Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aleksandra Tarabić

Kellyho kritérium

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

2009

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace a cenné připomínky při zpracovávání mé bakalářské práce. Zároveň bych chtěla poděkovat své rodině za její podporu po celou dobu mého studia.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29. 05. 2009 Aleksandra Tarabić

Obsah

Název práce: Kellyho kritérium
Autor: Aleksandra Tarabić
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
e-mail vedoucího: Petr.Dostal@mff.cuni.cz

Abstrakt: Investování na stacionárním trhu vede k exponenciálnímu růstu bohatství. Hlavním cílem předložené práce je maximalizovat míru exponenciálního růstu kapitálu. Tento problém známý pod názvem Kellyho kritérium je ekvivalentní se řadou problémů z informační a ergodické teorie a proto je část práce věnována těmto teoriím. Základem řešení je maximalizace podmíněného očekávaného logaritmického výnosu pro jedno investiční období za podmínky σ-algebry obsahující informace o předchozích obdobích. V práci jsou uvedeny základní vlastnosti log-optimálního portfolia a maximálního očekávaného logaritmického výnosu. Pomocí nich je dokázána asymptotická optimalita log-optimálního portfolia. V případě stacionárního ergodického trhu je pomoci ergodické teorie přímo vyjádřena míra exponenciálního růstu log-optimálního portfolia, která žádným jiným portfoliem nemůže být překonána.

Klíčová slova: log-optimální portfolio, asymptotické vlastnosti, entropie

Title: Kelly criterion
Author: Aleksandra Tarabić
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Petr.Dostal@mff.cuni.cz

Abstract: Investment in a stationary market results in an exponential growth of wealth. The main purpose of the present study is to maximize exponential rate of growth of capital. This problem known as the Kelly criterion is equivalent to the number of the problems of information and ergodic theory and so the part of the work is devoted to these theories. The core solution is to maximize conditionally expected log return for one investment period given σ-field containing the information about previous investment periods. The basic characteristics of log-optimum portfolio and maximum expected log return are introduced in the study. By these properties is proved asymtotic optimality principle. Using the ergodic theory in the case of stationary ergodic market is deduced the exponential rate of growth of the log-optimal portfolio, which can not be dominated by any other portfolio.

Keywords: log-optimum portfolio, asymptotic properties, entropy

Úvod

V roce 1956 vědec John Larry Kelly, Jr. ve své publikaci vzájemně propojil teorii her a informační teorii a závěry ke kterým došel se běžně používají i v teorii výběru portfolia. Ukázal, že za účelem dosažení maximálního růstu bohatství, investor by při investování měl výbrát takové portfolio, kterým se maximalizuje očekávaná hodnota logaritmu výnosu z této investice. Důležitým předpokladem je, že celkový kapitál musí být reinvestován. Breiman později dokázal (viz. Breiman (1961)), že tato strategie, známá jako Kellyho kritérium, je z dvou hledisek optimální: (1) maximalizuje míru růstu kapitálu a (2) minimalizuje očekávaný čas k dosažení pevné výši kapitálu.

Portfolio p je vektor s nezápornými složkami, které představují části kapitálu vynaloženého na odpovídající investice v určitém investičním období. Představme si investiční trh jako posloupnost náhodných vektorů výnosu $X_t = (X_t^i)_{i=1}^m$ z portfolií $p_t = (p_t^i)_{i=1}^m$, kde $X_t^i \geq 0$ představuje výnos z i-té investice na peněžní jednotku na konci investičního období $(t-1, t]$, $t = 1, 2, \ldots$. Pak se v tuto chvíli celkový kapitál zvýší o faktor

$$(p_t, X_t) = \sum_{i=1}^{m} p_t^i X_t^i.$$

Nechť investor začíná s kapitálem C_0 a pro jednoduchost budeme předpokládat, že $C_0 = 1$. Pak se po n investičních období jeho kapitál rovná

$$C_n = \prod_{t=1}^{n} (p_t, X_t) \, .$$

Podle Kellyho by se investor měl v každém investičním období zaměřit na maximalizací očekávaného log-výnosu

$$\mathbb{E}[\log{(p, X_t)}] =: R_t(p, P_X(t)),$$

kde $P_X(t)$ je rozdělení vektoru X_t. Portfolio p_t^* se kterým je toho maxima dosaženo se nazývá log-optimální portfolio, a dosažená hodnota

$$R_t(p^*, P_X(t)) =: R_t^*(P_X(t))$$

se nazývá maximální očekávaný log-výnos. Z Kellyho kritéria pak vyplývá, že hodnota kapitálu

$$C_n^* = \prod_{t=1}^{n} (p_t^*, X_t) \,.$$

je asymptoticky největší možná, které by investor mohl dosáhnout. Toto tvrzení představuje jádro této práce a dokázáno je ve kapitole 4, věta 10. V důkazu se používají určité vlastnosti log-optimálního portfolia, a proto je třeba vratit se zpátky.

První kapitola představuje obecný přístup k práci. V ni jsou zadefinovány nejdůležitější veličiny, které se dál budou používat a které jsou výše popsány. Navíc jsou zavedeny množiny $\mathcal{P}$ jako množina přípustných a $\mathcal{P}^*$ jako množina log-optimálních portfolii.

V druhé kapitole je blíž charakterizováno log-optimální portfolio. Dokázána je nutná a postačující podmínka, aby p^* bylo log-optimální portfolio, tzv. Kuhn-Tuckerova podmínka

$$\mathbb{E}\left[\frac{(p,X)}{(p^*,X)}\right] \leq 1, \qquad \text{pro každé } p \in \mathcal{P}.$$

Z ní se pak dostane, že maximální očekávaný logaritmický výnos nezávisí na výběru log-optimálního portfolia.

Kapitola 3 je teoretickým základem pro důkazy vět z dalších částech. V ní jsou popsány vlastnosti veličin a množin se kterými pracujeme. Dochází k přechodu od veličiny X k veličině

$$Y := \frac{X}{(\pi, X)},$$

kde jsem zafixovali nějaké portfolio referenční portfolio $\pi \in \mathcal{P}$, pro které platí $\pi^i > 0$ pro každé $1 \leq i \leq m$. Vektor Y je vlastně projekce X na simplex

$$\mathcal{Y} = \left\{ y = (y^i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}_+^m \,:\, (\pi, y) = 1 \right\}. \tag{1}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} R(p, P_X) = \mathbb{E}_P[\log{(p,X)}] &= \mathbb{E}[\log{(\pi, X)}] + \mathbb{E}[\log{(p,Y)}] \\ &= ref(P_X) + R(p, P_Y) \end{aligned}$$

a při maximalizací se neztratí žádná informace:

$$R^*(P_X) = ref(P_X) + R^*(P_Y)$$

Navíc s vektorem Y je snadněji pracovat, neboť $\mathcal{Y}$ je kompaktní. Pak se dokáže řada vlastností veličin $R(Y)$ a $R^*(Y)$, které se potom pomocí uvedeného rozkladu přenesou na $R(X)$ a $R^*(X)$. Důležitou částí této kapitoly je věta 8, ve které se mimo jiné tvrdí, že Pro každé p vybrané na základě informací z minulých období platí

$$\mathbb{E}[\log{(p_t, X)}] \leq \mathbb{E}[\log{(p_t^*, X)}] \quad \text{s.j.}$$

a také

$$R_t^* \nearrow R_\infty^* \quad \text{pro } t \to \infty,$$

kde index ∞ představuje nekonečnou minulost.

Pak v kapitole 4 sleduje asymptotická optimalita log-optimálního portfolia, která je nějakým způsobem zobecněním Kuhn-Tuckerový podmínky a pomocí ní se i dokazuje.

Kapitola 5 ukazuje na vztah mezi informační teorií a investováním, o kterém se ve svém článku zmiňoval Kelly. V první části jsou zadefinované základní veličiny informační teorie: relativní entropie, vzájemná informace a entropie charakterizující chování náhodných veličin, konkrétně vektorů výnosu portfolia. K tomu pomůže větě o asymptotické rovnoměrnosti, která je v práci dokázána pro stacionární ergodické trhy, ale obecně platí pro asymptoticky stacionární ne nutně ergodické trhy. Věta určuje míru exponenciálního růstu kapitálu investora a ukazuje, že platí

$$\frac{1}{n} \log C_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_\infty^* \quad \text{s.j.},$$

Důkaz je proveden sendvičovou metodou, kde se pozoruje celkový kapitál vzhledem ke k-minulosti a vzhledem k nekonečné minulosti, což se rovná pro $k \to \infty$. Hlavní rolí hraje ergodická věta (uvedena v příloze C), která danou konvergenci zaručuje. Tímto důkazem se zabývá článek Algoet, Cover (1988a).

Poslední kapitola se dotýká krátkodobé optimalitě log-optimální strategie.

Práce je založena na článku Algoet, Cover (1988b), který je základním zdrojem kapitol 1 až 4 a části kapitoly 5 týkající se věty o asymptotické rovnoměrnosti. První část kapitoly 5 a Kapitola 6 jsou čerpany z Cover, Thomas (2005). Ostatní uvedená literatura byla v nějaké míře doplňková.

Kapitola 1

Investiční trh

Nechť je investiční trh sestaven z m investičních příležitostí, kde $m \in \mathbb{N}$, vždy v každém investičním období $(t-1, t]$ pro $t \in \mathbb{N}$. Pak všechny tyto investiční příležitosti je možné modelovat pomocí náhodného procesu

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}_+^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^m, P_X),$$

kde $X_t = (X_t^i)_{i=1}^m$ a X_t^i představuje *výnos* z i-té investice na peněžní jednotku na konci investičního období $(t-1, t]$. Dále $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ pro jednoduchost výjimečně v této práci.

Předpokládejme, že počáteční kapitál investora je $C_0 = 1$. Na začátku t-tého období, kde $t = 1, 2, \ldots$, investor rozděluje svůj majetek C_{t-1} podle *portfolia* $p_t = (p_t^i)_{i=1}^m$, kde $p_t^i \geq 0$ představuje váhu i-té investice v t-tém období (poměr vynaloženého kapitálu na i-tou investici) a platí $\sum_{i=1}^m p_t^i = 1$. Pak výnos na investovanou peněžní jednotku na konci t-tého období je vážený průměr výnosů z investic, tj.

$$(p_t, X_t) = \sum_{i=1}^m p_t^i X_t^i.$$

Výnos (p_t, X_t) je náhodná veličina, jejíž rozdělení závisí na rozdělení P_X vektoru X (což investor nemůže ovlivnít) a na výběru portfolia p. Celkový kapitál investora na konci t-tého období je potom $C_t = C_{t-1}(p_t, X_t)$, tj. po n investičních období investor má k dispozici kapitál ve výši

$$C_n = \prod_{t=1}^n (p_t, X_t)\,.$$

Cílem investora je svůj kapitál maximalizovat. Problém je v tom, že není možné obecně maximalizovat náhodnou veličinu. Standardní teorie portfolia (na příklad Sharpeova-Markowitzova teorie známá pod názvem *Mean-variance theory*) se zabývá maximalizací očekávané hodnoty výnosu (p_t, X_t)

a zároveň minimalizací rizika měřeného směrodatnou odchylkou. Alternativním přístupem je maximalizovat střední hodnotu z nějaké transformace kapitálu. Tato transformace se často označuje jako užitková funkce a měla by být rostoucí (čím více, tím lépe) a konkávní, čemuž odpovídá averze investora vůči riziku. Tato práce je zaměřena na vlastnosti logaritmické užitkové funkce. Takovou užitkovou funkcí právě použil Kelly pro svoje kritérium.

