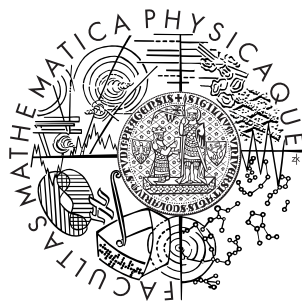


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## Diplomová práce



David Stibůrek

## Testy normality časových řad

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Zaměření: Matematická statistika

2010

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu diplomové práce prof. RNDr. Jiřímu Andělovi, DrSc. za udělení zajímavého tématu ke zpracování, odborné vedení a také za kvalitní připomínky. Také bych chtěl poděkovat Ing. Marku Omelkovi, Ph.D. za trpělivé poskytnutí informací o možnostech simulací.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 14.4.2010

David Stibůrek

# Obsah

<b>1</b>	<b>Testování normality založené na výběrové šikmosti, špičatosti a autokorelačních koeficientech</b>	<b>9</b>
1.1	Asymptotické vlastnosti výběrových momentů . . . . .	12
1.2	Asymptotické rozdělení prvních čtyř výběrových momentů .	15
1.3	Asymptotické rozdělení dvojic momentů $(m_1, m_3)'$ a $(m_2, m_4)'$	22
1.4	Asymptotická rozdělení prvních čtyř centrálních momentů .	27
1.5	Užití na testování normality . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Testování normality pomocí minimalizace kvadratické formy z transformovaných dat</b>	<b>35</b>
2.4	Splnění předpokladů věty 2.3 . . . . .	39
2.6	Změna volby hodnot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ vzhledem k rozptýlenosti dat	42
2.10	Užití výsledků na test, zda je proces gaussovský . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Testování normality pomocí odhadu spektra a bispektra</b>	<b>47</b>
3.1	Odhad bispektra a jeho užití . . . . .	49
3.2	Odhad spektra a užití na test normality . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Testování normality u autoregresních modelů pomocí reziduí</b>	<b>53</b>
4.1	Asymptotická srovnání . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Porušení předpokladu nezávislosti</b>	<b>59</b>
5.1	Testování normality u AR procesů . . . . .	59
5.1.1	Procesy AR(1) . . . . .	60
5.1.2	Procesy AR(2) . . . . .	61
5.1.3	Procesy AR(3) a AR procesy vyšších řádů . . . . .	62
5.2	Testování normality u ARMA procesů . . . . .	63

<b>6</b>	<b>Testování normality bez předpokladu nezávislosti pozorování</b>	<b>67</b>
6.1	Testování normality v případě známých autokorelačních koeficientů . . . . .	67
6.2	Testování normality u autoregresních závislostí . . . . .	68
6.3	Testování normality pomocí minimalizace kvadratické formy	70
6.4	Testování normality pomocí odhadu spektra a bispektra . .	70
<b>7</b>	<b>Dodatek</b>	<b>71</b>
	<b>Literatura</b>	<b>197</b>



**Název práce:** Testy normality časových řad

**Autor:** David Stibůrek

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedoucí diplomové práce:** prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

**e-mail vedoucího:** andel@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** Tato práce se zabývá testováním normality časových řad u AR a ARMA procesů. Nejdříve je zde vyšetřeno chování běžných testů normality, které předpokládají nezávislost pozorování. Je zde hlavně zkoumáno dodržování hladiny a síly těchto testů v závislosti na vzdálenosti kořenů charakteristického polynomu AR procesů od jednotkového kruhu. Dále se tato práce obdobně zabývá testy, které nezávislost pozorování nepředpokládají. Omezíme-li se na AR procesy, můžeme testováním normality reziduí dostat dobré výsledky. U obecnějších testů můžeme také dostat dobré výsledky, ale tyto testy potřebují větší počet pozorování a jsou výpočetně náročnější.

**Klíčová slova:** lineární časové řady, autoregrese, autokorelace, kladná závislost, záporná závislost, závislost.

**Title:** Tests of normality of time series

**Author:** David Stibůrek

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

**Supervisor's e-mail address:** andel@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** This work considers testing normality of time series in AR and ARMA processes. Firstly we investigate properties of common normality tests, which assume independency. The main goal is to examine levels and powers of tests in dependence on distances of the roots of the characteristic polynom from unit circle. After this we study the tests, which don't assume independency. In the case of AR processes, we get good results by testing normality of residuals. More complex tests can also give good results, but these tests need many observations and are difficult from the numerical point of view.

**Keywords:** linear time series, autoregression, autocorrelation, positive dependence, negative dependence, dependence.

# Úvod

V této práci se zabýváme testováním normality u (jednorozměrných) časových řad. Základním předpokladem zde je, že data pocházejí z kauzálního lineárního a tedy také stacionárního náhodného procesu. Jako speciální případ pak můžeme uvažovat náhodný výběr z nějakého rozdělení.

Při odvozování konkrétních testů se nejvíce zabýváme testem z [18] a posléze také s testem z [10]. U těchto testů se zabýváme jejich hlavními myšlenkami odvození. Při složitějších důkazech pak odkazujeme na příslušnou literaturu. Méně podrobně zde jsou odvozovány testy z [15] a [24], kde uvádíme pouze základní myšlenky. Těmto čtyřem testům jsou tak věnovány první čtyři kapitoly.

Důvod, proč se zabýváme těmito testy je ten, že naprostá většina běžně užívaných testů normality předpokládá nezávislost pozorování, zatímco tyto testy nezávislost (zcela) nevyžadují.

V některých případech jsou však testy normality, které předpokládají nezávislost, chybně používány na závislá data. Proto se nejdříve zabýváme tím, jaké výsledky dostaneme použitím těchto testů na závislá pozorování. Simulacemi zjišťujeme, jak je při těchto testech dodržována hladina testů. Následně zjišťujeme, do jaké míry ovlivňuje závislost výsledky testů a jaký druh závislosti (kořenů operátorových polynomů) je ovlivňuje více. Také zjišťujeme, za jakých předpokladů je spíše dodržena hladina. Toto zkoumáme u AR a ARMA procesů pro několik různých délek řad.

Po zjištění problematických druhů AR a ARMA procesů, které jsou pro téměř všechny zkoumané klasické testy stejné, zkoušíme na tyto druhy závislosti používat testy probírané v prvních čtyřech kapitolách. Dva z těchto testů se ukazují účinné, ale každý z nich potřebuje určitou znalost struktury modelu a také se v některých případech musí dát pozor na dodržení síly testu. Další dva testy naopak o daném procesu předpokládají téměř nic nemusí. Jeden z nich potom může dávat lepší výsledky, ale vyžaduje větší počet pozorování a je výpočetně náročnější. Druhý z nich se ukazuje jako velmi složitý.





# Kapitola 1

## Testování normality založené na výběrové šikmosti, špičatosti a autokorelačních koeficientech

V této části budeme předpokládat, že  $\{X_t, t \in T\}$  je náhodný proces, který je definován jako

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e_{t-k}, \quad (1.1)$$

kde  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$  a  $e_t$  je *bílý šum*. To tedy znamená, že  $Ee_t = 0$ ,  $\text{var } e_t = \sigma^2 < \infty$  a  $\text{cov}(e_t, e_s) = 0$  pro  $t, s \in T, t \neq s$ . Jak známo, autokovarianční funkce  $R(k)$  procesu (1.1) je

$$R(k) = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i h_{i+k}. \quad (1.2)$$

Pro další práci zavedme následující značení. Necht'  $i_1, i_2, \dots, i_k$  jsou daná celá čísla. Pomocí  $\stackrel{\text{def}}{=}$  budeme dále značit rovnost podle definice. Definujme

$$V_K(i_1, i_2, \dots, i_K) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_{i_1-q} h_{i_2-q} \dots h_{i_K-q}. \quad (1.3)$$

Speciálně tedy

$$V_2(i, j) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_{i-q} h_{j-q} = \sigma^{-2} R(i - j),$$

$$V_3(i, j, k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_{i-q} h_{j-q} h_{k-q}.$$

Pro  $K = 2$  počítejme

$$V_2(i+n, j+n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_{i+n-q} h_{j+n-q} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_{i-r} h_{j-r} = V_2(i, j).$$

Tuto vlastnost můžeme rozšířit na funkci  $V_K$  pro  $K \geq 2$ , takže

$$V_K(i_1, i_2, \dots, i_K) = V_K(i_1 - n, i_2 - n, \dots, i_K - n)$$

pro  $K \geq 2$  a pro libovolné celé číslo  $n$ . Speciálně potom platí

$$V_K(i, i, \dots, i) = V_K(0, 0, \dots, 0). \quad (1.4)$$

Pro výpočet obecných momentů budeme používat vzorec, ve kterém budeme používat následující značení. *Dělením (přirozeného) čísla  $n$*  rozumíme jeho rozklad na součty (přirozených) čísel  $n = q_1 + q_2 + \dots + q_l$ , kde  $q_i > 1$  pro  $i = 1, 2, \dots, l$ . Označme dále  $Y$  počet takových dělení čísla  $n$ . Nechť  $K_1, K_2, \dots, K_Y$  jsou všechna možná *dělení* čísla  $n$ . Označme  $g(t) = \log \mathbf{E} e^{tX_1}$ . *Kumulantem  $n$ -tého řádu* potom rozumíme

$$\kappa_n = g^{(n)}(0).$$

Jsou-li  $p_1 > p_2 > \dots > p_m > 1$  čísla, která tvoří takové dělení čísla  $n$  tak, že se  $p_i$  objevuje v dělení  $\pi_i$ -krát, potom obecně pro momenty platí

$$\mathbf{E}(X_{t_1} X_{t_2} \dots X_{t_m}) = \sum_{r=1}^Y P_r, \quad (1.5)$$

kde  $P_r$  odpovídá  $r$ -tému dělení a platí pro něj

$$P_r = \sum \kappa_{p_1}^{\pi_1} \kappa_{p_2}^{\pi_2} \dots \kappa_{p_m}^{\pi_m} \underbrace{V_{p_1}(\dots) \dots V_{p_1}(\dots)}_{\pi_1} \dots \underbrace{V_{p_m}(\dots) \dots V_{p_m}(\dots)}_{\pi_m}. \quad (1.6)$$

Užijme tohoto vzorce pro výpočet některých důležitých momentů. Je-li  $n = 2$ , potom jediné dělení tohoto čísla je číslo 2. Podle vzorce (1.6) pak je

$$\mathbf{E}(X_i X_j) = \kappa_2 V_2(i, j).$$

Speciálně pro  $i = j$  platí

$$\mathbf{E}(X_i^2) = \kappa_2 V_2(i, i) = \kappa_2 V_2(0, 0). \quad (1.7)$$

Pro  $n = 3$  je podobně jediné dělení čísla 3 opět jen 3. Užitím stejného vzorce potom dostaneme

$$\mathbf{E}(X_i X_j X_k) = \kappa_3 V_3(i, j, k)$$

Speciálně potom platí

$$\mathbf{E}(X_i^3) = \kappa_3 V_3(i, i, i) = \kappa_3 V_3(0, 0, 0). \quad (1.8)$$

Pro  $n = 4$  však již máme 2 (typově) možná dělení. Tato dělení jsou na čísla 4 a 2, 2. Ve vzorci (1.5) tomu odpovídá  $P_1 = \sum \kappa_4 V_4(\dots)$ . Zde však je jen jeden (různý) způsob, jak do argumentu  $V_4$  rozložit čísla  $i, j, k, l$ . Pro  $P_2 = \sum \kappa_2^2 V_2(\dots)V_2(\dots)$  zde jsou však již 3 možné způsoby, jak do argumentů  $V_2(\dots)V_2(\dots)$  (různě) rozložit čísla  $(i, j, k, l)$ . Použitím vzorce (1.6) potom dostaneme následující vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_i X_j X_k X_l) &= \kappa_4 V_4(i, j, k, l) \\ &\quad + \kappa_2^2 [V_2(i, j)V_2(k, l) + V_2(i, k)V_2(j, l) + V_2(i, l)V_2(j, k)]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Jako speciální případy potom jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_i^4) &= \kappa_4 V_4(i, i, i, i) \\ &\quad + \kappa_2^2 [V_2(i, i)V_2(i, i) + V_2(i, i)V_2(i, i) + V_2(i, i)V_2(i, i)] \\ &= \kappa_4 V_4(0, 0, 0, 0) + 3\kappa_2^2 V_2^2(0, 0) = \kappa_4 V_4(0, 0, 0, 0) + 3R^2(0), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_i^2 X_j^2) &= \kappa_4 V_4(i, i, j, j) \\ &\quad + \kappa_2^2 [V_2(i, i)V_2(j, j) + V_2(i, j)V_2(i, j) + V_2(i, j)V_2(i, j)] \\ &= \kappa_4 V_4(i - j, i - j, 0, 0) + \kappa_2^2 V_2^2(0, 0) + 2\kappa_2^2 V_2^2(i - j, 0) \\ &= \kappa_4 V_4(i - j, i - j, 0, 0) + R^2(0) + 2R^2(i - j). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Pro  $n = 6$  máme hodnoty našeho dělení 6; 4, 2; 3, 3; 2, 2, 2. Pro tato dělení je postupně 1, 15, 10, 15 možných způsobů, jak uspořádat pořadí argumentů. Po užití vzorců (1.5) a (1.6) dostáváme volbou indexů  $i, i, i, j, j, j$  tento vztah

$$\mathbf{E}(X_i^3 X_j^3) = \kappa_6 V_6(i, i, i, j, j, j)$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa_2 \kappa_4 [3V_2(i, i)V_4(i, j, j, j) + 3V_2(j, j)V_4(i, i, i, j) \\
& \quad + 9V_2(i, j)V_4(i, i, j, j)] \\
& + \kappa_3^2 [V_3(i, i, i)V_3(j, j, j) + 9V_3(i, i, j)V_3(i, j, j)] \\
& + \kappa_2^3 [9V_2(i, i)V_2(j, j)V_2(i, j) + 6V_2(i, j)V_2(i, j)V_2(i, j)].
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Takovýmto postupem bychom pak mohli pokračovat dále. Dostali bychom tyto vzorce:

$$\mathbb{E}(X_i X_j^3) = 3R(0)R(i - j), \tag{1.13}$$

$$\mathbb{E}(X_i^3 X_j^3) = 9R^2(0)R(i - j) + 6R^2(i - j), \tag{1.14}$$

$$\mathbb{E}(X_i^4 X_j^2) = 3R^3(0) + 12R(0)R^2(i - j), \tag{1.15}$$

$$\mathbb{E}(X_i^4 X_j^4) = 9R^4(0) + 72R^2(0)R^2(i - j) + 24R^4(i - j). \tag{1.16}$$

## 1.1 Asymptotické vlastnosti výběrových momentů

Pro další odvození budeme potřebovat vyšetřit asymptotické vlastnosti výběrových momentů. Označme  $m_3 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^3$  a  $m_4 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^4$ . Podle (1.8) potom máme

$$\mathbb{E}m_3 = \mathbb{E} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^3 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbb{E}X_t^3 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \kappa_3 V_3(0, 0, 0) = \kappa_3 V_3(0, 0, 0).$$

Podobně spočteme

$$\mathbb{E}m_3^2 = \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbb{E}X_t^3 \right)^2 = \frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i^3 X_j^3 \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}X_i^3 X_j^3.$$

Užitím těchto dvou rovností a také (1.12) a (1.4) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
N \text{var } m_3 & = N [\mathbb{E}m_3^2 - (\mathbb{E}m_3)^2] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}X_i^3 X_j^3 - N[\kappa_3 V_3(0, 0, 0)]^2 \\
& = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \kappa_6 V_6(i, i, i, j, j, j) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 6\kappa_2 \kappa_4 V_2(i, i)V_4(i, i, i, j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 9\kappa_2\kappa_4 V_2(i, j) V_4(i, i, i, j) \\
& + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 9\kappa_3^2 V_3(i, i, j) V_3(i, j, j) \\
& + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \kappa_3^2 V_3(i, i, i) V_3(j, j, j) \\
& + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 9\kappa_2^3 V_2(i, i) V_2(j, j) V_2(i, j) \\
& + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 6\kappa_2^3 V_2(i, j) V_2(i, j) V_2(i, j) - N [\kappa_3 V_3(0, 0, 0)]^2 \\
= & \kappa_6 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_6(i-j, i-j, i-j, 0, 0, 0) \\
& + 6\kappa_2\kappa_4 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(0, 0) V_4(i-j, i-j, i-j, 0) \\
& + 9\kappa_2\kappa_4 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(i-j, 0) V_4(i-j, i-j, i-j, 0) \\
& + 9\kappa_3^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_3(i-j, i-j, 0) V_3(i-j, 0, 0) \\
& + \kappa_3^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_3(0, 0, 0) V_3(0, 0, 0) \\
& + 9\kappa_2^3 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(0, 0) V_2(0, 0) V_2(i-j, 0) \\
& + 6\kappa_2^3 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(i-j, 0) V_2(i-j, 0) V_2(i-j, 0) \\
& - N [\kappa_3 V_3(0, 0, 0)]^2 \\
= & \kappa_6 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_6(i-j, i-j, i-j, 0, 0, 0) \\
& + 6\kappa_2\kappa_4 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(0, 0) V_4(i-j, i-j, i-j, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 9\kappa_2\kappa_4 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(i-j, 0) V_4(i-j, i-j, i-j, 0) \\
& + 9\kappa_3^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_3(i-j, i-j, 0) V_3(i-j, 0, 0) \\
& + 9\kappa_2^3 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(0, 0) V_2(0, 0) V_2(i-j, 0) \\
& + 6\kappa_2^3 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(i-j, 0) V_2(i-j, 0) V_2(i-j, 0). \tag{1.17}
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny sčítance jsou typu

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A(i-j),$$

kde podle definice  $V_K$  resp. (1.3) a podle původního předpokladu platí

$$\left| \sum_{q=-\infty}^{\infty} A(q) \right| \leq \left( \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_q \right)^6 < \infty.$$

Nyní bychom si měli uvědomit, že pokud máme dvě stejné množiny indexů  $\{1, 2, \dots, N\}; \{1, 2, \dots, N\}$ , potom při množinovém rozdílů těchto množin můžeme získat čísla od  $1 - N$  do  $N - 1$ . Každé

$$q \in \{1 - N, 2 - N, \dots, N - 1\}$$

se v takovémto rozdílů vyskytuje  $(N - |q|)$ -krát. Dále tedy můžeme psát

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A(i-j) = \frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} (N - |q|) A(q). \tag{1.18}$$

Vidíme, že toto je částečný součet *caesarovské konvergentní sumy*. Z tohoto důvodu jsou všechny výrazy v (1.17) tohoto typu a konečné. Proto je  $\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{var } m_3 = \text{konst.} < \infty$ , a tak  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var } m_3 = 0$ . Z tohoto plyne, že  $m_3$  je konzistentním odhadem své střední hodnoty, neboť tato střední hodnota je stejná pro každé  $N$ . Proto

$$m_3 \xrightarrow{P} \mathbf{E}m_3 = \kappa_3 V_3(0, 0, 0) \tag{1.19}$$

pro  $N \rightarrow \infty$ . Podobnou vlastnost má  $m_4$ . Podle (1.10) platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}m_4 &= \mathbf{E}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N X_t^4 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^N \mathbf{E}X_t^4 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^N \kappa_4 [V_4(0,0,0,0) + 3R^2(0)] \\ &= \kappa_4 V_4(0,0,0,0) + 3R^2(0), \\ \mathbf{E}(m_4)^2 &= \mathbf{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N X_t^4\right)^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \mathbf{E}X_i^4 X_j^4. \end{aligned}$$

Podle (1.6) a (1.4) potom platí

$$\begin{aligned} \text{var } m_4 &= \mathbf{E}(m_4)^2 - (\mathbf{E}m_4)^2 = \kappa_4^2 V_4(i,i,i,i)V_4(j,j,j,j) \\ &\quad + 3\kappa_4\kappa_2^2 [V_4(i,i,i,i)V_2(j,j)V_2(j,j) + V_4(j,j,j,j)V_2(i,i)V_2(i,i)] \\ &\quad + 9\kappa_2^2 V_2(i,i)V_2(i,i)V_2(j,j)V_2(j,j) - [\kappa_4 V_4(0,0,0,0) + 3R^2(0)]^2 \\ &\quad + R_N = R_N, \end{aligned}$$

kde  $R_N$  je konečný součet sum tvaru  $\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N A(i-j)$ . Přitom  $A$  je stejného tvaru jako v (1.10). Podobnou úvahou jako v (1.18) resp. v (1.19) dostaneme  $N\text{var } m_4 \rightarrow \text{konst.}$  pro  $N \rightarrow \infty$ . Z tohoto je pak vidět, že  $\text{var } m_4 \rightarrow 0$ . Zde je tedy také  $m_4$  konzistentním odhadem své (stále stejné) střední hodnoty tj.

$$m_4 \xrightarrow{P} \mathbf{E}m_4 = \kappa_4 V_4(0,0,0,0) + 3R^2(0)$$

pro  $N \rightarrow \infty$ . Při našich předpokladech tedy vidíme, že odhady  $m_3$  a  $m_4$  jsou konzistentními odhady 3. a 4. momentů našeho procesu  $\{X_t\}$ .

## 1.2 Asymptotické rozdělení prvních čtyř výběrových momentů

Předpokládejme, že  $X_1, X_2, \dots, X_N$  jsou pozorování ze *stacionárního náhodného procesu*. Potom platí

$$\begin{aligned} N\text{var } m_1 &= N\text{var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i\right) = \frac{1}{N}\text{var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \frac{1}{N}\text{cov}\left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{i=1}^N X_i\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N R(i-j) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{q=1-N}^{N-1} (N-|q|)R(i-j). \end{aligned}$$

Toto je *caesarovská suma*. Proto pak je

$$\text{var} \left( N^{\frac{1}{2}} m_1 \right) = N \text{var} m_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} R(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{11}. \quad (1.20)$$

Asymptotická normalita výběrového momentu prvního řádu je dokázána v [22]. Proto

$$N^{\frac{1}{2}} m_1 \xrightarrow{D} N \left( 0, \sum_{q=-\infty}^{\infty} R(q) \right) = N(0, \sigma_{11}). \quad (1.21)$$

Označme

$$\sigma_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} R^2(0) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^2(q). \quad (1.22)$$

Pak podle [20] věty 5.1. platí

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}} [m_2 - \mathbf{E}(m_2)] &= N^{\frac{1}{2}} [m_2 - R(0)] \xrightarrow{D} N \left( 0, \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} R^2(0) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^2(q) \right) \\ &= N(0, \sigma_{22}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ještě vypočteme asymptotické rozdělení výběrového momentu třetího řádu. K vyšetřování tohoto rozdělení budeme předpokládat normalitu  $e_t$ , protože to při testu hypotézy normality rovněž předpokládáme. Pak veličiny  $X_t$  mají také normální rozdělení a vzhledem k nulovosti střední hodnoty má  $X_t$  všechny liché momenty nulové. Speciálně je  $\mathbf{E}X_t^3 = 0$ . Potom můžeme počítat následující rozptyl podle (1.14) jako

$$\begin{aligned} N \text{var} m_3 &= N \mathbf{E} m_3^2 = N \mathbf{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^3 \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{E} X_i^3 X_j^3 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [9R^2(0)R(i-j) + 6R^3(i-j)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} [9R^2(0)R(q) + 6R^3(q)] (N - |q|). \end{aligned}$$

Toto je opět částečný součet *caesarovské konvergentní sumy*. Proto platí

$$\text{var}(N^{\frac{1}{2}} m_3) = N \text{var} m_3 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [9R^2(0)R(q) + 6R^3(q)] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{33}. \quad (1.24)$$



Při vyšetřování asymptotické normality obecně vyšetřujeme  $n$ -té momenty  $N^{\frac{1}{2}}m_3$ . Nechť je tedy  $n > 2$  dané přirozené číslo. Potom je

$$N^{\frac{n}{2}}\mathbf{E}m_3^n = N^{\frac{n}{2}}\mathbf{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N X_t^3\right)^n = N^{-\frac{n}{2}}\sum_{t_1=1}^N\sum_{t_2=1}^N\cdots\sum_{t_n=1}^N\mathbf{E}X_{t_1}^3X_{t_2}^3\cdots X_{t_n}^3.$$

Užijeme vzorec (1.6) na rozklad  $\mathbf{E}X_{t_1}^3X_{t_2}^3\cdots X_{t_n}^3$  (ze  $3n$  činitelů) přes všechna možná dělení čísla  $3n$ . V případě normality  $e_t$  se dá ukázat, že jediné takové dělení, které dává nenulové členy (po možném odečtení), je dělení, kde se číslo 2 objevuje  $(3n/2)$ -krát. Toto dělení navíc existuje jen pro  $n$  sudé. Předchozí vztah pak můžeme vyjádřit následovně

$$N^{\frac{n}{2}}\mathbf{E}m_3^n = N^{-\frac{n}{2}}\sum_{t_1=1}^N\sum_{t_2=1}^N\cdots\sum_{t_n=1}^N\sum\kappa_2^{\frac{3n}{2}}V_2(\dots)\cdots V_2(\dots),$$

kde se v sumě  $\sum$  sčítá přes všechny možné trojice indexů  $t_1(i), t_2(i)$  a  $t_3(i)$ . V tomto případě však stačí v této sumě splnit rovnost  $t_1(i) = t_2(i) = t_3(i) = t(i)$ . Prohodíme tuto sumu s ostatními sumami a uvažujme součty

$$N^{-\frac{n}{2}}\sum_{t_1=1}^N\sum_{t_2=1}^N\cdots\sum_{t_n=1}^N\kappa_2^{\frac{3n}{2}}V_2(\dots)\cdots V_2(\dots). \quad (1.25)$$

Každý z těchto sčítanců má počet  $V_2$  dělitelný třemi a jejich počet  $\gamma$  nepřesáhne hodnotu  $n/2$ . Tento jeden činitel, který je tedy složený z  $3f$  funkcí (pro  $f$  přirozené)  $V_2$ , je (z definice  $V_2$ ) mnohonásobnou sumou součinů  $h_k$ , kde se jednotlivá  $h_k$  (pro každé  $k$ ) neopakují více než  $N$ -krát. Proto je každý z činitelů majorizován výrazem

$$N\kappa_2^{3f}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_k|\right]^{6f}.$$

Potom je výraz typu (1.25) shora omezen výrazem

$$N^{\gamma-\frac{n}{2}}\kappa_2^{\frac{3n}{2}}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_k|\right]^{3n}.$$

Protože je  $\gamma$  celé číslo, je z tohoto posledního výrazu vidět, že pokud je počet činitelů menší než  $\frac{n}{2}$ , potom je každý člen z (1.25) řádu alespoň  $O(N^{-1})$ .

