Oponentský posudek na diplomovou práci Martina Doležala
Nekonečné hry a jejich aplikace

Nechť X je metrický prostor a $A \subset X$ je suslinovská množina, která není σ-pórovitá. M. Zelený a J. Pelant (2004) dokázali, že pokud je X topologicky úplný, pak existuje uzavřená množina $F \subset A$, která také není σ-pórovitá.

Příslušná konstrukce je však velmi složitá, takže autoři se ani nepokoušeli tuto „vepisovací větu" dokázat i pro některé varianty pórovitosti. V práci M. Zeleného a L. Zajíčka (2005) je podán jednodušší (nekonstruktivní) důkaz, ale pouze v lokálně kompaktních prostorech. Tento důkaz však ukazuje platnost vepisovací věty i pro obecnější $\langle g \rangle$-pórovitost a symetrickou pórovitost na přímce. Autorům se však použitou metodou nepodařilo podat důkaz pro silnou pórovitost.

To se nyní podařilo M. Doležalovi v diplomové práci s pomocí metody používající jistou nekonečnou hru, jejíž velmi jednoduchá varianta je pro důkaz jisté podstatně méně hluboké vepisovací věty použita v práci I. Faraha a J. Zapletala (2006). Doležalův důkaz pracuje i pro obyčejnou pórovitost a v tomto případě je méně komplikovaný než předchozí výše zmíněné důkazy, což je umožněno tím, že využívá hlubokou Martinovu větu o determinovanosti borelovských her. V diplomové práci je však vepisovací věta dokázána pouze pro borelovskou množinu A.

M. Doležalovi se podařilo zformulovat a dokázat elegantní obecnou vepisovací větu, která zahrnuje nejen případ obyčejné a silné pórovitosti, ale také případ silné symetrické pórovitosti. Tím pak snadno dostává řešení problému M.J. Evanse a P.D. Humkeho (2001) týkajícího se silné symetrické pórovitosti.

Diplomová práce je významným přínosem k teorii σ-pórovitých množin. D. Rojas-Rebolledo (2006) sice „herní metodou" I. Faraha a J. Zapletala dokázal vkládací větu pro obyčejnou a silnou pórovitost, ale pouze v nuldimenzionálních kompaktních prostorech. Případ obecného kompaktního prostoru však vyžadoval několik zcela nových důmyslných myšlenek.

Výše popsané výsledky jsou obsaženy ve 4. a 5. kapitole diplomové práce. Ve 3. kapitole je pomocí nekonečné hry podána charakterizace „abstraktních σ-pórovitých množin" (která zahrnuje většinu užívaných typů pórovitost) dokonce v obecném úplném metrickém prostoru. Tato charakterizace je poměrně hluboký výsledek, ale jeho význam mi není jasný, protože není ukázána žádná jeho aplikace.

Předložená diplomová práce je vynikající po matematické stránce a je formálně velmi dobře zpracovaná. Je psána srozumitelně a pečlivě - našel jsem snad jen 1 překlep (26_3). To svědčí o autorově velmi dobré matematické kultuře, protože důkazy jsou opravdu obtížné a nesnadno zapsatelné.

Žádný vážný nedostatek jsem v práci nenalezl; níže uvádím jen několik méně významných kritických připomínek.

a) V důkazu Věty 3.3 je operace $T(E_1, \ldots, E_k)$ používaná pro jiné množiny E_i než jsou ty, pro které je původně definovaná. Intutivně je ale jasné, že odstranění této nepříjemné nepřesnosti je možné - jde o to pouze najít korektní a formálně správný zápis.

b) Ke konci důkazu Věty 4.5. je asi třeba zvlášť okomentovat případ $k_0 = 0$, protože v tomto případě koule B_{k_0} není definovaná.

c) Na str. 20 při definici výsledku (outcome) sehrané hry x by bylo vhodné zdůvodnit, že koule jsou do sebe zařazené.

d) V důkazu Věty 4.6 se užívá Věta 2.5, která pracuje s množinou A. Myslím, že v diplomové práci by bylo vhodné říci, co je tato množina A při aplikaci. Také si myslím, že v diplomové práci by měl být důkaz Věty 5.4. více rozveden; podobně některé argumenty jiných důkazů by mohly být více rozvedeny.

e) Formulace na řádku 23^3 se mi nelíbí: jde asi spíše o splnění podmínky (H2) než o její užití.

f) Myslím, že informace obsažená ve větě na konci str. 32, která začíná slovy „As it is written“, by měla být podána jasněji. Čtenáři těžko může být jasné, kde je důkaz příslušného tvrzení podán.

g) Zaráží mne, že autor vůbec nekomentuje případ vepisování do analytické množiny pro silnou pórovitost, i když v Question 1.1. je A analytická a D. Rojas-Rebolledo v nuldimensionálním případě vepisuje do analytické množiny.

h) Mám výhrady k některým autorovým komentářům. Například tvrzení, že „předchozí metody nemohou být aplikovány na případ silné pórovitosti“ mi připadá příliš silné. Dále mi připadá podivná poznámka ze str. 18, že „hra $G(A)$ by měla být užita místo její modifikace, kdykoliv je to možné“, vzhledem k tomu, že žádné její užití není v práci uvedeno.

Navrhuji hodnotit diplomovou práci známkou „výborně“.

Praha, 7.9.2009

Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc