Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Luhan

Spojitá geometrie

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Pavel Růžička, PhD.
Obecná matematika

2009

Děkuji doktoru Růžičkovi za trpělivost a odborné vedení při psaní této práce. Jeho podněty a připomínky byly pro mě velmi cenné. Zároveň mu děkuji také za vypsání zajímavého tématu, jemuž jsem se rád věnoval.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 11. 12. 2009 Martin Luhan

Obsah

Název práce: Spojitá geometrie
Autor: Martin Luhan
Katedra (ústav): Katedra algebry
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Pavel Růžička, PhD.
e-mail vedoucího: Pavel.Ruzicka@mff.cuni.cz

Abstrakt: Předkládaná práce shrnuje základní výsledky o spojitých geometriích, tedy komplementárních modulárních svazech se spojitými operacemi. Studujeme základní vlastnosti těchto struktur, uvádíme konkrétní příklad konstrukce celé třídy spojitých geometrií a zkoumáme jejich isomorfii se svazy hlavních ideálů okruhů.

Speciální pozornost je pak věnována těm spojitým geometriím, jejichž dimenzní funkce má nekonečný obor hodnot. V tomto případě je třeba hledat isomorfní svazy ideálů nad takzvanými regulárními okruhy, čímž se rozšiřuje klasický výsledek pro konečné projektivní geometrie.

Základním pramenem jsou poznámky z přednášek Johna von Neumanna ze třicátých let dvacátého století.

Klíčová slova: komplementární modulární svaz, regulární okruh, souřadnice

Title: Continuous Geometry
Author: Martin Luhan
Department: Department of Algebra
Supervisor: Mgr. Pavel Růžička, PhD.
Supervisor's e-mail address: Pavel.Ruzicka@mff.cuni.cz

Abstract: The present work sums up the fundamental results of the theory of continuous geometries, meaning complemented modular lattices with continuous operations of join and meet. We study the basic characteristics of these structures, we show a specific example of a whole class of continuous geometries and we examine isomorfisms between them and the lattices of principal ideals of some rings.

Especially we focus on those continuous geometries that possess a dimension function with infinite range. In that case we may find the isomorfic lattices of ideals over so-called regular rings by which we extend the classical result for projective geometries.

As the main source we use the lectures given by John von Neumann in 1930s.

Keywords: Complemented Modular Lettice, Regular Ring, Coordinatization

Kapitola 1

Úvod

Spojité geometrie objevil a pojmenoval John von Neumann v roce 1935. První příklad této matematické struktury se vyskytl v jeho práci o okruzích operátorů v Hilbertovském prostoru [11], na níž spolupracoval s F. J. Murrayem. Podrobnějšímu studiu je pak podrobil v letech 1936-1937. Na počátku studia spojité geometrie byl svazově-teoretický pohled na svazy podprostorů projektivní geometrie. Poté co G. Birkhoff charakterizoval projektivní geometrie svazovými axiomy (viz. [1]), přichází von Neumann s axiomatikou pro o něco obecnější strukturu. Poznámky z cyklu von Neumannových přednášek shrnuje kniha Spojitá geometrie [12], páteřní pramen pro tuto práci.

Spojité geometrie se dělí na dva základní typy, z nichž jeden odpovídá právě projektivní geometrii, ten druhý byl však zcela novým objevem, který vzbudil von Neumannův zájem. Jedná se totiž o svaz, na němž je definována dimenzní funkce, jejímž oborem hodnot je kompletní interval (po normalizaci například $[0;1]$).

V úvodní kapitole axiomaticky zavádíme spojitou geometrii jako komplementární modulární a nerozložitelný úplný svaz splňující podmínku spojitosti základních operací. Dále studujeme základní vlastnosti této struktury: nezávislost prvků a množin prvků, perspektivitu a projektivitu prvků. Důležitým výsledkem této části von Neumannových přednášek je důkaz, že perspektivita prvků je ekvivalencí a že se pomocí jejích ekvivalenčních tříd dá zavést na spojité geometrii dimenzní funkce. Podrobně důkaz nereprodukujeme. V další části předvádíme podrobně konstrukci spojité geometrie s nespočetnou dimenzí. V závěrečné kapitole pak formulujeme rozšířenou verzi věty o zavedení souřadnic do geometrií, přičemž se musíme věnovat základům teorie regulárních okruhů.

Kapitola 2

Zavedení spojitých geometrií

2.1 Základy a elementární vlastnosti

Mějme alespoň dvouprvkovou třídu L, jejíž prvky budeme značit $a, b, c, \ldots$.. Na této třídě uvažujme existenci binární relace $<$. Teorii vymezuje šest axiomů.

Axiom 1. *Relace $<$ je uspořádáním na L.*

Axiom 2. *L je úplný svaz.*

Supremum (spojení) množiny $S \subset L$ značíme $\bigvee(S)$. Infimum (průsek) značíme $\bigwedge(S)$. U binárních vztahů budeme používat $a \vee b$, respektive $a \wedge b$.

Definice 2.1.1. Ať Ω je nekonečné číslo. Ať je $(a_\alpha; \alpha < \Omega)$ systém prvků z L splňující

1. $\alpha < \beta \Rightarrow a_\alpha \leq a_\beta$ (neklesající) respektive
2. $\alpha < \beta \Rightarrow a_\alpha \geq a_\beta$ (nerostoucí).

Pak definujeme

$$\lim_{\alpha \to \Omega} a_\alpha := \begin{cases} \bigvee(a_\alpha; \alpha < \Omega) & 1. \\ \bigwedge(a_\alpha; \alpha < \Omega) & 2. \end{cases}$$

Pozorování 1. Ať systém (a_α) splňuje 1 (respektive 2) z 2.1.1. Pak pro každé b také systém $(b \vee a_\alpha)$ splňuje 1 (respektive systém $(b \wedge a_\alpha)$ splňuje 2) a platí

$$\lim_{\alpha \to \Omega} (b \vee a_\alpha) = b \vee \lim_{\alpha \to \Omega} a_\alpha$$

(respektive

$$\lim_{\alpha \to \Omega} (b \wedge a_\alpha) = b \wedge \lim_{\alpha \to \Omega} a_\alpha$$

).

Axiom 3. *Spojitost spojení a průseku.*
III_1*: Ať Ω je nekonečné číslo a systém $(a_\alpha; \alpha < \Omega)$ splňuje 2 z definice 2.1.1. Pak*

$$\lim_{\alpha \to \Omega} (b \vee a_\alpha) = b \vee \lim_{\alpha \to \Omega} a_\alpha.$$

III_2*: Ať Ω je nekonečné číslo a systém $(a_\alpha; \alpha < \Omega)$ splňuje 1 z definice 2.1.1. Pak*

$$\lim_{\alpha \to \Omega} (b \wedge a_\alpha) = b \wedge \lim_{\alpha \to \Omega} a_\alpha.$$

Axiom 4. *L je modulární.*

Axiom 5. *L je komplementární.*

Axiom 6. *L je ireducibilní, tedy má-li $a \in L$ jednoznačně určený doplněk, pak buď $a = 1$, nebo $a = 0$.*

Máme tedy modulární komplementární svaz, který splňuje podmínku spojitosti operací (axiom 3). Základní vlastnosti vyplývající z teorie svazů nebudeme dokazovat. Dobrou představu si lze utvořit ze svazu potenční množiny nebo svazu podprostorů nějakého vektorového prostoru. V ideálním případě pak na příkladu prvků nějaké projektivní geometrie.

Definice 2.1.2. Ať $a \leq b$, pak třídu všech $x \in L$, $a \leq x \leq b$ označíme $L(a; b)$.

Věta 2.1.3. *Je-li $a \leq c \leq b$, pak $\exists x \in L(a; b)$ takové, že $c \vee x = b$, $c \wedge x = a$.*

Důkaz. Axiom 5 říká, že existuje doplněk k c. Označíme-li tento doplněk y, pak stačí položit $x = y \wedge (b \vee a)$. □

Definice 2.1.4. Na základě věty 2.1.3 můžeme korektně definovat: x je doplnkěm k prvku a v b ($a \leq b$), pokud $a \vee x = b$ a $a \wedge x = 0$.

Lemma 2.1.5. *Ať x a a jsou dány. Pak $\exists u, z$, že $u \leq a$, $a \wedge z = 0$ a $x = u \vee z$.*

Důkaz. Položme $u := a \wedge x$ a $z :=$ doplněk u v x (jeho existenci máme zaručenu). Pak $a \wedge z = a \wedge x \wedge z = u \wedge z = 0$. □

Ilustrace . Například v kartézském systému: je-li x plocha určená osami x a y a a plocha určená osami y a z, pak za hledané prvky u a z můžeme zvolit osu y a osu z.

Lemma 2.1.6. *Ať a a b mají tyto vlastnosti:*

- $a \wedge b = 0$
- $\forall x \in L\ \exists u \leq a\ \exists v \leq b\ x = u \vee v.$

Pak u a v jsou určeny jednoznačně a jsou rovny $a \wedge x$, $b \wedge x$. Navíc a a b mají jednoznačné doplňky b a a.

Důkaz. Vezměme libovolné x. Dá se rozložit jako $x = u \vee v$. Pak platí $a \wedge x = a \wedge (u \vee v) = (u \vee a) \wedge v$ a protože $a \wedge v \leq a \wedge b = 0$, je $a \wedge x = u$. Podobně také $b \wedge x = v$. Tedy zřejmě $x = a \wedge x \vee b \wedge x$ a $1 = a \vee b$. Vidíme, že a a b jsou vzájemnými doplňky. Ať b' je doplňkem k a. Pak $b' = (a \wedge b') \vee (b \wedge b') \Rightarrow b' = b \wedge b' \Rightarrow b' \leq b$ a podle axiomu 4 je $b' = b' \vee (a \wedge b) = (b' \vee a) \wedge b = b$. Což jsme chtěli dokázat. □

Axiom 6 pak říká, že ($a = 0$ & $b = 1$), nebo ($a = 1$ & $b = 0$). Jinými slovy nelze rozložit svaz L v direktní součin.

2.2 Nezávislost

V této kapitole definujeme nezávislost systému prvků a předvedeme základní vlastnosti nezávislého systému.

Definice 2.2.1. Ať I je množina a $(a_\sigma;\ \sigma \in I) \subset L$. Systém $(a_\sigma;\ \sigma \in I)$ nazveme nezávislým (značíme $(a_\sigma;\ \sigma \in I)\perp$), pokud

$$\forall J, K((J \cap K = \emptyset \ \&\ J \subset I \ \&\ K \subset I) \Rightarrow \bigvee(a_\sigma; \sigma \in J) \wedge \bigvee(a_\sigma;\ \sigma \in K) = 0).$$

Důsledek . Je-li $(a_\sigma;\ \sigma \in I)\perp$, pak $\forall I_0 \subset I$ také $(a_\sigma;\ \sigma \in I_0)\perp$.

Věta 2.2.2. *Ať I_1 a I_2 disjunktní jsou dány. Pak*

$$((a_\sigma;\ \sigma \in I_1)\perp \ \&\ (a_\sigma;\ \sigma \in I_2)\perp \ \&\ \bigvee(a_\sigma;\ \sigma \in I_1) \wedge \bigvee(a_\sigma;\ \sigma \in I_2) = 0) \Rightarrow$$

$$(a_\sigma;\ \sigma \in I_1 \cup I_2)\perp.$$

Důsledek . Indukcí lze pak dokázat i tvrzení silnější, kde místo dvou disjunktních množin jich máme konečně mnoho.

Zajímavým a v dalších důkazech poměrně často využívaným důsledkem věty 2.2.2 je

Věta 2.2.3. *Ať $(a_i;\ i = 1, 2, ..., n)$ je konečný systém prvků z L. Pak*

$$(a_i;\ i = 1, 2, ..., n)\perp \Leftrightarrow (a_1 \vee .... \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0 \ \textit{pro}\ i = 1, ..., n-1.$$

Důkaz. Nutnost této podnímky je zřejmá z definice. Její postačujícnost dokážeme indukcí:

1. $a_1 \wedge a_2 = 0 \Rightarrow (a_1, a_2)\perp$

2. Ať $2 \leq m < n$ a $(a_i;\ i = 1, 2, \ldots, m)\perp$.

Jelikož $(a_{m+1})\perp$, dává věta 2.2.2 spolu s indukčním předpokladem $((a_1 \vee \cdots \vee a_m) \wedge a_{m+1} = 0)$ celkově kýžené $(a_i;\ i = 1, 2, \ldots, m+1)\perp$. Indukcí pak dostaneme nezávislost celého $(a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n)$. □

Jiný důkaz najdeme také v [3], kap. IV. I., Thm 11. Dále uvedeme bez důkazu některé vlastnosti nezávislých systémů:

- Nezávislost je vlastnost takříkajíc ”kompaktní”. (Nezávislost systému je ekvivalentní nezávislosti každé jeho konečné podmnožiny.)

- Systém prvků $(a_\sigma; \sigma \in I)$ je nezávislý, právě když

$$\forall J_1, J_2 \subset I : \bigvee(a_\sigma; \sigma \in J_1) \wedge \bigvee(a_\sigma; \sigma \in J_2) = \bigvee(a_\sigma; \sigma \in J_1 \cap J_2)$$

- Indukcí lze předchozí tvrzení dokázat také pro konečný systém podmnožin I.

V dalším (věta 2.3.9) využijeme větu o vnitřních vlastnostech nezávislého systému:

Věta 2.2.4. *Ať I je libovolná indexová množina a $(a_\sigma; \sigma \in I)\perp$. Jsou-li $J, K \subseteq I$ neprázdné a disjunktní a je-li na nich definováno (ne nutně bijektivní) zobrazení $f : J \to K, \rho \to f(\rho)$ a navíc existují x_ρ řešící (pro $\rho \in J$) tyto rovnice:*

$$a_\rho \vee x_\rho = a_{f(\rho)} \vee x_\rho = a_\rho \vee a_{f(\rho)}, a_\rho \wedge x_\rho = a_{f(\rho)} \wedge x_\rho = 0,$$

pak platí $(b_\sigma; \sigma \in I)\perp$, kde

$$b_\sigma := \begin{cases} a_\sigma & \sigma \notin J \\ x_\sigma & \sigma \in J \end{cases}.$$

Nezávislost systému tedy neztratíme, pokud prvky nějaké jeho části nahradíme jejich relativními doplňky.

2.3 Perspektivita a projektivita

Relace perspektivity a projektivity jsou zásadními pro všechna další témata první části von Neumannovy knihy. Na jejich základě je totiž definována dimenzní funkce, která umožňuje objevit nový druh spojité geometrie. Jak se dále ukáže, obě relace jsou ekvivalencemi, díky čemuž můžeme svaz L rozložit na jejich ekvivalenční třídy a na nich pak dimenzi zavést. Projektivita je ekvivalencí v libovolném komplementárním svazu z definice, ale důkaz tranzitivity perspektivity je hlubokým von Neumannovým výsledkem. Navíc, ve spojité geometrii perspektivita a projektivita splývají. Tato silná tvrzení ovšem dokážeme až v závěru kapitoly 2.5. Zatím prozkoumejme základní vlastnosti. Pro snadnou čtenářovu představu znovu upozorňuji na svaz podprostorů konečnědimenzionálního vektorového prostoru, který zatím všechny požadavky teorie splňuje.

Definice 2.3.1. Prvek a je **perspektivní** k prvku b, pokud mají a a b společný doplněk.
Značíme $a \sim b$.

