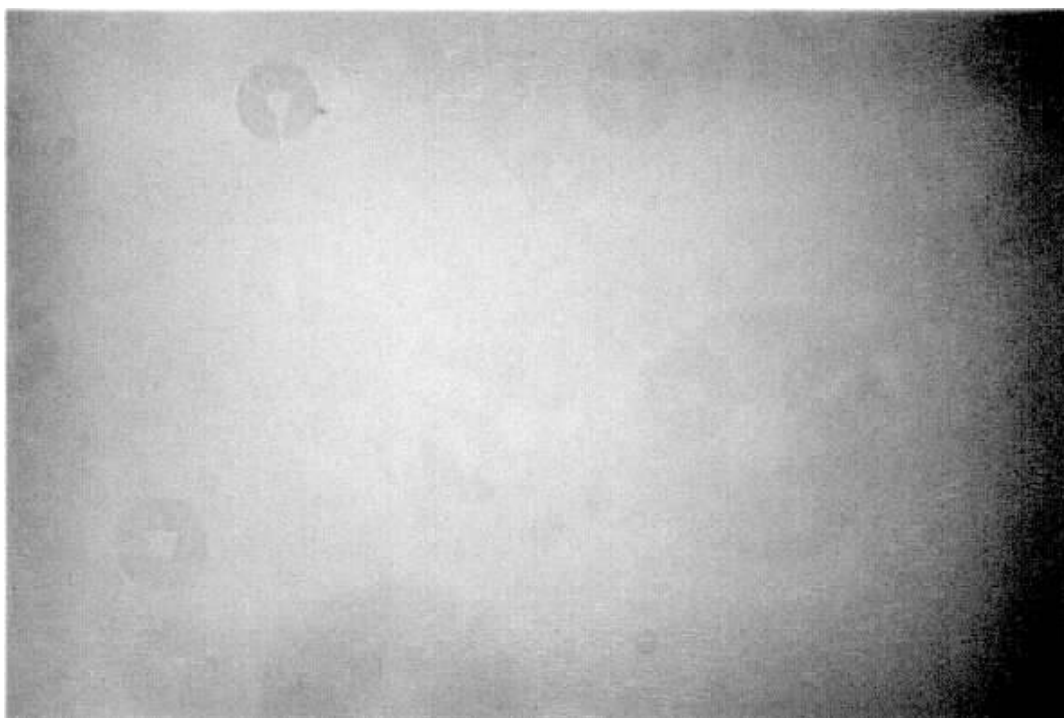
Obr.7 : Dark frame se stopami po dopadech kosmického záření – bílé čárky a tečky.

Odečtením temného snímku zároveň vyřešíme další problém. Závěrečné přepočítávání elektronů na číselné hodnoty také není zcela přesné. Odchylky od správné hodnoty mají normální rozdělení. Abychom nedostávali záporné hodnoty, když na nějaký pixel dopadne málo světla, přičítá převodník k výsledku jistou malou kladnou hodnotu. Tato hodnota (přesah, offset) není pro všechny pixely stejná. Nezávisí na délce expozice. Snímku, na němž není nic jiného než rozmístění těchto hodnot, říkáme bias. Pokud od snímku objektu odečítáme temný proud, odečítáme tím zároveň i bias. Chceme-li ho získat samotný, bez temného proudu, pořídíme několik (standardně alespoň 10) snímků se zakrytou kamerou s co nejkratší expoziční dobou a poté spočítáme průměr.



Obr. 8: Bias.

Ani samy pixely nemají citlivost jeden jako druhý. Díky drobným výrobním odchylkám se jejich kvantová účinnost mírně liší. Abychom zjistili kolikrát a mohli věc napravit, vytváříme flat field snímky. Jimi se též vyrovná nerovnoměrné osvětlení detektoru, vznikající při průchodu přístroji. Je to hlavně vinětace, projevující se tmavnutím obrazu směrem k okrajům a stíny od zrníček prachu na čipu, jež se na snímku jeví jako tmavé prstýnky (u čočkového dalekohledu jako kruhy). Flat field získáme tak, že vyfotografujeme sérii snímků nějaké rovnoměrně osvětlené plochy a pak z nich vytvoříme průměr, nebo vybereme medián. Dílčích snímků obvykle děláme alespoň 5. Přitom bychom měli dbát, aby byla konfigurace všech prvků aparatury stejná, jako při fotografování našeho objektu, abychom zajistili stejný chod paprsků, tj. kamera by měla být zaostřená na „nekonečno“, stejně natočená, použijeme stejný filtr, atd. Odchylky jsou závislé na vlnové délce světla. Jestliže používáme barevné filtry, musíme pro každý z nich pořídit zvláštní flat field. Vytváříme-li flat field na objektu v „nekonečno“, musíme si dát pozor, aby byla plocha opravdu čistá, u objektu v „konečno“ drobné nerovnoměrnosti nevadí, protože je optika stejně rozostří. Expozici volíme tak, abychom zaplnily pixely z poloviny jejich kapacity, pro 16 bitové čipy to jsou hodnoty v okolí 32 000.



Obr. 9: Ukázka flat fieldu.

Co tedy při tvorbě flat fieldu fotografovat? Profesionální přístroje mívají pro tento účel přímo v kopuli instalované speciální plátno, jež se dá rovnoměrně osvětlit (flat field se pak nazývá dome flat). Jiná možnost je fotografovat oblohu za soumraku nebo za svítání, je-li zcela jasná (sky flat). Bylo vypočítáno, že je k tomu nejlepší poloha 13 stupňů východně od zenitu těsně po západu slunce. V praxi pohybujeme dalekohledem v rozmezí výšek 30–60 stupňů na straně oblohy protilehlé slunci. Může se stát, že i při nejkratší možné expoziční době, kterou daná kamera umožňuje, je snímek přeexponovaný. Potom nezbyvá než počkat, až obloha ztmavne. Každou minutu ubývá její jas dvakrát. Před soumrakem ovšem nelze zaostřit na hvězdy. Po dobu expozice vypneme pohon dalekohledu a pohybujeme jím, aby se příliš neprojevovaly objevující se hvězdy. Před kombinací dílčích flat fieldů ve výsledný je musíme opravit ke stmívání oblohy. K tomu odečteme od všech master dark, vybereme si jeden referenční flat field, spočteme průměrnou hodnotu jeho pixelů a každý z ostatních flat fieldů vynásobíme konstantou takovou, aby se průměr z hodnot jeho pixelů rovnal průměru z referenčního. Jinou možnost představuje prodlužování expozičních časů přímo při fotografování. Následuje výpočet výsledného flat fieldu. Kvůli přítomnosti stop po hvězdách počítáme raději než průměr medián.

