Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martin Zitko

Extremální body konvexních množin s aplikacemi na středoškolskou matematiku

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: *Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.*
Studijní program: *Učitelství pro střední školy, matematika-fyzika*

Tato práce by nevznikla bez podpory mnohých – od zvláště rodinného kruhu počínajíc, přes přátele, až po školu. Jsem za to vděčný a chtěl bych vyjádřit svůj dík.

Jsem zavázán svému učiteli panu profesoru Lukešovi, že mne přivedl k následujícímu tématu, a že jsem tímto mohl do matematiky přinést Větu 5.1 a Příklad 6.1, že tak snad bude práce přínosem – tím relativním přínosem – do matematiky. Chtěl bych mu tak Větu 5.1 věnovat, a případně navrhnout, aby nesla jeho jméno.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 17.5.2009 Martin Zitko

Obsah

Název práce: Extremální body konvexních množin s aplikacemi na středoškolskou matematiku
Autor: Martin Zitko
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
e-mail vedoucího: lukes@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: Matematická část práce se zabývá jednak konvexní analýzou (různými význačnými větami konvexní analýzy, některé z nich pojednávají o extremálních bodech konvexních množin) a jednak matematickými řešeními problémů spravedlivého rozdělení (je ukázána vzájemná souvislost těchto oborů). V aplikační části jsou na základě předchozí matematické části řešeny různé příklady. Tyto příklady byly voleny tak, aby svým zadáním byly srozumitelné i nematematicky vzdělanému čtenáři.
Klíčová slova: Konvexní geometrie, Extremální body, Hellyova věta, Fair division, Cake-Cutting

Title: Extreme points of convex sets with applications in secondary school mathematics
Author: Martin Zitko
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Supervisor's e-mail address: lukes@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: The thesis consists of two sections, the theoretical and the practical one. Theoretical part deals with 1. convex analysis, its important theorems including those concerning extreme points of convex sets, and also 2. mathematical solutions of fair division problems. It is shown whether and in what way are these areas related. The practical part of the work follows on results of the previous one with various exercises. Attempts have been made so as no theoretical knowledge is required to understand the formulation of the exercises.
Keywords: Convex geometry, Extreme points, Helly's theorem, Fair division, Cake-Cutting

Předmluva

První část práce je věnována konvexní analýze. Konvexní množiny jsou definovány v reálných vektorových prostorech. Již od začátku všude uvažuji obecný reálný vektorový prostor, tj. v případech, kdy dimenze prostoru je konečná, se neomezuji na vektorový prostor $\mathbb{R}^n$. Jednak jsou v práci k nalezení (některé) známé věty konvexní analýzy prostorů konečné dimenze (Kapitola 3). Dále jsou tu některé výsledky týkající se studia extremálních bodů konvexních množin: především Minkowského věta (v prostorech konečné dimenze) a Krein-Milmanova věta (v prostorech libovolné dimenze) (Kapitola 3 a Kapitola 4).

Druhá část práce je věnována matematickému řešení problémů spravedlivého rozdělení. Myslím, že v současné době je to již samostatně vyprofilovaná disciplína aplikované matematiky. Z ní jsou v práci k nalezení některé z vět, jež jsou důsledky Minkowského a Krein-Milmanovy věty (Kapitola 5).

Dále je uveden jeden konkrétní reálný příklad problému spravedlivého rozdělení. A vypočteno jeho konkrétní reálné řešení. Tento příklad má úzkou souvislost s větami předcházející kapitoly, Kapitoly 5.

Názorně by většina shora zmiňovaného šla shrnout takto:

$$
\begin{tikzcd}
\dim V \in \mathbb{N} \arrow[d] & \dim V \text{ libovolná} \arrow[l, dashed] \arrow[d] \\
\text{Minkowského věta} \arrow[d] & \text{Krein-Milmanova věta} \arrow[l, dashed] \arrow[d] \\
\text{Věta 5.1} \arrow[d] & \text{Ljapunovova věta, Věta 5.5} \arrow[l, dashed] \\
\text{Příklad 6.1} &
\end{tikzcd}
$$

V závěru práce jsou uvedeny další příklady. Řeší se pomocí několika vět z konvexní analýzy prostorů konečné dimenze, z vět z předcházející kapitoly (Kapitoly 3).

Pokud se podíváme na všechny příklady v práci, je vidět, že mají jedno společné. Jejich formulace je srozumitelná i laikovi, k jejich řešení je ale nutné užít (relativně velmi) pokročilé matematické věty, jejich řešení je dost náročné.[1]

V úvodních částech práce jsou v rámci možností dány základy (značení, terminologie, definice, věty) (Kapitola 1 a Kapitola 2).

[1]Toto vlastně neplatí pro Příklad 6.1, k jeho řešení stačí matematika na úrovni střední školy, možná i základní. Stačí ale vzít jeho různé variace, a okamžitě zjistíme, že k jejich řešení je nutné užít vět z Kapitoly 5.

Kapitola 1

Úvod

1.1 Poznámka.
Jednou z teorií klasické predikátové logiky prvního řádu je Zermelo-Fraenkelova teorie množin. Vše se bude odehrávat v rámci tété teorie.

1.2 Poznámka.
Některé ze symbolů základního jazyka Zermelo-Fraenkelovy teorie množin jsou:

$\Leftrightarrow$	pro ekvivalenci
$\Rightarrow$	pro implikaci
$\forall$	pro všeobecný kvantifikátor
$\exists$	pro existenční kvantifikátor
$=$	pro rovnost
$\in$	pro binární predikát náležení

1.3 Poznámka.
K axiomům vydělení: bude-li A množina a φ formule, jež neobsahuje proměnnou x volně, budeme množinu B všech $x \in A$ pro něž platí $\varphi(x)$ značit

$$\{x : x \in A,\, \varphi(x)\} \;,$$

nebo krátce

$$\{x \in A : \varphi(x)\} \;, \text{ či } \quad \{x : \varphi(x)\} \;.$$

Tyto symboly tedy budou vždy označovat množinu – třídy se v práci nebudou uvažovat.

1.4 Poznámka.
V práci budou následující symboly značit:

$\emptyset$	prázdnou množinu
$\{x\}$	množinu, jež obsahuje právě prvek x
$\subset$	inkluzi – připouští se též $A \subset A$
$A \setminus B$	doplněk množiny B do množiny A
$f : A \to B$	f je zobrazení množiny A do množiny B – definiční obor f je množina A
$f(C)$	obraz množiny C při zobrazení f
$f^{-1}(D)$	úplný vzor množiny D při zobrazení f
$f(c)$	obraz množiny $\{c\}$ (prvku c) při zobrazení f
$f^{-1}(d)$	úplný vzor množiny $\{d\}$ při zobrazení f

1.5 Poznámka.
Číslo nula nebude považováno za přirozené číslo. Následující symboly budou značit:

$\mathbb{N}$	množinu všech přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množinu všech reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	mmnožinu všech posloupností reálných čísel o n členech
$\mathbb{R}^{n\times m}$	množinu všech matic nad $\mathbb{R}$ typu $n \times m$

1.6 Poznámka.
Intervaly budou značeny stejně jako v Jarníkově Diferenciálním počtu I. Například, pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, bude

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \ , \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \ ,$$

$$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \ , \quad \langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \ ,$$

atd. . . .

1.1 Metrické prostory

1.7 Poznámka.
Bude-li (X, ϱ) metrický prostor, bude

$$U_X(a, \delta)$$

značit okolí v metrickém prostoru (X, ϱ) v bodě a o poloměru δ. V případě, že bude zřejmé o který metrický prostor se jedná, bude X vynecháno.

Dále bude značit

$B(a, \delta)$	uzavřenou kouli v bodě a o poloměru δ
C°	vnitřek množiny C
$\overline{C}$	uzávěr množiny C
∂C	hranici množiny C
$\operatorname{dist}(A, B)$	vzdálenost množiny A od množiny B

1.2 Vektorové prostory

1.8 Poznámka.

V celé práci budeme pracovat výhradně s reálnými vektorovými prostory. O reálných vektorových prostorech budeme krátce hovořit jako o vektorových prostorech.

1.9 Poznámka.
Dále bude značit:

o	nulový vektor ve vektorovém prostoru
$\dim V$	dimenzi prostoru V
$\operatorname{Ker} f$	jádro homomorfismu f
$[A]$	lineární obal množiny A

$[v]$	lineární obal množiny $\{v\}$
$\| \ \|$	normu
(u, v)	skalární součin vektoru u a v

Kapitola 2

Základní pojmy konvexní analýzy

2.1 Konvexní množina

2.1 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $a, b \in V$. Potom množinu

$$\overline{a, b} = \left\{ a + \lambda(b - a) : \lambda \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$$

nazveme *úsečkou* s krajními body a, b.

2.2 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $C \subset V$. Řekneme, že množina C je *konvexní*, jestliže pro každé $a, b \in C$ je $\overline{a, b} \subset C$.

2.3 Poznámka.
Z definice ihned plyne, že podmnožina C vektorového prostoru je konvexní právě tehdy, když

$$\lambda a + (1 - \lambda) b \in C, \text{ kdykoliv } a, b \in C \text{ a } \lambda \in (0, 1).$$

2.4 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $a, b \in V$, $a \neq b$. Potom, množinu

$$\left\{ a + \lambda(b - a) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

nazveme *přímkou* určenou body a, b, množinu

$$\big\{a + \lambda(b - a) : \lambda \in \langle 0, +\infty)\big\}$$

nazveme *polopřímkou* s počátečním bodem a ve směru $b - a$.

2.5 Věta.
Nechť V je vektorový prostor, $a, b \in V$, $a \neq b$, $f : \mathbb{R} \to V$,

$$f(\lambda) = \lambda a + (1 - \lambda)\, b.$$

Potom

a) f je prosté zobrazení $\mathbb{R}$ na přímku $\big\{\lambda a + (1 - \lambda)\, b : \lambda \in \mathbb{R}\big\}$.

b) Je-li $\lambda_1 < \lambda_2$, je $f^{-1}\Big(\overline{f(\lambda_1), f(\lambda_2)}\Big) = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$.

c) Je-li V normovaný, je f spojité.

Důkaz.
První vlastnost f zřejmě platí.

Nechť je $\lambda_1 < \lambda_2$. Buď c libovolný bod úsečky $\overline{f(\lambda_1), f(\lambda_2)}$ různý od jejích krajních bodů – takový bod c alespoň jeden existuje, podle a). Pro jisté $\mu \in (0, 1)$ je tedy $c = \mu f(\lambda_1) + (1 - \mu) f(\lambda_2)$. Potom existuje (právě jedno) λ tak, že $f(\lambda) = c$. Stačí položit $\lambda = \lambda_2 + \mu(\lambda_1 - \lambda_2)$. Toto λ splňuje $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Zřejmě, každé $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ je vzorem pro některý bod c úsečky $\overline{f(\lambda_1), f(\lambda_2)}$, při zobrazení f. Tj. $f^{-1}\Big(\overline{f(\lambda_1), f(\lambda_2)}\Big) = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$.

Nechť V je normovaný. Nechť $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{\|a-b\|}$, potom pro každé $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ platí $\big\|f(\lambda) - f(\lambda_0)\big\| < \varepsilon$. Čili f je spojité v bodě λ_0.

2.6 Věta.
Nechť V je vektorový prostor, L přímka ve V. Potom jedinými konvexními podmnožinami L jsou: úsečky, úsečky bez jednoho
jediného krajního bodu, úsečky bez obou krajních bodů, $(\mathfrak{C})$
polopřímky, polopřímky bez počátku, $\emptyset$, L.

Důkaz.
Vezměme libovolnou konvexní podmnožinu L, alespoň dvouprvkovou, a označme ji C. Uvažujme dva různé prvky $a, b \in C$ a zobrazení $f : \mathbb{R} \to V$, $f(\lambda) = \lambda a + (1 - \lambda) b$. Množina $M = f^{-1}(C)$ je interval právě tehdy, když pro každé $\lambda_1, \lambda_2 \in M$, $\lambda_1 < \lambda_2$, je $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \subset M$. Je-li $\lambda_1, \lambda_2 \in M$, $\lambda_1 < \lambda_2$, je $\overline{f(\lambda_1), f(\lambda_2)} \subset C$ (konvexita C) a $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \subset M$ (Věta 2.5b). M je tedy interval. Protože C leží celé v oboru hodnot f, je $f(M) = C$. Konvexní množina C je tedy typu $(\mathfrak{C})$.

2.7 Věta.
Nechť $\{C_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je soubor konvexních množin ve vektorovém prostoru V. Potom $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$ je konvexní.

Důkaz.
Označme $C = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$. Je-li $C = \emptyset$, je C zřejmě konvexní. Nechť je tedy $a, b \in C$. Potom pro každé γ je $\overline{a, b} \subset C_\gamma$, tedy i $\overline{a, b} \subset \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma = C$.

2.8 Věta.
Nechť V je vektorový prostor, C konvexní podmnožina V, L přímka ve V, $K \subset L$. Potom, je-li K typu $(\mathfrak{C})$, je též $K \cap C$ typu $(\mathfrak{C})$.

Důkaz.
Věta je důsledkem vět 2.6 a 2.7.

2.9 Věta.
Nechť A je podmnožinou konvexní množiny C. Jestliže $x_1, \dots, x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, potom $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C$.

Důkaz.
Indukcí.

Pro $n = 2$ věta platí, podle předcházející poznámky.

Nechť věta platí pro $n \geq 2$. Nechť $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$. Kdyby bylo nějaké $\lambda_i = 0$, byl by, podle indukčního předpokladu, závěr věty ihned zřejmý. Nechť je tedy $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$. Potom

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} x_2 + \cdots + \frac{\lambda_{n+1}}{1-\lambda_1} x_{n+1} \right)}_{\in C} \in C.$$

Podle indukčního předpokladu leží lineární kombinace v poslední závorce v množině C.

2.2 Uzávěr a vnitřek konvexní množiny

2.10 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $A, B \subset V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom definujme množiny

$$A + B = \{v \in V : v = a + b, a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{v \in V : v = \lambda a, a \in A\}.$$

2.11 Poznámka.
Místo $\{a\} + B$ a $A + \{-b\}$ budeme psát $a + B$ a $A - b$.

2.12 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, $U(a, \delta)$ okolí ve V, $\lambda > 0$, $b \in V$. Potom

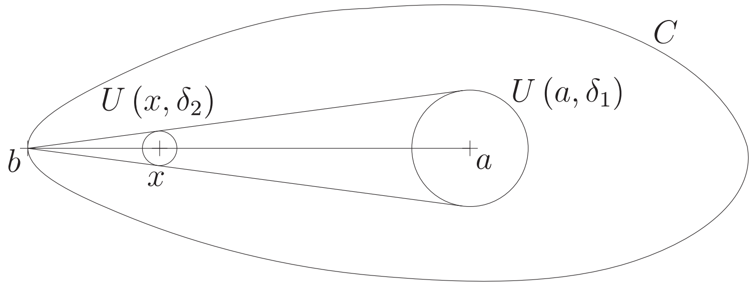
$$\lambda U(a, \delta) = U(\lambda a, \lambda \delta)$$

a

$$b + U(a, \delta) = U(b + a, \delta).$$

Důkaz.
Věta plyne z Definice 2.10 a z definice normy a okolí bodu.

2.13 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, C konvexní podmnožina V, $a \in C^\circ$, $b \in C$. Potom $\overline{a, b} \setminus \{b\} \subset C^\circ$.



Obrázek 2.1: K Větě 2.13.

Důkaz.
Viz. Obrázek 2.1. Nechť $x = \lambda a + (1 - \lambda)\, b$, $\lambda \in (0, 1)$. Existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $U\,(a, \delta_1) \subset C$; a protože je C konvexní a $b \in C$, je, položíme-li $\delta_2 = \lambda \delta_1$, $C \supset (1 - \lambda)\, b + \lambda U\,(a, \delta_1) = U\,(x, \delta_2)$; proto $x \in C^\circ$.

2.14 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, C konvexní podmnožina V. Potom C° je konvexní.

Důkaz.
Věta je důsledkem Věty 2.13.

2.15 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor.

a) Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z V a $\lim x_n = x$. Potom $\lim \lambda x_n = \lambda x$.
b) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z V a $\lim x_n = x$, $\{y_n\}$ je posloupnost bodů z V a $\lim y_n = y$. Potom $\lim\,(x_n + y_n) = x + y$.
c) Nechť $\{\lambda_n\}$ je posloupnost bodů z $\mathbb{R}$ a $\lim \lambda_n = \lambda$, $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z V a $\lim x_n = x$. Potom $\lim \lambda_n x_n = \lambda x$.

Důkaz.
a) plyne přímo z definice limity posloupnosti. Podobně b), za použití trojúhelníkové nerovnosti. Komplikovanější je myšlenka důkazu c). Nechť je dáno $E > 0$. Potom zřejmě existuje právě jedno $\varepsilon > 0$, jež je řešením rovnice

$\varepsilon^2 + |\lambda|\varepsilon + \|x\|\,\varepsilon = E$. K tomuto ε existují přirozená k, l tak, že, pro každé $n > k$ je $\|x_n - x\| < \varepsilon$, a pro každé $n > l$ je $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$. Potom ale, pro každé $n > \max(k, l)$ je

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n - \lambda)(x_n - x) + \lambda(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| <$$

$$< \varepsilon^2 + |\lambda|\varepsilon + \|x\|\,\varepsilon = E.$$

Tedy $\lim \lambda_n x_n = \lambda x$.

2.16 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, C konvexní podmnožina V. Potom $\overline{C}$ je konvexní.

Důkaz.
Nechť $x, y \in \overline{C}$, $\lambda \in (0, 1)$. Potom existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z C, jež konverguje k x, a existuje posloupnost $\{y_n\}$ bodů z C, jež konverguje k y. Potom $\left\{\lambda x_n + (1 - \lambda)\, y_n\right\}$ je posloupnost bodů z C, jež konverguje k $\lambda x + (1 - \lambda)\, y$ (Věta 2.15). Tedy $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in \overline{C}$, tedy $\overline{x, y} \subset \overline{C}$.

2.17 Poznámka.
Jak plyne z definice souvislého metrického prostoru, metrický prostor (X, ϱ) je souvislý právě tehdy, když neexistuje žádná neprázdná vlastní podmnožina X, jež by byla uzavřená a současně otevřená v X; tj. právě tehdy, když každá jeho neprázdná vlastní podmnožina má neprázdnou hranici.

2.18 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor. Potom platí:

a) Je-li $M \subset V$, $a \in M$, $b \in V \setminus M$, pak $\overline{a, b} \cap \partial M \neq \emptyset$.
b) V je souvislý.

Důkaz.
Definujme zobrazení $f : \mathbb{R} \to V$ vztahem $f(\lambda) = \lambda a + (1 - \lambda)\, b$, a označme $N = f^{-1}\left(M \cap \overline{a, b}\right)$. Potom $\overline{N} \subset \langle 0, 1\rangle$ a $\overline{\langle 0, 1\rangle \setminus N} \subset \langle 0, 1\rangle$. Kdyby $\overline{N} \cap \overline{\langle 0, 1\rangle \setminus N} = \emptyset$, potom by $N = \overline{N}$ a $\langle 0, 1\rangle \setminus N = \overline{\langle 0, 1\rangle \setminus N}$ byly dvě

neprázdné uzavřené množiny $\Big($uzavřené jak v $(\mathbb{R}, |\ |)$, tak v $(\langle 0,1\rangle, |\ |)\Big)$, jež by pokrývaly $(\langle 0,1\rangle, |\ |)$. Ale, jak plyne z axiomu o supremu, metrický prostor $(\langle 0,1\rangle, |\ |)$ je souvislý. Tj., existuje $\lambda \in \overline{N} \cap \overline{\langle 0,1\rangle \setminus N}$. Neboli, existuje posloupnost $\{\mu_n\}$ bodů z N, jež konverguje k λ, a existuje posloupnost $\{\eta_n\}$ bodů z $\langle 0,1\rangle \setminus N$, jež konverguje k λ. Potom je $\big\{f(\mu_n)\big\}$ posloupnost bodů z M, jež konverguje k $f(\lambda)$, neboť f je spojité (Věta 2.5c). Podobně pro posloupnost $\big\{f(\eta_n)\big\}$ bodů z $V \setminus M$. Je tedy $f(\lambda) \in \overline{a,b} \cap \partial M$ a V je souvislý.