Označme s $\mathcal{P}$ množinu všech přípustných portfolií

$$\mathcal{P} = \left\{ p = \left(p^i\right)_{i=1}^m : p^i \geq 0, \sum_{i=1}^m p^i = 1 \right\}.$$

Pak $\mathcal{P}$ je simplex.

Definice. Nechť Q je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^m$ a nechť $p \in \mathcal{P}$. *Logaritmický moment* $R(p, Q)$ definujeme následujícím způsobem

$$R(p, Q) = \int_{\mathbb{R}_+^m} log(p, x) \, \mathrm{d}Q(x). \tag{1.1}$$

Speciálním případem je *očekávaný logaritmický výnos* portfolia p vzhledem k rozdělení P_X definovaný jako

$$R(p, P_X) = \int_{\mathbb{R}_+^m} \log{(p, x)} \, \mathrm{d}P_X(x) = \int_\Omega \log{(p, X)} \, \mathrm{d}P = \mathbb{E}[\log{(p, X)}] \, . \tag{1.2}$$

Definice. *Maximální logaritmický moment* $R^*(Q)$ je definován jako supremum všech logaritmických momentů $R(p, Q)$ přes všechna přípustná portfolia

$$R^*(Q) = \sup_{p \in \mathcal{P}} R(p, Q). \tag{1.3}$$

Analogicky definujeme *maximální očekávaný logaritmický výnos* $R^*(P_X)$ jako supremum všech očekávaných logaritmických výnosů přes všechna přípustná portfolia

$$R^*(P_X) = \sup_{p \in \mathcal{P}} R(p, P_X). \tag{1.4}$$

V této práce budeme předpokládat, že $R^*(P_X) \in \mathbb{R}$.

Definice. Portfolio p^* se nazývá *log-optimální*, pokud je pomocí něho dosažen maximální očekávaný logaritmický výnos, tj. pokud platí

$$R^*(P_X) = R(p^*, P_X).$$

Jinými slovy, p^* je log-optimální, pokud žádné jiné portfolio p nemůže zvýšit očekávaný logaritmický výnos vzhledem k p^*. Zřejmě platí

$$\mathbb{E}\left[\log \frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right] \leq 0, \qquad \text{pro každé } p \in \mathcal{P}. \tag{1.5}$$

Lemma 1.1. *Logaritmický moment $R(p, Q)$ je konkávní v p a lineární v Q na svém definičním oboru.*

Důkaz. Připomeňme definici logaritmického momentu

$$R\,(p, Q) = \int_\Omega \log\,(p, x)\,\mathrm{d}Q(x).$$

Konkávnost v p plyne z konkavity logaritmu a z vlastností integrálu. Linearita v Q plyne z linearity integrálu. $\square$

Nechť pro pravděpodobnostní míru Q na $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^m$ platí, že $R^*(Q) \in \mathbb{R}$. Označme $\mathcal{P}^*(Q)$ množinu všech log-optimálních portfolií vzhledem ke Q

$$\mathcal{P}^*(Q) = \Big\{p \in \mathcal{P} \,:\, R^*(Q) = R(p, Q)\Big\}.$$

Nechť existuje portfolio $\pi \in \mathcal{P}$ takové, že $p^i > 0$ pro každé $i = 1, \ldots, m$. Pak článek Cover (1984) zaručuje i existenci log-optimálního portfolia, tj. platí, že množina $\mathcal{P}^*(P_X)$ není prázdná.

Kapitola 2

Kuhnovy-Tuckerovy podmínky optimality

Najít log-optimální portfolio znamená maximalizovat očekávaný logaritmický výnos na konvexní množině všech portfolií. Optimální řešení může ležet jak uvnitř, tak na hranici této množiny. Při hledání nám pomůže základní charakteristika log-optimálního portfolia popsána v následující větě.

Věta 1 (**Kuhnova-Tuckerova podmínka optimality**). *Nutná a postačující podmínka, aby p^* bylo log-optimálním portfoliem očekávaného logaritmického výnosu $R(p, P_X)$ je*

$$\mathbb{E}\left[\frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right] \leq 1, \qquad \textit{pro každé } p \in \mathcal{P}. \tag{2.1}$$

Důkaz. Očekávaný logaritmický výnos $R(p, P_X) = \mathbb{E}[\log{(p, X)}]$ je podle lemmatu 1.1 konkávní funkce portfolia p, kde p patří do simplexu $\mathcal{P}$. Pak nutná a postačující podmínka pro log-optimalitu portfolia $p^* \in \mathcal{P}$ je aby první derivace $R(p, P_X)$ v bodě p^* ve směru $p - p^*$ byla nekladná.
Nechť $p \in \mathcal{P}$ a $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Označme $p_\lambda = (1 - \lambda)p^* + \lambda p$. Pak

$$\frac{(p_\lambda, X)}{(p^*, X)} = (1 - \lambda) + \lambda \frac{(p, X)}{(p^*, X)} = 1 + \lambda Y, \quad \text{kde} \quad Y = \frac{(p, X)}{(p^*, X)} - 1 \geq -1.$$

Dostáváme, že $1 + \lambda Y > \frac{1}{2}$. Z průběhu funkce logaritmus dostaneme, že existuje takové $\varepsilon \in (0, 1)$, že pro $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ platí

$$\log x \geq x - 1 - \varepsilon(x - 1)^2.$$

Pak pro $a > 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda Y &\geq \log\left(1+\lambda Y\right) \\ &\geq \log\left(1+\lambda \min\left\{Y,a\right\}\right) \\ &\geq \lambda \min\left\{Y,a\right\} - \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\lambda \min\left\{Y,a\right\}\right)^2 \\ &\geq \lambda \min\left\{Y,a\right\} - \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\lambda a\right)^2,\end{aligned}$$

neboť $\left|\min\left\{Y,a\right\}\right| \leq a$.
Speciálně pro $a = a\left(\lambda\right)$ takové, že $a\left(\lambda\right) \to \infty$ a $\lambda a^2\left(\lambda\right) \to 0$ pro $\lambda \to 0^+$ dostáváme

$$\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[\log\left(1+\lambda Y\right)] \to \mathbb{E}[Y] \quad \text{pro } \lambda \to 0^+.$$

Dále

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}R(p_\lambda, P_X)\bigg|_{\lambda\to 0^+} &= \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{R(p_\lambda, P_X) - R(p_0, P_X)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\mathbb{E}[\log\left(1+\lambda Y\right)] - \log 1}{\lambda} \\ &= \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{(p,X)}{(p^*,X)}\right] - 1.\end{aligned}$$

Odtud máme ekvivalenci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}R(p_\lambda, P_X)\bigg|_{\lambda\to 0^+} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[\frac{(p,X)}{(p^*,X)}\right] \leq 1 \tag{2.2}$$

pro každé $p \in \mathcal{P}$ a tím je tvrzení věty dokázáno. □

Věta 2. *Pro $p_1^*, p_2^* \in \mathcal{P}^*(P_X)$ platí $(p_1^*, X) = (p_2^*, X)$.*

Důkaz. Nechť $p_1^*, p_2^* \in \mathcal{P}^*(P_X)$. Označme $Z = \frac{(p_1^*,X)}{(p_2^*,X)}$. Z Kuhnovy-Tuckerovy podmínky máme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &\leq 1, \quad \text{neboť } p_2 \text{ je log-optimalní a} \\ \mathbb{E}\left[Z^{-1}\right] &\leq 1, \quad \text{neboť } p_1 \text{ je log-optimalní.}\end{aligned}$$

Funkce $x \in (0,\infty) \mapsto x^{-1}$ je konvexní a použitím Jensenovy nerovnosti z přílohy A dostáváme

$$1 \geq \mathbb{E}\left[Z^{-1}\right] \geq \left(\mathbb{E}[Z]\right)^{-1} \geq 1.$$

Potom v Jensenove nerovnosti platí rovnost, což znamená, že $Z = \mathbb{E}[Z]$ skoro jistě. Dohromady dostáváme $Z \equiv 1$ skoro jistě. □

Věta 3. *Kuhnova-Tuckerova podmínka optimality portfolia p^* daná vzorcem (2.1) je ekvivalentní s následujícími podmínkami:*

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_i}{(p^*, X)}\right] \begin{cases} = 1 & \textit{pokud} \quad p_i^* > 0, \\ \leq 1 & \textit{pokud} \quad p_i^* = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

pro $i = 1, \ldots, m$.

Důkaz. Platí-li podmínka (2.3), pak

$$\mathbb{E}\left[\frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right] = \sum_{i=1}^{m} p_i \,\mathbb{E}\left[\frac{X_i}{(p^*, X)}\right] \leq \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

tzn. že platí (2.1).
Nechť naopak platí (2.1). Volbou $p^{(i)} = e_i$ dostaneme ihned z podmínky (2.1) druhý řádek vzorce (2.3). Pokud $p_i^* > 0$, opět volíme $p^{(i)} = e_i$ a také $p_\lambda^{(i)} = (1-\lambda)p^* + \lambda p^{(i)}$. Z věty 1 víme, že (2.1) dává, že p^* je log-optimální a tudíž funkce $R(p_\lambda^{(i)}, P_X)$ v bodě $\lambda = 0$ nabývá globálního maxima. Dále $p_i^* > 0$ dává, že $p_\lambda^{(i)} \in \mathcal{P}$ platí pro λ v okolí 0 (speciálně pro záporné hodnoty). S využitím části důkazu věty 1 dostáváme

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} R(p_\lambda^{(i)}, P_X)\Big|_{\lambda=0} = \mathbb{E}\left[\frac{X_i}{(p^*, X)}\right] - 1.$$

□

Použitím Jensenovy nerovnosti (viz příloha A) na konkávní funkce $\log(\cdot)$ dostáváme

$$\mathbb{E}\left[\log \frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right] \leq \log \mathbb{E}\left[\frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right] \leq \log 1 = 0.$$

Celkově pro každé $p \in \mathcal{P}$ platí

$$\mathbb{E}\left[\frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right] \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[\log \frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right] \leq 0. \tag{2.4}$$

Dalším důsledkem Kuhnovy-Tuckerovy podmínky je

$$\mathbb{E}\left[\frac{p^{*i} X^i}{(p^*, X)}\right] = p^{*i} \,\mathbb{E}\left[\frac{X^i}{(p^*, X)}\right] = p^{*i}. \tag{2.5}$$

Veličina $\frac{p^{*i} X^i}{(p^*, X)}$ představuje podíl výnosu z i-té investice na celkovém výnosu portfolia na konci investičního období. Rovnost (2.5) pak říká, že se očekávaná váha i-té investice na konci investičního období rovna její váze na začátku tohoto období.