Další možnosti se hodí pro malé dalekohledy. Doporučuje se, vyrobit si krabici s mléčným sklem na jedné straně a otvorem pro nasazení na tubus dalekohledu na druhé. Sklo se osvětluje světlem odraženým od bílého povrchu. Zařízení můžeme použít i v noci, kdy už máme kameru zaostřenou na hvězdy. Nemáme-li mléčné sklo lze před dalekohled dát bílý list papíru a při snímání s ním pohybovat. Někdo dělá flat field proti bílé obrazovce LCD monitoru.

Máme-li redukční snímky hotové, můžeme přistoupit k samotné redukci. Když budeme brát digitální obrázek jako matici A , můžeme označit $A[i, j]$ hodnotu pixelu na souřadnicích $[i, j]$. Je

$$\begin{aligned} & \text{redukovaný snímek}[i, j]= \\ (1) \quad & = (\text{surový snímek objektu}[i, j] - \text{dark frame}[i, j]) \cdot \frac{F}{\text{flat field}[i, j]} \cdot \end{aligned}$$

Za číslo F volíme hodnotu nejjasnějšího pixelu ve flat fieldu, nebo průměr z hodnot pixelů ve skupině blízko jeho středu.

Poněkud odlišným způsobem lze zajistit, abychom mohli jednu sadu redukčních snímků použít na několik snímků objektu s různými expozičními časy. Potřebujeme k tomu pořídit bias a dark frame s expoziční dobou T delší, než nejdelší expoziční doba objektového snímku. Pro snímek s expoziční dobou t je

$$\begin{aligned} & \text{redukovaný snímek}[i, j] = (\text{surový snímek objektu}[i, j] - \\ (2) \quad & - \frac{t}{T} \cdot (\text{dark frame}[i, j] - \text{bias}[i, j]) - \text{bias}[i, j]) \cdot \frac{F}{\text{flat field}[i, j]} \cdot \end{aligned}$$

Někdy se uchylujeme k rozdělení expozice objektu na několik kratších, které pak zkombinujeme až v počítači. Součet expozičních bod se pak zve integrační čas. Důvody k rozdělení mohou být různé: chceme integrovat delší dobu, než máme jeden den čas, nemáme dost dobrou montáž, abychom mohli udělat nerozmazanou fotografii s dlouhou expoziční dobou, nebo třeba, když prováníme ruční pointaci, chce si člověk občas odpočinout. Dlouhé expozice ale vždy raději rozdělujeme. Během času se totiž na snímku objevuje stále více stále více zásahů kosmickým zářením, jež nám kazí výsledky, o přeletech satelitů a letadel nemluvě. Statistickým zpracováním dílčích snímků dokážeme tyto vlivy účinně eliminovat. Kromě toho včas zjistíme, že jsme např. špatně zaostřili.

Kombinování částečných snímků však není plnohodnotnou náhradou za jeden s expoziční dobou rovnou integračnímu času. Je to díky zaokrouhlování při AD konverzi. Když například nějaký objekt vyprodukuje během expozičního času v jednom částečném snímku méně elektronů, než kolik činí zisk, tak se nemůže žádný signál objevit ani na součtu dílčích snímků. Tento jev se uplatní také na snížení „počtu barev“ ve snímku. Vyprodukují-li se ve dvou pixelech počty elektronů, lišící se méně, než o zisk, budou mít po AD konverzi hodnoty stejné.

4 Formát FITS

K přechovávání astronomických snímků se používá datový formát FITS. Měli bychom ho používat, jelikož je pro naše účely vhodný a protože ho produkují všechny CCD kamery a umí s ním manipulovat veškerý astronomický software. V čem se formát FITS liší od obvyklých obrázkových souborů, jako jsou JPEG a BMP? Narozdíl od JPEG nepoužívá ztrátovou kompresi, která by pracně získaná data znehodnotila. JPEG a BMP pracují obvykle s 8 bity na pixel na jednu barvu,

kdežto FITS obsahuje 16 nebo 32 bitová data, což je 2^8 , resp. 2^{24} krát více. Z toho důvodu dokáže pojmout mnohem více dat a umožňuje výraznější zpracování. Na druhou stranu běžné obrázkové prohlížeče a editory formát FITS neznají, takže pokud chceme své obrázky někde vystavovat, musíme je převést do jiného, k tomu vhodného formátu.

Soubor FITS má jistou, striktně definovanou strukturu. Není-li dodržena, mohou některé programy při pokusu soubor otevřít, dokonce zkolabovat. Skládá se ze tří částí: hlavičky (header), datového pole (data array) a zakončení (tailer). Nezabývejme se zde detailně zabývat pravidly FITS souboru (ta je možno najít v [1]). Programy zpravidla obsahují editory, umožňující provádět změny ve FITS souboru, aniž bychom se museli o dodržování pravidel starat.

Každý soubor na svém začátku obsahuje hlavičku, která počítači oznamuje, jaká data za ní následují a jak je má interpretovat. U souborů FITS navíc může obsahovat údaje o původu snímku, tj. o jeho pořízení a dosavadním zpracování. Soubor musí zaujímat velikost 2880 bytů nebo nějaký přirozený násobek tohoto čísla. Každá informace v hlavičce se nalézá na zvláštním řádku dlouhém přesně 80 bytů. Sestává z klíčového slova následovaném jeho hodnotou. Některé informace musí být nutně uvedeny, aby byl soubor pro počítač čitelný. Zde je jejich seznam:

SIMPLE - Udává, zda má soubor předepsanou strukturu nebo ne. V kladném případě nabývá hodnoty T, v opačném F.

BITPIX – Říká, v jakém číselném formátu jsou data v souboru uložena. Pro 8, 16 a 32 bitový celočíselný formát je odpovídající číselná hodnota 8, 16 nebo 32. Jedná-li se o soubor čísel s desetinnou čárkou, přidává se navíc před hodnotu znaménko „-“.

NAXIS – Počet os datového pole. Datové pole totiž tvoří systém dvojic souřadnice-hodnota. Např. pro barevný obrázek v systému RGB bude NAXIS=3 – první dvě osy odpovídají souřadnicím v rovině obrázku a třetí souřadnici RGB (tj. odlišuje složky R, G a B). Pro černobílý obrázek bude NAXIS=2. V souboru FITS může existovat os až 999.

NAXIS1
NAXIS2
NAXISn

} - Udává počet elementů v každé ose, např. délku a šířku obrázku v pixelech.

EXTEND – Nemá přiřazenou žádnou hodnotu. Signalizuje, že hlavička je prodloužena o dalších 2880 bytů. Případný volný prostor se zaplní znaky pro mezeru.

END – Též nemá přiřazenou hodnotu. Objevuje se na začátku posledního řádku hlavičky.

Povinná klíčová slova se musí objevit v tomto pořadí.

Další klíčová slova nejsou nutná, ale jsou jistým způsobem užitečná.

Vyskytují se mezi slovy NAXISn a END. Uveďme některá častá.

BZERO, BSCALE – Čísla obsažená ve FITS souboru nemusí odpovídat skutečným hodnotám pixelů. Ty jsou pak dány vztahem

hodnota pixelu = BZERO + BSCALE · hodnota ve FITS .

