

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Dominika Šimjáková

Mnohorozměrné modely volatility

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2009

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala mojej vedúcej diplomovej práce RNDr. Jitke Zichovej, Dr., za materiály a cenné rady ktoré mi poskytla. Taktiež ďakujem za čas strávený konzultáciami.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Praze dne 17.7.2009

Dominika Šimjáková

Obsah

Úvod	6
Kapitola 1. Jednorozmerné GARCH modely	10
1.1. Heteroskedastický model prvého rádu	10
1.1.1. Popis modelu	10
1.1.2. Vlastnosti procesu ε_t	11
1.1.3. Vlastnosti procesu Y_t	12
1.1.4. Rozdelenie chybového procesu	13
1.2. Všeobecnejšie modely	13
1.2.1. Rozšírenia	13
1.2.2. Modely s náhodnými koeficientami	15
1.2.3. Vlastnosti procesu GARCH(p,q)	16
1.2.4. Yule-Walkerove rovnice pre štvorec GARCH procesu	17
Kapitola 2. Odhady a testy	19
2.1. Pseudo metóda maximálnej vierohodnosti	19
2.1.1. Popis metódy	19
2.1.2. Prípád iid rozdelenia	20
2.1.3. Odhady pre model GARCH(p,q)	21
2.1.4. Test homoskedasticity	22
2.1.5. Aplikácia na ARCH a GARCH model	23
Kapitola 3. Mnohorozmerné GARCH modely	24
3.1. Mnohorozmerný GARCH model	24
3.1.1. Dodatočné podmienky	25
3.1.2. Príklad GARCH procesu	26
3.2. Modely s obmedzeniami	28
3.2.1. Diagonálne modely	29
3.2.2. Modely s konštantnými podmienenými koreláciami	30
3.2.3. BEKK model	31
3.2.4. Factor ARCH modely	31
Kapitola 4. Odhady	33
4.1. Pseudo metóda maximálnej vierohodnosti	33
4.2. Asymptotické vlastnosti odhadu	34
4.3. Odhad modelu s konštantnými podmienenými koreláciami	36
4.4. Faktorové modely	36
Kapitola 5. Praktická časť	38
5.1. Súvislosť medzi GARCH a ARMA modelmi	38
5.2. Analýza dvojrozmernej časovej rady	39
5.2.1. Určovanie vhodnosti modelu	42

OBSAH	4
5.3. Analýza jednorozmerných rád	43
5.3.1. Rada eurových kurzov	43
5.3.2. Rada dolárových kurzov	51
Kapitola 6. Záver	58
Literatúra	59

Název práce: Mnohorozměrné modely volatility

Autor: Dominika Šimjáková

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

e-mail vedoucího: zichova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce sa zaoberá analýzou jednorozmerných a mnohorozmerných časových rád. Podrobne sú popísané modely GARCH ako aj ich špeciálny zjednodušený prípad, ARCH modely. V praktickej časti diplomovej práce sa spracovávajú rady menových kurzov. Cieľom práce je nájsť vhodný model, ktorým bude možné spoľahlivo aproximovať časové rady. Rady menových kurzov boli analyzované softwarom XploRe a Eviews. Dáta a výpis programu sú priložené na CD.

Klíčová slova: Analýza časových rád, mnohorozmerná časová rada, GARCH model

Title: Multivariate volatility models

Author: Dominika Šimjáková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Supervisor's e-mail address: zichova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The subject of the thesis is the analysis of univariate and multivariate time series. The GARCH models as well as the the simplified ARCH models are described in detail. In the practical part of the master thesis are elaborated some time series of exchange rates. The aim of this work is to find an appropriate model which would reliably approximate the development of the series. The exchange rates time series were analyzed by the software XploRe and Eviews. The data and programme source code are enclosed on a CD.

Keywords: Time series analysis, multivariate time series, GARCH model

Úvod

Veľké množstvo dát vo financiách má podobu časovej rady. Z tohto dôvodu boli v sedemdesiatych rokoch zavedené ARMA modely charakterizované lineárnou závislosťou na minulých pozorovaniach a možnosťou aplikovať model bez obmedzení týkajúcich sa parametrov. ARMA modely sa ale ukázali ako nedostačujúce v snahe popísať rady, ktoré nevykazujú lineárnu závislosť.

Pri bližšom skúmaní finančných dát sa ako dôležitá ukázala závislosť rozptylu na vlastných oneskorených hodnotách a vyjadrenie súčasných hodnôt rady pomocou nelineárnych kombinácií minulých hodnôt.

Tento poznatok viedol k zdokonaleniu ARMA modelov zavedením modelu GARCH Englom (1982). Úspech dynamického GARCH modelovania môžeme pripísať zlyhaniu klasickej analýzy.

GARCH modely majú v praxi mnohostranné využitie. V diplomovej práci budú využité na modelovanie menových kurzov.

Práca je členená do piatich kapitol. Prvá kapitola je venovaná jednorozmerným GARCH radám, heteroskedastickému modelu a všeobecnejším modelom. Druhá kapitola sa zaoberá testovaním a odhadom parametrov v modeloch. Tretia kapitola rozoberá mnohorozmerné GARCH procesy. Štvrtá kapitola obsahuje teóriu odhadovania v mnohorozmernom prípade. Posledná kapitola aplikuje teoretické poznatky do praxe v snahe aproximovať modely menových kurzov.

Na priloženom CD sú súbory obsahujúce spracovávané dáta a použité programy.

Všeobecné definície a značenie

Značenie

Symbolom N budeme označovať množinu prirodzených čísel, symbolom Z množinu celých čísel.

Ďalej budeme používať nasledujúce značenie podmienenej strednej hodnoty:

$$E(\varepsilon_t \mid \underline{\varepsilon_{t-1}}) = E(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$$

$$E(\varepsilon_t \mid \underline{\varepsilon_{t-h}}) = E(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-h}, \varepsilon_{t-h-1}, \dots).$$

Pre kovarianciu a rozptyl použijeme symboly:

$$\Gamma(t_1, t_2) = \text{cov}(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2})$$

$$V(\varepsilon_t) = \text{var}\varepsilon_t.$$

DEFINÍCIA. Hovoríme, že $(\varepsilon_t, t \in T)$, kde T je z N alebo Z , je *slabý biely šum*, ak ide o nekorelované homoskedastické premenné s nulovou strednou hodnotou. Môžeme teda písať

$$E(\varepsilon_t \mid \underline{\varepsilon_{t-1}}) = 0,$$

$$\Gamma(t_1, t_2) = 0, \quad t_1 \neq t_2$$

$$V(\varepsilon_t) = \text{konštanta}.$$

DEFINÍCIA. Hovoríme, že $(\varepsilon_t, t \in T)$, kde T je z N alebo Z , je *silný biely šum* ak ide o postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín s konečným druhým momentom.

DEFINÍCIA. Hovoríme, že proces je *stacionárny druhého rádu* práve vtedy keď

- stredná hodnota je nezávislá na čase
- kovariancia závisí len na rozdielne časových okamžikov:

$$\Gamma(t, t+h) = \Gamma(h), \forall t$$

naďalej budeme používať termín *stacionárny*.

DEFINÍCIA. Štvorcová reálna matica typu sa nazýva *jednotková* ak prvky na hlavnej diagonále sú jednotky a mimodiagonálne prvky sú nuly.

DEFINÍCIA. Štvorcová reálna matica sa nazýva *diagonálna* ak prvky na hlavnej diagonále sú nenulové a mimodiagonálne prvky sú rovné nule.

DEFINÍCIA. Symetrická štvorcová reálna matica A sa nazýva *pozitívne semi-definitná* (resp. *definitná*) ak pre

$$\forall \text{ nenulové } x \in \mathbb{R}^n \text{ platí: } x'Ax \geq 0 \text{ (resp. } x'Ax > 0).$$

DEFINÍCIA. Determinant submatice typu $p \times p$ vzniknutý z matice typu $n \times n$ vynechaním $n - p$ po sebe nasledujúcich riadkov a stĺcov sa nazýva *hlavný minor rádu p* .

Existujú rôzne kritériá pre overenie pozitívnej semidefinitnosti (definitnosti) matíc. Spomenieme kritérium pomocou hlavných minorov matice.

DEFINÍCIA. Hovoríme, že matica je *pozitívne semidefinitná* (resp. *definitná*), práve vtedy keď všetky hlavné minory matice sú ≥ 0 (resp. > 0).

DEFINÍCIA. Pre stacionárnu časovú radu ε_t sa hodnota jej *autokovariančnej funkcie* γ_k v bode k definuje ako

$$\gamma_k = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t - \mu)(\varepsilon_{t+k} - \mu), \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

a hodnota jej *autokorelačnej funkcie* ϱ_k v bode k ako

$$\varrho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_\varepsilon^2}, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

kde $\mu = E(\varepsilon_t)$ je stredná hodnota a $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 = \text{var}(\varepsilon_t)$ je rozptyl danej stacionárnej rady.

DEFINÍCIA. *Parciálna autokorelačná funkcia* ϱ_{kk} je definovaná ako parciálny korelačný koeficient ε_t a ε_{t+k} pri pevných hodnotách $\varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+k-1}$.

Platí:

$$\varrho_{kk} = \frac{|\mathbf{P}_k^*|}{|\mathbf{P}_k|}$$

kde $||$ označuje determinant matice, \mathbf{P}_k je matica autokorelácií tvaru

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_1 & \dots & \varrho_{k-1} \\ \varrho_1 & 1 & \dots & \varrho_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \varrho_{k-1} & \varrho_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

a matica \mathbf{P}_k^* , ktorá vznikne predefinovaním posledného stĺpca matice \mathbf{P}_k má tvar

$$\mathbf{P}_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_1 & \dots & \varrho_1 \\ \varrho_1 & 1 & \dots & \varrho_2 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \varrho_{k-1} & \varrho_{k-2} & \dots & \varrho_k \end{bmatrix}$$

DEFINÍCIA. *Autoregresný proces rádu p* , značený ako $\text{AR}(p)$ je definovaný ako

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

alebo ekvivalentne pomocou symboliky operátora spätného posunutia B ako

$$\varphi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad \text{kde } \varphi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j B^j$$

je tzv. *autoregresný operátor*.

DEFINÍCIA. *Zmiešaný proces rádu p a q* , značený ako $\text{ARMA}(p, q)$ definujeme ako

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

alebo pomocou symboliky operátora spätného posunutia B ako

$$\varphi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

kde $\varphi(B)$ je ako v modeli $\text{AR}(p)$ a $\theta(B) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$.

Uvažujme autoregresiu tvaru

$$y_t = \varphi_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Nech $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p$ sú odhady parametrov modelu.

Rezídua sú odhadnuté hodnoty bieleho šumu

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\varphi}_0 - \hat{\varphi}_1 y_{t-1} - \dots - \hat{\varphi}_p y_{t-p}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

kde hodnoty y_{-1}, \dots, y_{-p} sú dané.

DEFINÍCIA. Koeficient determinácie R^2 je definovaný výrazom $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$, kde reziduálny súčet štvorcov

$$RSS = \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \hat{\varepsilon}_t^2)^2,$$

úplný súčet štvorcov

$$TSS = \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \bar{\varepsilon})^2,$$

kde $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t$.

DEFINÍCIA. Durbin-Watsonova štatistika skúma korelovanosť rezíduí v regresnom modeli. Testuje hypotézu $\rho = 0$ v modeli $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$. Pokiaľ štatistika nadobúda hodnoty v rozmedzí $(0, 2)$, pozorujeme pozitívnu koreláciu. Pre hodnoty v rozmedzí $(2, 4)$ negatívnu koreláciu. Ak je štatistika rovná 2, rezídua sú nekorelované.

DEFINÍCIA. Ljung-Boxova Q-štatistika pri oneskorení k je testová štatistika pre nulovú hypotézu, že autokorelácia je nulová do rádu k . Vypočíta sa podľa vzorca:

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{j=1}^k \frac{r_j^2}{T-j}.$$

Za nulovej hypotézy má Q_{LB} chí-kvadrát rozdelenie s počtom stupňov voľnosti rovným počtu autokorelácií. r_j predstavuje autokoreláciu j -teho rádu, T je dĺžka časovej rady.

Jednorozmerné GARCH modely

1.1. Heteroskedastický model prvého rádu

1.1.1. Popis modelu.

Autoregresné rovnice

Predpokladajme autoregresný model prvého rádu s regresným koeficientom φ s absolútnou hodnotou menšou ako 1 z dôvodu zabezpečenia stability systému. Potom je vyjadrenie procesu v čase t tvaru:

$$Y_t = \mu + \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \forall t, |\varphi| < 1, \quad (1)$$

kde ε_t je slabý biely šum spĺňajúci podmienku:

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0, \quad \forall t. \quad (2)$$

Predpokladáme, že podmienený rozptyl $V(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})$ sa môže meniť v čase. Uvažujeme časovú závislosť vyjadrenú autoregresnou rovnicou prvého rádu, tvaru:

$$\varepsilon_t^2 = c + a\varepsilon_{t-1}^2 + u_t, \quad (3)$$

kde u_t je silný biely šum s nulovou strednou hodnotou.

Proces, ktorý spĺňa podmienky (1), (2) a (3) sa nazýva *autoregresný proces prvého rádu s ARCH(1) chybami*.

Vlastnosti procesu sa dostanú priamo z rovníc definujúcich Y_t a ε_t^2 .

Podmienky zabezpečujúce existenciu procesu

Pre podmienky (2) a (3) zavedené pre proces ε_t nie je apriori zreteľné, že sú navzájom kompatibilné:

(*) Rovnicou (3) nie je proces ε_t^2 určený jednoznačne. Rovnica musí byť doplnená počiatočnou podmienkou. Potom máme

$$m_t = E(\varepsilon_t^2) = c + am_{t-1}, \text{ pre dané } m_0.$$

Strednú hodnotu invariantnú v čase zaistíme vhodnou voľbou parametra a . Predpokladajme, že $|a| < 1$ a počiatočná podmienka je v tvare $m_0 = c/(1-a)$. Potom $m_t = c/(1-a), \forall t$.

(**) Navyše musí byť zaručená kladnosť procesu ε_t^2 . Postačujúce podmienky pre kladnosť procesu sú: $a > 0$ a $c + u_t \geq 0$ pre každú prípustnú hodnotu u_t .

(*)*) Uvažujme dva nezávislé procesy Z_t , δ_t , kde Z_t nadobúda kladných hodnôt:

$$Z_t = c + aZ_{t-1} + u_t,$$

a náhodné premenné δ_t sú nezávislé rovnako rozdelené a platí

$$P[\delta_t = +1] = P[\delta_t = -1] = \frac{1}{2}.$$

Všimneme si, že proces $\varepsilon_t = \delta_t \sqrt{Z_t}$ spĺňa obe podmienky (2) a (3). Platí totiž

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0,$$

keďže $E(\delta_t | \varepsilon_{t-1}) = 0$ a navyiac

$$\varepsilon_t^2 = \delta_t^2 Z_t = 1(c + aZ_{t-1} + u_t) = c + a\varepsilon_{t-1}^2 + u_t,$$

teda môžeme hovoriť o kompatibilite týchto podmienok.

Ďalej budeme predpokladať, že sú splnené podmienky (*), (**), (***) na existenciu procesu definovaného vzťahmi (1),(2) a (3). Budeme študovať pravdepodobnostné vlastnosti procesov ε_t a Y_t .

1.1.2. Vlastnosti procesu ε_t .

Proces ε_t spĺňa podmienku ortogonalít s ohľadom na minulosť procesu, tzn. $E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0$. Toto obmedzenie má niekoľko dôsledkov

- (1) Chybový proces je tiež ortogonálny vzhľadom k ľubovoľne vzdialeným minulým hodnotám

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-h}) = 0, \forall h > 0,$$

pretože informácia obsiahnutá v hodnote ε_{t-h} je menšia ako v ε_{t-1} .

Teda

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-h}) = E(E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) | \varepsilon_{t-h}) = E(0 | \varepsilon_{t-h}) = 0.$$

- (2) Vlastnosť ortogonalít implikuje, že podmienené korelácie sú rovné nule. Uvažujme dve kladné celé čísla h a k .