Pokud je však tento počet přesně roven  $\frac{n}{2}$  tj.  $\gamma = \frac{n}{2}$ , pak se dá ukázat, že každý z činitelů z (1.25) musí být typu

$$\frac{1}{N} \kappa_2^3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(\dots) V_2(\dots) V_2(\dots).$$

Proto můžeme druhou sumu rozložit na součet  $\sum_{15} \sum_{\omega}$ , kde se v sumě  $\sum_{\omega}$  sčítá přes všechny možnosti, ve kterých lze vybrat  $n/2$  dvojic z  $n$  prvků. Těchto dvojic je celkem  $\frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}}$ . V sumě  $\sum_{15}$  se sčítá přes všech 15 možností, jakými se dá vybrat z daných šestic prvků  $t_1(i), t_2(i), t_3(i), t_1(j), t_2(j), t_3(j)$  dané dvojice indexů jako argumenty tří fcí  $V_2$ . Po tomto rozložení můžeme pro  $n$  sudé psát

$$\begin{aligned} N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} m_3^n &= \frac{1}{N} \sum \kappa_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(\dots) \dots V_2(\dots) + O(N^{-1}) \\ &= \sum_{\omega} \sum_{15} \left[ \frac{1}{N} \kappa_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_2(\dots) \dots V_2(\dots) \right] + O(N^{-1}) \\ &= \sum_{\omega} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{15} \kappa_2^3 V_2(\dots) \dots V_2(\dots) \right]^{\frac{n}{2}} + O(N^{-1}) \\ &= \sum_{\omega} \underbrace{\left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{E} X_i^3 X_j^3 \right]^{\frac{n}{2}}}_{(N \mathbf{var} m_3)^{\frac{n}{2}}} + O(N^{-1}) \\ &= \sum_{\omega} (N \mathbf{var} m_3)^{\frac{n}{2}} + O(N^{-1}) \\ &= \frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}} (N \mathbf{var} m_3)^{\frac{n}{2}} + O(N^{-1}). \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že pro  $k \in N_0$  platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( N^{\frac{1}{2}} m_3 \right)^{2k+1} &= N^{\frac{2k+1}{2}} \mathbf{E} m_3^{2k+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \\ \mathbf{E} \left( N^{\frac{1}{2}} m_3 \right)^{2k} &= N^{\frac{2k}{2}} \mathbf{E} m_3^{2k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{(2k)!}{(2k/2)!2^{2k/2}} \sigma_{33}^{\frac{2k}{2}}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Toto jsou však momenty normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma_{33}$ . Normální rozdělení je ale jednoznačně určeno svými momenty. Proto platí

$$N^{\frac{1}{2}} m_3 \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, \sigma_{33}) \quad (1.27)$$

pro  $N \rightarrow \infty$ . Obdobným způsobem budeme vyšetřovat asymptotickou normalitu u  $m_4$ . Začneme se střední hodnotou a s rozptylem. Pomocí (1.10) dostaneme

$$\mathbf{E}m_4 = \mathbf{E}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N X_t^4 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^N \mathbf{E}X_t^4 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^N 3R^2(0) = 3R^2(0).$$

Užitím (1.16) také dostaneme

$$\begin{aligned} \text{var } m_4 &= \mathbf{E}m_4^2 - (\mathbf{E}m_4)^2 = \mathbf{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N X_t^4\right)^2 - 9R^4(0) \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \mathbf{E}X_i^4 X_j^4 - 9R^4(0) \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \left[9R^4(0) + 72R^2(0)R^2(i-j) + 24R^4(i-j)\right] - 9R^4(0) \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \left[72R^2(0)R^2(i-j) + 24R^4(i-j)\right]. \end{aligned}$$

Z tohoto pak již plyne

$$\begin{aligned} N\text{var } m_4 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \left[72R^2(0)R^2(i-j) + 24R^4(i-j)\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{q=1-N}^{N-1} \left[72R^2(0)R^2(q) + 24R^4(q)\right] (n - |q|). \end{aligned}$$

Toto je opět *caesarovská suma*. Proto zde potom platí

$$\text{var}(N^{\frac{1}{2}}m_4) = N\text{var } m_4 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[72R^2(0)R^2(q) + 24R^4(q)\right] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{44}. \quad (1.28)$$

Dále obdobně počítejme  $n$ -té momenty náhodné veličiny  $N^{\frac{1}{2}}(m_4 - \mathbf{E}m_4)$ . Obdobným způsobem jako u  $m_3$  dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[N^{\frac{1}{2}}(m_4 - \mathbf{E}m_4)\right]^n &= N^{\frac{n}{2}}\mathbf{E}[m_4 - 3R^2(0)]^n = \\ &= N^{\frac{n}{2}}\mathbf{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N [X_t^4 - 3R^2(0)]\right\}^n = N^{-\frac{n}{2}}\sum_{s=0}^n (-1)^n \binom{n}{s} [3NR^2(0)]^s \\ &\quad \sum_{t_1=1}^N \sum_{t_2=1}^N \cdots \sum_{t_{n-s}=1}^N \mathbf{E}X_{t_1}^4 X_{t_2}^4 \cdots X_{t_{n-s}}^4, \end{aligned}$$

s konvencí—hodnota prázdného součinu je považována za 1. Potom za předpokladu normality  $e_t$  můžeme uvažovat pouze ty členy, ve kterých se 2 objevuje  $2(n-s)$ -krát. Také se dá ukázat, že se všechny členy, které odpovídají kladnému  $s$ , potom v tomto výrazu odečtou se členy odpovídající hodnotě  $s = 0$  viz [20] str. 330–331. Nechť  $q < n$  je celé číslo, potom pro hodnotu  $s = 0$  v rozvoji výrazu  $\mathbf{E}X_{t_1}^4 X_{t_2}^4 \dots X_{t_n}^4$  existují členy typu

$$\sum \kappa_2^{2n} V_2(\dots) \dots V_2(\dots) V_2(t_1, t_1) V_2(t_1, t_1) \dots V_2(t_q, t_q) V_2(t_q, t_q), \quad (1.29)$$

kde máme  $q$  stejných dvojic  $V_2$  a sčítáme přes možná uspořádání  $4(n-q)$  celých čísel  $t_1(i), t_2(i), t_3(i), t_4(i)$  pro  $i = q+1 \dots n$ . Podobně zde uvažujeme rovnost indexů  $t_1(i) = t_2(i) = t_3(i) = t_4(i) = t(i)$ . Zde se mohou čtyři různé indexy  $t_1(i), t_2(i), t_3(i), t_4(i)$  objevit v součinech dvou  $V_2$  celkem třemi způsoby. Členy tohoto typu pak můžeme vyjádřit jako

$$\left[3R^2(0)\right]^q \sum \kappa_2^{2(n-q)} V_2(\dots) \dots V_2(\dots), \quad (1.30)$$

kde jsou členy součinem celkem  $2(n-q)V_2$  a přitom je zde obsaženo celkem  $n-q$  součtů. Každý člen tohoto typu se pak objevuje v (1.29) celkem  $N^q$ -krát. Na druhou stranu pro  $1 \leq s \leq q$  uvažujeme ty členy, které odpovídají pořadím, kde má  $q-s$  dvojic  $V_2$  identické argumenty, zatímco ostatních  $n-s-(q-s) = n-q$  odpovídají právě  $2(n-q)$  funkcím  $V_2$ . Obdobnou úvahou jako u (1.30) dostáváme pro tato  $s$  členy typu

$$\left[3R^2(0)\right]^{q-s} \sum \kappa_2^{2(n-q)} V_2(\dots) \dots V_2(\dots), \quad (1.31)$$

kde se tady objevuje  $n-q$  součtů. Tyto součty se v (1.29) objevují už jenom  $N^{q-s}$ -krát. Tam se to však násobí ještě činitelem  $[3R^2(0)] N^s$ . Proto je to nakonec rovno právě typu (1.30), který se pak ještě násobí číslem  $N^q$ . Takto tedy sečteme výrazy typů (1.29) a (1.30) pro  $s = 0$  a pro  $s = 1, 2, \dots, q$ . Při součtu těchto dvou typů v celkové sumě (1.29) si uvědomme, že ve výrazu typu (1.29) je celkem  $q$  dvojic funkcí  $V_2$  s identickými argumenty. Tyto argumenty nezávisí nutně na  $t_1, t_2, \dots, t_q$ , ale na libovolné množině obsahující  $q$  indexů, které jdou vybrat z množiny  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . To jde celkem  $\binom{n}{q}$  způsoby. Podobně pro  $s = 1, 2, \dots, q$  závisí tyto dvojice indexů na množině  $t_1, t_2, \dots, t_{n-s}$ , z které zde vybíráme  $q-s$  členů. Proto zde máme celkem  $\binom{n-s}{q-s}$  členů typu (1.31). Pak je celkový koeficient výrazů (1.30) a (1.31) v (1.29) díky přenásobení koeficientem  $(-1)^s \binom{n}{s}$  roven koeficientu

$$N^q \sum_{s=0}^q (-1)^s \binom{n}{s} \binom{n-s}{q-s} = 0,$$

z lemmatu 2.3 v [20]. Po vynechání těchto členů pak dostáváme

$$N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \left[ m_4 - 3R^2(0) \right]^n = N^{-\frac{n}{2}} \sum_{t_1=1}^N \sum_{t_2=1}^N \dots \sum_{t_n=1}^N \sum \kappa_2^{2n} V_2(\dots) V_2(\dots) \dots V_2(\dots),$$

kde v sumě  $\sum$  sčítáme přes všechna pořadí  $4n$  indexů  $t_1(i), t_2(i), t_3(i), t_4(i)$  pro  $i = 1, \dots, n$  přes všechny možné argumenty  $2n$  funkcí  $V_2$  mimo pořadí, která dávají dvojice  $V_2$  se stejnými argumenty. Zde nám opět stačí uvažovat indexy  $t_1(i) = t_2(i) = t_3(i) = t_4(i) = t(i)$ . Postupujeme obdobně jako při vyšetřování  $m_3$  a pokusme se rozložit sumu  $\sum_{t_1=1}^N \sum_{t_2=1}^N \dots \sum_{t_n=1}^N$ . Jelikož jsme již vyloučili činitele dvou  $V_2$ , pak každý činitel závisející alespoň na dvou indexech  $t(i)$  je složen alespoň ze čtyř  $V_2$ . Celkový počet činitelů (z různých  $2n$  indexů)  $\gamma$  pak nebude větší než číslo  $\frac{n}{2}$ . Je-li tento počet činitelů menší než číslo  $\frac{n}{2}$ , potom odpovídající pořadí argumentů dává členy, které jsou pak omezeny výrazem

$$N^{\gamma - \frac{n}{2}} \kappa_2^{2n} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| \right)^{4n}.$$

Toto je pak řádu  $O(N^{-1})$  pro  $n$  sudé a řádu  $O(N^{-\frac{1}{2}})$  pro  $n$  liché. To je proto, že  $\gamma$  je celé číslo. Tyto členy jsou řádu alespoň  $O(N^{-\frac{1}{2}})$ . Je-li počet činitelů přesně roven číslu  $\frac{n}{2}$ , pak můžeme ukázat, že je každý z nich roven typu, který je složen přesně ze čtyř funkcí  $V_2$ . Toto je typ

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{i=j}^N \kappa_2^4 V_2(\dots) V_2(\dots) V_2(\dots) V_2(\dots),$$

kde se koeficient  $N^{-\frac{n}{2}}$  rozložil mezi právě takovýchto  $\frac{n}{2}$  činitelů. Takto můžeme uvažovat pouze tyto členy, neboť ostatní jsou konečné kombinace řádu alespoň  $O(N^{-\frac{1}{2}})$ . Sumu  $\sum$  pak můžeme rozdělit na dvě sumy a postupovat obdobným způsobem jako u  $m_3$ . Pak pro  $n$  sudé dostaneme

$$N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \left[ m_4 - 3R^2(0) \right]^n = \frac{n!}{(n/2)! 2^{n/2}} (N \text{var } m_4) + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$

Pro  $k \in N_0$  pak tedy platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ N^{\frac{1}{2}} \left[ m_4 - 3R^2(0) \right] \right\}^{2k+1} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \\ \mathbf{E} \left\{ N^{\frac{1}{2}} \left[ m_4 - 3R^2(0) \right] \right\}^{2k} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{(2k)!}{(2k/2)! 2^{2k/2}} \sigma_{44}^{\frac{2k}{2}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Toto jsou momenty normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a s rozptylem  $\sigma_{44}$ . Zde opět uijeme toho, že je normální rozdělení jednoznačně určeno svými momenty. Proto platí

$$N^{\frac{1}{2}} [m_4 - 3R^2(0)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_{44}). \quad (1.33)$$

### 1.3 Asymptotické rozdělení dvojic momentů $(m_1, m_3)'$ a $(m_2, m_4)'$

Dále ještě vyšetřujeme asymptotické sdružené rozdělení veličin  $(m_1, m_3)$ ,  $(m_2, m_4)$ . Užitím (1.13) dostaneme

$$\begin{aligned} N\text{cov}(m_1, m_3) &= N\text{cov}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_j^3\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \text{cov}(X_i, X_j^3) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \left(\mathbf{E}X_i X_j^3 - \underbrace{\mathbf{E}X_i}_0 \underbrace{\mathbf{E}X_j^3}_0\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \mathbf{E}X_i X_j^3 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N 3R(0)R(i-j) = \frac{1}{N}\sum_{q=1-N}^{N-1} 3R(0)R(q)(N-|q|). \end{aligned}$$

Zde zase vidíme, že toto je řada s částečnými *caesarovskými součty*. Proto platí

$$N\text{cov}(m_1, m_3) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 3R(0) \sum_{q=-\infty}^{\infty} R(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{13}. \quad (1.34)$$

Dále vyšetřeme asymptotické sdružené rozdělení veličin  $(N^{\frac{1}{2}}m_1, N^{\frac{1}{2}}m_3)$ . K tomu budeme vyšetřovat jejich smíšené momenty řádu  $n = \lambda + \mu$  tj.  $N^{\frac{n}{2}}\mathbf{E}(m_1^\lambda m_3^\mu)$ . Použitím vzorce (1.6) a podobnými úvahami jako dříve dostaneme

$$N^{\frac{n}{2}}\mathbf{E}(m_1^\lambda m_3^\mu) = N^{-\frac{n}{2}} \sum_{t_1=1}^N \dots \sum_{t_\lambda=1}^N \sum_{u_1=1}^N \dots \sum_{u_\mu=1}^N \mathbf{E}X_{t_1} X_{t_2} \dots X_{t_\lambda} X_{u_1} \dots X_{u_\mu}.$$

Předpokládáme-li opět normalitu  $e_t$ , pak podle (1.6) opět stačí v rozkladu  $\mathbf{E}X_{t_1} X_{t_2} \dots X_{t_\lambda} X_{u_1} \dots X_{u_\mu}$  uvažovat jen ty členy, kde se v dělení objevuje číslo 2 právě  $(\lambda + 3\mu)$ -krát. Pokud je číslo  $n = \lambda + \mu$  liché, potom je také liché číslo  $\lambda + \mu + 2\mu = \lambda + 3\mu$ . V tomto případě zde takové dělení neexistuje.

Takové dělení opět existuje jen pro  $n$  sudé, a tak zde můžeme uvažovat pouze výraz

$$N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E}(m_1^\lambda m_3^\mu) = N^{-\frac{n}{2}} \sum_{t_1=1}^N \dots \sum_{t_\lambda=1}^N \sum_{u_1=1}^N \dots \sum_{u_\mu=1}^N \kappa_2^{\frac{\lambda+3\mu}{2}} V_2(\dots) \dots V_2(\dots), \quad (1.35)$$

kde se v sumě  $\sum$  sčítá přes všechny možné indexy  $t(i), u_1(j), u_2(j), u_3(j)$  pro  $i = 1, \dots, \lambda$  a  $j = 1, \dots, \mu$ . Celkem zde tedy máme  $\lambda + 3\mu$  indexů jako argumenty funkcí  $V_2$ . Zde nám pak bude stačit počítat s indexy  $u_1(j) = u_2(j) = u_3(j) = u(j)$ . Pro další počítání rozložme sumu

$$\sum_{t_1=1}^N \sum_{t_2=1}^N \dots \sum_{t_\lambda=1}^N \sum_{u_1=1}^N \sum_{u_2=1}^N \dots \sum_{u_\mu=1}^N$$

na činitele, které budou záviset pouze na  $t_i$  a  $u_j$ . Pokud takto sumu rozložíme, potom počet činitelů  $\gamma$ , které závisejí na více než dvou  $t_i$  nebo  $u_j$ , nebude opět větší než  $\frac{n}{2}$ . Obdobným způsobem jako v jednorozměrném případě jsou pak tyto členy řádu  $O(N^{-1})$ , neboť  $\gamma$  je celé číslo. Zabývejme se tedy nyní součiny činitelů, ve kterých nastane rovnost tj.  $\gamma = \frac{n}{2}$ . Toto se týká takových součinů z činitelů, které závisí právě na dvou indexech  $t_i$  nebo na dvou indexech  $u_j$ . Toto mohou být činitelé typů

$$(1a) \quad \frac{1}{N} \kappa_2 \sum_{t_i=1}^N \sum_{t_j=1}^N V_2(\dots) \dots \text{zde závisí na dvou indexech } t_i;$$

$$(2a) \quad \frac{1}{N} \kappa_2^2 \sum_{t_i=1}^N \sum_{u_j=1}^N V_2(\dots) V_2(\dots) \dots \text{zde závisí na jednom } t_i \text{ a jednom } u_j;$$

$$(3a) \quad \frac{1}{N} \kappa_2^3 \sum_{u_i=1}^N \sum_{u_j=1}^N V_2(\dots) \dots \text{zde závisí na dvou indexech } u_j.$$

Nechť je výraz (1.35) složen z  $\alpha, \beta, \gamma$  členů typů (1a), (2a), (3a). Elementární úvahou se dá ukázat, že  $2\alpha + \beta = \lambda$  a  $2\gamma + \beta = \mu$  a že je celkem  $\frac{\lambda!}{2^\alpha \alpha! \beta!} \frac{\mu!}{2^\gamma \gamma! \beta!} \beta!$  =  $\frac{\lambda! \mu! 2^\beta}{2^{\frac{n}{2}} \alpha! \beta! \gamma!}$  způsobů, kde může být  $\lambda$  čísel  $t_i$  a  $\mu$  čísel  $u_j$  spojeno do požadovaných tvarů (1a), (2a) a (3a). Dosazením těchto členů do (1.35) dostaneme

$$\begin{aligned} & N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E}(m_1^\lambda m_3^\mu) \\ &= \lambda! \mu! 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{2\alpha+\beta=\lambda} \sum_{2\gamma+\beta=\mu} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} (N \text{var } m_1)^\alpha 2N [\text{cov}(m_1, m_3)]^\beta (N \text{var } m_3)^\gamma. \end{aligned}$$

Limitním přechodem potom podle (1.20), (1.34) a (1.24) dostaneme

$$N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E}(m_1^\lambda m_3^\mu) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda! \mu! 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{2\alpha+\beta=\lambda} \sum_{2\gamma+\beta=\mu} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \sigma_{11}^\alpha (2\sigma_{13})^\beta \sigma_{33}^\gamma.$$

Toto jsou však momenty dvourozměrného normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a s rozptyly  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$  a kovariancí  $\sigma_{13}$ . Toto rozdělení jakožto normální je momenty jednoznačně určeno. Proto jsme za těchto předpokladů ukázali

$$N^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \right).$$

Dále ještě vyšetříme sdružené asymptotické rozdělení dvojice  $N^{\frac{1}{2}}(m_2 - \mathbf{E}m_2, m_4 - \mathbf{E}m_4)$ . Užitím (1.15) dostaneme

$$\begin{aligned} N\text{cov}(m_2, m_4) &= N\text{cov} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j^4 \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{cov}(X_i^2, X_j^4) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{E}X_i^2 X_j^4 - \mathbf{E}X_i^2 \mathbf{E}X_j^4) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [3R^3(0) + 12R(0)R^2(i-j) - R(0)3R^2(0)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [12R(0)R^2(i-j)] \\ &= 12R(0) \frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} R^2(q) (N - |q|). \end{aligned}$$

Toto je opět částečný součet *caesarovské konvergentní sumy*. Proto platí

$$N\text{cov}(m_2, m_4) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 12R(0) \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^2(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{24}. \quad (1.36)$$

Pro asymptotickou normalitu musíme počítat obecně se smíšenými momenty řádu  $n = \lambda + \mu$  tj.  $N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \{ [m_2 - R(0)]^\lambda [m_4 - 3R^2(0)]^\mu \}$ . Počítáme tedy  $n$ -tý smíšený moment náhodné veličiny  $N^{\frac{1}{2}}(m_2 - \mathbf{E}m_2)(m_4 - \mathbf{E}m_4) = N^{\frac{1}{2}} [m_2 - R(0)] [m_4 - 3R^2(0)]$ . Zde potom vychází

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ N^{\frac{n}{2}} [m_2 - R(0)] [m_4 - 3R^2(0)] \}^n &= N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \{ [m_2 - R(0)]^\lambda [m_4 - 3R^2(0)]^\mu \} \\ &= N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \left\{ \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [X_t^2 - R(0)] \right]^\lambda \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [X_t^4 - 3R^2(0)] \right]^\mu \right\} \\ &= N^{-\frac{n}{2}} \mathbf{E} \left\{ \left[ \sum_{s=0}^{\lambda} (-1)^s \binom{\lambda}{s} R^s(0) N^s \left( \sum_{t=1}^N X_t^2 \right)^{\lambda-s} \right] \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{r=0}^{\mu} (-1)^r \binom{\mu}{r} [3R^2(0)]^r N^r \left( \sum_{u=1}^N X_u^4 \right)^{\mu-r} \right\} \\
&= N^{-\frac{n}{2}} \sum_{t_1, t_2, \dots, t_\lambda=1, u_1, u_2, \dots, u_\mu=1}^N (-1)^{s+r} \binom{\lambda}{s} \binom{\mu}{r} 3^r R^{s+2r}(0) N^{s+r} \\
& \quad \mathbf{E} X_{t_1}^2 X_{t_2}^2 \dots X_{t_{\lambda-s}}^2 X_{u_1}^4 X_{u_2}^4 \dots X_{u_{\mu-r}}^4.
\end{aligned}$$

Pro další výpočet použijeme vzorec (1.6), ve kterém zde máme celkem  $2\lambda+4\mu$  činitelů. Dá se také ukázat (obdobně jako v [20] str. 335–336), že členy pro  $s \geq 0, r \geq 0, s+r \geq 0$  se odečtou s některým z členů pro  $s=0, r=0$ . Nechť  $0 \leq q \leq 2\lambda$  a  $0 \leq q \leq 4\mu$  je daná dvojice čísel, že  $p+q > 0$ . Potom podle (1.6) dostaneme, že ve výrazu

$$\mathbf{E} X_{t_1}^2 X_{t_2}^2 \dots X_{t_\lambda}^2 X_{u_1}^4 X_{u_2}^4 \dots X_{u_\mu}^4$$

jsou členy tvaru

$$\kappa_2^{\lambda-q} \kappa_2^{2\mu-2p} R^{q+2\mu}(0) 3^p \sum V_2(\dots) V_2(\dots) \dots V_2(\dots) \quad (1.37)$$

pro indexy, které dávají  $q$  funkcí  $V_2(t_i, t_i)$  a  $p$  funkcí  $V_2(u_j, u_j) V_2(u_j, u_j)$ . V sumě  $\sum$  sčítáme přes zbývajících  $2\lambda + 4\mu - 2q - 4p$  indexů jako argumenty pro  $\lambda + 2\mu - q - 2p$  funkcí  $V_2$ . Podobné členy pak můžeme vyjádřit pro hodnoty  $0 \leq s \leq q$  a  $0 \leq r \leq p$ , že  $r+s > 0$ . Tady pak uvažujeme ta pořadí, která dávají  $q-s$  činitelů  $V_2(t_i, t_i)$  a  $p-r$  činitelů  $V_2(u_j, u_j) V_2(u_j, u_j)$ . Tyto členy jsou pak obdobně tvaru

$$\kappa_2^{\lambda-q} \kappa_2^{2\mu-2p} R^{q+2p-s-2r}(0) 3^{p-r} \sum V_2(\dots) V_2(\dots) \dots V_2(\dots). \quad (1.38)$$

Když dáme jednotlivé tvary v (1.37) a (1.38) dohromady, potom pro tato  $s$  můžeme obdobným způsobem jaku u  $m_1$  a  $m_3$  dostat koeficient

$$N^{q+p} \sum_{s=0}^q \sum_{r=0}^p (-1)^{s+r} \binom{\lambda}{s} \binom{\mu}{r} \binom{\lambda-s}{q-s} \binom{\mu-r}{p-r} = 0.$$

Tato rovnost také platí z lemmatu 2.3 v [20]. Po odečtení těchto členů můžeme tedy napsat

$$\begin{aligned}
& N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \left\{ [m_2 - R(0)]^\lambda [m_4 - 3R^2(0)]^\mu \right\} \\
&= N^{-\frac{n}{2}} \sum_{t_1, t_2, \dots, t_\lambda=1, u_1, u_2, \dots, u_\mu=1}^N \kappa_2^{\lambda+2\mu} \sum V_2(\dots) V_2(\dots) \dots V_2(\dots),
\end{aligned}$$

kde se v sumě  $\sum$  sčítá přes indexy  $t_1(i), t_2(i), u_1(j), u_2(j), u_3(j), u_4(j)$  pro  $i = 1, 2, \dots, \lambda$  a  $j = 1, 2, \dots, \mu$ . Celkem tedy máme  $2\lambda + 4\mu$  uspořádání pro argumenty  $\lambda + 2\mu$  funkcí  $V_2$ . Výjimku tvoří ta pořadí, která dávají stejné hodnoty  $t_i$  tj., která dávají  $V_2(t, t)$ , nebo ta pořadí, která dávají stejné hodnoty  $u_j$  tj., která dávají  $V_2(u, u)V_2(u, u)$ . Podobně jako v případě  $m_1$  a  $m_3$  se ukáže, že je zde mnoho členů, které jsou řádu alespoň  $O(N^{-\frac{1}{2}})$  (s méně než  $\frac{n}{2}$  činiteli). Jedinou výjimkou pak zde jsou taková pořadí indexů, která dávají přesně  $\frac{n}{2}$  činitelů. To je v případě, kdy každý z činitelů závisí přesně na dvou hodnotách indexů  $t_i$  nebo na dvou hodnotách  $u_j$ . Tyto činitele se dají vyjádřit jako jeden z následujících typů

- (1b)  $\frac{1}{N} \kappa_2^2 \sum_{t_i=1}^N \sum_{t_j=1}^N V_2(\dots)V_2(\dots) \dots$  zde závisí na dvou indexech  $t_i$ ;
- (2b)  $\frac{1}{N} \kappa_2^3 \sum_{t_i=1}^N \sum_{u_j=1}^N V_2(\dots)V_2(\dots)V_2(\dots) \dots$  zde závisí na jednom  $t_i$  a jednom  $u_j$ ;
- (3b)  $\frac{1}{N} \kappa_2^4 \sum_{u_i=1}^N \sum_{u_j=1}^N V_2(\dots)V_2(\dots)V_2(\dots)V_2(\dots) \dots$  zde závisí na dvou indexech  $u_j$ .