2.19 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, C konvexní podmnožina V. Potom platí:

a) Je-li $a \in C^\circ$ a $b \in \partial C$, pak $\overline{a,b} \setminus \{b\} \subset C^\circ$.
b) Je-li $a \in C^\circ$ a $b \in (V \setminus C)^\circ$, pak $\overline{a,b} \cap \partial C = \{c\}$.
c) Je-li $a \in \partial C$ a $b \in \partial C$, pak buď $\overline{a,b} \subset \partial C$, anebo $\overline{a,b} \setminus \{a,b\} \subset C^\circ$.
d) Je-li $a \in \partial C$ a $b \in (V \setminus C)^\circ$, pak $\overline{a,b} \cap \overline{C} = \overline{a,c}$, kde $c \in \partial C$.

Důkaz.

a) Existuje $\delta > 0$ tak, že $U(a,\delta) \subset C$. Zvolme $\lambda \in (0,1)$ a označme

$$c = \lambda a + (1-\lambda) b, \qquad \varepsilon = \delta \frac{\varrho(b,c)}{\varrho(a,c)}, \qquad \mu = \frac{\lambda}{1-\lambda};$$

je tedy

$$\varepsilon = \delta\mu, \qquad U(b,\varepsilon) = (1-\mu)c + \mu U(a,\delta).$$

Protože $b \in \overline{C}$, existuje $x \in C$ tak, že $x \in U(b,\varepsilon)$. K tomuto x existuje $y \in U(a,\delta)$ tak, že $c \in \overline{y,x}$. Protože je $U(a,\delta)$ otevřená, je $y \in C^\circ$. Podle Věty 2.13 je $c \in C^\circ$.

b) Podle Věty 2.18a obsahuje $\overline{a,b} \cap \partial C$ alespoň jeden prvek, podle Věty 2.19a nejvýše jeden.

c) Buď je $\overline{a,b} \subset \partial C$, anebo existuje x tak, že $x \in \overline{a,b}$ a současně $x \notin \partial C$. Pokračujme v druhém případě. Jelikož $a,b \in \overline{C}$ a $\overline{C}$ je konvexní, je

$\overline{a,b} \subset \overline{C}$, tj. i $x \in \overline{C}$; ale $x \notin \partial C$, tedy $x \in C^\circ$. Podle Věty 2.19a je $\overline{a,b} \setminus \{a,b\} \subset C^\circ$.

d) Z uzavřenosti konvexní $\overline{C}$ a z Věty 2.8 vyplývá $\overline{a,b} \cap \overline{C} = \overline{a,c}$, z Věty 2.19b pak $c \in \partial C$ $\big($kdyby $c \in C^\circ$, potom $\overline{c,b} \cap \partial C = \{x\}$; čili by bylo $\overline{a,b} \ni x \notin \overline{a,c}$ a současně $x \in \overline{C}$ – spor$\big)$.

2.20 Poznámka.
Opusťme pole matematiky.

a) Větu 2.19 můžeme říci takto: Je-li V normovaný vektorový prostor, C libovolná konvexní neprázdná vlastní podmnožina V, pak lze odkudkoliv z C vyjít jakýmkoliv směrem do $V \setminus C$, a přejít z C do $V \setminus C$ souvisle po úsečce (resp. pouze bodem), jež leží v ∂C.[1]

b) Větu 2.18 můžeme říci takto: Je-li V normovaný vektorový prostor, C libovolná neprázdná vlastní podmnožina V, pak lze odkudkoliv z C vyjít jakýmkoliv směrem do $V \setminus C$, a přejít z C do $V \setminus C$ souvisle – tj. přes ∂C. Věta 2.18 tedy říká: Přechod a) není nikterak výsadou konvexních množin, ovšem s tou změnou, že u obecné množiny C souvislý přechod z C do $V \setminus C$ již nemusí být tak pěkný.

c) Poznámku 2.17 lze říci takto: Je-li (X, ϱ) souvislý metrický prostor, M libovolná neprázdná vlastní podmnožina X, pak lze (alespoň někde a nějak) přejít z M do $V \setminus M$ souvisle – tj. přes ∂M. Není-li (X, ϱ) souvislý, pak u jeho jisté podmnožiny tento přechod není vůbec možný. Věta 2.18 tedy říká: Normované vektorové prostory jsou velmi pěkné souvislé metrické prostory, neobsahují totiž žádné hrůzné, resp. bizarní, podmnožiny jako (obecně) ostatní metrické prostory (zvláště nesouvislé). Věta 2.19 pak dodává: exemplárním dokladem tomu jsou konvexní množiny.

2.21 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, $x \in V$ a W vlastní podprostor pro-

[1] Dlužno říci, že toto přímo z Věty 2.19 nevyplývá. Vyplývá to z vět 2.8 a 2.19 a (za jejich použití) z rozboru jednotlivých případů.

storu V. Potom každá podmnožina lineární množiny $x + W$ má prázdný vnitřek.

Důkaz.
Nechť $C \subset x + W$.

Předpokládejme, že existuje $y \in C^\circ$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $U(y, \delta) \subset C$. Jelikož $y + W = x + W$, je

$$U(o, \delta) = U(y, \delta) - y \subset C - y \subset W.$$

Zvolíme bázi K prostoru W a doplníme ji na bázi L prostoru V. Nechť $v \in L \setminus K$. Jak lze ověřit výpočtem, je

$$\frac{\delta}{2\|v\|} v \in U(o, \delta) \subset W,$$

což je ve sporu s tím, že libovolný nenulový násobek v neleží ve W.

Je tedy $C^\circ = \emptyset$.

2.22 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor dimenze d, C konvexní podmnožina V. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(*i*) $C^\circ = \emptyset$,

(*ii*) existuje lineární množina $x + W$ ve V taková, že $C \subset x + W$ a $\dim W < d$.

Důkaz.
Nechť C je konvexní podmnožina V, pro níž $C^\circ = \emptyset$, $x \in C$. Potom $C - x$ je konvexní. Ukážeme, že nemůže být $[C - x] = V$: Kdyby $[C - x] = V$, pak $C - x$ obsahuje nějakou bázi V, např. bázi $\{v_1, \ldots, v_d\}$. Definujme zobrazení f metrického prostoru $\big(V, \|\ \|\big)$ do metrického prostoru $\big(\mathbb{R}^d, \|\ \|_1\big)$ $\Big(\big\|(a_1, \ldots, a_d)\big\|_1 = |a_1| + \ldots + |a_d|\Big)$, jež přiřazuje vektoru $v = a_1 v_1 + \cdots + a_d v_d$ jeho souřadnice vzhledem k bázi $\{v_1, \ldots, v_d\}$: $f(v) = (a_1, \ldots, a_d)$. Označme $v_0 = \frac{1}{d+1}(v_1 + \cdots + v_d)$. Potom

$$a_0 = f(v_0) = \left(\frac{1}{d+1}, \ldots, \frac{1}{d+1}\right) \in \left(0, \frac{1}{d}\right) \times \cdots \times \left(0, \frac{1}{d}\right) = I.$$

Odtud je patrno, že a_0 je vnitřní bod I, neboli že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U(a_0, \varepsilon) \subset I$. f je spojité na V [2], a proto existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $v \in U(v_0, \delta)$ je $f(v) \in U(a_0, \varepsilon)$. Ale pro každé $a \in U(a_0, \varepsilon)$ je $f^{-1}(a)$ prvkem konvexní množiny $C - x$. To plyne z toho, že $v_1, \ldots, v_d, o \in C - x$, $a \in I$, a z Věty 2.9. Je tedy $U(v_0, \delta) \subset C - x$, tedy $U(x + v_0, \delta) = x + U(v_0, \delta) \subset C$, tedy $x + v_0$ je vnitřní bod C. Ale C by mít neměla, podle předpokladů, žádné vnitřní body. Tím je vyloučena možnost $[C - x] = V$. Pak je ale $\dim [C - x] < d$ a $C \subset x + [C - x]$.

Druhá implikace plyne z Věty 2.21.

2.3 Konvexní obal

2.24 Definice.
Nechť A je podmnožinou vektorového prostoru V. *Konvexním obalem* množiny A budeme rozumět průnik všech konvexních podmnožin V obsahujících A.

2.25 Poznámky.

a) Definice je korektní. Vždy existuje alespoň jedna konvexní množina obsahující A – sám prostor V je konvexní.
b) Konvexní obal množiny A budeme značit $\operatorname{co} A$.
c) Jak plyne z Věty 2.7, je $\operatorname{co} A$ nejmenší konvexní množina, která obsahuje A.

2.26 Definice.
Lineární kombinaci $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ budeme říkat *konvexní kombinace*, jestliže $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

---

[2] Podle známé věty z funkcionální analýzy:

2.23 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor konečné dimenze, W normovaný vektorový prostor, $f : V \to W$ homomorfizmus. Potom je f spojité.

2.27 Věta.
Nechť A je neprázdná podmnožina vektorového prostoru V. Konvexní obal množiny A je roven množině všech konvexních kombinací vektorů z množiny A.

Důkaz.
Označme množinu našich konvexních kombinací písmenem B. Podle Věty 2.9 je $B \subset \operatorname{co} A$. Protože je zřejmě B konvexní, obsahující A, je $\operatorname{co} A \subset B$.

2.28 Poznámka.
Podmnožina A vektorového prostoru V tedy nese již všechny informace o konvexní množině $\operatorname{co} A$. Můžeme se též ptát, zdali ke každé dané konvexní množině $C \subset V$, existuje nějaká její (vlastní) podmnožina A, v níž už je C „zakódována“ – tj. pro C platí $\operatorname{co} A = C$. V následujícím uvidíme, že důležitou roli v tomto hrají extremální body, a že určitou odpověď na tuto otázku dají věty Minkowského, Carathéodoryho a Krein-Milmanova.

2.4 Nadrovina

2.29 Definice.
Nechť V je vektorový prostor a H lineární množina ve V určená maximálním vlastním podprostorem prostoru V. Potom H nazveme *nadrovinou* ve V.

2.30 Věta.
Nechť H je podmnožina vektorového prostoru V. Potom H je maximální vlastní podprostor prostoru V právě tehdy, když existuje nenulová lineární forma f na V tak, že $H = \big\{x \in V : f(x) = 0\big\}$.

Důkaz.
Nechť H je maximální vlastní podprostor V. Potom k libovolně zvolené bázi K podprostoru H existuje $w \in V$ tak, že $K \cup \{w\}$ je báze V. Pak lze každé $v \in V$ vyjádřit jednoznačně (až na pořadí sčítanců) ve tvaru $v = h + aw$, kde $h \in H$ a $a \in \mathbb{R}$. Můžeme tedy definovat zobrazení $f : V \to \mathbb{R}$ vztahem $f(v) = a$. Z definice f plyne, že f je homomorfizmus V do $\mathbb{R}$, tj., lineární for-

ma na V, je nenulová, a její jádro je rovno H.

Nechť existuje nenulová lineární forma f na V tak, že $H = \{x \in V : f(x) = 0\}$. Čili její jádro H je vlastní podprostor V. Čili existuje netriviální podprostor W prostoru V tak, že V je direktním součtem H a W. Nechť $w \in W$, $w \neq o$. Pro libovolné $x \in W$ pak platí:

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{f(w)} w\right) = f\left(\frac{f(x)}{f(w)} w\right),$$

a tudíž také, $x - \frac{f(x)}{f(w)} w \in H$. Současně je též, neboť $x, w \in W$, $x - \frac{f(x)}{f(w)} w \in W$. Je tedy $x - \frac{f(x)}{f(w)} w = o$. Tedy $W = [w]$, a H je maximální vlastní podprostor V.

2.31 Věta.
Nechť H je podmnožina vektorového prostoru V. Potom H je nadrovina ve V právě tehdy, když existuje nenulová lineární forma f na V a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $H = \{x \in V : f(x) = \alpha\}$.

Důkaz.
Nechť H je nadrovina ve V. Potom existuje $y \in V$ a (podle Věty 2.30) nenulová lineární forma f na V tak, že $H = y + \operatorname{Ker} f$. Pokud položíme $\alpha = f(y)$, bude $H = \{x \in V : f(x) = \alpha\}$.

Nechť existuje nenulová lineární forma f na V a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $H = \{x \in V : f(x) = \alpha\}$. H je úplný vzor α při f. Což je lineární množina $y + \operatorname{Ker} f$, kde $f(y) = \alpha$. Ta je podle Věty 2.30 nadrovina ve V.

2.32 Věta.
Nechť V je vektorový prostor, f, g nenulové lineární formy na V a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\{x \in V : f(x) = \alpha\} = \{x \in V : g(x) = \beta\}$ právě tehdy, když existuje nenulové reálné číslo a tak, že $g = af$ a $\beta = a\alpha$.

Důkaz.
Z rovnosti nadrovin plyne rovnost $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Potom bude existovat nenulový $w \in V$ takový, že: pro každé $v \in V$ existuje právě jedno $x \in$

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ a právě jedno $a_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $v = x + a_1 w$. Odtud je vidět, že pro každé $v \in V$ je $g(v) = \frac{g(w)}{f(w)} f(v)$. Odtud: $\beta = \frac{g(w)}{f(w)} \alpha$.

Druhá implikace je zřejmá.

2.33 Věta.
Nechť V je vektorový prostor, H nadrovina ve V určená lineární formou f a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom množiny

$$f^{-1}\big((-\infty, \alpha\rangle\big),\ f^{-1}\big(\langle\alpha, +\infty)\big), \tag{2.1}$$

respektive množiny

$$f^{-1}\big((-\infty, \alpha)\big),\ f^{-1}\big((\alpha, +\infty)\big), \tag{2.2}$$

závisí pouze na nadrovině H [3]. Dále:

a) H a každá z množin 2.1 a 2.2 je konvexní.

b) Je-li $a \in f^{-1}\big((-\infty, \alpha)\big)$ a $b \in f^{-1}\big((\alpha, +\infty)\big)$, potom $\overline{a, b} \cap H = \{c\}$.

c) Je-li V normovaný a konečné dimenze, potom jsou H a množiny 2.1 uzavřené, množiny 2.2 otevřené.

d) Je-li V normovaný a konečné dimenze, potom uzávěr $f^{-1}\big((-\infty, \alpha)\big)$ je $f^{-1}\big((-\infty, \alpha\rangle\big)$ a uzávěr $f^{-1}\big((\alpha, +\infty)\big)$ je $f^{-1}\big(\langle\alpha, +\infty)\big)$.

Důkaz.
Nezávislost množin 2.1 a 2.2 na lineární formě a reálném čísle, jež reprezentují H, plyne z Věty 2.32.

a) Konvexita je důsledkem linearity f.

b) Přímo výpočtem máme: $c = \lambda a + (1 - \lambda) b$, kde $\lambda = \frac{\alpha - f(y)}{f(x) - f(y)}$.

c) Podle Věty 2.23 je f spojitá. $\{\alpha\}, (-\infty, \alpha\rangle, \langle\alpha, +\infty)$ jsou uzavřené, tudíž jejich úplné vzory při spojitém zobrazení f jsou též uzavřené množiny. Podobně pro otevřené $(-\infty, \alpha), (\alpha, +\infty)$.

d) Spojitost f je ekvivalentní podmínce, že pro každé $M \subset V$ je $f\left(\overline{M}\right) \subset \overline{f(M)}$. Odtud tvrzení.

[3] Přesně řečeno: Je-li nadrovina H určena lineární formou g a $\beta \in \mathbb{R}$, potom množina, jejíž prvky jsou množiny 2.1, je rovna množině, jejíž prvky jsou množiny $g^{-1}\big((-\infty, \beta\rangle\big)$, $g^{-1}\big(\langle\beta, +\infty)\big)$. Podobně pro množiny 2.2.

2.34 Definice.
Buď V vektorový prostor, H nadrovina ve V určená lineární formou f a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom, množiny 2.1 nazveme *uzavřenými poloprostory* s hraniční nadrovinou H, množiny 2.2 nazveme *otevřenými poloprostory* s hraniční nadrovinou H.

2.35 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, A a B podmnožiny V, H nadrovina ve V. Nechť A leží v jednom z otevřených poloprostorů určených H, B ve druhém. Potom řekneme, že *nadrovina H silně separuje množiny A a B.*

2.5 Opěrná nadrovina

2.36 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, A podmnožina V, $x \in A$, H nadrovina ve V. Nechť $x \in H$ a A leží v jednom z uzavřených poloprostorů určených H. Potom nazýváme nadrovinu H *opěrnou nadrovinou k A v bodě x.*

2.37 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, $C \subset V$, C otevřená (respektive kompaktní), $x \in V$. Potom je $x + C$ otevřená (respektive kompaktní).

Důkaz.
Nechť C je otevřená, $a \in x + C$. Pro jisté $b \in C$ je $a = x + b$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $U(b, \delta) \subset C$. Potom $x + C \supset x + U(b, \delta) = U(a, \delta)$. A tedy $a \in (x + C)^\circ$.

Budiž C kompaktní. Je-li $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ soubor otevřených množin ve V pokrývajících $x + C$, potom, podle již dokázaného, je $\{G_\gamma - x\}_{\gamma\in\Gamma}$ soubor otevřených množin pokrývajících C. Potom existuje konečná množina Γ_0 tak, že $\Gamma_0 \subset \Gamma$ a $C \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} (G_\gamma - x)$ $\left(\text{což je ekvivalentní s } x + C \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} G_\gamma\right)$. Je tedy $x + C$ kompaktní.

2.38 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor dimenze alespoň 2, C konvexní otevřená podmnožina V, $z \in V \setminus C$. Potom existuje přímka L tak, že $z \in L$ a $L \cap C = \emptyset$.

Důkaz.
Viz. Obr. 2.2 a Obr. 2.3. Označme $D = C - z$. Vezměme množinu $E = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda D$.