Potom

$$\begin{aligned} & Cov[(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) | \varepsilon_{t-h}] \\ &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k} | \varepsilon_{t-h}] \\ &= E[E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k} | \varepsilon_{t+k-1}] | \varepsilon_{t-h}] \\ &= E[\varepsilon_t E(\varepsilon_{t+k} | \varepsilon_{t+k-1}) | \varepsilon_{t-h}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Medzi súčasnými a budúcimi hodnotami procesu ε_t nie je žiadna korelácia podmienená známou minulosťou pre ľubovoľné oneskorenie h .

- (3) Ďalšie vlastnosti chybového procesu sa zistia skúmaním autoregresnej rovnice (3). Aplikovaním rekurzívnych substitúcií dostaneme

$$\varepsilon_t^2 = c[1 + a + \dots + a^{h-1}] + a^h \varepsilon_{t-h}^2 + u_t + a u_{t-1} + \dots + a^{h-1} u_{t-h+1}.$$

Aplikáciou podmienenej strednej hodnoty ďalej máme

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-h}) &= c[1 + a + \dots + a^{h-1}] + a^h \varepsilon_{t-h}^2 \\ &= c \frac{1 - a^h}{1 - a} + a^h \varepsilon_{t-h}^2. \end{aligned}$$

Pre podmienené rozptyly preto platí

$$V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-h}) = c \frac{1 - a^h}{1 - a} + a^h \varepsilon_{t-h}^2.$$

Pre oneskorenie h blížiacie sa v limite k nekonečnu tieto rozptyly konvergujú k nepodmienenému rozptylu

$$V(\varepsilon_t) = EV(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-h}) = \frac{c}{1 - a}.$$

Rozdiel medzi podmieneným a nepodmieneným rozptylom má tvar

$$V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-h}) - V(\varepsilon_t) = a^h [\varepsilon_{t-h}^2 - E(\varepsilon_{t-h}^2)].$$

1.1.3. Vlastnosti procesu Y_t .

Vlastnosti tohto procesu môžu byť priamo odvodené od vlastností bieleho šumu ε_t . Z (1) je zrejme možné písať

$$Y_t = \mu \frac{1 - \varphi^h}{1 - \varphi} + \varphi^h Y_{t-h} + \varepsilon_t + \varphi \varepsilon_{t-1} + \dots + \varphi^{h-1} \varepsilon_{t-h+1}$$

Odtiaľ sa dá zistiť, že

(1) Pre podmienenú strednú hodnotu platí,

$$E(Y_t | \underline{Y}_{t-h}) = \mu \frac{1 - \varphi^h}{1 - \varphi} + \varphi^h Y_{t-h}$$

tj. predpovede závisia lineárne na oneskorených hodnotách.

(2) Pokiaľ h a k sú celé čísla, kde h je kladné a k je nezáporné, môžeme písať

$$\begin{aligned} &Cov[(Y_t, Y_{t+k}) | \underline{Y}_{t-h}] \\ &= \frac{c\varphi^k}{1 - a} \frac{1 - \varphi^{2h}}{1 - \varphi^2} - \frac{ca\varphi^k}{1 - a} \frac{a^h - \varphi^{2h}}{a - \varphi^2} + a\varphi^k \varepsilon_{t-h}^2 \frac{a^h - \varphi^{2h}}{a - \varphi^2}. \end{aligned}$$

Odvodenie je spravené v knihe [1]. Pre nepodmienené kovariancie platí

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \lim_{h \rightarrow \infty} Cov[(Y_t, Y_{t+k}) | \underline{Y}_{t-h}].$$

Pokiaľ na podmienené kovariancie aplikujeme limitu pre $h \rightarrow \infty$, vidíme, že čitateľ v 2. a v 3. člene je rovný nule, pretože $\lim_{h \rightarrow \infty} (a^h - \varphi^{2h}) = 0$, keďže $0 < a < 1$ a $|\varphi| < 1$. V čitateli v prvom člene ide výraz $1 - \varphi^{2h}$ pre $h \rightarrow \infty$ k 1.

Môžeme teda písať pre $k \geq 0$

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \frac{c\varphi^k}{1 - a} \frac{1}{1 - \varphi^2} = \varphi^k V(Y_t).$$

- (3) Presnosť predpovede o jednu časovú jednotku je vyjadrená rozptylom $V(Y_t | Y_{t-1})$. Výraz pre podmienený rozptyl sa dostane zo vzorca pre $Cov((Y_t, Y_{t+k}) | Y_{t-h})$, kde položíme $k = 0$ a $h = 1$

$$V(Y_t | Y_{t-1}) = V(\varepsilon_t | Y_{t-1}) = c + a\varepsilon_{t-1}^2.$$

Analogicky odvodíme podmienený rozptyl pre oneskorenie o h časových jednotiek

$$\begin{aligned} V(Y_t | Y_{t-h}) &= \\ &= \frac{c}{1-a} \frac{1-\varphi^{2h}}{1-\varphi^2} - \frac{ca}{1-a} \frac{a^h - \varphi^{2h}}{a-\varphi^2} + a\varepsilon_{t-h}^2 \frac{a^h - \varphi^{2h}}{a-\varphi^2}. \end{aligned}$$

Limitným prechodom pre $h \rightarrow \infty$ dostaneme

$$V(Y_t) = \frac{c}{1-a} \frac{1}{1-\varphi^2}.$$

1.1.4. Rozdelenie chybového procesu.

Ďalšie vlastnosti môžu byť odvodené, pokiaľ poznáme rozdelenie ε_t .

Engle sa v článku [3] zaoberal procesmi ε_t s podmienene normálnym rozdelením

$$\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1} \sim N[0, c + a\varepsilon_{t-1}^2] \quad (4)$$

Proces ε_t má stacionárne momenty 2. a 4. rádu, pokiaľ $3a^2 < 1$. Tieto momenty sú

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{c}{1-a}, \quad E(\varepsilon_t^4) = \frac{3c^2}{(1-a)^2} \frac{1-a^2}{1-3a^2}. \quad (5)$$

Potom môžeme špičatosť vyjadriť v tvare

$$k = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = 3 \frac{1-a^2}{1-3a^2},$$

čo je vždy väčšie ako 3 (hodnota špičatosť normálneho rozdelenia). Toto sa prejavuje ťažším chvostom nepodmieneného rozdelenia v porovnaní s normálnym rozdelením.

1.2. Všeobecnejšie modely

1.2.1. Rozšírenia.

Ako bolo naznačené v predchádzajúcej kapitole, ARCH(1) model popisuje vývoj podmienenej strednej hodnoty a rozptylu. Boli navrhnuté rôzne modely s cieľom vyjadriť podmienený rozptyl:

- (1) ARCH(q) (Engle, 1982)

Tieto modely zovšeobecňujú ARCH(1) pre chybové hodnoty. Základnou myšlienkou je zvyšovanie rádu autoregresného polynómu. Teda ARCH(q) je definovaný ako

$$\varepsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t, \quad E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0, \quad (6)$$

kde pre u_t platí $E(u_t | u_{t-1}) = 0$.
Podmieneny rozptyl ε_t je

$$V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

závisí na minulosti prostredníctvom q posledných hodnôt ε_t^2 .

(2) GARCH(p, q) model (Bollerslev, 1986)

ARCH model je postavený na autoregresnej reprezentácii podmieneného rozptylu. Do modelu je možné zahrnúť aj časť kĺzavých súčtov. Týmto sú definované GARCH procesy

$$E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0 \quad (7)$$

$$V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = h_t = c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}.$$

GARCH(p, q) model môže byť alternatívne prepísaný za využitia (6). Pre tento účel zavedieme označenie $u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$. Nahradením h_t výrazom $\varepsilon_t^2 - u_t$ dostávame vyjadrenie GARCH v tvare

$$\varepsilon_t^2 - u_t = c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j (\varepsilon_{t-j}^2 - u_{t-j}), \quad (8)$$

$$\varepsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + u_t - \sum_{j=1}^p \beta_j u_{t-j},$$

kde $\alpha_i = 0$ pre $i > q$ a $\beta_i = 0$ pre $i > p$.

Je to ARMA[Max(p, q), p] reprezentácia pre proces ε_t^2 s chybou u_t , ktorá nemusí mať nutne konštantný rozptyl.

(3) ARMA-GARCH model (Weiss, 1986)

GARCH modelovanie býva aplikované na chybový proces. Môžeme uviesť niekoľko kombinovaných modelov.

Uvažujme lineárny regresný model s GARCH chybami

$$Y_t = X_t b + \varepsilon_t, \text{ kde } \varepsilon_t \text{ vyhovuje GARCH}(p, q) \text{ modelu,}$$

alebo ARMA model s GARCH chybami

$$\varphi(B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \text{ kde } \varepsilon_t \text{ vyhovuje GARCH}(p, q) \text{ modelu,}$$

alebo tiež ARMA model, kde nepodmieneny rozptyl γ_0 procesu Y_t má dopad na podmienený rozptyl

$$\varphi(B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

$$E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0$$

$$V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_0 [E(Y_t | \underline{Y}_{t-1})]^2 + \sum_{i=1}^s \gamma_i Y_{t-i}^2.$$

(4) ARCH-M Model (Engle, Lilien and Robbins 1987)

ARCH-M modely sú lepšie nástroje na popis dopadu volatility na podmienenú strednú hodnotu. V týchto modeloch sa objavuje podmienený rozptyl h_t ako vysvetľujúca premenná v podmienenej strednej hodnote. Príkladom ARCH-M modelu je

$$Y_t = X_t b + h_t \delta + \varepsilon_t, \text{ kde } \varepsilon_t \text{ vyhovuje GARCH modelu.}$$

Modely typu ARCH vychádzajú z rekurzívnych rovností pre podmienený rozptyl. Bolo zistené, že existujú procesy spĺňajúce tieto rovnosti. Uvažujme GARCH model. Môže byť odvodený z ε_t procesu definovaného ako

$$\varepsilon_t = (c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j})^{\frac{1}{2}} u_t,$$

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j},$$

kde u_t je silný biely šum a kde počiatočné podmienky $\varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-q}$, h_{-1}, \dots, h_{-p} sú dané.

1.2.2. Modely s náhodnými koeficientami.

Matematici Bera a Lee (1989) navrhli interpretáciu jednorozmerných ARCH modelov pomocou náhodných koeficientov.

V ukážke budeme uvažovať jednorozmerný ARCH(p) model. Koeficienty φ_i nahradíme koeficientami závislými na čase φ_{it} .

Máme

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^p \varphi_{it} \varepsilon_{t-i} + u_t,$$

kde u_t je biely šum s rozptylom σ_u^2 , nezávislý na ε_t .

Ďalšie predpoklady: koeficienty φ_{it} sú náhodné, vektory $(\varphi_{1t}, \dots, \varphi_{pt})'$ sú pre rôzne t navzájom nezávislé a tiež nezávislé na hodnotách u_t .

Pre momenty platí

$$E\varphi_{it} = 0, \quad V(\varphi_{1t}, \dots, \varphi_{pt})' = \Sigma.$$

Vyjadrenie momentov podmienených minulosťou procesu je potom

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) &= E_\varphi E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}, \varphi) \\ &= E_\varphi \left[\sum_{i=1}^p \varphi_{it} \varepsilon_{t-i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^p E_\varphi(\varphi_{it}) \varepsilon_{t-i} = 0, \end{aligned}$$

kde E_φ označuje strednú hodnotu branú s ohľadom na rozdelenie koeficientov φ_{it} .

$$\begin{aligned} V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) &= V_\varphi E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}, \varphi) + E_\varphi V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}, \varphi) \\ &= V_\varphi \left[\sum_{i=1}^p \varphi_{it} \varepsilon_{t-i} \right] + E_\varphi \sigma_u^2 \\ &= (\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}) \Sigma \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-p} \end{pmatrix} + \sigma_u^2. \end{aligned}$$

Na výpočet podmieneného rozptylu je potrebná rozptylová matica Σ . Pokiaľ je Σ diagonálna, potom má podmienený rozptyl tvar

$$V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = \sum_{i=1}^p \sigma_{ii} \varepsilon_{t-i}^2 + \sigma_u^2.$$

1.2.3. Vlastnosti procesu GARCH(p, q).

Uvažujme proces ε_t spĺňajúci GARCH(p, q) model

$$E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0,$$

$$V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = h_t = c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}.$$

Zložky procesu ε_t sú nekorelované s nulovou strednou hodnotou. Pri skúmaní stacionarity druhého rádu je postačujúce uvažovať rozptyl,

$$V(\varepsilon_t) = V[E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1})] + E[V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1})] = E h_t,$$

a ukázať, že je asymptoticky nezávislý na čase.

Nasledujúca veta formuluje podmienku stacionarity pre model GARCH.

VETA 1.1. *Proces ε_t spĺňajúci GARCH(p, q) model s koeficientmi $c \geq 0$, $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p$ je stacionárny druhého rádu ak*

$$\alpha(1) + \beta(1) = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1.$$

DÔKAZ. vid' [1]

Rozdiel medzi podmieneným a nepodmieneným rozdelením pozorujeme napr. u špičatosti. Uvažujme podmienené gaussovský GARCH proces. Pre momenty platí

$$E(\varepsilon_t^4 | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 3[E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})]^2.$$

Aplikáciou strednej hodnoty u oboch strán rovnice dostávame

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^4) &= E[E(\varepsilon_t^4 | \underline{\varepsilon}_{t-1})] \\ &= 3E[E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})]^2 \\ &\geq 3[E(E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}))]^2 \\ &= 3(E\varepsilon_t^2)^2. \end{aligned}$$

Vyššie uvedená nerovnosť vyplýva z vlastnosti podmieneného rozptylu pre $E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})^2 < \infty$

$$E[E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})]^2 = \text{var} E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}) + [E(E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}))]^2$$

kde zrejme

$$E[E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})]^2 \geq [E(E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}))]^2$$

Rozdelenie ε_t má teda ťažší chvost ako normálne rozdelenie.

Z [1] navyše máme

$$\begin{aligned} k &= \frac{E(\varepsilon_t^4)}{(E(\varepsilon_t^2))^2} = 3 + 3 \frac{E[E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})^2] - E[E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})]^2}{(E(\varepsilon_t^2))^2} \\ &= 3 + 3 \frac{V E(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1})}{(E(\varepsilon_t^2))^2}. \end{aligned}$$

Špičatnosť je priamo spojená so zisťovaním podmienenej heteroskedasticity.

1.2.4. Yule-Walkerove rovnice pre štvorec GARCH procesu.

Pre odvedenie týchto rovníc použijeme reprezentáciu vo forme ARMA procesu.

$$\varepsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + u_t - \sum_{j=1}^p \beta_j u_{t-j}$$

Uvažujme autokovariančnú funkciu procesu ε_t^2

$$\begin{aligned} \gamma(h)^{(2)} &= \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) \\ &= \text{Cov}(c + \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + u_t - \sum_{j=1}^p \beta_j u_{t-j}, \varepsilon_{t-h}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \text{Cov}(\varepsilon_{t-i}^2, \varepsilon_{t-h}^2) + \text{Cov}(u_t - \sum_{j=1}^p \beta_j u_{t-j}, \varepsilon_{t-h}^2) \end{aligned}$$

Ak je h dosť veľké, potom je posledný sčítanec rovný nule. Takže postupnosť autokovariancií spĺňa lineárnu rekurzívnu rovnosť

$$\gamma(h)^{(2)} = \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \gamma(h-i)^{(2)}, \quad \forall h \geq p+1.$$

Yule-Walkerov systém môže byť použitý na rôzne účely. Je to napr. vhodný nástroj na identifikáciu rádov $\text{Max}(p, q)$ a p , teda rády p a q ak $q \geq p$, alebo inak len p . Môže sa tiež použiť pri odhade koeficientov $\alpha_i + \beta_i, i = 1, \dots, \text{Max}(p, q)$.

KAPITOLA 2

Odhady a testy

2.1. Pseudo metóda maximálnej vierohodnosti

2.1.1. Popis metódy.

Pre ARCH modely (1) sa snažíme stanoviť maximálne vierohodný odhad založený na predpoklade normality podmieneného rozdelenia. Označme $l_t(y; \theta)$ podmienenú vierohodnostnú funkciu veličín Y_t . Vierohodnostná funkcia Y_1, \dots, Y_T pri známom Y_0 je

$$L(y; \theta) = \prod_{t=1}^T l_t(y; \theta).$$

Odhad je definovaný ako riešenie maximalizačného problému

$$\max_{\theta} \log L(y; \theta).$$

Vlastnosti odhadu označovaného ako $\hat{\theta}_T$ a nazývaného pseudo maximálne vierohodný odhad (PML), závisia na skutočnom rozdelení a na rozdelení použitom na výpočet vierohodnostnej funkcie (v tomto prípade normálne rozdelenie).