Ilustrace . V eukleidovském prostoru tedy jsou navzájem perspektivní vždy prvky stejné dimenze (všechny přímky, všechny roviny,....). Až budeme zavádět dimenzní funkci pro obecné spojité geometrie, položíme za ekvidimenzionální právě perspektivní prvky.

Pozorování 2. $\sim$ je reflexivní a symetrická relace. Zjevně z definice.

Lemma 2.3.2. *Jsou -li a, b dva perspektivní prvky (jejich společný doplňek označme x), pak pro každé $c \geq a \vee b$, $d \leq a \wedge b$ existuje y splňující $a \vee y = c$, $a \wedge y = d$.*

Důkaz. Stačí položit $y := (c \wedge x) \vee d$ a ověřit příslušné rovnosti. □

Lemma 2.3.3. *Ať jsou prvky a, b dány. Existuje-li x, že $a \vee x = b \vee x$ a $a \wedge x = b \wedge x$, pak existuje také prvek w, který je společným doplňkem k oběma prvkům a, b, a tedy $a \sim b$.*

Důkaz. I. případ: $a \vee x = b \vee x = 1$ a $a \wedge x = b \wedge x$
Pak existuje w, které je doplňkem $a \wedge x$ v x. Tedy $w \vee (a \wedge x) = x$ a $w \wedge a \wedge x = 0$. Navíc (jelikož $x \geq w$), je i $w \wedge a = 0$. Dále $1 = a \vee x = a \vee w \vee (a \wedge x) = a \vee w$ (neboť $a \geq (a \wedge x)$). Tedy w je doplňkem a. Analogicky se ukáže, že w je doplňkem k b. Tedy $a \sim b$.
II. případ: $a \vee x = b \vee x$ a $a \wedge x = b \wedge x = 0$.
Tentokrát se $a \sim b$ dokáže dualizováním I. případu.
III. případ (obecný): $a \vee x = b \vee x$ a $a \wedge x = b \wedge x$
Zúžením L na $L(0; a \vee x)$ zůstanou tvrzení I. případu i II. případu v platnosti. Existuje tedy y, pro které $a \vee y = b \vee y = a \vee x$ a $a \wedge y = b \wedge y = 0$. Aplikací II. případu získáme $a \sim b$. □

Poznámka . x z právě dokázaného lemmatu nazýváme **osou perspektivity** a a b.

Věta 2.3.4. *Ať jsou dány dva prvky a, b. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $a \sim b$
2. $\exists x \; a \vee x = c \;\&\; a \wedge x = d \;(c \geq a \vee b,\; d \leq a \wedge b)$
3. $\exists x \; a \vee x = b \vee x \;\&\; a \wedge x = b \wedge x = 0$
4. $\exists x \; a \vee x = b \vee x = a \vee b \;\&\; a \wedge x = b \wedge x = a \wedge b$
5. $\exists x \; a \vee x = b \vee x \;\&\; a \wedge x = b \wedge x$

Důkaz. Ekvivalenci všech tvrzení dokážeme cyklickou metodou.
1. $\Rightarrow$ 2.: Plyne z lemmatu 2.3.2.
2. $\Rightarrow$ 3. a 2. $\Rightarrow$ 4.: Plynou přímo.
3. $\Rightarrow$ 5. a 4. $\Rightarrow$ 5.: Tyto implikace jsou také rovnou vidět.
5. $\Rightarrow$ 1.: Tuto implikaci jsme dokázali v lemmatu 2.3.3. $\square$

Dospíváme k tvorbě takzvaného **perspektivního isomorfismu** mezi podsvazy L.

Věta 2.3.5. *Ať $a \sim b$. Pak svazy $L(0;a)$ a $L(0;b)$ jsou isomorfní. Je-li x takové, že $a \vee x = b \vee x$ a $a \wedge x = b \wedge x = 0$, pak rovnice*

$$(*)\ v = b \wedge (u \vee x),\ \ u = a \wedge (v \vee x),$$

kde $u \in L(0;a)$ a $v \in L(0;b)$, definují isomorfismus $L(0;a) \leftrightarrow L(0;b)$.

Důkaz. Jelikož $a \sim b$, najdeme jejich společný doplněk y. Dokážeme, že jsou isomorfní podsvazy $L(0;a) \simeq L(y;1)$ a $L(0;b) \simeq L(y;1)$, pak z tranzitivity isomorfie vyplyne hledaný výsledek. Definujme zobrazení

$$\varphi : L(0;a) \to L(y;1)$$

$$\varphi(w) := w \vee y$$
$$\psi : L(y;1) \to L(0;a)$$
$$\psi(z) := z \wedge a$$

Je nutno ověřit, že φ a ψ jsou vzájemně inverzními zobrazeními. Vezměme tedy $z \in L(y;1)$, pak $\varphi(\psi(z)) = \varphi(z \wedge a) = (z \wedge a) \vee y$. Protože $y \leq z$, můžeme využít modularitu a získat $y \vee (z \wedge a) = (y \vee a) \wedge z = z$, poslední rovnost plyne z $y \vee a = 1$. Takže $\varphi(\psi(z)) = z$, φ a ψ jsou vzájemně inverzní, a tedy isomorfismy. Podobně se dokáže také isomorfie svazů $L(0;b)$ a $L(y;1)$. Druhá část věty plyne jasně z výše uvedeného. $\square$

Důsledek . a a b jsou svými vzájemnými obrazy v $(*)$. Prvek u se v $(*)$ zobrazí sám na sebe, právě když $u \leq a \wedge b$.

Definice 2.3.6. Řekneme, že a je projektivní k b, pokud existuje konečná posloupnost $a_0, \ldots, a_n$ taková, že $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_{i-1} \sim a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Značíme $a \approx b$.

Důsledek . Relace $\approx$ je zjevně reflexivní, symetrická i tranzitivní. $a \sim b \Rightarrow a \approx b$. Přirozeně definujeme **projektivní isomorfismus** jako složeninu n perspektivních.

Formulujme dvě věty vyjadřující vztah nezávislosti a tranzitivity perspektivity. Vzhledem k přehledovému charakteru této kapitoly práce je uvedu bez důkazu.

Věta 2.3.7. $(a, b, c)\perp \Rightarrow ((a \sim b \ \&\ b \sim c) \Rightarrow a \sim c)$.

Věta 2.3.8. *Nechť* $(a_i; i = 1, 2, \dots)$ *je nekonečná* ***nezávislá*** *posloupnost. Pokud pro každé* $i = 1, 2, \dots$ *platí* $a_i \sim a_{i+1}$*, pak už každé* $a_i = 0$.

Závěrem kapitoly dokážu větu, kterou využijeme posléze v charakterizaci dimenzní funkce nad libovolnou spojitou geometrií.

Věta 2.3.9. *Ať* I *je libovolná indexová množina a* $(a_\sigma; \sigma \in I)\perp$*. Jsou-li* $J, K \subseteq I$ *disjunktní a je-li na nich definováno bijektivní zobrazení* $f : J \to K, \rho \to f(\rho)$ *splňující* $a_\rho \sim a_{f(\rho)}$ *pro každé* $\rho \in J, f(\rho) \in K$*, pak platí*

$$\bigvee_{\rho \in J} a_\rho \sim \bigvee_{f(\rho) \in K} a_{f(\rho)}.$$

Důkaz. Větu dokážeme s použitím ekvivalentních vyjádření perspektivity z věty 2.3.4. Protože pro každé $\rho \in J$ jsou prvky a_ρ a $a_{f(\rho)}$ perspektivní a nezávislé, existuje podle 2.3.4 (4) x_ρ splňující

$$(*)\ a_\rho \vee x_\rho = a_{f(\rho)} \vee x_\rho = a_\rho \vee a_{f(\rho)}$$

$$(**)\ a_\rho \wedge x_\rho = a_{f(\rho)} \wedge x_\rho = 0.$$

Označíme-li si $x := \bigvee(x_\rho; \rho \in J)$, dostaneme sečtením rovnic $(*)$

$$\bigvee(a_\rho; \rho \in J) \vee x = \bigvee(a_{f(\rho)}; f(\rho) \in K) \vee x,$$

což je první polovina z podmínky 2.3.4 (3).
Na druhou polovinu budeme potřebovat větu 2.2.4, která nám za předpokladů $(*)$ a $(**)$ dává nezávislost systému $(b_\sigma; \sigma \in I)\perp$, kde

$$b_\sigma := \begin{cases} a_\sigma & \sigma \notin J \\ x_\sigma & \sigma \in J \end{cases}.$$

Z této nezávislosti tedy plyne $\bigvee(b_\sigma; \sigma \in J) \wedge \bigvee(b_\sigma; \sigma \in K) = 0$, neboli

$$x \wedge \bigvee(a_{f(\rho)}; f(\rho) \in K) = 0.$$

A protože obě podmnožiny systému a_σ vystupují ve větě symetricky, máme také $x \wedge \bigvee(a_\rho; \rho \in J) = 0$ a už nám stačí použít jen ekvivalentní vyjádření z věty 2.3.4 (3). □

2.4 Rozkladová perspektivita

Definice 2.4.1. O trojici prvků (a, b, c) řekneme, že je **rozkladově perspektivní**, pokud existují nezávislé posloupnosti

1. $(a_i; i = 1, 2, \dots)$
2. $(b_i; i = 1, 2, \dots)$
3. $(c_i; i = 1, 2, \dots)$

takové, že $\forall i \; a_i \sim b_i \sim c_i \sim a_i$ a

1. $a = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_i$
2. $b = \bigvee_{i=1}^{\infty} b_i$
3. $c = \bigvee_{i=1}^{\infty} c_i$.

Značíme $(a, b, c)pd$.

Důsledek .

- $a \sim b \sim c \sim a \Rightarrow (a, b, c)pd$
  (Vezměme $a_1 = a,\ b_1 = b,\ c_1 = c$ a $\forall i > 1 \; a_i = b_i = c_i = 0$.)
- $a \sim b \Rightarrow (a, b, b)pd$ (Zjevně z předchozího.)
- relace pd je symetrická, tzn. ať je p jakákoli permutace, pak $(a_1, a_2, a_3)pd \Leftrightarrow (a_{p(1)}, b_{p(2)}, c_{p(3)})pd$.

K rozkladové perspektivitě uvádí von Neumann několik navazujících tvrzení, jejichž vyústěním je dílčí krok v dokazování shodnosti perspektivity a projektivity. Směřujeme k tomu, že pro "nesrovnatelné" prvky ($a \wedge b = 0$) tyto dvě relace splývají. Dále stručně dokážeme, že jsou-li dva prvky srovnatelné a zároveň projektivní, jsou již stejné.

Lemma 2.4.2. *Ať posloupnosti* $(a_i; i = 1, 2, ...)$, $(a'_i; i = 1, 2, ...)$ *splňují pro každé i* $a_i \wedge a'_i = 0$ *a dále*

$$a_{i+1} \leq a'_i,\ a'_{i+1} \leq a'_i.$$

Pak $(a_i; i = 1, 2, ...)\perp$. *Označíme-li navíc* $a_0 := \bigwedge_{i=1}^{\infty} a'_i$, *pak dokonce* $(a_i; i = 0, 1, 2, ...)$.

Lemma 2.4.3. *Ať* $(a_i; i = 0, \ldots, n)$ *je konečná posloupnost taková, že* $a_{i-1} \sim a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *a* $a_0 \wedge a_n = 0$. *Pak* $a_0 \sim a_n$.

Věta 2.4.4. *Ať* $a \wedge b = 0$. *Pak platí* $a \approx b \Leftrightarrow a \sim b$.

Důkaz. "$\Leftarrow$": zřejmě z definice.
"$\Rightarrow$": $\exists$ posloupnost $(a_i; i = 0, \ldots, n)$, $a_0 = a$, $a_n = b$, kde $a_{i-1} \sim a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Protože ale dle předpokladu $a_0 \wedge a_n = 0$, máme snadno dle lemmatu 2.4.3 $a \sim b$. □

Věta 2.4.5. *Ať* (a_i) *je nekonečná nezávislá posloupnost. Pokud pro všechna i platí* $a_{i-1} \approx a_i$, *pak už pro každé i* $a_i = 0$.

Důkaz. Zřejmě $(a_{i-1}, a_i)\perp$, tedy $a_{i-1} \wedge a_i = 0$. Tedy věta 2.4.4 dává $a_{i-1} \sim a_i$ a věta 2.3.8 dává $\forall i\ a_i = 0$. □

Věta 2.4.6. $(a \approx b)$ & $(a \leq b) \Rightarrow a = b$.

Důkaz. Definujme $b'_1 := a \leq b$. Ať b_1 je doplněk b'_1 v b. Je-li ϕ projektivní isomorfismus $L(0, a)$ a $L(0, b)$, získáme a_1 a a'_1 $(\in L(0, a))$ jako ϕ-obrazy b_1 a b'_1.
Dále definujeme

$$b_{i+1} := a_i;\ b'_{i+1} := a'_i$$

$$a_{i+1} := \phi(b_{i+1});\ a'_{i+1} := \phi(b'_{i+1})\ (\in L(0, b))$$

Máme tedy 4 nekonečné posloupnosti $(a_i; i = 1, 2, \ldots)$, (b_i), $(a'_i; i = 0, 1, 2, \ldots)$, (b'_i) s vlastnostmi:

1. a_i je doplňkem k a'_i v a'_{i-1} ($a'_0 = a$)
   b_i je doplňkem k b'_i v b'_{i-1} ($b'_0 = b$)

2. $a_i \approx b_i$, $a'_i \approx b'_i$ pro $i = 1, 2, \ldots$

Z 1. plyne $b_i \wedge b'_i = 0$, $b_{i+1} \leq b'_i$, $b'_{i+1} \leq b'_i$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Máme tedy dvě posloupnosti, jejichž i. členy jsou nesrovnatelné, navíc jedna z nich je klesající a je majorantou té druhé. Z toho pak dle lemmatu 2.4.2 dostáváme, že $(b_i; i = 1, 2, \ldots)\perp$. Dle definice a 2. máme $b_i \approx a_i = b_{i+1}$. Z věty 2.4.5 plyne pro $i = 1, 2, \ldots$ $b_i = 0$, specielně $b_1 = 0$. A protože b_1 je doplňkem a v b, máme $a = b \vee b_1 = b$. □

2.5 Distributivita, ekvivalence perspektivity a projektivity

V této kapitole dospíváme spolu s von Neumannem k důkazu toho, že perspektivita a projektivita jsou totožné, což je pro spojité geometrie zásadní. Dimenzní funkci, která je charakterizuje, chceme totiž zavést na ekvivalenčních třídách perspektivních prvků. K tomu potřebujeme tranzitivitu perspektivity, která snadno vyplyne z tranzitivity projektivity. V průběhu kapitoly formulujeme některá tvrzení bez ohledu na axiom 6 (nerozložitelnost). Technickou část začneme definicí a základními vlastnostmi relace distributivnosti:

Definice 2.5.1.

1. $(a, b, c)D \overset{df}{\Leftrightarrow} (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

2. $(a, b)D \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall c \in L \ (a, b, c)D$

3. $(a)D \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall b \in L \ (a, b)D$

Poznámka . Relace D vyjadřuje, že svaz generovaný prvky $a, b, c \in L$ je distributivní. Spoléhá se přitom na modularitu L, viz [3], str. 219, Thm. 12.

Pozorování 3.