Kapitola 3

Vlastnosti maximálního očekávaného logaritmického výnosu

Dříve než se pustíme do maximalizace očekávaného logaritmického výnosu, bylo by vhodné podrobněji popsat jeho vlastnosti. Důležité charakteristiky této veličiny jsou spojitost a omezenost, které hrají významnou roli v důkazech základních vět z teorie portfolia.

Věta 4. *Maximální očekávaný logaritmický výnos $Q \to R^*(Q)$ je konvexní.*

Důkaz. Nechť Q_1 a Q_2 jsou dvě rozdělení a $0 < \lambda < 1$. Pak

$$\begin{aligned} R^*(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2) &= \sup_{p\in\mathcal{P}} R(p, \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2) \\ &= \sup_{p\in\mathcal{P}} \big(\lambda R(p, Q_1) + (1-\lambda)R(p, Q_2)\big) \qquad (3.1) \\ &\le \lambda \sup_{p\in\mathcal{P}} R(p, Q_1) + (1-\lambda) \sup_{p\in\mathcal{P}} R(p, Q_2) \qquad (3.2) \\ &= \lambda R^*(Q_1) + (1-\lambda)R^*(Q_2). \end{aligned}$$

Rovnost (3.1) plyne z linearity $R(p, Q)$ a nerovnost (3.2) plyne z vlastnosti suprema. $\square$

Lemma 3.1. *Nechť Q je borelovská pravděpodobnost na $\mathbb{R}_+^m$ taková, že $R^*(Q) \in \mathbb{R}$. Pak množina všech log-optimálních portfolií $\mathcal{P}^*(Q)$ je konvexní.*

Důkaz. Nechť p_1 a p_2 jsou log-optimální portfolia. Pak platí $R(p_1, Q) = R(p_2, Q) > -\infty$. Z konkavity $R(p, Q)$ pro $0 \le \lambda \le 1$ dostáváme

$$R(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, Q) = \lambda R(p_1, Q) + (1-\lambda)R(p_2, Q) = R^*(Q).$$

Odtud plyne, že $\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ je také log-optimální portfolio. $\square$

Věta 5. *Nechť $X_1 \dots X_n$ jsou i.i.d. náhodné výnosy s rozdělením P_X a $p^* \in \mathcal{P}^*(P_X)$. Buď*

$$C_n^* = \prod_{t=1}^{n} (p^*, X_t)$$

celkový kapitál na konci n-tého období při výběru log-optimální strategie. Pak

$$\frac{1}{n} \log C_n^* \to R^*(P_X) \quad \textit{pro } n \to \infty \qquad \textit{s.j.} \tag{3.3}$$

Důkaz. Důkaz plyne ze silného zákona velkých čísel:

$$\frac{1}{n} \log C_n^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \log(p^*, X_t) \to R^*(P_X) \quad \text{pro } n \to \infty \qquad \text{s.j.}$$

□

Očekávaný logaritmický výnos je veličina závislá na rozdělení náhodného vektoru výnosů. Rozdělení P_X vektoru výnosů X je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}_+^m$, což není kompaktní množina. Zafixujme proto referenční portfolio $\pi = (\pi^i)_{i=1}^m \in \mathcal{P}$ takové, že $\pi^i > 0$ pro každé $1 \le i \le m$. Nechť také platí $\log(\pi, X) \in L^1$. Definujme potom *normovaný vektor výnosů*

$$Y := \frac{X}{(\pi, X)} \tag{3.4}$$

jako projekce vektoru výnosů X na simplex

$$\mathcal{Y} = \left\{ y = (y^i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}_+^m \,:\, (\pi, y) = 1 \right\}, \tag{3.5}$$

kde $\frac{0}{0} := 0$.

Vhodným znormováním vektoru X pomocí (3.4) přejdeme od veličiny X nabývající hodnot z $\mathbb{R}_+^m$ k veličině Y, která je měřitelnou funkcí X nabývající hodnot z kompaktní množině $\mathcal{Y}$.

Označme P_Y rozdělení náhodného vektoru Y, tedy

$$Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}), P_Y).$$

Z definicí očekávaného logaritmického výnosu (1.2) a maximálního očekávaného logaritmického výnosu (1.4) dostáváme

$$R(p, P_Y) = \int_\Omega \log{(p, Y)}\, \mathrm{d}P = \mathbb{E}[\log{(p, Y)}]\,,$$
$$R^*(P_Y) = \sup_{p \in \mathcal{P}} R(p, P_Y).$$

Vektor X lze rozložit na součin (π, X) a Y a potom i očekávaný logaritmický výnos $R(p, P_X)$ lze zapsat následujícím způsobem:

$$R(p, P_X) = \mathbb{E}_P[\log{(p, X)}] = \underbrace{\mathbb{E}[\log{(\pi, X)}]}_{R(\pi, P_X)} + \underbrace{\mathbb{E}[\log{(p, Y)}]}_{R(p, P_Y)},$$

tedy

$$R(p, P_X) = ref(P_X) + R(p, P_Y). \tag{3.6}$$

Referenční úroveň $ref(P_X) = R(\pi, P_X)$ je vnitřní záležitostí trhu a investor ji nemůže žádným způsobem ovlivnit. Navíc předpoklad $\log(\pi, X) \in L^1$ zaručuje, že $ref(P_X) \in \mathbb{R}$. Odtud pak plyne, že maximalizace $R(p, P_X)$ splývá s maximalizací $R(p, P_Y)$. Platí tedy

$$R^*(P_X) = ref(P_X) + R^*(P_Y) \tag{3.7}$$

a množiny log-optimálních portfolií vzhledem k rozdělení P_X a P_Y se rovnají, tj. $\mathcal{P}^*(P_X) = \mathcal{P}^*(P_Y)$. Proto se teď zaměříme na vyšetřování vlastností maximálního očekávaného logaritmického výnosu $R^*(Q)$ definovaného na prostoru pravděpodobnostních měr na simplexu $\mathcal{Y}$. Označme tento prostor $\mathcal{M}$. Na něm budeme uvažovat slabou konvergenci pravděpodobnostních měr. Tato konvergence je metrizovatelná do úplného separabilního metrického prostoru (viz Štěpán (1987), Věta III.3.5.). Vzhledem k tomu, že $\mathcal{Y}$ je kompaktní množina a $\mathcal{M}$ je množina všech pravděpodobnostních měr na $\mathcal{Y}$, z Prochorovy věty (viz např. Lachout (2004), Věta 13.9) dostáváme, že $\mathcal{M}$ je kompaktní prostor vzhledem k slabé konvergenci měr. Podle definice maximálního očekávaného logaritmického výnosu (1.4) pro rozdělení $Q \in \mathcal{M}$ platí

$$R^*(Q) = \sup_{p \in \mathcal{P}} R(p, Q) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \int_{\mathbb{R}^m_+} log(p, y) \, \mathrm{d}Q(y).$$

Věta 6. *Maximální očekávaný logaritmický výnos $R^*(Q)$ je konvexní, omezený a stejnoměrně spojitý na kompaktu $\mathcal{M}$. Pro každé rozdělení $Q \in \mathcal{M}$ je množina log-optimálních portfolií $\mathcal{P}^*(Q) \in \mathcal{P}$ neprázdná, konvexní a kompaktní a existuje borelovsky měřitelná selekce p^* z $\mathcal{M}$ do $\mathcal{P}$, která míře $Q \in \mathcal{M}$ přiřazuje log-optimální portfolio $p^*(Q) \in \mathcal{P}^*(Q)$.*

Důkaz. Nechť $Q \in \mathcal{M}$ a nechť $\pi \in \mathcal{P}$ je vybrané referenční portfolio.

(i) Konvexita: Analogicky jako důkaz konvexity $R^*(Q)$ z věty 4.

(ii) Omezenost: Platí

$$R^*(Q) = \sup_{p \in \mathcal{P}} R(p, Q) \geq R(\pi, Q) = 0$$

a tím dostáváme omezenost zdola. Dále pro každé portfolio $p \in \mathcal{P}$ platí

$$(p,y) \leq \sum_{i=1}^{m} y^i = \sum_{i=1}^{m} x^i / \sum_{i=1}^{m} \pi^i x^i \leq 1/\min_i \pi^i = \max_i 1/\pi^i$$

a proto

$$R^*(Q) \leq \log \max_i \frac{1}{\pi^i} = \max_i \log \frac{1}{\pi^i}.$$

Tím máme i omezenost shora.

(iii) Stejnoměrná spojitost: Z polospojitosti zdola a shora dostaneme spojitost, která na metrickém kompaktu dává stejnoměrnou spojitost.

Nechť $0 \leq \lambda \leq 1$. Označme $\mathcal{P}_\lambda = \{p_\lambda = (1-\lambda)\pi + \lambda p : p \in \mathcal{P}\}$ a

$$R^*_\lambda(Q) = \sup_{p \in \mathcal{P}_\lambda} \int \log(p,y)\,\mathrm{d}Q(y) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \int \log(p_\lambda, y)\,\mathrm{d}Q(y). \tag{3.8}$$

Pak $R^*_\lambda(Q)$ je monotonně rostoucí v λ, neboť je supremem přes zvětšující se množiny pro rostoucí λ a platí

$$0 = R^*_0(Q) \leq R^*_\lambda(Q) \leq R^*_1(Q) = R^*(Q),$$

což dohromady s nerovností $(p_\lambda, y) \geq \lambda(p,y)$ a s (3.8) dává

$$\log \lambda + R^*(Q) \leq R^*_\lambda(Q) \leq R^*(Q).$$

Odsud plyne, že $R^*_\lambda(Q) \to R^*(Q)$ pro $\lambda \to 1$, tj. $R^*(Q)$ je supremem funkcí $R^*_\lambda(Q)$. Funkce $y \mapsto \log(p_\lambda, y)$ je omezená a zdola i shora polospojitá pro $\lambda < 1$ a proto totéž platí i pro funkci $Q \mapsto R(p_\lambda, Q)$. Dále $R^*_\lambda(Q)$ je supremum zdola polospojitých funkcí a tudíž je také zdola polospojitá. Ze stejného důvodu je potom i $R^*(Q)$ zdola polospojitá. Polospojitost shora vyplývá z věty o měřitelné selekci uvedené v Bertsekas, Shreve (1978) (viz příloha B). Z téže věty dostáváme existenci borelovsky měřitelné selekce $Q \in \mathcal{M} \mapsto p^* \in \mathcal{P}^*(Q)$.