Nyní tedy můžeme uvažovat pouze členy těch typů, které jsou složené z  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  činitelů typů (1b), (2b), (3b). Uvědomíme-li si zde navíc, že pořadí, které dává identické argumenty ve  $V_2(\dots)$  s indexy  $t_i$  resp. dává identické argumenty ve dvojicích  $V_2(\dots)V_2(\dots)$  z indexů  $u_j$ , jsou vyloučeny, potom můžeme obdobně jako u  $m_1$  a  $m_3$  dostat

$$\begin{aligned} & N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \left\{ [m_2 - R(0)]^\lambda [m_4 - 3R^2(0)]^\mu \right\} \\ &= \lambda! \mu! 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{2\alpha+\beta=\lambda} \sum_{2\gamma+\beta=\mu} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} (N \mathbf{var} m_2)^\alpha [2N \mathbf{cov}(m_2, m_4)]^\beta (N \mathbf{var} m_4)^\gamma. \end{aligned}$$

Limitním přechodem potom podle (1.22), (1.36) a (1.28) dostaneme

$$\begin{aligned} & N^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \left\{ [m_2 - R(0)]^\lambda [m_4 - 3R^2(0)]^\mu \right\} \\ & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda! \mu! 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{2\alpha+\beta=\lambda} \sum_{2\gamma+\beta=\mu} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \sigma_{22}^\alpha (2\sigma_{24})^\beta \sigma_{44}^\gamma. \end{aligned}$$

Toto jsou opět  $n$ -té momenty dvourozměrného normálního rozdělení, které je jimi určeno. Ukázali jsme tedy, že platí

$$N^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} m_2 - R(0) \\ m_4 - 3R^2(0) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \mathbf{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{42} & \sigma_{44} \end{pmatrix} \right).$$

## 1.4 Asymptotická rozdělení prvních čtyř centrálních momentů

V některých případech budeme ještě potřebovat znát asymptotická rozdělení výběrových centrálních momentů. Obecně to jsou náhodné veličiny

$$M_r = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^r = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - m_1)^r \text{ pro } r = 2, 3, \dots$$

Snadným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} M_2 &= m_2 - m_1^2, \\ M_3 &= m_3 - 3m_2m_1 - m_1^3, \\ M_4 &= m_4 - 4m_3m_1 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4. \end{aligned}$$

Nyní využijme těchto vztahů a spočtěme

$$N^{\frac{1}{2}} [M_2 - R(0)] = N^{\frac{1}{2}} [m_2 - R(0)] - N^{\frac{1}{2}} m_1^2, \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}} [M_4 - 3R^2(0)] &= N^{\frac{1}{2}} [m_4 - 3R^2(0)] \\ &\quad - 4N^{\frac{1}{2}} m_1 m_3 + 6N^{\frac{1}{2}} m_1^2 m_2 - 3N^{\frac{1}{2}} m_1^4, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}} M_3 &= N^{\frac{1}{2}} m_3 - 3N^{\frac{1}{2}} m_1 m_2 + 2N^{\frac{1}{2}} m_1^3 \\ &= N^{\frac{1}{2}} m_3 - 3N^{\frac{1}{2}} m_1 R(0) \\ &\quad - 3N^{\frac{1}{2}} m_1 [m_2 - R(0)] + 2N^{\frac{1}{2}} m_1^3. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Dále uijeme vztahy (1.26) a (1.32). Tyto vztahy vlastně říkají, že  $n$ -té momenty  $N^{\frac{1}{2}} (m_r - \mathbf{E}m_r)$  konvergují k (nějakým konečným) momentům normálního rozdělení pro  $r = 3, 4$ . Toto bychom také mohli nahlédnout pro  $r = 2$ . Proto platí  $\mathbf{E} (m_r - \mathbf{E}m_r)^n = O(N^{-\frac{n}{2}})$  nebo také

$$\begin{aligned} \mathbf{E} m_r^{2n} &= O(N^{-n}) \text{ pro } r = 3, \\ \mathbf{E} (m_r - \mathbf{E}m_r)^{2n} &= O(N^{-n}) \text{ pro } r = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Tohoto dále uijeme pro určení limitního rozdělení u (1.39) a (1.40). Zde budeme užívat *Čebyševovu* či *Schwarzovu nerovnost*. Také uijeme *Cramérovu-Sluckého větu* (viz také [20]). Takto postupně dostáváme

$$P(N^{\frac{1}{2}} m_1^2 > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} N \text{var } m_1^2 = \frac{1}{\epsilon^2} N [\mathbf{E} m_1^4 - (\mathbf{E} m_1^2)^2]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\epsilon^2} N \left\{ O(N^{-2}) - [O(N^{-1})]^2 \right\} = \frac{1}{\epsilon^2} N O(N^{-2}) \\
&= O(N^{-1}).
\end{aligned}$$

Tento člen tedy konverguje k 0 s rostoucím  $N$ . Proto také tato pravděpodobnost konverguje k nule. Ukázali jsme, že poslední člen pravé strany u (1.39) konverguje v pravděpodobnosti k nule. Užitím *Cramérový-Sluckého věty* dostaneme

$$N^{\frac{1}{2}} [M_2 - R(0)] \approx N^{\frac{1}{2}} [m_2 - R(0)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_{22}). \quad (1.43)$$

Symbolom  $\approx$  zde budeme rozumět shodná asymptotické rozdělení. Podobně můžeme postupovat dále u (1.40) a dostaneme

$$\begin{aligned}
P\left(N^{\frac{1}{2}} m_1 m_3 > \epsilon\right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} N \text{var}(m_1 m_3) \leq \frac{1}{\epsilon^2} N \mathbf{E} m_1^2 m_3^2 \leq \frac{1}{\epsilon^2} N \sqrt{\mathbf{E} m_1^4 \mathbf{E} m_3^4} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2} N \sqrt{O(N^{-2}) O(N^{-2})} = \frac{1}{\epsilon^2} N O(N^{-2}) = O(N^{-1}).
\end{aligned}$$

Podobným způsobem se dá ukázat, že ostatní dva členy v (1.40) konvergují podle pravděpodobnosti k 0. Užitím *Cramérový-Sluckého věty* opět dostaneme

$$N^{\frac{1}{2}} [M_4 - 3R^2(0)] \approx N^{\frac{1}{2}} [m_4 - 3R^2(0)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_{44}). \quad (1.44)$$

Podobně bychom mohli postupovat také u  $M_3$ . Poslední dva členy opět konvergují podle pravděpodobnosti k nule. Dále užijeme asymptotickou normalitu prvních dvou členů z (1.41) a asymptotické normality (1.21) a (1.27). Užijeme tedy tyto výsledky

$$N^{\frac{1}{2}} m_3 \xrightarrow{D} N(0, \sigma_{33}), \quad -3N^{\frac{1}{2}} m_1 R(0) \xrightarrow{D} N(0, 9R^2(0)\sigma_{11}).$$

Celkový rozptyl rozdílu (resp. součtu) těchto dvou náhodných veličin tedy asymptoticky bude

$$\begin{aligned}
R &= \sigma_{33} + 9R^2(0)\sigma_{11} - 2 \cdot 3R(0)\sigma_{13} \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} [9R^2(0)R(q) + 6R^3(q)] + 9R^2(0) \sum_{q=-\infty}^{\infty} R(q) \\
&\quad - 6R(0)3R(0) \sum_{q=-\infty}^{\infty} R(q) \\
&= 6 \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^3(q).
\end{aligned}$$

Opětovným užitím *Cramérový-Sluckého věty* dostaneme

$$N^{\frac{1}{2}}M_3 \xrightarrow{D} N\left(0, 6 \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^3(q)\right). \quad (1.45)$$

Dále ještě použijme (1.42) a také vztahů (1.39), (1.41) a (1.40). Z jejich tvarů bychom pak použitím *Minkovského* a *Hölderovy nerovnosti* mohli obdobným způsobem dostat, že jejich momenty konvergují k příslušným momentům normálního rozdělení. Stejným způsobem bychom pak dostali

$$E(M_r - EM_r)^{2n} = O(N^{-n}) \text{ pro } r = 2, 3, 4. \quad (1.46)$$

## 1.5 Užití na testování normality

Nyní uijeme daných výsledků pro konkrétnější testy. K tomu budeme používat *šikmost* a *špičatost*. Začneme tedy nejdříve se *šikmostí*, pro kterou také z (1.7) a (1.8) platí

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} EX_t^3 (EX_t^2)^{-\frac{3}{2}} = \kappa_3 V_3(0, 0, 0) R^{-\frac{3}{2}}(0).$$

Autokorelační koeficienty označme následovně

$$\rho(q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R(q)}{R(0)} \text{ pro } q \in Z.$$

Pro odhad šikmosti uijme statistiku

$$G_1 \stackrel{\text{def}}{=} M_3 M_2^{-\frac{3}{2}}. \quad (1.47)$$

Toto je její konzistentní odhad, neboť je to spojitá funkce (obecných) výběrových momentů, které konvergují k příslušným momentům daného procesu. Ze *zákona velkých čísel* konverguje  $M_2$  v pravděpodobnosti k  $EM_2 = R(0)$ . Proto také  $M_2^{-\frac{3}{2}}$  konverguje v pravděpodobnosti k  $R^{-\frac{3}{2}}(0)$ . Užitím *Cramérový-Sluckého věty* a (1.45) je

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}}G_1 &= N^{\frac{1}{2}}M_3M_2^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{D} R^{-\frac{3}{2}}(0)N\left(0, 6 \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^3(q)\right) \\ &= N\left(0, 6 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{R(q)}{R(0)}\right)^3\right) = N\left(0, 6 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho^3(q)\right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Nyní vyšetříme momenty náhodné veličiny  $N^{\frac{1}{2}}G_1$ . K tomu, abychom ukázali, že momenty této veličiny existují a konvergují k momentům tohoto normálního rozdělení, stačí podle [20] věty 9.3 ukázat, že všechny tyto momenty jsou omezeny konstantami, které nezávisí na  $N$ . Počítejme

$$\begin{aligned}
|G_1| &= N^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{t=1}^N (X_t - m_1)^3 \left[ \sum_{s=1}^N (X_s - m_1)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right| \\
&\leq N^{\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^N \left[ (X_t - m_1)^2 \left[ \sum_{s=1}^N (X_s - m_1)^2 \right]^{-1} \right]^{\frac{3}{2}} \\
&\leq N^{\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^N \left[ (X_t - m_1)^2 \left[ \sum_{s=1}^N (X_s - m_1)^2 \right]^{-1} \right] = N^{\frac{1}{2}}. \quad (1.49)
\end{aligned}$$

Označme  $A = \left\{ M_2 > \frac{R_0}{2} \right\}$  a necht'  $\bar{A}$  je jeho doplněk. Potom podle *Markovovy nerovnosti* a podle (1.46) platí

$$\begin{aligned}
P(\bar{A}) &= P \left[ M_2 \leq \frac{R(0)}{2} \right] = P \left[ R(0) - M_2 \geq \frac{R(0)}{2} \right] \\
&\leq P \left[ |M_2 - R(0)| \geq \frac{R(0)}{2} \right] \leq 2^{4n} R^{-4n}(0) \underbrace{\mathbf{E} [M_2 - R(0)]^{4n}}_{O(N^{-2n})} \\
&= O(N^{-2n}). \quad (1.50)
\end{aligned}$$

Podle této nerovnosti a podle (1.49), (1.47) a (1.46) je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N^{\frac{1}{2}}G_1)^{2n} &= \int_A N^n \underbrace{G_1^{2n}}_{M_3^{2n} M_2^{-3n}} dP + \int_{\bar{A}} N^n G_1^{2n} dP \\
&\leq \int_A N^n M_3^{2n} M_2^{-3n} dP + \int_{\bar{A}} N^n N^n dP \\
&\leq \int_A N^n M_3^{2n} \left[ \frac{R(0)}{2} \right]^{-3n} dP + \int_{\bar{A}} N^{2n} dP \\
&\leq N^n 2^{3n} R^{-3n}(0) \underbrace{\mathbf{E} M_3^{2n}}_{O(N^{-n})} + N^{2n} \underbrace{P(\bar{A})}_{O(N^{-2n})} = O(1).
\end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že všechny momenty náhodné veličiny  $N^{\frac{1}{2}}G_1$  jsou omezeny konstantami, které nezávisí na  $N$ . Proto všechny momenty této veličiny existují a konvergují k příslušným momentům normálního rozdělení.

Pro další testy ještě obvykle užíváme *špičatost*, která je definována jako

$$\Gamma_2 = \mathbb{E}X_t^4 (\mathbb{E}X_t^2)^{-2} - 3 = \frac{\mathbb{E}X_t^4 - 3(\mathbb{E}X_t^2)^2}{(\mathbb{E}X_t^2)^2}.$$

Ze stejného důvodu jako u (1.47) je statistika

$$G_2 = M_4 M_2^{-2} - 3 = \frac{M_4 - 3M_2^2}{M_2^2} \quad (1.51)$$

jejím konzistentním odhadem. Dále počítejme

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}}(M_4 - 3M_2^2) &= N^{\frac{1}{2}} [M_4 - 3R^2(0) - 6M_2R(0) + 6R^2(0)] \\ &\quad - N^{\frac{1}{2}} [3M_2^2 - 6R(0)M_2 + 3R^2(0)] \\ &= N^{\frac{1}{2}} \{M_4 - 3R^2(0) - 3[M_2 - R(0)]2R(0)\} \\ &\quad - 3N^{\frac{1}{2}} [M_2 - R(0)]^2. \end{aligned}$$

Dle (1.46) jde poslední člen podle pravděpodobnosti k nule. Po použití *Cramérovoy-Sluckého věty* nám tedy stačí vyšetřit limitní rozdělení náhodné veličiny  $N^{\frac{1}{2}} \{M_4 - 3R^2(0) - 3[M_2 - R(0)]2R(0)\}$ . Podle (1.43) a (1.44) platí

$$N^{\frac{1}{2}} [M_2 - R(0)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_{22}), \quad N^{\frac{1}{2}} [M_4 - 3R^2(0)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_{44}).$$

Užitím těchto výsledků dostaneme

$$-6R(0) [M_2 - R(0)] \xrightarrow{D} N(0, 36R^2(0)\sigma_{22}).$$

Proto má náhodná veličina

$$N^{\frac{1}{2}} [M_4 - 3R^2(0)] - 6R(0) [M_2 - R(0)]$$

asymptoticky normální rozdělení s rozptylem, který je podle (1.22), (1.28) a (1.36) roven

$$\begin{aligned} R &= \sigma_{44} - 2 \cdot 6R(0)\sigma_{24} + 36R^2(0)\sigma_{22} \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} [72R^2(0)R^2(q) + 24R^4(q)] - 12R(0)12R(0) \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^2(q) \\ &\quad + 36R^2(0)2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^2(q) \\ &= 24 \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^4(q). \end{aligned}$$

Dále zde využijeme, že  $M_2$  je konzistentním odhadem  $R(0)$ . Proto je také  $M_2^2$  konzistentním odhadem  $R^2(0)$ . Použitím předešlého rozptylu je pomocí *Cramérový-Sluckého věty*

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}}G_2 &\xrightarrow{D} \frac{1}{R^2(0)}N\left(0, 24 \sum_{q=-\infty}^{\infty} R^4(q)\right) = N\left(0, 24 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\frac{R(q)}{R(0)}\right]^4\right) \\ &= N\left(0, 24 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho^4(q)\right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Abychom ukázali, že dané momenty této veličiny konvergují k momentům tohoto normálního rozdělení, uijeme opět větu 9.3 z [20] a ukážeme, že momenty náhodné veličiny  $N^{\frac{1}{2}}G_2$  jsou omezeny konstantami, které nezávisí na  $N$ . Začneme opět s  $G_2$ . Z její definice (1.51) je  $|G_2| \leq \max(M_4M_2^{-2}, 3)$ . Abychom ukázali, že je  $|G_2|$  menší než nějaké („veliké“)  $N$ , stačí toto ukázat pro první argument maxima. Obdobně jako u  $G_1$  počítejme

$$\begin{aligned} M_4M_2^{-2} &= N \left| \sum_{t=1}^N (X_t - m_1)^4 \left[ \sum_{s=1}^N (X_s - m_1)^2 \right]^{-2} \right| \\ &= N \sum_{t=1}^N \left\{ (X_t - m_1)^2 \left[ \sum_{s=1}^N (X_s - m_1)^2 \right]^{-1} \right\}^2 \\ &\leq N \sum_{t=1}^N \left\{ (X_t - m_1)^2 \left[ \sum_{s=1}^N (X_s - m_1)^2 \right]^{-1} \right\} = N. \end{aligned}$$

Proto platí

$$|G_2| \leq N \text{ pro } N \geq 3. \quad (1.53)$$

Užitím *Markovovy nerovnosti* dostaneme podobně jako v (1.50), že platí

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P\left[M_2 \leq \frac{R(0)}{2}\right] = P\left[R(0) - M_2 \geq \frac{R(0)}{2}\right] \\ &\leq P\left[|M_2 - R(0)| \geq \frac{R(0)}{2}\right] \leq 2^{6n} R^{-6n}(0) \underbrace{\mathbf{E}[M_2 - R(0)]^{6n}}_{O(N^{-3n})} \\ &= O(N^{-3n}). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Potom je podle (1.53), (1.54) a (1.46) splněna nerovnost

$$\mathbf{E}(N^{\frac{1}{2}}G_2)^{2n} = \int_A N^n \underbrace{G_2^{2n}}_{(M_4 - 3M_2^2)^{2n} M_2^{-4n}} dP + \int_{\bar{A}} N^n G_2^{2n} dP$$



$$\begin{aligned}
&\leq \int_A N^n (M_4 - 3M_2^2)^{2n} M_2^{-4n} dP + \int_A N^n N^{2n} dP \\
&\leq \int_A N^n (M_4 - 3M_2^2)^{2n} \left[ \frac{R(0)}{2} \right]^{-4n} dP + \int_A N^{3n} dP \\
&\leq N^n 2^{4n} R^{-4n}(0) \underbrace{(M_4 - 3M_2^2)^{2n}}_{O(N^{-n})} + N^{3n} \underbrace{P(\bar{A})}_{O(N^{-3n})} = O(1).
\end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že momenty  $N^{\frac{1}{2}}G_2$  konvergují k momentům příslušného normálního rozdělení. Pro test normality se tedy mohou užít testové statistiky

$$\tilde{G}_1 = \frac{G_1}{\sqrt{\text{var } G_1}}, \tilde{G}_2 = \frac{G_2}{\sqrt{\text{var } G_2}}.$$

Podle (1.48) a (1.52) platí

$$\text{var } G_1 = \frac{1}{N} 6 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho^3(q), \text{var } G_2 = \frac{1}{N} 24 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho^4(q).$$

Za platnosti normality budou mít tyto statistiky  $\tilde{G}_1$  a  $\tilde{G}_2$  pro „velké“  $N$  přibližně normované normální rozdělení. Označme  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  jako kritickou hodnotu (na hladině  $\alpha$ ), která odpovídá  $1 - \frac{\alpha}{2}$  kvantilu normovaného normálního rozdělení. Statistika  $\tilde{G}_1$  se používá proti alternativě s nenulovou šikmostí, s kterou zamítáme normalitu (na hladině  $\alpha$ ) pro  $|\tilde{G}_1| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$ . Statistiku  $\tilde{G}_2$  pak můžeme obdobně použít proti alternativě s nenulovou špičatostí. Zkusme také test založit na šikmosti a špičatosti. Pro „velké“  $N$  by se dalo ukázat, že jsou  $\tilde{G}_1$  a  $\tilde{G}_2$  asymptoticky nezávislé. Potom používáme statistiku  $\tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2$ , pro kterou pak platí

$$\tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2 \xrightarrow{D} \chi_2^2.$$

Nyní uvedeme numerický příklad, který je převzatý z [18]. Otestujme normalitu pro čtyři Kendallový řady o  $N = 500$  pozorováních, které byly sepsány v [16]. Nechť máme model

$$X_{t+3} + \alpha_1 X_{t+2} + \alpha_2 X_{t+1} + \alpha_3 X_t = e_{t+3},$$

kde  $e_t$  mají dle Kendalla normální rozdělení. Číselné výsledky zapišme do této tabulky.

	Řada 10	Řada 12	Řada 14	Řada 16
$\alpha_1$	-1.80	-1.60	-1.40	-1.20
$\alpha_2$	1.27	1.05	0.83	0.61
$\alpha_3$	-0.35	-0.25	-0.15	-0.05
$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho^3(q)$	3.104	2.464	2.133	1.939
$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho^4(q)$	2.678	2.144	1.871	1.683
var $G_1$	0.03725	0.02957	0.02560	0.02327
var $G_2$	0.12854	0.10291	0.08981	0.08078
$G_1$	-0.1758	0.2176	0.0232	0.0293
$G_2$	-0.4413	0.6821	0.1276	-0.3533
$\tilde{G}_1$	-0.9109	1.2651	0.1450	0.1921
$\tilde{G}_2$	-1.2310	2.1263	0.4258	-1.2431
$\tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2$	2.34	6.12	0.20	1.58

Z této tabulky pak vidíme, že normalitu bychom na hladině 0.05 zamítli pouze u řady 12. Vidíme totiž, že pouze u této řady je  $|\tilde{G}_2| \geq 1.96$ , což je kritická hodnota normovaného normálního rozdělení na hladině 0.05. Proti alternativě nenulové šikmosti bychom však hypotézu o normalitě nikde nezamítli. Také vidíme, že  $\tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2 \geq 5.99$ , což je kritická hodnota  $\chi_2^2$  na hladině 0.05. Proto bychom i tady u řady 12 zamítli normalitu.

## Kapitola 2

# Testování normality pomocí minimalizace kvadratické formy z transformovaných dat

Dále představme další test normality v případě (diskrétního) stacionárního náhodného procesu  $\{X_t\}$  s autokovarianční funkcí  $R$ . Zde značíme  $R(0) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2$  a  $EX_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mu$ . Předpokládejme, že máme řadu  $X_1, X_2, \dots, X_T$  z náhodného procesu, o kterém předpokládáme

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} |r|^\zeta |R(r)| < \infty \quad (2.1)$$

pro nějaké  $\zeta > 0$ . Nechť dále máme prostor  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  a z něj nějaký parametr  $\lambda \in \Lambda$ . Potom definujme  $g(X_t, \lambda)$  jako zobrazení  $g : \mathbb{R}^1 \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Nechť tato funkce je borelovsky měřitelná a zároveň nezávisí na počtu pozorování  $T$ . Pro normální rozdělení označme jako možný parametr  $(\mu, \sigma^2) \stackrel{\text{def}}{=} \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+^1$ , takže  $\Theta$  je *otevřená množina*. Myšlenka je, abychom naměřená data „vhodně“ transformovali pomocí nějaké (měřitelné) funkce  $g$ . Z tohoto pak „vhodnou“ transformací budeme provádět testy. Pro další účely se nám ještě bude hodit zavést průměr a střední hodnotu těchto transformovaných dat resp. funkce  $g$ . Označme tedy

$$g_T(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{g(\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(X_t, \lambda),$$
$$g_0(\theta, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[g(X_1, \lambda)]$$

jako zobrazení  $g_T : \mathbb{R}^T \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $g_0 : \Theta \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Jedná se tedy o zobrazení do  $N$ -rozměrného (reálného) vektorového prostoru, kde  $N$  je „dostatečně velké“ číslo—řekněme  $N > 2$ . Bude nás vlastně zajímat, „jak moc“ se liší takový průměr od své střední hodnoty. Proto označme

$$\tilde{g}(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} g(X_t, \lambda) - g_0(\theta, \lambda).$$

Označme  $\tilde{g}_j(X_t)$  jako  $j$ -tou složku tohoto  $N$ -rozměrného vektoru. Pro ně pak definujeme kumulanty 4. řádu jako

$$\begin{aligned} \kappa_{jklm}(q, r, s, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} & \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_k(X_q) \tilde{g}_l(X_r) \tilde{g}_m(X_s)] \\ & - \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_k(X_q)] \mathbf{E} [\tilde{g}_l(X_r) \tilde{g}_m(X_s)] \\ & - \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_l(X_r)] \mathbf{E} [\tilde{g}_k(X_q) \tilde{g}_m(X_s)] \\ & - \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_m(X_s)] \mathbf{E} [\tilde{g}_k(X_q) \tilde{g}_l(X_r)], \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde  $q, r, s$  jsou celá čísla a  $j, k, l, m = 1, 2, \dots, N$ . Předpokládejme dále, že tyto kumulanty splňují pro každé  $\lambda \in \Lambda$  podmínku

$$\sup_{-\infty < q < \infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\kappa_{jklm}(q, r, q+r, \lambda)| < \infty \quad (2.3)$$

pro každá  $j, k, l, m = 1, 2, \dots, N$ . Podmínky (2.1) a (2.3) budeme užívat dále. Z nich totiž plynou také následující dvě podmínky

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} |R(r)| < \infty, \quad (2.4)$$

$$0 < \text{var} [g_j(X_0, \lambda)] < \infty \quad (2.5)$$

pro každé  $\lambda \in \Lambda$  a  $j = 1, 2, \dots, N$ . Tyto dvě podmínky uijeme na následující lemmata.

**Lemma 2.1** *Nechť  $X_t$  je stacionární gaussovský proces splňující podmínku (2.4) a nechť funkce  $g_j$  s množinou  $\Lambda$  splňují podmínku (2.5) pro každé  $j$ . Je-li  $f(\nu, \theta, \lambda)$  matice spektrálních hustot (transformovaného) procesu  $\{g(X_t, \lambda)\}$  (v hodnotě  $\nu$ ) a označíme-li  $\Gamma(\theta, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi f(0, \theta, \lambda)$ , potom platí*

$$T^{\frac{1}{2}} [g_T(\lambda) - g_0(\theta, \lambda)] \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, \Gamma(\theta, \lambda)) \text{ pro } T \rightarrow \infty.$$

*Důkaz:* Podle [13] zobecněním na mnohorozměrný případ máme

$$T^{\frac{1}{2}} [g_T(\lambda) - g_0(\theta, \lambda)] \xrightarrow{D} N(0, V_g) \text{ pro } T \rightarrow \infty,$$

kde  $V_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{E} \left[ \sum_{t=1}^T \tilde{g}_j(X_t) \sum_{t=1}^T \tilde{g}_j(X_t)' \right]$ . Užitím Gebeleinova lemmatu v [27] na straně 182 dostaneme

$$\begin{aligned} |\gamma_{jk}(r, \lambda)| &= |\text{cov}[g_j(X_0, \lambda), g_k(X_r, \lambda)]| \\ &\leq \{\text{var}[g_j(X_0, \lambda)] \text{var}[g_k(X_r, \lambda)]\}^{\frac{1}{2}} \frac{|R(r)|}{R(0)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

pro každé  $j, k = 1, 2, \dots, N$  a každé  $r$  celé. Podle této nerovnosti a (2.4) je vidět, že je  $|\gamma_{jk}(r, \lambda)|$  majorizováno konvergentní řadou. Dále je podle (2.5) vidět, že součet této řady bude kladný resp.

$$0 < \text{var}[g_j(X_0, \lambda)] = |\gamma_{jk}(0, \lambda)| \leq \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\gamma_{jk}(r, \lambda)| < \infty. \quad (2.7)$$

Dle [1] str. 380 a [26] str. 416 a 657 existuje matice spektrálních hustot procesu  $g(X_t, \lambda)$ , která je stejnoměrně spojitá na intervalu  $[-\pi, \pi]$ . Ze spojitosti v 0 potom podle [1] str. 459 a [14] str. 208 plyne, že  $V_g = 2\pi f(0, \theta, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(\theta, \lambda)$ .  $\square$

Hodnotu funkce  $f(0, \theta, \lambda)$  však ještě nemusíme znát. Proto se dále budeme snažit jí odhadnout. K tomu použijeme následující lemma.

**Lemma 2.2** *Za výše uvedeného značení nechť  $c_0, c_1, c_2$  a  $c_3$  jsou kladná čísla, nechť  $K$  je zobrazení z  $[-1, 1]$  do  $R$ , nechť  $M_T$  je kladné celé číslo a nechť  $T > 1$ . Nechť dále pro každá  $y, y_1, y_2 \in [-1, 1]$  platí tyto podmínky*

$$K(-y) = K(y), \quad K(0) = 1, \quad (2.8)$$

$$|K(y)| \leq c_0, \quad (2.9)$$

$$|K(y_2) - K(y_1)| \leq c_1 |y_2 - y_1|, \quad (2.10)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - K(y)}{|y|^{c_2}} = c_3, \quad (2.11)$$

$$M_T = \lfloor T^{c_4} \phi(T) \rfloor \wedge T - 1 \quad (2.12)$$

pro nějaké  $c_4 \in (0, 1)$ , kde pro  $\phi(T)$  platí  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi(\xi T)}{\phi(T)} = 1$  pro každé  $x_i > 1$ . Definujme dále

$$\begin{aligned} \tilde{K}(y) &= K(y) \text{ pro } y = 0, \\ &= 2K(y) \text{ pro } y \in (0, 1], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\hat{g}(X_t, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} g(X_t, \lambda) - g_T(\lambda).$$

Potom za platnosti podmínek (2.1), (2.3) a  $H_0$  (normality) je statistika

$$\hat{f}(0, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{M_T} \hat{K}(r/M_T) \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-r} \hat{g}(X_t, \lambda) \hat{g}(X_{t+r}, \lambda)' \right] \quad (2.14)$$

silně konzistentním odhadem  $f(0, \theta, \lambda)$ .

*Důkaz:* Lemma plyne z [12]. Poznamenejme jen, že podmínka 2', která se tam vyskytuje, plyne z podmínek (2.1), (2.3) za platnosti  $H_0$  a to po použití Gebeleinova lemmatu z [27] str. 182. Věta 4 na str. 173 nám z [12] dává podmínku na intervalu  $[-\pi, \pi]$  pro odhad  $\tilde{f}_T(\nu, \lambda)$ . Speciálně toto splňuje

$$\tilde{f}(0, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{M_T} \hat{K}(r/M_T) \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-r} \tilde{g}(X_t, \lambda) \tilde{g}(X_{t+r}, \lambda)' \right],$$

kde  $\tilde{g}(X_t, \lambda, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} g(X_t, \lambda) - g_0(\theta, \lambda)$ . Vektor  $g_T(\lambda)$  však splňuje podmínku (24) v [12] ve větě 5 na straně 175. Proto můžeme výsledek limitně zaměnit pro  $\hat{g}(X_t, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} g(X_t, \lambda) - g_T(\lambda)$ . Proto také platí výsledek pro  $\hat{f}_T(\nu, \lambda)$ .