- $(a, b, c)D \Leftrightarrow (b, a, c)D$
- $(a, b)D \Leftrightarrow (b, a)D$

- (0)D, (1)D

Věta 2.5.2. *Relace D jsou* ***symetrické*** *a* ***k sobě duální****.*

Důkaz. Stačí pro 2.5.1 1.:

- "K sobě duálnost":
  Ať D' je definována takto:
  $$(a, b, c)D' \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$
  Chceme $(a, b, c)D \Leftrightarrow (a, b, c)D'$. Z modularity L dostáváme
  $$(b \vee a) \wedge (c \vee a) = a \vee ((a \vee b) \wedge c)$$
  A dokončujeme
  $$= a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$
  Tedy $(a, b, c)D \Rightarrow (b, c, a)D'$. Duálně pak $(a, b, c)D' \Rightarrow (b, c, a)D$. Důkaz první části dokončíme cyklickou záměnou a dalším úkrokem k duálnímu vyjádření:
  $$(a, b, c)D \Rightarrow (b, c, a)D' \Rightarrow (c, a, b)D \Rightarrow (a, b, c)D'$$
  Podobně $(a, b, c)D' \Rightarrow (a, b, c)D$. Tedy D je k sobě duální.

- "Symetrie":
  Za využití pozorování 3 a předchozí části důkazu:
  $$(a, b, c)D \Rightarrow (c, a, b)D \Rightarrow (b, c, a)D \Rightarrow (c, b, a)D \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow (a, c, b)D \Rightarrow (b, a, c)D \Rightarrow (a, b, c)D,$$
  tedy D je symetrická.

□

Využijeme i tradiční definici direktního součinu.

Definice 2.5.3. Svaz L nazveme **direktním součinem** $L(0, a) \oplus L(0, b)$, pokud $a \wedge b = 0$ a $\forall x \in L\ \exists u, v\ x = u \vee v,\ u \leq a,\ v \leq b$.
L je rozložitelný, pokud existují a, b rozdílné od 0, 1 takové, že $L = L(0, a) \oplus L(0, b)$. Jinak je nerozložitelný.

Věta 2.5.4. *$L = L(0,a) \oplus L(0,b) \Leftrightarrow a$ je doplňkem k b a $(a,b)D$.*

Důkaz.

- "$\Rightarrow$": $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$ zjevně. Dále $\forall x \in L\ \exists u, v\ x = u \vee v = (a \wedge x) \vee (b \wedge x)$. Odtud $(a \wedge x) \vee (b \wedge x) = x = 1 \wedge x = (a \vee b) \wedge x$.
- "$\Leftarrow$": Samotná definice distributivnosti nám dává kýžený rozklad

  $$x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x),$$

  kde $(a \wedge x) \leq a$ a $(b \wedge x) \leq b$.

$\square$

Věta 2.5.5. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *a má doplněk b, pro nějž $(a,b)D$*
2. *a má jednoznačný doplněk*
3. *$(a)D$*

Důkaz. 1. $\Rightarrow$ 2. z věty 2.5.4 a lemmatu 2.1.6. Zbytek snadno použitím axiomu 6. $\square$

Věta 2.5.6. *Ať $(a)D$, $(b)D$ a ať a' je jedinečným doplňkem k a. Pak $(a \vee b)D$, $(a \wedge b)D$ a $(a')D$.*

Důkaz. Dokáže se prostým ověřením operací, věta v sobě neskrývá žádný trik. $\square$

Z předchozí věty tedy vyplývá, že obecně tvoří systém všech prvků x, pro něž $(x)D$, Booleovu algebru $\mathbf{D}$. V systémech, kde platí axiom 6, se však jedná o triviální variantu, kdy $\mathbf{D} = \{0; 1\}$.

Věta 2.5.7. *Nechť $a \wedge b = 0$ a neplatí $(a,b)D$.*
Pak existují prvky a_1, b_1 různé od nuly takové, že $a_1 \leq a$, $b_1 \leq b$ a $a_1 \sim b_1$.

Důkaz. $\neg(a,b)D \Rightarrow \exists x\ x \wedge (a \vee b) \neq (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ Definujme u jako doplněk $(x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ v $x \wedge (a \vee b)$. Vidíme, že $u \neq 0$, ale $u \wedge a = 0$, $u \wedge b = 0$. Definujme

$$a_1 := a \wedge (u \vee b),\ b_1 := b \wedge (u \vee a).$$

Pak užitím axiomu 4 (modularita) $(a_1 \vee u) = (b_1 \vee u) = (u \vee a) \wedge (u \vee b)$. Navíc $a_1 \wedge u = b_1 \wedge u = 0$. Užitím 2.3.3 $a_1 \sim b_1$. $\square$

Není vlastně možné zestručnit výklad dalšího Von Neumannova postupu bez vynechání některé zásadní myšlenky. K závěrečné větě se tedy pokusím dopracovat bez důkazů, avšak s komentářem.

Věta 2.5.8. $(a, b)D$ & $(a \wedge b) = 0$, *právě když*

$$a_1 \leq a \ \& \ b_1 \leq b \ \& \ a_1 \approx b_1 \Rightarrow a_1 = b_1 = 0.$$

Základním příkladem, na němž si lze zkoumané vlastnosti svazů představovat, je svaz libovolné potenční množiny s relací inkluze. Zkusme teď, podobně jako na množinách, zavést do spojité geometrie lineární uspořádání. Prozkoumejme tedy srovnatelnost prvků L. Věta 2.4.6 říká, že $a \leq b \approx a \Rightarrow a = b$. Na jejím základě bychom tedy mohli definovat relaci " $\prec$ " takto:

$$a \prec b \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists b' \ a \approx b' \ \& \ b' < b$$

Relaci " $\prec$ " odpovídá v množinové teorii relace "a má nižší mohutnost než b". Tato relace je pro množiny takříkajíc vyčerpávající, mohli bychom tedy očekávat, že i " $\prec$ " bude lineární. Tento problém je úzce spojen s ireducibilitou systému. Předpokládáme-li totiž, že L je rozložitelný na $L(0, a) \oplus L(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, z věty 2.5.4 dostáváme $(a, b)D$. Právě uvedená věta 2.5.8 pak z $a_1 \leq a$, $b_1 \leq b$, $a_1 \approx b_1$ dává $a_1 = b_1 = 0$. Pokud nyní $a \prec b$, existuje $b_1 \leq b$, pro nějž $a \approx b_1$ (za a_1 ve větě 2.5.8 bereme a), z čehož plyne $a = b_1 = 0$. To je ovšem spor s rozložitelností L. Podobně ani $a \approx b$, ani $b \prec a$ neplatí. Převrácenou implikací jsme tedy dokázali, že srovnatelnost prvků již musí nutně zaručovat platnost axiomu 6. Zbývající obrácená implikace je jedním z důležitých závěrů této kapitoly.

Lemma 2.5.9. *Ať* $(a, b)D$, $a \wedge b = 0$ *a* c *je takové, že existuje* a', $c \sim a' \leq a$, *pak* $(c, b)D$, $c \wedge b = 0$.

Věta 2.5.10. *Je-li* $(a, b)D$ *a* $a \wedge b = 0$, *pak existuje* $a^* \geq a$ *takové, že* $(a^*, b)D$, $a^* \wedge b = 0$ *a* a^* *je maximální prvek s touto vlastností. Takový prvek je jednoznačně určený.*

Tento maximální prvek je pro nás pomocným krokem dokázání toho, že dva distributivní prvky jsou již srovnatelné. Platí totiž

Věta 2.5.11. $(a, b)D$, $a \wedge b = 0$ *a* $a^* \geq a$ *ať je maximální prvek této vlastnosti. Pak* $(a^*)D$.

Právě pro důkaz této věty potřebujeme výše uvedené lemmma 2.5.9. Je-li totiž b^* doplněk a^*, pak kombinací lemmatu 2.5.9 a vět 2.5.10 a 2.5.8 získáme $(a^*, b^*)D$, což už nám stačí pro použití věty 2.5.5 a dosažení požadovaného výsledku.
Odtud dále už budeme striktně dodržovat platnost axiomu 6. Opakovaným použitím věty 2.5.5 o ekvivalentních vyjádřeních jednoznačnosti doplňku dokážeme následující:

Věta 2.5.12. $(a, b)D$ & $a \wedge b = 0 \Rightarrow a = 0$ *nebo* $b = 0$.

Od toho je již jen krůček k tomu, že dva prvky jsou distributivní, právě když jsou srovnatelné:

Věta 2.5.13. $(a, b)D \Leftrightarrow a \leq b$ *nebo* $b \leq a$.

Dokážeme-li nyní, že pro každou dvojici a, b platí linearita silnější varianty pomocné relace "$\prec$" (projektivitu v ní nahradíme perspektivitou), snadno již pomocí věty 2.4.6 obdržíme ekvivalenci perspektivity a projektivity.
Bavme se tedy nejprve o nezávislých prvcích. Složíme-li věty 2.5.7 a 2.5.12, můžeme tvrdit, že

Věta 2.5.14. $a \wedge b = 0$ & $a \neq 0$ & $b \neq 0 \Rightarrow \exists\ a', b'\ 0 \neq a' \leq a,\ 0 \neq b' \leq b$ *a* $a' \sim b'$

Poněkud komplikovanější úvaha konstrukce několikavrstevnatých posloupností a jejich suprem stojí za tvrzením

Věta 2.5.15. *Pro každou dvojici prvků a, b buď*

1. *existuje b' takové, že $a \sim b' \leq b$, nebo*
2. *existuje a' takové, že $b \sim a' \leq a$.*

Slibovaný závěr se pak ze všech zmíněných tvrzení získá již snadno.

Věta 2.5.16.

$$a \approx b \Leftrightarrow a \sim b$$

Důkaz. Stačí jedna implikace, druhá je uvedena výše. Mějme $a \approx b$. Platí-li 2.5.15 1., vidíme, že $b \approx b' \leq b$ a podle 2.4.6 $b = b'$. Tedy $a \sim b$. Případ 2.5.15 2. dá stejný výsledek. □

Závěrem tedy zjišťujeme, že relace perspektivity je ekvivalencí a rozkládá svaz L na disjunktní ekvivalenční třídy.

Poznámka . V *geometrických* svazech[1] je zaručena tranzitivita perspektivity u atomů (viz. [3], kap. IV. 3., Thm 6'), tento výsledek ale při zkoumání spojitých geometrií použít nemůžeme, neboť se snažíme charakterizovat svazy, v nichž žádné atomy nejsou.

2.6 Vlastnosti ekvivalenčních tříd

Věnujme se teď vlastnostem ekvivalenčních tříd a operacím s nimi. Již jsem zmiňoval, že prvkům z jedné třídy bude přiřazena stejná hodnota dimenzní funkce. Musíme se však dobrat k tomu, jaká. Zopakujme a upřesněme na úvod definici "$\prec$":

Definice 2.6.1.

$$a \prec b \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists b^* \; a \sim b^* < b$$

$$a \succ b \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists b^* \; a \sim b^* > b$$

Z toho, co bylo ukázáno v předchozí kapitole, již plynou potřebné základní vlastnosti "$\prec$" jako linearita a tranzitivita. Označme ekvivalenční třídy perspektivních prvků:

Definice 2.6.2.

$$A_a := \{x; x \sim a\}$$

$$\mathbf{L} := \{A_a; a \in L\}$$

Definice 2.6.3.

$$\forall A, B \in \mathbf{L} \; A < B \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists a \in A, \; b \in B : \; a \prec b$$

Jak von Neumann dokazuje, tyto třídy mají překvapivě pohodlné aritmetické vlastnosti. Lze sčítat i odčítat, lze zavést násobení přirozeným číslem a dokonce je lze i dělit se zbytkem. Korektnost těchto definic je zajištěna vlastnostmi perspektivity a komplementace.

Definice 2.6.4.

[1] L je geometrický, právě když je úplný, každý jeho prvek je spojením atomů, všechny atomy jsou kompaktní a L je semimodulární.

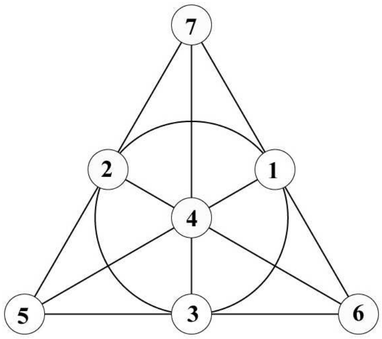
1. Řekneme, že součet $A + B$ existuje, pokud $\exists a \in A,\ b \in B$ takové, že $a \wedge b = 0$. Pak definujeme $A + B$ jako to C, že $C = A_{a \vee b}$.

2. $A - B$ existuje, pokud $\exists a \in A,\ b \in B$, že $a \geq b$, tedy $A \geq B$. Máme-li takové a, b, pak $A - B$ definujeme jako to C, pro něž $C = A_{b'}$ a b' je doplňkem b v a.

3. $\mathbf{0}$:=A_0; $\mathbf{1}$:=A_1

4. $0 \cdot A := \mathbf{0}$
   Indukcí pak $(n+1)A := nA+A$, pokud $(nA+A)$ existuje. Jinak $(n+1)A$ zůstane nedefinováno.

5. Ať $A \neq \mathbf{0}$, B jsou dány. Pak existuje jednoznačně určené $n \geq 0$ a třída $B_1 < A$, že $B = nA + B_1$. Toto jednoznačné n značíme $[B : A]$.



Obrázek 2.1: Fanova rovina

Ilustrace . Doprovodím uvedené definice ilustrací pro jednu konečnou geometrii. Takzvaná Fanova rovina[2] je projektivní rovinou se sedmi body a sedmi přímkami. Její třídy ekvidimenzionálních vzájemně perspektivních prvků jsou tedy čtyři: $\mathbf{0}$, body $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, přímky $B := \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}$ a třída příslušející celé rovině, tedy $\mathbf{1}$.

1. Chceme-li sečíst $A+B$, vezměme například bod 7 a přímku 356, která ho neobsahuje. Pak spojením těchto dvou prvků už získáme celou Fanovu geometrii, a tedy součtem A a B je $\mathbf{1}$.

[2]Popsána je v mnoha zdrojích, čerpám z *Weisstein, Eric W. "Fano Plane." MathWorld–A Wolfram Web Resource.* `http://mathworld.wolfram.com/FanoPlane.html`

2. Pro vyzkoušení počítání rozdílu $B-A$ hledám bod, který leží na nějaké přímce. Vezmu například bod 1 a přímku 123. Doplňky k bodu 1 v 123 jsou body 2 a 3. Vezmu-li 2, vidím, že výsledkem rozdílu $B-A$ je opět třída obsahující všechny body, tj. A.

3. Z předešlého je vidět, že $0 \cdot A = \mathbf{0}$, $1 \cdot A = A$, $2 \cdot A = B$ a $3 \cdot A = \mathbf{1}$.

4. Z předchozího bodu snadno plyne veškeré dělení: $[\mathbf{1} : B] = 1$, $[\mathbf{1} : A] = 3$, $[B : A] = 2$.

Dimenze je von Neumannem definována pomocí minimálních posloupností.

Definice 2.6.5. Prvek $A \in \mathbf{L}$ je **minimální** (vzhledem k uspořádání tříd perspektivity), pokud $A > \mathbf{0}$ a $\neg\exists B : \ A > B > \mathbf{0}$.