□

Nyní se zaměříme na spojitost selekce log-optimálního portfolia $Q \to p^*(Q) \in \mathcal{P}^*(Q)$. Zřejmě nelze očekávat, že by bylo možné najít spojitou selekci na $\mathcal{M}$, která by každé $Q \in \mathcal{M}$ přiřazovala log-optimální portfolio $p^*(Q)$. Ale když platí $Q_n \to Q_\infty$ a $p^*_n \in \mathcal{P}^*(Q_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak bychom mohli očekávat, že každý hromadní bod p^*_∞ posloupnosti $\{p^*_n\}$ je log-optimálním portfoliem vzhledem k Q_∞.

Věta 7. *Množina $\{(Q, p^*) : Q \in \mathcal{M},\ p^* \in \mathcal{P}^*(Q)\}$ je uzavřená v $\mathcal{M} \times \mathcal{P}$.*

Důkaz. Nechť $Q_n \to Q_\infty$ v $\mathcal{M}$, $p_n^* \to p_\infty^*$ v $\mathcal{P}$ a $p_n^* \in \mathcal{P}^*(Q_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $p_\infty^* \in \mathcal{P}^*(Q_\infty)$.

Víme, že $R^*(Q)$ je spojité v Q. Z konvergence $\{Q_n\}$ plyne $R^*(Q_n) \to R^*(Q_\infty)$. Z polospojitosti shora veličiny $R(p, Q)$ plyne nerovnost

$$\begin{aligned} R^*(Q_\infty) \geq R(p_\infty^*, Q_\infty) &= R(\lim_n p_n^*, \lim_n Q_n) \\ &\geq \limsup_n R(p_n^*, Q_n) \\ &= \lim_n R^*(Q_n) = R^*(Q_\infty) \\ &= \sup_{p \in \mathcal{P}} R(p, Q_\infty). \end{aligned}$$

Dostáváme $p_\infty^* \in \mathcal{P}^*(Q_\infty)$ a tím je věta dokázána. □

Důsledkem této věty je skutečnost, že pokud je pro nějaké Q_0 množina $\mathcal{P}^*(Q_0)$ jednobodová, tj. platí $\mathcal{P}^*(Q_0) = \{p_0^*\}$, pak měřitelná selekce $Q \mapsto p^*(Q)$ je spojitá v bodě Q_0.

Výše popsané vlastnosti $R^*(Q)$ a výběru log-optimálního portfolia vzhledem k rozdělení Q nám umožní snadno odvodit některé vlastnosti maximálního očekávaného logaritmického výnosu vzhledem k rozdělení P_X náhodného vektoru výnosů X, se kterým jsme začínali. Věta VI.1.21 uvedena v Štěpán (1987) zaručuje existenci regulární verze podmíněného rozdělení vektoru X za podmínky jakékoliv sub-σ-algebry $\mathcal{F}$.

Označme $\mathcal{P}_t$ množinu všech $\mathcal{F}_t$-měřitelných zobrazení s hodnotami v $\mathcal{P}$, tedy

$$\mathcal{P}_t = \{f : (\Omega, \mathcal{F}_t) \to (\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))\}.$$

Věta 8. *Nechť je náhodný vektor výnosů X definován na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Buď $\{\mathcal{F}_t\}_{t=1}^\infty$ posloupnost sub-σ-algeber z $\mathcal{F}$ s limitní σ-algebrou $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}$.*

(i) Nechť $P_X(t) = \mathcal{L}(X|\mathcal{F}_t)$ je regulární verze podmíněného rozdělení X za podmínky $\mathcal{F}_t$ pro $t \in \mathbb{N} \cup \infty$. Potom

$$P_X(t) \xrightarrow{w} P_X(\infty) \quad s.j. \tag{3.9}$$

(ii) Nechť $p^*(\cdot)$ je měřitelná selekce log-optimálního portfolia.[1] *Pak $p_t^* = p^*(P_X(t))$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelné log-optimální portfolio vzhledem k podmíněnému rozdělení za podmínky $\mathcal{F}_t$. Dále platí $(p_t^*, X) \to (p_\infty^*, X)$ s.j. a tím i*

$$\log{(p_t^*, X)} \to \log{(p_\infty^*, X)} \quad s.j. \tag{3.10}$$

Pokud existuje jediné takové log-optimální portfolio v čase $t = \infty$, pak $p_t^* \to p_\infty^*$ s.j.

[1] Konstrukce měřitelné selekce log-optimálního portfolia je popsána ve příloze B.

(iii) Pro každé $p \in \mathcal{P}_t$ platí

$$\mathbb{E}[\log(p_t, X)|\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[\log(p_t^*, X)|\mathcal{F}_t] \quad \text{s.j.} \tag{3.11}$$

Dále pro maximální podmíněný očekávaný logaritmický výnos $\hat{R}_t^*$ za podmínky $\mathcal{F}_t$ platí rovnost

$$\begin{aligned} \hat{R}_t^* = R^*(P_X(t)) &= \mathbb{E}[\log(p_t^*, X)|\mathcal{F}_t] \\ &= \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}[\log(p, X)|\mathcal{F}_t] \\ &= \sup_{p_t \in \mathcal{P}_t} \mathbb{E}[\log(p_t, X)|\mathcal{F}_t] \quad \text{s.j.} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Platí, že $\{\hat{R}_t^*\}$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal a

$$\hat{R}_t^* \to \hat{R}_\infty^* \quad \text{s.j. a také v } L_1, \text{ pokud} \quad \mathbb{E}[\log(p_\infty^*, X)] < \infty. \tag{3.13}$$

(iv) Pro každé $p \in \mathcal{P}_t$ platí

$$\mathbb{E}[\log(p_t, X)] \leq \mathbb{E}[\log(p_t^*, X)] \quad \text{s.j.} \tag{3.14}$$

Dále pro maximální očekávaný logaritmický výnos R_t^* vzhledem k $\mathcal{F}_t$ platí

$$R_t^* = \mathbb{E}\left[\hat{R}_t^*\right] = \mathbb{E}[\log(p_t^*, X)] = \sup_{p \in \mathcal{P}_t} \mathbb{E}[\log(p, X)] \tag{3.15}$$

Dále platí, že

$$R_t^* \nearrow R_\infty^* \quad \text{pro } t \to \infty. \tag{3.16}$$

Důkaz. Tvrzení (i) vyplývá z Léviho věty o konvergenci martingalu, kde pro omezenou spojitou nebo nezápornou měřitelnou funkci platí

$$\int f \,\mathrm{d}P_X(t) = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{F}_t] \to \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{F}_\infty] = \int f \,\mathrm{d}P_X(\infty) \quad \text{s.j.}$$

Zřejmě $p_t^* = p^*(P_X(t))$ a $\hat{R}_t^* = R^*(P_X(t))$ jsou $\mathcal{F}_t$-měřitelné, neboť $p^*(\cdot)$ a $R^*(\cdot)$ jsou měřitelná zobrazení a $P_X(t)$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelná míra. Další část tvrzení (ii) plyne z jednoznačnosti dokázané ve větě 2. Poslední část tvrzení (ii) plyne z věty 7.

(iii) Vzhledem k existenci regulární verze platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log(p_t, X)|\mathcal{F}_t] &= R(p_t, P_{X|\mathcal{F}_t}) \\ &\leq R^*(p_t, P_{X|\mathcal{F}_t}) \\ &= R(p_t^*, P_{X|\mathcal{F}_t}) \\ &= \mathbb{E}[\log(p_t^*, X)|\mathcal{F}_t] \quad \text{s.j.}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

a tím dostáváme nerovnost (3.11).

Nechť $0 < s < t < \infty$, pak $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, a proto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\hat{R}^*_t|\mathcal{F}_s\Big] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[\log(p^*_t, X)|\mathcal{F}_t]\,|\mathcal{F}_s\Big] \\
&= \mathbb{E}[\log(p^*_t, X)|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sup_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{E}[\log(p, X)|\mathcal{F}_t]\,|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\geq \sup_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\log(p, X)|\mathcal{F}_t]\,|\mathcal{F}_s] \\
&= \sup_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{E}[\log(p, X)|\mathcal{F}_s] \\
&= \hat{R}^*_s
\end{aligned}$$

Pak $\{\hat{R}^*_t\}$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal.

Připomeňme si rozklad maximálního očekávaného logaritmického výnosu

$$R^*(P_X) = ref(P_X) + R^*(P_Y),$$

kde $ref(P_X) = \mathbb{E}[\log(\pi, X)]$, pro referenční portfolio π. (Stejně platí i pro podmíněný logaritmický vynos.) Nechť $P_Y(t)$ představuje regulární podmíněné rozdělení vektoru Y za podmínky $\mathcal{F}_t$. Pak pro něj z výše dokázaného platí $P_Y(t) \xrightarrow{w} P_Y(\infty)$ s.j. a $\{R^*(P_Y(t))\}$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal. Z omezenosti a spojitosti $R^*(Q)$ z věty 6 plyne

$$\begin{gathered}
R^*(P_Y(t)) \to R^*(P_Y(\infty)) \quad \text{s.j. a v } L_1 \quad \text{a} \\
\mathbb{E}[R^*(P_Y(t))] \nearrow \mathbb{E}[R^*(P_Y(\infty))]\,.
\end{gathered}$$

Dále $\{ref(P_X(t))\}$ je $\mathcal{F}_t$-martingal a zase z věty o konvergenci martingalů je $\mathbb{E}[\log(\pi, X)|\mathcal{F}_t] \to \mathbb{E}[\log(\pi, X)|\mathcal{F}_\infty]$ s.j. a v L_1, pokud $\log(\pi, X) \in L^1$. Celkově posloupnost $\{\hat{R}^*_t\}$, kde

$$\hat{R}^*_t = ref(P_X(t)) + R^*(P_Y(t)) \tag{3.18}$$

je $\mathcal{F}_t$-submartingal takový, že

$$\hat{R}^*_t \to \hat{R}^*_\infty \quad \text{s.j.} \tag{3.19}$$

a v L_1, pokud platí $R^*_\infty < \infty$. Tím je dokázáno tvrzení (iii).