□

Nyní se snažme získat rozdělení nějaké vhodné statistiky za platnosti nulové hypotézy. Pro  $\hat{f}_T$ , kterou máme v (2.14), označme jako odhad varianční matice následující veličinu

$$G_T(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \hat{f}(0, \lambda).$$

Pro test nás vlastně bude zajímat, „jak moc“ se liší vektor průměru od vektoru střední hodnoty. Pseudoinverzní matici k matici  $A$  budeme (obecně) značit  $A^-$ . Zaveďme následující kvadratickou formu

$$Q_T(\theta, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} [g_T(\lambda) - g_0(\theta, \lambda)]' G_T^-(\lambda) [g_T(\lambda) - g_0(\theta, \lambda)]. \quad (2.15)$$

Naši testovou statistiku pak založíme na minimalizaci této kvadratické formy vzhledem k parametru  $\theta$ . Protože hodnota  $\theta$ , která jí minimalizuje, nemusí být určena jednoznačně, označíme  $\theta_T$  jako hodnotu, která minimalizuje tuto kvadratickou formu a přitom je nejbližší statistice

$$(\bar{X}_T, S_T^2) = \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t, \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}_T)^2 \right)$$

Předpokládejme dále, že  $\theta_0$  je skutečná hodnota parametru  $\theta$  za platnosti  $H_0$ . Dále předpokládejme, že pro každé  $\theta_0 \in \Theta$  a  $\lambda \in \Lambda$  jsou splněny následující podmínky.

- (A)  $\Gamma(\theta_0, \lambda)$  je pozitivně definitní.
- (B)  $g_0(\theta, \lambda)$  je v nějakém okolí  $\theta_0$  dvakrát spojitě diferencovatelné vzhledem k  $\theta$ .
- (C) Matice  $D(\theta_0, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial g_0(\theta, \lambda)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$  typu  $N \times 2$ , kde  $N > 2$ , má hodnost 2.
- (D) Množina  $\Theta_0(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{\theta \in \Theta : g_0(\theta, \lambda) = g_0(\theta_0, \lambda)\}$  není hustá v množině  $\Theta$ . Množina  $\Theta$  je navíc omezená podmnožina  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+^1$ .
- (E) Pro každé  $\theta \in \Theta_0(\lambda)$  je  $\Gamma(\theta, \lambda) = \Gamma(\theta_0, \lambda)$  a  $D(\theta, \lambda) = D(\theta_0, \lambda)$ .

Tyto podmínky zaručí existenci a jednoznačnost  $\theta_T$ . Poznamenejme, že poslední dvě podmínky znamenají, že množina  $\Theta_0(\lambda)$  je pouze konečná. Pak na ní můžeme dodefinovat  $\Gamma$  a  $D$  nějakou libovolnou konstantou. Pomocí lemmat 2.1 a 2.2 se dá dokázat následující důležitá věta.

**Věta 2.3** *Za výše uvedených předpokladů necht' platí  $H_0$  a podmínky (2.1), (2.3), (A) až (E). Potom pro každé pevné  $\lambda \in \Lambda$  platí*

$$TQ_T(\theta_T, \lambda) \xrightarrow{D} \chi_{N-2}^2 \text{ pro } T \rightarrow \infty.$$

*Důkaz:* Viz [10], str. 1688 a 1689.  $\square$

## 2.4 Splnění předpokladů věty 2.3

Test normality později založíme na tvrzení této věty. Než tak učiníme, musíme ještě najít vhodnou funkci  $g$  a množinu  $\Lambda$ , které splňují podmínky (2.3), (A) až (E). Předpokládejme dále, že  $N > 2$  je *sudé* číslo a definujme

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{N-1} \leq \lambda_N < \infty \right\}, \quad (2.16)$$

$$g(X_t, \lambda) = (\cos(\lambda_1 X_t), \sin(\lambda_2 X_t), \dots, \cos(\lambda_{N-1} X_t), \sin(\lambda_N X_t))'. \quad (2.17)$$

Definujeme-li dále veličiny

$$c_T(\lambda_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp(i\lambda_j X_t), \quad (2.18)$$

$$c_0(\theta, \lambda_j) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \exp(i\lambda_j X_t) = \exp\left(i\lambda_j \mu - \frac{\lambda_j^2 \sigma^2}{2}\right), \quad (2.19)$$

potom je z definice  $g(X_t, \lambda)$  podle (2.17) vektor výběrových průměrů a středních hodnot roven

$$g_T(\lambda) = (\text{Re}[c_T(\lambda_1)], \text{Im}[c_T(\lambda_2)], \dots, \text{Re}[c_T(\lambda_{N-1})], \text{Im}[c_T(\lambda_N X_t)])', \quad (2.20)$$

$$g_0(\theta, \lambda) = (\text{Re}[c_0(\theta, \lambda_1)], \text{Im}[c_0(\theta, \lambda_2)], \dots, \text{Re}[c_0(\theta, \lambda_{N-1})], \text{Im}[c_0(\theta, \lambda_N X_t)])'. \quad (2.21)$$

Protože vektor  $g(X_t, \lambda)$  má složky, které jsou omezené číslem 1 a zároveň tyto složky nejsou konstantní, pak mají konečný a zároveň kladný rozptyl. Podle lemmatu 2.1 zde je  $T^{\frac{1}{2}} [g_T(\lambda) - g_0(\theta, \lambda)]$  asymptoticky normální. Přestože v praxi bývá těžké ověřit podmínku (2.3), tak je zde splněna díky následujícímu lemmatu.

**Lemma 2.5** *Nechť  $X_t$  je gaussovský proces, který splňuje podmínku (2.1) a necht'  $\Lambda$  a  $g$  jsou definovány podle (2.16) a (2.17). Potom je také splněna podmínka (2.3) tj. pro každé  $\lambda \in \Lambda$  a pro  $j, k, l, m = 1, 2, \dots, N$  platí*

$$\sup_{-\infty < q < \infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\kappa_{jklm}(q, r, q+r, \lambda)| < \infty.$$

*Důkaz:* Označme

$$\begin{aligned} \eta_{j,k,l,m}(q, r, s, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{cov} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_k(X_q), \tilde{g}_l(X_r) \tilde{g}_m(X_s)], \\ \gamma_{j,k}(q, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_k(X_q)] = \text{cov} [\tilde{g}_j(X_0, \lambda), \tilde{g}_k(X_q, \lambda)]. \end{aligned}$$

Potom je podle (2.2) splněno

$$\begin{aligned} \kappa_{jklm}(q, r, r+q, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_k(X_q) \tilde{g}_l(X_r) \tilde{g}_m(X_{r+q})] \\ &\quad - \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_k(X_q)] \mathbf{E} [\tilde{g}_l(X_r) \tilde{g}_m(X_{r+q})] \\ &\quad - \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_l(X_r)] \mathbf{E} [\tilde{g}_k(X_q) \tilde{g}_m(X_{r+q})] \\ &\quad - \mathbf{E} [\tilde{g}_j(X_0) \tilde{g}_m(X_{r+q})] \mathbf{E} [\tilde{g}_k(X_q) \tilde{g}_l(X_r)] \\ &= \eta_{j,k,l,m}(q, r, r+q, \lambda) - \gamma_{j,l}(r, \lambda) \gamma_{k,m}(r, \lambda) \\ &\quad - \gamma_{j,m}(r+q, \lambda) \gamma_{k,l}(r-q, \lambda). \end{aligned}$$



Podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty < q < \infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\kappa_{jklm}(q, r, q+r, \lambda)| &\leq \sup_{-\infty < q < \infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\eta_{jklm}(q, r, q+r, \lambda)| \\ &+ \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\gamma_{jl}(r, \lambda)\gamma_{km}(r, \lambda)| + \sup_{-\infty < q < \infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\gamma_{jm}(r+q, \lambda)\gamma_{jm}(r-q, \lambda)|. \end{aligned}$$

Užitím omezenosti složek vektoru  $g$  a (2.7) dostaneme

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\gamma_{jl}(r, \lambda)\gamma_{km}(r, \lambda)| \leq \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\gamma_{km}(r, \lambda)| < \infty.$$

Proto můžeme druhou sumu takto majorizovat. Podobným způsobem můžeme majorizovat třetí sumu. Konečnost první sumy bychom pak dostali přímým výpočtem a rozebráním případů podle počtu sudých indexů  $j, k, l$  a  $m$ .  $\square$

Ještě si zkusme rozmyslet, že jsou splněny podmínky (A) až (E). Podmínku (A) zde ověřovat nebudeme. Z exponenciálního vyjádření v (2.19) plyne snadno diferencovatelnost v každém parametru a také to, že diferenciál (podle parametru  $\theta$ ) má hodnotu 2. Takto jsou splněny předpoklady (B) a (C). Dále ověříme podmínky (D) a (E). Obecné ověření tohoto by pro nás bylo těžké. Pro praktický účel nám stačí předpokládat, že hodnoty  $\lambda_j$  jsou racionálními násobky hodnoty  $\lambda_1$  tj. existují celá čísla  $m_j$  a  $n_j$ , že  $\lambda_j = \lambda_1 \frac{m_j}{n_j}$ . Nechť dále je  $\Pi_N$  největší společný násobek čísel  $n_2, n_3, \dots, n_N$ . Potom z periodicity  $g_0$  v (2.21) z (2.19) platí

$$\Theta_0(\lambda) = \left\{ \left( \mu_0 + \frac{2\pi k \Pi_N}{\lambda_1}, \sigma_0^2 \right) : k \in Z \right\} \cap \Theta.$$

Tato množina se skládá z izolovaných bodů, což dává podmínku (D). Díky periodicitě  $g_0$  máme také splněnu podmínku (E).

Otázka nyní je, jak vlastně zvolit hodnoty  $N$  a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ . Možností, jak splnit podmínku (2.16) je totiž více. Nejraději bychom toto udělali univerzálně bez ohledu na alternativní hypotézu rozdělení. Obecně však není možné, abychom mohli libovolně maximalizovat sílu testu vzhledem k možným alternativám. Proto bývá tento postup někdy vzhledem k nedostatku síly testu kritizován. Zde mohou být např. potíže, pokud je dimenze  $N$  příliš „velká“ nebo rozdíly mezi sousedními  $\lambda_j$  příliš „malé“ vzhledem k rozpětí dat. V takovém případě se může matice  $G_T(\lambda)$  jevit jako špatně podmíněná.

Naopak, když sousední  $\lambda_j$  budou příliš „velká“ (vzhledem k rozpětí dat), potom mohou být např. derivace z  $c_0(\theta, \lambda_j)$  malé v okolí  $\theta_0$ . Toto může činit potíže při hledání minima. Proto se dále budeme snažit, aby se nám něco takového nestalo a abychom zvolili hodnoty  $\lambda_j$  vzhledem k možnému rozpětí či rozptylu dat. Tento rozptyl se budeme snažit odhadnout z naměřených dat. Zde by pak mohl nastat problém pro (teoretické) rozdělení testové statistiky při změně hodnot  $\lambda_j$  vzhledem k naměřeným datům. Zkoumejme situaci, kdy můžeme odhadnout rozptýlení dat a asymptotické rozdělení testové statistiky se nám nezmění.

## 2.6 Změna volby hodnot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ vzhledem k rozptýlenosti dat

Nechť máme hodnoty  $N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  a naměřená data  $X_1, X_2, \dots, X_T$ . Předpokládejme, že hodnoty  $\lambda_j$  změníme podle povahy (např. variability) naměřených dat. Tuto změnu označme funkcí  $l_T(\lambda_j) \stackrel{\text{def}}{=} l_T(\lambda_j, X_1, X_2, \dots, X_T)$ . Dále zvolme omezující (konečné a kladné) konstanty  $\bar{\lambda}$  a  $\bar{l}$ . Potom zvolíme množinu  $\Lambda$  takovou, jako je ve vztahu (2.16), ale aby měla omezení  $\lambda_N \leq \bar{\lambda}$ . Tato volba je tedy taková, aby funkce  $l_T$  byla měřitelné zobrazení na konečný interval tj.

$$l_T : \Omega \times [0, \bar{\lambda}] \rightarrow [0, \bar{l}].$$

Naše volba je pak taková, že funkce  $l_T$  je náhodná funkce, která je definována na stejném prostoru jako proces  $\{X_t\}$ . Předpokládejme, že pro každé  $T$  a skoro všechna  $\omega \in \Omega$  je  $l_T(x) \stackrel{\text{def}}{=} l_T(x, \omega)$  *spojitá a rostoucí* funkce. Předpokládejme navíc, že existuje *spojitá, rostoucí a nenáhodná* funkce  $l_\infty : [0, \bar{\lambda}] \rightarrow [0, \bar{l}]$  taková, že pro každé  $\epsilon > 0$  platí

$$T^{\frac{1}{2}-\epsilon} \sup_{x \in [0, \bar{\lambda}]} |l_T(x) - l_\infty(x)| \xrightarrow{P} 0. \quad (2.22)$$

Označme dále vektory složek těchto funkcí pro hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ . Pracujme tedy s vektory

$$\begin{aligned} L_T(\lambda) &= \{l_T(\lambda_1), l_T(\lambda_2), \dots, l_T(\lambda_N)\}, \quad L_T : \Omega \times \Lambda \rightarrow [0, \bar{l}]^N, \\ L_\infty(\lambda) &= \{l_\infty(\lambda_1), l_\infty(\lambda_2), \dots, l_\infty(\lambda_N)\}, \quad L_\infty : \Lambda \rightarrow [0, \bar{l}]^N. \end{aligned}$$

Z omezenosti jednotlivých složek množiny  $\Lambda$  můžeme použít (2.22) na jednotlivé složky, kterých je konečně mnoho. Pak také platí

$$T^{\frac{1}{2}-\epsilon} \sup_{\lambda \in \Lambda} |L_T(\lambda) - L_\infty(\lambda)| \xrightarrow{P} 0. \quad (2.23)$$

Dále budeme chtít dokázat, že po použití takovéto funkce nám zůstane asymptotická normalita  $TQ_T[\theta_T, L_T(\lambda)]$  jako ve větě 2.3. Toto bude přitom platit nezávisle na datech. K tomu budeme potřebovat následující lemmata.

**Lemma 2.7** *Nechť  $\hat{f}_T(0, \lambda)$  je definována vztahem (2.14) a necht'  $g(X_t, \lambda)$  splňuje podmínku (2.17). Necht' dále funkce  $K(y)$  a posloupnost  $\{M_T\}$  splňují předpoklady lemmatu 2.2 s podmínkou*

$$\sup_{T \rightarrow \infty} T^{-\frac{1}{2}+\delta} M_T = \text{konst.} \geq 0 \quad (2.24)$$

pro nějaké  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ . Necht' je splněno (2.22). Potom pro každé  $\lambda \in \Lambda$  platí

$$\|\hat{f}_T[0, L_T(\lambda)] - \hat{f}_T[0, L_\infty(\lambda)]\| \xrightarrow{P} 0 \text{ pro } T \rightarrow \infty.$$

*Důkaz:* Viz [10] str. 1694.  $\square$

Označme dále

$$Z_T(\theta, L) \stackrel{\text{def}}{=} T^{\frac{1}{2}} [g_T(L) - g_0(\theta, L)] \text{ pro } L \in [0, \bar{l}]^N. \quad (2.25)$$

Dále pak můžeme označit  $Z_{jT}(\theta, l_j)$  jako  $j$ -tou složku tohoto vektoru. Dále uveďme lemma, které mluví o asymptotické normalitě  $Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}$ .

**Lemma 2.8** *Nechť  $\{X_t\}$  je stacionární gaussovský proces, který splňuje podmínku (2.4). Necht' je  $Z_T(\theta, L)$  definováno pomocí (2.17), (2.20), (2.21) a (2.25). Necht' je  $[0, \bar{l}]$  jako u (2.22). Potom na prostoru  $\mathbb{C}^N[0, \bar{l}]$  konverguje  $Z_T$  v distribuci ke spojitému gaussovskému procesu  $Z_\infty$  pro  $T \rightarrow \infty$ , kde pro pevné  $L \in [0, \bar{l}]^N$  má  $Z_\infty(\theta, \lambda)$  nulový vektor středních hodnot a varianční matici  $\Gamma(\theta, L)$ .*

*Důkaz:* Viz [10] str. 1695 a 1696.  $\square$

Tato dvě lemmata uijme na následující větu

**Věta 2.9** *Nechť  $X_t$  je gaussovský proces, který splňuje podmínku (2.1). Necht' složky vektorů  $L_T(\lambda)$  a  $L_\infty(\lambda)$  splňují (2.22). Potom pro každé  $\lambda \in \Lambda$  platí*

$$T |Q_T[\theta_T, L_T(\lambda)] - Q_T[\theta_T, L_\infty(\lambda)]| \xrightarrow{P} 0 \text{ pro } T \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

*Důkaz:* Podle definice  $Q_T$  ve (2.15) při značení (2.25) platí

$$\begin{aligned}
& T|Q_T[\theta_T, L_T(\lambda)] - Q_T[\theta_T, L_\infty(\lambda)]| \\
&= T|Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}' G_T^-\{L_T(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\} \\
&\quad - Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}' G_T^-\{L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}| \\
&= T|Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}' G_T^-\{L_T(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\} \\
&\quad - Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}' G_T^-\{L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\} \\
&\quad + Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}' \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\} \\
&\quad + Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}' \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\} \\
&\quad - Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}' \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\} \\
&\quad - Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}' \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}| \\
&\leq T|Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}' \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\} \\
&\quad - Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}' \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\} Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}| \\
&\quad + |Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}' [G_T^-\{L_T(\lambda)\} - \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\}] Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}| \\
&\quad + |Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}' [G_T^-\{L_\infty(\lambda)\} - \Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\}] Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}|.
\end{aligned}$$

Podle lemmatu 2.5, které při našem zavedení dává podmínku (2.3) implikující podmínku (2.4) v lemmatu 2.1, znamená, že máme asymptotickou normalitu rozdělení s rozptylem  $\Gamma_T(\theta_0, \lambda) = 2\pi f(0, \theta_0, \lambda)$ . Podle (2.14) v lemmatu (2.2) je  $\hat{f}_T(0, \lambda)$  konzistentním odhadem  $f(0, \theta_0, \lambda)$  pro každé  $\lambda$ . Potom je také  $\hat{f}_T\{0, L_\infty(\lambda)\}$  konzistentním odhadem  $f\{0, \theta_0, L_\infty(\lambda)\}$ . Dle lemmatu 2.7 je  $\hat{f}_T\{0, L_T(\lambda)\}$  stejným konzistentním odhadem jako  $\hat{f}_T\{0, L_\infty(\lambda)\}$ . Toto je rovněž  $f\{0, \theta_0, L_\infty(\lambda)\}$ . Potom za platnosti  $H_0$  (normality) konvergují  $G_T\{L_\infty(\lambda)\} \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \hat{f}_T\{0, L_\infty(\lambda)\}$  a  $G_T\{L_T(\lambda)\} \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \hat{f}_T\{0, L_T(\lambda)\}$  v pravděpodobnosti ke  $2\pi f\{0, \theta_0, L_\infty(\lambda)\} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\}$ . Pak také konvergují  $G_T^-\{L_\infty(\lambda)\}$  a  $G_T^-\{L_T(\lambda)\}$  v pravděpodobnosti ke  $\Gamma^{-1}\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\}$ . Proto jsou poslední dva členy řádu  $O_p(1)$ . Pro zbytek důkazu musíme ještě ukázat, že i první člen je řádu  $O_p(1)$ . K tomu stačí ukázat

$$U_T \stackrel{\text{def}}{=} |Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\} - Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}| \xrightarrow{P} 0. \quad (2.27)$$

Užijme dále větu o střední hodnotě na  $Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\}$  a  $Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\}$  v bodě  $\theta_T$  nebo také Taylorův rozvoj prvního řádu. Potom dostaneme

$$\begin{aligned}
Z_T\{\theta_T, L_T(\lambda)\} &= T^{\frac{1}{2}} \left| D\{\tilde{\theta}, L_T(\lambda)\} \right| |\theta_T - \theta_0|, \\
Z_T\{\theta_T, L_\infty(\lambda)\} &= T^{\frac{1}{2}} \left| D\{\hat{\theta}, L_\infty(\lambda)\} \right| |\theta_T - \theta_0|,
\end{aligned} \quad (2.28)$$

kde  $\tilde{\theta}$  a  $\hat{\theta}$  jsou mezi hodnotami  $\theta_0$  a  $\theta_T$ . Po použití trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$U_T \leq |Z_T\{\theta_0, L_T(\lambda)\} - Z_T\{\theta_0, L_\infty(\lambda)\}|$$

$$+ \underbrace{\left| D \left\{ \tilde{\theta}, L_T(\lambda) \right\} - D \left\{ \hat{\theta}, L_\infty(\lambda) \right\} \right|}_{\stackrel{P_0}{\rightarrow}} \underbrace{T^{\frac{1}{2}} |\theta_T - \theta_0|}_{O_P(1)}. \quad (2.29)$$

Druhý člen je řádu  $O_P(1)$ , neboť  $T^{\frac{1}{2}} |\theta_T - \theta_0|$  je řádu  $O_P(1)$  a také

$$\left| D \left\{ \tilde{\theta}, L_T(\lambda) \right\} - D \left\{ \hat{\theta}, L_\infty(\lambda) \right\} \right|$$

konverguje v pravděpodobnosti k 0. Zbývá nám ještě ukázat, že první člen je řádu  $O_P(1)$ . Podle lemmatu 2.8 konverguje  $Z_T \{ \theta_0, L_\infty(\lambda) \}$  v distribuci ke spojitému gaussovskému procesu  $Z_\infty \{ \theta_0, L_\infty(\lambda) \}$ . Dále ještě uijme podmínku (2.23), která dává stejnoměrnou konvergenci v pravděpodobnosti  $L_T(\lambda)$  konvergující k  $L_\infty(\lambda)$ . Potom můžeme podle [2] toto limitně zaměnit. Potom také  $Z_T \{ \theta_0, L_T(\lambda) \}$  konverguje v distribuci ke spojitému gaussovskému procesu  $Z_\infty \{ \theta_0, L_\infty(\lambda) \}$ . Z tohoto pak vidíme, že první člen v (2.29) je řádu  $O_P(1)$ . Toto pak dává podmínku (2.27) a zbytek důkazu.  $\square$

Tato věta nám vlastně říká, že splníme-li (2.22), potom můžeme ve větě 2.3 limitně zaměnit  $TQ_T [\theta_T, L_\infty(\lambda)]$  za  $TQ_T [\theta_T, L_T(\lambda)]$  a dostaneme stejné (asymptotické) rozdělení. Dále se pokusíme tuto podmínku splnit.

## 2.10 Užítí výsledků na test, zda je proces gaussovský

Nechť máme pozorování  $X_1, X_2, \dots, X_T$  a kladná čísla  $\bar{\lambda}$  a  $\bar{l}$ . Nechť dále máme pevně zvolené  $N$  a hodnoty

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{N-1} \leq \lambda_N = \bar{\lambda}.$$

Spočtěme z dat  $S_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (X_k - \bar{X}_T)^2$ . Pak definujeme

$$\underline{S}_T \stackrel{\text{def}}{=} S_T \vee \left( \frac{\bar{\lambda}}{\bar{l}} \right), \quad \underline{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \vee \left( \frac{\bar{\lambda}}{\bar{l}} \right).$$

Dále pro  $j = 1, 2, \dots, N$  definujeme

$$l_T(\lambda_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_j}{\underline{S}_T},$$

$$l_\infty(\lambda_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_j}{\underline{\sigma}}.$$

Toto  $l_T$  je spojité a rostoucí v  $\lambda_j$  pro každé  $j = 1, 2, \dots, N$ , neboť je v něm lineární. Pro ověření podmínky (2.22) dále počítejme

$$\sup_{x \in [0, \bar{\lambda}]} |l_T(x) - l_\infty(x)| \leq \sup_{x \in [0, \bar{\lambda}]} \left| \frac{x}{S_T} - \frac{x}{\sigma} \right| = \bar{\lambda} \left| \frac{1}{S_T} - \frac{1}{\sigma} \right|.$$

Protože platí podmínky (2.1) a (2.3) dle lemmatu (2.5), pak podle věty 8.3.2 a 8.3.3 z [1] je  $|S_T - \sigma| = O_P(1)$ . Toto pak dává podmínku (2.22). Vidíme také, že tato volba celkem dobře respektuje rozptýlení dat.

Tyto znalosti můžeme použít na sestavení testu. Zde navíc budeme použít numericky ilustrovat podle [10]. Postupujme následovně s výročními daty o počtu chycených rysů z let 1821–1934, viz [6] nebo tabulka 7.187 v dodatku. Zvolme přirozené číslo  $N > 2$  a vektor hodnot  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)'$ , kde platí

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{N-1} \leq \lambda_N.$$

Toto splňuje např.  $N = 4$  a  $\lambda = (1, 1, 2, 2)'$ . Dále uijme data  $X_1, X_2, \dots, X_T$ , kde  $T = 114$ . Spočteme průměr  $\bar{X}_T$  a  $S_T$ . Zde potom vychází  $(\bar{X}_T, S_T) = (1538.0, 1578.9)$ . Dále položme  $l_T(\lambda_j) = \frac{\lambda_j}{S_T}$  pro  $j = 1, 2, 3, 4$ . Spočteme  $G_T \{L_T(\lambda)\} = 2\pi \hat{f} \{0, L_T(\lambda)\}$  podle  $\hat{f} \{0, l_T(\lambda)\}$  ze vztahu (2.14), kde použijeme  $M_T = \lfloor T^{0.4} \rfloor$  a  $K(y) = 1 - |y|$  pro  $y \in [-1, 1]$ . Dále spočteme  $Q_T \{\theta, L_T(\lambda)\}$  a určíme minimum pro  $TQ_T \{\theta, L_T(\lambda)\}$  jako  $\theta_T$ , které je nejbližší hodnotě  $(\bar{X}_T, S_T^2)$ . Zde vychází  $\theta_T = (2101.8, 1617.2^2)$ . Poté spočítáme hodnotu  $TQ_T \{\theta_T, L_T(\lambda)\}$ , která zde je  $TQ_T \{\theta_T, L_T(\lambda)\} = 22.35$ . Tato hodnota je pak významně větší než 5.99, což je kritická hodnota  $\chi_{N-2}^2 = \chi_2^2$  na hladině 0.05. Proto zde zamítáme normalitu na hladině 0.05. Pomocí  $TQ_T \{\theta_T, L_T(\lambda)\}$  spočteme také  $p$ -hodnotu, která vychází  $2 \cdot 10^{-5}$ . Normalitu bychom tak zamítli i na hladině 0.01. Pokud bychom takto počítali s logaritmem dat, potom by nám vyšlo  $TQ_T \{\theta_T, L_T(\lambda)\} = 8.91$ . Toto je pořád významné na hladině 0.05. Proto bychom i zde zamítli hypotézu, že jsou data z logaritnicko-gaussovského procesu. Ilustrujme ještě test na výroční data o slunečních skvrnách z let 1700–1960, viz [29] nebo tabulky 7.188 a 7.189 v dodatku. Zde potom vychází  $T = 261$ ,  $(\bar{X}_T, S_T) = (46.9, 38.5)$ ,  $\theta_T = (36.1, 26.3^2)$  a  $TQ_T \{\theta_T, L_T(\lambda)\} = 23.64$ . Pro tato data potom také zamítáme hypotézu (na hladině 0.05 či méně), že se jedná o gaussovský proces, který splňuje podmínku (2.1).

## Kapitola 3

# Testování normality pomocí odhadu spektra a bispektra

Předpokládejme, že  $\{X_t, t \in Z\}$  je *kauzální lineární proces* tj.