DATAMIN, DATAMAX – Nejnižší a nejvyšší hodnota pixelu vyskytující se ve snímku.

INSTRUME – Název CCD kamery, jež snímek vytvořila.

EXPTIME- Expoziční čas snímku v sekundách.

XPXSZ, YPXSZ – Rozměry pixelu CCD čipu udané v mikrometrech.

Datové pole obsahuje data samotná, uspořádaná ve formě proudu, který se interpretuje podle údajů uvedených v hlavičce. Zakončení slouží k doplnění celkové velikosti FITS souboru na násobek 2880 bytů. Tvoří jej opět znaky pro mezeru.

```
SIMPLE = T
BITPIX = 16
NAXIS = 2
NAXIS1 = 1092
NAXIS2 = 736
BZERO = 32768.00000000
BSCALE = 1.00000000
EXPTIME = 4.00000000
EXPOSURE= 4.00000000 / seconds
GAIN = 1.50000000 / e-/ADU
FILTER = 'U '
CCD-TEMP= -19.94000000 / deg C
UT = '19:35:06'
DATE-OBS= '2008-06-02'
TIME-OBS= '19:35:06'
DATE-BEG= '2008-06-02T19:35:06'
DATE-END= '2008-06-02T19:35:10'
IMAGETYP= 'OBJECT '
TELESCOP= 'Ondrejov 650/2342'
INSTRUME= 'G2-3200 '
OBSERVER= ' '
OBSERVAT= 'AsU Ondrejov'
ELEV-OBS= 528.00000000 / meters above sea level
LONG-OBS= 14.78363900 / 14deg 47min 1.10sec East
LAT--OBS= 49.91055600 / 49deg 54min 38.00sec North
END
```

Obr. 10: Ukázka hlavičky FITS souboru.

5 Poměr signál-šum

K popisu přesnosti dat získaných z CCD se tradičně používá veličina poměr signál-šum (S/N, signal-to-noise ratio). Obecně je dána jako poměr očekávané hodnoty dané veličiny a směrodatné odchylky jejího měření. Rovná se též převrácené hodnotě relativní nejistoty měření.

Představme si, že chceme určit světelný tok přicházející z nějakého nebeského objektu. Jelikož se ke světlu objektu přidává též i světlo oblohy samotné

(způsobené např. světelným znečištěním či přirozeným světélkováním vzduchu), musíme také určit světelný tok od ní. Po redukci a odečtení záření pozadí (viz kap. 8) se k odhadu poměru signál-šum výsledku používá tzv. CCD rovnice (dle [2]) :

$$(3) \quad S / N = \frac{N_o}{\sqrt{N_o + n_{pix}(1 + n_{pix} / n_p)(N_p + N_{TP} + N_c^2 + G^2 \sigma_z^2)}} ,$$

kde symbol n_{pix} značí počet pixelů, z nichž se určuje jas objektu, n_p je počet pixelů, z nichž se počítala průměrná hodnota pozadí objektu, N_o celkový počet elektronů vyprodukovaných v důsledku osvětlení pozorovaným objektem, N_p počet elektronů, které průměrně vyprodukovalo světlo pozadí objektu v jednom pixelu, N_{TP} průměrný počet elektronů temného proudu na jeden pixel, N_c průměrná velikost čtecí chyby v elektronech na pixel, G zisk AD převodníku a σ_z zaokrouhlovací chyba, jíž se dopouštíme při přepočítávání elektronů na ADU. σ_z činí přibližně 0,289. Počty elektronů určíme vynásobením hodnot v ADU ziskem. Z (3) vidíme, že je třeba vyhodnocovat úroveň jasu pozadí na dostatečném množství pixelů.

Standardně se používá zjednodušená verze CCD rovnice

$$(4) \quad S / N = \frac{N_o}{\sqrt{N_o + n_{pix}(N_p + N_{TP} + N_c^2)}} .$$

V případě fotometrie hvězd je totiž obvykle splněna podmínka $n_p \gg n_{pix}$ a pro obvyklou CCD kameru je člen se ziskem relativně malý.

Pro velmi jasný zdroj lze použít další zjednodušení, totiž

$$(5) \quad S / N = \sqrt{N_o} .$$

To znamená, že i kdybychom pozorovali samotný zdroj bez rušení světla oblohy i parazitního signálu, byla by nejistota měření jeho jasu nenulová. Vždy totiž zachytíme jen konečný počet fotonů, jež náhodně (jako kapky deště) dopadají na detektor s Poissonovým rozdělením. Pojem „jasný zdroj“ se někdy definuje jako zdroj, pro nějž je toto přiblížení dobré.

Naopak se může hodit znát integrační čas potřebný pro dosažení předem zadaného poměru signál-šum. Přepíšme (4) do jiné podoby:

$$(6) \quad S / N = \frac{N'_o t}{\sqrt{N'_o t + n_{pix}(N'_p t + N'_{TP} t + N_c^2)}} ,$$

kde čárkované veličiny značí průměrné hodnoty za časovou jednotku a t integrační čas. Opět pozorujeme, že je S/N přibližně úměrný odmocnině integračního času. Po vyjádření t z (6) dostaneme

$$(7) \quad t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ,$$

přičemž jsme označili

$$a = N'_o{}^2 ,$$

$$b = -(S / N)^2 (N'_o + n_{pix}(N'_p + N'_{TP})) ,$$

$$c = -(S / N)^2 .$$

V praxi však spíše volíme integrační čas podle zkušeností z dřívějších pozorování.

6 Vlivy působící při fotometrii

Naším cílem nadále bude provádět fotometrii hvězd – tj. v určitém smyslu měřit jejich jasnost. Abychom problematiku objasnili, rozeberme nejprve, co se se světlem děje, než dojde k jeho detekci.

Světlo hvězdy musí projít zemskou atmosférou, aparaturou dalekohledu a nakonec být zachyceno detektorem. Každý z prvků, s nímž světlo přijde do styku, záření nějak ovlivňuje a navíc pro každou vlnovou délku jinak. Atmosféra pohlcuje a rozptyluje krátkovlnnou část záření, takže se hvězdy zdají být červenější než ve skutečnosti jsou. Rovněž optické prvky dalekohledu některé vlnové délky propouští či odráží lépe a jiné hůře. Detektor sám má určitou spektrální citlivost (závislost účinnosti na vlnové délce). Zapišme to ještě v řeči matematiky. Připomeňme, že světelný tok je energie světla, které projde jednotkovou plochou kolmou k paprskům za jednotku času. Označme $R(\lambda)$ spektrální propustnost všech prvků, tj. podíl světelného toku neseném vstupujícím zářením o vlnové délce λ a detekovaného toku na téže vlnové délce, a $Z(\lambda)$ světelný tok přicházející na vlnové délce λ . Celková detekovaná jasnost (přesněji řečeno světelný tok) v intervalu vlnových délek $(0, \infty)$ bude

$$(8) \quad I = \int_0^{\infty} R(\lambda)Z(\lambda)d\lambda .$$

Chtěli bychom, aby jsme každým přístrojem za všech podmínek pro libovolnou hvězdu došli ke stejnému výsledku. I kdybychom znali naši $R(\lambda)$ změříme pouze I . Z (8) vyplývá, že by standardizace nebyla obecně možná.