(iv) Nerovnost (3.14) dostaneme, když na už dokázanou nerovnost (3.11) hodíme střední hodnotu. Obdobně když na (3.12) hodíme střední hodnotu, dostaneme

$$\begin{aligned} R_t^* &= \mathbb{E}[\log{(p_t^*, X)}] \\ &= \mathbb{E}\left[\sup_{p_t \in \mathcal{P}_t} \mathbb{E}[\log{(p_t, X)} | \mathcal{F}_t]\right] \\ &= \sup_{p_t \in \mathcal{P}_t} \mathbb{E}[\log{(p_t, X)}] \,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Rovnost (3.20) plyne ze záměny střední hodnoty a suprema, což můžeme udělat, protože víme, že supremum se nabývá. Dále z (3.18) a (3.18) plyne druha část tvrzení (iv), neboť

$$R_t^* = \mathbb{E}[\log{(\pi, X)}] + \mathbb{E}\left[\hat{R}_t^*\right] \nearrow \mathbb{E}[\log{(\pi, X)}] + \mathbb{E}\left[\hat{R}_\infty^*\right] = R_\infty^*$$

pro $t \to \infty$. $\square$

Kapitola 4

Asymptotická optimalita log-optimálního portfolia

V této kapitole se zaměřím na investiční trh, který je popsán posloupností i.i.d. náhodných vektorů výnosů z investic $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nechť tyto vektory mají rozdělení P_X. Celkový kapitál investora na konci n-tého období je

$$C_n = \prod_{t=1}^{n} (p_t, X_t) = C_{n-1} (p_n, X_n) ,$$

kde p_t je portfolio vybraný na začátku t-tého období. Tento výběr je proveden na základě informací z předchozích období obsažených v σ-algebře $\sigma(X_1, \ldots, X_{t-1}) \subseteq \mathcal{F}_{t-1}$. To znamená, že p_t musí být $\mathcal{F}_{t-1}$-měřitelné a dál se zaměříme jenom na portfolia splňující tuto vlastnost. Výnos z portfolia vybraného v posledním období (p_n, X_n) představuje faktor růstu celkového kapitálu. Cílem investora je vybrat takové portfolio, kterým by tento faktor, a tím i svůj kapitál maximalizoval.

Nechť $P_X(t)$ je regulární podmíněné rozdělení X_t za podmínky $\mathcal{F}_{t-1}$ a nechť $p^*(\cdot)$ je měřitelná selekce log-optimálního portfolia. Pak podle věty 8 je $p_t^* = p^*(P_X(t))$ $\mathcal{F}_{t-1}$-měřitelné log-optimální portfolio, se kterým je dosaženo maximálního podmíněného očekávaného logaritmického výnosu

$$\hat{R}_t^* = R^*(P_X(t)) = \mathbb{E}[\log{(p_t^*, X_t)}|\mathcal{F}_{t-1}] = \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}[\log{(p, X_t)}|\mathcal{F}_{t-1}] \, .$$

Pak očekávané hodnoty logaritmického výnosu $\log{(p_t^*, X_t)}$ za období $(t-1, t]$ se rovnají maximálnímu očekávanému logaritmickému výnosu R_t^* za totéž období:

$$R_t^* = \mathbb{E}\Big[\hat{R}_t^*\Big] = \mathbb{E}[\log{(p_t^*, X_t)}] = \sup_{p \in \mathcal{P}_{t-1}} \mathbb{E}[\log{(p, X_t)}] \, ,$$

kde $\mathcal{P}_{t-1}$ je množina všech $\mathcal{F}_{t-1}$-měřitelných náhodných vektorů s hodnotami v $\mathcal{P}$.

Pro potřeby následujících dvou vět by se hodilo zavést pojem $\mathcal{F}_t$-strategie: byla by to posloupnost $\{p_t\}$, kde $p_t \in \mathcal{P}_{t-1}$ je $\mathcal{F}_{t-1}$-měřitelné portfolio zvolené pro časový interval $(t-1, t]$. Pak by se hodilo říci, že $\mathcal{F}_t$-strategie je log-optimální, pokud $\mathbb{E}[\log(p_t^*, X_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = R^*(P_X(t))$ navíc platí pro každé t. Dokážeme, že žádná strategie nedává větší očekávaný logaritmický užitek v jakémkoli časovém horizontu a že žádná jiná strategie nemá větší exponenciální růst v nekonečném časovém horizontu.

Věta 9. *Nechť C_n resp. C_n^* jsou celkové kapitály na konci n-tého období dosažené nějakou strategií $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$ resp. log-optimální strategií $\{p_t^*\}_{t=1}^{\infty}$ na výše definovaném investičním trhu. Potom*

$$\mathbb{E}[\log C_n^*] \geq \mathbb{E}[\log C_n]\,. \tag{4.1}$$

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{p_t \in \mathcal{P}_{t-1} \\ 1 \leq t \leq n}} \mathbb{E}[\log C_n] &= \sup_{\substack{p_t \in \mathcal{P}_{t-1} \\ 1 \leq t \leq n}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \log(p_t, X_t)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n} \sup_{p_t \in \mathcal{P}_{t-1}} \mathbb{E}[\log(p_t, X_t)] \\
&= \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}[\log(p_t^*, X_t)]\,.
\end{aligned}$$

□

Následující věta se zabývá asymptotickým porovnáním bohatství pro různé strategie a v ní bude ukázána jakási obdoba Kuhn-Tuckerovy podmínky. Dalo by se to interpretovat jako Kuhn-Tuckerova podmínka v nekonečném časovém horizontu.

Věta 10 (**Asymptotická optimalita log-optimálního portfolia**). *Nechť náhodné vektory výnosů z investic $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ jsou definovány na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nechť $\{\mathcal{F}_t\}_{t=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost sub-σ-algeber z $\mathcal{F}$ takových, že pro každé $1 \leq t < \infty$ platí $\sigma(X_1, \ldots, X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$. Označme*

$$C_n^* = \prod_{t=1}^{n} (p_t^*, X_t) \qquad \textit{resp.} \qquad C_n = \prod_{t=1}^{n} (p_t, X_t) \tag{4.2}$$

celkový kapitál po n investičních období odpovídající log-optimální strategii $\{p_t^*\}_{t=1}^{\infty}$, resp. nějaké jiné strategii $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$. Potom $\{C_n/C_n^*, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nezáporný supermartingal, který skoro jistě konverguje k nezáporné náhodné *veličině Y se střední hodnotou $\mathbb{E}[Y] \leq 1$. Dále platí $\mathbb{E}[C_n/C_n^*] \leq 1$ pro každe $n \in \mathbb{N}$ a*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_n^*} \leq 0 \qquad \textit{s.j.} \tag{4.3}$$

Důkaz. $C_0/C_0^* = 1$, neboť všechny strategie výběru portfolia začínají se stejnou výší zakladního kapitálu. Poměr

$$\frac{C_n}{C_n^*} = \prod_{t=1}^{n} \frac{(p_t, X_t)}{(p_t^*, X_t)}$$

je nezáporný a $\mathcal{F}_n$-měřitelný. Podmínka podmíněné log-optimality portfolia p_{n+1}^* za podmínky $\mathcal{F}_n$ je ekvivalentní s Kuhn-Tuckerovou podmínkou

$$\mathbb{E}\left[\frac{(p_{n+1}, X_{n+1})}{\left(p_{n+1}^*, X_{n+1}\right)}\middle|\mathcal{F}_n\right] \leq 1.$$

Odsud plyne

$$\mathbb{E}\left[\frac{C_{n+1}}{C_{n+1}^*}\middle|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{C_n\,(p_{n+1}, X_{n+1})}{C_n^*\,\left(p_{n+1}^*, X_{n+1}\right)}\middle|\mathcal{F}_n\right] = \frac{C_n}{C_n^*}\,\mathbb{E}\left[\frac{(p_{n+1}, X_{n+1})}{\left(p_{n+1}^*, X_{n+1}\right)}\middle|\mathcal{F}_n\right] \leq \frac{C_n}{C_n^*},$$

tj. $\{C_n/C_n^*, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nezáporný supermartingal. Každý nezáporný supermartingal konverguje skoro jistě k nezáporné náhodné veličině, kterou tady označíme jako Y. Dále střední hodnoty monotonně klesají. Podle Fatuova lemmatu platí

$$1 = \mathbb{E}\left[\frac{C_0}{C_0^*}\right] \geq \mathbb{E}\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] \geq \mathbb{E}[Y]\,.$$

Víme

$$\mathbb{E}\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] \leq 1$$

a odsud pro každé $u \in (0,1)$ dostáváme

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{C_n}{C_n^*}\,u^n\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[\frac{C_n}{C_n^*}\,u^n\right] \leq \frac{1}{1-u} < \infty.$$

Poloměr konvergence R řady $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{C_n}{C_n^*}\,u^n$ je tedy skoro jistě alespoň 1. Z Hadamardova vzorce pro výpočet poloměru konvergence

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

dostaneme, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_n^*}} \leq 1 \quad \text{s.j.}$$

Přechodem k logaritmu pak dostaneme

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_n^*} \leq 0 \quad \text{s.j.}$$

$\square$

Kapitola 5

Investování a informační teorie

Základní veličina informační teorie, relativní entropie, je definována jako funkce rozdělení náhodných veličin. Relativní entropie a její speciální případy charakterizují chování náhodných veličin. V našem případě se konkrétně jedná o charakterizaci vektorů výnosu portfolia obsažené ve větě o asymptotické rovnoměrnosti, která popisuje míru růstu celkového kapitálu.

5.1 Relativní entropie

Nechť P, Q jsou dvě pravděpodobnostní míry na měřitelném prostory $(\Omega, \mathcal{A})$. Pak relativní entropií míry Q vzhledem k P budeme rozumět číslo

$$D(Q\|P) = \int \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \log\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) \mathrm{d}P = \int \log\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) \mathrm{d}Q$$

pokud $Q \ll P$. V opačném případě budeme relativní entropii brát $D = \infty$. Protože je funkce $f : x \in [0, \infty) \mapsto x \log x$ konvexní, kde „$0 \log 0 = 0$”, dostaneme z Jensenovy nerovnosti, že

$$D(Q\|P) \geq f\left(\int \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \, \mathrm{d}P \right) = f(1) = 0.$$

Protože je funkce f striktně konvexní, dostaneme, že rovnost nastává pouze tehdy, když $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$ je skoro jistě rovna své střední hodnotě, tedy jedné, což znamená, že $Q = P$. Zřejmě obecně neplatí, že by $D(Q\|P)$ bylo rovno $D(P\|Q)$. Nelze tedy říkat, že by D byla metrikou, přesto se o ní někdy mluví jako o Kullbackove-Leiblerove vzdálenosti.

Uvažujme nyní náhodnou veličinu $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$. Nás bude zajímat, jak bude vypadat entropie rozdělení náhodné veličiny X při míře Q vzhledem k rozdělení při míře P. Pokud $Q \not\ll P$, pak zřejmě platí

$D(Q_X\|P_X) \leq \infty = D(Q\|P)$. Otázkou bude, zda tato nerovnost mezi entropiemi platí obecně. To znamená, zda snížením informace pouze na znalost veličiny X znamená snížení relativní entropie. Nejprve však ukážeme, že omezení se na veličinu X je ekvivalentní s restrikcí na σ-algebru $\mathcal{B} = \sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$.