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_{t-j} e_j, \quad (3.1)$$

kde opět  $\{e_t, t \in Z\}$  je *bílý šum* s nulovou střední hodnotou. Dále zde budeme ještě předpokládat, že  $\sum_{j=0}^{\infty} |h_j|^2 < \infty$ . Pro momenty třetího řádu zavedme následující funkci

$$C_{xxx}(m, n) = \mathbf{E}X_t X_{t+m} X_{t+n}. \quad (3.2)$$

Z vlastností lineárního procesu pak je  $X_t$  gaussovský, pokud je  $e_t$  gaussovský. Pro testování normality resp. nenormality předpokládejme, že  $e_t$  není gaussovský a že  $\mathbf{E}e_t^3 \neq 0$ . V takovém případě bude mít proces  $X_t$  nenulové třetí momenty. Funkce (3.2) tak bude pro „mnoho“ hodnot  $m$  a  $n$  nenulová. Nechť

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_{xxx}(m, n)| < \infty,$$

pak pro tento *reálný proces* můžeme definovat *bispektrum procesu*  $X_t$  jako

$$B_X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{xxx}(m, n) e^{-i(\omega_1 m + \omega_2 n)}.$$

Bispektrum definujeme na množině

$$\Omega = \{0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \omega_1, 2\omega_1 + \omega_2 \leq 2\pi\},$$

tedy na trojúhelníkové množině. Zavedme dále funkci

$$H(\omega) = \sum_{t=0}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}.$$

Bispektrum potom můžeme vyjádřit takto

$$B_X(\omega_1, \omega_2) = \mu_3 H(\omega_1) H(\omega_2) \overline{H(\omega_1 + \omega_2)},$$

kde  $\mu_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}e_t^3$ . Je-li tento třetí moment nenulový, potom bude i celé bispektrum nenulové. Pro konkrétní test budeme chtít použít nějaký (konzistentní) odhad bispektra. Nechť  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1}$  jsou pozorování z našeho uvažovaného procesu. Pro každé  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  označme

$$\omega_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi n}{N}.$$

Dále označme

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega_j) &= \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-i\omega_j t}, \\ F(j, k) &= \frac{1}{N} \mathbf{X}(\omega_j) \mathbf{X}(\omega_k) \overline{\mathbf{X}(\omega_{j+k})}. \end{aligned}$$

Z těchto zavedených značení plyne  $\omega_0 = 0$ . Pokud od dat odečteme jejich výběrový průměr, potom  $\mathbf{X}(\omega_0) = \mathbf{X}(0) = \sum_{t=0}^{N-1} X_t = 0$ . Pro tuto volbu pak je

$$F(j, 0) = \frac{1}{N} \mathbf{X}(\omega_j) \underbrace{\mathbf{X}(\omega_0)}_0 \overline{\mathbf{X}(\omega_j)} = 0, \quad F(0, k) = \frac{1}{N} \underbrace{\mathbf{X}(\omega_0)}_0 \mathbf{X}(\omega_k) \overline{\mathbf{X}(\omega_k)} = 0.$$

Dále jistě platí

$$\omega_{j+N} = \frac{2\pi j}{N} + 2\pi = \omega_j + 2\pi, \quad \omega_{N-j} = -\frac{2\pi j}{N} + 2\pi = -\omega_j + 2\pi.$$

Z těchto vztahů pak dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega_{j+N}) &= \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-i\omega_j t} \underbrace{e^{-i2\pi t}}_1 = \mathbf{X}(\omega_j), \\ \mathbf{X}(\omega_{N-j}) &= \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{i\omega_j t} \underbrace{e^{-i2\pi t}}_1 = \overline{\mathbf{X}(\omega_j)}. \end{aligned}$$



Vidíme tedy, že funkce  $F(j, k)$  je nenulová na množině

$$D = \left\{ 0 < j \leq \frac{N}{2}, 0 < k \leq j, 2j + k \leq j \right\}. \quad (3.3)$$

Dále zde uvažujme  $S_x$  jako *spektrální hustotu* nebo jednoduše *spektrum*. Je-li  $R_x$  autokovarianční funkce našeho uvažovaného procesu, potom

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} R_x(t) \text{ pro } \omega \in [-\pi, \pi].$$

Toto spektrum pak odhadujeme pomocí periodogramu jako v [11] kapitole 7.2 takto

$$\hat{S}_x(\omega_k) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-i(t+1)\omega_k} \right|^2 \text{ pro } k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor.$$

Užitím výrazu (4.3.15) v [5] dostaneme, že platí následující vztahy

$$\mathbb{E}F(j, k) = B_x(\omega_j, \omega_k) + O(N^{-1}). \quad (3.4)$$

Pro střední čtvercovou chybu (asymptotický rozptyl) platí

$$\begin{aligned} |F(j, k) - B_x(\omega_j, \omega_k)|^2 &= NS_x(\omega_j)S_x(\omega_k)S_x(\omega_{j+k}) \\ &\quad [1 + \delta(j - k) + \delta(N - 2j - k) \\ &\quad + 4\delta(N - 3j)\delta(N - 3k)] \\ &\quad + O(1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde  $\delta$  je *Kroneckerova funkce* tj.  $\delta(0) = 1$ ,  $\delta(k) = 0$  pro  $k \neq 0$ . Pro kovarianci platí  $\text{cov}(F_{j,k}, F_{j',k'}) = O(N^{-1})$  pro různou dvojici indexů.

### 3.1 Odhad bispektra a jeho užití

Uvažujme danou mříž bodů (3.3). Dále zvolme konstantu  $\frac{1}{2} < c < 1$ , která bude regulovat vychýlení a rozptyl odhadu bispektra. Položme  $M = N^c$ . Označme ještě

$$L = \left\{ (2m - 1)\frac{M}{2}, (2n - 1)\frac{M}{2} : m = 1, 2, \dots, n; m \leq \frac{N}{2M} - \frac{n}{2} + \frac{3}{4} \right\}. \quad (3.6)$$

Na mříži  $L$  nyní odhadneme funkci  $F(j, k)$  ve čtverci o velikosti hrany  $M$  se středem v bodě  $\left[(2m-1)\frac{M}{2}, (2n-1)\frac{M}{2}\right]$ . To děláme v případě, pokud jsou všechny dvojice na mříži  $D$ . Za odhad bispektra vezmeme

$$\hat{B}_x(m, n) = \frac{1}{M^2} \sum_{j=(m-1)M}^{mM-1} \sum_{k=(n-1)M}^{nM-1} F(j, k).$$

Má-li čtverec body vně množiny (3.3), pak tyto body nejsou do tohoto odhadu zahrnuty. Pokud se  $B_x(\omega_1, \omega_2)$  liší „málo“ od šířky čtverce  $\frac{2\pi M}{N}$ , potom z (3.4) a z předešlé rovnosti se dá ukázat

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\hat{B}_x(m, n) &= \frac{1}{M^2} \sum_{j=(m-1)M}^{mM-1} \sum_{k=(n-1)M}^{nM-1} \mathbf{E}F(j, k) \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{j=(m-1)M}^{mM-1} \sum_{k=(n-1)M}^{nM-1} \left[ B_x(\omega_j, \omega_k) + O(N^{-1}) \right] \\ &= B_x \left\{ \frac{2\pi(m-1)M}{2N}, \frac{2\pi(n-1)M}{2N} \right\} + O\left(\frac{M}{N}\right). \end{aligned}$$

Dále se pomocí (3.5) dá ukázat

$$\text{var } \hat{B}_x(m, n) = \frac{N}{M^4} Q_{m,n} \left\{ S_x \left( \frac{2\pi(2m-1)M}{2N} \right) S_x \left( \frac{2\pi(2n-1)M}{2N} \right) S_x \left( \frac{2\pi(m+n-1)M}{2N} \right) + O\left(\frac{M}{N}\right) \right\},$$

kde  $Q_{m,n}$  je počet dvojic  $(j, k)$  ve čtverci (3.3). Body na hranicích  $j = k$  a  $2j+k = N$  jsou přitom započítány dvojnásobně. Pokud by byl tento čtverec uvnitř (3.3), potom  $Q_{m,n} = M^2$ . Proto  $Q_{m,n}$  nepřevýší tuto hodnotu. Potom tedy platí

$$\frac{N}{M^4} Q_{m,n} \leq \frac{N}{M^4} N^2 = \frac{N}{M^2} = \frac{N}{N^{2c}} = N^{1-2c} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Vidíme tedy, že rozptyl tohoto odhadu jde k 0 a  $\hat{B}(\omega_1, \omega_2)$  je konzistentním odhadem bispektra  $B(\omega_1, \omega_2)$  pro posloupnost bodů

$$\{m(N) = \lceil \omega_1 N^{1-c} \rceil, n(N) = \lceil \omega_2 N^{1-c} \rceil\},$$

kde  $[x]$  znamená horní část čísla  $x$ . Náhodná veličina  $A = B + iC$  má (obecně) komplexní normální rozdělení, pokud sdružené rozdělení  $(A, B)'$  (náhodných veličin  $A$  a  $B$ ) má normální rozdělení.

Podle věty 4.4.2 z [5] jsou tyto odhady asymptoticky nezávislé, a tak mají náhodné veličiny

$$X_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N^{1-4c}Q_{mn}}} \left\{ S_x \left( \frac{2\pi(2m-1)M}{2N} \right) S_x \left( \frac{2\pi(2n-1)M}{2N} \right) S_x \left( \frac{2\pi(m+n-1)M}{2N} \right) \right\} \hat{B}_x(m, n) \quad (3.7)$$

asymptoticky komplexní normální rozdělení s jednotkovým rozptylem. Pak  $2|X_{m,n}|^2$  má asymptoticky  $\chi_2^2(\lambda_{m,n})$ , s parametrem necentrality

$$\lambda_{m,n} = \frac{2}{N^{1-4c}Q_{m,n}} \gamma_x(m, n) = 2N^{2c-1} \gamma_x(m, n),$$

kde

$$\gamma_x(m, n) = \frac{\left| B_x \left( \frac{2\pi(2m-1)M}{2N}, \frac{2\pi(2n-1)M}{2N} \right) \right|^2}{S_x \left( \frac{2\pi(2m-1)M}{2N} \right) S_x \left( \frac{2\pi(2n-1)M}{2N} \right) S_x \left( \frac{2\pi(m+n-1)M}{2N} \right)}$$

je *funkce šikmosti*. Za těchto podmínek platí

$$S = 2 \sum_{(m,n) \in L} |X_{m,n}|^2 \xrightarrow{D} \chi_{2P}^2(\lambda),$$

kde  $\lambda = \sum_{(m,n) \in L} \lambda_{m,n}$  a  $P$  je počet dvojic  $(m, n)$  v  $L$ . Toto  $P$  je přibližně  $\frac{N^2}{12M^2}$  pro  $N$  „velké“. Této statistiky tedy můžeme použít na testování. Jedná-li se tedy o gaussovský proces s nulovými třetími momenty, potom je i bispektrum nulové a platí

$$S = 2 \sum_{(m,n) \in L} |X_{m,n}|^2 \xrightarrow{D} \chi_{2P}^2(0). \quad (3.8)$$

## 3.2 Odhad spektra a užití na test normality

Statistiku  $S$  z (3.8) budeme chtít také odhadnout. Označme

$$\hat{X}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N^{1-4c}Q_{mn}}} \left\{ \hat{S}_x \left( \frac{2\pi(2m-1)M}{2N} \right) \hat{S}_x \left( \frac{2\pi(2n-1)M}{2N} \right) \hat{S}_x \left( \frac{2\pi(m+n-1)M}{2N} \right) \right\} \hat{B}_x(m, n).$$

S tímto odhadem budeme používat následující testovou statistiku

$$\hat{S} = 2 \sum_{(m,n) \in L} |\hat{X}_{m,n}|^2.$$

Použitím kapitoly 7.2 v [11] dostaneme, že  $\hat{S}_x(\omega)$  má asymptoticky stejné rozdělení jako  $S_x(\omega) \left(1 + \frac{M}{N} Y\right)$ , kde  $Y$  má přibližně normované normální rozdělení. Podle (3.7) pak je  $\hat{S} = S + O_P\left(\frac{M}{N}\right)$ . Pro dostatečný počet pozorování  $N$  pak za platnosti normality bude

$$\hat{S} \xrightarrow{D} \chi_{2P}^2(0).$$

Užijme tento výsledek na sestrojení testu. Nechť  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1}$  je řada z (3.1). Spočtěme dále  $\omega_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi j}{N}$  a  $\mathbf{X}(\omega_j) = \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-i\omega_j t}$  pro  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . Dále spočítáme  $F(j, k) = \frac{1}{N} \mathbf{X}(\omega_j) \mathbf{X}(\omega_k) \overline{\mathbf{X}(\omega_{j+k})}$  na  $D$  jako v (3.3). Dále zvolme např.  $c = \frac{3}{4}$  a dopočtěme  $M = N^{\frac{3}{4}}$ . Z tohoto pak spočtěme  $\hat{B}_x(m, n) = \frac{1}{M^2} \sum_{j=(m-1)M}^{mM-1} \sum_{k=(n-1)M}^{nM-1} F(j, k)$  pro  $m$  a  $n$  z  $L$  jako v (3.6). Odhadněme spektrum pomocí  $\hat{S}_x$  a spočtěme

$$\hat{X}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N^{1-4c} Q_{mn}}} \left\{ \hat{S}_x \left( \frac{2\pi(2m-1)M}{2N} \right) \hat{S}_x \left( \frac{2\pi(2n-1)M}{2N} \right) \right. \\ \left. \hat{S}_x \left( \frac{2\pi(m+n-1)M}{2N} \right) \right\} \hat{B}_x(m, n)$$

pro  $m$  a  $n$  opět z  $L$ . Z tohoto pak spočtěme  $\hat{S} = 2 \sum_{(m,n) \in L} |\hat{X}_{m,n}|^2$ . Určíme  $P$  jako počet dvojic v  $L$ , což je přibližně  $\frac{N^2}{12M^2}$ . Bude-li  $\hat{S} > \chi_{2P}^2(\alpha)$ , potom zamítáme normalitu na hladině  $\alpha$ .

# Kapitola 4

## Testování normality u autoregresních modelů pomocí reziduí

Dále se budeme zabývat testováním normality u autoregresních modelů. Předpokládejme, že  $|\rho| < 1$  a že máme autoregresi 1. řádu. Uvažujme tedy model

$$y_i = \mu + \rho(y_{i-1} - \mu) + \sigma e_i = \lambda + \rho y_{i-1} + \sigma e_i, \quad (4.1)$$

kde  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mu(1 - \rho)$  a  $e_i$  jsou (iid) z  $N(0, 1)$  tj.  $\sigma e_i$  jsou (iid) z  $N(0, \sigma^2)$ . Nechť  $y_1, y_2, \dots, y_n$  jsou pozorování z tohoto modelu. Označme dále  $\hat{\lambda}_n, \hat{\rho}_n$  a  $\hat{\sigma}_n$  jako *maximálně věrohodné odhady* parametrů  $\lambda, \rho$  a  $\sigma$  na základě těchto pozorování. Odhad  $i$ -tého rezidua na základě těchto  $n$  pozorování pak přirozeně bereme jako

$$\hat{e}_{in} = \frac{y_i - \hat{\lambda}_n - \hat{\rho}_n y_{i-1}}{\hat{\sigma}_n} \quad (4.2)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $y_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ . Dále předpokládejme, že  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$  jsou (iid) z  $N(\mu^*, \sigma^{*2})$  tj. splňují jednoduchý model

$$y_i^* = \mu^* + \sigma^* e_i^*, \quad (4.3)$$

kde  $e_i^*$  jsou (iid) z  $N(0, 1)$ . Spočtíme metodou maximální věrohodnosti  $\hat{\mu}^*$  a  $\hat{\sigma}^*$  jako odhady pro  $\mu^*$  a  $\sigma^*$ . Odhad  $i$ -tého rezidua na základě těchto  $n$  pozorování bereme jako

$$\hat{e}_{in}^* = \frac{y_i^* - \hat{\mu}_n^*}{\hat{\sigma}_n^*} \quad (4.4)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$ . Užijme také definice (4.1), (4.2) a definujme

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n [(\hat{\gamma}_n - \gamma) + (\hat{\rho}_n - \rho)]}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (e_i - \sigma^{-1} \hat{\sigma}_n \hat{e}_{in}), \quad B_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma).$$

Podobně pak užijeme definice (4.4), (4.3) a definujeme

$$A_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}(\hat{\mu}_n^* - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (e_i - \sigma^{-1} \hat{\sigma}_n^* \hat{e}_{in}^*), \quad B_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^* - \sigma).$$

Označme dále  $\hat{F}(\cdot)$  resp.  $\hat{F}^*(\cdot)$  jako empirickou distribuční funkci z odhadů  $\hat{e}_{1n}, \hat{e}_{2n}, \dots, \hat{e}_{nn}$  resp. z  $\hat{e}_{1n}^*, \hat{e}_{2n}^*, \dots, \hat{e}_{nn}^*$ . Toto můžeme také podle definice (4.2) a (4.4) napsat jako

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(e) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\hat{e}_{in} \leq e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i - \hat{\lambda}_n - \hat{\rho}_n y_{i-1} \leq \hat{\sigma}_n e), \\ \hat{F}_n^*(e) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\hat{e}_{in}^* \leq e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\hat{y}_i^* - \hat{\mu}_n^* \leq \hat{\sigma}_n^* e). \end{aligned}$$

Dále nás může zajímat, „jak moc“ se tyto empirické distribuční funkce vlastně liší od distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, kterou zde standardně značíme jako  $\Phi$ . Označme proto

$$\begin{aligned} \hat{W}_n(e) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n} [\hat{F}_n(e) - \Phi(e)] \\ &= \sqrt{n} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i - \hat{\lambda}_n - \hat{\rho}_n y_{i-1} \leq \hat{\sigma}_n e) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi(e) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [I(y_i - \hat{\lambda}_n - \hat{\rho}_n y_{i-1} \leq \hat{\sigma}_n e) - \Phi(e)] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{W}_{1n}(e) - \hat{W}_{1n}(e), \\ \hat{W}_n^*(e) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n} [\hat{F}_n^*(e) - \Phi(e)] = \sqrt{n} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\hat{y}_i^* - \hat{\mu}_n^* \leq \hat{\sigma}_n^* e) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi(e) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [I(\hat{y}_i^* - \hat{\mu}_n^* \leq \hat{\sigma}_n^* e) - \Phi(e)], \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{W}_{1n}(e) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [I\{e_i \leq e + z_{in}(e)\} - \Phi\{e + z_{in}(e)\}], \\ \hat{W}_{2n}(e) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\Phi\{e + z_{in}(e)\} - \Phi\{e\}]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Zde značíme

$$z_{in}(e) = (\hat{\sigma}_n - \sigma)e + (\hat{\lambda}_n - \lambda) + (\hat{\rho}_n - \rho)y_{i-1}. \quad (4.7)$$

Označme ještě veličinu pro srovnání jako

$$\begin{aligned} E_n(e) &= \sqrt{n} [F_n(e) - \Phi(e)] = \sqrt{n} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(e_i \leq e) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi(e) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [I(e_i \leq e) - \Phi(e)], \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde  $F_n(e) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(e_i \leq e)$  je empirická distribuční funkce skutečných chybových složek  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

## 4.1 Asymptotická srovnání

Dále využijeme [8] na str. 282, že můžeme v pravděpodobnosti omezit  $\max \{|y_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$  pomocí

$$M_n = O\left(\sqrt{\log n}\right). \quad (4.9)$$

Z tohoto pak dostáváme, že výraz  $y_{i-1}$  v definovaném  $z_{in}$  je „dostatečně omezen“. Toto pak podle [25] a podrobněji podle [21] znamená, že  $z_{in}$  závisí na  $e_i$  pouze omezeně. Proto pak  $z_{in}$  je řádu  $O_P(\sqrt{n})$  a má na (4.6) nepatrný asymptotický vliv. Z tohoto se dá vidět, že pak je asymptoticky stejné jako (4.8). Proto platí

$$\hat{W}_{1n} \sim E_n, \quad (4.10)$$

kde  $X_n \sim Y_n$  znamená, že  $\sup_e |X_n(e) - Y_n(e)| \xrightarrow{P} 0$ . Užitím stejné majorizující posloupnosti (4.9) pak můžeme použít Taylorovu aproximaci pro  $\hat{W}_{2n}$ , kterou pak můžeme napsat jako

$$\begin{aligned} \hat{W}_{2n}(e) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\Phi\{e + z_{in}(e)\} - \Phi\{e\}}{z_{in}(e)} z_{in}(e) \right] \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Phi'(e) z_{in}(e) = \frac{\varphi(e)}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n z_{in}(e) = \sqrt{n} \varphi(e) \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{in}(e)}_{\cong \mathbf{E} z_{in}(e)}. \end{aligned}$$

Je známo, že  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i-1} \xrightarrow{P} \mu$ . Potom také platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{in}(e) &= (\hat{\sigma}_n - \sigma)e + (\hat{\lambda}_n - \lambda) + (\hat{\rho}_n - \rho) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i-1} \\ &\cong (\hat{\sigma}_n - \sigma)e + (\hat{\lambda}_n - \lambda) + (\hat{\rho}_n - \rho)\mu = \mathbf{E}z_{in}(e), \end{aligned}$$

kde  $\cong$  znamená přibližnou hodnotu při konvergenci v pravděpodobnosti. Potom platí

$$\begin{aligned} \hat{W}_{2n}(e) &\sim \sqrt{n}\varphi(e)\mathbf{E}z_{in}(e) = \sqrt{n}\varphi(e)(\hat{\sigma}_n - \sigma)e + (\hat{\lambda}_n - \lambda) + (\hat{\rho}_n - \rho)\mu \\ &\sim D_n(e). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dále zkoumejme asymptotické rozdělení  $\hat{W}_n$ . To můžeme postupně podle (4.5), (4.10) a (4.11) rozložit následovně

$$\hat{W}_n = \hat{W}_{1n} + \hat{W}_{2n} \sim E_n + D_n.$$

Protože  $E_n$  je standardní empirický proces, pak  $E_n \xrightarrow{D} E$ , kde  $E$  je *obyčejný Brownův most* a  $D_n$  je konečně rozměrný konvergující ke gaussovskému procesu  $D$ , potom také  $\hat{W}_n \xrightarrow{D} \hat{W}$ , což je také gaussovský proces. Podle výsledku v [23] platí z asymptotické nezávislosti  $\hat{W}_n$  a  $D_n$  vztah

$$\text{cov } \hat{W} = \text{cov } E - \text{cov } D.$$

Podle [9] obdobně dostaneme, že  $W_n^* \xrightarrow{D} W^*$ . Toto je také gaussovský proces, pro který platí

$$\text{cov } \hat{W}^* = \text{cov } E - \text{cov } D^*,$$

kde  $D^*$  je limitou (v distribuci) veličin

$$\sqrt{n}\varphi(e) [(\hat{\sigma}_n^* - \sigma)e + (\hat{\mu}_n^* - \mu)].$$

Toto dále přeznačme následovně

$$D_n = \varphi(e)(A_n + eB_n), \quad D_n^* = \varphi(e)(A_n^* + eB_n^*),$$

kde je

$$A_n = \sqrt{n} [(\hat{\lambda}_n - \lambda) + (\hat{\rho}_n - \rho)] \rightarrow A, \quad A_n^* = \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \rightarrow A^*,$$



$$B_n = \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \rightarrow B, \quad B_n^* = \sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^* - \sigma) \rightarrow B^*. \quad (4.12)$$

Přímým výpočtem se pak dá ukázat, že  $A$  a  $B$  jsou nezávislé. To samé zjistíme pro  $A^*$  a  $B^*$ . Také se dá nahlédnout podle shody tvarů v (4.12), že  $B$  a  $B^*$  mají stejné rozdělení. Nahradíme-li  $\mu$  za  $\sum_{i=1}^n y_{i-1}$  v  $A_n$ , potom také můžeme dostat, že  $A$  a  $A^*$  mají stejné rozdělení. Potom také mají  $D$  a  $D^*$  stejné rozdělení a  $\text{cov } D = \text{cov } D^*$ . Z toho pak také plyne  $\text{cov } W = \text{cov } W^*$ . Protože však jsou  $W$  i  $W^*$  gaussovské procesy, potom mají stejné rozdělení. Ukázali jsme, že test normality, který se používá na základě testu normality reziduí u  $\hat{W}_n$  a  $\hat{W}_n^*$ , má asymptoticky stejné rozdělení. Tyto úvahy můžeme obdobně udělat i pro vyšší řády, ale pro autoregresi 1. a 2. řádu se doporučuje pro počet pozorování  $n \geq 20$ . U testování pak postupujeme následovně. Předpokládejme určitý řád autoregrese. Z naměřených dat odhadneme metodou nejmenších čtverců neznámé parametry a spočteme rezidua. Poté testujeme normalitu reziduí.



# Kapitola 5

## Porušení předpokladu nezávislosti

Pro většinu užívaných testů normality se v praxi často předpokládá nezávislost daných pozorování. V praxi se však mohou použít tyto testy na závislá data, která mohou být např. z AR nebo ARMA procesů. Pro zjištění, jak by tato vyšetřování mohla dopadnout použijeme program R, kde je několik takových testů. Tyto testy obvykle předpokládají kauzalitu procesů, proto se zde omezíme na kauzální lineární procesy. Bude nás zde hlavně zajímat, jak to je v situaci, kdy máme závislá pozorování z gaussovského procesu. Zde pak budeme zkoumat, v přibližně kolika případech dojde k nesprávnému zamítnutí normality tj. k chybě 1. druhu. Bude nás zajímat, zda je (alespoň přibližně) dodržena předepsaná hladina.

### 5.1 Testování normality u AR procesů

Připomeňme, že máme-li  $e_t$  opět jako bílý šum, pak AR(p) proces je definován předpisem

$$Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} = e_t. \quad (5.1)$$

Nechť

$$\begin{aligned} a(z) &= 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p, \\ \tilde{a}(z) &= z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \dots + a_p. \end{aligned}$$

Aby byl tento proces kauzální, musí být všechny kořeny polynomu  $a(z)$  vně jednotkového kruhu nebo ekvivalentně musí být všechny kořeny polynomu  $\tilde{a}(z)$  uvnitř jednotkového kruhu. Pro lepší přehlednost zde budeme používat druhou podmínku tj. budeme se zabývat AR procesy, které mají kořeny polynomu  $\tilde{a}(z)$  uvnitř jednotkového kruhu a budeme sledovat, jak se budou výsledky testování lišit v závislosti na blízkosti kořenů u jednotkového kruhu.

### 5.1.1 Procesy AR(1)

Pro jednoduchost začneme s AR(1) procesy. Pro  $\tilde{a}(z)$  ve tvaru  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  můžeme tyto procesy zapsat následovně

$$Y_t = aY_{t-1} + e_t.$$

Pokud by se hodnota  $a$  přiblížila k hodnotě 1, potom bychom téměř měli

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t.$$

Toto se nám může zdát jako největší možná chyba, kde se přímo načítají hodnoty z předchozího pozorování. Při zachování kauzality by se nám toto mohlo zdát jako nejhorší možný scénář. Pokud by se hodnota  $a$  přiblížila k hodnotě  $-1$ , potom bychom přibližně dostali

$$Y_t = -Y_{t-1} + e_t.$$

Zde se pak také načítá chyba s každým novým pozorováním, ale ne systematicky s časem, protože se zde mění znaménko. Mohli bychom tedy očekávat, že se chyby budou z části odečítat a záporný kořen by „tolik“ nemusel ovlivnit testy. Postup, kterým budeme toto v R-ku zjišťovat, bude následující. Zvolíme pevnou hladinu  $\alpha$  a počet simulací  $M = 1000$ . Potom vygenerujeme řadu z příslušného gaussovského AR procesu o délce  $N$ . Poté otestujeme normalitu této řady a je-li  $p$ -hodnota menší než zvolené  $\alpha$ , pak normalitu zamítneme. Toto provedeme  $M$ -krát a spočteme relativní četnost (nesprávného) zamítnutí normality. Tato relativní četnost pak je přibližně hladina u daných testů. Nebude-li řečeno jinak, budeme simulovat pro  $M = 1000$ ,  $\alpha = 0.05$  a s rozptylem bílého šumu  $\sigma^2 = 1$ . Důvod, proč volíme jednotkový rozptyl, je ten, že většina testů si dané hodnoty standardizuje, a tak bychom dostali stejné nebo obdobné výsledky. Po tomto užití zapíšeme výsledky do tabulek v dodatku.