Z těchto důvodů se do aparatury zařazují barevné filtry, propouštějící světlo jen v určitém úzkém rozsahu vlnových délek. Potom můžeme spektrální propustnost $R(\lambda)$ na propouštěném intervalu považovat za konstantu R_λ a jinde za nulovou.

S tímto tvarem $R(\lambda)$ z (8) vidíme, že po určení R_λ již standardizace možná je, alespoň přibližně. Tudiž úkolem fotometrie je zjistit, jaký světelný tok přicházející od hvězdy bychom vně zemské atmosféry naměřili s ideální aparaturou, standardizovaným detektorem a filtrem. Změříme-li jasnost s pomocí několika různých filtrů, dostáváme tím navíc jistou představu o spektru hvězdy a to i v případech, kdy je hvězda pro spektroskopické měření příliš slabá.

Vždy se tedy udávaná jasnost hvězdy vztahuje buď k danému filtru, nebo použitému detektoru. Uveďme nakonec některé nejvíce používané typy jasností neboli, jak se jim podle používaných jednotek tradičně říká, magnitud.

Vizuální magnituda – magnituda, kterou zaznamená detektor se spektrální citlivostí lidského oka.

Fotografická magnituda – magnituda, kterou zaznamená detektor se spektrální citlivostí fotografické emulze.

U, B, V, R, I magnitudy – magnitudy, které bychom naměřili přes filtry U, B, V, R a I s fotoelektrickým fotometrem, jaký používal tvůrce UBV systému, pan Johnson.

Bolometrická magnituda – světelný tok přicházející od hvězdy na všech vlnových délkách. Je to integrál z (8) s $R(\lambda) = 1$.

7 Fotometrie

Zabývejme se nyní tím, jak se CCD fotometrie prakticky provedeme. Zpravidla se při ní používají filtry U, B, V případně i R a I. Zajímá-li nás číselně jasnost hvězdy, používáme celooblohovou fotometrii (all sky photometry), pokud nás zajímá jen časový průběh jasnosti u proměnné hvězdy nebo srovnání jasností dvou blízkých hvězd provádíme srovnávací (diferenciální) fotometrii.

Diferenciální fotometrie využívá faktu, že je magnitudová škála poměrná, tzn. máme-li dvě hvězdy o magnitudách m_1 a m_2 a jasnostech I_1 a I_2 bude platit

$$(9) \quad m_1 - m_2 = -2,5 \log(I_1 / I_2).$$

Zaznamenáme-li tyto dvě hvězdy na jeden snímek, bude, při označení detekovaných signálů v ADU s_1 a s_2 , opět

$$(10) \quad m_1 - m_2 = -2,5 \log(s_1 / s_2),$$

protože jednak jsou hvězdy na obloze blízko sebe a tudíž jejich světlo je atmosférou zeslabováno stejnou mírou, dále protože jsme použili barevný filtr, který převede spektrální propustnost aparatury na konstantní, a konečně měřili jsme lineárním detektorem CCD.

Při diferenciální fotometrii proměnných hvězd sledujeme současně tři hvězdy, které se musí vejít do jednoho záběru. U první z nich sledujeme proměnnost, druhou používáme v (10) jako srovnávací a třetí jako kontrolu, že ani srovnávací hvězda není proměnná. Výsledkem pozorování je časová závislost rozdílu magnitudy proměnné a srovnávací hvězdy.

Situace je složitější při celooblohové fotometrii. Musíme totiž určit extinkční koeficient (rozdíl mezi magnitudou hvězdy v nadhlavníku před a po průchodu atmosférou) pro každý použitý filtr a měření zkalibrovat (přepočítat naše hodnoty na hodnoty, jaké by změřil Johnsonův přístroj). Přitom musíme pamatovat, že se může během noci měnit extinkční koeficient, stejně jako spektrální propustnost aparatury.

Jak se tedy celooblohová fotometrie provádí? Kromě hvězdy, jejíž jasnost chceme změřit, musíme také změřit jasnost několika standardních hvězd se známou jasností. Musíme též určit extinkční koeficient atmosféry. Nachází-li se hvězda v zenitové vzdálenosti z , lze tloušťku zemské atmosféry v jejím směru spočítat dle vztahu (dle[1])

$$(11) \quad X = \sec z$$

(sec je převrácená hodnota kosinu), přičemž výsledek dostaneme v jednotkách tloušťky atmosféry ve směru k nadhlavníku. Složitější vztah (Bemporadův vzorec)

$$(12) \quad X = \sec z - 0,0018167(\sec z - 1) - 0,002875(\sec z - 1)^2 - 0,000808(\sec z - 1)^3$$

zahrnuje navíc korekci na zakřivení povrchu Země. Používá se od výšky 6 stupňů nad obzorem. Jako fotometrické standardy lze použít tzv. Landoltova pole, což jsou vybrané skupinky hvězd o známých magnitudách. Jsou rovnoměrně rozložena v rovině nebeského rovníku. Obsahují hvězdy 12-15 mag, což pro CCD fotometrii

vyhovuje. Jejich O tom kde je naleneme hovoří Pozn.¹. Kromě nich jsou k dispozici i různé standardní hvězdokupy.

Označme M magnitudu hvězdy vně zemské atmosféry, m uvnitř a k extinkční koeficient. Platí

$$(13) \quad M = m - kX .$$

Díky linearitě CCD detektoru lze magnitudu m spočítat z naměřeného signálu s (v ADU) jako

$$(14) \quad m = -2,5 \log(s / t) + C ,$$

kde t značí integrační čas a C konstantu převádějící výsledek na standardní magnitudový systém. Tu je také třeba určit. Proto provádíme kalibraci měření na alespoň dvou standardních polích, jež se nachází v různých výškách nad obzorem. Změříme, jaké signály s_1 a s_2 dostaneme od dvou hvězd s jasnostmi M_1 a M_2 . Pak hledané konstanty k a C vyřešením soustavy rovnic

$$(15) \quad \begin{aligned} M_1 &= -2,5 \log(s_1 / t) + C - kX_1 \\ M_2 &= -2,5 \log(s_2 / t) + C - kX_2 \end{aligned}$$

Samozřejmě, při použití většího počtu kalibračních hvězd bude kalibrace přesnější. V tom případě provedeme lineární interpolaci metodou nejmenších čtverců. Konstanty C a k je nutno určit pro každý z filtrů zvlášť. Změříme je několikrát v průběhu celého pozorování a provedeme časovou interpolaci. Pomocí vztahů (12), (13) a (14) určíme hledanou jasnost zkoumaného objektu.