Lemma 5.2. *Nechť P, Q jsou dvě pravděpodobnostní míry na měřitelném prostory $(\Omega, \mathcal{A})$ a $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ je měřitelné zobrazení. Označme $\mathcal{B} = \sigma(X)$. Pak*

$$Q_{|\mathcal{B}} \ll P_{|\mathcal{B}} \quad \Leftrightarrow \quad Q_X \ll P_X. \tag{5.1}$$

Přičemž pro $\mathcal{B}$-měřitelnou funkci h platí

$$\frac{\mathrm{d}Q_{|\mathcal{B}}}{\mathrm{d}P_{|\mathcal{B}}} = h(X) \quad P\text{-s.j.} \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}P_X} \quad P_X\text{-s.j.} \tag{5.2}$$

Důkaz. Buď h funkce $\mathcal{B}$-měřitelná. Pak pro $F = [X \in C]$ a $C \in \mathcal{E}$ platí

$$\int_F h(X)\,\mathrm{d}P = \int_C h\,\mathrm{d}P_X. \tag{5.3}$$

Pokud v (5.2) platí výrok na levé straně, levá strana (5.3) je rovna $Q(F) = Q_X(C)$. Z jednoznačnosti Radon-Nikodýmovy derivace pak dostaneme, že platí i pravá strana v (5.2). Pokud naopak platí pravá strana v (5.2), je pravá strana (5.3) rovna $Q_X(C) = Q(F)$. Obdobně dostaneme, že pak platí i levá strana v (5.2). $\square$

Pro nás to znamená, že

$$\begin{aligned} D(Q_X\|P_X) &= \int \log\left(\frac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}P_X}\right)\mathrm{d}Q_X \\ &= \int \log\left(\frac{\mathrm{d}Q_{|\mathcal{B}}}{\mathrm{d}P_{|\mathcal{B}}}\right)\mathrm{d}Q \\ &= D(Q_{|\mathcal{B}}\|P_{|\mathcal{B}}) =: D_{\mathcal{B}}(Q\|P). \end{aligned}$$

Z Jensenovy nerovnosti pro podmíněnou střední hodnotu pak dostaneme odpověď na výše uvedenou otázku. Pokud $D(Q\|P) < \infty$, platí

$$\mathbb{E}_P\left[\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\middle|\mathcal{B}\right] = \frac{\mathrm{d}Q_{|\mathcal{B}}}{\mathrm{d}P_{|\mathcal{B}}},$$

a Jensenova nerovnost pro funkci f a pro podmíněnou střední hodnotu pak dává, že

$$\begin{aligned} D(Q_X\|P_X) = D_{\mathcal{B}}(Q\|P) &= \mathbb{E}_P\left[f\left(\mathbb{E}_P\left[\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\middle|\mathcal{B}\right]\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P\left[f\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)\middle|\mathcal{B}\right]\right] = \int f\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)\mathrm{d}P \\ &= D(Q\|P). \end{aligned}$$

Z toho, že funkce f je striktně konvexní dostaneme opět, že rovnost v nerovnosti nastává právě tehdy, když $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \frac{\mathrm{d}Q_{|\mathcal{B}}}{\mathrm{d}P_{|\mathcal{B}}}$ skoro jistě.

Okamžitým důsledkem je, že pokud k veličině X přidáme další veličinu $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{F})$, pak platí

$$D_X(Q\|P) \leq D_{X,Y}(Q\|P) \leq D(Q\|P),$$

kde $D_X(Q\|P) := D_{\mathcal{B}}(Q\|P)$ a podobně $D_{X,Y}(Q\|P) := D_{\sigma(X,Y)}(Q\|P)$, přičemž v první nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když $P_{Y|X} = Q_{Y|X}$, kde $P_{Y|X}, Q_{Y|X}$ zde označují neregulární verzi podmíněného rozdělení Y za podmínky X. Jinak to lze také charakterizovat tím, že náhodná veličina X je postačující statistikou pro systém měr $\{P_{|\sigma(X,Y)}, Q_{|\sigma(X,Y)}\}$.

Věta 11. *Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}, Q) \to (\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}), Q_X)$ představuje náhodný vektor výnosů. Uvažujme pravděpodobnostní míru P na $(\Omega, \mathcal{A})$ a příslušné log-optimální portfolio p^* ovšem při míře P. Pak platí*

$$R(p, Q_X) \leq R(p^*, Q_X) + D(Q_X\|P_X).$$

Důkaz. Zřejmě

$$R(p, Q_X) - R(p^*, Q_X) = \mathbb{E}_Q\left[\log\left(\frac{(p, X)}{(p^*, X)}\right)\right] = \int \log\left(\frac{(p, x)}{(p^*, x)}\right) \mathrm{d}Q_X(x).$$

Z vět o Hahnově a Lebesgueově rozkladu dostaneme, že existuje borelovská množina $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^m)$ taková, že $P_X(\cdot \cap S) \ll Q_X$ a $Q_X(S) = 1$. Pokud $D(Q_X\|P_X) < \infty$, platí rovnost

$$\begin{aligned}\int \log\left(\frac{(p, x)}{(p^*, x)}\right) \mathrm{d}Q_X(x) &= \int_S \log\left(\frac{(p, x)}{(p^*, x)} \frac{\mathrm{d}P_X(\cdot \cap S)}{\mathrm{d}Q_X}(x)\right) \mathrm{d}Q_X(x) \\ &\quad + \int \log\left(\frac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}P_X}\right) \mathrm{d}Q_X.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Protože

$$\int \log\left(\frac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}P_X}\right) \mathrm{d}Q_X = D(Q_X\|P_X),$$

stačí už jen odhadnout první člen na pravé straně rovnosti (5.4). Z Jensenovy nerovnosti pro otevřené podintervaly $\mathbb{R}$ dostaneme, že zmíněný člen lze shora odhadnout výrazem

$$\log\left(\int_S \frac{(p, x)}{(p^*, x)} \frac{\mathrm{d}P_X(\cdot \cap S)}{\mathrm{d}Q_X}(x)\, \mathrm{d}Q_X\right) \leq \log\left(\int \frac{(p, x)}{(p^*, x)} \mathrm{d}P_X\right) \leq \log(1) = 0,$$

neboť platí Kuhnova-Tuckerova podmínka optimality

$$\int \frac{(p,x)}{(p^*,x)} \, \mathrm{d}P_X(x) = \mathbb{E}_P\left[\frac{(p,X)}{(p^*,X)}\right] \leq 1.$$

□

Definice. Nechť X a Y jsou náhodné veličiny definované na témž pravděpodobnostním prostoru. Pak *vzájemná informace* veličin X a Y je definována předpisem

$$I(X;Y) = D(P_{X,Y} \| P_X \otimes P_Y). \tag{5.5}$$

Věta 12. *Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}), P_X)$ představuje vektor výnosů. Nechť $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ je náhodná veličina, kterou investor pozoruje a na jejíž základě může volit své portfolio. Jeho volba tedy bude náhodná veličina $p(Y)$, kde $p : (E, \mathcal{E}) \to (\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$ je měřitelné zobrazení. Je-li $p^* \in \mathcal{P}$ log-optimální portfolio bez dodatečné informace Y, pak platí*

$$\mathbb{E}_P\big[R(p(Y), P_{X|Y})\big] \leq R(p^*, P) + I(X;Y),$$

kde $P_{X|Y}$ označuje regulární verzi podmíněného rozdělení náhodné veličiny X za podmínky Y.

Důkaz. Podle předchozí věty pro každé $y \in E$ platí

$$R(p(y), P_{X|Y=y}) \leq R(p^*, P_{X|Y=y}) + D(P_{X|Y=y} \| P_X).$$

Integrací přes $y \in E$ vzhledem k rozdělení náhodné veličiny Y dostaneme, že

$$\mathbb{E}\big[R(p(Y), P_{X|Y})\big] \leq \mathbb{E}\big[R(p^*, P_{X|Y})\big] + \mathbb{E}\big[D(P_{X|Y} \| P_X)\big]\,,$$

Zřejmě

$$\mathbb{E}\big[R(p^*, P_{X|Y})\big] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\log(p^*, X)|Y]] = \mathbb{E}[\log(p^*, X)] = R(p^*, P_X).$$

Pokud $P_{X,Y} \ll P_X \otimes P_Y$, pak pro $P_X \otimes P_Y$-skoro všechna $(x,y) \in \mathcal{P} \times E$ platí

$$\frac{\mathrm{d}P_{X,Y}}{\mathrm{d}P_X \otimes P_Y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}P_{X|Y=y}}{\mathrm{d}P_X}(x).$$

Dostáváme pak, že

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[D(P_{X|Y} \| P_X)\big] &= \int\!\!\int \log\left(\frac{\mathrm{d}P_{X|Y=y}}{\mathrm{d}P_X}(x)\right) \mathrm{d}P_X(x)\,\mathrm{d}P_Y(y) && (5.6)\\
&= \int\!\!\int \log\left(\frac{\mathrm{d}P_{X,Y}}{\mathrm{d}P_X \otimes P_Y}(x,y)\right) \mathrm{d}P_X(x)\,\mathrm{d}P_Y(y) && (5.7)\\
&= D(P_{X,Y} \| P_X \otimes P_Y) = I(X;Y). && (5.8)
\end{aligned}$$

□

Pokud ve vzorci (5.5) za Y dosadíme X, dostaneme speciální případ vzájemné informace. Tuto veličinu nazýváme *entropie* náhodné veličiny X a značíme $H(X)$. Entropie představuje míru nejistoty náhodné veličiny; je to průměrné množství informací potřebné k popisu této veličiny. Teď se omezíme jenom na případ diskrétních náhodných veličin.

Nechť X a Y jsou diskrétní náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Označme $f_X(x) = P(X = x)$ a $f_Y(y) = P(Y = y)$.

Definice. *Entropie diskrétní náhodné veličiny* X je definována předpisem

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{x \in \Omega} f_X(x) \log f_X(x) \\ &= -\mathbb{E}[\log f_X(X)] \,. \end{aligned}$$

Entropie závisí pouze na rozdělení náhodné veličiny. Proto kromě zavedeného značení připouštíme místo náhodné veličiny psát její rozdělení, tedy

$$H(X) = H\left[P_X\right].$$

Definice. (i) *Sdružená entropie* veličin X a Y je definována předpisem

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} f_{X,Y}(x,y) \log f_{X,Y}(x,y) \\ &= -\mathbb{E}[\log f_{X,Y}(X,Y)] \,, \end{aligned}$$

kde $f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$.

(ii) *Podmíněná entropie* veličiny Y za podmínky X je definována předpisem

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} f_X(x) H(Y|X = x) \\ &= -\sum_{x \in \mathcal{X}} f_X(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} f_{Y|X}(y|x) \log f_{Y|X}(y|x) \\ &= -\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} f_{X,Y}(x,y) \log f_{Y|X}(y|x) \\ &= -\mathbb{E}\big[\log f_{Y|X}(Y|X)\big] \,, \end{aligned}$$

kde je s $f_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x)$.

Jedna z vlastností entropie je tzv. řetízkové pravidlo:

(i) Pro dvě náhodné veličiny X a Y platí

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ &= H(Y) + H(X|Y). \end{aligned}$$

(ii) Obecně pro $X_1, \dots, X_n$ platí

$$H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_n|X_{n-1}, \dots, X_1).$$

5.3 Věta o asymptotické rovnoměrnosti

Uvažujme dále posloupnost diskrétních náhodných veličin $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ s hodnotami v množině $\mathcal{X}$.