V prípade štandardných podmienok regularity uvedených v [1], str.44, je tento odhad konzistentný aj v prípade, že skutočné rozdelenie nie je podmienene normálne. Navyše je odhad asymptoticky normálny a jeho variančná matica je tvaru:

$$V_{as}[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)] = J^{-1} I J^{-1}, \quad (9)$$

$$J = E_0\left[-\frac{\partial^2 \log l_t(Y; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right],$$

$$I = E_0\left[\frac{\partial \log l_t(Y; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log l_t(Y; \theta)}{\partial \theta'}\right],$$

kde E_0 je stredná hodnota braná s ohľadom na skutočné rozdelenie.

Matice I a J sú všeobecne odlišné. Zhodujú sa ak skutočné rozdelenie je rovnaké ako rozdelenie použité pri konštrukcii vierohodnostnej funkcie, ktorá je v tomto prípade podmienene normálna.

Ak $I = J$, potom sa vzorec (9) zjednodušuje na tvar

$$V_{as}[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)] = J^{-1} = I^{-1}.$$

2.1.2. Prípád iid rozdelenia.

Teraz uvedieme konkrétny tvar vierohodnostnej funkcie v prípade nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín. Uvažujme takúto postupnosť veličín Y_t , $t = 1, \dots, T$, s neznámou strednou hodnotou m a rozptylom σ^2 . Máme teda vektorový parameter $\theta = (m, \sigma^2)$. Logaritmus maximálne vierohodnej funkcie má tvar

$$\log L = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (Y_t - m)^2. \quad (10)$$

Prvé derivácie vzhľadom k premenným m a σ^2 sú

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T (Y_t - m); \\ \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=1}^T (Y_t - m)^2. \end{cases}$$

PML odhady parametrov m a σ^2 sú riešením vierohodnostných rovníc $\frac{\partial \log L}{\partial m} = 0$ a $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{m}_T &= \bar{Y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t \\ \hat{\sigma}_T^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}_T)^2 \end{aligned}$$

Tieto odhady sú konzistentné aj v prípade, že rozdelenie Y_t nie je normálne. Ďalej máme

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} E\left(\frac{Y-m}{\sigma}\right)^2 & E\left(\frac{Y-m}{\sigma^2} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(Y-m)^2\right]\right) \\ E\left(\frac{Y-m}{\sigma^2} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(Y-m)^2\right]\right) & E\left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(Y-m)^2\right]^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & \frac{1}{2\sigma^3} E u^3 \\ \frac{1}{2\sigma^3} E u^3 & \frac{k-1}{4\sigma^4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde $u = \frac{Y-m}{\sigma}$ a $k = \frac{E u^4}{(E u^2)^2} = E u^4$ označuje špičatosť veličiny u .

Matica J je tvaru

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

Teda môžeme písať asymptotickú variančnú maticu ako

$$\begin{aligned} V_{as}[\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{m}_T - m \\ \hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2 \end{pmatrix}] &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^3 E u^3 \\ \sigma^3 E u^3 & (k-1)\sigma^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & m_3 \\ m_3 & (k-1)\sigma^4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $m_3 = E(Y - m)^3$. Pokiaľ je skutočné rozdelenie normálne, máme $m_3 = 0$ a $k = 3$. Takže odhady \hat{m}_T a $\hat{\sigma}_T^2$ sú asymptoticky nekorelované a platí $V_{as}[\sqrt{T}(\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2)] = 2\sigma^4$.

Všeobecne môže byť rozptyl $\hat{\sigma}_T^2$ väčší alebo menší ako $\frac{2\sigma^4}{T}$, v závislosti na hodnote špičatosti. Špeciálne, čím ťažšie chvosty, tým väčší rozptyl. Odhady \hat{m}_T a $\hat{\sigma}_T^2$ sú všeobecne korelované.

2.1.3. Odhady pre model GARCH(p, q).

Uvažujme GARCH(p, q) model

$$Y_t | \underline{Y}_{t-1} \sim N[0, h_t]$$

$$h_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \quad (11)$$

čo je možné zapísať pomocou operátora spätného posunutia v tvare

$$h_t = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^q \beta_j B^j} \left(c + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i}^2 \right)$$

Pozorovania podmieneného rozptylu prebiehajú v určitom ohraničenom časovom úseku, $t = 1, \dots, T$. Zavedme preto dodatočné obmedzenia, ktoré nám umožnia prepísať (11)

$$\hat{Y}_t = 0 \text{ pre } t \leq 0,$$

$$\hat{Y}_t = Y_t \text{ pre } t \geq 1,$$

$$\hat{h}_t = 0 \text{ pre } t \leq 0.$$

Máme

$$\hat{h}_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i \hat{Y}_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \hat{h}_{t-j}. \quad (12)$$

Vierohodnostná funkcia má tvar

$$\log \hat{L} = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log \hat{h}_t(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\hat{Y}_t^2}{\hat{h}_t(\theta)}.$$

V praxi sa používa rekurzívny výpočet \hat{h}_T . Máme k dispozícii pozorovania Y_1, \dots, Y_T .

Potom

$$\begin{aligned}\hat{h}_0 &= 0 \\ \hat{h}_1 &= c + \alpha_1 \hat{Y}_0^2 + \dots + \alpha_p \hat{Y}_{1-p}^2 + \beta_1 \hat{h}_0 + \dots + \beta_q \hat{h}_{1-q} = c \\ \hat{h}_2 &= c + \alpha_1 \hat{Y}_1^2 + \dots + \alpha_p \hat{Y}_{2-p}^2 + \beta_1 \hat{h}_1 + \dots + \beta_q \hat{h}_{2-q} = c + \alpha_1 Y_1 + \beta_1 \hat{h}_1 \\ &\vdots \\ \hat{h}_T &= c + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{T-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \hat{h}_{T-j}\end{aligned}$$

2.1.4. Test homoskedasticity.

Homoskedasticitou rozumieme nezávislosť podmienených rozptylov h_t na čase. Pri prevádzaní testu budeme predpokladať podmienenú normalitu .

Pri voľbe modelu je užitočné uvažovať všeobecnejší model, ktorý by v sebe zahŕňal homoskedastický prípad.

Z tohto dôvodu rozpíšeme podmienenú strednú hodnotu a rozptyl veličín Y_t do tvaru

$$m_t(\theta) = m_t(\alpha), h_t(\theta) = h_t(\alpha, \beta)$$

kde $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ a β_0 je skalár.

Keďže v prípade homoskedasticity nezávisí podmienený rozptyl na α , máme za platnosti H_0

$$h_t(\theta) = h_t(\beta_0).$$

Na testovanie homoskedasticity podmieneného rozptylu využijeme štatistiku založenú na Lagrangeových multiplikátoroch.

$$\begin{aligned}\xi_{LM} &= \sum_{t=1}^T z'_{1t} \left[\sum_{t=1}^T z_{1t} z'_{1t} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{t=1}^T z_{1t} z'_{2t} \left(\sum_{t=1}^T z_{2t} z'_{2t} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T z_{2t} z'_{1t} \right]^{-1} \sum_{t=1}^T z_{1t},\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}z_{1t} &= \frac{\partial \log l_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_0, 0) \\ z_{2t} &= \frac{\partial \log l_t}{\partial \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_0 \end{pmatrix}}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_0, 0)\end{aligned}$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}_0$ sú maximálne vierohodné odhady parametrov α, β_0 za platnosti hypotézy o homoskedasticite.

Pokiaľ je model podmienene gaussovský, potom má štatistika ξ_{LM} asymptoticky chí-kvadrát rozdelenie s počtom stupňov voľnosti rovným počtu zložiek vektora β_1 , označme tento počet r .

Hypotézu homoskedasticity zamietame, ak štatistika

$$\xi_{LM} \geq \chi_{95\%}^2(r).$$

Uvedíme tvar štatistiky pre modely s chybovým procesom ARCH a GARCH.

2.1.5. Aplikácia na ARCH a GARCH model.

- ARCH model

Uvažujme proces ARCH definovaný vzťahom (6):

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= c + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t \\ h_t &= c + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2\end{aligned}$$

Za platnosti hypotézy homoskedasticity, tj. $(a_1, \dots, a_p)' = 0$ je hodnota Lagrangeovej štatistiky pre tento ARCH model rovná TR^2 , kde T je rozsah výberu a R^2 je koeficient determinácie v regresnom modeli

$$\hat{\varepsilon}_t^2 \simeq c + \sum_{i=1}^p a_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + u_t.$$

- GARCH(p, q) model

bol definovaný vzorcom (8):

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + u_t \\ h_t &= c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}\end{aligned}$$

Bolo zistené, že GARCH(p, q) model môže byť relatívne spoľahlivo aproximovaný ARCH($p+q$) modelom, takže môžeme k testovaniu homoskedasticity použiť štatistiku $\xi_{LM} = TR^2$ pre ARCH model s použitím regresného modelu

$$\hat{\varepsilon}_t^2 \simeq \gamma_0 + \sum_{i=1}^{p+q} \gamma_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + u_t,$$

kde γ_i sú funkciami α_i, β_i .

KAPITOLA 3

Mnohorozmerné GARCH modely

3.1. Mnohorozmerný GARCH model

V prvej kapitole sme definovali GARCH(p, q) proces ε_t . Teraz sa budeme venovať jeho mnohorozmernej analógii, tj. prípadu keď ε_t bude n -zložkový vektor a koeficienty variančnej matice bude možné definovať rovnako ako v jednorozmernom prípade.

Označme prvky procesu ako $(\varepsilon_{lt}, l = 1, \dots, n)$ a variančnú maticu $H_t = V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1})$ s prvkami h_{klt} , potom definujeme GARCH(p, q) ako

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0, V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = H_t, \\ h_{klt} = c_{kl} + \sum_{i=1}^q [\sum_{k', l'} \alpha_{kkl' l' i} \varepsilon_{k', t-i} \varepsilon_{l', t-i}] \\ + \sum_{i=1}^p [\sum_{k', l'} \beta_{kkl' l' i} h_{k', l', t-i}], \quad k, l = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Pre koeficienty c, α, β je možné bez újmy na všeobecnosti doplniť nasledujúce predpoklady, vyplývajúce zo symetricnosti matíc H_{t-i} a $\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}'$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{kl} = c_{lk}, \\ \alpha_{kkl' l' i} = \alpha_{lkk' l' i}, \alpha_{kkl' l' i} = \alpha_{kll' k' i}, \\ \beta_{kkl' l' i} = \beta_{lkk' l' i}, \beta_{kkl' l' i} = \beta_{kll' k' i}. \end{array} \right.$$

Za týchto podmienok je počet nezávislých parametrov v modeli GARCH(p, q) rovný

$$\frac{n(n+1)}{2} + (p+q) \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Ododenie vzorca pozostáva z rozpisu parametrov:

Vieme, že pre parameter c platí: $c_{kl} = c_{lk}$, kde $k = 1, \dots, n$ a $l = 1, \dots, n$, pričom sa k a l môžu rovnať, čo dohromady dáva $\frac{n(n+1)}{2}$ možností.

Obdobne sa postupuje u parametrov α, β . Napríklad v modeli ARCH(1) máme celkom $\frac{n(n+1)}{2} (1 + \frac{n(n+1)}{2})$ parametrov.

Tabuľka pre ARCH(1) model ukazujúca závislosť celkového počtu parametrov na rozmere vektoru ε_t

n	1	2	3	4
Celkový počet parametrov	2	12	42	110

Uvedme ešte ekvivalentný prepis definície GARCH(p, q) procesu

$$\text{vech}(H_t) = \text{vech}C + \sum_{i=1}^q \underline{A}_i \text{vech}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \underline{B}_i \text{vech}(H_{t-i}), \quad (13)$$

kde $\text{vec } h(H)$ predstavuje operátor, ktorý symetrickej matici H priradí príslušný trojuholník pod diagonálou vo vektorovej forme a kde $\underline{A}_i, \underline{B}_i$ sú matice s príslúchajúcimi prvkami α, β .

Ďalšou možnosťou ako vyjadriť GARCH(p, q) model je uvažovať matice A_{kli}, B_{kli} s prvkami

$$\begin{aligned} \alpha_{kll'k'} & k' = 1, \dots, n \quad l' = 1, \dots, n, \\ \beta_{kll'k'} & k' = 1, \dots, n \quad l' = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ďalej nech matice A_i, B_i majú rozmery $n^2 \times n^2$ a obsahujú A_{kli}, B_{kli} . Potom

$$\begin{aligned} h_{kl,t} &= C_{kl} + \sum_{i=1}^q \varepsilon'_{t-i} A_{kli} \varepsilon_{t-i} \\ &+ \sum_{i=1}^p E[\varepsilon'_{t-i} B_{kli} \varepsilon_{t-i} | \underline{\varepsilon}_{t-i-1}]. \end{aligned} \quad (14)$$

Zavedme si Kroneckerov produkt (značíme \otimes).

Pre matice C s prvkami c_{ij} a D označuje Kroneckerov produkt matíc $C \otimes D$ maticu s blokmi $c_{ij}D$. Máme

$$\begin{aligned} H_t &= C + \sum_{i=1}^q (I \otimes \varepsilon'_{t-i}) A_i (I \otimes \varepsilon_{t-i}) \\ &+ \sum_{i=1}^p E[(I \otimes \varepsilon'_{t-i}) B_i (I \otimes \varepsilon_{t-i}) | \underline{\varepsilon}_{t-i-1}]. \end{aligned} \quad (15)$$

3.1.1. Dodatočné podmienky.

Kladnosť

Variančnú maticu H_t máme definovanú pomocou rekurzie. Symetrická matica H_t musí byť pozitívne semidefinitná. Táto vlastnosť je zabezpečená podmienkami

$$C, A_i, i = 1, \dots, q, B_i, i = 1, \dots, p$$

sú symetrické a pozitívne semidefinitné matice.

Podmienky stacionarity

Postupujeme analogicky ako v jednorozmernom prípade, tj. uvažujeme veličinu

$$u_t = \text{vech}(\varepsilon_t \varepsilon_t') - \text{vech}(H_t). \quad (16)$$

Vzorec (16) je možné prepísať pomocou (13) do tvaru

$$\text{vech}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \text{vech}C + \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\underline{A}_i + \underline{B}_i) \text{vech}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}') + u_t - \sum_{i=1}^p \underline{B}_i u_{t-i}.$$

Proces ε_t je centrovaný a nekorelovaný, $E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0$.

Proces je tiež stacionárny druhého rádu v prípade, že je rozptyl nezávislý na čase.

Aplikáciou strednej hodnoty dostávame

$$E\text{vech}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \text{vech}C + \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\underline{A}_i + \underline{B}_i) E[\text{vech}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}')].$$

Pokiaľ má výraz

$$\det\left[I - \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\underline{A}_i + \underline{B}_i) z^i\right] = 0$$

všetky korene vonku jednotkového kruhu, potom sa riešenie predchádzajúcej rovnice limitne blíži ku konštante. Ide o postačujúcu podmienku stacionarity.

Matica nepodmienených kovariancií má tvar

$$\text{vech}E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \left[I - \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (\underline{A}_i + \underline{B}_i) z^i\right]^{-1} \text{vech}C.$$

I predstavuje jednotkovú maticu.

3.1.2. Príklad GARCH procesu.

Pre názorné pochopenie uvedených vzorcov je vhodné ich maticovo rozpisovať. Uvažujme špeciálne dvojrozmerný model GARCH(1,1), tj. $p = 1, q = 1, n = 2$.

Prvky kovariančnej matice sú

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11,t} = E(\varepsilon_{1,t}^2 | \varepsilon_{t-1}), \\ h_{12,t} = E(\varepsilon_{1,t} \varepsilon_{2,t} | \varepsilon_{t-1}), \\ h_{22,t} = E(\varepsilon_{2,t}^2 | \varepsilon_{t-1}). \end{array} \right.$$

Maticový prepis podľa vzorca (13) má tvar

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Uvedená matica s prvkami a_{ij} , resp. b_{ij} predstavuje maticu \underline{A}_i , resp. \underline{B}_i vo vzorci (13). V prípade GARCH(1,1) modelu ide o matice \underline{A}_1 a \underline{B}_1 .