Jiná možnost, v praxi často používaná, se podobá diferenciální fotometrii. Zkoumaný zdroj porovnáváme se standardním polem, jež se právě nalézá ve stejné výšce nad obzorem. Rozdíl hvězdných velikostí opět spočteme dle (10), nyní však známe absolutní hvězdnou velikost standardního objektu.

Fotometrická měření provádíme nejlépe v co největší výšce nad obzorem. Při srovnávací fotometrii nám příliš nevádí, když nám přijdou před snímané pole tenké mraky, protože zastínění lze na celém snímku považovat za stejné. Naopak u celooblohové fotometrii jakékoliv zeslabení vede k nepřesným výsledkům. Expozici volíme dostatečně dlouhou, abychom získali dobrý poměr signál-šum, nesmíme však překročit lineární část v závislosti signálu na čase, to znamená zaplnit pixely maximálně do poloviny jejich kapacity. Je výhodné provádět fotometrii jednoho objektu z více než jen jedné expozice. V tom případě buď snímky sečteme a výsledek zpracujeme jako jeden samostatný snímek, anebo z každého snímku určíme jasnost zvlášť a provedeme statistické zpracování. Hvězda na čipu by měla zabírat alespoň 4 pixely. Pokud je menší, rozostříme ji. Příliš malé obrazy hvězd dávají méně přesné výsledky. Před určením zachyceného signálu od hvězdy musíme provést redukci snímku.

¹ Landoltova pole byla publikována v článku Landolt, Arlo U.: *UBVRI photometric standard stars in the magnitude range 11.5-16.0 around the celestial equator*, *Astronomical Journal* (ISSN 0004-6256), vol. 104, no. 1, July 1992, p. 340-371, 436-491, (7/1992).

Na <http://www.physics.ucf.edu/~yfernandez/iraf/ss.html> lze nalézt tento článek a také fotografie jednotlivých polí.

8 Fotometrie hvězd z CCD snímku

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak určit množství signálu, které CCD detektor zaregistroval v důsledku osvětlení jednou konkrétní hvězdou. Každý fotometrický software musí provést tři věci: určit polohu hvězdy na snímku, odhadnout jasnost okolí hvězdy a konečně zjistit jasnost hvězdy samé. Pro začátek se zabývejme jen „dokonalými“ obrazy hvězd, tj. nepoškozenými chybami vedení dalekohledu, optickými vadami, apod. Připomeňme ještě, že PSF (Point Spread Function, funkce rozmazání bodu) je reálná funkce přiřazující bodu v rovině intenzitu světla obrazu bodového zdroje v rovině detektoru, které naměříme po průchodu světla tím, co leží mezi zdrojem záření a detektorem. Můžeme si ji představit jako obraz hvězdy na CCD snímku, pokud by ovšem měl nekonečně malé pixely.

Uveďme nejčastěji používanou metodu určení polohy hvězdy na snímku. Nejprve určíme polohu hvězdy přibližně (např. výběrem myší). Počítač kolem tohoto místa vytvoří čtvereček sahající L pixelů na každou stranu. Označme $I_{i,j}$ zachycený signál na pixelu o souřadnicích i, j v souřadném systému s počátkem ve středu čtverečku. Pak jsou souřadnice středu obrazu hvězdy x_C, y_C dány (dle [2]) jako

$$(16) \quad x_C = \frac{\sum_{i=-L}^L (I_i - \bar{I})i}{\sum_{i=-L}^L (I_i - \bar{I})} \quad y_C = \frac{\sum_{j=-L}^L (J_j - \bar{J})j}{\sum_{j=-L}^L (J_j - \bar{J})},$$

kde

$$I_i = \sum_{j=-L}^L I_{i,j} \quad J_j = \sum_{i=-L}^L I_{i,j}$$

a

$$\bar{I} = \frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L}^L I_i \quad \bar{J} = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L J_j.$$

Pro hvězdy s dobrým poměrem S/N nalezneme tuto metodu střed s přesností 1/5 pixelu (dle [2]).

Dále je třeba určit jasnost pozadí hvězdy. Ke světlu hvězdy se totiž přidávají jako zdroj signálu také záření oblohy přirozené a umělé, okolní nebeské objekty (např. nalézá-li se hvězda uvnitř mlhoviny) a také temný proud. Nejlepší je tedy určovat jasnost pozadí z bezprostředního okolí hvězdy. Proto se nejčastěji určuje jas pozadí z pixelů obsažených v mezikruží se středem ve středu hvězdy. Počet pixelů v tomto mezikruží by měl alespoň třikrát převyšovat počet pixelů užitých k určení jasů hvězdy. Jas oblohy pak odhadneme jako aritmetický průměr ze všech hodnot pixelů. Pokud se v blízkém okolí nalézá jiná hvězda, zmírníme její vliv vylepšeným postupem. Hodnoty seřadíme podle velikosti a vybereme medián M . Dále spočítáme směrodatnou odchylku od mediánu σ . Z řady vypustíme ty hodnoty, které se liší od

M o více než 3σ a ze zbytku spočítáme průměr, což je už výsledek. Někdy se místo mezikruží kolem hvězdy používá obdélníček v nějaké prázdné oblasti (tj. neobsahující žádný objekt). V tom případě však musí být pozadí skutečně rovnoměrné.

Nyní nám zbývá určit jasnost zkoumané hvězdy. Zde se nabízí dvě odlišné cesty. Buď se budeme snažit zachycený signál, tedy PSF, vystihnout nějakou funkcí a tu pak zintegrovat (metoda fitování profilu), nebo zvolíme nějaké okolí středu hvězdy a provedeme součet signálu v této oblasti, tzv. apertury (aperturní fotometrie). V obou případech musíme od každé jednotlivé hodnoty pixelu odečíst jas oblohy. Dokonalé obrazy hvězd se nejčastěji odhadují pomocí funkcí

gaussián:
$$G(r) = C \exp\left(-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right),$$

modifikovaný lorentzián:
$$L(r) = \frac{C}{1 + (r^2 / \alpha^2)^\beta},$$

a moffatián:
$$M(r) = \frac{C}{(1 + r^2 / \alpha^2)^\beta},$$

kde r představuje vzdálenost od středu hvězdy a C , α , β jsou fitovací parametry, tzn. volí se tak, aby byla shoda funkce s naměřenými hodnotami v nějakém smyslu nejlepší.

U aperturní fotometrie naopak přesný tvar PSF znát nepotřebujeme, proto je vhodná i pro snímky, které jsou postižené různými vadami. Stačí zvolit kolem hvězdy oblast dostatečně velkou, abychom započítali veškerý signál od hvězdy, ale zase nesmí být velká příliš. Tím bychom totiž započítávali více šumu nežli signálu a přesnost výsledku by začala klesat, jak plyne ze vztahu (3) (člen n_{pix}). Touto problematikou se budeme zabývat v příští kapitole. Jako optimální aperturu daného tvaru budeme nadále označovat aperturu takových rozměrů, při kterých je poměr signál-šum uvnitř apertury největší.