Definice. Náhodná posloupnost $\{X_i\}$ se nazývá *stacionární*, pokud je sdružené rozdělení každé její podposloupnosti invariantní na posunutí v čase.

Pro proces tvořený diskrétními náhodnými veličinami o lze charakterizovat následujícím způsobem: Pro každé $n, l \in \mathbb{N}$ a pro každé $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ platí

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{1+l} = x_{1+l}, \dots, X_{n+l} = x_{n+l}).$$

Definice. *Entropie* H stochastického procesu $\{X_i\}$ je definována předpisem

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \dots, X_n),$$

pokud limita existuje.

Nechť $\{X_i\}$ je stacionární stochastický proces. Pak pro jeho entropii platí

$$\begin{aligned} H &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \dots, X_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} H(X_n|X_{n-1}, \dots, X_1), \end{aligned}$$

a obě limity existují. Důkaz tohoto tvrzení je uveden v Cover, Thomas (2005).

Teď se zaměříme na asymptotické chování posloupnosti náhodných veličin, od nezávislých stejně rozdělených až k stacionárním a asymptoticky stacionárním. Analogií zákona velkých čísel z teorie pravděpodobnosti je v informační teorie věta o asymptotické rovnoměrnosti - AEP (z anglického *Asymptotic Equipartition Property*).

Věta 13 (**AEP pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny**). *Nechť* $X_1, X_2, \ldots$ *jsou i.i.d. diskrétní náhodné veličiny s entropii* $H(X)$. *Označme* $f(X_1, \ldots, X_n)$ *sdružené rozdělení veličin* $X_1, \ldots, X_n$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Potom*

$$-\frac{1}{n} \log f(X_1, \ldots, X_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(X) \quad \textit{s.j.} \tag{5.9}$$

Důkaz. Z nezávislosti X_i plyne nezávislost $\log X_i$ a podle silného zákona velkých čísel platí

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} \log f(X_1, \ldots, X_n) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\log f(X_i)] \quad \text{s.j.} \\ &= H(X). \end{aligned}$$

□

Vzorec (5.9) platí i v případě stacionárního ergodického procesu, což ukáže následující věta.

Věta 14 (**Breimanova věta**). *Buď* H *entropie stacionárního ergodického procesu* $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ *nabývajícího pouze spočetně mnoha hodnot. Potom*

$$-\frac{1}{n} \log f(X_1, \ldots, X_n) = -\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \log f(X_t | X_{t-1}, \ldots, X_1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} H \quad \textit{s.j.} \tag{5.10}$$

Tato věta je s důkazem uvedena v Algoet, Cover (1988a), Theorem 1. Důkaz je založen na tom, že $-\frac{1}{n} \log f(X_1, \ldots, X_n)$ leží mezi H^{∞} a H^k, pro každé $k \geq 0$. Vzhledem k tomu, že $H^k \searrow H^{\infty} = H$, pro $k \to \infty$ se potom dostává tvrzení věty.

Obdobnou techniku budeme používat v důkazu následující větě, která se zabývá investičním trhem popsaným stacionární ergodickou posloupností vektorů výnosů $\{X_t\}$. Jak už bylo uvedeno ve větě 8, pro $t \in \mathbb{N} \cup \infty$ veličina R_t^* představuje maximální očekávaný logaritmický výnos vzhledem k $\mathcal{F}_t$, tedy

$$R_t^* = R^*(P_X(t)) = \mathbb{E}[\log{(p_t^*, X)}] = \sup_{p \in \mathcal{P}_t} \mathbb{E}[\log{(p, X)}] \quad \text{s.j.}$$

kde $\mathcal{P}_t = \{f : (\Omega, \mathcal{F}_t) \to (\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))\}$ je množina všech $\mathcal{F}_t$-měřitelných zobrazení s hodnotami v $\mathcal{P}$.

Věta 15 (**AEP pro stacionární ergodický trh**). *Nechť* $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ *je stacionární ergodický stochastický proces, kde* X_t *představuje náhodný vektor výnosů v* t*-tém období. Nechť*

$$C_n^* = \prod_{t=1}^{n} (p_t^*, X_t).$$

je celkový kapitál na konci n*-tého období dosažený log-optimální strategií investování* $\{p_t^*\}_{t=1}^{\infty}$. *Pak platí*

$$\frac{1}{n} \log C_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_\infty^* \quad \textit{s.j.}, \tag{5.11}$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= \sigma(X_t, \ldots, X_1), \\ \mathcal{F}_{t,k} &= \begin{cases} \sigma(X_t, \ldots, X_1) & \text{pro } 1 \le t \le k < \infty \\ \sigma(X_t, \ldots, X_{t-k+1}) & \text{pro } 1 \le k < t < \infty \end{cases} \\ \mathcal{F}_{t,\infty} &= \sigma(X_t, \ldots, X_1, \ldots). \end{aligned}$$

Obdobně jako $\mathcal{P}_t$ definujeme množinu $\mathcal{P}_{t,k} = \{f : (\Omega, \mathcal{F}_{t,k}) \to (\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))\}$. Buďte $p_{t,k}^* \in \mathcal{P}_{t-1,k}$ resp. $p_{t,\infty}^* \in \mathcal{P}_{t-1,\infty}$ log-optimální portfolia. Buďte $C_{n,k}^*$ a $C_{n,\infty}^*$ celkové kapitály na konci n-tého období, tedy

$$C_{n,k}^* = \prod_{t=1}^{n} (p_{t,k}^*, X_t) \quad \text{a} \quad C_{n,\infty}^* = \prod_{t=1}^{n} (p_{t,\infty}^*, X_t).$$

Z asymptotické optimality log-optimálního portfolia plynou následující dvě nerovnosti:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{C_{n,k}^*}{C_n^*} \le 0 \quad \text{s.j.}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{C_n^*}{C_{n,\infty}^*} \le 0 \quad \text{s.j.} \tag{5.12}$$

Všimněte si, že pro $t \le k+1$ platí $\mathcal{F}_{t-1,k} = \mathcal{F}_{t-1}$, a tím i $\mathcal{P}_{t-1,k} = \mathcal{P}_{t-1}$. Proto $p_{t,k}^* = p_t^*$. Dále platí

$$C_{n,k}^* = C_{k+1}^* \prod_{t=k+2}^{n} \log{(p_{t,k}^*, X_t)},$$

tj.

$$\frac{1}{n} \log C_{n,k}^* = \frac{1}{n} \log C_{k+1}^* + \frac{1}{n} \sum_{t=k+2}^{n} \log{(p_{t,k}^*, X_t)} \tag{5.13}$$

Z ergodické věty dostáváme, že platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{t=k+2}^{n}\log\left(p_{t,k}^{*},X_t\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} &\mathbb{E}\big[\log\left(p_{k+1,k}^{*},X_{k+1}\right)\big]\\ =&\mathbb{E}\big[\log\left(p_{k+1}^{*},X_{k+1}\right)\big]\\ =&R_{k+1}^{*}\quad \text{s.j.}\end{aligned}$$

Protože

$$\frac{1}{n}\log C_{k+1}^{*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dohromady dostáváme

$$\frac{1}{n}\log C_{n,k}^{*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_{k+1}^{*}\quad \text{s.j.} \tag{5.14}$$

Na druhé straně, v případě nekonečné minulosti máme

$$\frac{1}{n}\log C_{n,\infty}^{*} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\log\left(p_{t,\infty}^{*},X_t\right)$$

a z ergodicky věty dostáváme

$$\frac{1}{n}\log C_{n,\infty}^{*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\big[\log\left(p_{1,\infty}^{*},X_1\right)\big] = R_{\infty}^{*}\quad \text{s.j.} \tag{5.15}$$

Dohromady máme nerovnost

$$\begin{aligned}R_{k+1}^{*} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log C_{n,k}^{*} &\le \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log C_{n}^{*}\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log C_{n}^{*}\\ &\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log C_{n,\infty}^{*} = R_{\infty}^{*},\end{aligned}$$

ze které vyplývá tvrzení věty, neboť z věty 8 víme, že pro $k\to\infty$ platí $R_{k+1}^{*}\to R_{\infty}^{*}$. □

Větu o asymptotické rovnoměrnosti lze rozšířit na trhy, které jsou stacionární, ale ne nutně ergodické. Ty neergodické stacionární řetězce si lze představit jako řetězce s rozdělením, které je směsí ergodických rozdělení, tj. směsí těch rozdělení, při kterých je řetězec ergodický. Sigma-algebra $\mathcal{K}$ podmnožin invariantních na posunutí v čase není triviální. Platí

$$\frac{1}{n}\log C_{n}^{*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\big[\log\left(p_{1,\infty}^{*},X_1\right)|\mathcal{K}\big]\quad \text{s.j.,} \tag{5.16}$$

kde $p^*_{1,\infty}$ představuje log-optimální portfolio počátečního období vzhledem k nekonečné minulosti. Stejné tvrzení platí i pro trhy, které jsou stacionární jenom v asymptotickém smyslu. Důkazy těchto tvrzení jsou podobny výše uvedenému důkazu. Jedna se o tzv. sendvičové důkazy, omezit celkový kapitál na jedné straně kapitálem za podmínky k-minulosti a s druhé kapitálem vzhledem k nekonečné minulosti. Potom pomoci ergodické věty ukázat, že obě této veličiny konvergují k veličině na pravé straně, která obecně představuje entropii tohoto systému. Podrobný důkaz se najde v Algoet, Cover (1988a).

Kapitola 6

Krátkodobá optimalita log-optimálního portfolia

Dosud bylo ukázáno jak by se investor měl chovat, pokud chce maximalizovat svůj celkový kapitál v dlouhodobém časovém horizontu. Věta AEP ukazuje, že nejlepším výběrem je log-optimální strategie. Pro konečný počet investičních období n jedině co máme je důsledek Kuchovy-Tuckerovy podmínky

$$\mathbb{E}\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] \leq 1,$$

který spolu s Markovovou nerovnosti pro $a > 0$ dává

$$P(\frac{C_n}{C_n^*} \geq a) \leq \frac{1}{a}.$$

Navíc, existují příklady, ve kterých nějaká jiná strategie nevýznamně převyšuje log-optimální v každém období. Jeden z nich je trh s dva portfolia X_1, X_2 a s pouze dvěma možnými vektory výnosů

$$(X_1, X_2) = \begin{cases} (1, \frac{1}{1-\varepsilon}) & \text{s pravděpodobnosti} \quad 1-\varepsilon, \\ (1, 0) & \text{s pravděpodobnosti} \quad \varepsilon. \end{cases}$$

Podle log-optimální strategie by investor měl veškerý kapitál investovat do X_1. Pokud ale investuje pouze do X_2 dostává o $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ více s pravděpodobnosti $1-\varepsilon$.