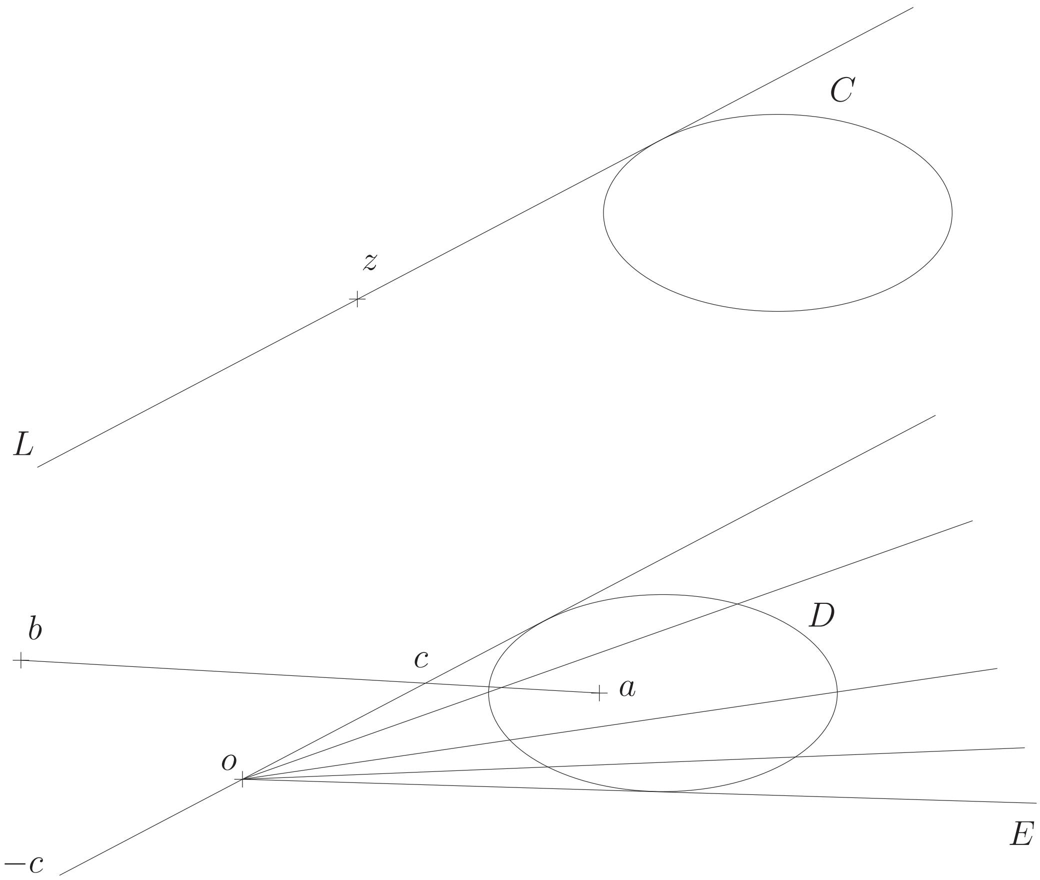
E je konvexní: Nechť $x, y \in E$. Tedy existují $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ a $a, b \in C$ tak, že $x = \lambda_1 (a - z)$ a $y = \lambda_2 (b - z)$. Je-li $\mu \in (0,1)$, je $\alpha = \frac{\mu\lambda_1}{\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2} \in (0,1)$, $\lambda = \frac{\mu\lambda_1}{\alpha} > 0$, $\mu x + (1-\mu)\, y = \lambda\big(\alpha a + (1-\alpha)\, b - z\big) \in \lambda D$. Tedy $\overline{x, y} \subset E$.

E je otevřená: E je sjednocením otevřených množin λD (λD jsou podle Věty 2.37 a Věty 2.12 otevřené).

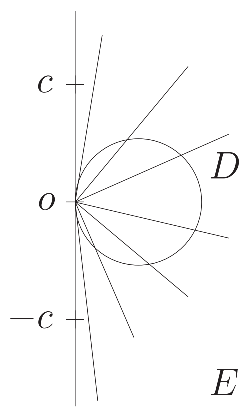
Zřejmě $o \notin E$, a, označíme-li $\mathscr{L}^+$ systém všech polopřímek L^+ takových, že o je počátek L^+ a $L^+ \cap D \neq \emptyset$, bude $E = \bigcup\limits_{L^+ \in \mathscr{L}^+} \big(L^+ \setminus \{o\}\big)$.

Zřejmě není $V = E \cup \{o\}$ $\Big($kdyby ano, pak by pro zvolené $x \in E$ bylo též $-x \in E$, tj. $o = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in E\Big)$. Zvolme $a \in E$ (pevně) a označme L_{oa} přímku určenou body o a a. Též nemůže být $V = E \cup L_{oa}$ $\Big($rovnost by implikovala následující: $\dim V > 1$, tj., existuje $x \in V$, jež neleží v L_{oa}; pak je $x, -x \in E$, tj. $o = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in E\Big)$. To znamená, že existuje $b \in V \setminus (E \cup L_{oa})$. Podle Věty 2.19 je $\overline{a, b} \cap \partial E = \{c\}$, $c \neq a$. Protože pro přímky L_{oa}, L_{ab} (přímka určená body a a b) platí $L_{oa} \cap L_{ab} = \{a\}$, je $c \neq o$. Celkem: existuje bod c na hranici E, jež je různý od o.

Potom je též $-c \notin E$ $\Big($kdyby $-c \in E$, pak $-c \in E^\circ$, a pak podle Věty 2.19 $o = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(-c) \in E^\circ\Big)$. Tedy přímka L_{oc} (přímka určená body o a c) je disjunktní s E, a tím spíše s D. Též $L = z + L_{oc}$ je přímka. Přímka, pro níž $z \in L$ a $L \cap C = \emptyset$.



Obrázek 2.2: K Větě 2.38.



Obrázek 2.3: K Větě 2.38.

2.39 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor dimenze d, $d > 1$, C konvexní a otevřená podmnožina V, $z + W$ lineární množina ve V určená podprostorem W dimenze k, $k < d - 1$, $(x + W) \cap C = \emptyset$. Potom existuje lineární množina $z^\star + W^\star$ ve V tak, že dimenze $W^\star$ je $k + 1$, $z + W \subset z^\star + W^\star$, a $(z^\star + W^\star) \cap C = \emptyset$.

Důkaz.
Bude existovat podprostor X prostoru V tak, že prostor V je direktním součtem podprostorů W a X. Potom každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit právě jedním způsobem (až na pořadí sčítanců), ve tvaru $v = w + x$, kde $w \in W$ a $x \in X$; a lze tedy definovat zobrazení $p : V \to X$, jež přiřadí vektoru $v = w + x$ ($w \in W$, $x \in X$) vektor $p\,(v) = x$.

$D = C - z$ je konvexní. Též $p\,(D)$ je konvexní: Nechť $a_2, b_2 \in p\,(D)$. Tedy pro jisté $a = a_1 + a_2 \in D$ a $b = b_1 + b_2 \in D$ je $p\,(a) = a_2$ a $p\,(b) = b_2$. Je-li $\lambda \in (0, 1)$, potom

$$\underbrace{\lambda a + (1 - \lambda) b}_{\in D} = \underbrace{\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1}_{\in W} + \underbrace{\lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2}_{\in X},$$

čili $\lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2 \in p\,(D)$. Tedy $\overline{a_2, b_2} \subset p\,(D)$.

$p\,(D)$ je otevřená v X: Nechť $x_0 \in p\,(D)$. Potom existuje $v_0 = w_0 + x_0 \in D$ tak, že $p\,(v_0) = x_0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $U_V(v_0, \delta) \subset D$ (Věta 2.37). Buď $x \in U_X\bigl(x_0, \frac{1}{2}\delta\bigr)$. Zvolme libovolně $w \in W$ tak, že $\|w - w_0\| < \frac{1}{2}\delta$. Norma na X, je ale zůžením normy $\| \;\|$ definované na V na podprostor X. Proto $(v = w + x)$

$$\|v - v_0\| \le \|w - w_0\| + \|x - x_0\| < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta,$$

čili $v = w + x \in D$ a $x = p\,(v) \in p\,(D)$. Takže $U_X\bigl(x_0, \frac{1}{2}\delta\bigr) \subset p\,(D)$.

Z předpokladů plyne, že dimenze X je alespoň 2, a že $W \cap D = \emptyset$. A protože $p^{-1}\,(o) = W$, je $o \in X \setminus p\,(D)$. Protože $p\,(D)$ je podmnožina X, konvexní a otevřená (v X), bude podle Věty 2.38 existovat přímka L v X

tak, že $o \in L$ a $L \cap p\,(D) = \emptyset$.

Potom je $p^{-1}\,(L) = W + L$, $(W + L) \cap D = \emptyset$. Též je zřejmě: $W^\star = W + L$ je podprostor prostoru V $(o \in L)$, $W \subset W^\star$, $\dim W^\star = \dim W + 1$, $z + W \subset z + W^\star$, $(z + W^\star) \cap C = \emptyset$.

2.40 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor konečné dimenze, C konvexní a otevřená podmnožina V, $z + W$ lineární množina ve V určená vlastním podprostorem W prostoru V, $(x + W) \cap C = \emptyset$. Potom existuje nadrovina H ve V tak, že $x + W \subset H$ a $H \cap C = \emptyset$.

Důkaz.
Pro prostory dimenze $d < 2$ není co dokazovat. V opačném případě $(d \geq 2)$ použijeme (označme dimenzi W jako k) postupně za sebou $(d - 1 - k)$–krát Větu 2.39.

2.41 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor konečné dimenze, C konvexní a uzavřená podmnožina V, $z \in \partial C$. Potom existuje opěrná nadrovina k C v bodě z.

Důkaz.
Mohou nastat dva případy.

První: Je $C^\circ = \emptyset$. Podle Věty 2.22 pak existuje nadrovina H ve V tak, že $C \subset H$. Takže H je opěrná nadrovina k C v bodě z.

Druhý: Je $C^\circ \neq \emptyset$. Jelikož dimenze V je konečná a C° je konvexní a otevřená, existuje podle Věty 2.40 nadrovina H ve V tak, že $H \cap C^\circ = \emptyset$ a $z \in H$. Potom, podle Věty 2.33b, C° leží v jednom z uzavřených poloprostorů určených H. Označme ho třeba H^+. H^+ je uzavřená (Věta 2.33c), čili $\overline{C^\circ} \subset H^+$, a jelikož je C uzavřená a $C^\circ \neq \emptyset$, je $C = \overline{C} = \overline{C^\circ}$ (poslední rovnost říká Věta 2.19a), tj. $C \subset H^+$. Takže H je opěrná nadrovina k C v bodě z.

2.6 Hvězdicovitě konvexní množina

2.42 Definice.
Mějme dán vektorový prostor V, podmnožinu A prostoru V, $a \in V$, a nechť pro každé $x \in A$ je $\overline{a,x} \subset A$. Potom množinu A nazýváme *hvězdicovitě konvexní vzhledem k bodu a*.

2.43 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $A \subset V$, $x \in A$. Potom definujme množinu

$$A_x = \{y \in V : \overline{x,y} \subset A\}.$$

2.44 Poznámka.
Dáme dvě kritéria pro hvězdicovitě konvexní množinu. Jedno kritérium dáme v této kapitole ve Větě 2.51, další pak ve Větě 3.14.

2.45 Věta.
Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, A, D dvě neprázdné disjunktní podmnožiny X, A uzavřená, D kompaktní. Potom $\operatorname{dist}(A, D) > 0$.

Důkaz.
Budiž $\operatorname{dist}(A, D) = 0$. Potom existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z A a posloupnost $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z D tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a_n, d_n) = 0$. Existuje vybraná posloupnost $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} d_{n_k} = d \in D$. Čili $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(d_{n_k}, d) = 0$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(a_{n_k}, d_{n_k}) = 0$. Pro každé k platí odhad

$$0 < \varrho(a_{n_k}, d) \leq \varrho(a_{n_k}, d_{n_k}) + \varrho(d_{n_k}, d).$$

Takže $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(a_{n_k}, d) = 0$, $d \in \overline{A} = A$, $d \in A \cap D$ a A,D nejsou disjunktní.

Je tedy $\operatorname{dist}(A, D) > 0$.

2.46 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, nechť

$$A, B(d, r) \subset V, \quad v = \operatorname{dist}\big(A, B(d, r)\big) > 0, \quad \varepsilon \in (0, v).$$

Potom

$$\operatorname{dist}\big(A, B(d, r + \varepsilon)\big) > 0.$$

Důkaz.
Pro stručnost označme $D = B(d, r)$, $\widetilde{D} = B(d, r+\varepsilon)$. Viz. Obr. 2.4.

Nechť je $z \in \widetilde{D} \setminus D$, $a \in A$. Potom

$$\lambda = \frac{r}{\|z-d\|} \in (0,1), \qquad \widetilde{z} = \lambda z + (1-\lambda)d \in \overline{z,d}, \qquad \varrho(d, \widetilde{z}) = r.$$

Odtud dostáváme

$$\varrho(z, \widetilde{z}) = \|z - \widetilde{z}\| = (1-\lambda)\|z-d\| = \|z-d\| - r \le \varepsilon$$

– poslední nerovnost plyne z $\varrho(z, d) \le r + \varepsilon$. Sečtením

$$\varrho(z, \widetilde{z}) \le \varepsilon,$$

$$\operatorname{dist}(A, D) \le \varrho(\widetilde{z}, a),$$

dostáváme

$$\varrho(z, \widetilde{z}) + \operatorname{dist}(A, D) \le \varrho(\widetilde{z}, a) + \varepsilon,$$

což za použití trojúhelníkové nerovnosti dává

$$0 < \operatorname{dist}(A, D) - \varepsilon \le \varrho(\widetilde{z}, a) - \varrho(z, \widetilde{z}) \le \varrho(z, a). \tag{2.3}$$

Nerovnost 2.3 splňuje každá dvojice $z \in \widetilde{D} \setminus D$ a $a \in A$, a též každá dvojice $z \in D$ a $a \in A$. Je tedy

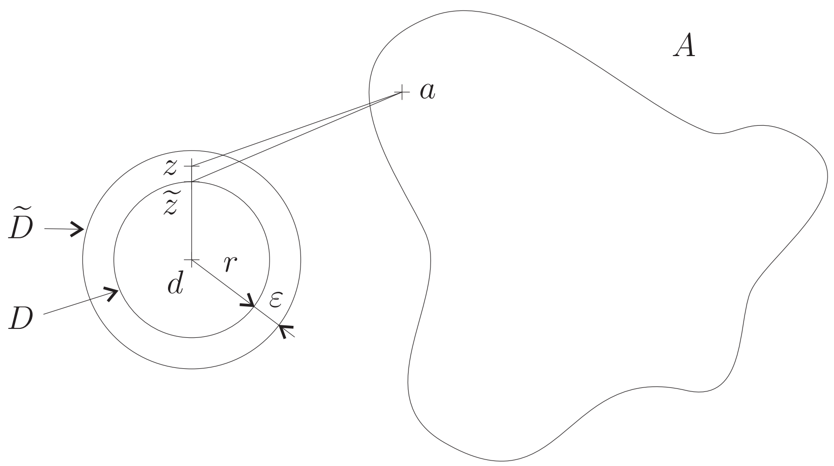
$$0 < \operatorname{dist}(A, D) - \varepsilon \le \operatorname{dist}\big(A, \widetilde{D}\big).$$

2.47 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor konečné dimenze, $A \subset V$, A uzavřená, $b \in A$, $B(c, r) \subset V$, $B(c, r)$ disjunktní s A. Potom, označíme-li

$$M = \Big\{\lambda \ge 0 : A \cap B\big(c + \lambda(b-c), r\big) \ne \emptyset\Big\}, \qquad \alpha = \inf M,$$

$$D = B\big(c + \alpha(b-c), r\big),$$

je $D \cap A \ne \emptyset$ a $D^\circ \cap A = \emptyset$.



Obrázek 2.4: K Větě 2.46.

Důkaz.
Viz. Obr. 2.5, Obr. 2.6, Obr. 2.7. Nechť $\alpha \notin M$. Potom $A \cap D = \emptyset$. A jelikož dimenze V je konečná, je D kompaktní, a Věta 2.45 dává: $\operatorname{dist}(A, D) > 0$. Potom tedy existuje, a můžeme zvolit, $\varepsilon \in \big(0, \operatorname{dist}(A, D)\big)$. Podle Věty 2.46 je pak $B\big(c + \alpha(b - c), r + \varepsilon\big) \cap A = \emptyset$. Snadno lze ověřit, že: pro každé $\varepsilon^\star$, $0 \le \varepsilon^\star \le \varepsilon$, je

$$B\left(c + \alpha(b - c) + \frac{\varepsilon^\star}{\|b - c\|}(b - c), r\right) \subset B\big(c + \alpha(b - c), r + \varepsilon\big),$$

$$\text{(z čehož)} \qquad \alpha + \frac{\varepsilon^\star}{\|b - c\|} \notin M.$$

Existuje tedy číslo $\frac{\varepsilon}{\|b-c\|} + \alpha > \alpha$ tak, že pro každé $\lambda \in M$ je $\lambda > \frac{\varepsilon}{\|b-c\|} + \alpha > \alpha$. Neboli existuje dolní odhad M, větší než infimum α množiny M.

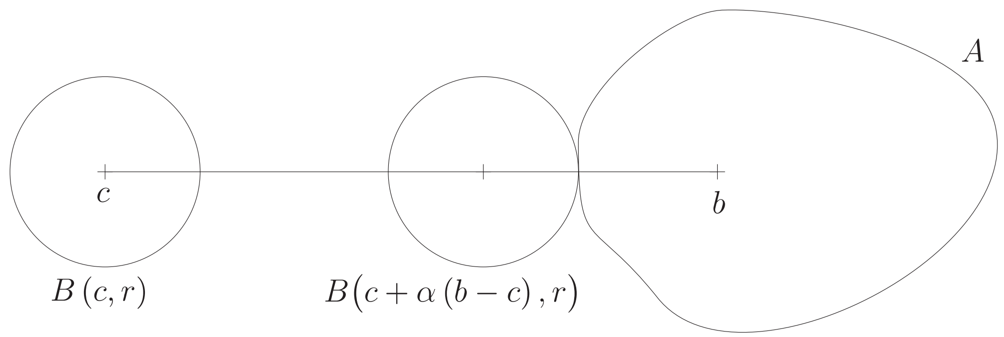
Musí být tedy $\alpha \in M$. Pak je tedy $A \cap D \neq \emptyset$.

Nechť $x \in A \cap D^\circ$. To znamená, že $\varrho\big(c + \alpha(b - c), x\big) < r$ a $\varepsilon = r - \varrho\big(c + \alpha(b - c), x\big) > 0$. Snadno lze pak ověřit, že

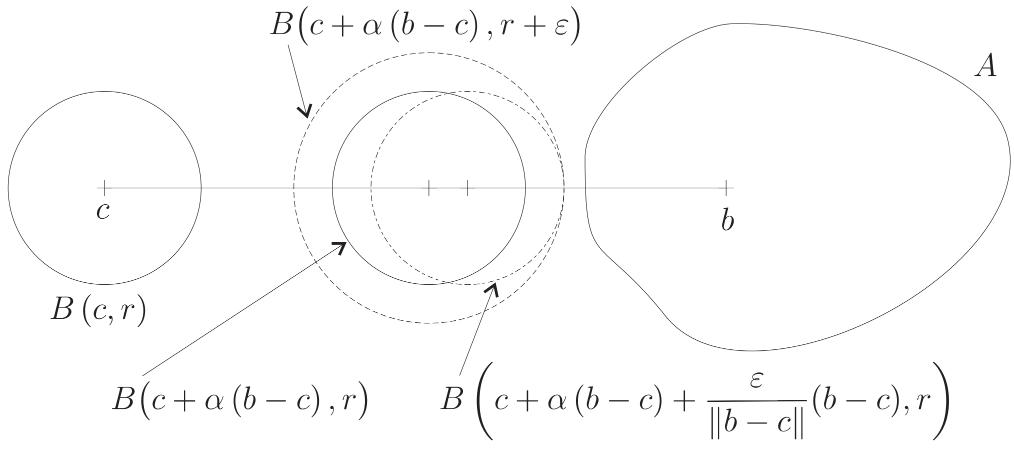
$$x \in B\left(c + \alpha(b - c) - \frac{\varepsilon}{\|b - c\|}(b - c), r\right).$$

Takže je $\alpha - \frac{\varepsilon}{\|b-c\|} \in M$, a současně $\alpha - \frac{\varepsilon}{\|b-c\|} < \alpha$, a současně $\alpha = \inf M$.

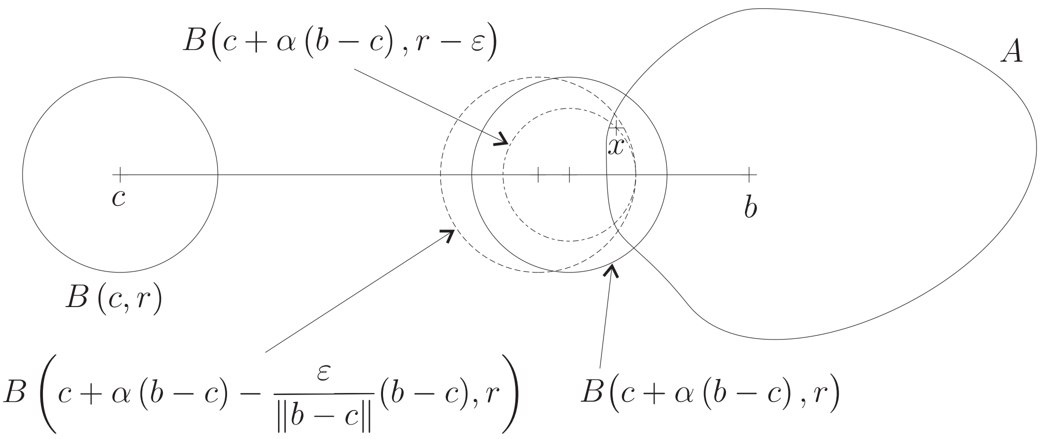
Je tedy $A \cap D^\circ = \emptyset$.