Aperturu volíme a software používá zpravidla kruhovou se středem ve středu hvězdy. Protože je však snímek rozdělený na pixely, nejde o kruh dokonalý. Vždy se musí rozhodnout jak naložit s pixely, které leží v apertuře jen částečně. Některý software je nezapočítá vůbec, jiný zahrne všechny a další z každého pixelu přičte jen tu část hodnoty, která je rovna části pixelu obsažené v uvnitř apertury. Jak je patrné vyjde skutečný obsah apertury se zadaným poloměrem pro každý případ jinak a tedy i, dle CCD rovnice (3), jiný poměr S/N a úhrnný signál.

K určení optimální velikosti kruhové apertury pro dokonalý obraz hvězdy se používá křivek růstu (growth curve). Křivkou růstu označujeme závislost magnitudy, spočítané z úhrnu signálu uvnitř apertury, na poloměru apertury. Tato závislost je pro malé poloměry nejdříve klesající, ale pro větší začne stoupat a klesat díky přítomnosti šumu a okolních hvězd. Optimální poloměr apertury odhadneme jako poloměr, při němž růstová se křivka poprvé začne chovat přibližně konstantně. Zavedme veličinu FWHM (Full-Width at Half-Maximum) jako průměr kruhu, na němž má funkce PSF hodnoty větší, než polovina hodnoty v jejím maximu. Ukazuje se, že naprostá většina signálu od hvězdy se shromažďuje do vzdálenosti 3 FWHM od středu.

Do plochy optimální apertury zřejmě nezachytíme veškerý signál hvězdou vyprodukovaný. Chybějící signál buď prostě zanedbáme, nebo se ho snažíme nějak dopočítat. Naznačme, jak se při tom postupuje. U nějaké jasné hvězdy na snímku,

kde dominuje signál nad šumem, nejprve určíme signál Σ obsažený v co největší apertuře. U slabší hvězdy, kde musíme zvolit aperturu menší, nechť shledáme signál uvnitř této apertury s . U jasné hvězdy zvolíme aperturu stejné velikosti, jako u té slabší a naměříme v ní signál S . Pak odhadem celkového signálu σ od slabší hvězdy je

$$(17) \quad \sigma = \Sigma \frac{s}{S} .$$

9 Optimální apertura a její vlastnosti

Pokusme se nyní rozбором vztahu (4) najít optimální poloměr apertury daného tvaru. Střed hvězdy nechť se nalézá v počátku kartézské soustavy souřadnic. O hranici apertury předpokládejme, že je popsána jednoduchou uzavřenou dostatečně spojitou křivkou tvaru

$$\Lambda(r) : \begin{aligned} x &= r \cdot f_1(t) \\ y &= r \cdot f_2(t) \quad , t \in [0,1) \end{aligned}$$

kteřá obsahuje počátek souřadnic ve svém vnitřku. Plochu ohraničenou touto křivkou budeme značit A a její obsah $A(r)$. Zřejmě budou každé dvě plochy s různými r v geometrickém smyslu podobné. Funkci PSF vynásobenou jasností zdroje, účinností detektoru a expoziční dobou budeme v následujících výpočtech značit $P(x,y)$. Uvědomme si, že ve vztahu (4)

$$N_o = \int_A P(x,y) dx dy$$

(při zanedbání náhodnosti dopadů fotonů). Dále konstantou C budeme myslet součet $N_p + N_{TP} + N_c^2 > 0$. Rovnice (4) pak dostává tvar

$$(18) \quad S / N(r) = \frac{\int_A P(x,y) dx dy}{\sqrt{\int_A P(x,y) dx dy + C \cdot A(r)}} .$$

Nadále budeme integrál $\int_A P(x,y) dx dy$ chápat jako funkci $I(r)$ poloměru apertury a budeme vynechávat argumenty funkcí, takže

$$(18') \quad S / N = \frac{I}{\sqrt{I + CA}} .$$

Maximum funkce S/N najdeme z podmínky nulovosti derivace:

$$S / N' = I'(I + CA)^{-1/2} - \frac{1}{2} I(I + CA)^{-3/2} (I' + CA') = 0,$$

$$2I'(I + CA) - I(I' + CA') = 0,$$

$$I'(I + 2CA) - ICA' = 0.$$

V tento okamžik by se mohlo zdát, že budeme muset hledat řešení numericky. Další úpravou však převedeme podmínku na jednodušší tvar:

$$\frac{1}{I'} = \frac{I + 2CA}{ICA'} = \frac{1}{CA'} + \frac{2A}{IA'},$$

$$(19) \quad \frac{A'(r)}{I'(r)} = \frac{1}{C} + 2 \frac{A(r)}{I(r)}.$$

Vztah se dále zjednoduší, když k popisu rozměrů apertury budeme místo poloměru používat její obsah. Pak

$$\frac{dI(r)}{dr} = \frac{dI(A)}{dA} \frac{dA}{dr},$$

kde $A=A(r)$. Zde se však stejně označené funkce I na obou stranách nerovnají, je třeba je chápat jako zkratky za integrál $\int_A P$ parametrizovaný pokaždé jinou veličinou, záměnu parametrizace pomocí A a r budeme v dalším provádět bez upozornění. Obsah optimální apertury musí tedy splňovat

$$\frac{1}{I'(A)} = \frac{1}{C} + 2 \frac{A}{I(A)}.$$

V posledním členu na pravé straně můžeme spatřovat převrácenou hodnotu hustoty funkce P na ploše A , $\rho_P(A) = I(A)/A$:

$$(20) \quad \boxed{\frac{1}{I(A)} = \frac{1}{C} + \frac{2}{\rho_P(A)}}.$$

Vyzkoušejme, co se s podmínkou (20) stane, změníme-li funkci P . Pokud P vynásobíme konstantou J , dostaneme

$$\frac{1}{JI'} = \frac{1}{C} + \frac{2}{J\rho_P},$$

$$\frac{1}{I'} = \frac{J}{C} + \frac{2}{\rho_P}.$$

Po zavedení funkce

$$(21) \quad \boxed{FFOA(A) = \frac{1}{I'(A)} - \frac{2}{\rho_P(A)}}$$

můžeme psát

$$(22) \quad \boxed{FFOA(A) = \frac{J}{C}}.$$

Již tušíme, že FFOA bude v naší úloze hrát podstatnou roli. Zkusme ještě funkci P a -krát zúžit, tedy dosadit za ní $P_a(x,y) = P(ax, ay)$. Budeme nejprve pracovat s více názornou podmínkou (19). Připravíme si vztahy

$$I_{P_a}(r) = \int_{A(r)} P(ax, ay) dx dy = \frac{1}{a^2} \int_{A(ar)} P(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{a^2} I_P(ar)$$

(použili jsme dvourozměrnou substituci $\xi = ax, \eta = ay$),

$$I_{P_a}'(r) = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dr} I_P(ar) = \frac{1}{a^2} I_P'(ar),$$

$$A(r) = \frac{1}{a^2} A(ar)$$

(obsah je úměrný kvadrátu poloměru).