Z tabulek 7.1 až 7.5 vidíme, že kladná závislost ovlivňuje dodržování hladiny u všech testů. Pokud se hodnota  $a$  „hodně“ přiblíží k hodnotě 1, potom není z žádných uvedených testů schopen tuto hladinu udržet a velikost chyby 1. druhu je nepřijatelně vysoká. Také zde můžeme vidět, že s rostoucím počtem pozorování se závislost akumuluje více, a tak je s dodržováním hladiny větší problém. Dle tabulek 7.6 až 7.10 vidíme, že u záporné závislosti je situace obdobná. Zde je však dodržování hladiny o něco lepší, než u kladné závislosti. Také můžeme vidět, že se zápornou závislostí nemá potíž D’Agostiniho test založený na šikmosti. Také Jarque Bera test zde také nemá tolik potíží s dodržováním hladiny oproti ostatním testům. Také zde můžeme pozorovat, že s rostoucí délkou řady je hladina u všech testů ovlivněna více. Tyto výsledky můžeme vidět také na obrázcích 7.1 až 7.13.

Pro zjištění síly těchto testů jsme použili exponenciální bílý šum. Podle obrázků 7.14 až 7.24 vidíme, že pro většinu testů snižuje závislost sílu. Síla je menší pro zápornou závislost. Toto vidíme nejvíce u Jarque Bera a D’Agostiniho testu. Také vidíme, že Kolmogorovův-Smirnovův test je nepoužitelný, a dále ho uvedeme jen pro zajímavost.

### 5.1.2 Procesy AR(2)

Dále se zabýváme AR(2) procesy. Zde je již situace o něco složitější. Je-li polynom  $\tilde{a}(z)$  tvaru  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ , potom zapisujeme tento proces ve tvaru

$$Y_t = (a + b)Y_{t-1} - abY_{t-2} + e_t.$$

Tento proces je kauzální pro  $a, b \in (-1, 1)$ . Proto bude mít „větší“ význam součet kořenů—zejména, pokud mají shodné znaménko. Bude-li naopak jejich součet „malý“ (nebo dokonce nulový) a tato čísla budou (v absolutní hodnotě) „menší“, potom bude „menší“ i jejich součin a tedy závislost. Této úvahy budeme při testování využívat.

Podle tabulek 7.11 až 7.14 vidíme, že dodržování hladiny testu více ovlivňuje, pokud má polynom  $\tilde{a}(z)$  dva kladné kořeny, jejichž součet dává koeficient u  $Y_{t-1}$ . V případě shodných záporných znamének kořenů je dodržování hladiny o něco lepší, než u kladných znamének. Přesto je dodržování hladiny horší, než u autoregrese 1. řádu. Grafické znázornění můžeme vidět na obrázcích 7.25 až 7.34.

Při zkoumání, jak je hladina dodržena v případě, že je součet kořenů nulový nebo „malý“ vidíme z tabulek 7.15 a 7.16, že pokud je rozdíl kořenů

„malý“ (nebo dokonce nulový) a přitom jejich velikost není (v absolutní hodnotě) „velká“, potom se hladina dodržuje „lépe“. Pouze Kolmogorovův-Smirnovův test zde dává horší výsledky.

### 5.1.3 Procesy AR(3) a AR procesy vyšších řádů

Dále bychom mohli postupovat podobným způsobem i pro vyšší řády. Zde však již můžeme očekávat, že situace bude o něco složitější. Pracujeme-li např. s AR procesy 3. řádu s polynomem  $\tilde{a}(z)$  tvaru  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ , potom tento proces píšeme ve tvaru

$$Y_t = (a + b + c)Y_{t-1} - (ab + bc + ac)Y_{t-2} + abcY_{t-3} + e_t.$$

Zde opět můžeme vidět, že součty kořenů nebo součty dvojic násobků kořenů dávají koeficienty u  $Y_{t-1}$ ,  $Y_{t-2}$  apod. Proto zde již můžeme očekávat „větší“ závislost. Uvedme pro tento případ ještě několik výsledků. Také zkusíme případ, že by součet kořenů byl nulový. Za zmínění ještě stojí, že se nám nemůže povést najít takové kořeny  $a, b, c$ , které by dávaly nulovost koeficientu u  $Y_{t-1}$  a zároveň u  $Y_{t-2}$ . Kdyby totiž  $(a + b + c) = 0$  a zároveň  $(ab + bc + ac) = 0$ , pak pomocí multinomického vzorce platí

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \underbrace{(ab + bc + ac)}_0 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Z tohoto by pak již plynulo, že kořeny jsou nulové, což by byl degenerovaný případ. Proto nemusíme zkoušet hledat další kombinaci kořenů, která by dávala další nulové koeficienty. Obdobný vztah pak můžeme čekat i u vyšších řádů.

Z tabulek 7.17 a 7.18 vidíme, že větší počet kořenů se shodnými znaménky ještě více ovlivňuje dodržování hladiny, přičemž kladné kořeny ovlivňují dodržování hladiny více. Toto bychom tedy mohli očekávat i u autoregrese vyšších řádů.

Z výsledků z tabulek 7.19 a 7.20 můžeme vidět, že pokud je součet kořenů (téměř) nulový a jejich velikost (v absolutní hodnotě) není příliš „vysoká“, potom již můžeme většinu testů prohlásit za prakticky spolehlivé. Obdobné výsledky potom čekáme také u AR procesů vyššího řádu.

## 5.2 Testování normality u ARMA procesů

Dále se zabýváme situací, která je u kauzálních ARMA procesů. Oproti AR procesům zde již bude situace trochu komplikovanější, protože se jedná o jejich zobecnění. Nejdříve připomeňme základní vlastnosti ARMA procesů. Opět zde předpokládáme, že  $\{e_t\}$  je bílý šum. Za těchto předpokladů potom je  $\{Y_t\}$  typu ARMA(p,q), pokud splňuje předpis

$$Y_t + a_1Y_{t-1} + a_2Y_{t-2} + \dots + a_pY_{t-p} = e_t + b_1e_{t-1} + b_2e_{t-2} + \dots + b_qe_{t-q}. \quad (5.2)$$

Obdobně jako u AR procesů definujeme

$$\begin{aligned} a(z) &= 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_pz^p, \\ \tilde{a}(z) &= z^p + a_1z^{p-1} + a_2z^{p-2} + \dots + a_p, \\ b(z) &= 1 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_qz^q, \\ \tilde{b}(z) &= z^q + b_1z^{q-1} + b_2z^{q-2} + \dots + a_q. \end{aligned}$$

Stejně jako u AR procesů zde platí, že proces  $\{Y_t\}$  je *kauzální*, pokud má polynom  $a(z)$  všechny kořeny *vně jednotkového kruhu* nebo ekvivalentně, pokud má polynom  $\tilde{a}(z)$  všechny kořeny *uvnitř jednotkového kruhu*. Obdobně zde také platí, že tento proces je *invertibilní*, pokud má polynom  $b(z)$  všechny kořeny *vně jednotkového kruhu* nebo ekvivalentně, pokud má polynom  $\tilde{b}(z)$  všechny kořeny *uvnitř jednotkového kruhu*. Pro lepší přehlednost zde budeme pracovat se značením polynomů  $\tilde{a}(z)$  a  $\tilde{b}(z)$ . Protože zde budeme hlavně potřebovat kauzalitu daného procesu, bude se zde potřeba soustředit opět jenom na kořeny polynomu  $\tilde{a}(z)$ .

Začneme s těmi nejjednoduššími ARMA procesy s polynomy  $\tilde{a}(z) = z + a_1 = z - a$  a  $\tilde{b}(z) = z + b$ , které splňují předpis

$$Y_t = -a_1Y_{t-1} + e_t + be_{t-1} = aY_{t-1} + e_t + be_{t-1}.$$

V tomto případě je  $a$  kořenem polynomu  $\tilde{a}(z)$  a proces je kauzální pouze pro  $a \in (-1, 1)$ . Parametr  $b$  pak může být libovolný. Pro  $b = 0$  již máme výsledky u AR(1) procesů. Proto zde nejdříve zkusíme, jak se situace mění se změnou parametru  $b$ .

Z tabulek 7.21 až 7.26 vidíme, že přírůstek bílého šumu s vyšším koeficientem a stejným znaménkem jako u kořenů polynomu  $\tilde{a}(z)$  může ještě o něco zvýšit závislost a ovlivnit dodržování hladiny. Pokud má koeficient

$b$  opačné znaménko, než tento kořen, dodržování hladiny testů se do meze kořene nebo jednotkového kruhu zlepšuje. Není již překvapující, že lepší dodržování hladiny bude u nižší závislosti. Vzdaluje-li se přírůstek bílého šumu (resp. koeficient  $b$ ) od jednotkového kruhu, dochází opět ke zhoršení dodržování hladiny. Něco podobného nahlédneme i u ARMA procesů s vyšším řádem autoregrese.

Z tabulek 7.27 až 7.30 je již lépe vidět, že opačný přírůstek bílého šumu než je převládající znaménko součtu kořenů polynomu  $\tilde{a}(z)$  může zlepšit dodržování hladiny. Toto zlepšení je však jen do (absolutní) hodnoty 1. Od ní se potom dodržování hladiny zase může zhoršit.

Dále zjišťujeme, jak bude dodržena hladina při klouzavých součtech vyššího řádu. Z tabulek 7.31 až 7.33 zjišťujeme, že při kladné, nebo nulové závislosti (kořenů polynomu  $\tilde{a}(z)$ ) mohou klouzavé součty se stejnými znaménky koeficientů polynomu  $\tilde{b}(z)$  také ovlivnit dodržování hladiny testů. Na druhou stranu při záporných kořenech polynomu  $\tilde{a}(z)$  může v některých případech dojít k dodržení hladiny např. pokud mají koeficienty polynomu  $\tilde{b}(z)$  stejná znaménka a stejné hodnoty a je jich sudý počet resp. řád klouzavých součtů je sudý. Tyto výsledky ukazují tabulky 7.34 a 7.35. V takovém případě nejspíš dochází k odčítání systematické závislosti a hladina je spíše dodržena.

Z těchto výsledků nás může napadnout otázka, zda nějaká kombinace (resp. koeficienty) klouzavých součtů nemohou vylepšit dodržování hladiny testů. Zdá se, že při shodném znaménku součtu kořenů u polynomů  $\tilde{a}(z)$  a  $\tilde{b}(z)$  by k tomu někdy mohlo dojít. Jako možnost se jeví zkoumat, kdy je hladina dodržena při závislosti kořenů polynomu  $\tilde{b}(z)$  v blízkosti jednotkového kruhu. Takovou závislost jsme již z části pozorovali u ARMA(1,1) procesů. Zkusme nyní touto cestou tuto vlastnost vyzkoumat. V úvahu tedy připadá zkoumat, kdy mají kořeny polynomů  $\tilde{a}(z)$  a  $\tilde{b}(z)$  *shodná znaménka*.

Podle tabulek 7.36 až 7.43 dostáváme, že k tomu, aby mohlo dojít k vylepšení dodržování hladiny testů u vyšších závislostí je třeba, aby všechny (nebo co nejvíce nenulových) kořenů polynomu  $\tilde{b}(z)$  bylo co nejbližší jednotkovému kruhu (ve smyslu znaménka kořenů  $\tilde{a}(z)$ ). Výsledky ukazují, že optimální počet takových kořenů je 2. Na druhou stranu je-li počet kořenů polynomu  $\tilde{a}(z)$  „větší“ tj. alespoň 3, potom tato kombinace sice vylepšuje dodržování hladiny, ale toto dodržování již nemusí být „dobré“. Zde samozřejmě také platí, že účinnost vylepšení závisí na velikosti kořenů polynomu  $\tilde{a}(z)$  a jsou-li „menší“, pak k vylepšení může dojít.

*Závěr:* Testování normality u AR a ARMA procesů běžnými testy nor-



mality, které předpokládají nezávislost, nedává vždy přijatelné výsledky. Při kladné závislosti má většina těchto testů problém s dodržováním hladiny a může dojít k vysoké chybě 1. druhu. Tato chyba je navíc zvýšena vyšším počtem pozorování. U většiny těchto testů navíc tato závislost snižuje sílu oproti případu, kdy máme nezávislá pozorování. Záporná závislost může také zvýšit chybu 1. druhu, která je oproti kladné závislosti nižší. Některé tyto testy při záporné závislosti neporušují hladinu a sníží chybu 1. druhu. U těchto testů pak dochází při záporné závislosti k poklesu síly. Záporná závislost však snižuje sílu také u všech testů. Tyto testy se dají na AR a ARMA procesy použít běžným způsobem při „malé“ závislosti. Při některých speciálních ARMA modelech může dojít k systematickému odečtení závislostí a na ně jsou tyto testy spolehlivější.



# Kapitola 6

## Testování normality bez předpokladu nezávislosti pozorování

Zkusme dále zjistit, jaké bude dodržování hladiny u testů, kterými jsme se zabývali v prvních čtyřech kapitolách.

### 6.1 Testování normality v případě známých autokorelačních koeficientů

Začněme s testem z první kapitoly, který požaduje znalost autokorelačních koeficientů. Zde využijme toho, že víme, z jakého AR či ARMA procesu data simulujeme. Pomocí programovacího jazyka R dokážeme snadno zjistit dané autokorelační koeficienty. Název tohoto testu bude odpovídat autorovi, od kterého pochází. Test založený na výběrové šikmosti budeme nazývat *Lomnickiskewness*, test založený na výběrové špičatosti nazveme *Lomnickikurtosis* a test založený na výběrové šikmosti a špičatosti nazveme *Lomnickiomnibus*.

Tabulky 7.44 až 7.53 ukazují, že hladina bude u tohoto testu ve většině případech dodržena. Je vidět, že při vyšších záporných kořenech (v absolutní hodnotě) polynomu  $\tilde{a}(z)$  do hranice jednotkového kruhu dochází při menším počtu pozorování k nedodržení hladiny, nebo v případě testu založeného na špičatosti k podhodnocení hladiny. Při větším počtu pozorování je dodržování hladiny u záporné závislosti lepší. Toto lze vysvětlit např. tím,

že tento test normality vyžaduje větší počet pozorování pro asymptotické rozdělení za hypotézy normality. Vidíme však také, že s rostoucí kladnou závislostí bude tento test hladinu spíše podhodnocovat. Toto můžeme také vidět z obrázků 7.35 až 7.37.

Pro vyšší řád autoregrese vidíme z tabulek 7.54 až 7.63, že při vyšších kladných kořenech polynomu  $\tilde{a}(z)$  (do hranice jednotkového kruhu) je podhodnocena hladina—zejména pro menší počet pozorování. Na druhou stranu při záporných kořenech v blízkosti jednotkového kruhu může dojít k nedodržení hladiny—zejména pro menší počet pozorování. U testu založeném na špičatosti je i u záporných kořenů hladina podhodnocena. Také můžeme vidět, že s rostoucím počtem pozorování je hladina dodržována přesněji. Toto můžeme také vidět z obrázků 7.38 až 7.43.

Přirozeným způsobem nás dále může napadnout otázka, jak to je se silou tohoto testu. Zdá se totiž, že při podhodnocení hladiny by se mohla snížit síla. Toto zkusme nyní ověřit. Uvažme opět pro toto zjištění alternativu exponenciálního bílého šumu. Z tabulek 7.64 až 7.81 vidíme, že tento test nemá spíše problém s dodržováním hladiny, ale se silou. Převládá-li pozitivní závislost, tak ve všech třech případech dochází k velkému poklesu síly. U záporné závislosti je problém se silou o něco menší. Test založený na špičatosti má při záporné závislosti také velmi malou sílu. Toto můžeme vidět také z obrázků 7.44 až 7.49.

*Závěr:* Tento test bychom doporučili použít v případě, že máme k dispozici „velké“ množství pozorování tj. stovky až tisíce a v případě, že není extrémní závislost (ať už kladná, nebo záporná). Z těchto tří testů se asi nejvíce hodí k použití omnibus test. Přesto tyto testy mají ještě jednu nevýhodu. Vyžadují znalost všech nebo velkého množství autokorelačních koeficientů. Jejich odhady bychom při nevelkém množství pozorování stejně nemohli použít.

## 6.2 Testování normality u autoregresních závislostí

Dále vyzkoušíme, jak to je s dodržováním hladiny u dalšího z testů. Zde požadujeme, aby závislost byla autoregresní a abychom znali řád autoregrese. Oproti předešlému případu při omezení se na autoregresní posloupnost tak máme menší požadavek. Z naměřených dat tedy metodou nejmenších čtverců spočteme rezidua a otestujeme normalitu některým z běžných testů norma-

lity, který je implementován v programu R.

Z výsledků v tabulkách 7.82 až 7.89 tak vidíme, že u autoregrese 1. řádu neměl žádný druh závislosti problém s dodržením hladiny. Pro vyšší řády můžeme pomocí tabulek 7.90 až 7.96 vidět obdobné výsledky. Grafické znázornění těchto výsledků můžeme vidět z obrázků 7.50 až 7.64. Vidíme tak, že při správném odhadu řádu autoregrese dostáváme téměř učebnicové dodržení hladiny testů. Za zmínění stojí, že tato metoda má při menším počtu pozorování nepatrné problémy, ale při jeho zvýšení se zdají výsledky v pořádku.

Zkusme ještě vyzkoumat, jaká bude situace při podhodnoceném a nadhodnoceném řádu autoregrese. Z tabulek 7.97 až 7.106 vidíme, že podhodnocení řádu může ovlivnit dodržení hladiny testu—zejména u vyššího počtu pozorování a u kladné nebo extrémní závislosti. Na druhou stranu také vidíme, že je-li závislost „rozumná“, potom i při podhodnoceném odhadu řádu autoregrese může být hladina celkem dodržena. Toto vidíme také z obrázků 7.65 až 7.74. Poznamenejme ještě, že tyto výsledky jsou obdobné výsledkům u autoregrese 1. řádu při běžných testech normality. Důvod nejspíš bude, že jsme odhadli o jeden řád méně, než ve skutečnosti byl. U nadhodnoceného odhadu řádu autoregresního modelu vidíme z tabulek 7.107 až 7.114, že nedochází k významnému porušení hladiny. Grafické vyjádření těchto výsledků můžeme vidět na obrázcích 7.75 až 7.84.

Zabývejme se ještě silou těchto testů. Pro jednoduchost zde opět budeme uvažovat exponenciální bílý šum. Z tabulek 7.115 až 7.128 je vidět, že při správně odhadnutém řádu může větší závislost sílu oslabit, ale jen nepatrně. Na druhou stranu pro „rozumný“ počet pozorování je i v takovém případě potřebná síla dosažena. Grafické vyjádření této síly pak můžeme pozorovat na obrázcích 7.85 až 7.99.

Sledujme ještě sílu, kdy je řád podhodnocen resp. nadhodnocen. Z tabulek 7.129 až 7.146 vidíme, že u podhodnoceného odhadu řádu může větší závislost snížit potřebnou sílu, jako tomu bylo např. u autoregrese 1. řádu. Při nadhodnoceném odhadovaném řádu dostáváme obdobný výsledek jako při správně odhadnutém řádu. Grafické vyjádření těchto výsledků najdeme na obrázcích 7.100 až 7.119.

*Závěr:* Metodu testování normality pomocí reziduí bychom tedy mohli používat v případě autoregresního modelu se známým nebo přibližně známým řádem. Váháme-li např. mezi dvěma sousedními řády, potom je lepší zvolit ten vyšší. Pro potřebnou sílu (do autoregrese 3. řádu) nebo přesnost (jako v případě (iid)) bychom tak mohli doporučit mít alespoň 50 až 100

pozorování a testovat normalitu např. běžným Shapiro-Wilkovým testem.

### 6.3 Testování normality pomocí minimalizace kvadratické formy

Další z testů, který nepředpokládá nezávislost, byl test založený na minimalizaci kvadratické formy. Tento test budeme značit (opět po autorovi) jako *Epps*. Sledujme tedy, jak je u tohoto testu dodržena hladina.

Z výsledků v tabulkách 7.147 až 7.176 je vidět, že obecně pro dodržení hladiny je potřeba více pozorování a také, že závislost od určité meze může ovlivnit dodržování hladiny. Tato mez se však s vyšším počtem pozorování zvyšuje. Také se zdá, že menší závislost může vylepšit dodržování hladiny, ale od určité meze se její dodržování zase zhoršuje. Tyto výsledky můžeme vidět také na obrázcích 7.120 až 7.122

Zkusme ještě zjistit, jak to bude se silou tohoto testu. Toto zjištění provedeme opět s exponenciálním bílým šumem. Podle tabulek 7.177 až 7.186 vidíme, že vyšší hodnota závislosti (na obě strany) snižuje sílu s výjimkou extrémní závislosti. Grafické vyjádření těchto výsledků můžeme vidět na obrázcích 7.123 až 7.125.

*Závěr:* Vyšší závislost u tohoto testu může ovlivnit dodržování hladiny a také snížit potřebnou sílu. Tyto nedostatky se však do určité meze dají odstranit vyšším počtem pozorování. Oproti předešlým testům není u tohoto testu potřeba předpokládat znalost autoregresní struktury nebo autokorelačních koeficientů. Pro účinnost tohoto testu je však potřeba mít k dispozici „velký“ počet pozorování tj. stovky či tisíce.

### 6.4 Testování normality pomocí odhadu spektra a bispektra

Tento test se jeví výpočetně velmi náročný. V některých případech bylo obtížnější určit správnost testů, protože tento test vyžaduje značnou délku řady pro „dobrý“ konzistentní odhad spektra a bispektra. Použitelnost tohoto testu tak nemůže být zjištěna. Můžeme zde jen usoudit, že tento test bude potřebovat značný počet pozorování a že výsledky by mohly být obdobné výsledkům z minulého testu (pro vyšší počet pozorování).

# Kapitola 7

## Dodatek

Používali jsme několik značení pro různé testy normality. Testy, které jsou implementovány v programovacím jazyku R, se mohou použít takto

```
library(FitAR)
library(nortest)
library(fBasics)
```

```
z = rnorm(100)
```

```
JarqueBeraTest(z) # JarqueBera
shapiro.test(z)   # Shapiro
ad.test(z)        # Ad
cvm.test(z)       # Cvm
lillie.test(z)    # Lillie
pearson.test(z)   # Pearson
sf.test(z)        # Sf
ksnormTest(z)     # Ksnorm
normalTest(z)     # Normal
dagoTest(z)       # DagoSkewness # DagoKurtosis # DagoOmnibus
```

Dané výsledky v následujících tabulkách a grafech byly vždy získány pro počet simulací  $M = 1000$ , zvolenou hladinu  $\alpha = 0.05$  a rozptyl bílého šumu  $\sigma^2 = 1$ . Před každou sadou těchto simulací bylo nastaveno `set.seed(8)`. Tyto výsledky (i mnohé obdobné) můžeme také dostat z příložených skriptů. Příloha tedy obsahuje skripty `Eppstest.R`, `Lomnickitest.R` a `Piercetest.R`.

Tyto skripty obsahují naprogramované testy, které vznikaly podle příslušných autorů. `Lomnickitest.R` tedy obsahuje naprogramovaný test založený na výběrové šikmosti, špičatosti a autokorelačních koeficientech, `Piercetetest.R` obsahuje zmíněné běžné testy normality, které jsou modifikovány na test reziduí podle uvažovaného řádu autoregrese a `Eppstest.R` obsahuje test založený na minimalizaci kvadratické formy. Pro běžné testy normality zde jsou skripty `ARIMAtestyrnorm.R` resp. `ARIMAtestyrexp.R`, kde jsou naprogramovány funkce na výpočet simulovaných  $p$ -hodnot pro mnoho různých AR či ARMA procesů s normálním resp. exponenciálním bílým šumem. Pro zmíněné testy bez předpokladu nezávislosti jsou tyto funkce naprogramovány ve skriptech `Eppstestnorm.R`, `Lomnickitestnorm.R`, `Piercetestnorm.R` resp. `Eppstestexp.R`, `Lomnickitestexp.R`, `Piercetestexp.R` s normálním resp. exponenciálním bílým šumem. Ještě zde jsou přiloženy skripty `grafy1.R`, `grafy2.R` a `grafy3.R`. Tyto skripty rovnou obsahují numerické výsledky AR(1), AR(2) a AR(3) procesů, které šly vyjádřit graficky. Příkazy pro grafické vykreslení jsou také v těchto skriptech.



$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.017	0.012	0.014	0.018	0.024	0.025	0.016
Shapiro	0.212	0.125	0.088	0.063	0.055	0.046	0.052
Ad	0.196	0.139	0.107	0.096	0.057	0.051	0.058
Cvm	0.196	0.137	0.095	0.090	0.068	0.057	0.042
Lillie	0.153	0.110	0.073	0.065	0.071	0.055	0.051
Pearson	0.129	0.102	0.075	0.056	0.062	0.050	0.047
Sf	0.133	0.091	0.079	0.064	0.044	0.055	0.059
Ksnorm	0.520	0.431	0.354	0.285	0.228	0.164	0.149
Normal	0.205	0.139	0.097	0.065	0.069	0.060	0.045
DagoSkewness	0.060	0.051	0.055	0.039	0.054	0.054	0.048
DagoKurtosis	0.141	0.102	0.074	0.069	0.041	0.051	0.044
DagoOmnibus	0.105	0.079	0.052	0.050	0.046	0.050	0.054

Tabulka 7.1: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.100	0.061	0.048	0.037	0.043	0.033	0.044
Shapiro	0.528	0.289	0.181	0.122	0.075	0.068	0.054
Ad	0.517	0.309	0.169	0.120	0.068	0.067	0.053
Cvm	0.485	0.271	0.171	0.109	0.082	0.068	0.072
Lillie	0.418	0.252	0.161	0.091	0.066	0.052	0.057
Pearson	0.370	0.193	0.119	0.088	0.065	0.055	0.044
Sf	0.436	0.244	0.133	0.100	0.073	0.055	0.048
Ksnorm	0.534	0.596	0.448	0.372	0.261	0.176	0.148
Normal	0.493	0.314	0.181	0.118	0.074	0.066	0.062
DagoSkewness	0.186	0.138	0.095	0.099	0.081	0.065	0.065
DagoKurtosis	0.381	0.216	0.120	0.090	0.060	0.051	0.047
DagoOmnibus	0.429	0.204	0.127	0.078	0.061	0.060	0.048

Tabulka 7.2: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.456	0.170	0.105	0.075	0.067	0.056	0.049
Shapiro	0.778	0.419	0.228	0.126	0.095	0.072	0.061
Ad	0.760	0.425	0.251	0.147	0.095	0.061	0.045
Cvm	0.679	0.390	0.208	0.122	0.085	0.071	0.059
Lillie	0.623	0.312	0.184	0.119	0.091	0.074	0.049
Pearson	0.609	0.244	0.104	0.070	0.067	0.053	0.054
Sf	0.669	0.321	0.191	0.104	0.082	0.073	0.055
Ksnorm	0.629	0.698	0.585	0.434	0.314	0.213	0.152
Normal	0.788	0.420	0.207	0.133	0.088	0.059	0.055
DagoSkewness	0.295	0.211	0.163	0.093	0.070	0.066	0.050
DagoKurtosis	0.519	0.259	0.148	0.085	0.063	0.062	0.049
DagoOmnibus	0.687	0.358	0.173	0.125	0.085	0.076	0.071

Tabulka 7.3: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.731	0.319	0.157	0.104	0.066	0.052	0.044
Shapiro	0.917	0.518	0.252	0.157	0.091	0.082	0.057
Ad	0.883	0.464	0.244	0.141	0.101	0.068	0.061
Cvm	0.837	0.430	0.224	0.149	0.093	0.073	0.068
Lillie	0.812	0.356	0.178	0.117	0.091	0.071	0.059
Pearson	0.772	0.247	0.124	0.082	0.055	0.059	0.058
Sf	0.889	0.452	0.208	0.121	0.097	0.074	0.064
Ksnorm	0.752	0.869	0.794	0.600	0.411	0.254	0.155
Normal	0.920	0.540	0.259	0.156	0.090	0.069	0.054
DagoSkewness	0.449	0.291	0.184	0.143	0.097	0.087	0.059
DagoKurtosis	0.591	0.290	0.154	0.099	0.072	0.071	0.056
DagoOmnibus	0.831	0.413	0.241	0.132	0.098	0.070	0.058