Věta 2.6.6. *Není-li prvek $A \neq \mathbf{0}$ minimální, pak existuje $B \neq \mathbf{0}$, že $2B \leq A$.*

Důkaz. Protože A není minimální, existuje nějaké B_1, že $0 < B_1 < A$. Takže A můžeme vyjádřit jako $A = B_1 + B_2, B_2 \neq 0$. Položíme-li $B := min\{B_1, B_2\}$, pak platí $A = B_1 + B_2 \geq B + B = 2B$. □

Definice 2.6.7. **Minimální posloupnost** (A_i), $A_i \neq \mathbf{0}$ prvků z $\mathbf{L}$ je taková, která obsahuje buď jen minimální prvek A_1, nebo nekonečně mnoho prvků splňujících $2A_{i+1} \leq A_i$ $(i = 1, 2, \dots)$.

Dle věty 2.6.6 minimální posloupnost existuje, až do konce kapitoly si takovou (A_i) fixujme.

Lemma 2.6.8. *Mějme $A \neq \mathbf{0}$. Pokud je (A_i) nekonečná, pak*

$$\lim_{i\to\infty} [A : A_i] = \infty.$$

Věta 2.6.9. *Ať $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$. Pak*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{[A : A_i]}{[B : A_i]}$$

je vlastní a kladná.

Pokud je (A_i) tvořena jen jediným prvkem, pak uvedený výraz definujeme jako jeho hodnotu v bodě i=1, a tedy je $0 \leq \frac{[A:A_1]}{[B:A_1]} < \infty$ zjevně. Dokažme, že limita není nulová. A_1 je minimální, a tedy > 0. Tím pádem jím můžeme vydělit B, které je tudíž tvaru $B = [B : A_1]A_1 + B_1$, kde $B_1 < A_1$, jenže z minimality A_1 je $B_1 = 0$. Vidíme, že $B = [B : A_1]A_1$, a protože $B \neq \mathbf{0}$, je $[B : A_1] \neq 0$. Podobně pro $[A : A_1]$, což už dává kladnost vyšetřované limity.

Definice 2.6.10. Ať $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$. Pak definujeme

$$(B : A) := \lim_{i \to \infty} \frac{[A : A_i]}{[B : A_i]}.$$

Několik základních vlastností právě zavedené funkce shrnu do následující věty.

Věta 2.6.11. *Ať $A, B, C \neq \mathbf{0}$. Pak pro číselné hodnoty platí*

1. $(A : A) = 1$
2. $(A : B) = (B : A)^{-1}$
3. $(A : C) = (A : B)(B : C)$
4. $(A + B : C) = (A : C) + (B : C)$
5. $A > B \Rightarrow (A : C) > (B : C)$

Konečně definujeme dimenzi prvku:

Definice 2.6.12.

$$\Delta(a) := \begin{cases} (A_a : \mathbf{1}) & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

Ilustrace . Jako první příklad si vezměme rovinu XY v trojrozměrném eukleidovském prostoru ($\mathbf{E}$). Ta je podprostorem vektorového prostoru a má nějaký společný doplněk se všemi ostatními rovinami procházejícími počátkem - nějakou přímku, která v nich neleží, ale prochází počátkem. Neboli rovina XY je prvkem perspektivní třídy rovin (A_2). Třída $\mathbf{1}$ je tvořena všemi doplňky nuly, tedy jedině celým prostorem $\mathbf{E}$. Minimálním prvkem svazu perspektivních ekvivalenčních tříd prostoru $\mathbf{E}$ je třída přímek (A_1). Celkem je tedy dimenze roviny XY rovna:

$$\Delta(XY) = (A_2 : \mathbf{1}) = \frac{[A_2 : A_1]}{[\mathbf{1} : A_1]} = \frac{2}{3}.$$

Stejně vlastně funguje také Fanova rovina zmíněná dříve. Potřebné drobné výpočty jsem již provedl, přehledově tedy stačí uvést dimenze jednotlivých tříd (přesněji dimenze prvků těchto tříd):

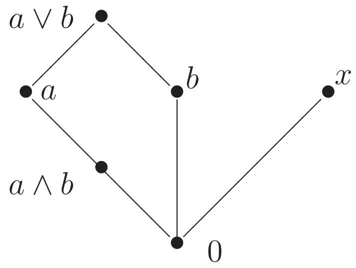
$$\Delta(\mathbf{0}) = 0, \Delta(\mathbf{A}) = 1/3, \Delta(\mathbf{B}) = 2/3, \Delta(\mathbf{1}) = 1.$$

Věta 2.6.13. *Vlastnosti dimenzní funkce:*

1. $0 \leq \Delta(a) \leq 1, \Delta(0) = 0, \Delta(1) = 1$
2. $\Delta(a \vee b) + \Delta(a \wedge b) = \Delta(a) + \Delta(b)$
3. $a \sim b \Rightarrow \Delta(a) = \Delta(b)$
4. $c > a \Rightarrow \Delta(c) > \Delta(a)$
5. $a \prec b \Leftrightarrow \Delta(a) < \Delta(a)$, *analogicky pro* $\succ$ *a* $=$.

Důkaz.

1. Tyto vlastnosti jsou zřejmé.
2. Nejprve si uvědomme, že $a \wedge b = 0$ implikuje $\Delta(a \vee b) = \Delta(a) + \Delta(b)$. To je zřejmé, pokud je $a = 0$ nebo $b = 0$. Pokud není, platí $A_{a \vee b} = A_a + A_b$, z čehož podle 2.6.11 (4) $(A_{a \vee b} : \mathbf{1}) = (A_a : \mathbf{1}) + (A_b : \mathbf{1})$, a to už dává kýženou rovnost.
   Dále dokažme obecný případ, kdy $a \wedge b \neq 0$. Zvolme x jako doplněk $a \wedge b$ v b (tedy platí $(a \wedge b) \vee x = b$, $a \wedge b \wedge x = 0$), pak zjevně $a \wedge x = 0$, protože prvek b není tím, co sráží průsek $a \wedge b \wedge x$ na 0. Viz. obr. 2. Z



Obrázek 2.2: Důkaz pro $a \wedge b \neq 0$.

   předchozího tedy

$$(*)\ \Delta(a \wedge b) + \Delta(x) = \Delta(b).$$

   Rozepíšeme-li ale $a \vee b = a \vee ((a \wedge b) \vee x) = (a \vee (a \wedge b)) \vee x = a \vee x$, vidíme, že

$$(**)\ \Delta(a) + \Delta(x) = \Delta(a \vee x) = \Delta(a \vee b).$$

   Teď už stačí jen dát obě rovnice $(*)$ a $(**)$ dohromady.

3. K důkazu postačí konstatovat, že a i b jsou v tomto případě prvky téže ekvivalenční třídy $A_a = A_b$, a tedy $\Delta(a) = (A_a : \mathbf{1}) = (A_b : \mathbf{1}) = \Delta(b)$.

4. Je-li $c > a$, existuje nějaký doplněk a v c, označme ho b. Pak $a \vee b = c$ a $a \wedge b = 0$, tedy z druhého bodu $\Delta(c) = \Delta(a) + \Delta(b)$. Protože $b \neq 0$, je $\Delta(b) > 0$ a jsme hotovi.

5. Poslední bod dostaneme snadno z předchozích, stačí si uvědomit, že $a \prec b \Leftrightarrow \exists a' a \sim a' < b$ a že pro takové a' platí $\Delta(a) = \Delta(a')$ podle třetího bodu věty.

□

2.7 Dimenzní funkce, dimenzionalita

V této kapitole blíže prozkoumáme možné obory hodnot dimenzní funkce Δ. Úvodem prozkoumejme, jak mohou vypadat systémy vymezené třemi určitými vlastnostmi (v dalším **i**, **ii** a **iii**), o nichž posléze dokážeme, že je splňuje obor hodnot dimenzní funkce ($Rng(\Delta)$).

Věta 2.7.1. *Ať $\boldsymbol{A}$ je tedy množinou reálných čísel, pro niž platí $\boldsymbol{A} \subseteq [0;1]$, ať splňuje následující tři podmínky:*

i) $0, 1 \in \boldsymbol{A}$

ii) $a, b \in \boldsymbol{A}, a \leq b \Rightarrow (b - a) \in \boldsymbol{A}$

iii) $a_i \in \boldsymbol{A}$ *(pro $i = 1, 2, ...$),* $a_i \leq a_j (i < j) \Rightarrow (lim_{n\to\infty} a_n) \in \boldsymbol{A}$

Pak $\boldsymbol{A}$ je jednoho z následujících tvarů:

1. *$\boldsymbol{A}$ obsahuje všechna reálná čísla tvaru n/N, kde $n = 0, 1, 2, ...N$. Tento případ označujeme "$\boldsymbol{N}$" a množinu značíme $\boldsymbol{A}_N$.*

2. *$\boldsymbol{A}$ obsahuje všechna reálná čísla z intervalu $[0;1]$. Tento případ označujeme "∞" a množinu značíme $\boldsymbol{A}_\infty$.*

Důkaz. Podle vlastnosti **i** obsahuje **A** prvky > 0. Tyto prvky mají infimum - největší dolní mez, označme ji δ. Uvažujme dva případy:

1. $\delta > 0$:
   Musí existovat nějaké prvky $a \in \mathbf{A}$, pro něž platí $a < 2\delta$ (jinak by 2δ bylo infimem). Kdyby existovaly dva takové $a, b, a < b$, pak by platilo $\delta \leq a < b < 2\delta$, neboli $0 < b - a < \delta$ a podle **ii** by prvek $b - a$ ležel v $\mathbf{A}$, což je ve sporu s definicí δ. Existuje tedy jen jeden prvek $a' \in \mathbf{A}, a' \neq 0, a' < 2\delta$, což ho jasně vymezuje jako infimum, a tedy $\delta = a'$, neboli $\delta \in \mathbf{A}$.
   Vezměme teď libovolný prvek $a \in \mathbf{A}$. Pak existuje přirozené číslo $n \geq 0$, pro nějž
   $$(*)\ n\delta \leq a < (n+1)\delta$$
   (neostré nerovnosti jsou na místě, protože teď uvažujeme libovolný prvek $a \in \mathbf{A}$, tedy i nulový). Opakovaným použitím vlastnosti **ii** zjistíme, že prvky $a, a - \delta, a - 2\delta, ..., a - n\delta$ patří do $\mathbf{A}$. Jenže podle $(*)$ je $a - n\delta < \delta$, takže podle definice δ už musí nutně být $a - n\delta = 0, a = n\delta$.
   Aplikujeme-li předchozí postup na $a = 1$, vidíme, že existuje $N \geq 0$, že $1 = N\delta$, z čehož zas vyplývá, že $N \neq 0$, a tedy $\delta = 1/N$.
   Protože podle předchozího je každý prvek a tvaru $n\delta$ (nesmíme samozřejmě překročit 1), můžeme každý $a \in \mathbf{A}$ zapsat jako n/N pro nějaké $n = 1, 2, ..., N$. Naopak jelikož $1/N, 1 \in \mathbf{A}$, opakované použití vlastnosti **ii** dává, že $1, N - 1/N, N - 2/N, ..., 1/N, 0 \in \mathbf{A}$, a tedy $\mathbf{A}$ je množinou všech prvků tvaru n/N.

2. $\delta = 0$:
   Chceme ukázat, že ke každému bodu intervalu $[0; 1]$ dovedeme dokonvergovat pomocí prvků z $\mathbf{A}$ a poté použít vlastnost **iii**. Nejprve uvažujme dva zcela libovolné prvky $0 \leq a < b \leq 1$. Pro ně platí $b - a > 0$, a protože $\delta = 0$, existuje nějaké $c \in \mathbf{A}, c \neq 0$, pro které $0 < c < b - a$. Z vlastností reálných čísel existuje tedy nějaké přirozené číslo $n \geq 0$, pro nějž podobně jako v předchozím případě
   $$(**)\ nc \leq b < (n+1)c.$$
   Inspirováni první částí důkazu opakovaně aplikujeme vlastnost **ii**, čímž zjistíme, že prvky $1, 1 - c, 1 - 2c, ..., 1 - nc$ všechny patří do $\mathbf{A}$. Navíc, pokud uděláme ještě jeden krok navíc, vidíme, že i $1 - (1 - nc) = nc \in \mathbf{A}$. Dle definice c vypočteme, že $nc = (n+1)c - c > b - (b - a) = a$ a označíme pak $a' := nc$. Vidíme, že $a < a' \leq b$.
   Teď uvažme libovolný prvek $0 \leq x \leq 1$. Chceme dokázat, že $x \in \mathbf{A}$.

Můžeme předpokládat, že $x \neq 0$ (díky **i**). Pak z vlastností reálných čísel existuje posloupnost $(x_n), n = 1, 2, ...,$ v níž $0 \leq x_1 < x_2 < .... < x$ a $lim_{n\to\infty} x_n = x$. Jelikož pro všechna n máme $0 \leq x_n < x_{n+1} \leq 1$, víme z předchozího, že existuje posloupnost (x'_n), v níž $x_n < x'_n \leq x_{n+1}$ a, co je zejména důležité, $x'_n \in \mathbf{A}$. Pak platí $x'_1 < x'_2 < ....$ a $lim_{n\to\infty} x'_n = x$, stačí tedy použít vlastnost **iii**, abychom viděli, že $\mathbf{A}$ obsahuje všechna čísla z intervalu $[0; 1]$, protože x jsme volili libovolně.

□

Naším cílem je teď ukázat, že obor hodnot dimenzní funkce $(Rng(\Delta))$ splňuje podmínky **i**, **ii** a **iii**. Nejobtížnější bude podmínka **iii**, na ni si budeme muset připravit několik pomocných lemmat a vět.

Lemma 2.7.2. *Pro nezávislé prvky je dimenze spojení součtem dimenzí:* $(a_1, a_2, ..., a_n)\perp \Rightarrow \Delta(a_1 \vee .... \vee a_n) = \Delta(a_1) + ... + \Delta(a_n)$.

Důkaz. Povedeme indukcí. Pro $n = 1$ je lemma triviální. Platí-li pro $n = m$, nejprve využijeme známých vlastností konečných nezávislých systémů. Protože $(a_1, ..., a_{m+1})\perp$, platí také $(a_1, ..., a_m)\perp$ a $(a_1 \vee .... \vee a_m) \wedge a_{m+1} = 0$. Teď použijeme vlastností dimenzní funkce (věta 2.6.13 (2)): $\Delta(a_1 \vee .... \vee a_m) = \Delta(a_1 \vee .... \vee a_m) + \Delta(a_{m+1})$ a z indukčního předpokladu $\Delta(a_1 \vee .... \vee a_m) = \Delta(a_1) + ... + \Delta(a_m)$, čímž jsme hotovi. □

Lemma 2.7.3. *Ať a je prvek z L a $(a_i), i = 1, 2, ...$ konečná nebo nekonečná spočetná posloupnost splňující*

$$\sum_i \Delta(a_i) \leq \Delta(a).$$

Pak existuje nezávislá posloupnost $(a'_i)\perp, i = 1, 2, ...,$ pro niž $\forall i\ a_i \sim a'_i \leq a$.