Obrázek 2.5: K Větě 2.47.



Obrázek 2.6: K Větě 2.47.



Obrázek 2.7: K Větě 2.47.

2.48 Věta.
Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $x, y \in V$, $\alpha > 0$, a nechť pro každé $0 < \lambda < \alpha$ je $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$. Potom $(x \mid y) \geq 0$.

Důkaz.
Pro každé $0 < \lambda < \alpha$ příslušnou nerovnost umocníme, a po úpravě dostaneme

$$\lambda(y \mid y) + 2(x \mid y) \geq 0.$$

Limitním přechodem $\lambda \to 0^+$ pak dostaneme $(x \mid y) \geq 0$.

2.49 Věta.
Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze se skalárním součinem, $A \subset V$, A uzavřená. Potom A je hvězdicovitě konvexní vzhledem k bodu a právě tehdy, když pro každé $x \in A$ je $a \in \operatorname{co} A_x$.

Důkaz.
Viz. Obr. 2.8.

1. Nechť je A hvězdicovitě konvexní vzhledem k bodu a. Potom je zřejmě pro každé $x \in A$: $a \in A_x \subset \operatorname{co} A_x$.

2. Nechť není A hvězdicovitě konvexní vzhledem k bodu a.

Potom existuje $b \in A$ tak, že $\overline{a,b}$ neleží celé v A – existuje $\mu \in (0,1\rangle$ tak, že $\mu a + (1-\mu)b \notin A$. Jelikož je A uzavřená, existuje $r > 0$ tak, že $\big($je $c = \mu a + (1-\mu)b\big)$ $B\,(c, r) \cap A = \emptyset$.

Jak plyne z Věty 2.47, označíme-li

$$\alpha = \inf\Big\{\lambda \geq 0 : A \cap B\big(c + \lambda\,(b-c)\,, r\big) \neq \emptyset\Big\}\,,$$

$d = c + \alpha\,(b-c)$, $D = B\,(d, r)$, je $D \cap A \neq \emptyset$ a $D^\circ \cap A = \emptyset$. Nechť $e \in D \cap A$.

Zřejmě je $H^- = \big\{x \in V : (x-e \mid e-d) < 0\big\}$ dislunktní s $H^+ = \big\{x \in V : (x-e \mid e-d) \geq 0\big\}$ $\Big($a zřejmě $H = \big\{x \in V : (x-e \mid e-d) = 0\big\}$ nadrovina ve $V\Big)$.

Pro každé $0 < \lambda < \alpha$ je $A \cap B\big(c + \lambda\,(b-c)\,, r\big) = \emptyset$. To znamená, protože $e \in A$, že pro každé $0 < \lambda < \alpha$ je

$$\Big\|e - \big(c + \lambda(b-c)\big)\Big\| > r, \qquad \text{tj.,}$$

$$\big\|e - d + (\alpha - \lambda)(b-c)\big\| > \|e-d\|.$$

Odtud, podle Věty 2.48, $(e-d \mid b-c) \geq 0$. Odtud, jelikož $a - d = k\,(b-c)$, kde $k = 1 - \frac{1}{\mu} - \alpha < 0$, je dále $(e-d \mid a-d) \leq 0$. Odtud a z $\|e-d\| = r$ dostáváme $(a-e \mid e-d) = (e-d \mid a-d) - \|e-d\|^2 < 0$. Je $a \in H^-$.

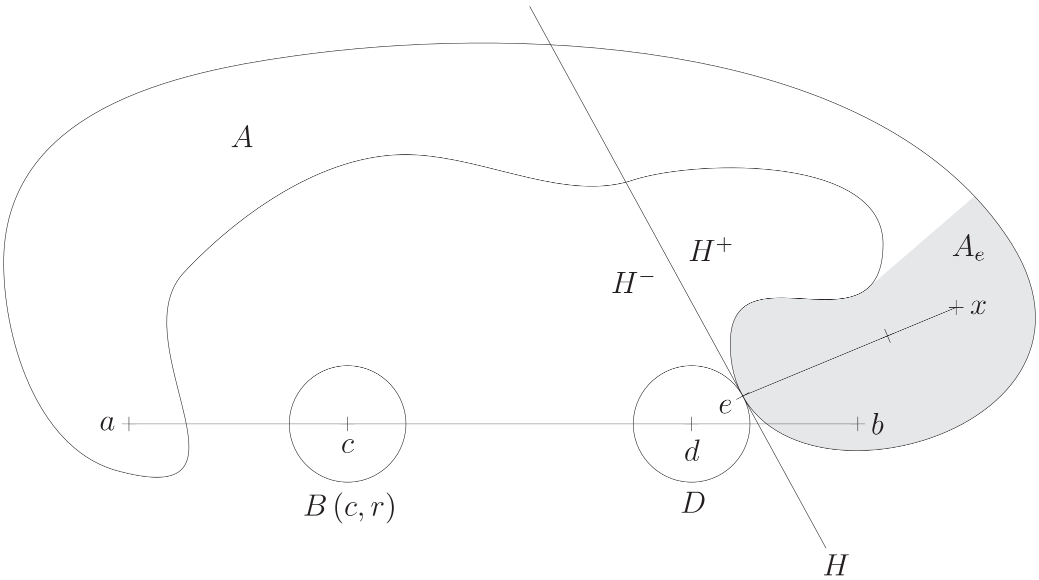
Nechť $x \in A_e$. Protože A je disjunktní s vnitřkem D, je pro každé $0 \leq \varphi \leq 1$

$$\big\|\varphi x + (1-\varphi)\,e - d\big\| \geq r, \qquad \text{tj.,}$$

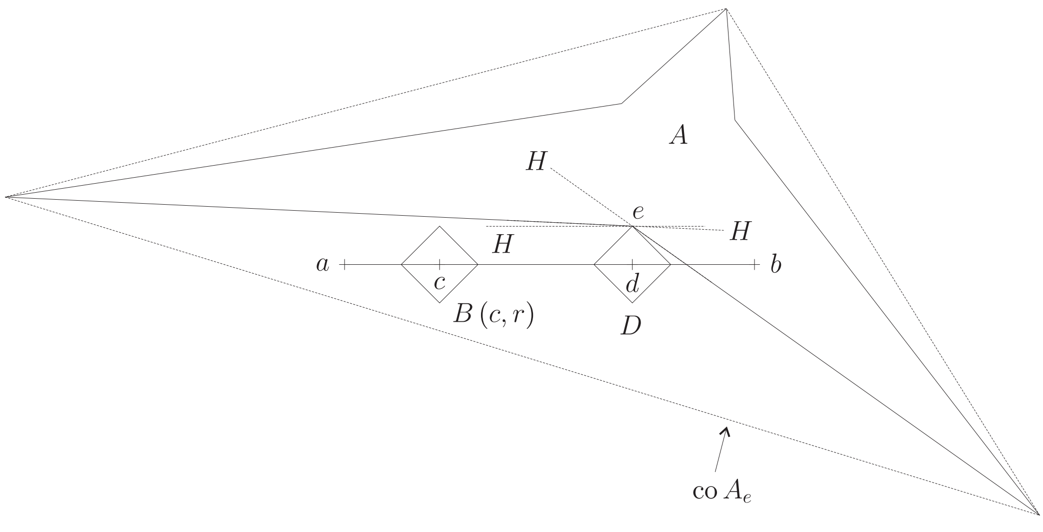
$$\big\|e - d + \varphi\,(x-e)\big\| > \|e-d\|.$$

Podle Věty 2.48 je pak $(x-e \mid e-d) \geq 0$. Takže $x \in H^+$, $A_e \subset H^+$, a vzhledem ke konvexitě H^+, $\operatorname{co} A_e \subset H^+$.

Tedy existuje $e \in A$ tak, že $a \notin \operatorname{co} A_e$.



Obrázek 2.8: K Větě 2.49.



Obrázek 2.9: K Poznámce 2.50.

2.50 Poznámka.
V důkazu bylo podstatné, že metrika byla indukována skalárním součinem. Tento náš postup by v obecném normovaném vektorovém prostoru nemusel vést k cíli (jako H by jsme vzali opěrnou nadrovinu k D v e – ta by existovala podle Věty 2.41). Viz. Obr. 2.9 pro prostor $\mathbb{R}^2$ s normou $\left\|\{x_i\}_{i=1}^2\right\| = |x_1| + |x_2|$.

2.51 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor konečné dimenze, $A \subset V$, A uzavřená. Potom A je hvězdicovitě konvexní vzhledem k bodu a právě tehdy, když pro každé $x \in A$ je $a \in \operatorname{co} A_x$.

Důkaz.
Zvolme bázi $\{v_1, \ldots, v_d\}$ prostoru V. Zřejmě $g : V \times V \to \mathbb{R}$, $g(u, v) = a_1b_1 + \cdots + a_db_d$, kde $v = a_1v_1 + \cdots + a_dv_d$, $u = b_1v_1 + \cdots + b_dv_d$, je skalární součin na V. Označme metriku indukovanou g, jako ϱ.

Protože dimenze V je konečná, je A uzavřená ve (V, ϱ) [4]. Tvrzení naší věty je pak již důsledkem předcházející Věty 2.49.

2.7 Extremální bod

2.53 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, nechť $\overline{a, b}$ je úsečka ve V. Jejím *středem* budeme rozumět bod $\frac{1}{2}(a + b)$. Pokud je $a \neq b$, nazveme ji *nedegenerovanou.*

2.54 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $A \subset V$, $z \in A$. Bod z nazveme *extremálním bodem* množiny A, jestliže není středem žádné nedegenerované úsečky s krajními body v A.

[4] To plyne ze známé věty funkcionální analýzy:

2.52 Věta.
Všechny normy na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru jsou (navzájem) ekvivalentní.

2.55 Poznámky.

a) Ekvivalentní formulace definice by mohla znít: ... Bod z nazveme extremálním bodem množiny A, jestliže z každé rovnosti $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, kde $a, b \in A$, plyne $a = b$.

b) Množinu všech extremálních bodů množiny A budeme značit $\operatorname{ext} A$.

2.56 Věta.

Nechť V je vektorový prostor, C podmnožina V, $x \in V$. Potom

$$\operatorname{ext}(C - x) = (\operatorname{ext} C) - x\,.$$

Důkaz.

Věta je důsledek předcházející Poznámky 2.55a).

2.57 Věta.

Nechť V je vektorový prostor, C konvexní podmnožina V, H opěrná nadrovina k C, $F = H \cap C$. Potom $\operatorname{ext} F \subset \operatorname{ext} C$.

Důkaz.

Nechť $y \in \operatorname{ext} F$. Nechť $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, kde $a, b \in C$. Kdyby $a, b \notin H$, pak by y muselo ležet v (konvexním) otevřeném poloprostoru určeném H a C, tj. pak by $y \notin H$, ale $y \in F$. Tedy a nebo b leží v H. Tedy i přímka tímto bodem, a bodem y, určená, leží v H, jak lze snadno ověřit. Tedy $a, b \in H \cap C = F$, $a = b$. Tedy $y \in \operatorname{ext} C$.

2.58 Věta.

Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru a $z \in C$. Potom bod z je extremálním bodem množiny C právě tehdy, když $C \setminus \{z\}$ je konvexní.

Důkaz.

Předpokládejme, že $C \setminus \{z\}$ není konvexní. Potom existují $a, b \in C \setminus \{z\}$, $a \neq b$, a $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že $\lambda a + (1 - \lambda)b \notin C \setminus \{z\}$. Podle předpokladu je C konvexní, je tedy $z = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Odtud se již vidí, že z nemůže být extremálním bodem C. Je-li $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, stačí položit $c = b + 2\lambda\,(a - b)$ a z je pak středem úsečky $\overline{c, b}$. Je-li $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, položíme $c = a + 2\,(1 - \lambda)\,(b - a)$ a z je pak středem úsečky $\overline{a, c}$.

Nechť $C \setminus \{z\}$ je konvexní. Potom, je-li $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, kde $a, b \in C$, je $z = a = b$. Tj. z extremální bod C.

2.8 Simplex

2.59 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $x_1, \ldots, x_n$ body z V. O vektorech $x_1, \ldots, x_n$ řekneme, že jsou *afinně nezávislé*, jestliže vektory $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1$ jsou lineárně nezávislé.

2.60 Poznámka.
Definovaný pojem nezávisí na oindexování vektorů. Platí totiž, že vektory $x_1, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když z rovností

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = o \quad \text{a} \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$$

vyplývá

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0\,.$$

2.61 Definice.
Podmnožinu S vektorového prostoru nazveme *n-simplexem*, jestliže existuje $n + 1$ afinně nezávislých vektorů $e_1, \ldots, e_{n+1}$, jejichž konvexní obal je roven S. Body $e_1, \ldots, e_{n+1}$ nazveme *vrcholy* n-simplexu S.

2.62 Věta.
Ve vektorovém prostoru mějme dán n-simplex S s vrcholy $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Potom

$$\operatorname{ext} S = \{e_1, \ldots, e_{n+1}\}\ .$$

Důkaz.
Nechť $z \in \operatorname{ext} S$. Potom je $S \setminus \{z\}$ konvexní vlastní podmnožina konvexní S. Není tedy $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\} \subset S \setminus \{z\}$, neboť S je nejmenší konvexní množina obsahující $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$. Pro jisté k je tedy $z = e_k$.

Nechť e_k je vrchol. Pro které $a, b \in S$ platí $e_k = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$? Do této rovnice dosadíme za neznámé a a b konvexní kombinace $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n+1} e_{n+1}$ a $b = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_{n+1} e_{n+1}$. Dostaneme

$$(\alpha_1 + \beta_1)\, e_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k - 2)\, e_k + \cdots + (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})\, e_{n+1} = o,$$

a podle Poznámky 2.60 též $(\alpha_k + \beta_k - 2) = 0$. Jde o koeficienty konvexních kombinací, je tedy $\alpha_k = \beta_k = 1$, tedy $a = b = e_k$. Tedy $e_k \in \operatorname{ext} S$.

Kapitola 3

Význačné věty v konečné dimenzi

3.1 Carathéodoryova věta

3.1 Věta (Carathéodoryova věta).

Nechť V je vektorový prostor, A podmnožina V. Každý bod $\operatorname{co} A$ je konvexní kombinací afinně nezávislých bodů množiny A.

Důkaz.

Nechť $x \in \operatorname{co} A$. Potom

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \tag{3.1}$$

kde $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Buď jsou vektory $x_1, \ldots, x_n$ afinně nezávislé.

Nebo nejsou vektory $x_1, \ldots, x_n$ afinně nezávislé, a pak existují čísla $a_1, \ldots, a_{n-1}$ tak, že

$$a_1 (x_n - x_1) + \cdots + a_{n-1} (x_n - x_{n-1}) = o, \tag{3.2}$$

a současně $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$. Dále: nalezněme

$$G = \sup \left\{ \frac{|a_1|}{\lambda_1}, \ldots, \frac{|a_{n-1}|}{\lambda_{n-1}}, \frac{|a_1 + \cdots + a_{n-1}|}{\lambda_n} \right\}$$

a rozlišme dva případy.

1. $G = \frac{|a_i|}{\lambda_i}$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Vyjádřeme z 3.2 vektor x_i a dosaďme ho do 3.1. Dostaneme

$$x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \underbrace{\left(\lambda_j - \lambda_i \frac{a_j}{a_i} \right)}_{\geq 0} x_j + \underbrace{\left(\lambda_n + \lambda_i \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{a_i} \right)}_{\geq 0} x_n,$$

kde součet všech koeficientů v lineární kombinaci je roven 1.

2. $G = \frac{|a_1 + \cdots + a_n|}{\lambda_n}$. Vyjádřeme z 3.2 vektor x_n a dosaďme ho do 3.1. Dostaneme

$$x = \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{\left(\lambda_j + \lambda_n \frac{a_j}{a_1 + \cdots + a_{n-1}} \right)}_{\geq 0} x_j,$$

kde součet všech koeficientů v lineární kombinaci je roven 1.

V každém případě jsme dostali vyjádření x ve tvaru konvexní kombinace $n-1$ vektorů z A. Tyto vektory mohou být afinně nezávislé, a nebo opět nejsou afinně nezávislé a postup znova opakujeme. Finálně, po konečně mnoha krocích, dospějeme k vyjádření x ve tvaru konvexní kombinace afinně nezávislých vektorů z množiny A.

3.2 Věta.
Ve vektorovém prostoru dimenze d neexistuje $d+2$ afinně nezávislých bodů.

3.3 Věta (Carathéodoryova věta).
Nechť V je vektorový prostor dimenze d, A podmnožina V. Každý bod $\operatorname{co} A$ je konvexní kombinací nejvýše $d+1$ afinně nezávislých bodů množiny A.

Důkaz.
Plyne z Věty 3.2 a Věty 3.1.

3.4 Věta.
Nechť V je vektorový prostor dimenze d, A podmnožina V. Potom $\operatorname{co} A$ je roven sjednocení všech n-simplexů ($n \leq d$) s vrcholy v A.

Důkaz.
Důsledek Věty 3.3.

3.5 Věta.
Nechť K je kompaktní podmnožina normovaného vektorového prostoru dimenze d. Potom $\operatorname{co} K$ je kompakt.

Důkaz.
Vezměme libovolnou posloupnost $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodů z $\operatorname{co} K$. Podle Věty 3.3 lze každý bod y_k vyjádřit ve tvaru konvexní kombinace

$$y_k = \lambda_k^1 x_k^1 + \cdots + \lambda_k^{d+1} x_k^{d+1}$$

$d+1$ bodů z K. Tím dostáváme $2d+2$ posloupností $\{\lambda_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, d+1$, posloupností bodů z kompaktu $\langle 0, 1\rangle$ nebo kompaktu K. Z posloupnosti $\{\lambda_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ lze vybrat posloupnost $\left\{\lambda_{k_l}^1\right\}_{l=1}^{\infty}$, která konverguje v $\langle 0, 1\rangle$, dejme tomu k λ^1. Též z posloupnosti $\left\{x_{k_l}^1\right\}_{l=1}^{\infty}$ lze vybrat posloupnost, která konverguje v K, k jistému x^1, atd .... V $(2d+2)$-tém kroku můžeme říci, že existuje vybraná posloupnost $\left\{x_{k_n}^{d+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}^{d+1} = x^{d+1} \in K$ a současně, pro $i = 1, \ldots, d+1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{k_n}^i = \lambda^i \in \langle 0, 1\rangle$ a $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}^i = x^i \in K$. Potom, podle Věty 2.15c, je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lambda_{k_n}^1 x_{k_n}^1 + \cdots + \lambda_{k_n}^{d+1} x_{k_n}^{d+1}\right) = \lambda^1 x^1 + \cdots + \lambda^{d+1} x^{d+1} \in \operatorname{co} K.$$

Našli jsme tedy vybranou posloupnost $\{y_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která konverguje v $\operatorname{co} K$.

3.6 Poznámka.
Podle Věty 3.5 jsou simplexy v konečně rozměrných normovaných vektorových prostorech kompakty.

3.2 Minkowského věta

3.7 Věta (Minkowského věta).
Buď V normovaný vektorový prostor konečné dimenze, C konvexní a kompaktní podmnožina V. Potom každý bod množiny C je konvexní kombinací extremálních bodů množiny C, neboli $C = \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$.