Tabulka 7.4: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.890	0.420	0.232	0.146	0.082	0.059	0.051
Shapiro	0.984	0.584	0.307	0.165	0.114	0.093	0.074
Ad	0.973	0.538	0.259	0.142	0.073	0.062	0.058
Cvm	0.893	0.476	0.259	0.124	0.095	0.068	0.072
Lillie	0.912	0.426	0.194	0.116	0.070	0.068	0.050
Pearson	0.932	0.282	0.113	0.065	0.067	0.070	0.056
Sf	0.975	0.535	0.270	0.153	0.105	0.065	0.064
Ksnorm	0.922	0.994	0.969	0.889	0.652	0.386	0.210
Normal	0.987	0.597	0.319	0.164	0.094	0.067	0.061
DagoSkewness	0.577	0.353	0.228	0.140	0.107	0.085	0.070
DagoKurtosis	0.705	0.314	0.190	0.113	0.083	0.063	0.049
DagoOmnibus	0.907	0.515	0.283	0.173	0.108	0.077	0.067

Tabulka 7.5: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.000	0.003	0.002	0.008	0.010	0.011
Shapiro	0.608	0.127	0.034	0.028	0.032	0.037
Ad	0.588	0.116	0.062	0.041	0.023	0.042
Cvm	0.599	0.120	0.049	0.037	0.043	0.045
Lillie	0.567	0.081	0.036	0.029	0.038	0.039
Pearson	0.488	0.095	0.042	0.045	0.045	0.043
Sf	0.505	0.061	0.024	0.026	0.039	0.039
Ksnorm	0.843	0.444	0.168	0.067	0.021	0.023
Normal	0.602	0.119	0.034	0.019	0.034	0.034
DagoSkewness	0.001	0.003	0.004	0.013	0.019	0.042
DagoKurtosis	0.718	0.221	0.114	0.048	0.056	0.039
DagoOmnibus	0.633	0.162	0.053	0.048	0.027	0.041

Tabulka 7.6: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.249	0.010	0.007	0.010	0.022	0.026
Shapiro	0.640	0.107	0.047	0.025	0.033	0.044
Ad	0.628	0.141	0.042	0.043	0.035	0.053
Cvm	0.611	0.106	0.052	0.036	0.039	0.038
Lillie	0.547	0.078	0.041	0.034	0.032	0.036
Pearson	0.591	0.098	0.049	0.047	0.036	0.045
Sf	0.573	0.069	0.024	0.021	0.029	0.041
Ksnorm	0.967	0.764	0.419	0.177	0.084	0.039
Normal	0.636	0.118	0.041	0.028	0.034	0.030
DagoSkewness	0.000	0.001	0.008	0.010	0.026	0.025
DagoKurtosis	0.712	0.300	0.146	0.087	0.065	0.056
DagoOmnibus	0.693	0.183	0.078	0.059	0.042	0.040

Tabulka 7.7: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.458	0.029	0.020	0.018	0.017	0.019
Shapiro	0.670	0.146	0.051	0.033	0.025	0.029
Ad	0.658	0.145	0.056	0.030	0.033	0.038
Cvm	0.649	0.139	0.066	0.033	0.035	0.035
Lillie	0.621	0.081	0.046	0.047	0.048	0.036
Pearson	0.590	0.103	0.055	0.057	0.049	0.056
Sf	0.609	0.116	0.036	0.024	0.033	0.048
Ksnorm	0.999	0.959	0.711	0.370	0.134	0.041
Normal	0.683	0.151	0.051	0.038	0.041	0.037
DagoSkewness	0.000	0.000	0.005	0.005	0.018	0.031
DagoKurtosis	0.762	0.306	0.147	0.094	0.084	0.070
DagoOmnibus	0.681	0.207	0.084	0.055	0.042	0.047

Tabulka 7.8: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.566	0.065	0.029	0.042	0.024	0.028
Shapiro	0.785	0.163	0.059	0.039	0.023	0.030
Ad	0.752	0.163	0.073	0.042	0.030	0.037
Cvm	0.685	0.131	0.063	0.043	0.037	0.042
Lillie	0.600	0.096	0.042	0.040	0.036	0.039
Pearson	0.645	0.099	0.061	0.053	0.042	0.046
Sf	0.714	0.113	0.047	0.048	0.038	0.042
Ksnorm	1.000	1.000	0.957	0.677	0.284	0.088
Normal	0.779	0.168	0.054	0.039	0.040	0.043
DagoSkewness	0.000	0.000	0.003	0.007	0.020	0.038
DagoKurtosis	0.739	0.297	0.160	0.121	0.090	0.088
DagoOmnibus	0.706	0.237	0.115	0.059	0.040	0.048

Tabulka 7.9: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.652	0.146	0.073	0.036	0.026	0.027
Shapiro	0.853	0.170	0.074	0.048	0.045	0.044
Ad	0.803	0.159	0.060	0.036	0.033	0.039
Cvm	0.739	0.129	0.077	0.046	0.049	0.043
Lillie	0.658	0.087	0.042	0.042	0.037	0.057
Pearson	0.719	0.089	0.057	0.044	0.047	0.060
Sf	0.811	0.147	0.050	0.043	0.039	0.044
Ksnorm	1.000	1.000	1.000	0.987	0.760	0.322
Normal	0.851	0.186	0.066	0.041	0.029	0.038
DagoSkewness	0.000	0.000	0.001	0.007	0.022	0.029
DagoKurtosis	0.739	0.332	0.174	0.112	0.080	0.056
DagoOmnibus	0.697	0.232	0.106	0.072	0.054	0.056

Tabulka 7.10: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.847	0.541	0.293	0.194	0.127	0.089	0.079
Shapiro	0.997	0.947	0.746	0.525	0.342	0.206	0.113
Ad	0.981	0.906	0.717	0.484	0.358	0.221	0.132
Cvm	0.960	0.854	0.637	0.435	0.306	0.195	0.105
Lillie	0.924	0.792	0.585	0.360	0.247	0.179	0.109
Pearson	0.931	0.842	0.539	0.301	0.152	0.110	0.079
Sf	0.984	0.887	0.642	0.449	0.284	0.189	0.116
Ksnorm	0.563	0.898	0.918	0.906	0.820	0.648	0.431
Normal	0.997	0.950	0.769	0.520	0.330	0.196	0.138
DagoSkewness	0.464	0.352	0.308	0.232	0.169	0.147	0.115
DagoKurtosis	0.722	0.585	0.388	0.263	0.202	0.128	0.079
DagoOmnibus	0.944	0.784	0.546	0.396	0.265	0.174	0.101

Tabulka 7.11: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.955	0.712	0.482	0.299	0.206	0.129	0.075
Shapiro	1.000	0.987	0.857	0.598	0.408	0.245	0.137
Ad	1.000	0.951	0.784	0.544	0.363	0.203	0.128
Cvm	0.906	0.892	0.675	0.483	0.335	0.199	0.121
Lillie	0.998	0.862	0.626	0.413	0.262	0.176	0.105
Pearson	0.999	0.907	0.588	0.291	0.166	0.102	0.071
Sf	0.998	0.954	0.733	0.488	0.342	0.218	0.141
Ksnorm	0.686	0.990	0.994	0.990	0.956	0.861	0.595
Normal	1.000	0.973	0.819	0.588	0.380	0.225	0.124
DagoSkewness	0.593	0.438	0.363	0.320	0.227	0.173	0.126
DagoKurtosis	0.778	0.560	0.397	0.272	0.185	0.133	0.106
DagoOmnibus	0.972	0.792	0.605	0.445	0.311	0.200	0.137

Tabulka 7.12: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.822	0.247	0.073	0.029	0.020	0.021
Shapiro	0.953	0.617	0.297	0.130	0.072	0.035
Ad	0.913	0.555	0.281	0.158	0.085	0.046
Cvm	0.880	0.475	0.247	0.135	0.076	0.030
Lillie	0.832	0.398	0.172	0.085	0.050	0.042
Pearson	0.894	0.441	0.179	0.122	0.064	0.054
Sf	0.921	0.484	0.200	0.082	0.046	0.041
Ksnorm	1.000	1.000	1.000	1.000	0.982	0.789
Normal	0.954	0.625	0.302	0.134	0.062	0.028
DagoSkewness	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
DagoKurtosis	0.922	0.615	0.418	0.307	0.206	0.147
DagoOmnibus	0.905	0.530	0.341	0.195	0.121	0.069

Tabulka 7.13: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.821	0.387	0.157	0.081	0.054	0.028
Shapiro	0.984	0.661	0.326	0.131	0.086	0.029
Ad	0.980	0.592	0.303	0.168	0.094	0.047
Cvm	0.719	0.500	0.254	0.133	0.074	0.054
Lillie	0.915	0.377	0.177	0.082	0.053	0.039
Pearson	0.970	0.531	0.182	0.096	0.063	0.059
Sf	0.979	0.531	0.267	0.102	0.066	0.047
Ksnorm	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.988
Normal	0.988	0.639	0.297	0.155	0.077	0.047
DagoSkewness	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
DagoKurtosis	0.923	0.592	0.411	0.281	0.217	0.163
DagoOmnibus	0.899	0.531	0.331	0.205	0.143	0.085

Tabulka 7.14: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.90
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.80
JarqueBera	0.484	0.101	0.064	0.046	0.044	0.072
Shapiro	0.805	0.243	0.093	0.056	0.044	0.159
Ad	0.774	0.222	0.104	0.056	0.042	0.155
Cvm	0.743	0.210	0.109	0.063	0.059	0.142
Lillie	0.666	0.181	0.091	0.067	0.056	0.137
Pearson	0.649	0.125	0.062	0.055	0.063	0.105
Sf	0.735	0.176	0.087	0.057	0.060	0.126
Ksnorm	0.762	0.577	0.353	0.200	0.142	0.489
Normal	0.770	0.223	0.103	0.065	0.046	0.174
DagoSkewness	0.245	0.148	0.095	0.064	0.046	0.120
DagoKurtosis	0.570	0.147	0.064	0.063	0.047	0.102
DagoOmnibus	0.691	0.193	0.093	0.066	0.050	0.148

Tabulka 7.15: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.90
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.80
JarqueBera	0.702	0.149	0.071	0.044	0.046	0.117
Shapiro	0.899	0.268	0.105	0.062	0.043	0.203
Ad	0.878	0.277	0.121	0.077	0.068	0.202
Cvm	0.819	0.244	0.111	0.069	0.057	0.168
Lillie	0.776	0.182	0.087	0.058	0.048	0.138
Pearson	0.759	0.131	0.058	0.049	0.065	0.105
Sf	0.859	0.260	0.115	0.076	0.071	0.197
Ksnorm	0.850	0.776	0.484	0.231	0.140	0.654
Normal	0.888	0.262	0.106	0.077	0.058	0.182
DagoSkewness	0.412	0.191	0.117	0.066	0.061	0.171
DagoKurtosis	0.571	0.156	0.082	0.064	0.051	0.113
DagoOmnibus	0.774	0.234	0.101	0.071	0.065	0.178

Tabulka 7.16: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .



$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
$c$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.984	0.834	0.600	0.451	0.327	0.236	0.148
Shapiro	1.000	0.999	0.966	0.817	0.635	0.457	0.293
Ad	1.000	0.992	0.889	0.756	0.585	0.416	0.279
Cvm	0.914	0.967	0.846	0.693	0.524	0.372	0.245
Lillie	0.977	0.935	0.794	0.611	0.436	0.318	0.178
Pearson	0.979	0.972	0.830	0.596	0.360	0.200	0.119
Sf	1.000	0.995	0.902	0.743	0.558	0.366	0.253
Ksnorm	0.639	0.981	0.998	0.999	0.999	0.990	0.951
Normal	1.000	0.998	0.953	0.805	0.639	0.437	0.271
DagoSkewness	0.645	0.478	0.427	0.367	0.305	0.262	0.220
DagoKurtosis	0.808	0.651	0.512	0.390	0.304	0.232	0.154
DagoOmnibus	0.989	0.883	0.723	0.576	0.460	0.367	0.240

Tabulka 7.17: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
$c$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.885	0.475	0.265	0.153	0.085	0.075
Shapiro	0.993	0.814	0.513	0.311	0.153	0.093
Ad	0.973	0.740	0.430	0.265	0.160	0.103
Cvm	0.571	0.668	0.402	0.250	0.164	0.097
Lillie	0.916	0.548	0.263	0.172	0.094	0.064
Pearson	0.949	0.718	0.362	0.186	0.114	0.072
Sf	0.981	0.747	0.395	0.227	0.111	0.084
Ksnorm	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Normal	0.992	0.840	0.520	0.283	0.168	0.100
DagoSkewness	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
DagoKurtosis	0.941	0.682	0.489	0.404	0.312	0.246
DagoOmnibus	0.935	0.599	0.434	0.304	0.213	0.135

Tabulka 7.18: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	0.90	0.90	0.80	0.80	0.70	0.70
$b$	-0.80	-0.50	-0.70	-0.40	-0.60	-0.40
$c$	-0.10	-0.40	-0.10	-0.40	-0.10	-0.30
JarqueBera	0.063	0.045	0.045	0.042	0.043	0.041
Shapiro	0.155	0.099	0.077	0.059	0.054	0.047
Ad	0.149	0.109	0.061	0.054	0.060	0.048
Cvm	0.138	0.103	0.084	0.073	0.054	0.060
Lillie	0.126	0.082	0.065	0.052	0.071	0.059
Pearson	0.085	0.062	0.062	0.065	0.040	0.053
Sf	0.128	0.098	0.076	0.063	0.059	0.054
Ksnorm	0.487	0.423	0.296	0.240	0.174	0.160
Normal	0.144	0.108	0.063	0.055	0.067	0.054
DagoSkewness	0.125	0.080	0.076	0.064	0.057	0.051
DagoKurtosis	0.091	0.073	0.063	0.056	0.059	0.055
DagoOmnibus	0.117	0.099	0.078	0.061	0.071	0.067

Tabulka 7.19: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	0.90	0.90	0.80	0.80	0.70	0.70
$b$	-0.80	-0.50	-0.70	-0.40	-0.60	-0.40
$c$	-0.10	-0.40	-0.10	-0.40	-0.10	-0.30
JarqueBera	0.115	0.089	0.063	0.052	0.043	0.038
Shapiro	0.178	0.150	0.085	0.065	0.050	0.043
Ad	0.198	0.162	0.100	0.080	0.063	0.064
Cvm	0.166	0.128	0.088	0.057	0.058	0.051
Lillie	0.149	0.095	0.074	0.059	0.061	0.064
Pearson	0.096	0.077	0.078	0.057	0.049	0.055
Sf	0.166	0.108	0.090	0.074	0.069	0.068
Ksnorm	0.645	0.519	0.367	0.302	0.211	0.184
Normal	0.178	0.138	0.105	0.087	0.071	0.068
DagoSkewness	0.139	0.103	0.089	0.065	0.060	0.054
DagoKurtosis	0.108	0.079	0.065	0.058	0.075	0.072
DagoOmnibus	0.183	0.136	0.097	0.083	0.065	0.062

Tabulka 7.20: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b_1$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.50	1.80
JarqueBera	0.380	0.394	0.398	0.398	0.400	0.399	0.391
Shapiro	0.622	0.640	0.650	0.652	0.646	0.637	0.632
Ad	0.556	0.576	0.588	0.586	0.587	0.581	0.571
Cvm	0.523	0.538	0.545	0.548	0.551	0.546	0.536
Lillie	0.439	0.447	0.456	0.455	0.466	0.470	0.455
Pearson	0.343	0.364	0.381	0.386	0.377	0.364	0.347
Sf	0.533	0.552	0.557	0.561	0.560	0.557	0.556
Ksnorm	0.941	0.959	0.976	0.985	0.987	0.991	0.993
Normal	0.630	0.643	0.654	0.658	0.655	0.654	0.647
DagoSkewness	0.313	0.318	0.319	0.319	0.319	0.318	0.318
DagoKurtosis	0.341	0.348	0.350	0.354	0.354	0.350	0.348
DagoOmnibus	0.478	0.484	0.487	0.488	0.489	0.486	0.483

Tabulka 7.21: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b_1$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.50	1.80
JarqueBera	0.213	0.221	0.228	0.229	0.230	0.225	0.223
Shapiro	0.389	0.413	0.421	0.428	0.425	0.420	0.412
Ad	0.341	0.360	0.366	0.366	0.369	0.362	0.356
Cvm	0.307	0.330	0.341	0.339	0.339	0.333	0.326
Lillie	0.255	0.279	0.279	0.276	0.275	0.259	0.259
Pearson	0.174	0.186	0.204	0.195	0.192	0.189	0.197
Sf	0.309	0.338	0.352	0.354	0.350	0.338	0.324
Ksnorm	0.944	0.969	0.984	0.989	0.990	0.997	0.998
Normal	0.384	0.414	0.427	0.428	0.424	0.411	0.402
DagoSkewness	0.226	0.234	0.236	0.235	0.234	0.233	0.232
DagoKurtosis	0.207	0.215	0.220	0.220	0.219	0.217	0.212
DagoOmnibus	0.341	0.357	0.365	0.369	0.367	0.356	0.350

Tabulka 7.22: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b_1$	-0.40	-0.60	-0.80	-1.00	-1.20	-1.50
JarqueBera	0.136	0.058	0.034	0.040	0.040	0.049
Shapiro	0.244	0.089	0.040	0.041	0.054	0.065
Ad	0.220	0.100	0.048	0.050	0.048	0.069
Cvm	0.211	0.090	0.055	0.042	0.045	0.071
Lillie	0.174	0.069	0.042	0.057	0.060	0.055
Pearson	0.123	0.051	0.057	0.053	0.065	0.077
Sf	0.219	0.084	0.047	0.034	0.041	0.054
Ksnorm	0.627	0.415	0.164	0.001	0.298	0.806
Normal	0.247	0.100	0.048	0.060	0.066	0.079
DagoSkewness	0.174	0.088	0.041	0.043	0.041	0.059
DagoKurtosis	0.140	0.054	0.054	0.052	0.056	0.073
DagoOmnibus	0.205	0.079	0.065	0.056	0.061	0.073

Tabulka 7.23: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b_1$	-0.40	-0.60	-0.80	-1.00	-1.20	-1.50
JarqueBera	0.069	0.043	0.040	0.039	0.048	0.038
Shapiro	0.100	0.048	0.053	0.044	0.049	0.058
Ad	0.086	0.056	0.057	0.051	0.058	0.047
Cvm	0.090	0.053	0.043	0.034	0.050	0.048
Lillie	0.085	0.058	0.065	0.056	0.064	0.064
Pearson	0.068	0.055	0.049	0.051	0.057	0.047
Sf	0.091	0.058	0.048	0.052	0.050	0.057
Ksnorm	0.385	0.194	0.047	0.005	0.160	0.788
Normal	0.087	0.061	0.050	0.041	0.048	0.054
DagoSkewness	0.083	0.058	0.055	0.063	0.064	0.067
DagoKurtosis	0.066	0.046	0.035	0.038	0.042	0.046
DagoOmnibus	0.093	0.062	0.064	0.052	0.059	0.043

Tabulka 7.24: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	-0.90	-0.90	-0.90	-0.90	-0.90	-0.90
$b_1$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.50
JarqueBera	0.029	0.022	0.033	0.040	0.034	0.028
Shapiro	0.062	0.031	0.035	0.045	0.036	0.036
Ad	0.070	0.051	0.043	0.048	0.061	0.045
Cvm	0.062	0.047	0.051	0.046	0.043	0.053
Lillie	0.055	0.047	0.043	0.055	0.047	0.049
Pearson	0.058	0.046	0.053	0.062	0.060	0.052
Sf	0.049	0.034	0.047	0.038	0.049	0.051
Ksnorm	0.814	0.251	0.047	0.057	0.245	0.977
Normal	0.067	0.054	0.057	0.053	0.041	0.040
DagoSkewness	0.007	0.022	0.040	0.041	0.051	0.039
DagoKurtosis	0.157	0.066	0.061	0.059	0.058	0.065
DagoOmnibus	0.111	0.055	0.053	0.066	0.056	0.048

Tabulka 7.25: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	-0.80	-0.80	-0.80	-0.80	-0.80	-0.80
$b_1$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.50
JarqueBera	0.033	0.040	0.040	0.040	0.038	0.033
Shapiro	0.039	0.042	0.053	0.053	0.045	0.045
Ad	0.055	0.052	0.057	0.047	0.050	0.043
Cvm	0.049	0.052	0.043	0.049	0.044	0.049
Lillie	0.053	0.062	0.065	0.065	0.052	0.050
Pearson	0.049	0.061	0.050	0.062	0.063	0.045
Sf	0.040	0.047	0.048	0.049	0.050	0.059
Ksnorm	0.202	0.046	0.047	0.059	0.226	0.906
Normal	0.053	0.043	0.050	0.051	0.039	0.042
DagoSkewness	0.035	0.053	0.055	0.049	0.041	0.040
DagoKurtosis	0.059	0.038	0.035	0.042	0.045	0.048
DagoOmnibus	0.050	0.061	0.064	0.065	0.055	0.058

Tabulka 7.26: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b_1$	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
JarqueBera	0.715	0.716	0.717	0.716	0.716	0.716	0.716
Shapiro	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987
Ad	0.952	0.953	0.954	0.952	0.952	0.951	0.950
Cvm	0.895	0.897	0.895	0.896	0.896	0.895	0.894
Lillie	0.864	0.858	0.866	0.864	0.865	0.864	0.861
Pearson	0.905	0.904	0.905	0.907	0.901	0.903	0.905
Sf	0.959	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963
Ksnorm	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993
Normal	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.976	0.976
DagoSkewness	0.438	0.437	0.437	0.438	0.437	0.437	0.440
DagoKurtosis	0.562	0.562	0.564	0.564	0.563	0.563	0.564
DagoOmnibus	0.793	0.794	0.794	0.793	0.794	0.794	0.794

Tabulka 7.27: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b_1$	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
JarqueBera	0.491	0.492	0.493	0.493	0.493	0.493	0.493
Shapiro	0.866	0.870	0.874	0.875	0.876	0.876	0.874
Ad	0.798	0.806	0.808	0.811	0.810	0.810	0.810
Cvm	0.687	0.691	0.693	0.694	0.694	0.695	0.694
Lillie	0.645	0.647	0.648	0.652	0.658	0.661	0.650
Pearson	0.601	0.621	0.642	0.633	0.638	0.623	0.632
Sf	0.744	0.751	0.751	0.751	0.750	0.750	0.750
Ksnorm	0.997	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
Normal	0.829	0.835	0.837	0.837	0.839	0.838	0.838
DagoSkewness	0.364	0.368	0.369	0.370	0.370	0.369	0.368
DagoKurtosis	0.396	0.396	0.397	0.398	0.398	0.397	0.397
DagoOmnibus	0.611	0.618	0.621	0.621	0.623	0.623	0.623

Tabulka 7.28: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b_1$	-0.20	-0.40	-0.60	-0.80	-1.00	-1.20
JarqueBera	0.711	0.701	0.678	0.534	0.155	0.491
Shapiro	0.986	0.983	0.965	0.807	0.295	0.731
Ad	0.946	0.940	0.902	0.768	0.244	0.698
Cvm	0.888	0.875	0.845	0.698	0.223	0.655
Lillie	0.857	0.848	0.812	0.620	0.191	0.563
Pearson	0.902	0.890	0.828	0.563	0.114	0.475
Sf	0.947	0.936	0.899	0.739	0.226	0.642
Ksnorm	0.984	0.975	0.962	0.922	0.947	0.930
Normal	0.971	0.957	0.936	0.812	0.285	0.739
DagoSkewness	0.436	0.433	0.418	0.364	0.187	0.348
DagoKurtosis	0.558	0.552	0.535	0.446	0.167	0.398
DagoOmnibus	0.787	0.781	0.770	0.659	0.222	0.587

Tabulka 7.29: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b_1$	-0.20	-0.40	-0.60	-0.80	-1.00	-1.20
JarqueBera	0.470	0.438	0.333	0.145	0.078	0.127
Shapiro	0.836	0.770	0.606	0.276	0.106	0.211
Ad	0.753	0.688	0.536	0.253	0.109	0.188
Cvm	0.652	0.609	0.485	0.234	0.096	0.206
Lillie	0.602	0.542	0.414	0.198	0.079	0.150
Pearson	0.555	0.467	0.311	0.115	0.077	0.091
Sf	0.704	0.631	0.485	0.198	0.094	0.172
Ksnorm	0.988	0.972	0.943	0.785	0.485	0.877
Normal	0.787	0.710	0.553	0.261	0.121	0.228
DagoSkewness	0.350	0.338	0.289	0.169	0.117	0.169
DagoKurtosis	0.382	0.355	0.281	0.140	0.074	0.125
DagoOmnibus	0.593	0.568	0.478	0.240	0.091	0.196

Tabulka 7.30: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = 1 + b_1z$ .

$a$	0.99	0.99	0.99	0.90	0.90	0.90
$b_1$	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
$b_2$	0.00	10.00	10.00	0.00	10.00	10.00
$b_3$	0.00	0.00	10.00	0.00	0.00	10.00
JarqueBera	0.744	0.764	0.785	0.338	0.387	0.456
Shapiro	0.924	0.942	0.969	0.553	0.712	0.747
Ad	0.898	0.921	0.961	0.494	0.623	0.698
Cvm	0.846	0.881	0.893	0.471	0.541	0.634
Lillie	0.819	0.859	0.856	0.392	0.491	0.552
Pearson	0.780	0.852	0.891	0.279	0.437	0.512
Sf	0.900	0.931	0.942	0.489	0.606	0.686
Ksnorm	0.847	0.853	0.858	1.000	0.998	0.998
Normal	0.928	0.958	0.968	0.572	0.665	0.754
DagoSkewness	0.451	0.460	0.461	0.293	0.316	0.321
DagoKurtosis	0.597	0.637	0.650	0.316	0.351	0.374
DagoOmnibus	0.834	0.845	0.858	0.430	0.522	0.558

Tabulka 7.31: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3$ .

$a$	0.99	0.99	0.99	0.90	0.90
$b_1$	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00
$b_2$	0.00	-10.00	-10.00	0.00	-10.00
$b_3$	0.00	0.00	-10.00	0.00	0.00
JarqueBera	0.723	0.751	0.781	0.279	0.366
Shapiro	0.901	0.933	0.958	0.472	0.651
Ad	0.869	0.912	0.953	0.422	0.587
Cvm	0.823	0.870	0.886	0.403	0.503
Lillie	0.802	0.855	0.839	0.324	0.462
Pearson	0.741	0.826	0.878	0.215	0.382
Sf	0.865	0.919	0.939	0.403	0.565
Ksnorm	0.853	0.856	0.849	1.000	0.998
Normal	0.903	0.952	0.962	0.487	0.619
DagoSkewness	0.439	0.458	0.459	0.264	0.305
DagoKurtosis	0.589	0.634	0.644	0.270	0.340
DagoOmnibus	0.825	0.841	0.855	0.378	0.500

Tabulka 7.32: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3$ .



$a$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$b_1$	10.00	10.00	10.00	-10.00	-10.00
$b_2$	0.00	10.00	10.00	0.00	-10.00
$b_3$	0.00	0.00	10.00	0.00	0.00
JarqueBera	0.042	0.065	0.093	0.038	0.053
Shapiro	0.055	0.075	0.137	0.047	0.058
Ad	0.069	0.084	0.142	0.053	0.068
Cvm	0.051	0.071	0.129	0.060	0.063
Lillie	0.051	0.093	0.114	0.046	0.082
Pearson	0.054	0.056	0.068	0.050	0.051
Sf	0.063	0.091	0.142	0.059	0.076
Ksnorm	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Normal	0.049	0.081	0.131	0.037	0.067
DagoSkewness	0.048	0.083	0.125	0.044	0.063
DagoKurtosis	0.048	0.065	0.094	0.057	0.056
DagoOmnibus	0.051	0.073	0.139	0.045	0.068

Tabulka 7.33: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3$ .

$a$	-0.99	-0.99	-0.99	-0.99	-0.99
$b_1$	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00
$b_2$	0.00	-10.00	-10.00	-10.00	-10.00
$b_3$	0.00	0.00	-10.00	-10.00	-10.00
$b_4$	0.00	0.00	0.00	-10.00	-10.00
$b_5$	0.00	0.00	0.00	0.00	-10.00
JarqueBera	0.567	0.036	0.579	0.050	0.585
Shapiro	0.798	0.072	0.805	0.086	0.839
Ad	0.757	0.069	0.750	0.090	0.784
Cvm	0.689	0.072	0.690	0.075	0.724
Lillie	0.601	0.074	0.623	0.069	0.665
Pearson	0.666	0.057	0.676	0.069	0.716
Sf	0.722	0.051	0.740	0.056	0.754
Ksnorm	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Normal	0.789	0.063	0.795	0.083	0.825
DagoSkewness	0.000	0.043	0.001	0.085	0.007
DagoKurtosis	0.742	0.092	0.744	0.064	0.747
DagoOmnibus	0.707	0.066	0.723	0.083	0.723

Tabulka 7.34: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = z^5 + b_1z^4 + b_2z^3 + b_3z^2 + b_4z + b_5$ .