Důkaz. Také toto lemma dokážeme indukcí. Je-li $n = 1$, platí tvrzení triviálně. Předpokládejme, že konečná posloupnost $(a'_1, ..., a'_{n-1})$ už je definována a platí pro ni $(a'_1, ..., a'_{n-1})\perp, a_i \sim a'_i \leq a$ pro každé $i = 1, ..., n$. Hledáme tedy další člen posloupnosti a'_n. Protože všechny prvky dosud zkonstruované posloupnosti $a'_1, ..., a'_{n-1}$ jsou srovnatelné s a (konkrétně $a'_i \leq a$), platí zjevně $a'_1 \vee .... \vee a'_{n-1} \leq a$. Existuje tedy doplněk k $a'_1 \vee .... \vee a'_{n-1}$ v a, označme ho x_n. Pak podle vlastností doplňku samozřejmě $(a'_1 \vee .... \vee a'_{n-1}) \wedge x_n = 0$, a tedy $(a'_1, ..., a'_{n-1}, x_n)\perp$. Lemma 2.7.2 nám dává

$$\Delta(a) = \Delta(a'_1) + ... + \Delta(a'_{n-1}) + \Delta(x_n) = \Delta(a_1) + ... + \Delta(a_{n-1}) + \Delta(x_n).$$

Druhá rovnost vyplývá z perspektivity prvků a_i a a_i'. Podle předpokladu lemmatu nyní

$$\Delta(a) \geq \sum_i \Delta(a_i) \geq \Delta(a_1) + ... + \Delta(a_n),$$

z čehož zřejmě vyplývá, že $\Delta(x_n) \geq \Delta(a_n)$, a podle 2.6.13 (5) také $x_n \gtrsim a_n$. Musí tedy existovat nějaké a_n', pro nějž $a_n \sim a_n' \leq x_n$ a pro něj tím pádem platí

$$(a_1' \vee .... \vee a_{n-1}') \wedge a_n' \leq (a_1' \vee .... \vee a_{n-1}') \wedge x_n = 0,$$

což naplňuje definici nezávislosti, takže $(a_1', ..., a_{n-1}', a_n')\perp$. Tímto způsobem tedy dostaneme posloupnost, $(a_i'; i = 1, 2, ...)$, v níž platí $a_i \sim a_i' \leq a$, a každá její konečná část $(a_1', ..., a_n')\perp$ je nezávislá. Z vlastností nezávislosti (její "kompaktnosti") ale dostáváme i $(a_i'; i = 1, 2, ...)\perp$. □

Věta 2.7.4. *Je-li* $(a_i), i = 1, 2, ...$ *nejvýš spočetná* ***nezávislá*** *posloupnost, pak*

$$\Delta(\bigvee_i a_i) = \sum_i \Delta(a_i).$$

Důkaz. Nejprve vyloučíme triviální případy. Je-li posloupnost (a_i) konečná, plyne tvrzení z lemmatu 2.7.2. Dokazovaný vztah neovlivní prvky $a_i = 0$, takže můžeme uvažovat nekonečnou posloupnost (a_i), kde $\forall i\ a_i \neq 0$, a tedy $\Delta(a_i) > 0$. Z nezávislosti (a_i) plyne $\forall n \in \mathbf{N}$

$$(a_1 \vee .... \vee a_n) \wedge \bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i = 0,$$

ale protože také $(a_1, ..., a_n)\perp$, plyne z věty 2.2.2 $(a_1, ..., a_n, \bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i)\perp$. Dle lemmatu pro konečný případ (2.7.2) dostáváme

$$(*)\ \Delta(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i) = (\Delta(a_1) + ... + \Delta(a_n)) + \Delta(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i).$$

Necháme-li n konvergovat k ∞, zůstane levá strana rovnice $(*)$ kontstantní. První součet pravé strany bude konvergovat (růst) k $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta(a_i)$, a tedy druhý součet musí konvergovat (a ostře klesat) k nějakému číslu $\epsilon \geq 0$. Symbolicky zapsáno:

$$\Delta(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta(a_i) + \epsilon.$$

Předpokládejme teď pro spor, že $\epsilon > 0$. Protože $\sum_i \Delta(a_i)$ konverguje, musí být $lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \Delta(a_i) = 0$ a také (ze základní podmínky pro konvergenci řady) $lim_{m\to\infty}\Delta(a_m) = 0$. Musí tedy existovat nějaké m, pro nějž $0 < \Delta(a_m) < \epsilon$ a dále nějaké n, pro které $\sum_{i=n+1}^{\infty} \Delta(a_i) \leq \Delta(a_m)$. Použitím lemmatu 2.7.3 na $a = a_m$ a posloupnost $(a_{n+i}; i = 1, 2, ...)$ získáme posloupnost $(a'_i; i = 1, 2, ...)\perp$, v níž pro každé i platí $a_{n+1} \sim a'_i \leq a_m$. Zjevně také $\bigvee_i a'_i \leq a_m$, což uvádím pro jistotu, protože tento vztah v důkazu ještě několikrát použijeme.
Přichází moment, kdy budeme potřebovat větu 2.3.9 o dvou posloupnostech perspektivních prvků nezávislého systému. Protože $(a_{n+i})\perp$ a $(a'_i)\perp$, platí

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} a'_i \wedge \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{n+1} \leq a_m \wedge \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{n+1} = 0,$$

a aplikací věty 2.2.2 o nezávislosti dvou disjunktních množin (a vhodným uspořádáním posloupností) získáváme $(a_{n+1}, a'_1, a_{n+2}, a'_2, ...)\perp$. Posloupnost (a'_i) splňuje pro každé i $a_{n+i} \sim a'_i$, z čehož pak použitím zmiňované věty 2.3.9 plyne $\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{n+1} \sim \bigvee_{i=1}^{\infty} a'_i$. Následně z vlastností dimenzní funkce (2.6.13 (3) a (4))

$$\Delta(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{n+i}) = \Delta(\bigvee_{i=1}^{\infty} a'_i) \leq \Delta(a_m) \leq \epsilon.$$

To je ale ve sporu s tím, že

$$\Delta(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{n+i}) > lim_{p\to\infty}\Delta(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{p+1}) = \epsilon.$$

A proto musí být $\epsilon = 0$. □

Věta 2.7.5. *Ať $(a_i), i = 1, 2, ...$ je nekonečná spočetná neklesající posloupnost. Pak*

$$\Delta(lim_{n\to\infty} a_n) = lim_{n\to\infty}\Delta(a_n).$$

Důkaz. Položme $a_0 := 0$ a pak definujme pro každé n x_n jako doplněk a_{n-1} v a_n. Dle předpokladu máme pro $1 \leq m < n$ $x_m \leq a_m \leq a_{n-1}$, z čehož $x_1 \vee .... \vee x_{n-1} \leq a_{n-1}$ a tím pádem $(x_1 \vee .... \vee x_{n-1}) \wedge x_n \leq a_{n-1} \wedge x_n = 0$. Z věty 2.2.3 dostáváme nezávislost konečného systému $(x_1, ..., x_p)\perp$ pro libovolné $p = 1, 2, ...$, z čehož znovu podle "kompaktnosti" nezávislosti platí

$(x_i; i = 1, 2, ...)\perp$. Protože pro $n = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \vee x_n \\ a_n &= a_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n \\ &.... \\ a_n &= a_0 \vee x_1 \vee .... \vee x_n \\ a_n &= x_1 \vee .... \vee x_n, \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

vidíme, že

$$lim_{n\to\infty} a_n = \bigvee_{i=1}^{\infty} a_i = \bigvee_{i=1}^{\infty} x_i.$$

První rovnost je definice, druhá vyplývá z rovnice (2.7.1). Díky předchozí větě 2.7.4, nezávislosti (x_i) a faktu, že součet číselné řady je roven limitě jejích částečných součtů, můžeme uzavřít:

$$\begin{aligned} \Delta(lim_{n\to\infty} a_n) = \Delta(\bigvee_{i=1}^{\infty} x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta(x_i) = lim_{n\to\infty}(\Delta(x_1) + ... + \Delta(x_n)) \\ = lim_{n\to\infty} \Delta(x_1 \vee .... \vee x_n) = lim_{n\to\infty} \Delta(a_n). \end{aligned}$$

□

Vše je tedy připraveno k tomu, abychom dokázali, že obor hodnot dimenzní fuknce $(Rng(\Delta))$ zavedené v předchozí kapitole může být jen v jednom z tvarů "**N**" (2.7.1 (1)) nebo "∞" (2.7.1 (2)).

Věta 2.7.6. *Obor hodnot dimenzní funkce Δ splňuje podmínky **i**, **ii** a **iii** z věty 2.7.1.*

Důkaz.

i) $\Delta(0) = 0, \Delta(1) = 1$, takže $0, 1 \in Rng(\Delta)$.

ii) $a, b \in Rng(\Delta)$ a platí $a \leq b$. Chceme dokázat, že $(b - a) \in Rng(\Delta)$. Vezměme dva libovolné prvky $x, y \in L$, pro něž $\Delta(x) = a, \Delta(y) = b$, pak $\Delta(x) \leq \Delta(y)$, a tedy $x \precsim y$, neboli dle definice $\exists x'\ x \sim x' \leq y$. Označme c doplněk k x' v y. Protože $x'c = 0, x' + c = y$, máme ze základních vlastností dimenze

$$\Delta(y) = \Delta(x') + \Delta(c) = \Delta(x) + \Delta(c).$$

Neboli $\Delta(c) = \Delta(y) - \Delta(x) = b - a$, a tedy $(b - a) \in Rng(\Delta)$.

iii) Naším posledním úkolem je, vzhledem k tomu, že už máme větu 2.7.5, pouze najít posloupnost prvků z L příslušející posloupnosti prvků z $Rng(\Delta)$. Najdeme tedy takové $x_1 \in L$, že $\Delta(x_1) = a_1$. Pak indukcí, je-li x_n ($\Delta(x_n) = a_n$) už definováno, ať je x'_{n+1} libovolný prvek, pro nějž $\Delta(x'_{n+1}) = a_{n+1}$. Jelikož podle předpokladu $\Delta(x_n) \leq \Delta(x'_{n+1})$, musí být $x_n \precsim x'_{n+1}$, a tedy musí existovat nějaké x_{n+1}, pro které $x'_{n+1} \sim x_{n+1} \geq x_n$ a samozřejmě $\Delta(x_{n+1}) = a_{n+1}$. Tímto způsobem tedy zkonstruujeme posloupnost srovnatelných prvků $x_1 \leq x_2 \leq ....$, pro něž platí $\Delta(x_n) = a_n$. Aplikací věty 2.7.5 dokážeme, že $(lim_{n\to\infty} a_n) \in Rng(\Delta)$.

$\square$

Kapitola 3

Příklady spojitých geometrií

V předchozí kapitole jsme struktury splňující axiomy 1 - 6 rozdělili na dva případy - L_N a L_∞, podle toho, jaké dimenze mohou být jejich prvky. Struktury tvaru L_N jsou známé, může jít například o systém všech podprostorů nějaké $n-1$-dimenzionální projektivní geometrie P_{n-1}. V této kapitole tedy uvedu konkrétní příklad celé třídy struktur typu L_∞, který publikoval John von Neumann v článku z roku 1936 [15]. Konstrukce je založena na sjednocení spočetně mnoha konečnědimenzionálních projektivních prostorů, respektive jim odpovídajících svazů $L^{(0)}, L^{(1)}, ...$ (samozřejmě se zachovanými relacemi a operacemi dle axiomů 1 - 6), a následném cantorovském zúplnění výsledného metrického prostoru $L^{(\infty)}$. Zavedení metriky na jednotlivých svazech je hned prvním krokem celé konstrukce.

3.1 Metrizace L_N

Mějme Z kvazitěleso[1], ne nutně komutativní, ale asociativní. Ať $n = 1, 2, ...$ **L-vektorem**[2] nazveme skupinu n prvků ze Z, z nichž alespoň jeden je nenulový, značíme $(x_1, ..., x_n)$, přičemž platí, že $(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$ právě tehdy, pokud existuje $r \in Z, r \neq 0$, pro které $rx_1 = y_1, ..., rx_n = y_n$.

L-vektory jsou prvky $n-1$-dimenzionálního projektivního prostoru $P_{n-1} = P_{n-1}[Z]$. Jakýkoli konečný systém rovnic

$$x_1 a_{i1} + ... + x_n a_{in} = 0$$

[1]Kvazitělesem rozumíme okruh s dělením, takže pro každý jeho prvek existuje multiplikativní inverze.

[2]Von Neumann používá označení *left-ratio*.

pro $i = 1, ..., m$, kde a_{ij} jsou pevně zvolené prvky Z, určuje lineární podprostor $a \leq P_{n-1}$. Nejmenší počet takových rovnic, které už určují prostor a, označujeme $r(a)$ a nazýváme **hodností podprostoru**[3].

Systém podprostorů a (doplněný o relaci "býti podprostorem") splňuje axiomy pro spojitou geometrii (1 - 6), označme ho tedy L. Podívejme se teď na vztah dimenze, jak je používána v projektivní geometrii (značme ji d), a námi zavedené dimenze pro spojitou geometrii (Δ). Celý prostor P_{n-1} má "tradiční" dimenzi $n-1$ a jeho hodnost je 0. Naproti tomu matice rovnic o hodnosti n vymezuje podprostor $a =< (0, ..., 0) >$, který má dimenzi -1. Vidíme tedy, že vzorec pro vztah hodnosti podprostoru a jeho geometrické dimenze je

$$d(a) = n - 1 - r(a).$$

Body jsou nuladimenzionální objekty, přímky jednodimenzionální a roviny dvoudimenzionální. V označení, které jsme definovali pro spojitou geometrii pak platí

$$\Delta(a) = \frac{d(a) + 1}{n} = \frac{n - r(a)}{n}.$$

Máme tedy konkrétní příklad spojité geometrie typu **N**, označme tedy svaz podprostorů projektivního prostoru $P_{n-1}[Z]$ jako $L_N := L$.

Metrika na L_N je zavedena jako tzv. **dimenzní vzdálenost**. Pro $a, b \in L_N$ definujme

$$\delta(a, b) = \Delta(a \vee b) - \Delta(a \wedge b).$$

Ověřme vlastnosti metriky:

1. $\delta(a, a) = 0; \delta(a, b) > 0$ pro $a \neq b$:
   To vyplývá snadno z vlastností Δ, viz Věta 2.6.13.

2. $\delta(a, b) = \delta(b, a)$:
   Nahlédneme ještě snadněji přímo z definice.

3. $\delta(a, c) \leq \delta(a, b) + \delta(b, c)$:
   Trojúhelníkovou nerovnost dokážeme. Využijeme zejména 2.6.13 (2) a (4). Chceme tedy ukázat, že

$$\Delta(a \vee c) - \Delta(a \wedge c) \leq \Delta(a \vee b) - \Delta(a \wedge b) + \Delta(b \vee c) - \Delta(b \wedge c)$$

[3] Zjevně patrná je analogie s maticovou terminologií. Je-li tedy podprostor a určen maticí A s prvky a_{ij}, pak hodnost podprostoru je rovna hodnosti matice A.

Zjevně z vlastností spojení a průseku a 2.6.13 (4)

$$\Delta(a \vee c) - \Delta(a \wedge c) \leq$$

$$\Delta(a \vee b \vee c) - \Delta(a \wedge b \wedge c) =$$

$$= \Delta(a \vee b) + \Delta(c) - \Delta((a \vee b) \wedge c) - \Delta(a \wedge b) - \Delta(c) + \Delta((a \wedge b) \vee c) \leq$$

$$\leq \Delta(a \vee b) - \Delta((a \vee b) \wedge c) + \Delta(a \vee c) - \Delta(a \wedge b) \leq$$

$$\leq \Delta(a \vee b) - \Delta(a \wedge c) + \Delta(a \vee c) - \Delta(a \wedge b).$$

To jsme chtěli dokázat. Přičemž jediná ve vzorci obsažená rovnost vyplývá z 2.6.13 (2).