Zložkový prepis:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= c_{11} + a_{11}\varepsilon_{1,t-1}^2 + a_{12}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + a_{13}\varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{11}h_{11,t-1} + b_{12}h_{12,t-1} + b_{13}h_{22,t-1} \\ h_{12,t} &= c_{12} + a_{21}\varepsilon_{1,t-1}^2 + a_{22}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + a_{23}\varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{21}h_{11,t-1} + b_{22}h_{12,t-1} + b_{23}h_{22,t-1} \\ h_{22,t} &= c_{22} + a_{31}\varepsilon_{1,t-1}^2 + a_{32}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + a_{33}\varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{31}h_{11,t-1} + b_{32}h_{12,t-1} + b_{33}h_{22,t-1} \end{aligned}$$

Čiastočný maticový prepis:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= c_{11} + (\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}) \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \\ &\quad + E[(\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}) \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} | \underline{\varepsilon}_{t-2}] \\ h_{12,t} &= c_{12} + (\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}) \begin{pmatrix} a_{21} & \frac{a_{22}}{2} \\ \frac{a_{22}}{2} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \\ &\quad + E[(\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}) \begin{pmatrix} b_{21} & \frac{b_{22}}{2} \\ \frac{b_{22}}{2} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} | \underline{\varepsilon}_{t-2}] \\ h_{22,t} &= c_{22} + (\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}) \begin{pmatrix} a_{31} & \frac{a_{32}}{2} \\ \frac{a_{32}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \\ &\quad + E[(\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}) \begin{pmatrix} b_{31} & \frac{b_{32}}{2} \\ \frac{b_{32}}{2} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} | \underline{\varepsilon}_{t-2}] \end{aligned}$$

Ďalej upravujeme výraz

$$\begin{aligned}
& E[(\varepsilon_{1,t-1}, \varepsilon_{2,t-1}) \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} | \underline{\varepsilon_{t-2}}] \\
&= b_{11}E(\varepsilon_{1,t-1}^2 | \underline{\varepsilon_{t-2}}) + b_{12}E(\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} | \underline{\varepsilon_{t-2}}) + b_{13}E(\varepsilon_{2,t-1}^2 | \underline{\varepsilon_{t-2}}) \\
&= b_{11}h_{11,t-1} + b_{12}h_{12,t-1} + b_{13}h_{22,t-1}.
\end{aligned}$$

Analogicky sa vyjadri $h_{12,t-1}$, $h_{22,t-1}$.

Celkovo pokiaľ matice C , \underline{A}_1 a \underline{B}_1 sú symetrické pozitívne semidefinitné, môžeme maticu H_t vyjadriť v tvare definície (15)

$$\begin{aligned}
H_t &= C + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & a_{21} & \frac{a_{22}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{13} & \frac{a_{22}}{2} & a_{23} \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{2} & a_{31} & \frac{a_{32}}{2} \\ \frac{a_{22}}{2} & a_{23} & \frac{a_{32}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & 0 \\ \varepsilon_{2,t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{1,t-1} \\ 0 & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \\
&+ E\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} & b_{21} & \frac{b_{22}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & b_{13} & \frac{b_{22}}{2} & b_{23} \\ b_{21} & \frac{b_{22}}{2} & b_{31} & \frac{b_{32}}{2} \\ \frac{b_{22}}{2} & b_{23} & \frac{b_{32}}{2} & b_{33} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & 0 \\ \varepsilon_{2,t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{1,t-1} \\ 0 & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \middle| \underline{\varepsilon_{t-2}} \right].
\end{aligned}$$

3.2. Modely s obmedzeniami

Rozšírenie jednorozmerných modelov ARMA na ich mnohorozmernú variantu GARCH spôsobilo rozšírenie pôvodného počtu parametrov, čo predznamenáva určité problémy pri práci s týmito modelmi, v prípade, ak by sa nezaviedli dodatočné obmedzenia.

V tejto časti sa zameráme na také obmedzenia, ktoré by mali navyše byť kompatibilné s podmienkami kladnosti a mali by uľahčovať prácu s odhadovými procedúrami.

Z tohto dôvodu sa javí ako užitočné obmedziť sa na pozitívne definitné matice a prijať dodatočné podmienky znižujúce dimenziu.

Jedná sa o modely:

- (1) diagonálny model
- (2) model s konštantnými koreláciami

Uvažujme $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$ n -rozmerný proces, ktorý je možné napísať v tvare mnohorozmerného GARCH procesu

$$\varepsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} \xi_t,$$

kde H_t predstavuje kovariančnú maticu obsahujúcu hodnoty do času $t-1$, a matica ξ_t má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a kovariančnou maticou rovnou jednotkovej matici. Maticu H_t je tiež možné analogicky prepísať podľa vzorca (13). Odmocninu z matice H_t dostaneme pokiaľ nájdeme diagonálnu maticu D a maticu C , tak aby platilo $H_t = CDC^{-1}$. Potom platí $\sqrt{H_t} = C\sqrt{D}C^{-1}$. Spoločným znakom prístupov (1) a (2) je vyjadrenie diagonálnych prvkov v kovariančnej matici H_t vzorcom:

$$h_{ii,t} = c_{ii} + a_i \varepsilon_{i,t-1}^2 + b_i h_{ii,t-1}, i = 1, \dots, N.$$

Odlisujú sa v prístupe k prvkom ležiacim mimo diagonálu.

V modele s konštantnými koreláciami bol navrhnutý prístup

$$h_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{h_{ii} h_{jj}}, i, j = 1, \dots, N.$$

Pre diagonálny model uvažujeme zápis

$$h_{ij,t} = c_{ij} + a_{ij} \varepsilon_{i,t-1} \varepsilon_{j,t-1} + b_{ij} h_{ij,t-1}, i, j = 1, \dots, N.$$

Keď teraz porovnáme počet parametrov pre GARCH(1,1) s $N = 2, p = 1, q = 1$ dostávame podľa vzorca $\frac{n(n+1)}{2} + (p+q)[\frac{n(n+1)}{2}]^2$ pre pôvodnú verziu 21 parametrov oproti 7 parametrov pre model s konštantnými koreláciami a 9 parametrov pre diagonálny model.

Pozitívna definitnosť matice H_t je pre model s konštantnými koreláciami zaručená podmienkou $|\rho_{ij}| < 1$, pre diagonálny model je táto podmienka zložitejšia.

3.2.1. Diagonálne modely.

Predpokladajme, že prvok podmienenej variančnej matice s indexmi (k, l) závisí len na oneskorených hodnotách v indexoch obsahujúcich k a l , tj. $h_{kl,t-i}, \varepsilon_{k,t-i}, \varepsilon_{l,t-i}$. Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou pre vzťah (13)

$$\underline{A}_i \text{ a } \underline{B}_i \text{ sú diagonálne.}$$

Nedostatky takejto formulácie sa prejavujú v nasledujúcom príklade:

- (1) Uvažujme, že pozorované rady sú výnosy z určitých aktív, ktorých rozptyly a kovariancie popisujeme dvojrozmerným modelom

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11,t} = c_{11} + b_{11} h_{11,t-1}, \\ h_{21,t} = c_{21} + b_{21} h_{21,t-1}, \\ h_{22,t} = c_{22} + b_{22} h_{22,t-1}. \end{array} \right.$$

Nech $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ sú podiely 1. a 2. aktíva v portfóliu.

Rozptyl výnosov portfólia je

$$\begin{aligned} h_{\alpha,t} &= \alpha_1^2 h_{11,t} + \alpha_2^2 h_{22,t} + 2\alpha_1\alpha_2 h_{12,t} \\ &= \alpha_1^2 c_{11} + \alpha_2^2 c_{22} + 2\alpha_1\alpha_2 c_{12} + \alpha_1^2 b_1 h_{11,t-1} + \alpha_2^2 b_2 h_{22,t-1} + 2\alpha_1\alpha_2 b_{12} h_{12,t-1}, \end{aligned}$$

čo znamená, že $h_{\alpha,t}$ nemôže byť zapísaná vo forme

$$h_{\alpha,t} = c_\alpha + b_\alpha h_{\alpha,t-1}.$$

- (2) Obmedzenie na diagonálne matice $\underline{A}_i, \underline{B}_i$ neimplikuje podmienku kladnosti, tj. symetrickosť a pozitívnu semidefinitnosť matíc. V tomto prípade ide o maticu \underline{A}_1 . Dokazuje to nasledujúci príklad.

$$H_t = C + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \frac{a_{22}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a_{22}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{a_{22}}{2} & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & 0 \\ \varepsilon_{2,t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{1,t-1} \\ 0 & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

čo po roznásobení dáva

$$\begin{cases} h_{11,t} = c_{11} + a_{11}\varepsilon_{1,t-1}^2, \\ h_{21,t} = c_{21} + a_{22}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1}, \\ h_{22,t} = c_{22} + a_{33}\varepsilon_{2,t-1}^2. \end{cases}$$

Podmienka kladnosti je splnená ak sú hlavné minory matice ≥ 0

$$a_{11} \geq 0, \quad -a_{11}\frac{a_{22}^2}{2} \geq 0, \quad \left(\frac{a_{22}}{2}\right)^4 - a_{11}a_{33}\frac{a_{22}^2}{2} \geq 0.$$

Ak sú a_{11}, a_{33} kladné, potom musí byť $a_{22} = 0$, takže nie je možné popísať vyššie uvedeným modelom správanie rozptylu a kovariancie pri splnení podmienky kladnosti.

3.2.2. Modely s konštantnými podmienenými koreláciami.

Tieto modely sa vyznačujú podmienenými koreláciami nezávislými na čase. Podrobnejšie boli spracované Bollerslevom v článku [2]. Ukážme si takýto prístup názorne na GARCH(1,1) modely.

$$\begin{cases} h_{ii,t} = c_{ii} + a_{ii}\varepsilon_{i,t-1}^2 + b_{ii}h_{ii,t-1}, \\ h_{ij,t} = \rho_{ij}h_{ii,t}^{1/2}h_{jj,t}^{1/2}, i \neq j. \end{cases}$$

Pre podmienenú variančnú maticu platí

$$H_t = \text{diag}(h_{ii,t}^{1/2})R \text{diag}(h_{ii,t}^{1/2}),$$

kde R predstavuje korelačnú maticu s prvkami $\rho_{ij} = \text{cor}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt})$ pre $i, j = 1, \dots, n$.

Maticu H_t je možné upraviť normovaním prvkov $h_{ii,t}, \rho_{ij}$ pomocou vhodných konštánt. Týmto spôsobom dostávame maticu D_t s prvkami $d_{ii,t} = h_{ii,t}/c_{ii}$ a maticu Γ s prvkami $\gamma_{ij} = \rho_{ij}c_{ii}^{1/2}c_{jj}^{1/2}$ a je možné písať

$$\begin{aligned} H_t &= \text{diag}(d_{ii,t}^{1/2})\Gamma \text{diag}(d_{ii,t}^{1/2}) \\ &= D_t\Gamma D_t \end{aligned}$$

Podmienka kladnosti je splnená ak prvky rozptylu $h_{ii,t}$ (resp. $d_{ii,t}$) sú kladné a matica R (resp. Γ) je pozitívne definitná. Uvedený rozklad sa vyplatí pri riešení optimalizačného problému, pri konštrukcii maximálne vierohodných odhadov.

Definovanie takýchto modelov má význam vo finančnej analýze pokiaľ uvažujeme napríklad korelované výnosy z cenných papierov.

3.2.3. BEKK model.

Software XploRe pracuje v [6] s BEKK modelom pre proces GARCH(p, q), ktorý umožňuje bohatšiu dynamickú štruktúru v porovnaní s oboma vyššie uvedenými modelmi. Odhady sú konštruované metódou maximálnej vierohodnosti. V BEKK modely je implementovaný BHHH algoritmus pre odhad parametrov.

Kovariančná matica je tvaru

$$H_t = C_0' C_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \underline{A}_{ik}' \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' \underline{A}_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p \underline{B}_{ik}' H_{t-i} \underline{B}_{ik} \quad (17)$$

kde C_0 je vrchná trojúholníková matica.

Pre matice $\underline{A}_{ik}, \underline{B}_{ik}$ nie je stanovená podmienka diagonality matíc, čo umožňuje pracovať aj s mimodiagonálnymi prvkami podmienených kovariancií. Parameter K určuje stupeň zložitosti modelu.

Keďže na pravej strane v definícii BEKK modelu vystupujú iba kvadratické členy, matica H_t je pozitívne definitná za podmienky, že aspoň jedna z matíc C_0, \underline{B}_{ik} má plnú hodnotu.

3.2.4. Factor ARCH modely.

Tieto modely boli navrhnuté matematikmi Dieboldom a Nerlovom v práci [4]. Vyznačujú sa vlastnosťou, že každá zložka náhodného procesu ε_t je lineárnou funkciou heteroskedastického procesu nazývaného *faktor* a chybového procesu.

V prípade jednofaktorového modelu (tj. príslušný faktor F_t je reprezentovaný maticou 1×1) dostávame

$$\varepsilon_t = \lambda \cdot F_t + e_t$$

Vektorovo

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{t,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} F_t + \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

kde λ je vektor parametrov, ukazujúci citlivosť procesu ε_t na faktor F_t . Predpokladáme, že procesy ε_t a F_t sú nezávislé a že,

$$F_t | \underline{F}_{t-1} \sim N[0, \sigma_t^2], \text{ kde } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i F_{t-i}^2,$$

$$E(e_t | e_{t-1}) = 0, \quad V(e_t | e_{t-1}) = \Omega.$$

Podmienená variančná matica procesu ε_t má tvar

$$H_t = \sigma_t^2 \lambda \lambda' + \Omega.$$

Zovšeobecnením na K -faktorový model (tzn. rozšírením F_t na vektor $(K \times 1)$ a λ z vektora $(n \times 1)$ na maticu $(n \times K)$) a predpokladom nenulovej podmienenej strednej hodnoty faktorov dostaneme

$$\varepsilon_t = \lambda \cdot F_t + e_t,$$

kde podmienené rozdelenie nezávislých procesov F_t, e_t je tvaru

$$F_t | \underline{F}_{t-1} \sim N[\mu_t, \Sigma_t],$$

$$e_t | \underline{e}_{t-1} \sim N[0, \Omega].$$

Pre podmienené rozdelenie procesu ε_t platí

$$\varepsilon_t | F_{t-1}, e_{t-1} \sim N[\lambda \mu_t, \lambda \Sigma_t \lambda' + \Omega].$$

KAPITOLA 4

Odhady

4.1. Pseudo metóda maximálnej vierohodnosti

V druhej kapitole boli podrobnejšie rozobrané odhady a testy pre jednozmerné modely. V tejto kapitole budeme skúmať mnohorozmerné modely. Zavedieme si odhadové procedúry pre podmienený rozptyl a strednú hodnotu za predpokladu normality. PML metóda bude použiteľná aj v prípade, že skutočné rozdelenie nie je normálne.

Uvažujme dva všeobecné mnohorozmerné procesy Y_t, Z_t pre $t = 1, 2, \dots$ a označme $I_{t-1} = (Z_t, Y_{t-1}, Z_{t-1}, Y_{t-1}, \dots, Y_1, Z_1)$,

$$\begin{aligned} E(Y_t|I_{t-1}) &= m_t(I_{t-1}, \theta) = m_t(\theta), \\ V(Y_t|I_{t-1}) &= H_t(I_{t-1}, \theta) = H_t(\theta). \end{aligned}$$

Napriek faktu, že podmienené rozdelenie nemusí byť normálne, môžeme skonštruovať príslušnú vierohodnostnú funkciu:

$$\log L_T(\theta) = \log \prod_{t=1}^T l_t(\theta),$$

kde

$$\begin{aligned} \log l_t(\theta) &= -\frac{1}{2} \log \det H_t(\theta) - \frac{1}{2} [Y_t - m_t(\theta)]' H_t^{-1}(\theta) [Y_t - m_t(\theta)] \\ &= -\frac{1}{2} \log \det H_t(\theta) - \frac{1}{2} \varepsilon_t(\theta)' H_t^{-1}(\theta) \varepsilon_t(\theta) \end{aligned}$$

použijúc zápis $\varepsilon_t(\theta) = Y_t - m_t(\theta)$.