Dosažením P_a do (19) po úpravách docházíme ke zjištění, že

$$(23) \quad \boxed{FFOA_{P_a}(r)} = \frac{A'(r)}{I_{P_a}'(r)} - \frac{A(r)}{I_{P_a}(r)} = \frac{a^{-2} A'(ar)}{a^{-2} I_P'(ar)} - \frac{a^{-2} A(ar)}{a^{-2} I_P(ar)} = \boxed{FFOA_P(ar)} = \frac{1}{C}.$$

Vyjadřujeme-li FFOA pomocí obsahu A je

$$(24) \quad \boxed{FFOA_{P_a}(A) = FFOA_P(a^2 A)},$$

protože obsah roste kvadraticky s poloměrem.

Funkci FFOA nazvěme fundamentální funkcí optimální apertury. S její pomocí dokážeme snadno a rychle prakticky určit poloměr nebo obsah optimální apertury zadaného tvaru. Vidíme-li například na snímku, že PSF je gausián (ve tvaru $P(r) = J e^{-(ar)^2}$), stačí nakreslit graf $FFOA(r)$ pro funkci $P(r) = e^{-r^2}$. Pak z redukovaného snímku snadno určíme hodnotu nejjasnějšího pixelu J a z neredukovaného průměrnou jasnost okolí hvězdy C . Podle šířky hvězdy v pixelech zjistíme a . Potom zbývá jen najít, v jakém r má FFOA hodnotu J/C , r vydělit a a máme výsledek \tilde{R} (označili jsme vlnkou). Pro úplnost dodejme, že parametr a v gausiánu je určen vzdáleností středu hvězdy od místa, kde je hodnota P poloviční (HWHM), pomocí vztahu

$$(25) \quad a = \frac{\sqrt{\ln 2}}{HWHM} \Pi \frac{0,83}{HWHM}.$$

Jako příklad si zkusme spočítat FFOA pro gaussovskou PSF $P(r) = e^{-r^2}$

s kruhovou aperturou, kterou se nám podaří napsat explicitně bez nutnosti numerické integrace. Nejprve pomocí přechodu do polárních souřadnic spočteme

$$I(R) = \int_{A(R)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

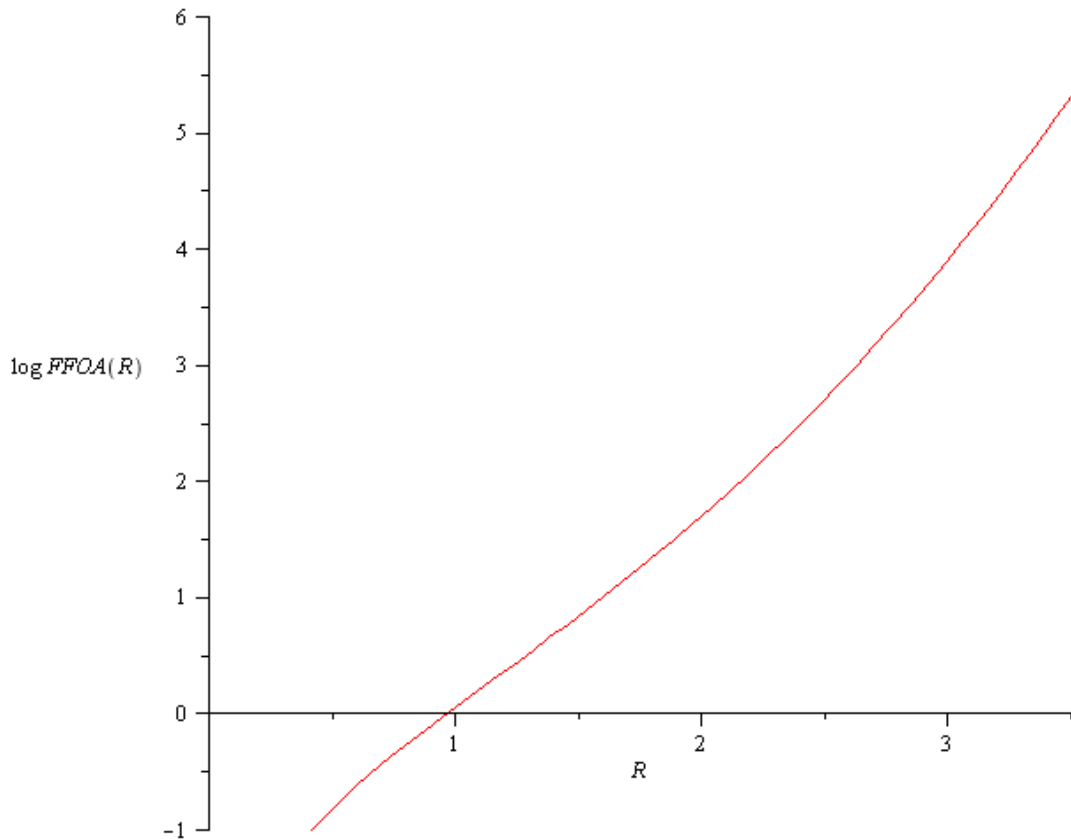
Derivováním obdržíme

$$I'(R) = 2\pi e^{-R^2} R.$$

Zbývá dosadit do definice FFOA (21):

$$FFOA(R) = \frac{2\pi R}{2\pi e^{-R^2} R} - \frac{\pi R^2}{\pi(1 - e^{-R^2})} = e^{R^2} - \frac{R^2}{1 - e^{-R^2}}.$$

Jak patrně, funkce FFOA velmi rychle roste. V $R=2,6$ dosahuje hodnoty 1000, v $R=3,15$ již $2^{16}=66000$ (maximální číslo produkované 16 bitovým AD převodníkem). S využitím (23) a (25) zjistíme, že se optimální poloměr nachází blízko $3HWHM$. Následující graf znázorňuje dekadický logaritmus FFOA gaussovské PSF.



Obr. 11: Dekadický logaritmus FFOA pro gaussovskou PSF, která odpovídá dokonalému obrazu hvězdy a kruhovou aperturu.

Pokusme se ještě odhadnout, jakou část světla použitím optimální apertury nezahrneme. Pro $J/C=100$ a $a=1$ dostáváme optimální poloměr $\tilde{R}=2,17$ a systematickou relativní chybu

$$1 - \frac{\int_{A(\tilde{R})} P(x,y) dx dy}{\int_{i^2} P(x,y) dx dy} = 1 - \frac{2\pi \int_0^{2,17} e^{-r^2} r dr}{2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr} = 0,9\% .$$

Pro $J/C=10$ bychom dostali $\tilde{R}=1,60$ a relativní chybu již 8%. Naopak se lze ptát, pro jaký nejmenší poměr J/C lze optimální aperturu použít, aby byla systematická chyba menší než 1%. Vychází $J/C > 88$.