Důkaz.

Provedeme indukcí podle dimenze d prostoru V.

1. Pro d rovno 0 a 1 věta platí. (Potom jsou jedinými kompaktními konvexními podmnožinami úsečky a $\emptyset$. Extremální body úsečky jsou právě její krajní body.)

2a. Budiž $d-1$ libovolné přirozené číslo, $d > 1$, a předpokládejme, že věta platí pro $d-1$.

2b. Nechť je V normovaný vektorový prostor dimenze d, C konvexní a kompaktní podmnožina V. Potom mohou nastat dvě možnosti, buď je $C^\circ = \emptyset$ anebo $C^\circ \neq \emptyset$.

Je-li $C^\circ = \emptyset$, potom existuje nadrovina $x + W$ ve V tak, že $C \subset x + W$ (Věta 2.22). Pak je $C - x$ konvexní a kompaktní podmnožina vektorového prostoru W dimenze $d-1$ (pro $C = \emptyset$ je $C - x = \emptyset$, podle definice $C - x$). Potom, podle indukčního předpokladu, je $C - x = \operatorname{co}\big(\operatorname{ext}(C-x)\big)$. Tj. $C = \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$ (Věta 2.56).

Uvažujme nyní, je-li $C^\circ \neq \emptyset$. C je neprázdná vlastní (C je omezená) podmnožina V; je $\partial C \neq \emptyset$ (Věta 2.18).

Zvolme tedy $x \in \partial C$. Potom existuje opěrná nadrovina H k C v bodě x (Věta 2.41). H, C jsou konvexní (uzavřené), tj. též $F = H \cap C$ je konvexní (uzavřená). Jelikož je C omezená, je též F omezená. Tj. F je kompakt. Opět je, podle indukčního předpokladu, $F = \operatorname{co}(\operatorname{ext} F)$. Jelikož $x \in F$ a $\operatorname{ext} F \subset \operatorname{ext} C$ (Věta 2.57), je $x \in \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$. Tj. $\partial C \subset \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$.

Zvolme nyní $x \in C^\circ$. Z omezenosti a uzavřenosti C plyne toto: existuje $a \in (V \setminus C)^\circ$; přímku L_{ax} určenou body a, x rozděluje bod x na polopřímky L_a, L_b s počátkem x; nechť $a \in L_a$; potom existuje $b \in (V \setminus C)^\circ$ tak, že $b \in L_b$. Podle Věty 2.19b je $\overline{a,b} \cap \partial C = \{c, d\}$, přičemž $x \in \overline{c,d}$ (navíc: podle Věty 2.19d $C \cap \overline{a,b} = \overline{c,d}$). x je tedy konvexní kombinací c a d, kde $c, d \in \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$ (což již bylo dokázáno). Tedy $x \in \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$. Tedy $C^\circ \subset \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$.

Pro náš případ $C^\circ \neq \emptyset$ tedy opět máme $C = \operatorname{co}(\operatorname{ext} C)$.

2c. Tímto bodem 2b je věta dokázána pro d.

Bod 2 platí pro každé přirozené d, což (spolu s bodem 1) dovršuje důkaz Minkowského věty.

3.8 Věta (Minkowski-Carathéodoryova věta).

Nechť V je normovaný vektorový prostor dimenze d, C konvexní a kompaktní podmnožina V. Potom každý bod množiny C je konvexní kombinací nejvýše $d+1$ afinně nezávislých extremálních bodů množiny C.

Důkaz.
Důsledek vět 3.7 a 3.3.

3.9 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor dimenze d, C konvexní a kompaktní podmnožina V. Potom je množina C rovna sjednocení všech n-simplexů ($n \leq d$) s vrcholy v $\operatorname{ext} C$.

Důkaz.
Důsledek Věty 3.8.

3.3 Radonova věta

3.10 Věta (Radonova věta).

Nechť M je alespoň $(d+2)$-prvková podmnožina vektorového prostoru dimenze d. Potom existují M_1 a M_2 tak, že $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ a $\operatorname{co} M_1 \cap \operatorname{co} M_2 \neq \emptyset$.

Důkaz.
Nechť $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$, kde $n \geq d+2$ - tj. $x_1, \ldots, x_n$ nejsou afinně nezávislé. Tj. existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tak, že

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = o, \tag{3.3}$$

$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, a současně $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Označme $I^+ = \{j : \lambda_j \geq 0\}$, $I^- = \{j : \lambda_j < 0\}$, a $\lambda = \sum_{j \in I^+} \lambda_j$, tj. $\lambda > 0$ a $\lambda + \sum_{j \in I^-} \lambda_j = 0$.

Vezmeme-li nyní dvě libovolné množiny M_1, M_2 splňující $\{x_j : j \in I^+\} \subset M_1$, $\{x_j : j \in I^-\} \subset M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M = M_1 \cup M_2$, dostaneme z 3.3

$$\operatorname{co} M_1 \ni \sum_{j \in I^+} \frac{\alpha_j}{\lambda} x_j = -\sum_{j \in I^-} \frac{\alpha_j}{\lambda} x_j \in \operatorname{co} M_2.$$

3.4 Hellyova věta

3.11 Věta.
Nechť $\{K_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je soubor kompaktních podmnožin metrického prostoru (X,ϱ), nechť $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma = \emptyset$. Potom existuje konečná množina $\Gamma^\star$ tak, že $\Gamma^\star \subset \Gamma$, $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma^\star} K_\gamma = \emptyset$.

Důkaz.
Buď $\gamma_0 \in \Gamma$, $\Gamma_0 = \Gamma\setminus\{\gamma_0\}$. Z předpokladu věty plyne, že $K_{\gamma_0} \subset \left(X \setminus \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma_0} K_\gamma\right)$, tj. $K_{\gamma_0} \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} K_\gamma^c$. Z tohoto pokrytí kompaktu K_{γ_0} množinami K_γ^c, množinami otevřenými v X, lze vybrat konečné pokrytí. Tj. existuje konečná množina Γ' tak, že $\Gamma' \subset \Gamma_0$ a $K_{\gamma_0} \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma'} K_\gamma^c$. Odtud:

$$K_{\gamma_0} \cap \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma'} K_\gamma\right) = \emptyset.$$

3.12 Věta (Hellyova věta).
Nechť V je vektorový prostor dimenze d, nechť $\mathscr{S}$ je systém alespoň $d+1$ konvexních podmnožin V, nechť každých $d+1$ množin z $\mathscr{S}$ má neprázdný průnik. Nechť je, buďto $\mathscr{S}$ konečný, nebo, každá množina z $\mathscr{S}$ kompakt v metrickém prostoru V. Potom průnik všech množin z $\mathscr{S}$ je neprázdný.

Důkaz.
Nejprve dokážeme větu pro konečný systém $\mathscr{S}$, a to indukcí podle počtu množin systému $\mathscr{S}$.

Pro systém $d+1$ množin věta platí, podle předpokladů.

Nechť $n \geq d+1$ a nechť věta platí pro systém n množin. Nechť $\{C_1,\dots,C_{n+1}\}$ je systém splňující podmínky věty. Z indukčního předpokladu plyne neprázdnost následujících průniků

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \in & C_2\cap C_3\cap\ldots\cap C_{n+1} \\ x_2 & \in & C_1\cap C_3\cap\ldots\cap C_{n+1} \\ \vdots & & \\ x_{n+1} & \in & C_1\cap C_2\cap\ldots\cap C_n. \end{array} \tag{3.4}$$

Podle Věty 3.10 je $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ sjednocením dvou jistých neprázdných disjunktních množin $\{x_j : j \in I^+\}$ a $\{x_j : j \in I^-\}$, jejichž konvexní obaly mají společný jistý bod a. Neboť je $I^+ \cap I^- = \emptyset$, můžeme psát, jak je vidět z 3.4, $x_j \in \bigcap\limits_{j \in I^-} C_j$, pro každé $j \in I^+$. Tedy $\operatorname{co}\{x_j : j \in I^+\} \subset \bigcap\limits_{j \in I^-} C_j$. Podobně $\operatorname{co}\{x_j : j \in I^-\} \subset \bigcap\limits_{j \in I^+} C_j$. Tedy

$$a \in \operatorname{co}\left\{x_j : j \in I^+\right\} \cap \operatorname{co}\left\{x_j : j \in I^-\right\} \subset C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_{n+1}.$$

Tím je dokázána první část.

Nyní, nechť nekonečný systém $\mathscr{S}$ splňuje podmínky věty a nechť každá množina z $\mathscr{S}$ je kompakt. Kdyby průnik všech množin z $\mathscr{S}$ byl prázdný, potom by existoval podsystém $\mathscr{S}'$ systému $\mathscr{S}$, jenž by byl konečný, alespoň $(d+1)$-prvkový, a $\bigcap\limits_{C \in \mathscr{S}'} C = \emptyset$; to plyne z Věty 3.11. Podle již dokázané části naší Věty 3.12, by pak bylo též $\bigcap\limits_{C \in \mathscr{S}'} C \neq \emptyset$.

3.5 Kirchbergerova věta

3.13 Věta (Kirchbergerova věta).

Nechť V je vektorový prostor dimenze d, nechť A a B jsou dvě konečné podmnožiny prostoru V, jejichž sjednocení $A \cup B$ má alespoň $d+2$ prvků, nechť ke každé $(d+2)$-prvkové podmnožině C sjednocení $A \cup B$ existuje nadrovina ve V, jež silně separuje množiny $A \cap C$ a $B \cap C$. Potom existuje nadrovina ve V, jež silně separuje množiny A a B.

Důkaz.

Vnořme prostor V do prostoru dimenze $d+1$. Přesněji řečeno: Zvolme bázi prostoru V, bázi $\{v_1, \dots, v_d\}$. $V \times [v_d]$ bude reálný vektorový prostor, jestliže operaci násobení skalárem definujeme tak, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $(v, \beta v_d) \in V \times [v_d]$ je $\alpha(v, \beta v_d) = (\alpha v, \alpha\beta v_d)$, a jestliže operaci sčítání definujeme tak, že pro každé $(v, \alpha v_d), (u, \beta v_d) \in V \times [v_d]$ je

$$(v, \alpha v_d) + (u, \beta v_d) = (v + u, \alpha v_d + \beta v_d)\,.$$

Též $X = \Big(V \times [v_d] \setminus \big\{(v, o) : v, o \in V\big\}\Big) \cup V$ (připomínám, že o značí nulový vektor) bude reálný vektorový prostor, jestliže operace definujeme pomocí bijekce

$$f : X \to V \times [v_d] \quad , \quad f(x) = \begin{cases} (x, o) & \text{pro } x \in V, \\ x & \text{jinak,} \end{cases}$$

a to následovně: pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in X$ je αx vzor $\alpha f(x)$ při zobrazení f, a pro každé $x, y \in X$ je $x + y$ vzor $f(x) + f(y)$ při zobrazení f. S takto definovanými operacemi je tedy X reálný vektorový prostor. Prostor V je podprostorem prostoru X, $\big\{v_1, \dots, v_d, (o, v_d)\big\}$ je báze X a dimenze X je $d + 1$. Budeme značit $v_{d+1} = (o, v_d)$.

Na X definujme skalární součin: pro každé $x = x_1 v_1 + \dots + x_{d+1} v_{d+1} \in X$ a každé $y = y_1 v_1 + \dots + y_{d+1} v_{d+1} \in X$ je $(x \mid y) = x_1 y_1 + \dots + x_{d+1} y_{d+1}$.

V X budeme uvažovat takovéto otevřené poloprostory: pro každé $a \in A$ definujme otevřený poloprostor

$$H(a) = \big\{x \in X : (x \mid a - v_{d+1}) < 0\big\}, \tag{3.5}$$

a pro každé $b \in B$ definujme otevřený poloprostor

$$H(b) = \big\{x \in X : (x \mid b - v_{d+1}) > 0\big\}. \tag{3.6}$$

Zřejmě jsou definice korektní. Neboť pro každé $a \in A$ je $a - v_{d+1} \neq o$, tj. lineární forma, jež určuje otevřený poloprostor $H(a)$, je nenulová. Podobně pro $H(b)$.

A a B jsou disjunktní, to plyne z předpokladů věty ze silné separace. Pro každé $a \in A$, a současně pro každé $b \in B$, jsme tedy definovali právě jeden otevřený poloprostor. Dále platí, že je-li $c, d \in A \cup B$, potom $H(c) = H(d)$ právě tehdy, když $c = d$. To plyne z tohoto: Uzávěr otevřeného poloprostoru $H(c)$ s hraniční nadrovinou H_c je roven $H(c) \cup H_c$ (Věta 2.33d). Paralelní úvahou pro d, se stejným značením, máme též $\overline{H(d)} = H(d) \cup H_d$. Z rovnosti $H(c) = H(d)$ tedy též plyne rovnost nadrovin $H_c = H_d$. Tedy existuje $r \neq 0$ tak, že pro každé $x \in X$ je $(x \mid d - v_{n+1}) = r(x \mid c - v_{n+1})$, neboli $\big((r-1)x \mid c - d\big) = 0$ (Věta 2.32). Odtud, pro $x = c - d$, dostáváme $c = d$.

Vztahy 3.5, 3.6 je tedy dáno vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $A \cup B$ na množinu všech otevřených poloprostorů 3.5 a 3.6 definovanými, tj. na množinu $\mathscr{S} = \{C \subset X : \text{existuje } c \in A \cup B \text{ tak, že } C = H(c)\}$. Tj. $\mathscr{S}$ je konečný, alespoň $(d+2)$-prvkový systém konvexních podmnožin vektorového prostoru X dimenze $d+1$.

Nechť $\{C_1, \ldots, C_{d+2}\} \subset \mathscr{S}$. Podle posledního odstavce pak existuje množina $\{c_1, \ldots, c_{d+2}\} \subset A \cup B$ tak, že $C_1 = H(c_1), \ldots, C_{d+2} = H(c_{d+2})$. Z předpokladů věty plyne, že existuje lineární forma $f : V \to \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že:

1. pro každé $a \in \{c_1, \ldots, c_{d+2}\} \cap A$ je $f(a) < \alpha$,
2. pro každé $b \in \{c_1, \ldots, c_{d+2}\} \cap B$ je $f(b) > \alpha$,

neboli tak, že:

1. pro každé $a = a_1 v_1 + \cdots + a_d v_d \in \{c_1, \ldots, c_{d+2}\} \cap A$ je
$$a_1 f(v_1) + \cdots + a_d f(v_d) - \alpha < 0,$$
2. pro každé $b = b_1 v_1 + \cdots + b_d v_d \in \{c_1, \ldots, c_{d+2}\} \cap B$ je
$$b_1 f(v_1) + \cdots + b_d f(v_d) - \alpha > 0.$$

Potom nám 1 a 2 též říká, že
$$f(v_1) v_1 + \cdots + f(v_d) v_d + \alpha v_{d+1} \in C_1 \cap \ldots \cap C_{d+2}.$$

Systém $\mathscr{S}$ tedy splňuje podmínky věty 3.12. Tj. existuje
$$x = x_1 v_1 + \cdots + x_d v_d + x_{d+1} v_{d+1} \in \bigcap_{C \in \mathscr{S}} C.$$

Tj.:

1. pro každé $a = a_1 v_1 + \cdots + a_d v_d \in A$ je $a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d - x_{d+1} < 0$,
2. pro každé $b = b_1 v_1 + \cdots + b_d v_d \in B$ je $b_1 x_1 + \cdots + b_d x_d - x_{d+1} > 0$.

Zřejmě je $u = x_1 v_1 + \cdots + x_d v_d \neq o$, v opačném případě by bylo vidět z 1 a 2 spor. Je tedy $g : V \to \mathbb{R}$, $g(v) = (v \mid u)$ nenulová lineární forma na V, taková, že pro každé $a \in A$ je $g(a) < x_{d+1}$, a pro každé $b \in B$ je $g(b) > x_{d+1}$. Tj., množiny A a B jsou silně separovány nadrovinou $H = \{v \in V : g(v) = x_{d+1}\}$.

3.6 Krasnoselského věta

3.14 Věta (Krasnoselského věta).

Nechť V je normovaný vektorový prostor dimenze d, $A \subset V$, A alespoň $(d{+}1)$-prvková a kompaktní, a nechť pro každou $(d{+}1)$-prvkovou podmnožinu $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ množiny A existuje $y \in V$ tak, že $\overline{x_1, y} \subset A, \dots, \overline{x_{d+1}, y} \subset A$. Potom A je hvězdicovitě konvexní.

Důkaz.

Pro každé $x \in A$ je A_x uzavřená: Nechť $y \in \overline{A_x}$. A je kompaktní, tj. je uzavřená, a obsahující A_x, tj. $\overline{A_x} \subset A$, tj. $y \in A$. Vezměme bod $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{x, y}$. Existuje posloupnost $\{y_n\}$ bodů z A_x tak, že $\lim y_n = y$. Pro každé n je pak $\lambda x + (1-\lambda)y_n \in \overline{x, y_n} \subset A_x$, a podle Věty 2.15 pak existuje

$$\lim\bigl(\lambda x + (1-\lambda)y_n\bigr) = \lambda x + (1-\lambda)y\,,$$

tj. $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{A_x}$, tj. $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, tj. $\overline{x, y} \subset A$, tj. $y \in A_x$. Je tedy A_x uzavřená.

Též platí pro každé $x \in A$: A_x je uzavřená podmnožina kompaktní A, je tedy A_x kompaktní, podle známé věty z analýzy. Podle Věty 3.5 je též $\operatorname{co} A_x$ kompaktní.

Položme $\mathscr{S} = \{C : \text{existuje } x \in A \text{ tak, že } C = \operatorname{co} A_x\}$.

Je-li $\mathscr{S}$ nejvýše d-prvková, je $\mathscr{S} = \bigl\{\operatorname{co} A_{x_1}, \dots, \operatorname{co} A_{x_j}\bigr\}$ pro nějaké $1 \le j \le d$. Podle předpokladu věty existuje $y \in V$ tak, že

$$y \in A_{x_1} \cap \ldots \cap A_{x_j} \subset \operatorname{co} A_{x_1} \cap \ldots \cap \operatorname{co} A_{x_j}.$$

Protože pro každé $x \in A$ je $\operatorname{co} A_x \in \mathscr{S}$, je též pro každé $x \in A$: $y \in \operatorname{co} A_x$. Podle Věty 2.51 je A hvězdicovitě konvexní vzhledem k y.

Nyní, je-li $\mathscr{S}$ alespoň $(d+1)$-prvková. Pro každou $(d+1)$-prvkovou podmnožinu $\bigl\{\operatorname{co} A_{x_1}, \dots, \operatorname{co} A_{x_{d+1}}\bigr\} \subset \mathscr{S}$ existuje $y \in V$ tak, že

$$y \in A_{x_1} \cap \ldots \cap A_{x_{d+1}} \subset \operatorname{co} A_{x_1} \cap \ldots \cap \operatorname{co} A_{x_{d+1}},$$

podle předpokladu věty. Přidáme-li k tomu ještě fakt, že každé $C \in \mathscr{S}$ je konvexní a kompaktní, bude $\mathscr{S}$ splňovat podmínky Věty 3.12, tj. bude existovat $a \in V$ tak, že $a \in \bigcap_{C \in \mathscr{S}} C$. Pro každé $x \in A$ je: $\operatorname{co} A_x \in \mathscr{S}$, tj. $a \in \operatorname{co} A_x$. Tj., podle Věty 2.51, A je hvězdicovitě konvexní vzhledem k a.

Kapitola 4

Krein-Milmanova věta

4.1 Extremální podmnožina

4.1 Definice.
Nechť V je vektorový prostor, $A \subset V$, A konvexní, $B \subset A$, B konvexní. Řekneme, že *množina B je extremální podmnožinou množiny A*, jestliže $B \neq \emptyset$ a pro každé $x, y \in A$ platí: pokud existuje $\lambda \in (0,1)$ tak, že $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in B$, potom $x, y \in B$.