Odhad parametru dostaneme maximalizáciou $\log L_T(\theta)$, tj. vyriešime rovnicu obsahujúcu derivácie prvého rádu tak, že ju položíme rovnú nule.

$$\frac{\partial \log L_T(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log l_t(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta} = 0.$$

Vzhľadom k faktu, že parciálne derivácie v mnohoromernom prípade majú zložitejší tvar ako ich jednorozmerná varianta, bude nutné si zaviesť značenie:

Nech $A(\theta)$ je matica typu (n, m) a $\text{vech}A(\theta)$ predstavuje vektor $(nm, 1)$, ktorý vznikol zapísaním stĺpcov pod seba.

Nech je daný p -rozmerný vektor θ . Potom $\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_i}$ predstavuje maticu (n, m) , ktorej prvky sú derivácie prvkov $A(\theta)$.

Derivácie $A(\theta)$ podľa vektoru θ predstavujú maticu (nm, p)

$$\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} = [\text{vech} \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \text{vech} \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_p}].$$

Teraz už môžeme vyjadriť parciálnu deriváciu funkcie $\log l_t(\theta)$ ako

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log l_t(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} m_t(\theta)' H_t^{-1}(\theta) \varepsilon_t(\theta) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} H_t(\theta)' [H_t^{-1}(\theta) \otimes H_t^{-1}(\theta)] \text{vech}[\varepsilon_t(\theta) \varepsilon_t(\theta)' - H_t(\theta)]. \end{aligned}$$

4.2. Asymptotické vlastnosti odhadu

Vlastnosti odhadu závisia na skutočnej hodnote θ_0 .

Máme

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t(\theta_0) | I_{t-1}) = 0, \\ V([\varepsilon_t(\theta_0) \varepsilon_t(\theta_0)' - H_t(\theta_0)] | I_{t-1}) = 0, \end{cases}$$

pričom platí

$$E\left(\frac{\partial \log l_t(\theta_0)}{\partial \theta} | I_{t-1}\right) = 0 \quad \forall t.$$

V prípade, že sú splnené dodatočné podmienky regularity uvedené v [5], existuje maximálne vierohodný odhad, ktorý je asymptoticky normálny.

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) \rightarrow N[0, \Omega_0],$$

kde $\Omega_0 = A_0^{-1} B_0 A_0^{-1}$,

$$\begin{aligned} A_0 &= E_{\theta_0} \left(-\frac{\partial^2 \log l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \\ B_0 &= E_{\theta_0} \left(\frac{\partial \log l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial \log l_t(\theta_0)}{\partial \theta'} \right) \end{aligned}$$

Matice A_0 a B_0 odhadujeme podľa vzorcov

$$\begin{aligned}\hat{A}_T &= -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 \log l_t(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta \partial \theta'}, \\ \hat{B}_T &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log l_t(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta} \frac{\partial \log l_t(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta'}.\end{aligned}$$

Maticu A_0 je možné ekvivalentne prepísať v tvare

$$\begin{aligned}A_0 &= E_{\theta_0} \left(-\frac{\partial^2 \log l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \\ &= E_{\theta_0} E_{\theta_0} \left(-\frac{\partial^2 \log l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \middle| I_{t-1} \right)\end{aligned}$$

Na základe tohto vyjadrenia môžeme opäť použiť odhad $\hat{\theta}_T$ a vyjadriť A_0 v tvare:

$$\bar{A}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T a_t(\hat{\theta}_T),$$

kde

$$a_t(\theta_0) = E_{\theta_0} \left(-\frac{\partial^2 \log l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \middle| I_{t-1} \right).$$

Výhodou tohto vyjadrenia odhadu, je fakt, že na výpočet nám stačia iba prvé derivácie na rozdiel od pôvodných druhých derivácií.

$$\begin{aligned}a_t(\theta_0) &= \frac{\partial m_t(\theta_0)'}{\partial \theta} H_t^{-1}(\theta_0) \frac{\partial m_t(\theta_0)}{\partial \theta} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} H_t(\theta_0)' [H_t^{-1}(\theta_0) \otimes H_t^{-1}(\theta_0)] \frac{\partial}{\partial \theta} H_t(\theta_0).\end{aligned}$$

4.3. Odhad modelu s konštantnými podmienenými koreláciami

V kapitole 3.2.2 bol definovaný model s konštantnými koreláciami. Normovaná variančná matica má pri vektore θ všetkých parametrov tvar:

$$H_t(\theta) = D_t(\lambda)\Gamma D_t(\lambda),$$

kde parameter λ a parametre obsiahnuté v matici Γ sú navzájom nezávislé. Vierohodnostná funkcia má tvar:

$$\begin{aligned} \log L_T(\theta) &= -\frac{Tn}{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log \det H_t(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Y_t(\theta)' H_t^{-1}(\theta) Y_t(\theta) \\ &= -\frac{Tn}{2\pi} - \frac{T}{2} \log \det \Gamma - \sum_{t=1}^T \log \det D_t(\lambda) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (D_t^{-1}(\lambda) Y_t)' \Gamma (D_t^{-1}(\lambda) Y_t). \end{aligned}$$

Maticu Γ môžeme odhadnúť podľa predpisu

$$\bar{\Gamma}(\lambda) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (D_t^{-1}(\lambda) Y_t)' (D_t^{-1}(\lambda) Y_t)$$

Po dosadení odhadu $\bar{\Gamma}(\lambda)$ do vierohodnostnej funkcie dostávame tvar, ktorý použijeme k odhadu vektora parametrov λ .

$$\begin{aligned} \log \bar{L}_T(\lambda) &= -\frac{Tn}{2} (1 + \log 2\pi - \log T) \\ &\quad - \sum_{t=1}^T \log \det D_t(\lambda) - \frac{T}{2} \log \det \left[\sum_{t=1}^T D_t^{-1}(\lambda) Y_t Y_t' D_t^{-1}(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

4.4. Faktorové modely

Rovnako ako v kapitole 3.2.4 budeme uvažovať proces ARCH(1) spĺňajúci

$$\varepsilon_t = \lambda \cdot F_t + e_t$$

Vektorovo

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{t,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} F_t + \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

Predpokladáme, že procesy ε_t a F_t sú nezávislé a že,

$$\begin{aligned} F_t | \underline{F}_{t-1} &\sim N[0, \sigma_t^2], \text{ kde } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i F_{t-i}^2, \\ E(e_t | \underline{e}_{t-1}) &= 0, \quad V(e_t | \underline{e}_{t-1}) = \Omega. \end{aligned}$$

Vierohodnostná funkcia ako funkcia ε_t, F_t pre $t = 1, \dots, T$ pri známom F_0 má pri využití markovskej vlastnosti tvar

$$\begin{aligned}
 & l(\varepsilon_T, F_T, \dots, \varepsilon_1, F_1 | F_0) \tag{18} \\
 &= \prod_{t=1}^T l(\varepsilon_t, F_t | \underline{\varepsilon_{t-1}}, \underline{F_{t-1}}) \\
 &= \prod_{t=1}^T l(\varepsilon_t, F_t | \varepsilon_{t-1}, F_{t-1}) \\
 &= \prod_{t=1}^T l(\varepsilon_t, | \varepsilon_{t-1}, F_t) l(F_t | \varepsilon_{t-1}, F_{t-1}) \\
 &= \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\det \Omega}} \exp - \frac{1}{2} (\varepsilon_t - \lambda F_t)' \Omega^{-1} (\varepsilon_t - \lambda F_t) \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 F_{t-1}^2}} \exp - \frac{1}{2} \frac{F_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 F_{t-1}^2} \right]
 \end{aligned}$$

Pomocou tohto vyjadrenia je možné vyjadriť vierohodnostnú funkciu pre $\varepsilon_t, t = 1, \dots, T$ ako

$$l(\varepsilon_T, \dots, \varepsilon_1 | F_0) = \int \dots \int l(\varepsilon_T, F_T, \dots, \varepsilon_1, F_1 | F_0) dF_T \dots dF_1.$$

Pre špeciálne prípady, napríklad pokiaľ je proces (ε_t, F_t) gaussovský, je možné uvedený viacnásobný integrál počítať numerickými metódami. Problematika je podrobnejšie popísaná v [1].

Praktická časť

5.1. Súvislosť medzi GARCH a ARMA modelmi

V kapitole 1.2.1 sme zadefinovali GARCH(p, q) model a uviedli, že ide o ARMA($\max(p, q), p$) reprezentáciu štvorca pôvodného procesu ε_t . Tzn., že pri analýze korelačnej a parciálnej korelačnej funkcie na štvorci procesu môžeme aplikovať postup ako pri ARMA modeloch.

Analogicky funguje súvislosť medzi ARCH(q) a AR(q) modelmi.

Identifikácia Úlohou identifikácie je rozhodnúť aký typ modelu vybrať a explicitne určiť rád modelu. Tejto fáze by malo predchádzať zabezpečenie stacionarity v strednej hodnote.

Rozhodovacie schéma pre jednorozmerné rady

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ρ_k	neexistuje k_0 , ρ_k v tvare U	$k_0 = q$	neexistuje k_0 , ρ_k v tvare U po prvých $q-p$ hodnotách
ρ_{kk}	$k_0 = p$	neexistuje k_0 , ρ_{kk} obmedzená krivkou v tvare U	neexistuje k_0 , ρ_{kk} obmedzená krivkou v tvare U po prvých $p-q$ hodnotách

Symbol U značí krivku v tvare lineárnej kombinácie klesajúcich geometrických postupností a sínusoid s geometricky klesajúcou amplitúdou. Pre k_0 platí, že pre $|k| > k_0$ je $\rho_k = 0$, resp. $\rho_{kk} = 0$.

Pokiaľ sa nepodarí zvoliť žiadny AR ani MA model, je možné zvoliť nejaký z modelov ARMA a pre tento model previesť odhad parametrov a verifikáciu modelu.

Identifikáciu modelu je tiež možné previesť pomocou rozhodovacích kritérií, ktoré je možné aplikovať na n -rozmerné rady pre $n \geq 1$.

Rozhodovacie kritériá

Akaikeho informačné kritérium (AIC)

$$AIC(p, q) = \log(\det(\hat{\Sigma}_{p,q})) + \frac{2n^2(p+q)}{T},$$

Baysovské informačné kritérium (BIC) tvaru

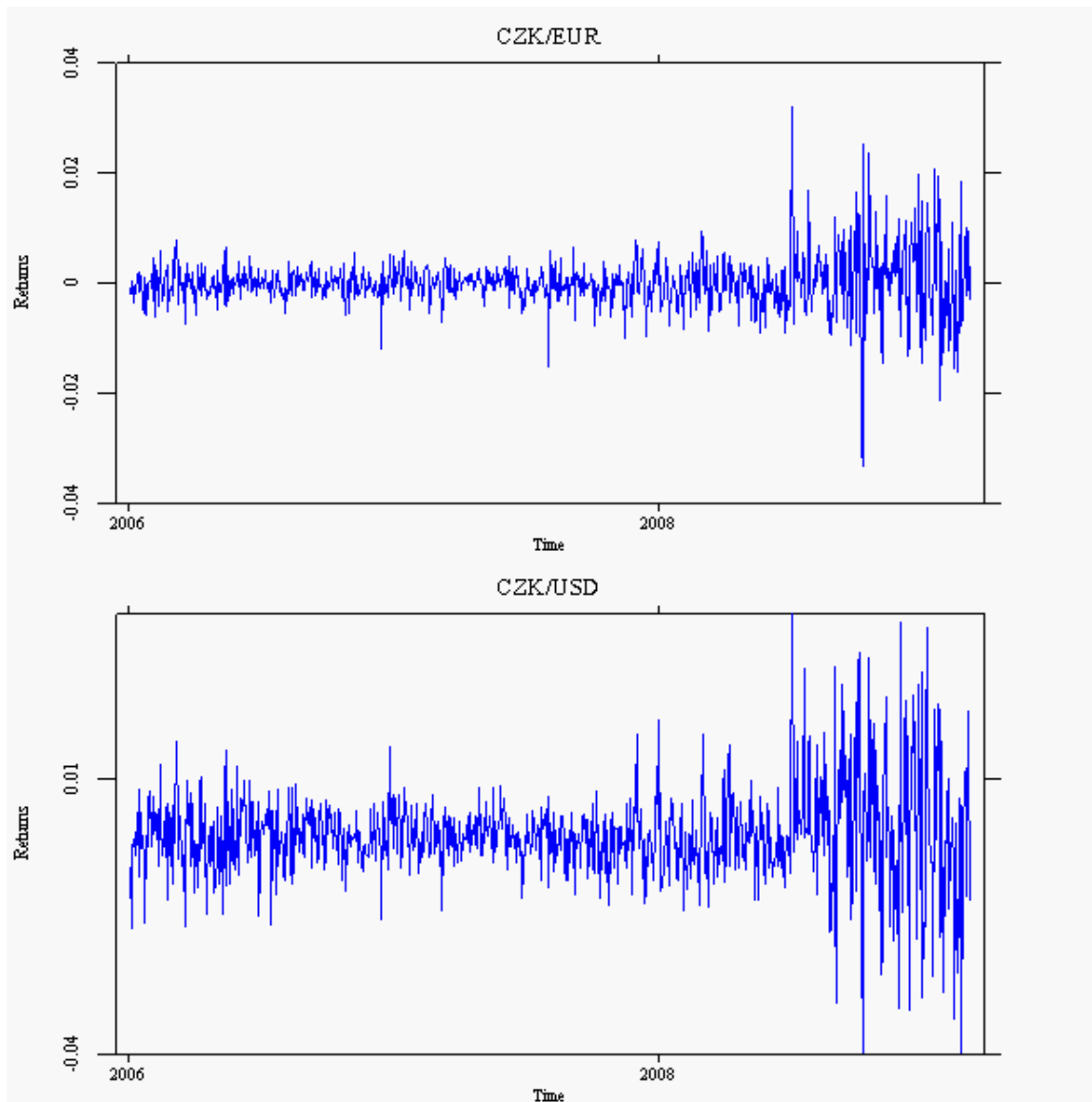
$$BIC(p, q) = \log(\det(\hat{\Sigma}_{p,q})) + 2n^2(p+q) \frac{\log T}{T},$$

kde p a q sú rády modelu, T je dĺžka časovej rady a $\hat{\Sigma}_{p,q}$ príslušný odhad rozptylovej matice bieleho šumu. Za optimálny model je považovaný model s minimálnym AIC (resp. BIC).

5.2. Analýza dvojrozmernej časovej rady

Mnohorozmerné modely GARCH sú vo finančnej praxi pomerne často využívané pre ich schopnosť odhadnúť priebeh volatility a kovariancií. V tejto kapitole sa zameriame na popis menových kurzov CZK/EUR a CZK/USD. Spracovávanie rád bolo realizované programom XploRe.

Uvažujme dvojrozmerné kurzy eura a amerického dolára k českej korune od 1.1.2006 do 31.3.2009, celkovo 817 pozorovaní. Na rady sme previedli úpravu diferencií logaritmov aby sme si zaručili stacionaritu v strednej hodnote.



OBR. 1. Diferencie logaritmov eura a amerického dolára

Základné štatistiky

	Minimum	Maximum	Mean	Median	Std.Error
CZK/EUR	-0.033161	0.031857	-7.2256e-05	-0.0001757	0.005062
CZK/USD	-0.057366	0.043326	-0.00021724	-0.00062705	0.0089942

Vidíme, že stacionarita v strednej hodnote je uspokojujúca, rozptyl vykazuje vyššie kolísanie v priebehu posledných 7 mesiacov.

Výsledok odhadovej procedúry pre dvojrozmerný GARCH(1,1) BEKK model s $K = p = q = 1$ a $N = 2$ dáva podľa (17) 11 členný vektor parametrov pre matice C_0 , \underline{A}_{11} , \underline{B}_{11} . Prvé 3 členy predstavujú hornú trojúholníkovú maticu C_0 .