Navíc operace $a \vee b$, $a \wedge b$ splňují podmínky Lipschitzovského typu:

4. $\delta(a \vee b, c \vee d) \leq \delta(a, c) + \delta(b, d)$
5. $\delta(a \wedge b, c \wedge d) \leq \delta(a, c) + \delta(b, d)$

Metrika δ může nabývat jen hodnot $0, 1/n, 2/n, ..., 1$, takže nevede k nijak zajímavé topologii na L_N. Dimenzní vzdálenost dvou bodů je $2/n$, bodu od počátku $1/n$ a celého prostoru od počátku ($\mathbf{0}$) pak 1.

3.2 Vnoření do vícedimenzionální geometrie

Uvažme teď dva projektivní prostory $P = P_{n-1}[Z]$ a $P' = P_{kn-1}[Z]$ pro $n = 1, 2, ...$, $k = 2, 3, ...$ Potřebujeme definovat zobrazení $\phi : L = L_n[Z] \to L' = L_{kn}[Z]$ tak, aby $Rng(\phi)$ tvořil podsvaz L'.

Definice 3.2.1. Přiřaďme tedy danému $a \in L$ množinu $\phi(a)$ všech bodů $(x_1, ...x_{kn})$ prostoru P' takových, že každý z k bodů $(x_{(p-1)n+1}, x_{(p-1)n+2}, ...x_{pn})$ pro $p = 1, ..., k$ náleží a.

Ilustrace . Uveďme příklad takové korespondence. Za cílový prostor vezměme P_3, tedy $kn - 1 = 3$ a $k = 2, n = 2$. Pak $P = P_1$ je přímka a $P' = P_3$ je třídimenzionální prostor. Zobrazení ϕ pak přiřadí

- prvku $a = 0$ opět nulu.
- libovolnému bodu a přímku na hyperboloidu

- celému prostoru $a = P_1$ celý prostor $\phi(a) = P_3$.

Dá se ověřit, že je-li $a = (a_{ij}; i = 1, ..., m, j = 1, ..., n)$, pak $\phi(a) = (a'_{hl}; h = 1, ..., km, l = 1, ..., kn)$, kde

$$a'_{hl} = \begin{cases} a_{ij} & (p = q) \\ 0 & (p \neq q) \end{cases}$$

pro $h = (p-1)m+i,\ l = (q-1)n+j,\ p, q = 1, ..., k,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n.$

Ilustrace . V prostoru P_1 máme jako jediné zajímavé prvky body. Ty mají dimenzi 0, jsou tedy definovány jednou rovnicí ($d(a) = n - 1 - r(a) \Rightarrow 0 = 2 - 1 - 1$), respektive maticí s hodností 1, například: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, což je matice vymezující podprostor všech bodů tvaru $(0, x), x \in Z$. V řeči indexů tedy $i = m = 1, j = 1, 2, p, q = 1, 2, k = 2$ a tím pádem prostoru vymezenému maticí $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ je přiřazen podprostor

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Vezmeme-li tedy konkrétní příklad podprostoru bodu $(0, x), x \in Z$, pošle ho zobrazení ϕ na podprostor vymezený maticí

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

což je přesně podprostor přímek tvaru $(0, y, 0, z); y, z \in Z$. Tento závěr můžeme srovnat s původní definicí ϕ (3.2.1).

Z právě uvedených vztahů pro a a $\phi(a)$ lze vyčíst vztah pro hodnost podprostorů: $r(\phi(a)) = kr(a)$, z něhož vyplývá také vztah dimenzí (tradiční d i námi zavedené Δ):

$$d(\phi(a)) = kd(a) + (k - 1)$$

$$\Delta(\phi(a)) = \Delta(a).$$

Dále je vidět, že zobrazení ϕ zachovává relaci $<$ a operace $\vee$ a $\wedge$, takže invariantnost Δ pak dává i zachování dimenzní vzdálenosti $\delta(\phi(a), \phi(b)) = \delta(a, b)$. Celkově je tedy ϕ isometrickým isomorfismem L na $\phi(L) \subset L'$.

3.3 Nekonečná posloupnost vnoření

Zvolme libovolnou posloupnost $k_1, k_2....$, kde $k_i = 2, 3, ...$ Položme $n_t = k_1 \cdot k_2 \cdot .... \cdot k_t$ pro $t = 0, 1, 2, ...$ $(n_0 = 1)$. Podle návodu z 3.1 utvoříme prostory $P^{(t)} = P_{n_t - 1}[Z]$ a jim příslušející svazy $L^{(t)} = L_{n_t}[Z]$.

Pro každé t můžeme teď aplikovat konstrukci uvedenou v 3.2 berouce $n := n_t$, $k := k_{t+1}$, $kn := n_{t+1}$ a $P = P^{(t)}$, $P' = P^{(t+1)}$, $L = L^{(t)}$, $L' = L^{(t+1)}$. Tak získáme nekonečně mnoho isomorfismů $a \leftrightarrow \phi_t(a)$ všech $a \in L^{(t)}$ se všemi $\phi_t(a) \in \phi_t(L^{(t)}) \subset L^{(t+1)}$. Ztotožníme-li pro všechna $t = 0, 1, 2, ...$ $a \in L^{(t)}$ a $\phi_t(a) \in L^{(t+1)}$, vytvoříme rostoucí posloupnost množin

$$L^{(0)} \subset L^{(1)} \subset ....$$

Označme teď $L^{(\infty)} := \bigcup_t L^{(t)}$. Z dříve řečeného vyplývá, že $<$, $\vee$, $\wedge$, Δ a δ jsou definovány i v $L^{(\infty)}$ a navíc splňují všechna přenesená formální pravidla, specielně (1) - (5) z části 3.1. V tomto případě už ale obor hodnot, kterých může metrika δ nabývat, není tak omezený. Naopak, protože je tvořen všemi čísly tvaru p/n_t, $t = 0, 1, 2....$, $p = 0, 1, 2, ...n_t$, jde o hustou podmnožinu intervalu $[0; 1]$.

3.4 Zúplnění $L^{(\infty)}$

Definice 3.4.1. Posloupnost prvků $a_1, a_2, ... \in L^{(\infty)}$ je nazývána **cauchyovská**, pokud

$$\lim_{\rho, \sigma \to \infty} \delta(a_\rho, a_\sigma) = 0.$$

Dvě cauchyovské posloupnosti $a_1, a_2, ...b_1, b_2, ... \in L^{(\infty)}$ jsou ekvivalentní, pokud

$$\lim_{\rho \to \infty} \delta(a_\rho, b_\rho) = 0.$$

Ztotožníme-li ekvivalentní cauchyovské posloupnosti, získáme faktorprostor $\overline{L^{(\infty)}}$.

Lemma 3.4.2. *Jsou-li $a_1, a_2, ...$ a $b_1, b_2, ...$ cauchyovské posloupnosti, pak*

1. *posloupnost $a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, ...$ je cauchyovské,*
2. *posloupnost $a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, ...$ je cauchyovské,*
   přitom, pokud u předchozích operací nahradíme (a_i) nebo (b_i) ekvivalentní posloupností, dostaneme jako výsledky ekvivalentní posloupnosti

3. $\lim_{\rho\to\infty} \Delta(a_\rho)$ *existuje,*

4. $\lim_{\rho\to\infty} \delta(a_\rho, b_\rho)$ *existuje,*
a také tady platí, že záměna ekvivaletních posloupností neovlivní výsledek.

Důkaz. (1), (2) a (4) plynou snadno z metricko-Lipschitzovských podmínek 3.1 (1) - (5). A bod (3) je vlastně (4), do níž dosadíme $b_i = 0$. □

Můžeme na $\overline{L^{(\infty)}}$ tedy zavést svazové operace:

Definice 3.4.3. Ať $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overline{L^{(\infty)}}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ...)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ...)$. Pak definujme:

- $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, ...)$
- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, ...)$
- $\Delta(\mathbf{a}) = \lim_{\rho\to\infty} \Delta(a_\rho)$
- $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lim_{\rho\to\infty} \delta(a_\rho, b_\rho)$.

Vzhledem k tomu, jak byly operace a funkce zadefinovány, je jasné, že splňují všechna pravidla zděděná už z $L^{(0)}$, $L^{(1)}$ atd. Protože je tím pádem $\overline{L^{(\infty)}}$ modulární svaz, můžeme zavést ještě uspořádání $<$:

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \overset{df}{\Leftrightarrow} \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \overset{df}{\Leftrightarrow} \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \;\&\; \mathbf{a} \neq \mathbf{b}.$$

Pozorování 4. Ze samotné konstrukce svazu $\overline{L^{(\infty)}}$ vyplývá jeho úplnost vůči metrice $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:
Jsou-li $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ... \in \overline{L^{(\infty)}}$, pak existence prvku $\mathbf{a} \in \overline{L^{(\infty)}}$ splňujícího

$$\lim_{\rho\to\infty} \delta(\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}) = 0$$

je ekvivalentní platnosti

$$\lim_{\rho,\sigma\to\infty} \delta(\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\sigma) = 0.$$

Budeme značit $\lim^{(\delta)}_{\rho\to\infty}(\mathbf{a}_\rho) := \mathbf{a}$.

Protože potřebujeme ukázat, že svaz $\overline{L^{(\infty)}}$ je úplný, musíme najít supremum a infimum každé podmnožiny nebo ekvivalentně každé neklesající a každé nerostoucí posloupnosti. Nechť Ω je nějaké nekonečné číslo a předpokládejme, že $\forall\ \alpha < \Omega$ je dáno $\mathbf{a}_\alpha \in \overline{L^{(\infty)}}$. Předpokládejme teď také $\mathbf{a}_\alpha \leq \mathbf{a}_\beta$ pro $\alpha < \beta < \Omega$.

Z vlastností Δ plyne $\Delta(\mathbf{a}_\alpha) \leq \Delta(\mathbf{a}_\beta)$. A je-li tedy Ω nespočetné, pak pro α dostatečně velké je $\Delta(\mathbf{a}_\alpha)$ konstantní, z čehož podle vlastností Δ (2.6.13) vyplývá i konstantnost $\mathbf{a}_\alpha$ pro dostatečně velké α, označme ho $\mathbf{a^0} := \mathbf{a}_\alpha$. Zjevně $\mathbf{a^0}$ je nejmenší horní závorou množiny $\mathbf{a}_\alpha$ pro $\alpha < \Omega$.

Je-li $\Omega = \omega$ spočetné ($\alpha = 1, 2, ...$), pak platí $\Delta(\mathbf{a_1}) \leq \Delta(\mathbf{a_2}) \leq .... \leq 1$, takže $\lim_{\alpha\to\infty} \Delta(\mathbf{a}_\alpha)$ existuje a tedy platí

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha,\beta\to\infty} \delta(\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta) &= \lim_{\alpha,\beta\to\infty} (\Delta(\mathbf{a}_\alpha \vee \mathbf{a}_\beta) - \Delta(\mathbf{a}_\alpha \vee \mathbf{a}_\beta)) \\
&= \lim_{\alpha,\beta\to\infty} (\Delta(\mathbf{a}_{\mathbf{max}(\alpha,\beta)}) - \Delta(\mathbf{a}_{\mathbf{min}(\alpha,\beta)})).
\end{aligned}$$

Ale poslední limita je rovná nule pro $\alpha, \beta \to \infty$, takže podle posledního pozorování existuje i $\lim^{(\delta)}_{\alpha\to\infty}(\mathbf{a}_\alpha)$. V tomto případě se dá ukázat, že nejmenší horní závorou posloupnosti $\mathbf{a}_\alpha$ je $\mathbf{a^0} := \lim^{(\delta)}_{\alpha\to\infty}(\mathbf{a}_\alpha)$. Podobně můžeme dokázat také existenci suprem v případě nerostoucích posloupností.

Protože ve svazu $\overline{L^{(\infty)}}$ existují suprema a infima nerostoucích a neklesajících posloupností, s využitím *Pozorování 1* za definicí 2.1.1, vidíme, že existují už suprema a infima všech podmnožin $\overline{L^{(\infty)}}$.

Obor hodnot dimenzní funkce Δ na $\overline{L^{(\infty)}}$ v sobě obsahuje obor hodnot Δ na $L^{(\infty)}$, o němž jsme ukázali, že je hustou podmnožinou intervalu všech reálných čísel $[0; 1]$, nemůže tedy být tvaru Δ_N pro nějaké $N = 1, 2, ...$ Protože jde ale o dimenzní funkci na struktuře splňující axiomy spojité geometrie, musí být podle věty 2.7.6 tvaru Δ_∞. Takže $\overline{L^{(\infty)}} = \overline{L^{(\infty)}}[Z]$ je systém tvaru L_∞.

Kapitola 4

Souřadnice

Druhá z hlavních částí knihy von Neumannových přednášek o Spojitých geometriích je věnována problému koordinatizování[1] svazů. Zejména, samozřejmě, komplementárních modulárních svazů, specielně pak i spojitých geometrií. Zavedením souřadnic se obecně rozumí nalezení isomorfismu se svazem pravých[2] hlavních ideálů nějakého okruhu. Tento okruh je pak okruhem souřadnic zkoumané geometrie. Von Neumann navázal na již tehdy známý postup zavedení souřadnic do konečnědimenzionálních projektivních geometrií tak, jak ho publikovali Veblen a Young v knize *Projective Geometry* ([18]) i na základě výsledků K. G. C. von Staudta [17]. Ten jsme vlastně použili v úvodu kapitoly 3.1, kdy jsme konstruovali projektivní geometrii nad libovolným kvazitělesem. Korespondencí mezi komplementárními modulárními svazy a projektivními geometriemi se podrobněji zabývá článek G. Birkhoffa [1]. Birkhoffova dimenze je ovšem omezená pouze na hodnoty v konečných přirozených číslech. Von Neumannovým úkolem tedy bylo rozšířit tento postup na spojité geometrie, myšleno teď komplementární modulární ireducibilní svazy s nekonečným oborem hodnot dimenzní funkce. Vzhledem k výsledkům pro konečnědimenzionální projektivní geometrie, potažmo svazy L_N, musí hledání struktury, z níž budeme brát souřadnice pro L_∞, začít u obecnějšího objektu než je kvazitěleso.

[1] Tento termín, ani termín "osouřadnicování" mému jazykovému citu nesedí. I v zájmu čtenáře se jim budu, jak to jen půjde, vyhýbat.

[2] Lze ekvivalentně uvažovat i levé ideály. Protože nám to usnadní práci, pokud nebude řečeno jinak, nadále platí vše, co platí pro pravé ideály, také pro levé ideály. Případně s evidentní symetrií.

Mějme tedy libovolný okruh $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$[3]. Ať $A \subset \mathbf{R}$, symbolem $[A]_r$ budeme značit nejmenší pravý ideál obsahující A. Je-li $a \in \mathbf{R}$, položíme $[a]_r := [\{a\}]_r$, takové množiny generované jedním prvkem nazýváme **hlavní ideály**. Systém všech pravých ideálů v $\mathbf{R}$ tvoří spolu s operací množinového průniku ($\bigcap_i A_i$) a uzávěru sjednocení ($[\bigcup_i A_i]_r$) úplný svaz. Vzhledem k tomu budeme nadále značit $A + B := [A + B]_r$. Je-li A ideál v $\mathbf{R}$, přirozeně definujeme jako jeho **doplněk** ten ideál B, pro který platí $A \cap B = [0]_r$ a dále $A + B = \mathbf{R}$. Problém se svazem pravých ideálů libovolného okruhu je ovšem v tom, že není komplementární.