Věta 16. *Nechť C_n^* resp. C_n jsou celkové kapitály na konci n-tého období dosažené log-optimální resp. jinou strategií na trhu $\boldsymbol{X} = \{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Buď T nezáporná náhodná veličina nezávislá s $\boldsymbol{X}$ se střední hodnotou $\mathbb{E}[T] = 1$. Buď T^* náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na $[0, 2]$ nezávislá s $\boldsymbol{X}$ a T. Potom*

$$P(T\,C_n \geq T^*\,C_n^*) \leq \frac{1}{2}. \tag{6.1}$$

Důkaz. Označme

$$Z = T\,\frac{C_n}{C_n^*}.$$

Z nezávislosti $\mathbf{X}$ a T a z Kuhnovy-Tuckerovy podmínky dostáváme

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] \leq 1$$

Buď F distribuční funkce Z a $f_{T^*} = 1/2$ hustota T^*. Pak

$$\begin{aligned}
P(T\,C_n \geq T^*\,C_n^*) &= P(Z \geq T^*) \\
&= \int_0^2 P(Z \geq t)\,f_{T^*}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 1 - \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^\infty 1 - \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z] \\
&\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Z podstaty věci plyne, že je místo rozdělení $R\,[0,2]$ veličiny T^* stejně tak možné uvažovat rozdělení $R\,[0,1]$, pokud $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{2}$.

Představme si, že král má čtyři syny A, B, C, D, přičemž A, C jsou vlastní a B, D nevlastní. Do své závětí dá, že po jeho smrtí bude královská pokladnice rozdělena na dva díly, které připadnou dohromady synům A, B a C, D. Ti pak mají za úkol svěřené bohatství rozmnožit a mezi sebou se spravedlivě rozdělit. Králem se pak stane ten ze synů A, C, který svůj díl nejvíce zhodnotí. (Můžeme si např. představit, že synové A, B a C, D vědí, že jeden ze dvojice je pravý syn a druhý ne, ale nevědí který.) Aby je rozdělování majetku nestálo další prostředky, mají se dohodnout losem (spravedlivým). Losem bude náhodná veličina T s hodnotami v $[0, 1]$ nezávislá s historii; první ve dvojici dostane T-část a druhý $(1 - T)$-část.

Nás bude zajímat výherní strategie, pokud cílem synů bude maximalizovat pravděpodobnost, že se stanou králem (při jakékoli strategie konkurentu). Zřejmě cílem bude dosáhnout strategie, která zaručí, že králem bude s pravděpodobnosti alespoň $\frac{1}{2}$, protože s vyšší pravděpodobností se to nemůže podařit při každé strategii konkurenta. Cílem je tedy najít výherní strategie, tj. zaprvé strategii investování a zadruhé strategii dělby.

Věta 16 říká, že strategie maximalizovat očekávaný logaritmický užitek v investování resp. rovnoměrná dělba (ve smyslu získání $R\,[0,1]$-části) je v této situaci optimální strategií. Je třeba zdůraznit, že v této situaci rovnoměrná dělba není $1:1$.

Příloha A

Jensenova nerovnost

Věta 17. *Nechť g je konkávní funkce na (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Nechť X je náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s hodnotami v (a, b) a nechť $\mathcal{G}$ je σ-algebra na Ω. Předpokládejme, že X a $g(X)$ jsou integrovatelné náhodné veličiny. Pak $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in (a, b)$ skoro jistě a platí*

$$\mathbb{E}\big[g(X)|\mathcal{G}\big] \leq g\big(\mathbb{E}\big[X|\mathcal{G}\big]\big). \tag{A.1}$$

Důkaz. Pro $(a, b) = \mathbb{R}$ dostáváme Jensenovu nerovnost v obvyklé podobě (viz např. Lachout (2004)). Jinak uvažujeme posloupnost konvexních funkcí $g_n \geq g$ na $\mathbb{R}$ takových, že $g_n = g$ na (a_n, b_n), kde $a_n \searrow a$ a $b_n \nearrow b$ pro $n \to \infty$. Zřejmě, že $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in (a, b)$ skoro jistě. Z Léviho věty o monotonní konvergenci dostáváme

$$\mathbb{E}[g(X)|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g_n(X)|\mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} g_n(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) = g(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]).$$

□

Budeme potřebovat důsledek - nepodmíněnou verzi. V tom případě σ-algebra $\mathcal{G}$ je triviální. Pak máme

$$\mathbb{E}\big[g(X)\big] \leq g\big(\mathbb{E}[X]\big) \tag{A.2}$$

a nás bude zajímat, kdy nastává rovnost. Proto budeme uvažovat funkci

$$h(x) = g(x) - g\big(\mathbb{E}[X]\big) - (x - \mathbb{E}[X])g'_+\big(\mathbb{E}[X]\big). \tag{A.3}$$

Pro tuto funkci platí $h(x) \geq 0$ a z (A.2) máme, že $\mathbb{E}[h(X)] \geq 0$. Pokud je funkce g striktně konvexní, je striktně konvexní i funkce h. Pokud navíc v (A.2) platí rovnost, pak také platí rovnost $\mathbb{E}[h(X)] = 0$. Protože $h(x) > 0$ pro $x \neq \mathbb{E}[X]$, máme pak, že $X = \mathbb{E}[X]$ s.j.

Příloha B

Věta o měřitelné selekci[1]

Věta 18. *Nechť X je metrický prostor a Y kompaktní metrický prostor. Nechť D je uzavřená podmnožina $X \times Y$ a $f : D \to \mathbb{R}^*$ zdola polospojitá funkce. Nechť je $f^* : proj_X(D) \to \mathbb{R}^*$ definována předpisem:*

$$f^*(x) = \min_{y \in D_x} f(x, y),$$

kde $x \in X$ a $D_x = \{y \in Y : (x, y) \in D\}$. Pak $proj_X(D)$ je uzavřená v X, f^* je zdola polospojitá a existuje měřitelná funkce $\varphi : proj_X(D) \to Y$ taková, že $Gr(\varphi) \subset D$ a

$$f(x, \varphi(x)) = f^*(x) \quad \textit{pro každé } x \in proj_X(D).$$

S $proj_X(D)$ je označena projekce množiny D na prostor X a $Gr(\varphi)$ představuje graf funkce φ.

V našem případě X je prostor $\mathcal{M}$, prostor pravděpodobnostních měr na simplexu $\mathcal{Y}$. Navíc, na $\mathcal{M}$ je zavedena slabá topologie. Potom plyne, že $\mathcal{M}$ je kompaktní a metrizovatelný prostor (viz Štěpán (1987), Věta III.3.5.). Dále Y je množina vhodných portfolií $\mathcal{P}$, která je simplex, a tím i kompaktní. Množina D je celý prostor $Y \times X = \mathcal{P} \times \mathcal{M}$. Funkce f je zdola polospojitá funkce $\int \log{(p, y)}\, \mathrm{d}Q(y)$ a funkce f^* je $-\max \int \log{(p, y)}\, \mathrm{d}Q(y) = -R^*(Q)$ přes všechna portfolia $p \in \mathcal{P}$. Věta potom říká, že $-R^*(Q)$ je zdola polospojitá, tj. $R^*(Q)$ je polospojitá shora a že existuje měřitelná selekce log-optimálního portfolia z $\mathcal{P}^*(Q)$.

Ukažme jak se konstruuje měřitelná selekce log-optimálního portfolia: Zafixujme referenční portfolio π takové, že $\pi_i > 0$ pro každé $i \in (1, \dots, m)$. Zavedeme spojité zobrazení $z : \mathbb{R}^m_+ \to \mathcal{Y}$ takové, že

$$z(x) = \frac{x}{(\pi, x)}.$$

[1]Viz Bertsekas, Shreve (1978), Proposition 7.33

Pak z je projekce $\mathbb{R}_+^m$ do $\mathcal{Y}$, tj. $z(y) = y$ pro $y \in \mathcal{Y}$. Nechť Q je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}_+^m$. Zobrazení $Z : Q \to Q\,z^{-1} \in M$ je spojité vzhledem ke slabé konvergenci a je také projekcí $\mathbb{R}_+^m$ na $\mathcal{Y}$. Pokud $p^* : \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ je měřitelné, pak následující rozšíření

$$p^* : Q \to p^*(Q\,z^{-1}) = p^*(Z(Q))$$

je měřitelné zobrazení, neboť je složením dvou měřitelných zobrazení. Kdykoliv v textu mluvíme o měřitelné selekci, tím rozumíme právě zavedené rozšíření p^*.

Vzhledem k výše uvedenému označení, normovaný vektor výnosu Y definujeme následujícím způsobem:

$$Y = \begin{cases} z(X) & \text{pokud } X \in \mathbb{R}_+^m, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příloha C

Ergodická věta[1]

Nechť $(X, \mathcal{F}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor.

Definice. Nechť zobrazení $T : X \to X$ je bijekce. Označme s T^{-1} zobrazení inverzní k T. Nechť T a T^{-1} jsou meřitelná zobrazení a nechť pro každé $A \in \mathcal{F}$ platí $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$. Potom se T nazývá *transformace zachovávající míru* μ.

Definice. Množina $A \in \mathcal{F}$ je T-*invariantní*, pokud platí $T^{-1}A = A$.

Definice. Nechť T je transformace zachovávající míru μ. Říkáme, že systém $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ je ergodický, pokud každá T-invariantní množina $A \in \mathcal{F}$ má míru 0 nebo 1, tj. pokud platí implikace

$$T^{-1}A = A \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ nebo } 1, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Věta 19. *Nechť systém $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ je ergodický. Pak pro každou funkci $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \qquad s.j.$$

[1] Viz Petersen (1989), Theorem 4.4

Literatura

[1] Algoet P. H., Cover T. M. (1988a): *A sandwich proof of the Shannon-McMillan-Breiman theorem*, The Annals of Pobability 16, 899-909

[2] Algoet P. H., Cover T. M. (1988b): *Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum potfolio*, The Annals of Pobability 16, 876-99

[3] Bertsekas D. P., Shreve S. E. (1978): *Stochastic Optimal Control: The Discrete-time Case*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, USA

[4] Breiman L. (1961): *Optimal gambling systems for favorable games*, Jerzy Nezman, ed. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume I. Berkeley: University of California Press, pp. 65–78.

[5] Cover T. M. (1984): *An Algorithm for Maximizing Expected Log Investment Return*, IEEE Trans. Inform. Theory IT-30, 396-373

[6] Cover T. M., Thomas J. A. (2005): *Elements of information theory*, 2nd. edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Yersey, 75

[7] Lachout P. (2004): *Teorie pravděpodobnosti*, Univerzita Karlova v Praze - Nakladatelství Karolinum, Praha, 42

[8] Petersen K. (1989): *Ergodic theory*, Cambridge University Press, New York, USA

[9] Štěpán J. (1987): *Teorie pravděpodobnosti : matematické základy*, Academia, Praha