Maticový prepis odhadového vektora parametrov:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0.00016708 & -0.0011717 \\ 0 & 0.00053855 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0.35914 & -0.13071 \\ 0.071529 & 0.12476 \end{pmatrix}$$

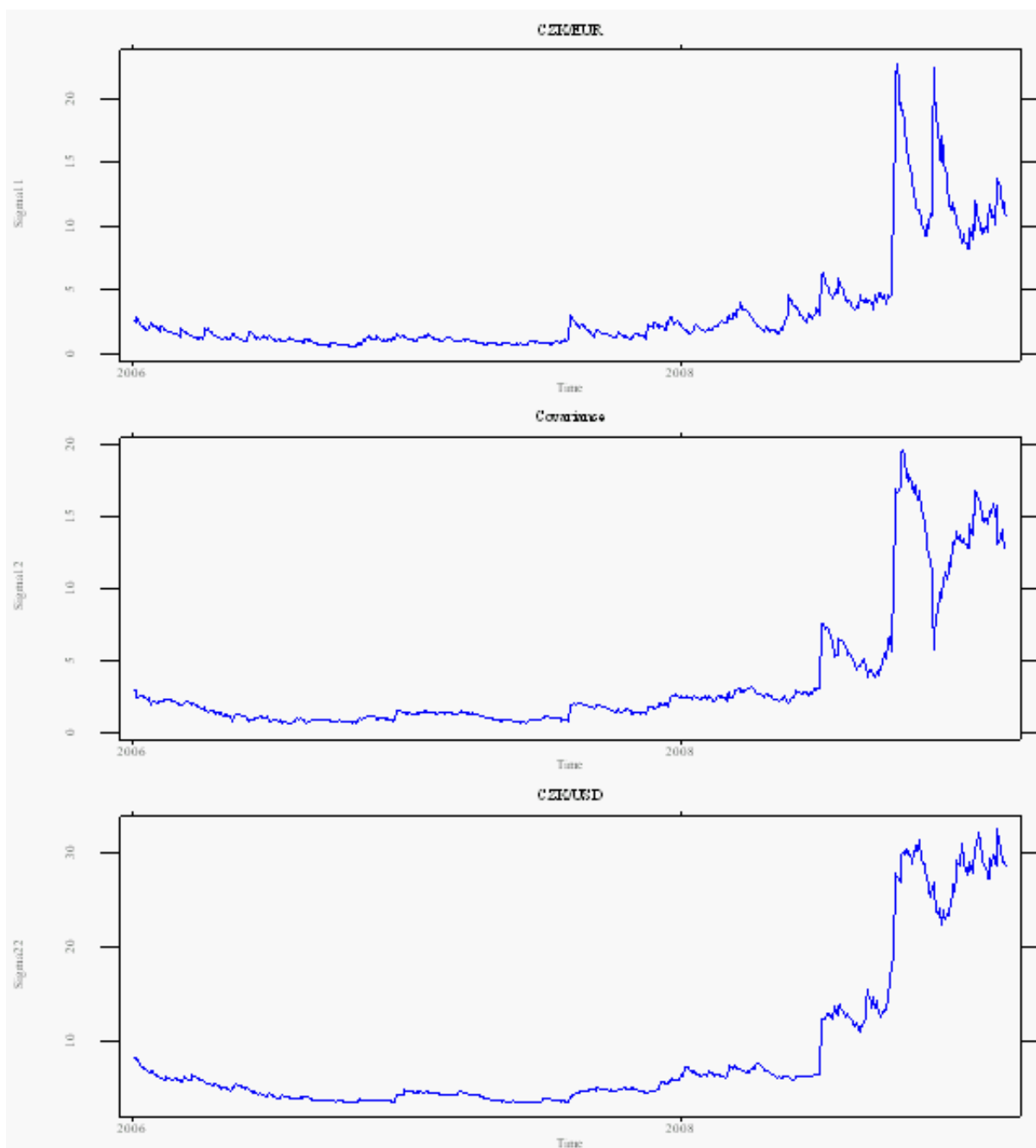
$$\underline{B}_{11} = \begin{pmatrix} 0.95218 & 0.016448 \\ 0.054705 & 0.9576 \end{pmatrix}$$

Odhad kovariančnej matice prebieha sekvenčne, tj. najskôr sa vypočíta kovariančná matica $H_0 = \frac{E'E}{T}$ a následne prebehne výpočet H_t podľa vzorca (17) s využitím už odhadnutých matíc C_0 , \underline{A}_{11} , \underline{B}_{11} . E predstavuje vektor o rozmeroch $T \times 2$ obsahujúci diferencie logaritmov menových kurzov.

Na obrázku 2 je zakreslená závislosť prvkov $h_{ij,t}$, $i, j = 1, 2$ kovariančnej matice \hat{H}_t na čase t .

Horný graf ukazuje vývoj $h_{11,t}$, tj. vývoj odhadnutého rozptylu kurzu CZK/EUR v čase, v prostrednom grafe je zachytený vývoj odhadnutej kovariancie kurzov CZK/EUR a CZK/USD, dolný graf predstavuje odhadnutý rozptyl kurzu CZK/USD.

Z grafov vidíme, že kovariancia nadobúda kladných hodnôt a kopíruje priebeh rozptylových funkcií, tj. pozorujeme závislosť mimodiagonálnych prvkov na diagonálnych rozptylových prvkoch v kovariančnej matici. Ide o často pozorovaný jav pri skúmaní finančných dát.



OBR. 2. Odhad rozptylu a kovariancie menových kurzov, $10^5 \hat{H}_t$

5.2.1. Určovanie vhodnosti modelu.

Na základe predchádzajúcich výpočtov boli pre dvojrozmernú radu menových kurzov určené matice parametrov C_0, A_{11}, B_{11} a ich kovariančná matica H_t . V tejto časti porovnáme simulácie pre GARCH model za jednorozmerných a dvojrozmerných predpokladov, pričom hustoty sú škálované tak, aby mali v oboch prípadoch rovnaký rozpyl. Za lepší model považujeme ten, v ktorom nadobúda odhadnutá hustota väčšej hodnoty na pozorovaných menových kurzoch. Uvažujeme simulácie predpovedí na 5 dní dopredu.

Simulujú sa dve dvojrozmerné systavy menových kurzov. Prvý súbor sa riadi dvojrozmerným modelom GARCH(1,1), v druhom súbore sa každá zložka riadi jednorozmerným GARCH(1,1). V oboch súboroch je odhadnutá združená dvojrozmerná hustota podľa postupu popísanom v článku [8].

Modely porovnáваме prostredníctvom *success ratio*

$$SR_J = \frac{1}{K} \sum_{t \in J} \mathbf{Ind}[\hat{f}_{biv}(R_{t+5}) > \hat{f}_{uni}(R_{t+5})],$$

kde K predstavuje počet simulácií, $J = \{t : t = 1, \dots, T-5\}$, $\hat{f}_{biv}(R_{t+5})$ a $\hat{f}_{uni}(R_{t+5})$ sú odhadnuté hustoty budúcich kurzov v simulovaných dvojrozmerných a jednorozmerných procesoch GARCH s parametrami odhadnutými v predchádzajúcej kapitole. T predstavuje počet pozorovaní, R_{t+5} sú pozorované menové kurzy v časoch $t = 6, \dots, T$.

Hodnota SR_J udáva, do akej miery je dvojrozmerný GARCH lepší ako GARCH model založený na jednorozmerných predpokladoch.

V XploRe je naimplementovaná procedúra na výpočet SR_J , ktorá využíva ako vstupné parametre hodnoty (*replikácia, simulácia*), kde parameter *replikácia* udáva počet replikácií pre každú simuláciu. Každéj simulácii prislúcha jedno SR_J . Pri každej simulácii sa nageruje počet kovariančných matíc pre jednorozmerný a dvojrozmerný prípad, ktorý je určený parametrom *replikácia*. Odhadnú sa hodnoty a následne sú porovnávané výsledky na základe jednorozmerných a dvojrozmerných predpokladov, tj. je vypočítané SR_J .

Pre hodnoty parametrov (*replikácia, simulácia*) (1000,50) vychádza $SR_J = 74\%$, standard error je 0.062032. Výsledok teda svedčí v prospech dvojrozmerného modelu, keďže v 74% prípadov vykázal lepšiu aproximáciu.

V prípade hodnôt (3000,100) je $SR_J = 86\%$ a standard error 0.034699.

Standard error je definovaný ako

$$\sqrt{\frac{SR_J(1 - SR_J)}{100}}$$

5.3. Analýza jednorozmerných rád

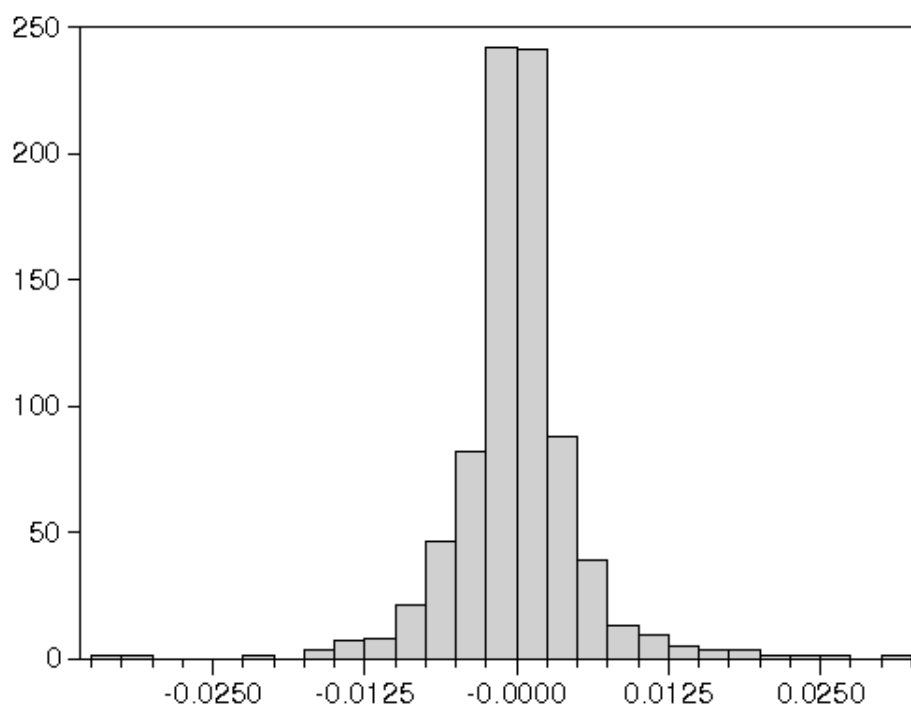
Pre určenie rádu skúmanej jednorozmernej rady je dobré poznať štruktúru autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie pre pôvodnú centrovanú radu a pre jej štvorec. Následne odhadneme model na základe rozhodovacieho schématu s využitím poznatku, že $\text{GARCH}(p,q)$ je $\text{ARMA}(\text{Max}(p,q),p)$ reprezentácia štvorcového procesu.

5.3.1. Rada eurových kurzov.

Z priebehu autokorelačného a parciálneho autokorelačného grafu pre štvorec procesu ε_t je zrejmé, že pôjde o model GARCH, keďže pre krivky nie je možné podľa rozhodovacieho kritéria nájsť príslušnú konštantu k_0 .

Na radu sa ďalej aplikovala procedúra *archest* programu XploRe, ktorá počíta parametre c, α_i, β_j kde $i = 1, \dots, q$ a $j = 1, \dots, p$.

Ako najvhodnejší sa javí model $\text{GARCH}(1,1)$, keďže v prípade modelov $\text{GARCH}(2,1)$ a $\text{GARCH}(2,2)$ bola pozorovaná malá významnosť u parametru prislúhajúcemu členu ε_{t-2} , tj. výsledky naznačujú postačiteľnosť už pre rád $p = 1$.



OBR. 3. Histogram diferencií logaritmov pôvodnej rady

Výsledky pre model GARCH(1,1) podľa XploRe

parameter	hodnoty
c	0,0010407
α_1	0,061353
β_1	0,93861

Vzhľadom k Vete 1.1 sa jedná o takmer nestacionárny model, $\alpha_1 + \beta_1 = 0,999963$. Po prevedení procedúry na odhad parametrov, je možné spraviť test homoskedasticity príkazom *archtest*.

Z kapitoly 2.1.4 vieme, že hypotézu homoskedasticity zamietame ak štatistika

$$\xi_{LM} \geq \chi_{95\%}^2(r)$$

kde r predstavuje počet stupňov voľnosti.

Výstup zo softvéru XploRe

Lag r	Statistic	95% Critical Value	P-Value
1	95.24989	3.84146	0.00000
2	115.65933	5.99146	0.00000
3	147.42296	7.81473	0.00000

Zamietame nulovú hypotézu pre model GARCH(1,1).

Výsledky pre model GARCH(2,1)

parameter	hodnoty
c	0,00186
α_1	0,083774
α_2	0,00024548
β_1	0,91302

Výsledky pre model GARCH(2,2)

parameter	hodnoty
c	0,0013428
α_1	0,079316
α_2	0,00077332
β_1	0,55913
β_2	0,36069

Test homoskedasticity pre model GARCH(2,1)

Lag r	Statistic	95% Critical Value	P-Value
1	57.34202	3.84146	0.00000
2	111.59424	5.99146	0.00000
3	175.45656	7.81473	0.00000

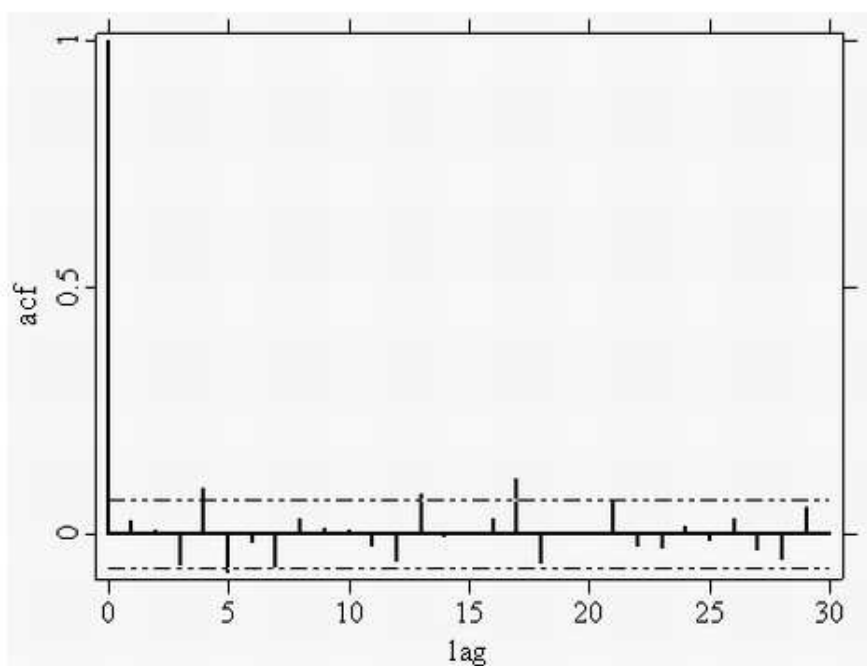
Test homoskedasticity pre model GARCH(2,2)

Lag r	Statistic	95% Critical Value	P-Value
1	34.84584	3.84146	0.00000
2	77.43162	5.99146	0.00000
3	79.08599	7.81473	0.00000

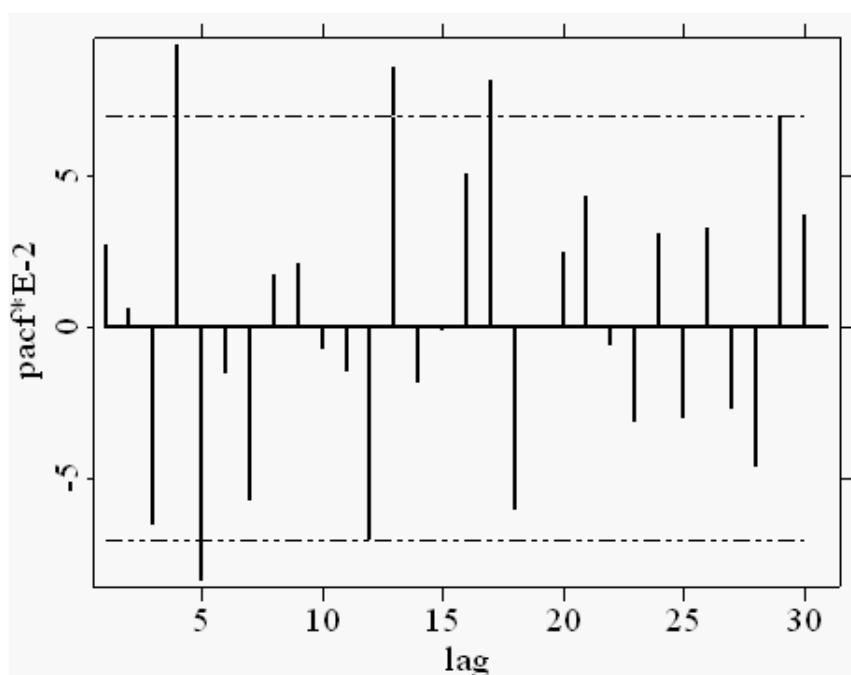
Nulovú hypotézu zamietame pre model GARCH(2,1) aj GARCH(2,2), je teda potvrdená závislosť podmienených rozptylov na čase.