4.1 Objevení regulárních okruhů

Definice 4.1.1. Prvek $e \in \mathbf{R}$ je idempotentní, platí-li $ee = e$.

Se zavedením idempotentních prvků se pojí několik tradičních pozorování.

Pozorování 5. e je idempotentní, právě když $(1 - e)$ je idempotentní.

Důkaz. $(1 - e)(1 - e) = 1 - 2e + ee = 1 - e$. □

Pozorování 6. Pro e idempotentní platí $x \in [e]_r \Leftrightarrow ex = x$.

Důkaz. Zprava doleva zjevně $x = ex \in [e]_r$. Naopak, je-li $x \in [e]_r$, pak $\exists y \in \mathbf{R}\ x = ey$, tedy $ex = eey = ey = x$. □

Lemma 4.1.2. *Ideály A a B jsou vzájemnými doplňky, právě když existuje idempotentní prvek e, pro který platí $A = [e]_r, B = [1 - e]_r$.*

Důkaz.
Postačujícnost:
Protože $1 = e + (1 - e) \in A + B$, je už $A + B = \mathbf{R}$. Dále $x \in A \cap B$ implikuje dle pozorování 6 $x = ex$ a také $x = (1 - e)x \Leftrightarrow ex = 0$. Celkem tedy $x = 0$, takže $A \cap B = [0]_r$.
Nutnost:
Ať jsou A, B doplňkové ideály. Pak můžeme rozložit $1 = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Vezmeme-li teď $x \in A$, pak $x = ax + bx$. Jelikož $ax \in A, x \in A$, musí také $bx \in A$. Protože ale samozřejmě $bx \in B$, je $bx \in A \cap B$, a tedy $bx = 0$. Takže $x = ax$, $A \subset [a]_r$. Evidentně také $[a]_r \subset A$, celkem $A = [a]_r$. Podobně se ukáže, že $B = [b]_r = [1 - a]_r$. Idempotence a vyplývá z následujícího: $a - aa = a(1 - a) = (1 - a)a \in A \cap B$, takže $a - aa = 0$. □

[3]Symbol $\cdot$ pro násobení si dovolíme vynechávat.

Pozorování 7. Ideály A a B určují idempotent e jednoznačně. Neboli, pokud $A = [e]_r = [f]_r,\ B = [1-e]_r = [1-f]_r$, pak už $e = f$.

Důkaz. První rovnost dává $e \in [f]_r$ a podle pozorování 6 $fe = e$, čili $(1 - f)e = 0$. Nahradíme-li e, f jejich protějšky $(1-e), (1-f)$, dává nám druhá rovnost $(1-f)(1-e) = (1-e)$, neboli $(1-(1-f))(1-e) = 0$, čili $f = fe$, z čehož $e = f$. □

Lemma 4.1.3. *Vlastnost "pro každý hlavní ideál $[a]_r \subset \mathbf{R}$ existuje idempotent $e \in \mathbf{R}$, že $[a]_r = [e]_r$" je ekvivalentní s podmínkou: "$\exists x \in \mathbf{R}$ $axa = a$, navíc $e = ax$".*

Důkaz. Uvedenou vlastnost můžeme přeformulovat takto: (i) $e \in [a]_r$, (ii) e je idempotent, (iii) $a \in [e]_r$. (i) znamená, že $\exists x$ $e = ax$. (ii) $ee = e$, čili $axax = ax$, a (iii) nám říká, že $ea = a$ (podle pozorování 6), neboli $axa = a$. Protože poslední rovnost implikuje $axax = ax$, stačí nám k vyjádření vlastnosti podmínky $axa = a$, $e = ax$. □

Důsledkem uvedených lemmat je ekvivalence tří vlastností $\mathbf{R}$.

Lemma 4.1.4. *Ať $a \in \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:*

1. $\exists x \in \mathbf{R}$ $axa = a$
2. $\exists e \in \mathbf{R}$, *e idemp.*, $[a]_r = [e]_r$
3. $\exists B \subset \mathbf{R}$, *$B$ je pravý ideál a B je doplňkem $[a]_r$.*

Zrekapituluji ještě jednou myšlenkový postup skrytý za předchozími lemmaty a pozorováními. Hledáme strukturu, která bude isomorfní se spojitou geometrií typu s L_∞. Abychom přirozeně rozšířili postup uplatňovaný na konečnědimenzionální projektivní geometrie, hledáme ve svazech ideálů okruhů. Protože L_∞ je ale komplementární svaz, musíme se dle lemmatu 4.1.2 omezit na množinu hlavních ideálů. Ta ale v obecném okruhu netvoří svaz[4]. Musíme tedy nějak omezit svou výchozí libovůli ve volbě $\mathbf{R}$. V tom nám napovídá podmínka z lemmatu 4.1.4. Takto tedy John von Neumann dospěl k definici regulárního okruhu. Jejich podrobnému zkoumání je zasvěcena kniha K. R. Goodearla *Von Neumann Regular rings*.

[4]Von Neumann uvádí jednoduchý protipříklad: Ať $\mathbf{R}$ je komutativní okruh všech prvků tvaru $p + q\sqrt{-5}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Pak $A = [3]_r$ a $B = [1 + 2\sqrt{-5}]_r$ jsou hlavní, ale uzávěr jejich sjednocení není hlavní.

4.2 Základní vlastnosti regulárních okruhů a jejich ideálů

Definice 4.2.1. Okruh R (asociativní okruh s jednotkou) je (von Nemannovsky) **regulární**, pokud v něm platí $\forall a \in R\ \exists x \in R\ axa = a$.

Od teď fixujme $\mathbf{R}$ jako konkrétní regulární okruh. Množinu všech pravých hlavních ideálů $\mathbf{R}$ budeme značit $R_{\mathbf{R}}$, množinu všech levých hlavních ideálů $L_{\mathbf{R}}$. Na programu je teď důkaz toho, že $R_{\mathbf{R}}$ a $L_{\mathbf{R}}$ jsou svazy. Využijeme definice anihilátorů v okruhu:

Definice 4.2.2. Je-li $A \subset \mathbf{R}$, definujeme:

$$A^l := \{x \in \mathbf{R}; a \in A \Rightarrow xa = 0\}$$

$$A^r := \{x \in \mathbf{R}; a \in A \Rightarrow ax = 0\}$$

Pozorování 8. Tyto vlastnosti se snadno dokážou, navíc jsou známé. A jsou levo-pravě symetrické:

1. A^l je levý ideál
2. $A \subset B \Rightarrow A^l \subset B^l$
3. $A \subset A^{lr}$
4. $A^l = A^{lrl}$

Směřujeme k tomu, že zobrazení ^{l} a ^{r} jsou anti-isomorfismy tříd $L_{\mathbf{R}}$ a $R_{\mathbf{R}}$.

Lemma 4.2.3. *Pro každý hlavní pravý ideál A existuje hlavní levý ideál B, že $A = B^r$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme s využitím regulárnosti okruhu $\mathbf{R}$. Pro nějaký idempotent e platí $A = [e]_r$. Vezmeme-li tedy $x \in A$, pak $ex = x$, neboli, podobně jako už dříve $(1-e)x = 0$, což samozřejmě znamená $\forall z \in \mathbf{R}\ z(1-e)x = 0$. Vidíme tedy, že pro všechna $y \in [1-e]_l\ yx = 0$, takže $A = [1-e]_l^r$, hledaný ideál je $B = [1-e]_l$. □

Lemma 4.2.4. *Je-li A hlavní pravý ideál, pak $A = A^{lr}$.*

Důkaz. Vezměme nějaké $B^r = A$ z lemmatu 4.2.3. Podle pozorování 8 platí $A^{lr} = (B^r)^{lr} = B^r = A$. □

Důsledek . Je-li A hlavní pravý ideál, pak A^l je hlavní levý ideál.

Důkaz. Spojením lemmat 4.2.3 a 4.2.4 pro $A = B^r$ platí $A^l = B^{rl} = B$, kde B je hlavní levý ideál. $\square$

Věta 4.2.5. *Zobrazení $A \to A^l$ je bijekcí $R_{\mathbf{R}}$ na $L_{\mathbf{R}}$, zobrazení $A \to A^r$ je bijekcí $L_{\mathbf{R}}$ na $R_{\mathbf{R}}$. Tato zobrazení jsou navzájem inverzní a antimonotonní.*

Důkaz. Vše jsme už ukázali. Podle lemmatu zobrazuje $A \to A^l$ $R_{\mathbf{R}}$ do $L_{\mathbf{R}}$ a $A \to A^r$ $L_{\mathbf{R}}$ do $R_{\mathbf{R}}$. Podle lemmatu 4.2.4 jsou tato zobrazení vzájemnými inverzemi, a tedy bijektivní. Antimonotonii zaručuje druhá část pozorování 8. $\square$

Lemma 4.2.6. *Jsou-li A, B hlavní pravé ideály, pak existují dva idempotentní prvky $e, f \in \mathbf{R}$ splňující $ef = fe = 0$ a $A + B = [e]_r \cup [f]_r$.*

Důkaz. Lemma se dokáže poněkud technicky. Z regularity $\mathbf{R}$ (podle lemmatu 4.1.4) máme zaručenu esistenci idempotentu $e, A = [e]_r$. Protože B je hlavní, existuje nějaké $b \in \mathbf{R}$, že $B = [b]_r$. Položme $B_1 := [(1-e)b]_r$. $A + B$ je množinou všech součtů tvaru $a+b,\ a \in A, b \in B$, neboli tvaru $ex+by,\ x, y \in \mathbf{R}$. Naproti tomu $A + B_1$ je tvořena všemi součty $a + b_1,\ a \in A, b_1 \in B_1$, čili $ex' + (1-e)by = e(x' - by) + by$, přičemž $x', y \in \mathbf{R}$. Pak vyplývající korespondence $x = x' - by, x' = x + by$ jasně ukazuje, že $A + B = A + B_1$.

Regularita $\mathbf{R}$ dává také možnost vyjádření $B_1 = [f_1]_r$, kde f_1 je idempotent. Tím pádem pro nějaké $r \in \mathbf{R}$ platí $f_1 = (1-e)br$, z čehož, vynásobíme-li obě strany zleva e, plyne $ef_1 = 0$. Položme $f := f_1(1-e)$ a dokažme, že tento prvek je idempotentní: $ff_1 = f_1(1-e)f_1 = f_1(f_1 - ef_1) = f_1 f_1 = f_1$. Dále $ff = ff_1(1-e) = f_1(1-e) = f$. Teď už jen potřebujeme, že f generuje B. Protože ale $f = f_1(1-e) \in [f_1]_r$ a $f_1 = ff_1 \in [f]_r = B_1$, platí $[f_1]_r = [f]_r$, a tedy $A + B = A + B_1 = [e]_r + [f]_r$. Podmínka nulového součinu se dokáže prostým dosazením. $\square$

Lemma 4.2.7. *Jsou-li A, B hlavní pravé ideály, pak $A + B$ je také hlavní pravý ideál.*

Důkaz. Vězměme idempotenty e, f, které nám dává předchozí lemma a ověřme, zda jejich součet generuje ten správný ideál. Zjevně $e + f \in [e]_r \cup [f]_r$, takže $[e + f]_r \subseteq [e]_r \cup [f]_r$. Naopak ale také $(e + f)e = ee + fe = e$ a $(e + f)f = ef + ff = f$, takže $e, f \in [e+f]_r \Rightarrow [e]_r, [f]_r \subseteq [e+f]_r \Rightarrow [e]_r \cup [f]_r \subseteq [e+f]_r$, celkem tedy $[e + f]_r = A + B$, takže $A + B$ je hlavní. $\square$

Lemma 4.2.8. *Jsou-li A, B hlavní pravé ideály, je*

1. *$A + B$ nejmenším hlavním pravým ideálem nad A, B*
2. *$A \cap B$ největším hlavním pravým ideálem pod A, B*

Důkaz.
1.: Že je $A+B$ hlavní, jsme dokázali v předchozím lemmatu, že je nejmenším ideálem nad oběma A a B, je zřejmé.
2.: Využijeme větu 4.2.5. Vezmeme hlavní levé ideály A^l, B^l, které si zobrazíme pomocí ^{r} do $R_{\mathbf{R}}$. Podle zmiňované věty a podle části **a** musí hledaný ideál existovat a navíc být roven $(A^l \cup B^l)^r$. To je ale ekvivalentní s $A^{lr} \cap B^{lr}$, čili podle lemmatu 4.2.4 s $A \cap B$. □

Věta 4.2.9. *$R_{\mathbf{R}}$ a $L_{\mathbf{R}}$ jsou komplementární modulární svazy, spojením je operace $\cup$, průsekem $\cap$, nejmensím prvkem $[0]_r$ a největším prvkem* $\mathbf{R}$.

Důkaz. Že jde o svazy, vidíme z lemmatu 4.2.8. Nic jiného než $[0]_r$ resp. $[1]_r = \mathbf{R}$ jejich nejmenším resp. největším prvkem být nemůže, stačí ověřit definice. Komplementárnost dostáváme z regularity $\mathbf{R}$ (4.1.4 (3)) a z lemmatu 4.1.2. Modularita je skryta v následujících vztazích: At' $A \subseteq C$. Pak $(A+B)\cap C \supseteq A\cap C = A$ a podobně $(A+B)\cap C \supseteq B\cap C$. Takže $(A+B)\cap C \supseteq A\cup(B\cap C)$. Dále vezmeme $x \in (A + B) \cap C$, tedy $x \in C$ & $x \in A + B$, je tedy x tvaru $x = y + z$ pro nějaká $y \in A, z \in B$. Protože $x \in C, y \in A \subseteq C$, je také $z \in C$. Z toho $z \in B\cap C \Rightarrow x \in A\cup(B\cap C)$. Máme tedy $(A+B)\cap C = A\cup(B\cap C)$. □

Ukázali jsme teď, že mezi množinami hlavních pravých (nebo levých) ideálů regulárních okruhů jde hledat svazy isomorfní L_n či L_∞. Naším posledním úkolem tedy je předvést, jak takový svaz může vypadat. Chceme tedy najít regulární okruh, pro který tuto isomorfii najdeme, a to navíc jednoznačně určený danou spojitou geometrií.

4.3 Zavádění souřadnic do spojitých geometrií

Tradiční postup[5] popisu diskrétní projektivní geometrie ($L_N \simeq P_{n-1}$) pomocí souřadnic z nějaké dělící algebry Z spočívá na korespondenci L-vektorů (viz. kapitola 3.1) prvků Z a bodů geometrie L_N, tedy minimálních nenulových prvků. Základní problém rozšíření pro nekonečnědimenzionální geometrie je

[5] Konstrukce je detailně popsána v [18], kap. VI, od str. 141.

tedy zjevně ten, že v L_∞ žádné body nejsou. To řeší von Neumann odskokem k maticovému okruhu nad Z.