4.2 Věta.
Nechť V je vektorový prostor, $A \subset V$. Nechť množina B je extremální podmnožinou množiny A a nechť množina C je extremální podmnožinou množiny B. Potom množina C je extremální podmnožinou množiny A.

Důkaz.
Podle Definice 4.1 jsou množiny A a C konvexní a je $C \subset A$.

Nechť je $x, y \in A$. Předpokládejme, že pro nějaké $\lambda \in (0,1)$ je $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Jelikož $C \subset B$, je $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$. Protože B je extremální podmnožinou A, je $x, y \in B$. B je extremální podmnožinou C, tedy $x, y \in C$.

4.3 Věta.
Nechť V je vektorový prostor, $A \subset V$,

$$\mathscr{F} := \{B : B \text{ je extremální podmnožina množiny } A\}$$

Potom množina $\bigcap \mathscr{F}$ je extremální podmnožinou množiny A, pokud je neprázdná.

Důkaz.
Množiny A a $\bigcap \mathscr{F}$ jsou konvexní a platí $\bigcap \mathscr{F} \subset A$, podle Definice 4.1 a Věty 2.7.

Je-li $x, y \in A$ a existuje $\lambda \in (0,1)$ tak, že $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap \mathscr{F}$, potom $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$ pro každé $B \in \mathscr{F}$. Pak $x, y \in B$ pro každé $B \in \mathscr{F}$. Pak musí být $x, y \in \bigcap \mathscr{F}$.

4.2 Uzavřený konvexní obal

4.4 Definice.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, $A \subset V$. Definujme potom množinu $\overline{\text{co}}^V A$ rovností

$$\overline{\text{co}}^V A = \bigcap \{C : A \subset C,\, C \subset V,\, C \text{ konvexní},\, C \text{ uzavřená ve } V\} \ .$$

4.5 Poznámka.
Množinu $\overline{\text{co}}^V A$ budeme nazívat *uzavřeným konvexním obalem množiny A.*

4.6 Poznámka.
Bude-li zřejmé o který normovaný vektorový prostor V se jedná, budeme namísto $\overline{\text{co}}^V A$ psát $\overline{\text{co}} A$.

4.7 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, $A \subset V$. Potom

$$\overline{\text{co}}\, A = \overline{\text{co}\, A} \ .$$

Důkaz.
Podle Definice 4.4 a Definice 2.24 je $\text{co}\, A \subset \overline{\text{co}}\, A$. Pak je i $\overline{\text{co}\, A} \subset \overline{\overline{\text{co}}\, A}$. Podle Definice 4.4 je $\overline{\text{co}} A$ uzavřená, tedy je $\overline{\overline{\text{co}}\, A} = \overline{\text{co}}\, A$. Tj. je

$$\overline{\text{co}\, A} \subset \overline{\text{co}}\, A \ .$$

Množina $\overline{\text{co}\, A}$ je uzavřená a konvexní (podle Věty 2.16). Z Definice 4.4 plyne, že musí být

$$\overline{\text{co}}\, A \subset \overline{\text{co}\, A} \ .$$

4.3 Krein-Milmanova věta

4.8 Poznámka.
Také následující větu, Větu 4.9, budeme potřebovat k důkazu Krein-Milmanovy věty.

4.9 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, $C \subset V$, C je konvexní a uzavřená, $x \in V \setminus C$. Potom existuje nadrovina H ve V tak, že

a) H je uzavřená ve V,
b) H silně separuje množiny $\{x\}$ a C.

4.10 Věta.
Nechť V je normovaný vektorový prostor, C neprázdná konvexní podmnožina V, C kompaktní. Potom $\operatorname{ext} C \neq \emptyset$.

Důkaz.
Definujme množinu

$$\mathscr{F} = \{E : E \neq \emptyset,\ E \text{ je extremální podmnožina } C,\ E \text{ je uzavřená}\} \ ,$$

a množinu ϱ

$$\varrho \subset \mathscr{F} \times \mathscr{F} \ , \qquad (E,F) \in \varrho \Leftrightarrow E \subset F \ .$$

ϱ je uspořádání na $\mathscr{F}$.

Každý řetězec v $\mathscr{F}$ je zdola omezený: Je-li $\mathscr{T} \subset \mathscr{F}$, $\mathscr{T}$ řetězec v $\mathscr{F}$, $E_0 = \bigcap \mathscr{T}$, pak $E_0 \in \mathscr{F}$, $E_0 \neq \emptyset$ a $E_0 \varrho E$ pro každé $E \in \mathscr{T}$ $\Big($ Podrobněji: E_0 je extremální podmnožina C, podle Věty 4.3. Evidentně je E_0 uzavřená. Pro libovolné $\mathscr{T}'$ splňující $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ konečná, platí $\bigcap \mathscr{T}' \neq \emptyset$ (plyne z kompaktnosti C a z Cantorovy věty o neprázdnosti průniku do sebe vřazených kompaktů). Odtud, a z opětovného využití kompaktnosti C, plyne, že $E_0 \neq \emptyset$. $\Big)$

Podle Zornova lemmatu existuje $E_{min} \in \mathscr{F}$ tak, že

$$(\ \forall E \in \mathscr{F}\ )(\ E \varrho E_{min} \Rightarrow E = E_{min}\ ) \ . \tag{4.1}$$

Je-li

$$E_{min} = \{x\} \ , \tag{4.2}$$

pak $x \in \operatorname{ext} C$, a $\operatorname{ext} C \neq \emptyset$.

Sporem ukážeme, že jiný případ, než 4.2, nastat nemůže. Tím bude Věta 4.10 dokázána. Předpokládejme tedy, že existují $x, y \in E_{min}$ tak, že $x \neq y$. Podle Věty 4.9 pak existuje spojitá lineární forma f na V a $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x \in \{x \in V : f(x) < c\} \, , \qquad y \in \{x \in V : f(x) > c\} \ .$$

Pak ale, je-li

$$\alpha = \inf_{x \in E_{min}} f(x) \, ,$$

a

$$E'_{min} = E_{min} \cap \{x \in V : f(x) = \alpha\} \ ,$$

je:

1. E'_{min} konvexní a uzavřená ve V,
2. $E'_{min} \neq \emptyset$ (Protože je E_{min} kompaktní a f spojitá.),
3. množina E'_{min} je extremální podmnožinou množiny E_{min} $\big($ Využitím bodu 1 a vztahu $E_{min} \subset \{x \in V : f(x) \geq \alpha\}$. $\big)$,
4. množina E'_{min} je extremální podmnožinou množiny C (Plyne z bodu 3 a Věty 4.2.),
5. množina E'_{min} je vlastní podmnožina množiny E_{min} $\big(y \in E_{min} \backslash E'_{min} \big)$.

Celkem: $E'_{min} \in \mathscr{F}$, $E'_{min} \varrho E_{min}$, $E'_{min} \neq E_{min}$. A současně platí 4.1. Spor.

4.11 Věta (Krein-Milmanova věta).

Nechť V je normovaný vektorový prostor, C neprázdná podmnožina V, C konvexní a kompaktní. Potom $C = \overline{\text{co}}\,(\operatorname{ext} C)$.

Důkaz.

Jelikož je C konvexní a uzavřená, je $\overline{\text{co}}\, C = C$, a následně:

$$\overline{\text{co}}\,(\operatorname{ext} C) \subset C \ .$$

Zbývá dokázat, že

$$C \subset \overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{ext} C)\,. \tag{4.3}$$

Kdyby neplatilo 4.3, pak by existovalo $x \in C$ tak, že $x \notin \overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{ext} C)$. A následně by podle Věty 4.9 existovala spojitá lineární forma f na V a $c \in \mathbb{R}$ tak, že:

$$\overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{ext} C) \subset \{x \in V : f(x) > c\}\ , \qquad x \in \{x \in V : f(x) < c\}\,.$$

Je-li pak

$$\alpha = \inf_{x \in C} f(x)\,,$$

$$F = C \cap \{x \in V : f(x) = \alpha\}\ ,$$

je:

1. F konvexní,
2. F kompaktní,
3. $F \neq \emptyset$,
4. $\operatorname{ext} F \neq \emptyset$ (Podle Věty 4.10.).

Tedy existuje $y \in \operatorname{ext} F$ tak, že

$$y \in \{x \in V : f(x) < c\}\ ,$$

a současně

$$y \in \{x \in V : f(x) > c\}\ ,$$

(plyne z Věty 2.57), což je spor. Musí tedy platit 4.3.

4.12 Poznámka.
V Krein-Milmanově větě nelze podmínku kompaktnosti množiny C oslabit podmínkou omezenosti a uzavřenosti množiny C, jak dokazuje Příklad 4.13.

4.13 Příklad.
Budiž $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a současně

$$V = \{f : \quad f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ f \text{ spojitá}\}\ ,$$

a současně

$$n : V \to \mathbb{R}\,,$$

$$\forall\, f \in V \qquad n(f) = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)| \,.$$

Množina V je spolu s obvyklým sčítáním funkcí a násobením funkce po složkách a opatřená normou n normovaným vektorovým prostorem. Je-li

$$C = \Big\{ f \in V : \forall\, x \in \langle a,b \rangle \ |f(x)| \leq 1 \Big\} \,,$$

potom platí: C je konvexní, omezená, uzavřená (ve V), C není kompaktní,

$$\operatorname{ext} C = \Big\{ f : \big(\forall\, x \in \langle a,b \rangle \ f(x) = 1\big) \text{ anebo } \big(\forall\, x \in \langle a,b \rangle \ f(x) = -1\big) \Big\} \,,$$

$$\overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{ext} C) = \Big\{ f : \big(\exists\, c \in \langle -1, 1 \rangle\big)\big(\forall\, x \in \langle a,b \rangle \ f(x) = c\big) \Big\} \,.$$

4.14 Poznámka.
Dokonce ani ve Větě 4.10 nelze podmínku kompaktnosti množiny C oslabit podmínkou omezenosti a uzavřenosti množiny C, jak dokazuje Příklad 4.15.

4.15 Příklad.
Nechť V je normovaným vektorovým prostorem z Příkladu 4.13. Je-li pak

$$C = \left\{ f \in V : \int_a^b f = 0, \big(\forall\, x \in \langle a,b \rangle \ |f(x)| \leq 1\big) \right\} \,,$$

je: C konvexní, omezená, uzavřená (ve V), C není kompaktní,

$$\operatorname{ext} C = \emptyset \,.$$

Kapitola 5

Problémy spravedlivého rozdělení – teorie

5.1 Důsledky Minkowského věty

5.1 Věta.
Nechť $n \in \mathbb{N}$.

Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, X lebesgueovsky měřitelná.
Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
Nechť

$$X_1, \ldots, X_k$$

je posloupnost splňující:

(i) pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ je $X_i \subset X$, $X_i \neq \emptyset$, X_i lebesgueovsky měřitelná,

(ii) pro každé $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ platí: je-li $i \neq j$, pak $X_i \cap X_j = \emptyset$,

(iii) $X_1 \cup \ldots \cup X_k = X$.

Nechť

$$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$$

je posloupnost reálných čísel splňující:

$$\text{pro každé } \; i \in \{1, \ldots, k\} \; \text{ je } \; \varkappa_i \geq 0\,,\, \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_k = 1\,.$$

Nechť

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$$

je posloupnost reálných čísel splňující:

$$\text{pro každé } \ i \in \{1, \ldots, k\} \ \text{ je } \ \lambda_i \geq 0\,,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1\,.$$

Nechť $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = \chi_{X_1}\,(x) \cdot \frac{\varkappa_1}{m\,(X_1)} + \cdots + \chi_{X_k}\,(x) \cdot \frac{\varkappa_k}{m\,(X_k)}$$

pro každé $x \in X$ (χ_{X_i} značí charakteristickou funkci množiny X_i a $m\,(X_i)$ Lebesgueovu míru množiny X_i).

Nechť $g : X \to \mathbb{R}$,

$$g\,(x) = \chi_{X_1}\,(x) \cdot \frac{\lambda_1}{m\,(X_1)} + \cdots + \chi_{X_k}\,(x) \cdot \frac{\lambda_k}{m\,(X_k)}$$

pro každé $x \in X$.

Nechť $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, $\mu\,(A) = \int\limits_A f\,dm$ pro každé $A \in \mathfrak{M}$, přičemž $\mathfrak{M}$ značí systém všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin množiny X, m značí Lebesgueovu míru na X a $\int\limits_A f\,dm$ Lebesgueův integrál.

Nechť $\nu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, $\nu\,(A) = \int\limits_A g\,dm$ pro každé $A \in \mathfrak{M}$.

A finálně, nechť $z : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, $z\,(A) = \mu\,(A) + \nu\,(X \setminus A)$ pro každé $A \in \mathfrak{M}$.

Potom existuje $M \in \mathfrak{M}$ tak, že

$$z\,(M) = \sup_{A \in \mathfrak{M}} z\,(A)\,,$$

$$\mu\,(M) \geq \frac{1}{2}\,, \qquad \nu\,(X \setminus M) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Toto $M \in \mathfrak{M}$ má následující vlastnost: Je-li $Z : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^k$,

$$Z\,(A) = \left\{ \frac{m\,(A \cap X_i)}{m\,(X_i)} \right\}_{i=1}^{k}$$

pro každé $A \in \mathfrak{M}$, a je-li K množina všech $x \in \mathbb{R}^k$, $x = \{x_i\}_{i=1}^k$, jež jsou řešením soustavy nerovnic:

$$\varkappa_1 x_1 + \cdots + \varkappa_k x_k \geq \frac{1}{2}\,,$$

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \leq \frac{1}{2} \ ,$$

$$\text{pro každé } \ i \in \{1, \ldots, k\} \qquad 0 \leq x_i \leq 1 \ \ ,$$

pak $Z\,(M) \in \operatorname{ext} K$.

5.2 Poznámka.
Při důkazu Věty 5.1 hraje hlavní roli použití Minkowského věty.

5.2 Důsledky Krein-Milmanovy věty

5.3 Věta (Ljapunovova věta).
Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(X, \mathfrak{M})$ je měřitelný prostor,

$$\mu_1, \ldots, \mu_n$$

posloupnost splňující: pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je μ_i neatomická pravděpodobnostní míra na $\mathfrak{M}$. Potom

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists\, A \in \mathfrak{M} \quad x = \{\mu_i\,(A)\}_{i=1}^n\Big\}$$

je kompaktní a konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$.

5.4 Poznámka.
Jeden z možných důkazů Ljapunovovy věty spočívá v použití Krein-Milmanovy věty ve verzi pro lokálně konvexní topologické vektorové prostory. Tento typ důkazu pochází od J. Lindenstrausse.

5.5 Věta.
Nechť $n \in \mathbb{N}$, $(X, \mathfrak{M})$ je měřitelný prostor,

$$\mu_1, \ldots, \mu_n$$

posloupnost splňující: pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je μ_i neatomická pravděpodobnostní míra na $\mathfrak{M}$.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}$ množina všech posloupností

$$P_1, \ldots, P_k$$

splňujících:

(i) pro každé $j \in \{1, \ldots, k\}$ je $P_j \in \mathfrak{M}$,

(ii) pro každé $j, l \in \{1, \ldots, k\}$ platí: je-li $j \neq l$, pak $P_j \cap P_l = \emptyset$.

Potom množina

$$\Big\{C \in \mathbb{R}^{n \times k} : \quad \text{existuje } \{P_j\}_{j=1}^{k} \in \mathcal{P} \text{ tak, že } C = \big(\mu_i\,(P_j)\big) \Big\}$$

je kompaktní a konvexní podmnožina $\mathbb{R}^{n \times k}$.

Je-li $n = k$, $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$,

$$f\Big(\{P_i\}_{i=1}^{n}\Big) = \mu_1\,(P_1) + \cdots + \mu_n\,(P_n)$$

pro každé $\{P_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{P}$, pak existuje $\{M_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{P}$ tak, že

$$f\Big(\{M_i\}_{i=1}^{n}\Big) = \sup_{\{P_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{P}} f\Big(\{P_i\}_{i=1}^{n}\Big) .$$

5.6 Poznámka.

Ve Větě 5.5 se k důkazu konvexity využije Ljapunovova věta. Je to její snadný důsledek.

Kapitola 6

Problémy spravedlivého rozdělení – praxe

6.1

Dejme tomu, že namísto této stránky máme před sebou koláč z Obrázku 6.1 (str. 68). A že se o něj právě hádají dvě děti – nemohou se shodnout na tom, jak si ho mezi sebou spravedlivě rozdělit.

Jak tento spor spravedlivě rozhodnout? Protože koláč má (naštěstí) náhodou jednoduchý tvar, nabízí se okamžitě řešení, že bychom ho rozdělili na osminy, každou čtvrtinu napůl. Tj. každé dítě by dostalo z každé čtvrtiny koláče příslušnou půlku. Ale i pak by problém nemusel být vyřešen, jak si lze snadno představit. Jedno z dětí by si třeba mohlo postavit hlavu, např. že mu zrovna mák nechutná, nebo že stejně nadržujeme druhému dítěti, atp…

Jak tedy dál?

Východiskem by mohlo být následující: použít matematiku. Postupovali bychom následovně:

1. Nejdříve vyzveme první dítě, aby si představilo, že koláč je jakoby celý jeho, a za kolik je ochotno ho nám prodat – celý nebo nějakou jeho čtvrtinu. Vyzveme ho, aby si jednotlivé části koláče takto ocenilo (ohodnotilo) podle toho, jak moc si jich cení, jak moc je chce. Tj. kdyby mělo nejradši tvaroh, aby byla nejdražší tvarohová čtvrtina, kdyby nemělo vůbec rádo třeba mák, aby byla nejlevnější maková čtvrtina, atp… . Dejme tomu, že by udalo ceny dle Tabuky 6.1 na straně 69. A dejme

tomu, že by souhlasilo s tím, že kdyby vyřízlo z koláče kteroukoliv část A jeho cena by pak byla dána vzorcem (v Kč):

$$5 \cdot \frac{S\left(A \cap X_1\right)}{S\left(X_1\right)} + 70 \cdot \frac{S\left(A \cap X_2\right)}{S\left(X_2\right)} + 40 \cdot \frac{S\left(A \cap X_3\right)}{S\left(X_3\right)} + 5 \cdot \frac{S\left(A \cap X_4\right)}{S\left(X_4\right)},$$

kde $S\left(X_1\right)$ je obsah drobenkové čtvrtiny koláče a $S\left(A \cap X_1\right)$ je obsah toho výseku z části A, jež leží pouze v drobenkové čtvrtině koláče, atp. přes zbylé čtvrtiny koláče - viz. Obrázek 6.2 (str. 70). Čili cena části A by pak prostě byla přímo úměrná její ploše. Cenu části A vztáhneme k ceně celého koláče, tj. vyjádříme ji v procentech, respektive ve zlomcích. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \mu\left(A\right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{S\left(A \cap X_1\right)}{S\left(X_1\right)} + \frac{7}{12} \cdot \frac{S\left(A \cap X_2\right)}{S\left(X_2\right)} + \\ + \frac{4}{12} \cdot \frac{S\left(A \cap X_3\right)}{S\left(X_3\right)} + \frac{1}{24} \cdot \frac{S\left(A \cap X_4\right)}{S\left(X_4\right)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

2. Poté vyzveme druhé dítě, aby udělalo to samé. Dejme tomu, že si podle sebe ocení koláč cenami z Tabulky 6.1, a následně podle vzorce

$$\begin{aligned} \nu\left(A\right) = \frac{5}{12} \cdot \frac{S\left(A \cap X_1\right)}{S\left(X_1\right)} + \frac{1}{12} \cdot \frac{S\left(A \cap X_2\right)}{S\left(X_2\right)} + \\ + \frac{3}{12} \cdot \frac{S\left(A \cap X_3\right)}{S\left(X_3\right)} + \frac{3}{12} \cdot \frac{S\left(A \cap X_4\right)}{S\left(X_4\right)}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

přičemž $\nu\left(A\right)$ je cena zvolené části A vyjádřená už v ceně vztáhnuté k celkové ceně koláče, vyjádřená už v zlomku z celkové ceny koláče.