Softwér Eviews pre model GARCH(1,1) udáva Akaikeho informačné kritérium rovné -8,292011. Nepatrne menšie AIC vyšlo v modeli GARCH(1,2), čo je ale zrovnateľné s GARCH(1,1). Hodnoty odhadnutých parametrov modelu v Eviews ukazujú zanedbateľné rozdiely oproti hodnotám parametrov odhadnutých prostredníctvom softvéru XploRe, čo môže byť spôsobené odlišnou implementáciou odhadových procedúr.

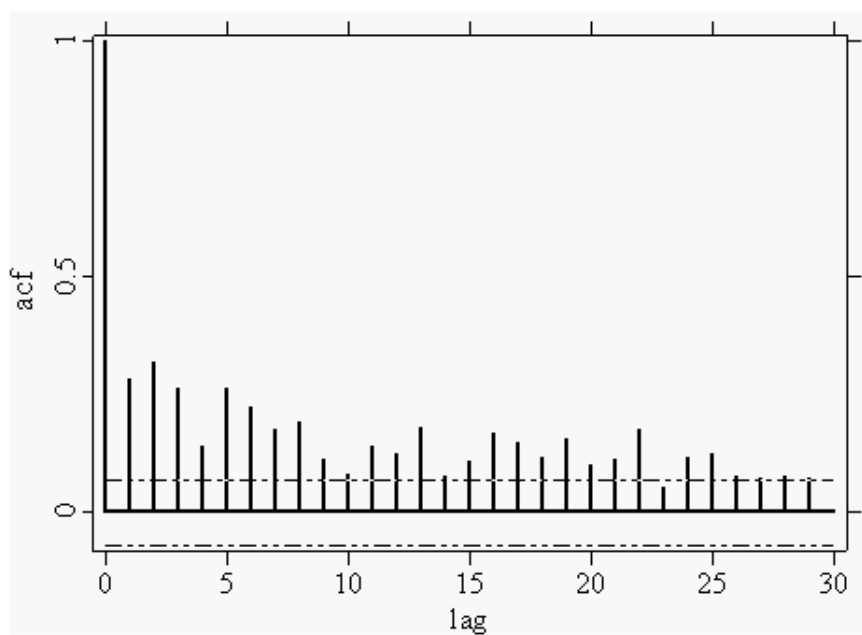
Softwér Eviews poskytuje hodnotu tzv. Durbin-Watsonovej štatistiky. Pokiaľ je hodnota rovná 2, zamietame korelovanosť rezíduí. V prípade GARCH(1,1) modelu je $DW_{stat} = 1,9438$, teda môžeme prehlásiť, že rezídua sú nekorelované.



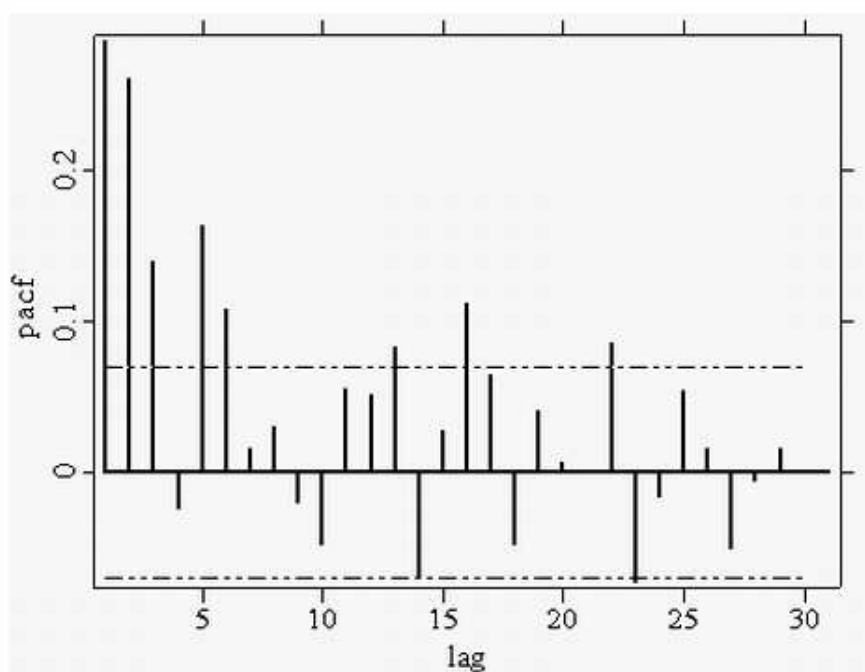
OBR. 4. Autokorelačná funkcia rady CZK/EUR



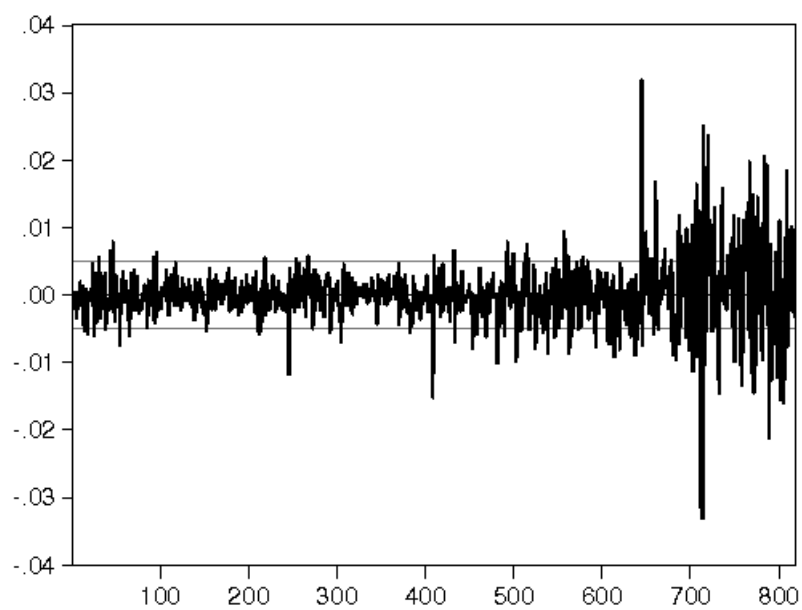
OBR. 5. Parciálna autokorelačná funkcia rady CZK/EUR



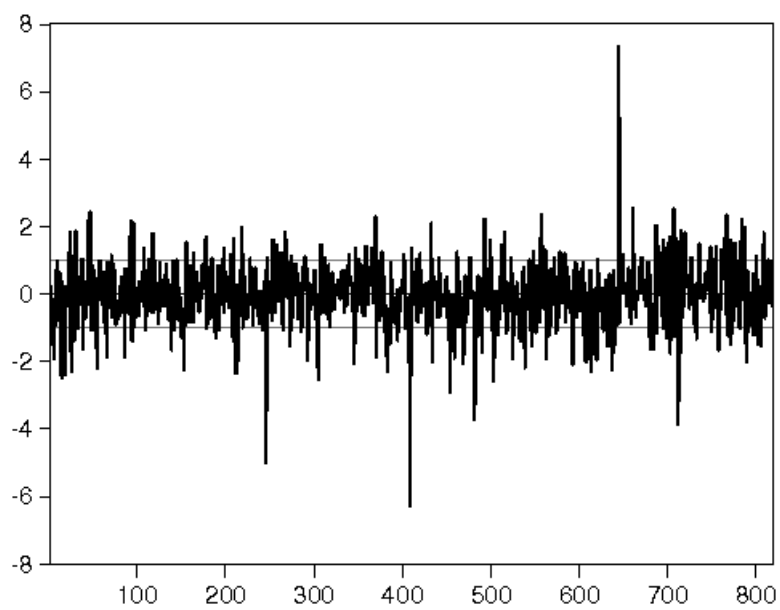
OBR. 6. Autokorelačná funkcia pre štvorce hodnôt CZK/EUR



OBR. 7. Parciálna autokorelačná funkcia pre štvorce hodnôt CZK/EUR



OBR. 8. Graf rezíduí rady CZK/EUR



OBR. 9. Graf štandardizovaných rezíduí rady CZK/EUR

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.036	0.036	1.0703	0.301
		2	-0.003	-0.004	1.0776	0.583
		3	0.019	0.019	1.3670	0.713
		4	0.041	0.039	2.7257	0.605
		5	-0.038	-0.041	3.9418	0.558
		6	-0.016	-0.013	4.1543	0.656
		7	-0.046	-0.047	5.9012	0.551
		8	0.023	0.026	6.3332	0.610
		9	0.021	0.023	6.7120	0.667
		10	-0.019	-0.019	6.9966	0.726
		11	0.006	0.009	7.0245	0.797
		12	-0.012	-0.020	7.1479	0.848
		13	0.055	0.056	9.6289	0.724
		14	0.022	0.019	10.022	0.761
		15	0.017	0.017	10.255	0.803
		16	0.007	0.006	10.290	0.851
		17	0.006	-0.004	10.316	0.890
		18	-0.038	-0.036	11.551	0.870
		19	-0.016	-0.013	11.765	0.895
		20	0.021	0.029	12.140	0.911
		21	0.060	0.061	15.129	0.816
		22	0.021	0.019	15.515	0.839
		23	0.001	-0.002	15.515	0.875
		24	0.013	0.005	15.658	0.900
		25	-0.016	-0.023	15.863	0.919

OBR. 10. Korelogram štandardizovaných rezíduí rady CZK/EUR

V Eviews je naimplementovaná tzv. Ljung-Boxova Q-štatistika, ktorá testuje, či je zadaná rada bielym šumom.

Z obrázku 10 je vidieť, že test nezamietne vhodnosť skonštruovaného modelu, tj. na 5% hladine významnosti nezamietne hypotézu, že reziduálna zložka tvorí biely šum.

Analogický záver spravíme aj pre výsledky z obrázku 11.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.012	0.012	0.1189	0.730
		2	-0.002	-0.002	0.1214	0.941
		3	-0.004	-0.004	0.1343	0.987
		4	-0.019	-0.019	0.4292	0.980
		5	0.022	0.023	0.8335	0.975
		6	-0.024	-0.025	1.3145	0.971
		7	0.024	0.025	1.7946	0.970
		8	-0.004	-0.005	1.8066	0.986
		9	-0.026	-0.025	2.3595	0.984
		10	-0.021	-0.022	2.7334	0.987
		11	-0.005	-0.003	2.7544	0.994
		12	0.007	0.005	2.7919	0.997
		13	-0.001	-0.001	2.7926	0.999
		14	-0.025	-0.025	3.3025	0.998
		15	-0.034	-0.034	4.2575	0.997
		16	0.027	0.029	4.8737	0.996
		17	-0.020	-0.021	5.2043	0.997
		18	-0.018	-0.018	5.4613	0.998
		19	-0.015	-0.017	5.6580	0.999
		20	-0.032	-0.031	6.4943	0.998
		21	0.001	-0.001	6.4956	0.999
		22	-0.011	-0.008	6.5941	0.999
		23	-0.012	-0.016	6.7128	1.000
		24	0.017	0.014	6.9483	1.000
		25	0.046	0.047	8.7215	0.999

OBR. 11. Korelogram štandardizovaných štvorcov rezíduí

Záver

Ukázalo sa, že pre aproximáciu rady eurových kurzov je najvhodnejší model GARCH(1,1). Tento model sa javí ako postačiteľný v porovnaní s modelmi vyšších rádov.

5.3.2. Rada dolárových kurzov.

Priebeh autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie dolára vykazuje podobné rysy ako v prípade eurových kurzov a teda aplikáciu GARCH modelu na skúmanú radu.

Pôvodnú radu najspoľahlivejšie aproximoval GARCH(1,1) model.

Bola aplikovaná procedúra *archest* na model GARCH(1,1)

parameter	hodnoty
c	0,0012004
α_1	0,034507
β_1	0,96548

Je tesne splnená podmienka stacionarity, $\alpha_1 + \beta_1 = 0.999987$. Pomocou procedúry *archtest* bol prevedený test homoskedasticity. Nulová hypotéza bola zamietnutá keďže platí $\xi_{LM} \geq \chi_{95\%}^2(r)$.

Výstup zo softvéru XploRe

Lag	Statistic	95% Critical Value	P-Value
1	32.53543	3.84146	0.00000
2	58.28202	5.99146	0.00000
3	91.70600	7.81473	0.00000

Výber modelu potvrdil aj softvér Eviews, ktorý pre model GARCH(1,1) dáva najmenšie Akaikeho informačné kritérium, $AIC = -7,065428$.

Hodnota Durbin-Watsonovej štatistiky je $DW_{stat} = 1,8411$, čo je horší výsledok ako v prípade eurového kurzu, no môžeme prehlásiť, že reziduá sú takmer nekorelované.

Výsledky pre model GARCH(2,1)

parameter	hodnoty
c	0,003666
α_1	0,011089
α_2	0,059822
β_1	0,92897

Výsledky pre model GARCH(2,2)

parameter	hodnoty
c	0,002403
α_1	0,0019847
α_2	0,064725
β_1	0,12306
β_2	0,81023

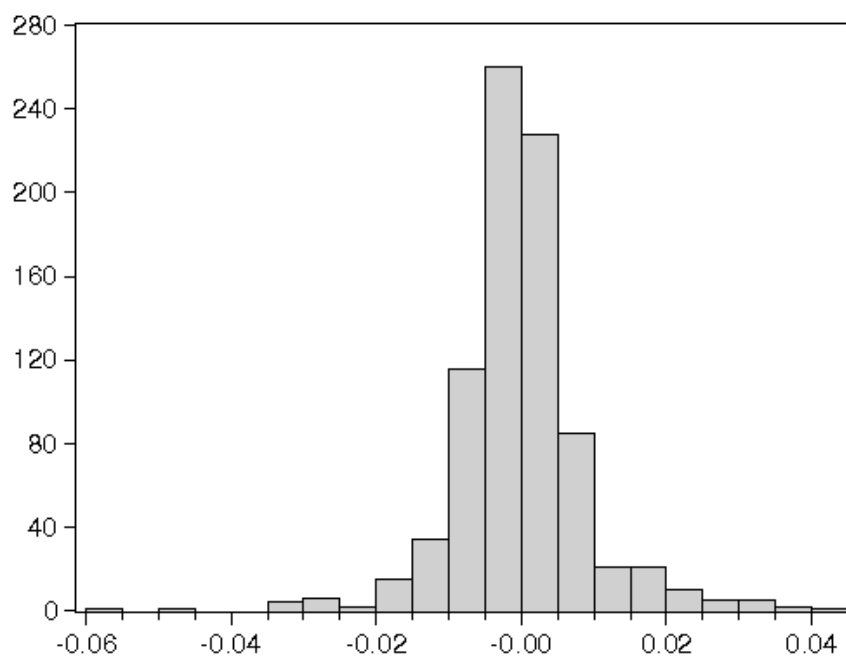
Test homoskedasticity pre model GARCH(2,1)

Lag	Statistic	95% Critical Value	P-Value
1	20.77417	3.84146	0.00000
2	47.00259	5.99146	0.00000
3	53.99079	7.81473	0.00000