Ať Z_n je tedy okruh všech matic $n \times n$ nad Z. Budeme v něm chtít charakterizovat všechny pravé ideály a hlavní pravé ideály. Nechť je $\mathcal{A} \subseteq Z$ pravý ideál, jeho prvky jsou matice tvaru $A = (a_{ij})$. Označíme $\mathcal{U}$ množinu všech n-tic (x_{j1}), tj. všech prvních sloupců matic z $\mathcal{A}$. Pak platí:

Lemma 4.3.1. *Množina $\mathcal{U}$ obsahuje právě všechny sloupce všech matic z $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Dokážeme, že každý sloupec libovolné matice $X \in \mathcal{A}$ je prvním sloupcem nějaké vhodné matice $A \in \mathcal{A}$. Zvolme tedy $X \in \mathcal{A}$ pevně a fixujme také $0 < p, q \leq n$ přirozená. Budeme-li násobit maticí $Y := (y_{ij}), Y \in Z_n$, pro niž

$$y_{pq} = 1,\ y_{ij} = 0\ ([i,j] \neq [p,q]),$$

dostaneme XY, což je matice, v níž je q. sloupec roven p. sloupci z X a jinde jsou nuly. Samozřejmě, protože $\mathcal{A}$ je pravý ideál, je $XY \in \mathcal{A}$. □

Lemma 4.3.2. *Ideál $\mathcal{A}$ je tvořen všemi maticemi Z_n, jejichž sloupce jsou v $\mathcal{U}$.*

Důkaz. Rozepišme si libovolnou X, jejíž sloupce jsou brány z $\mathcal{U}$:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

kde X_i je tvořena i. sloupcem X a nulami ve sloupcích $1....,i-1,i+1,....n$. Podle předchozího lemmatu existuje pro každé i matice $X_i' \in \mathcal{A}$, jejíž první sloupec je i. sloupcem X (a také X_i). Tedy znovu vezmeme matici Y tvaru

$$y_{1i} = 1,\ y_{pq} = 0\ ([p,q] \neq [1,i])$$

a pronásobíme $X_i = X_i'Y$, čímž dokážeme, že pro $i = 1,....,n$ X_i leží v $\mathcal{A}$. Protože $\mathcal{A}$ je ideál, platí $X \in \mathcal{A}$. □

Lemma 4.3.3. *$\mathcal{U}$ tvoří lineární prostor nad Z.*

Důkaz. Jsou-li dva vektory $x, y \in \mathcal{U}$, pak existují matice $X, Y \in \mathcal{A}$, které mají x, respektive y za své první sloupce. Protože $\mathcal{A}$ je ideál, $(X+Y) \in \mathcal{A}$ a $(x+y) \in \mathcal{U}$. Podobně je to také s násobením. Je-li $x \in \mathcal{U}$, $z \in Z$ a má-li $X \in \mathcal{A}$ za svůj první sloupec x, pak položme $Z := X \cdot zE_n$. Pak (xz) je prvním sloupcem $Z \in \mathcal{A}$, a tedy $(xz) \in \mathcal{U}$. □

Vidíme tedy, že třída všech lineárních prostorů $\mathcal{U}$ n-dimenzionálních vektorů nad Z[6] je v jednoznačné korespondenci (značme ji ϕ) s třídou všech pravých ideálů v Z_n. Tato korespondence je definována lemmaty 4.3.1 a 4.3.2. Navíc ještě potřebujeme ukázat, že ϕ přenáší operace $\cap$ a $\cup$ a že je tedy svazovým isomorfismem.

Lemma 4.3.4. *Je-li $\phi(\mathcal{U}) = \mathcal{A}$ a $\phi(\mathcal{V}) = \mathcal{B}$, pak platí*

$$\phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \phi(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Důkaz. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ je třída všech matic, jejichž sloupce jsou v $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, neboli $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Dále $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ je pak tvořena maticemi tvaru $A + B,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$. Jde tedy o matice, jejichž sloupce jsou v lineárním uzávěru $[\mathcal{U} \cup \mathcal{V}]$. □

Nesmíme zapomenout, že v předchozí kapitole o regulárních okruzích jsme dokázali, že komplementární svaz je tvořen až ideály hlavními. To ovšem v případě maticového okruhu není problém.

Lemma 4.3.5. *Každý pravý ideál v Z_n už je hlavním pravým ideálem.*

Důkaz. Mějme $\mathcal{A}$ pravý ideál a $\mathcal{U} := \phi(\mathcal{A})$. $\mathcal{U}$ je generováno n svými vektory (pokud by jich stačilo méně, můžeme je doplnit nulovým vektorem, který je v $\mathcal{U}$ obsažen), takže existuje matice X, která má tyto generující vektory za své sloupce. Pak $[X]_r$ je třídou všech matic tvaru $XY,\ Y \in Z_n$, a tedy (již dříve použitým postupem) obsahuje $[X]_r$ všechny vektory z $\mathcal{U}$, neboli platí $\mathcal{U} = \phi([X]_r) \Rightarrow [X]_r = \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je hlavní. □

Tím jsme tedy dospěli k možnosti přiřazení souřadnic ke spojité (samozřejmě i projektivní) geometrii bez ohledu na to, zda v ní existují prvky s minimální dimenzí.

Definice 4.3.6. Proces zavedení souřadnic do $L_n(\simeq\ P_{n-1})$ byl úspěšný, pokud existuje Z kvazitěleso a L_n je isomorfní svazu všech hlavních pravých ideálů v Z_n.

V našem zkoumání má ovšem zvláštní důležitost svaz typu L_∞. Chcemeli tedy hledat souřadnicový "prostor" pro takové svazy, musíme ustoupit od požadavku, že Z má být kvazitělesem. My už víme, že ustoupíme k regulárnímu okruhu. Důkaz následující věty lze nalézt v [12].

[6]Jinými slovy můžeme také říct, že jde o třídu všech lineárních podprostorů projektivního prostoru $P_{n-1}[Z_n]$, viz. kapitola 3.1.

Věta 4.3.7. *Okruh* $\mathbf{R}$ *je regulární, právě když jeho maticový okruh* $\mathbf{R_n}$ *je regulární.*

Zkusme teď sumarizovat všechny předložené výsledky[7] a zodpovědět následující otázky:

1. Pro které svazy L můžeme najít regulární okruh $\mathbf{R}$ takový, že L je svazově isomorfní se svazem $R_{\mathbf{R}}$ všech hlavních pravých ideálů $\mathbf{R}$?

2. Pro které svazy L je takový okruh $\mathbf{R}$ (pokud existuje) určen jednoznačně?

Od Veblena a Younga víme, že odpovědí na obě otázky jsou konečnědimenzionální geometrie L_n, kde $n \geq 4$. Pro $n = 3$, tedy jinými slovy pro projektivní roviny už podmínky v 1. neplatí. Například v [3] je dokázáno, že v projektivní geometrii, která má souřadnice, platí Desarguesův axiom, a tedy její svaz je Arguesiánský[8] (viz. [3] kap. IV. 5). Jenže už Hilbert v [7] dokázal existenci nearguesiánských projektivních rovin, takže odpověď na 1. zní: pro $L_n, n = 3$ obecně ne. A pro nižší dimenze jsme ještě méně úspěšní.
Vypadá to, že bychom měli v otázkách 1. a 2. položit na svaz L ještě nějaké omezující podmínky, abychom mohli obecně odpovědět. Zavedeme tedy řád svazu a regulárního okruhu.

4.4 Řád svazu a regulárního okruhu

Definice 4.4.1. Ať L je komplementární modulární svaz s nulou 0 a jednotkou 1. **Bazí** L rozumíme systém n prvků a_i; $i = 1, ..., n$ takových, že $(a_i)\perp$ a $a_1 \vee .... \vee a_n = 1$.
Bázi nazýváme **homogenní**, jsou-li její prvky po dvou perspektivní, neboli $a_i \sim a_j$ $(i, j = 1, ..., n)$.
Počet prvků báze n pak nazýváme **řádem báze**.

Definice 4.4.2. Komplementární modulární svaz **je řádu m**, má-li nějakou homogenní bázi řádu m.

[7]Zejména pánů von Neumanna, Veblena a Younga.
[8]Pro libovolné prvky $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in L$ platí $(a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \leq ((c \vee a_1) \wedge a_2) \vee ((c \vee b_1) \wedge b_2)$, kde $c_0 = (a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2)$, $c_1 = (a_0 \vee a_2) \wedge (b_0 \vee b_2)$, $c_2 = (a_0 \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1)$, $c = c_0 \wedge (c_1 \vee c_2)$.

Poznámka . Řád svazu není určen jednoznačně, například trojrozměrná projektivní geometrie má řády 1, 2 a 4. Hledanými homogenními bazemi jsou po řadě celý prostor, libovolné dvě různoběžky a libovolné čtyři nezávislé body. Obecně projektivní geometrie $L_n(\simeq P_{n-1})$ je řádu m, právě když $m|n$. Takže spojitá geometrie typu L_∞ je libovolného řádu.

Definice 4.4.3. Analogicky libovolná algebra (v našem případě ovšem regulární okruh) $\mathbf{R}$ je řádu m, pokud obsahuje m^2 "maticových jednotek" $e_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, ..., m$, to jest prvků s těmito vlastnostmi:

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il} & j = k \\ 0 & jinak \end{cases}$$

$$e_{11} + ... + e_{mm} = 1.$$

Je-li $\mathbf{R}$ regulární, je svaz $L_\mathbf{R}$ řádu m, právě když je $\mathbf{R}$ jako okruh řádu m. Tuto ekvivalenci zajišťuje korespondence mezi ideály v $\mathbf{R}$ a maticovými jednotkami v $\mathbf{R}$ definovaná takto: $A_i := [e_{ii}]_r$. Zjevně A_i jsou nezávislé a dávají dohromady celý okruh $\mathbf{R}$, právě pokud jsou e_{ii} maticovými jednotkami. Navíc, perspektivita (homogennost) prvků baze je dána existencí os perspektivity A_i a A_j: $C_{ij} = [e_{ii} - e_{ij}]_r = [e_{jj} - e_{ji}]_r$. Důležitým faktem je pro nás i to, že okruh $\mathbf{R}$ je řádu n tehdy a jen tehdy, je-li isomorfní nějakému maticovému okruhu $\mathbf{S}_n$ nad okruhem $\mathbf{S}$.

Závěrem formulujme Von Neumannův koordinatizační teorém, který Wehrung ve svém článku [19] označuje za pravděpodobně nejhlubší výsledek v teorii modulárních svazů.

Věta 4.4.4. *Ať L je komplementární modulární svaz se spojitou operací průseku i spojení řádu většího než 3. Pak existuje jednoznačně určený regulární okruh $\mathbf{R}$ takový, že L je isomorfní svazu hlavních pravých ideálů tohoto okruhu $R_\mathbf{R}$.*

Von Neumann ve svém technicky náročném důkazu[9] konstruuje $\mathbf{R}$ jako maticový okruh (řádu $n \geq 4$) nad takzvaným pomocným okruhem **L-čísel**, jenž je konstruován nad množinou všech "relativních doplňků" a_i v $a_i \vee a_j$, kde $(a_i; i = 1, ..., n)$ je homogenní baze svazu L.

[9]Slovy I. Halperina je von Neumannův důkaz "virtuozní ukázkou matematické techniky", viz. [6].

Krátce se pozastavme ještě nad tím, které okruhy slouží jako souřadnicová pole pro spojité geometrie typu L_∞. Nejde totiž o všechny regulární okruhy. Von Neumann je pojmenoval **spojité okruhy** (samozřejmě právě podle podmínek spojitosti, které zachovávají svazy jejich hlavních pravých ideálů) a bližší charakteristiku podává Ken Goodearl v [2], kap. 13: "Každý spojitý regulární okruh je direktním součinem abelovského regulárního okruhu a regulárního pravého samoinjektivního okruhu[10]".

Podrobnějšího zkoumání se dočkaly von Neumannovy výsledky zejména na přelomu padesátých a šedesátých let dvacátého století, kdy Israel Halperin v několika článcích (např. [5], [6]) popsal rapidní zjednodušení důkazu téhož tvrzení, a Bjarni Jónsson přesněji vymezil třídu svazů, které je možno asociovat s okruhem ideálů regulárního okruhu (viz. [9]). Jónssonovo rozšíření von Neumannova tvrzení formulujeme spolu s Wehrungem ([19] Thm. 1) takto:

Věta 4.4.5. *Ať L je komplementární arguesiánský svaz. Ať existuje prvek $u \in L$ splňující*

1. *interval $L(0,u)$ má homogenní bazi řádu 3*
2. *největší prvek L je v nejmenším ideálu L generovaném prvkem u.*

Pak L je jednoznačně koordinatizovatelný.

Jónsson nahlížel na problém zavádění souřadnic i z obecnějšího logického pohledu. Konstatuje, že úplným vyřešením tohoto úkolu by bylo axiomatizování třídy svazů, k nimž souřadnice najít lze. Tento problém je však podle Jónssona velmi obtížný, pravděpodobně neřešitelný. Ve svém dalším článku [10] dokazuje, že nelze najít konečnou množinu prvořádových sentencí, které by mohly tuto třídu axiomaticky vymezovat.

V současnosti se von Neumannovu teorému věnují ve svých pracech například Christian Herrmann, který publikoval nový důkaz Jónssonova rozšíření v [4], nebo Friedrich Wehrung, který zkoumá vztah koordinatizovatelnosti svazu a existence Banaschewského funkce na něm v [20].

[10] V abelovském okruhu jsou všechny idempotenty prvky centra, pravý samoinjektivní okruh je jako svůj pravý modul nad sebou injektivní.

Literatura

[1] Garrett Birkhoff, *Combinatorial Relations in Projective Geometries*, Annals of Math., vol. 36, str. 743 - 748, 1935.

[2] Ken Goodearl, *Von Neumann Regular Rings*, Pitman Publishing Ltd., 1979.

[3] George Grätzer, *General Lattice Theory, second edition*, Birkhäuser Verlag, 1998.

[4] Christian Herrmann, *Generators for Complemented Modular Lattices and the von Neumann-Jónsson Coordinatization Theorems*, dosud nevydáno, 2009

[5] Israel Halperin, *A simplified proof of von Neumann's coordinatization theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 47, str. 1495 - 1498, 1961

[6] Israel Halperin, *Von Neumann's coordinatization theorem*, Comptes rendus Math., Canada, vol. III, 1981.

[7] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Berlin, 1899.

[8] Jaroslav Ježek, *Geometries*, dostupné na internetu: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jezek/geom.pdf`, 2008.

[9] Bjarni Jónsson, *Representations of complemented modular lattices*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, str. 64 - 94, 1960.

[10] Bjarni Jónsson, *Extensions of von Neumann's coordinatization theorem* in *Lattice theory*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 2, 1961.

[11] F. J. Murray & J. von Neumann, *On Rings of Operators*, Annals of Math., vol. 37, 1936.

[12] John von Neumann, *Continuous Geometry*, Princeton University Press, 1960.

[13] John von Neumann, *Continuous Geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 22, str. 92 - 100, 1936.

[14] John von Neumann, *Examples of Continuous Geometries*, ibid., str. 101 - 108, 1936.

[15] John von Neumann, *On Regular Rings*, ibid., str. 707 - 713 1936.

[16] John von Neumann, *Algebraic Theory of Continuous Geometries*, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 23, str. 16 - 22, 1937.

[17] K. G. C. von Staudt (1798 - 1867), *Baiträge zur Geometrie der Lage*, 1857.

[18] O. Veblen and W. Young, *Projective Geometry I*, Boston, 1910.

[19] Friedrich Wehrung, *Continuous Geometry*, in Grätzer *General Lattice Theory, second edition*, 1998, Berlin

[20] Friedrich Wehrung, *Coordinatization of lattices by regular rings without unit and Banaschewski functions*, dostupný na internetu: `http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/39/19/94/PDF/Ban2Coord1.pdf`, 2009