3. Následně se pokusíme z koláče vyříznout část A tak, aby při následném fiktivním odkupu koláče od dětí, by první dítě dostalo za část A zaplaceno alespoň 50% ze 120 Kč a druhé dítě za zbývající druhou část koláče, část B, dostalo zaplaceno alespoň 50% ze 192 Kč. Tj. pokusíme se koláč rozdělit na dvě části A a B tak, aby

$$\mu\left(A\right) \geq \frac{1}{2}$$

a

$$\nu(B) \geq \frac{1}{2}.$$

4. Pokud se nám koláč takto podaří rozdělit, dáme prvnímu dítěti část A, druhému dítěti část B.

Pokud by tedy děti souhlasily s použitím matematiky a pokud by se nám podařilo takto rozdělit koláč na dvě části, z jejich strany by to mohlo být považováno za spravedlivé rozsouzení sporu. Každé by dostalo díl v hodnotě alespoň poloviny celkové ceny koláče.

Dejme tomu, že s tím vším souhlasí, a že takovéto rozdělení koláče považují za spravedlivé. K vyřešení problému už stačí jenom najít nějaké konkrétní spravedlivé rozdělení koláče. Uvedu jich několik, většinou jenom jako výsledky, bez výpočtů. Rozdělení uvedené jako poslední je i s výpočtem.

1. Prvnímu dítěti vyřízneme z tvarohové čtvrtiny část A ve tvaru kruhové výseče se středovým úhlem o velikosti $\frac{540}{7}^{\circ}$. Cena této části je pak přesně 50 % ze 120 Kč, čili je $\mu(A) = \frac{1}{2}$.

2. Část A patřící prvnímu dítěti bude tvořena celou tvarohovou čtvrtinou a dále výřezem z marmeládové čtvrtiny ve tvaru kruhové výseče o středovém úhlu o velikosti $\frac{360}{7}^{\circ}$. Pro část A, a zbylou část B přináležející druhému dítěti, je pak $\mu(A) = \nu(B) = \frac{65}{84}$.

3. Každou čtvrtinu rozdělíme přesně napůl, vzniklé dvě osminky rozdělíme po jedné spravedlivě mezi obě děti. Část A připadající prvnímu dítěti tedy nebude tvořit kompaktní celek. Podobně část B připadající druhému dítěti. Bude platit $\mu(A) = \nu(B) = \frac{1}{2}$. Je to tedy stejné rozdělení koláče jako na začátku. Rozdíl mezi nimi je ale velký – do tohoto rozdělovacího procesu vstupuje (téměř výhradně) pouze dítě samé.

4. Vezmeme nůž a držíme ho nad stolem tak, aby jeho ostří bylo nad přímkou p z Obrázku 6.2. Začneme jím posunovat směrem ke koláči tak, že jeho ostří bude v každém okamžiku stále rovnoběžné s přímkou p. Kdykoliv, kdy budeme s nožem nad koláčem, můžeme pohyb zastavit,

a provést řez – při němž bude ostří nože stále rovnoběžné s přímkou p. Pokud pohyb zastavíme v momentu, kdy budeme nad tvarohovo-marmeládovou polovinou a kdy od středu koláče bude ostří nože ve vzdálenosti v pro níž platí

$$v = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \ ,$$

kde $r = 30$ cm (čili r je poloměr koláče), a α je řešením rovnice

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{6}{11}\pi \ ,$$

a následně provedeme příslušný řez, zbyde po levé straně koláče část A pro níž je $\mu(A) = \frac{1}{2}$. Tyto všechny výsledky plynou snadným odvozením z 6.1. Letmým pohledem na Tabulku 6.1 lze pak zjistit, že pro část koláče po pravé straně nože, pro část B, určitě platí $\nu(B) \geq \frac{1}{2}$. Vzdálenost v nemusíme znát přesně, vždyť čepel nože může mít tloušťku maximálně několik desetin milimetru. Čili hodnotu α můžeme určit přibližně, třeba pomocí iterační metody: v MFCHT, kde je vykreslen graf funkce sinus, zjistíme přibližný kořen $\alpha_0 = 2.5$. Tu budeme brát jako počáteční hodnotu. Po 36 iteracích máme $\alpha_{35} = 2.3936929$, $\alpha_{36} = 2.3936965$. To už je dostatečná přesnost na provedení řezu. Jinak MATHEMATICA s příkazem FindRoot dává $\alpha \to 2.39369$. Výsledek: $v \doteq 10.96$ cm.

5. Rozdělme koláč na dvě poloviny. Na tvarohovo-marmeládovou polovinu a na drobenkovo-makovou polovinu. Tvarohovo-marmeládovou polovinu, část A, si vezme první dítě, zbylou polovinu, část B, druhé dítě. Bude pak platit $\mu(A) = \frac{11}{12}$, $\nu(B) = \frac{2}{3}$.

6. Položme si otázku: pokud budeme brát všechna spravedlivá rozdělení koláče na části A a B [1] a současně s tím všechny součty

$$\mu(A) + \nu(B) \ , \tag{6.3}$$

[1] tj. z koláče vyřízneme každou část A, pro níž bude platit $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, a současně pro druhou zbylou část B, bude plati $\nu(B) \geq \frac{1}{2}$

narazíme na spravedlivé rozdělení koláče, pro které je součet 6.3 ze všech spravedlivých rozdělení maximální?

Zvolme libovolné spravedlivé rozdělení koláče na části A a B. Vztahy

$$\mu(A) \geq \frac{1}{2} \ ,$$

$$\nu(B) \geq \frac{1}{2} \ ,$$

$$z = \mu(A) + \nu(B) \ ,$$

lze přepsat takto:

$$\mu(A) \geq \frac{1}{2} \ ,$$

$$\nu(B) \leq \frac{1}{2} \ ,$$

$$z = 1 + \mu(A) - \nu(A)$$

(to plyne z rovnosti $\nu(A) + \nu(B) = 1$, kterou lze odvodit z 6.2). A následně takto:

$$\frac{1}{24}x_1 + \frac{7}{12}x_2 + \frac{4}{12}x_3 + \frac{1}{24}x_4 \geq \frac{1}{2} \ , \tag{6.4}$$

$$\frac{5}{12}x_1 + \frac{1}{12}x_2 + \frac{3}{12}x_3 + \frac{3}{12}x_4 \leq \frac{1}{2} \ , \tag{6.5}$$

$$z = 1 - \frac{9}{24}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{12}x_3 - \frac{5}{24}x_4 \ , \tag{6.6}$$

$$x_1 = \frac{S(A \cap X_1)}{S(X_1)}, x_2 = \frac{S(A \cap X_2)}{S(X_2)}, x_3 = \frac{S(A \cap X_3)}{S(X_3)}, x_4 = \frac{S(A \cap X_4)}{S(X_4)},$$

Evidentně platí:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \ , \ 0 \leq x_2 \leq 1 \ , \ 0 \leq x_3 \leq 1 \ , \ 0 \leq x_4 \leq 1 \ , \tag{6.7}$$

Nechť K je množina všech řešení soustavy těchto deseti lineárních rovnic: 6.4, 6.5, 6.7. Bereme-li postupně všechna řešení z K a jim odpovídající čísla z z 6.6, potřebujeme vědět, jestli narazíme na nějaké řešení

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \quad ,$$

pro které je z ze všech největší. A pokud ano, jak takové řešení vypadá.

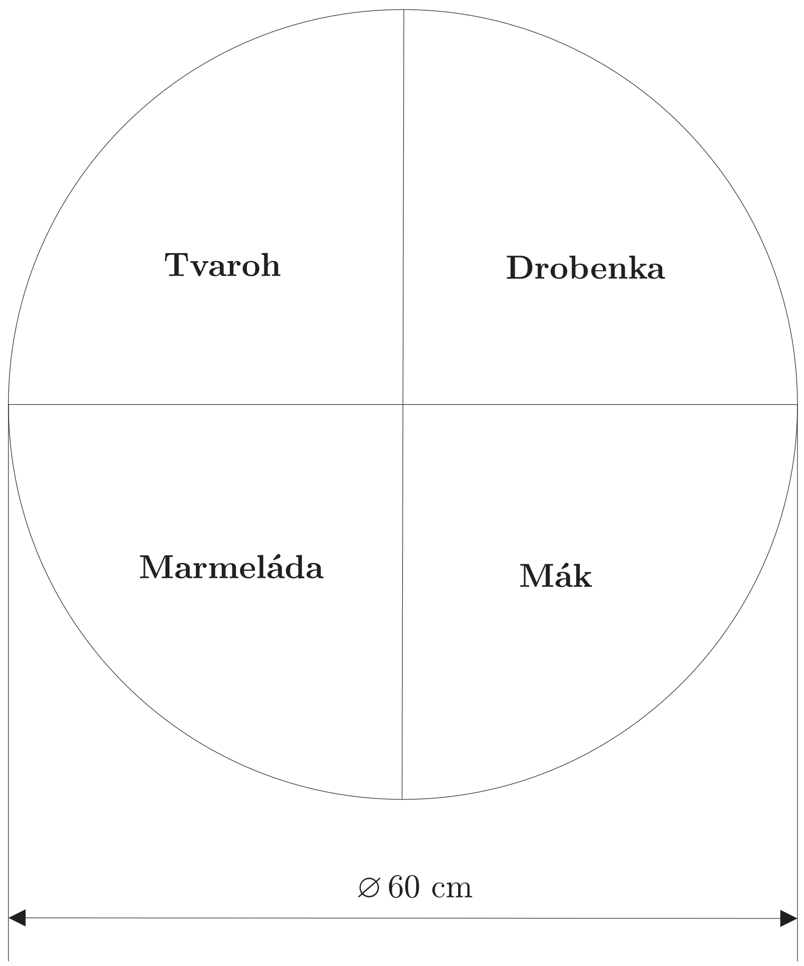
Pohledem na 6.6 a nerovnosti 6.7 vidíme, že jediný adept na řešení je

$$0, 1, 1, 0 \quad ,$$

protože druhý a pátý sčítanec v 6.6 jsou záporná čísla. Dosazením do 6.4 a 6.5 zjistíme, že je to skutečně hledané řešení. MATHEMATICA s příkazem Maximize dává stejné řešení.

Těmto číslům odpovídá jediná část koláče, jediná část A. Je to tvarohovo-marmeládová polovina.

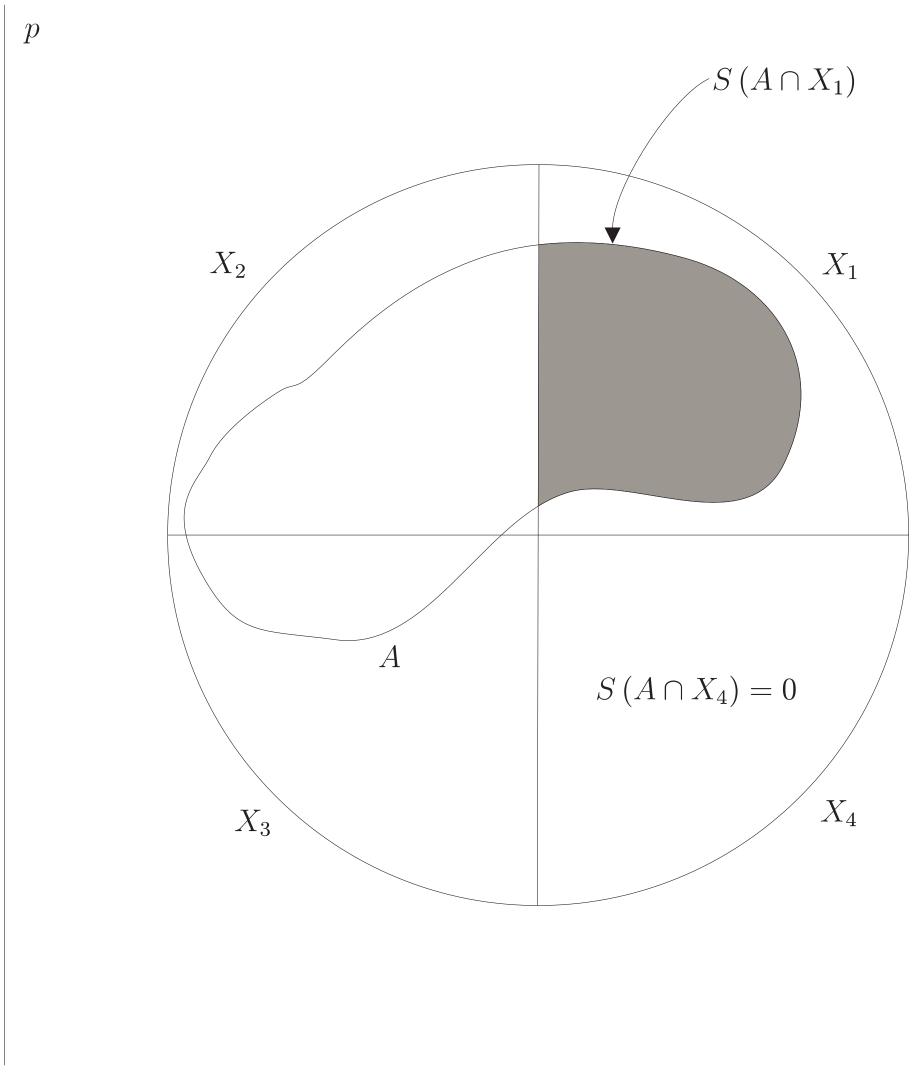
Odpověď na naši otázku je tedy kladná. Požadované spravedlivé rozdělení existuje, a to právě jedno. Je jím rozdělení uvedené v předcházejícím bodě 5.



Obrázek 6.1:

	první dítě		druhé dítě	
	cena v %, ve zlomcích	cena v Kč	cena v %, ve zlomcích	cena v Kč
celý koláč	1	120	1	192
drobenková čtvrtina X_1	$\frac{1}{24}$	5	$\frac{5}{12}$	80
tvarohová čtvrtina X_2	$\frac{7}{12}$	70	$\frac{1}{12}$	16
marmeládová čtvrtina X_3	$\frac{4}{12}$	40	$\frac{3}{12}$	48
maková čtvrtina X_4	$\frac{1}{24}$	5	$\frac{3}{12}$	48

Tabulka 6.1:



Obrázek 6.2:

Kapitola 7

7.1

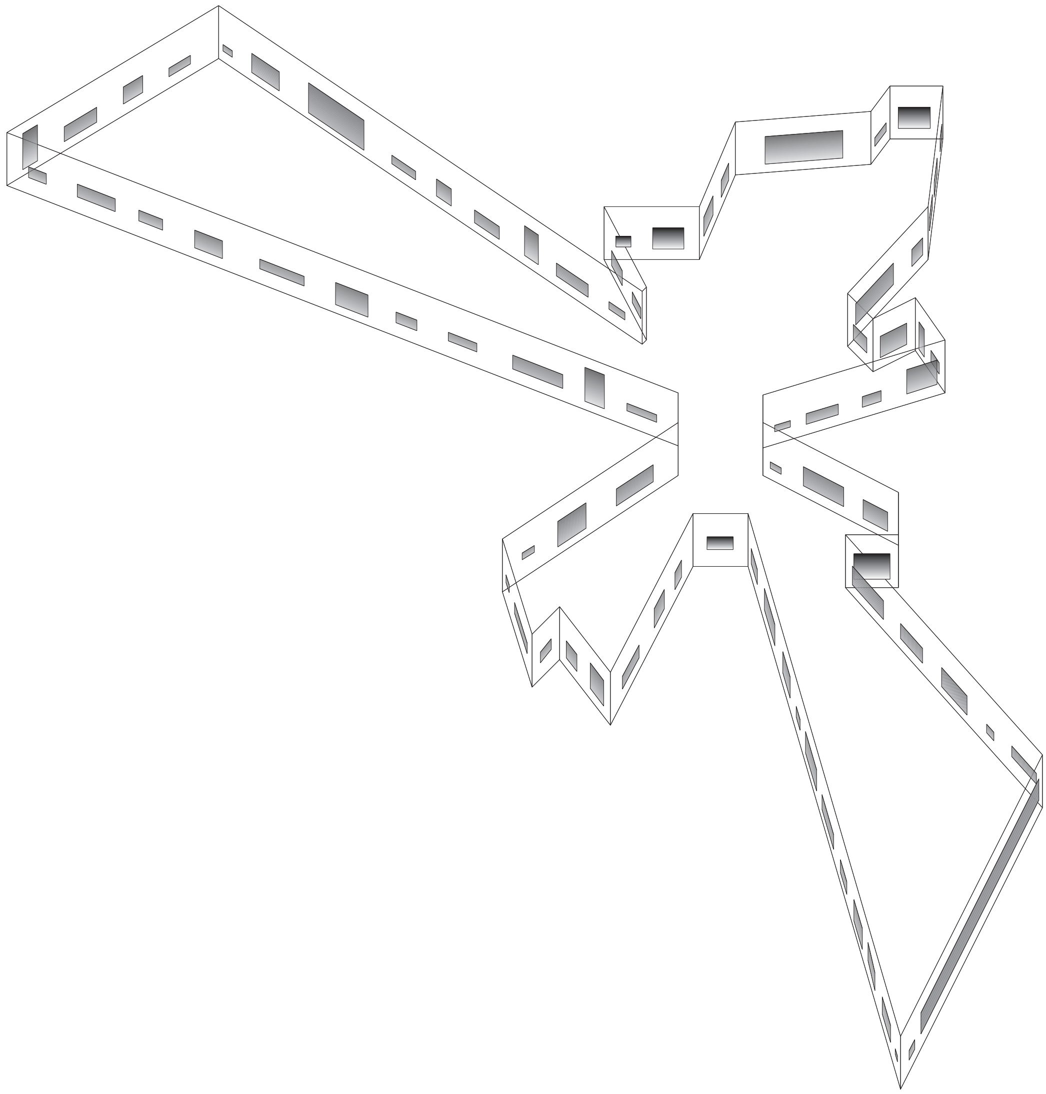
7.1 Příklad.
Na Obrázku 7.1 je galerie s obrazy, kterou hlídá jediný pracovník galerie. Trojice zlodějů se proto rozhodla, že nějaký obraz ukradnou. Avšak vždy, když dva z nich chtěli upoutat pozornost, hlídač se pokaždé postavil tak, že viděl i zbylého třetího. Když půjdou zloději příště krást ve čtyřech, půjdou najisto?

7.2 Příklad.
Vyslovme znovu Příklad 7.1, pouze s tou změnou, že si galerii zjednodušíme. Budeme ji uvažovat ve dvou rozměrech, v půdorysu. Ten je na Obrázku 7.2.