Tyto výsledky byly odvozeny pro $a=1$. Ukažme, že platí i pro libovolné $a=b>0$.

Vskutku, s využitím skutečnosti, že $\tilde{R}(a=b) = \frac{1}{b} \tilde{R}(a=1)$ dostáváme

$$\int_{A(\tilde{R}(a=b))} P(bx, by) dx dy = \frac{1}{b^2} \int_{A(b\tilde{R}(a=b))} P(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{b^2} \int_{A(\tilde{R}(a=1))} P(\xi, \eta) d\xi d\eta .$$

Obdobně

$$\int_{i^2} P(bx, by) dx dy = \frac{1}{b^2} \int_{i^2} P(\xi, \eta) d\xi d\eta .$$

V podílu se faktory $1/b^2$ vykrátí. Relativní systematická chyba zůstává tudíž pro libovolný parametr a stejná, při jakémkoliv PSF.

Když jsme už zjistili, jaký má mít optimální apertura obsah při daném tvaru, zkusme ještě určit, který tvar je nevhodnější. Uvědomme si, že podmínka na obsah optimální apertury (20) neklade žádná omezení na její tvar. Volme tedy pevně obsah \tilde{A} . Podívejme se teď na funkci S/N (18^c) jako na funkci proměnné I . Člen $C\tilde{A} > 0$ je nyní konstantou a $I \in [0, M]$, kde M značí jisté konečné číslo, jímž je integrál omezen. Zderivováním funkce S/N podle I snadno zjistíme, že je to funkce, která na intervalu $[0, M]$ roste. Činíme závěr, že při daném obsahu \tilde{A} musíme volit tvar apertury takový, abychom maximalizovali úhrnný signál v ní obsažený. To znamená, že tvar, při kterém je poměr signál-šum největší, je tvar té vrstevnice funkce PSF, která má obsah rovný \tilde{A} (vrstevnicí zde myslíme množinu bodů roviny, na níž má funkce PSF hodnoty větší než daná konstanta).

Odtud docházíme k algoritmu nalezení optimální apertury. Nejprve vymežíme kolem obrazu hvězdy kontrolní oblast, do níž z velké části padne a navíc do ní nezasahují okolní hvězdy. Uvnitř kontrolní oblasti pak postupně sčítáme hodnoty pixelů, nebo jejich části, v pořadí podle velikosti od největších k nižším. Algoritmus končí, nastane-li $FFOA=J/C$, nebo nějaká vhodná náhrada této podmínky. Zřejmě dá algoritmus poněkud nadhodnocený odhad, protože nepočítá s šumem v datech. Pro dokonalý obraz hvězdy se příliš neliší od standardního hledání poloměru optimální kruhové apertury pomocí křivky růstu.

Odvoďme, jak se změní poměr S/N , pokud zvolíme plochu apertury příliš velkou. Předpokládejme, že naprostá většina signálu o celkovém součtu I se nalézá uvnitř plochy o obsahu A . Spočítáme, kolikrát se sníží S/N , zvětšíme-li plochu apertury o kA :

$$(26) \quad \boxed{\frac{S/N(A)}{S/N(A+kA)} = \frac{I}{\sqrt{I+CA}} / \frac{I}{\sqrt{I+CA+CkA}} = \frac{\sqrt{I+CA+CkA}}{\sqrt{I+CA}} = \sqrt{1 + \frac{CkA}{I+CA}} = \sqrt{1 + \left(\frac{I}{CA} + 1\right)^{-1} k}}.$$

Takže poměr S/N klesá přibližně úměrně odmocnině z k . Pokles je výraznější, pro slabší signál.

Do této chvíle jsme se zabývali jen optimální aperturou, tj. takovou, uvnitř které je poměr signál-šum největší. Přitom však se vůbec nebere ohled na to, jaká část signálu padne mimo ní. Proto zavedme správnou aperturu jako takovou, že je relativní nejistota způsobená jak systematickou, tak i statistickou chybou co nejmenší. Při označení celkového signálu vyprodukovaného hvězdou S absolutní nejistoty jeho určení ΔS bude relativní nejistota dána

$$(27) \quad \boxed{\frac{\Delta S(A)}{I(A)} = \frac{S - I(A) + \sqrt{I(A) + CA}}{I(A)} = \frac{S - I}{I} + \frac{\sqrt{I + CA}}{I}}.$$

Úpravou na pravé straně zjišťujeme, že při pevném tvaru apertury je relativní nejistota součtem klesající funkce v A a převráceného poměru signál šum uvnitř této oblasti. Snadno derivací ověříme tvrzení: *Nechť f je reálná funkce spojitá uzavřeném intervalu W a nabývá na jeho vnitřku právě jednoho lokálního minima v bodě X a nechť je g spojitá klesající funkce na W a dále funkce $f+g$ nabývá na vnitřku W svého minima v bodě X' . Pak $X < X'$. Z tohoto tvrzení plyne, že optimální apertura je vždy o něco menší než správná.*

Nyní bychom mohli, podobně jako v případě optimální apertury, pomocí derivace hledat lokální minimum relativní nejistoty, a najít, jaké funkci je v případě správných rozměrů apertury rovno C . Dospěli bychom však ke složitým nicneříkajícím výrazům, které ani nemá cenu uvádět.

Podobným postupem, jako u optimální apertury, lze ověřit, že při dané ploše apertury je nejlepší volit její tvar, jaký má vrstevnice funkce P s tímto obsahem.

Použitá literatura

- [1] Berry, R., Burnell, J.: *The Handbook of Astronomical Image Processing*, William-Bell, Inc., Richmond, 2000
[2] Howell, S. B.: *Handbook of CCD Astronomy*, Cambridge University press, Cambridge, 2000

Necitovaná, ale použitá literatura

- <http://ccd.mii.cz/art?id=303&cat=1&lang=405> konstrukce CCD a redukce
<http://www.asu.cas.cz/~lenka/prednasky/318ext.htm> fotometrie
<http://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST007/ast007.pdf> fotometrie
<http://www.planetary.cz/clanky/2006-CCD.htm#dsi-pro> barevné CCD

Zdroje obrázků

Obr. 1:

<http://wwwau.kodak.com/global/en/professional/support/techPubs/e28/e28.pdf>

Obr. 2: <http://www.astro.ljmu.ac.uk/courses/phys134/scopes.html>

Obr. 3: <http://ostrava.astronomy.cz/tech.htm>

Obr. 4: <http://www.ccd.com/ccd102.html>

Obr. 5: <http://www.ccd.com/ccd101.html>

Obr. 6: <http://ccd.mii.cz/art?id=303&cat=1&lang=405>

Obr. 7: CD*

Obr. 8: <http://www.astro.uni-bonn.de/~mischa/datareduction/biasdarkflat.html>

Obr. 9: CD

Obr. 10: CD

Obr. 11: Výstup z programu Maple 11

*Obrázky s uvedeným zdrojem CD pocházejí z dat laskavě poskytnutých doc. Wolfem z Ondřejovských pozorování.