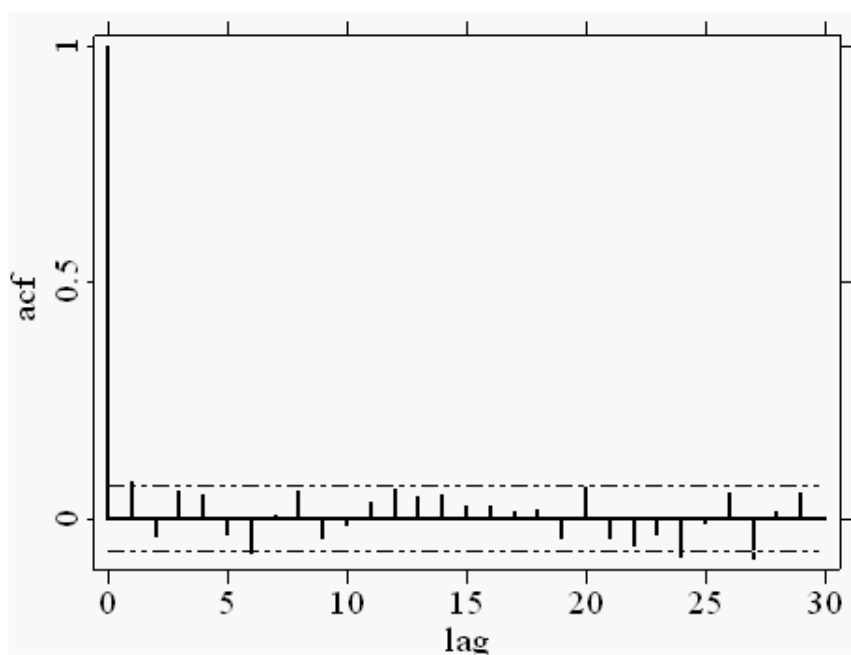
Test homoskedasticity pre model GARCH(2,2)

Lag	Statistic	95% Critical Value	P-Value
1	41.87366	3.84146	0.00000
2	64.32535	5.99146	0.00000
3	79.71874	7.81473	0.00000

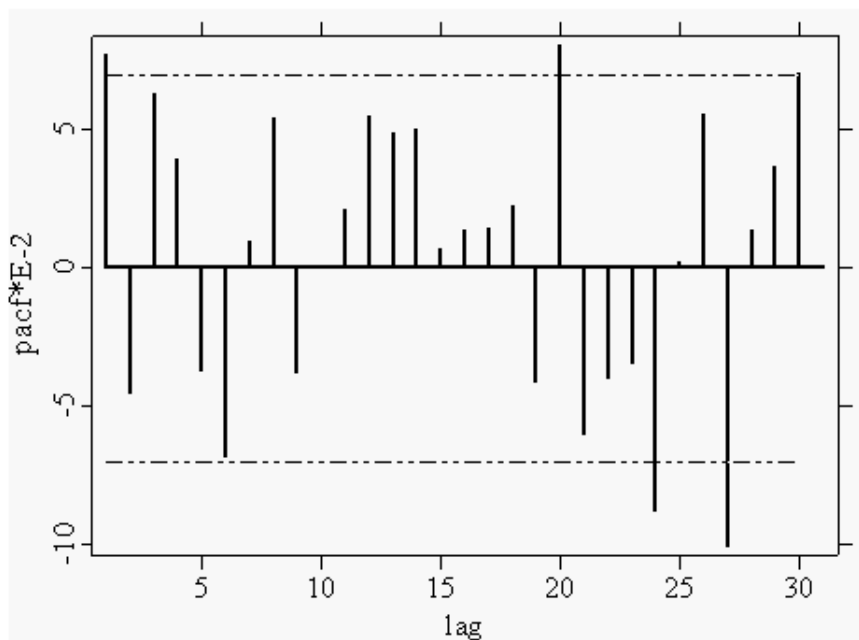
Nulovú hypotézu zamietame pre model GARCH(2,1) a GARCH(2,2).



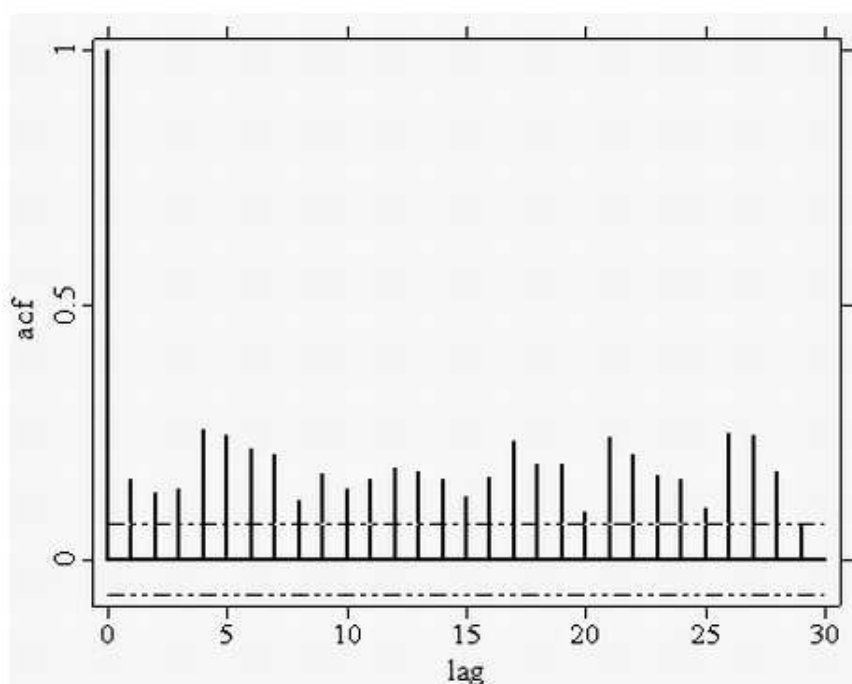
OBR. 12. Histogram diferencií logaritmov pôvodnej rady CZK/USD



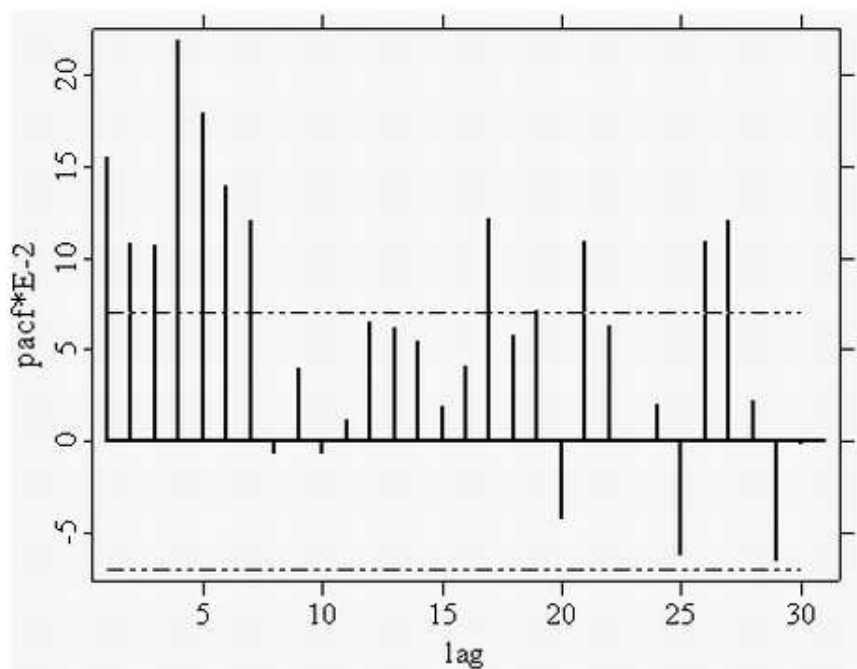
OBR. 13. Autokorelačná funkcia rady CZK/USD



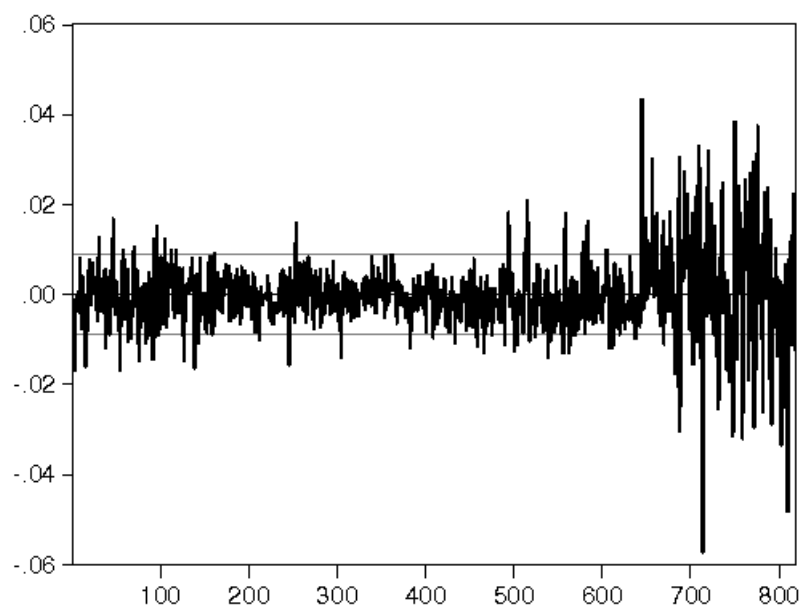
OBR. 14. Parciálna autokorelačná funkcia rady CZK/USD



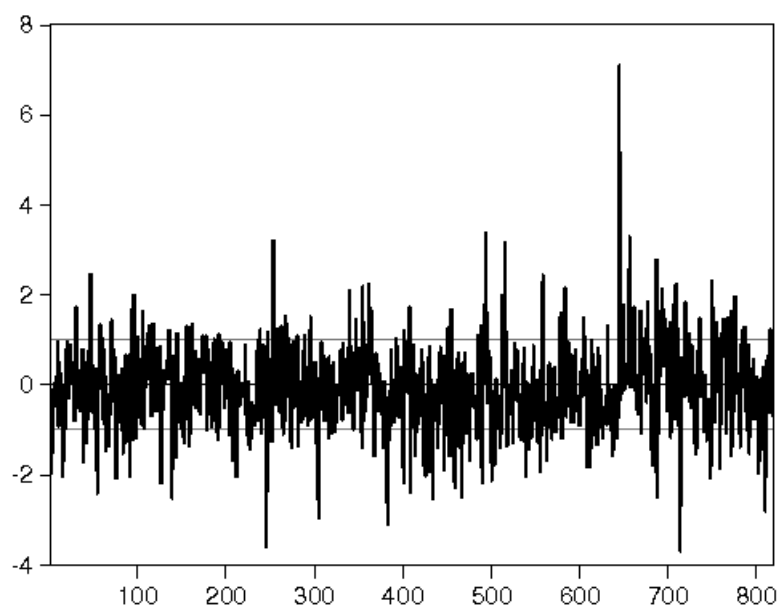
OBR. 15. Autokorelačná funkcia pre štvorce hodnôt rady CZK/USD



OBR. 16. Parciálna autokorelačná funkcia pre štvorce hodnôt rady CZK/USD



OBR. 17. Graf reziduí rady CZK/USD



OBR. 18. Graf štandardizovaných reziduí rady CZK/USD

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.054	0.054	2.4095	0.121
		2	0.019	0.016	2.7069	0.258
		3	0.034	0.032	3.6611	0.300
		4	0.024	0.020	4.1442	0.387
		5	0.020	0.017	4.4897	0.481
		6	-0.007	-0.010	4.5249	0.606
		7	0.007	0.005	4.5608	0.713
		8	0.023	0.021	5.0052	0.757
		9	-0.006	-0.008	5.0309	0.832
		10	-0.010	-0.011	5.1176	0.883
		11	0.034	0.035	6.1042	0.866
		12	0.055	0.052	8.6392	0.733
		13	0.051	0.045	10.789	0.629
		14	0.047	0.040	12.615	0.557
		15	0.017	0.007	12.858	0.613
		16	0.004	-0.006	12.870	0.682
		17	0.005	-0.001	12.888	0.744
		18	0.002	-0.001	12.892	0.798
		19	0.021	0.018	13.266	0.825
		20	0.069	0.067	17.316	0.632
		21	-0.051	-0.059	19.515	0.552
		22	0.027	0.029	20.146	0.574
		23	-0.024	-0.032	20.616	0.605
		24	-0.036	-0.039	21.707	0.597
		25	0.016	0.012	21.918	0.640

OBR. 19. Korelogram štandardizovaných rezíduí rady CZK/USD

Výsledky pre obrázky 19 a 20 pre Ljung-Boxovu Q-štatistiku ukazujú, že test nezamietne vhodnosť skonštruovaného modelu, tj. na 5% hladine významnosti nezamietne hypotézu, že reziduálna zložka tvorí biely šum.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.012	-0.012	0.1102	0.740
		2 -0.025	-0.025	0.6280	0.731
		3 -0.025	-0.025	1.1235	0.771
		4 -0.003	-0.004	1.1296	0.890
		5 0.023	0.021	1.5543	0.907
		6 -0.006	-0.006	1.5861	0.954
		7 0.017	0.018	1.8293	0.969
		8 0.006	0.007	1.8612	0.985
		9 -0.032	-0.031	2.7139	0.975
		10 -0.029	-0.030	3.4287	0.969
		11 -0.038	-0.040	4.6469	0.947
		12 0.107	0.103	14.239	0.286
		13 -0.017	-0.019	14.488	0.340
		14 -0.020	-0.017	14.833	0.390
		15 -0.030	-0.026	15.583	0.410
		16 0.003	0.003	15.589	0.482
		17 0.023	0.018	16.031	0.522
		18 -0.007	-0.006	16.076	0.587
		19 0.008	0.004	16.124	0.649
		20 -0.017	-0.020	16.369	0.694
		21 0.015	0.020	16.558	0.738
		22 0.009	0.013	16.627	0.784
		23 -0.004	0.003	16.640	0.827
		24 0.009	-0.006	16.711	0.861
		25 0.029	0.032	17.431	0.866

OBR. 20. Korelogram štandardizovaných štvorcov rezíduí rady CZK/USD

Záver

Radu kurzu amerického dolára rovnako ako u kurzu eura najlepšie aproximoval model GARCH(1,1). Tento model sa javí ako postačiteľný v porovnaní s modelmi vyšších rádov.

KAPITOLA 6

Záver

Cieľom tejto práce bolo popísať teóriu jednorozmerných a viacrozmerných modelov ARCH a GARCH a aplikovať ju s použitím dostupného softwaru na konkrétne dáta z finančných trhov.

Teoretická časť je rozdelená na jednorozmerné a viacrozmerné modely GARCH, s príslušnou teóriou odhadov a testov. Sú tu tiež spomenuté špeciálne prípady a rozšírenia modelov GARCH.

V praktickej časti sú spracovávané dve časové rady. Ide o rady kurzov eura a amerického dolára porovnávaného vzhľadom k českej korune. Tieto rady sú spracovávané spoločne ako dvojrozmerný model a osobitne v jednorozmerno prípade. Dáta boli spracovávané softwarom XploRe. V jednorozmernom prípade bol navyše využitý software EViews. Dáta boli stiahnuté z webových stránok Českej národnej banky. Použité programy sú priložené na CD.

V súčasnosti je vďaka rozvoju výpočtovej techniky možné na analýzu časových rád použiť aj sofistikovanejšie nelineárne modely GARCH. Tieto boli do praxe zavedené v devädesiatych rokoch. Ich výhodou je najmä presnejšie modelovanie súčasných hodnôt na základe minulých pozorovaní. Nevýhodou môže byť v prípade použitia modelov vyšších rádov ich výpočtová náročnosť.

Literatúra

- [1] Gouriéroux Ch., Marsden J. E.: *ARCH Models and Financial Applications*, Addison-Wesley, Reading, 1985.
- [2] Bollerslev T.: *A Multivariate GARCH Model with Constant Conditional Correlations for a Set of Exchange Rates: Discussion Paper*, 1987.
- [3] Engle R.F.: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation*, *Econometrica*, Praha, 1982.
- [4] Diebold F., Nerlove M.: *The Dynamic of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor ARCH Model*, *Journal of Applied Econometrics*, 1989.
- [5] Crowder M.: *Maximum Likelihood Estimation with Dependent Observations*, *Journal of the Royal Statistical Society*, 1976.
- [6] Härdle W., Kleinow T., Stahl G. *Applied Quantitative Finance*, Springer, Berlin, 2002.
- [7] Cipra T.: *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*, SNTL, Praha, 1986.
- [8] Tay A., Wallis K.: *Density Forecasting*, *Journal of Forecasting*, 2000.