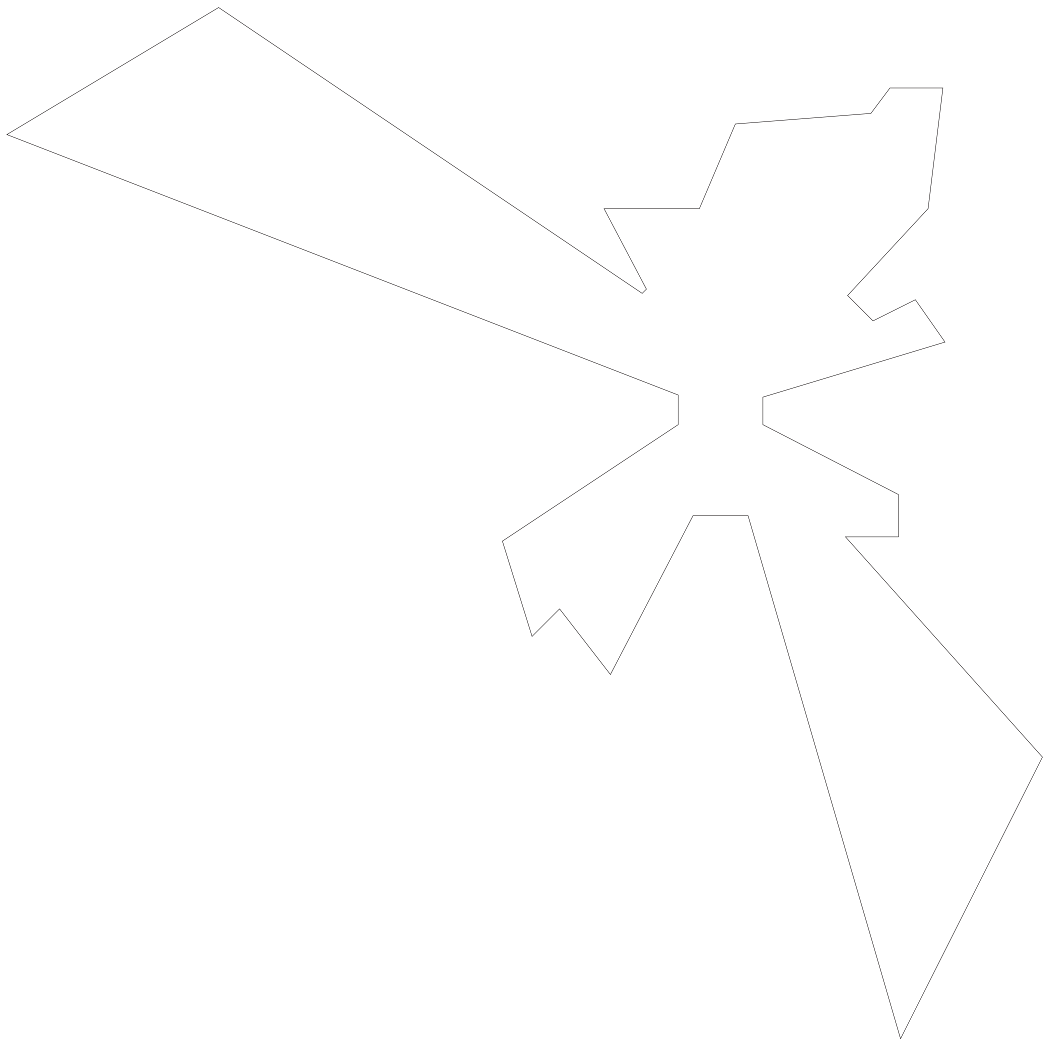
Řešení.
Rovinu, v níž leží galerie, ztotožníme s množinou $\mathbb{R}^2$. Galerie je pak určena jistou množinou $A \subset \mathbb{R}^2$. Podle zadání příkladu a podle Věty 3.14 je množina A hvězdicovitě konvexní.

Pro hlídače se tedy někde nachází místo, z něhož má výhled po celé galerii.

Řešení (Příkladu 7.1).
Zvolme kteroukoliv rovinu, jež je rovnoběžná s podlahou galerie a jež protíná stěny galerie. V této rovině existuje místo, z něhož je galerie – v rámci této roviny – uhlídatelná. To plyne ze zadání Příkladu 7.1 a z řešení Příkladu 7.2. Jelikož jsou podlaha a strop galerie rovné a rovnoběžné, a stěny galerie jsou k nim kolmé, je z tohoto našeho místa galerie uhlídatelná celá.



Obrázek 7.1



Obrázek 7.2

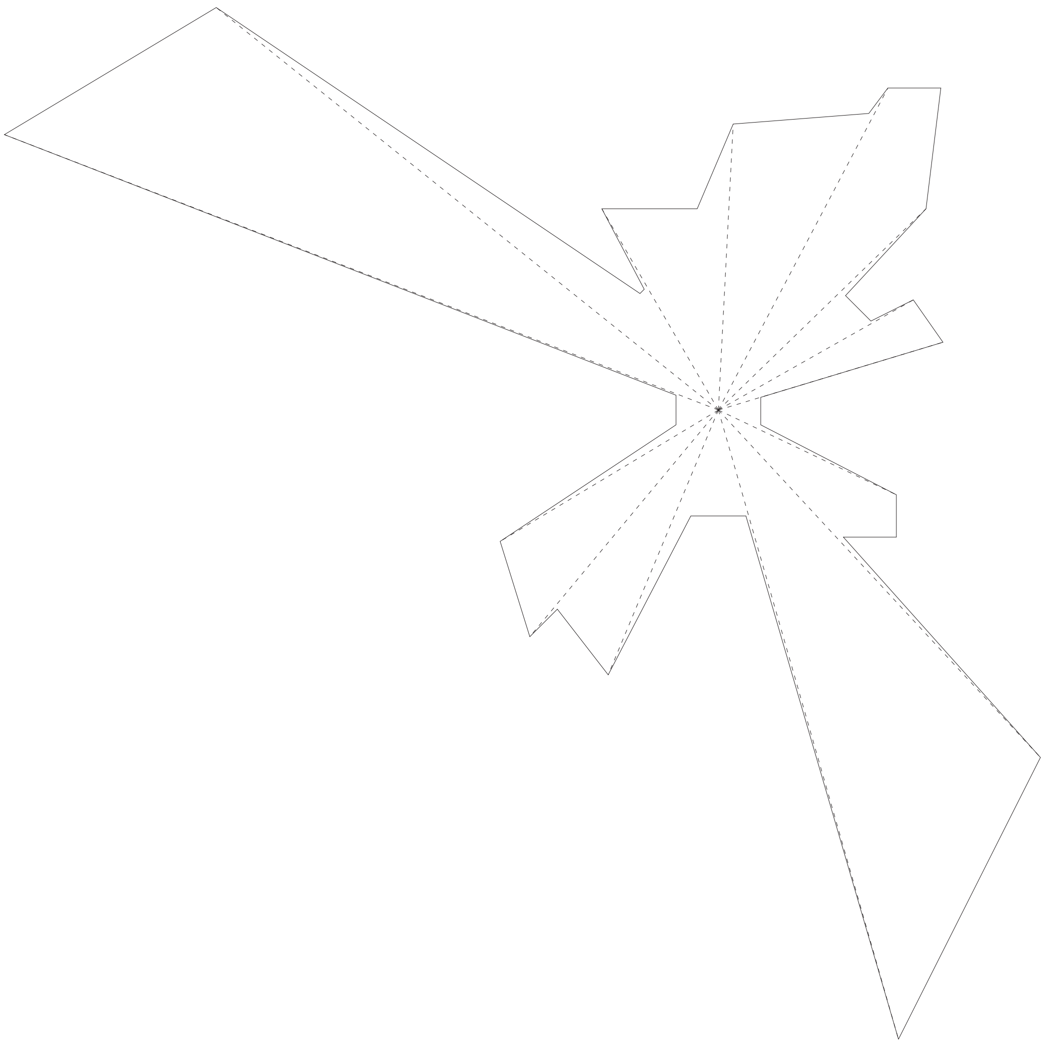
Možná strážní stanoviště v galerii, v galerii jak z Příkladu 7.1 tak z Příkladu 7.2, jsou na Obrázku 7.3.

7.3 Příklad.
Dva speleologové se ocitnou v jeskyni s malbami na stěnách a mají jedinou svítilnu schopnou svítit do všech směrů libovolně daleko. Jeden z nich říká: „Nejlepší by bylo ji osvítit celou najednou, aby nikde nezůstala tma. To by hodně usnadnilo průzkum.“ Druhý odpoví: „Už jsem tu byl, to půjde. Celou jsem ji sice neosvítil, ale všude jsem jí prošel a zjistil, že na každá, mnou předem zvolená, dvě nebo dokonce i tři nebo čtyři místa jeskyně se dá nějak posvítit.“ Má druhý jeskyňář pravdu?

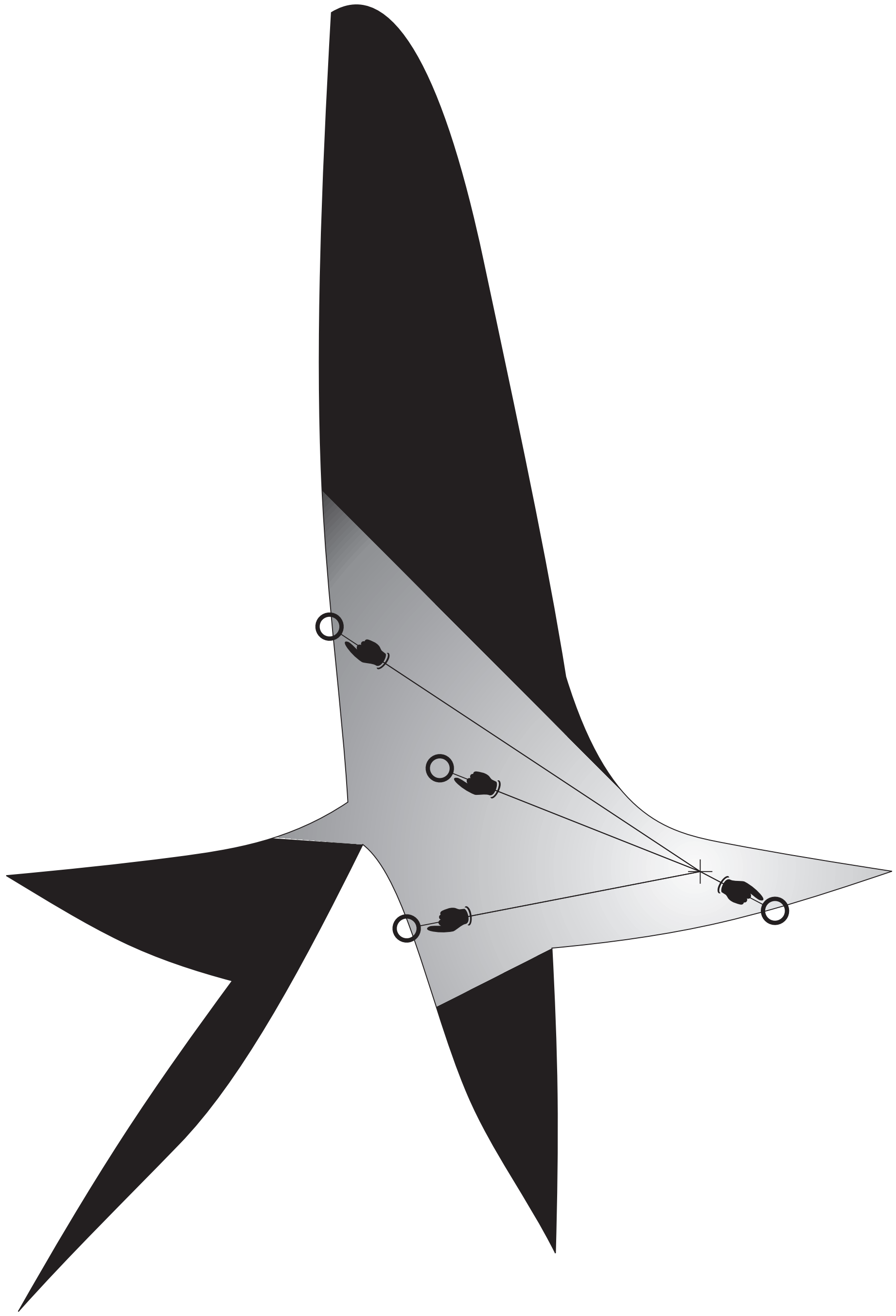
Situaci přibližuje zjednodušeně Obrázek 7.4. Jsou zde zvolena čtyři místa (body) jeskyně, přičemž jedno z míst je ve volném prostoru jeskyně, není to místo na stěnách.

Řešení.
Pokud „skutečný reálný prostor“ ztotožníme s množinou $\mathbb{R}^3$, potom jeskyni, jak její vnitřní prostor, tak její okraje – stěny, určuje jistá množina $A \subset \mathbb{R}^3$. Ta je podle zadání příkladu a podle Věty 3.14 hvězdicovitě konvexní.

Jeskyni lze osvětlit celou najednou.



Obrázek 7.3



Obrázek 7.4

7.2

7.4 Příklad.
V době někdy kolem roku 1600 si dvě koloniální mocnosti chtějí mezi sebou rozdělit velké množství malých ostrovů někde v Oceánii. Tyto malé ostrovy (ty nejmenší jsou rozměrů řádově desítek m^2) se táhnou v pásu širokém 100 km a dlouhém 1000 km. Z nějakého důvodu však obě mocnosti požadují, aby vytýčená hranice byla přímá a neprotínala žádný ostrov (i ten nejmenší).

Na tehdejší dobu je toto rozdělení poměrně náročný úkol. Představitelé mocností si uvědomí, že vlastně nemají mapu všech ostrovů, na níž by šlo bezpečně rozlišit i ty nejmenší ostrovy (o rozměrech řádově desítek m^2), a jaké by vlastně mapa musela mít rozměry (odhadem: kdybychom na mapě chtěli zobrazit dva malé ostrovy ve vzdálenosti 1 mm, jež by ve skutečnosti byly od sebe vzdáleny 100 m, a kdyby na mapě měl být celý pás ostrovů, pak by mapa musela být rozměrů alespoň 1 m $\times$ 10 m).

Jak byste si vy poradili s tímto problémem, kdybyste byli na jejich místě? Samozřejmě s prostředky tehdejší doby.

7.5 Příklad.
Tehdejší učenci navrhli mocnostem tento postup:

1. Vezměte si alespoň nějakou mapu s ostrovy. Dohodněte se mezi sebou, kudy byste vedli napříč pásem přímou čáru, jež by určovala rozdělení převážné většiny ostrovů – všechny ostrovy nalevo od čáry by dostala první mocnost, všechny ostrovy napravo od čáry pak ta druhá. Čím méně ostrovů protne čára, tím lépe.

2. Rozdělení ostrovů, jež leží na čáře, se provede tak, že poplujete lodí napříč pásem v kurzu určeném touto čárou (pomocí kompasu). A jak budete míjet jednotlivé ostrovy, třeba i ty nejmenší, budete se spolu ujednávat, který ostrov komu připadne.

3. My pak vezmeme toto celkové rozdělení, a pomocí všech dostupných map (popř. i lodě a kompasu) zjistíme, zdali splňuje: (ostrovy náležející první mocnosti budeme brát jako červené, ostrovy náležející druhé

mocnosti jako modré) *každou čtveřici ostrovů z pásu (čtveřici ostrovů, z nichž alespoň jeden byl proťat čárou určenou v kroku 1) lze rozdělit na skupinu pouze červených a na skupinu pouze modrých pomocí nějaké přímé čáry, čáry, jež sice může protnout nějaký z ostrovů, ne však žádný z oněch čtyř.* Jestliže to bude platit, pak lze určitě někde vést přímou hranici mezi vašimi všemi červenými ostrovy a vašimi všemi modrými ostrovy.

Mýlí se učenci nebo nemýlí?

Řešení (Příkladu 7.4).

Problém obou mocností lze vyřešit takto.

Mocnosti necháme vykonat kroky 1 a 2 (zde, a též v následujícím, máme na mysli kroky z Příkladu 7.5). Vzájemnou dohodou si tím tedy všechny ostrovy rozdělí „zhruba napolovic“.

Provedeme krok 3 a prověříme, zda platí podmínka (očekáváme, že toto ověření bude o to snazší, o co méně ostrovů bude v bodu 2).

Pokud podmínka splněna není, pak se vrátíme znovu na začátek a kroky znovu opakujeme.

Pokud podmínka splněna je, máme již dost dobrý důvod se domnívat, že požadovaná hranice mezi „oběma polovinami ostrovů“ nejspíš existuje, a tudíž že má smysl se ji vydat hledat, s předem na to vymezeným časem, pomocí tehdy dostupných map (popř. i lodě a kompasu), podle kroku 1 víme zhruba kam. K této domněnce nás, za přispění intuice, přivedla následující abstraktní úvaha.

Představme si, že máme k dispozici mapu všech ostrovů, na níž lze bezpečně rozlišit i ty nejmenší ostrovy (o rozměrech řádově desítek m^2) – s touto mapou budeme dále pracovat. Ty ostrovy na mapě, které se nejeví jako bod, které mají nějakou rozlohu, nahradíme bodem, jakkoliv, třeba bodem ve středu ostrova. Jestliže pak rovinu, v níž leží mapa, ztotožníme s množinou $\mathbb{R}^2$, bude každý ostrov reprezentován nějakým bodem z $\mathbb{R}^2$, „první polovina ostrovů“ vybraná první mocností v krocích 1 a 2 bude reprezentována jistou konečnou množinou bodů z $\mathbb{R}^2$, množinou A, podobně „druhá polovina ostrovů“ vybraná druhou mocností bude reprezentována jistou množinou B, a konečně bude podle kroku 3 (a též kroků 1 a 2) platit podmínka, že ke každé čtyřprvkové množině $C \subset A \cup B$ bude existovat přímka, jež silně separuje množiny $A \cap C$ a $B \cap C$. Podle Věty 3.13 bude existovat přímka, jež silně separuje množiny A a B. Buď tato separační přímka na mapě reprezentuje hledanou hranici, to jest

$$\text{existuje požadovaná hranice mezi „oběma polovinami ostrovů“,} \tag{7.1}$$

anebo tato separační přímka (a také žádná jiná separační přímka) nereprezentuje hledanou hranici, tj. protíná některý ostrov – ten se na mapě jevil buď jako by měl rozlohu, nebo jako bod – separační přímka vyšla prostě tak, že byla velmi blízko příslušného bodu z množiny $A \cup B$. Poté se opět vrátíme na začátek, zkoušíme nahradit rozlohu ostrovů jiným způsobem a opět aplikujeme Větu 3.13, do té doby, dokud neobdržíme výsledek 7.1 nebo nevyčerpáme všechny možné aproximace rozlohy ostrovů body, což by znamenalo výsledek, že

$$\text{neexistuje požadovaná hranice mezi „oběma polovinami ostrovů“.} \tag{7.2}$$

Literatura

[1] Barbanel J. B. (2005): The geometry of efficient fair division. Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Barvinok A. (2002): A course in convexity. American Mathematical Society, Providence.

[3] Brams S. J., Taylor A. D. (1996): Fair division : from cake-cutting to dispute resolution. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] COMAP (The Consortium for Mathematics and its Applications) (2005): For All Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World. W.H.Freeman.

[5] Dubins L. E., Spanier E. H. (1961): How to cut a cake fairly. *The American Mathematical Monthly* Vol. 68, No. 1, 1-17.

[6] R.V. Gamkrelidze (ed.) (1990): Analysis II, Convex analysis and approximation theory. Springer, Berlin.

[7] Hill T. P. (2000): Mathematical Devices for Getting a Fair Share. *American Scientist* Vol. 88, Nu. 4

[8] Hill T. P. (1983): Determining a fair border. *The American Mathematical Monthly* Vol. 90, No. 7, 438-442

[9] Kolmogorov A. N., Fomin S.V. (1975): Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy. SNTL, Praha.

[10] Lay S. R. (1982): Convex sets and their applications. Wiley, New York.

[11] Lukeš J. (2002): Zápisky z funkcionální analýzy. Karolinum, Praha.

[12] Netuka I., Veselý J. (1984): Eduard Helly, konvexita a funkcionální analýza. *Pokroky MFA* 6, 301-312.

[13] Pallaschke D. R., Urbaski R. (2002): Pairs of compact convex sets : fractional arithmetic with convex sets. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[14] Robertson J., Webb W. (1998) Cake-cutting algorithms: be fair if you can. A.K. Peters, Natick.

[15] Rudin W. (2003): Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia, Praha.

[16] Steinhaus H. (1948): The problem of fair division. *Econometrica* Vol. 16, No. 1, 101-104.

[17] Webster R. J. (1994): Convexity. Oxford University Press, Oxford.