Posudek diplomové práce Martina Doležala

Nekonečné hry a jejich aplikace

Hlavním tématem práce je charakterizace ruzných druhů σ-pórovitosti pomocí nekonečné
hry a aplikace tohoto popisu při odvození vepisovacích vět. V matematice existuje celá řada
charakterizací vlastností matematických objektů pomocí nekonečných her, přesněji řečeno:
objekt má danou vlastnost právě tehdy, když v jisté nekonečné hře pro dva hráče má daný hráč
vítěznou strategii. Příkladem takové hry je Banach-Mazurova hra sloužící k charakterizaci
množin první kategorie.

Ve své práci pan Doležal nalezl charakterizaci abstraktní σ-pórovitosti pomocí nekonečné
hry. Myšlenkově práce navazuje na výsledek J. Zapletala ([FZ]), který takovou charakte-
rizaci nalezl pro (standardní) σ-pórovitost v Cantorově diskontinuu. Pan Doležal zobecnil
tuto charakterizaci nejen vzhledem k použitému typu pórovitosti ((standardní) pórovitost
je nahrazena pojmem pórovité relace P pojem definovaný L. Zajíčkem), ale i vzhledem
k metrickému prostoru, kde je pórovitost uvažována (Cantorovo diskontinuum je nahrazeno
úplným metrickým prostorem).

Důkaz sestává ze dvou částí. Jednak je ukázáno, že vítězná strategie pro druhého hráče
(nazývaného Sisyfos) existuje, pokud množina A, se kterou se hra hraje, je σ-P-pórovitá.
Ve druhé (obtížnější) části je dokazována opačná implikace, která říká, že existence vítězné
strategie pro Sisyfa nutně vede k tomu, že množina A je σ-P-pórovitá. Tento výsledek tvoří
první část práce.

Ve druhé části práce je v kompaktním metrickém prostoru definována modifikace uvedené
hry. Opět je dokázána charakterizační věta pro σ-P-pórovité množiny, kde ale relace póro-
vitosti P splňuje další dodatečné podmínky. Smyslem této části je aplikace charakterizace v
důkazu tvrzení následujícího tvaru.

Nechť K je kompaktní metrický prostor a A K je borelovská množina, která není σ-P-
pórovitá. Pak existuje F A kompaktní, která také není σ-P-pórovitá.

V práci podané výsledky rozšiřují výsledky v článku [ZZ] a použitá metoda je dle mého
soudu elegantnější než postupy v článcích [ZZ] a [ZP], které se uvedenou problematikou také
zabývají.

Důkaz charakterizační věty je netriviální, technicky náročný a oproti metodě J. Zapletala
obsahuje nové postupy. Práce je psána srozumitelně, bez překlepů, ale na diplomovou práci
poněkud stručně. Rozvedení některých míst by usnadnilo jejich verifikaci.

Závěr: Práce je velmi pěkným příspěvkem k teorii σ-pórovitých množin, je jistě publikova-
telná v solidním časopise a splňuje podmínky kladené na diplomovou práci. Navrhuji hodnotit
ji známkou **výborně**.

Literatura:

[FZ] I. Farah, J. Zapletal: Four and more, Ann. Pure Appl. Logic **140** (2006), 3–39.

[ZP] M. Zelený, J. Pelant: The structure of the σ-ideal of σ-porous sets, Comment. Math. Univ.
Carolin. **45** (2004), 37–72.

[ZZ] M. Zelený, L. Zajícek: Inscribing compact non-σ-porous sets into analytic non-σ-porous sets,
Fund. Math. **185** (2005), 19–39.

Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
vedoucí práce