$a$	-0.99	-0.99	-0.99	-0.99	-0.99
$b_1$	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
$b_2$	0.00	10.00	10.00	10.00	10.00
$b_3$	0.00	0.00	10.00	10.00	10.00
$b_4$	0.00	0.00	0.00	10.00	10.00
$b_5$	0.00	0.00	0.00	0.00	10.00
JarqueBera	0.558	0.042	0.571	0.062	0.573
Shapiro	0.778	0.080	0.784	0.084	0.825
Ad	0.740	0.079	0.741	0.079	0.770
Cvm	0.676	0.083	0.680	0.088	0.712
Lillie	0.594	0.082	0.618	0.071	0.655
Pearson	0.650	0.063	0.649	0.072	0.679
Sf	0.715	0.068	0.722	0.067	0.744
Ksnorm	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Normal	0.776	0.073	0.779	0.083	0.809
DagoSkewness	0.000	0.037	0.002	0.071	0.013
DagoKurtosis	0.735	0.113	0.728	0.098	0.722
DagoOmnibus	0.697	0.083	0.715	0.096	0.706

Tabulka 7.35: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = z^5 + b_1z^4 + b_2z^3 + b_3z^2 + b_4z + b_5$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$u$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60
JarqueBera	0.136	0.058	0.034	0.040	0.040	0.040	0.059
Shapiro	0.244	0.089	0.040	0.041	0.054	0.050	0.083
Ad	0.220	0.100	0.048	0.050	0.048	0.056	0.084
Cvm	0.211	0.090	0.055	0.042	0.045	0.055	0.080
Lillie	0.174	0.069	0.042	0.057	0.060	0.059	0.064
Pearson	0.123	0.051	0.057	0.053	0.065	0.060	0.073
Sf	0.219	0.084	0.047	0.034	0.041	0.045	0.074
Ksnorm	0.627	0.415	0.164	0.001	0.298	0.698	0.862
Normal	0.247	0.100	0.048	0.060	0.066	0.068	0.095
DagoSkewness	0.174	0.088	0.041	0.043	0.041	0.052	0.069
DagoKurtosis	0.140	0.054	0.054	0.052	0.056	0.069	0.070
DagoOmnibus	0.205	0.079	0.065	0.056	0.061	0.065	0.085

Tabulka 7.36: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = (z - u)$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$u$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60
JarqueBera	0.069	0.043	0.040	0.039	0.048	0.034	0.043
Shapiro	0.100	0.048	0.053	0.044	0.049	0.055	0.055
Ad	0.086	0.056	0.057	0.051	0.058	0.050	0.045
Cvm	0.090	0.053	0.043	0.034	0.050	0.051	0.050
Lillie	0.085	0.058	0.065	0.056	0.064	0.067	0.060
Pearson	0.068	0.055	0.049	0.051	0.057	0.057	0.062
Sf	0.091	0.058	0.048	0.052	0.050	0.055	0.060
Ksnorm	0.385	0.194	0.047	0.005	0.160	0.653	0.877
Normal	0.087	0.061	0.050	0.041	0.048	0.056	0.057
DagoSkewness	0.083	0.058	0.055	0.063	0.064	0.059	0.065
DagoKurtosis	0.066	0.046	0.035	0.038	0.042	0.046	0.047
DagoOmnibus	0.093	0.062	0.064	0.052	0.059	0.046	0.049

Tabulka 7.37: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a  $\tilde{b}(z) = (z - u)$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$u$	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80
JarqueBera	0.678	0.534	0.155	0.491	0.634	0.667	0.685
Shapiro	0.965	0.807	0.295	0.731	0.905	0.955	0.971
Ad	0.902	0.768	0.244	0.698	0.862	0.907	0.918
Cvm	0.845	0.698	0.223	0.655	0.803	0.836	0.850
Lillie	0.812	0.620	0.191	0.563	0.755	0.788	0.812
Pearson	0.828	0.563	0.114	0.475	0.730	0.793	0.837
Sf	0.899	0.739	0.226	0.642	0.840	0.887	0.907
Ksnorm	0.962	0.922	0.947	0.930	0.963	0.975	0.978
Normal	0.936	0.812	0.285	0.739	0.898	0.931	0.946
DagoSkewness	0.418	0.364	0.187	0.348	0.389	0.408	0.417
DagoKurtosis	0.535	0.446	0.167	0.398	0.494	0.528	0.541
DagoOmnibus	0.770	0.659	0.222	0.587	0.727	0.765	0.771

Tabulka 7.38: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = (z - u)$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$u$	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80
JarqueBera	0.333	0.145	0.078	0.127	0.222	0.306	0.370
Shapiro	0.606	0.276	0.106	0.211	0.410	0.569	0.649
Ad	0.536	0.253	0.109	0.188	0.373	0.505	0.575
Cvm	0.485	0.234	0.096	0.206	0.363	0.459	0.525
Lillie	0.414	0.198	0.079	0.150	0.301	0.400	0.450
Pearson	0.311	0.115	0.077	0.091	0.195	0.278	0.353
Sf	0.485	0.198	0.094	0.172	0.331	0.453	0.527
Ksnorm	0.943	0.785	0.485	0.877	0.962	0.982	0.996
Normal	0.553	0.261	0.121	0.228	0.397	0.518	0.606
DagoSkewness	0.289	0.169	0.117	0.169	0.234	0.282	0.303
DagoKurtosis	0.281	0.140	0.074	0.125	0.215	0.271	0.304
DagoOmnibus	0.478	0.240	0.091	0.196	0.352	0.456	0.507

Tabulka 7.39: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = (z - u)$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$u$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.20	1.50
$v$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.20	1.50
JarqueBera	0.066	0.037	0.038	0.042	0.041	0.047	0.346
Shapiro	0.101	0.058	0.039	0.051	0.054	0.059	0.537
Ad	0.096	0.058	0.049	0.039	0.040	0.054	0.521
Cvm	0.076	0.057	0.050	0.055	0.060	0.047	0.499
Lillie	0.077	0.061	0.060	0.071	0.072	0.046	0.430
Pearson	0.068	0.058	0.054	0.050	0.052	0.040	0.303
Sf	0.089	0.055	0.049	0.051	0.049	0.070	0.454
Ksnorm	0.280	0.038	0.009	0.006	0.166	0.705	0.964
Normal	0.098	0.059	0.051	0.051	0.046	0.053	0.532
DagoSkewness	0.095	0.052	0.052	0.046	0.037	0.053	0.285
DagoKurtosis	0.066	0.055	0.052	0.053	0.058	0.048	0.304
DagoOmnibus	0.109	0.073	0.059	0.057	0.058	0.061	0.466

Tabulka 7.40: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = (z - u)(z - v)$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$u$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.20	1.50
$v$	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.20	1.50
JarqueBera	0.045	0.041	0.036	0.037	0.039	0.038	0.055
Shapiro	0.046	0.041	0.049	0.051	0.048	0.056	0.077
Ad	0.052	0.060	0.058	0.041	0.046	0.043	0.067
Cvm	0.055	0.046	0.045	0.039	0.048	0.061	0.058
Lillie	0.050	0.049	0.054	0.064	0.050	0.059	0.057
Pearson	0.060	0.051	0.048	0.061	0.045	0.050	0.054
Sf	0.051	0.055	0.054	0.048	0.055	0.043	0.067
Ksnorm	0.014	0.005	0.002	0.036	0.318	0.815	0.992
Normal	0.052	0.049	0.055	0.055	0.068	0.060	0.070
DagoSkewness	0.053	0.052	0.060	0.057	0.056	0.050	0.067
DagoKurtosis	0.051	0.041	0.042	0.056	0.055	0.051	0.059
DagoOmnibus	0.070	0.072	0.060	0.058	0.062	0.046	0.060

Tabulka 7.41: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$  a  $\tilde{b}(z) = (z - u)(z - v)$ .

$a$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$b$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$c$	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
$u$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$v$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$w$	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20
JarqueBera	0.415	0.477	0.575	0.639	0.693	0.696	0.691
Shapiro	0.485	0.506	0.582	0.646	0.697	0.722	0.708
Ad	0.439	0.476	0.548	0.626	0.662	0.663	0.674
Cvm	0.400	0.437	0.501	0.531	0.547	0.558	0.555
Lillie	0.379	0.390	0.466	0.545	0.593	0.620	0.614
Pearson	0.279	0.320	0.375	0.471	0.533	0.544	0.533
Sf	0.428	0.487	0.560	0.638	0.687	0.698	0.688
Ksnorm	0.827	0.595	0.438	0.402	0.415	0.444	0.500
Normal	0.452	0.491	0.580	0.650	0.707	0.715	0.701
DagoSkewness	0.446	0.496	0.586	0.680	0.714	0.721	0.715
DagoKurtosis	0.367	0.401	0.509	0.593	0.639	0.668	0.655
DagoOmnibus	0.441	0.484	0.572	0.661	0.719	0.721	0.714

Tabulka 7.42: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$  a  $\tilde{b}(z) = (z - u)(z - v)(z - w)$ .

$a$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$b$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$c$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$u$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$v$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$w$	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20
JarqueBera	0.059	0.056	0.054	0.065	0.062	0.059	0.065
Shapiro	0.063	0.053	0.048	0.060	0.060	0.069	0.072
Ad	0.054	0.067	0.060	0.055	0.052	0.058	0.064
Cvm	0.067	0.051	0.042	0.043	0.046	0.049	0.052
Lillie	0.067	0.052	0.055	0.077	0.057	0.052	0.056
Pearson	0.053	0.053	0.060	0.055	0.050	0.048	0.050
Sf	0.061	0.053	0.063	0.077	0.075	0.083	0.092
Ksnorm	0.324	0.092	0.028	0.036	0.083	0.303	0.722
Normal	0.075	0.052	0.059	0.067	0.070	0.072	0.074
DagoSkewness	0.077	0.062	0.065	0.071	0.075	0.066	0.069
DagoKurtosis	0.066	0.056	0.050	0.056	0.068	0.077	0.065
DagoOmnibus	0.080	0.086	0.079	0.081	0.078	0.074	0.068

Tabulka 7.43: Simulované  $p$ -hodnoty ARMA procesu s normálním bílým šumem s  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$  a  $\tilde{b}(z) = (z-u)(z-v)(z-w)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.000	0.000	0.001	0.009	0.019	0.012
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.002	0.002	0.005	0.006	0.009
Lomnickiomnibus	0.000	0.000	0.000	0.006	0.004	0.018	0.012

Tabulka 7.44: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z-a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.001	0.004	0.014	0.022	0.027	0.038
Lomnickikurtosis	0.000	0.002	0.002	0.009	0.006	0.014	0.022
Lomnickiomnibus	0.000	0.002	0.006	0.014	0.016	0.028	0.024

Tabulka 7.45: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z-a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.002	0.017	0.028	0.032	0.042	0.043
Lomnickikurtosis	0.000	0.002	0.010	0.011	0.014	0.026	0.020
Lomnickiomnibus	0.000	0.003	0.013	0.021	0.031	0.031	0.034

Tabulka 7.46: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.014	0.025	0.032	0.033	0.041	0.034
Lomnickikurtosis	0.000	0.008	0.018	0.021	0.023	0.029	0.023
Lomnickiomnibus	0.000	0.014	0.020	0.029	0.038	0.039	0.051

Tabulka 7.47: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.031	0.028	0.043	0.038	0.043	0.045
Lomnickikurtosis	0.000	0.018	0.024	0.027	0.032	0.044	0.051
Lomnickiomnibus	0.000	0.027	0.040	0.041	0.036	0.046	0.043

Tabulka 7.48: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.177	0.070	0.056	0.043	0.028
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.002	0.002	0.001
Lomnickiomnibus	0.133	0.039	0.025	0.029	0.011

Tabulka 7.49: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.153	0.061	0.043	0.042	0.033
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.005	0.007	0.011
Lomnickiomnibus	0.095	0.024	0.036	0.026	0.026

Tabulka 7.50: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.098	0.073	0.046	0.041	0.034
Lomnickikurtosis	0.000	0.004	0.010	0.013	0.021
Lomnickiomnibus	0.072	0.039	0.019	0.033	0.032

Tabulka 7.51: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.095	0.049	0.046	0.049	0.040
Lomnickikurtosis	0.000	0.004	0.016	0.021	0.019
Lomnickiomnibus	0.063	0.028	0.046	0.037	0.030

Tabulka 7.52: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.072	0.053	0.048	0.049	0.039
Lomnickikurtosis	0.000	0.018	0.029	0.036	0.038
Lomnickiomnibus	0.039	0.040	0.039	0.039	0.037

Tabulka 7.53: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.003	0.002
Lomnickiomnibus	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.003	0.004

Tabulka 7.54: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.000	0.000	0.003	0.004	0.006	0.013
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005	0.006	0.008
Lomnickiomnibus	0.000	0.000	0.002	0.001	0.002	0.015	0.022

Tabulka 7.55: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .



a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.000	0.003	0.009	0.022	0.026	0.037
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.002	0.006	0.009	0.011	0.019
Lomnickiomnibus	0.000	0.001	0.003	0.010	0.014	0.025	0.022

Tabulka 7.56: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.005	0.014	0.017	0.022	0.029	0.027
Lomnickikurtosis	0.000	0.002	0.010	0.011	0.023	0.025	0.018
Lomnickiomnibus	0.000	0.007	0.017	0.023	0.035	0.030	0.042

Tabulka 7.57: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.011	0.026	0.039	0.032	0.033	0.034
Lomnickikurtosis	0.000	0.010	0.017	0.018	0.021	0.030	0.036
Lomnickiomnibus	0.000	0.020	0.025	0.039	0.041	0.047	0.046

Tabulka 7.58: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.343	0.459	0.219	0.117	0.075
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002
Lomnickiomnibus	0.300	0.415	0.135	0.060	0.051

Tabulka 7.59: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.629	0.443	0.141	0.079	0.069
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.000	0.003	0.005
Lomnickiomnibus	0.586	0.365	0.094	0.042	0.034

Tabulka 7.60: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.770	0.324	0.104	0.070	0.062
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.000	0.006	0.010
Lomnickiomnibus	0.794	0.210	0.059	0.034	0.033

Tabulka 7.61: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.871	0.192	0.093	0.055	0.051
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.014	0.013	0.022
Lomnickiomnibus	0.867	0.150	0.053	0.042	0.047

Tabulka 7.62: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.915	0.135	0.060	0.057	0.060
Lomnickikurtosis	0.000	0.007	0.020	0.030	0.031
Lomnickiomnibus	0.880	0.086	0.036	0.050	0.044

Tabulka 7.63: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.001	0.005	0.039	0.129	0.271	0.407
Lomnickikurtosis	0.000	0.003	0.010	0.030	0.071	0.122	0.183
Lomnickiomnibus	0.000	0.003	0.006	0.051	0.119	0.211	0.292

Tabulka 7.64: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.003	0.096	0.335	0.601	0.812	0.907
Lomnickikurtosis	0.000	0.007	0.056	0.174	0.285	0.409	0.503
Lomnickiomnibus	0.000	0.008	0.108	0.264	0.492	0.671	0.794

Tabulka 7.65: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.042	0.331	0.733	0.932	0.992	1.000
Lomnickikurtosis	0.000	0.022	0.148	0.326	0.514	0.673	0.767
Lomnickiomnibus	0.000	0.033	0.226	0.572	0.855	0.961	0.991

Tabulka 7.66: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.148	0.697	0.964	0.999	1.000	1.000
Lomnickikurtosis	0.001	0.062	0.268	0.560	0.775	0.905	0.966
Lomnickiomnibus	0.001	0.134	0.543	0.927	0.996	1.000	1.000

Tabulka 7.67: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.483	0.987	1.000	1.000	1.000	1.000
Lomnickikurtosis	0.002	0.184	0.564	0.878	0.982	0.998	1.000
Lomnickiomnibus	0.000	0.367	0.973	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabulka 7.68: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.153	0.085	0.098	0.154	0.229
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.010	0.036	0.095
Lomnickiomnibus	0.112	0.051	0.052	0.115	0.165

Tabulka 7.69: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.114	0.082	0.209	0.398	0.620
Lomnickikurtosis	0.000	0.004	0.066	0.170	0.289
Lomnickiomnibus	0.075	0.069	0.163	0.334	0.544

Tabulka 7.70: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.111	0.143	0.375	0.726	0.919
Lomnickikurtosis	0.000	0.017	0.145	0.372	0.584
Lomnickiomnibus	0.060	0.100	0.322	0.619	0.856

Tabulka 7.71: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.108	0.234	0.693	0.970	1.000
Lomnickikurtosis	0.000	0.070	0.313	0.611	0.822
Lomnickiomnibus	0.050	0.194	0.616	0.910	0.999

Tabulka 7.72: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.065	0.511	0.977	1.000	1.000
Lomnickikurtosis	0.000	0.176	0.664	0.947	0.995
Lomnickiomnibus	0.028	0.436	0.959	1.000	1.000

Tabulka 7.73: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.000	0.001	0.011	0.067	0.200	0.449
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.001	0.005	0.027	0.094	0.207
Lomnickiomnibus	0.000	0.000	0.003	0.010	0.048	0.147	0.322

Tabulka 7.74: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.000	0.016	0.094	0.245	0.524	0.824
Lomnickikurtosis	0.000	0.001	0.009	0.041	0.113	0.223	0.373
Lomnickiomnibus	0.000	0.001	0.015	0.067	0.192	0.396	0.683

Tabulka 7.75: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.005	0.095	0.287	0.567	0.879	0.987
Lomnickikurtosis	0.000	0.003	0.032	0.103	0.208	0.371	0.612
Lomnickiomnibus	0.000	0.010	0.077	0.173	0.415	0.776	0.974

Tabulka 7.76: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
Lomnickiskewness	0.000	0.054	0.292	0.706	0.958	1.000	1.000
Lomnickikurtosis	0.000	0.038	0.112	0.271	0.461	0.704	0.913
Lomnickiomnibus	0.000	0.063	0.246	0.559	0.905	1.000	1.000

Tabulka 7.77: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.607	0.465	0.157	0.092	0.082
Lomnickikurtosis	0.000	0.000	0.001	0.005	0.044
Lomnickiomnibus	0.554	0.359	0.081	0.065	0.078

Tabulka 7.78: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.807	0.328	0.097	0.085	0.095
Lomnickikurtosis	0.000	0.001	0.009	0.051	0.119
Lomnickiomnibus	0.757	0.222	0.078	0.076	0.116

Tabulka 7.79: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.898	0.207	0.099	0.103	0.117
Lomnickikurtosis	0.000	0.003	0.038	0.106	0.224
Lomnickiomnibus	0.857	0.145	0.080	0.148	0.242

Tabulka 7.80: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60
Lomnickiskewness	0.911	0.147	0.093	0.080	0.115
Lomnickikurtosis	0.000	0.026	0.110	0.262	0.537
Lomnickiomnibus	0.886	0.124	0.135	0.261	0.474

Tabulka 7.81: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.031	0.032	0.034	0.041	0.029	0.030	0.027
Shapiro	0.053	0.061	0.062	0.045	0.067	0.059	0.045
Ad	0.067	0.050	0.053	0.051	0.058	0.049	0.053
Cvm	0.057	0.044	0.049	0.052	0.050	0.062	0.042
Lillie	0.045	0.052	0.051	0.050	0.058	0.057	0.038
Pearson	0.063	0.054	0.056	0.050	0.053	0.064	0.056
Sf	0.053	0.060	0.050	0.045	0.039	0.044	0.044
Ksnorm	0.002	0.002	0.000	0.000	0.002	0.001	0.000
Normal	0.043	0.066	0.047	0.049	0.048	0.047	0.047
DagoSkewness	0.044	0.043	0.042	0.040	0.043	0.055	0.055
DagoKurtosis	0.040	0.050	0.042	0.057	0.046	0.032	0.048
DagoOmnibus	0.066	0.053	0.062	0.056	0.072	0.061	0.035

Tabulka 7.82: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.036	0.052	0.035	0.039	0.032	0.042	0.053
Shapiro	0.059	0.061	0.053	0.050	0.050	0.054	0.065
Ad	0.049	0.046	0.051	0.044	0.046	0.053	0.035
Cvm	0.067	0.045	0.053	0.043	0.044	0.042	0.060
Lillie	0.045	0.060	0.040	0.041	0.040	0.035	0.046
Pearson	0.045	0.051	0.049	0.045	0.043	0.050	0.051
Sf	0.052	0.052	0.048	0.053	0.057	0.054	0.046
Ksnorm	0.001	0.000	0.003	0.001	0.000	0.001	0.001
Normal	0.053	0.042	0.045	0.058	0.049	0.048	0.048
DagoSkewness	0.044	0.045	0.051	0.054	0.054	0.060	0.050
DagoKurtosis	0.058	0.046	0.060	0.058	0.045	0.055	0.049
DagoOmnibus	0.051	0.058	0.054	0.052	0.068	0.049	0.058

Tabulka 7.83: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.039	0.036	0.039	0.036	0.038	0.044	0.044
Shapiro	0.058	0.054	0.044	0.046	0.049	0.051	0.048
Ad	0.060	0.048	0.042	0.041	0.043	0.036	0.030
Cvm	0.063	0.053	0.045	0.048	0.055	0.043	0.052
Lillie	0.060	0.050	0.058	0.068	0.068	0.066	0.051
Pearson	0.042	0.055	0.056	0.057	0.049	0.052	0.062
Sf	0.048	0.050	0.045	0.052	0.060	0.058	0.049
Ksnorm	0.003	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.001
Normal	0.047	0.054	0.045	0.038	0.040	0.039	0.046
DagoSkewness	0.044	0.055	0.052	0.055	0.051	0.049	0.047
DagoKurtosis	0.066	0.046	0.054	0.045	0.053	0.047	0.051
DagoOmnibus	0.052	0.041	0.051	0.051	0.063	0.051	0.058

Tabulka 7.84: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.055	0.033	0.039	0.045	0.043	0.037	0.041
Shapiro	0.043	0.042	0.044	0.049	0.051	0.047	0.047
Ad	0.058	0.049	0.052	0.048	0.063	0.064	0.058
Cvm	0.061	0.044	0.055	0.040	0.048	0.049	0.043
Lillie	0.052	0.059	0.060	0.058	0.053	0.051	0.062
Pearson	0.059	0.052	0.048	0.044	0.041	0.048	0.052
Sf	0.036	0.045	0.045	0.059	0.049	0.059	0.049
Ksnorm	0.002	0.003	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
Normal	0.057	0.049	0.055	0.046	0.051	0.039	0.055
DagoSkewness	0.051	0.037	0.049	0.044	0.055	0.053	0.062
DagoKurtosis	0.049	0.059	0.032	0.050	0.049	0.058	0.051
DagoOmnibus	0.045	0.070	0.055	0.059	0.051	0.048	0.047

Tabulka 7.85: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .



a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.030	0.029	0.035	0.040	0.036	0.026
Shapiro	0.052	0.050	0.070	0.053	0.057	0.056
Ad	0.050	0.044	0.037	0.056	0.048	0.049
Cvm	0.053	0.054	0.056	0.047	0.057	0.059
Lillie	0.047	0.044	0.048	0.056	0.051	0.054
Pearson	0.051	0.064	0.050	0.054	0.050	0.048
Sf	0.055	0.053	0.051	0.050	0.039	0.054
Ksnorm	0.001	0.003	0.000	0.000	0.000	0.001
Normal	0.038	0.052	0.050	0.049	0.044	0.055
DagoSkewness	0.054	0.047	0.047	0.051	0.048	0.057
DagoKurtosis	0.045	0.048	0.046	0.050	0.047	0.032
DagoOmnibus	0.064	0.058	0.055	0.062	0.069	0.060

Tabulka 7.86: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.038	0.042	0.039	0.044	0.034	0.036
Shapiro	0.056	0.056	0.054	0.047	0.060	0.049
Ad	0.055	0.042	0.044	0.047	0.048	0.053
Cvm	0.055	0.054	0.054	0.036	0.030	0.044
Lillie	0.043	0.048	0.045	0.049	0.037	0.038
Pearson	0.051	0.046	0.056	0.049	0.056	0.054
Sf	0.051	0.047	0.053	0.051	0.052	0.048
Ksnorm	0.001	0.001	0.004	0.000	0.001	0.000
Normal	0.060	0.046	0.040	0.058	0.047	0.045
DagoSkewness	0.046	0.052	0.050	0.057	0.055	0.058
DagoKurtosis	0.061	0.041	0.054	0.056	0.042	0.060
DagoOmnibus	0.059	0.053	0.048	0.056	0.063	0.051

Tabulka 7.87: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.033	0.038	0.040	0.037	0.038	0.040
Shapiro	0.056	0.049	0.048	0.047	0.047	0.055
Ad	0.051	0.039	0.041	0.036	0.041	0.034
Cvm	0.059	0.053	0.049	0.047	0.059	0.052
Lillie	0.048	0.056	0.056	0.061	0.054	0.062
Pearson	0.048	0.061	0.052	0.046	0.051	0.055
Sf	0.047	0.048	0.044	0.054	0.063	0.061
Ksnorm	0.001	0.003	0.001	0.000	0.000	0.001
Normal	0.050	0.048	0.044	0.049	0.044	0.038
DagoSkewness	0.043	0.053	0.051	0.048	0.049	0.045
DagoKurtosis	0.069	0.052	0.054	0.049	0.054	0.048
DagoOmnibus	0.052	0.042	0.053	0.050	0.062	0.050

Tabulka 7.88: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.052	0.037	0.040	0.046	0.041	0.040
Shapiro	0.046	0.037	0.051	0.042	0.053	0.047
Ad	0.054	0.047	0.051	0.054	0.069	0.067
Cvm	0.061	0.043	0.048	0.042	0.048	0.046
Lillie	0.053	0.052	0.062	0.058	0.058	0.061
Pearson	0.056	0.044	0.051	0.045	0.043	0.059
Sf	0.035	0.044	0.045	0.058	0.052	0.058
Ksnorm	0.002	0.000	0.002	0.001	0.001	0.000
Normal	0.057	0.052	0.048	0.056	0.046	0.043
DagoSkewness	0.053	0.040	0.050	0.047	0.053	0.052
DagoKurtosis	0.049	0.064	0.036	0.056	0.051	0.057
DagoOmnibus	0.044	0.064	0.062	0.058	0.050	0.053

Tabulka 7.89: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.035	0.032	0.039	0.045	0.032	0.038	0.036
Shapiro	0.059	0.052	0.050	0.049	0.057	0.059	0.059
DagoSkewness	0.047	0.055	0.067	0.049	0.053	0.053	0.054
DagoKurtosis	0.062	0.045	0.068	0.057	0.060	0.060	0.056
DagoOmnibus	0.044	0.060	0.058	0.053	0.054	0.066	0.066

Tabulka 7.90: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.047	0.041	0.042	0.045	0.042	0.039	0.047
Shapiro	0.031	0.045	0.045	0.039	0.045	0.057	0.046
DagoSkewness	0.052	0.046	0.059	0.042	0.039	0.052	0.049
DagoKurtosis	0.063	0.049	0.054	0.036	0.043	0.044	0.046
DagoOmnibus	0.048	0.060	0.052	0.055	0.060	0.057	0.048

Tabulka 7.91: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.026	0.038	0.035	0.044	0.038	0.039
Shapiro	0.045	0.055	0.041	0.043	0.053	0.064
DagoSkewness	0.055	0.049	0.060	0.050	0.061	0.056
DagoKurtosis	0.048	0.043	0.063	0.051	0.054	0.056
DagoOmnibus	0.055	0.054	0.061	0.054	0.053	0.066

Tabulka 7.92: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.049	0.042	0.040	0.043	0.041	0.039
Shapiro	0.034	0.041	0.050	0.049	0.049	0.052
DagoSkewness	0.056	0.047	0.060	0.046	0.041	0.048
DagoKurtosis	0.070	0.055	0.054	0.040	0.043	0.047
DagoOmnibus	0.055	0.054	0.059	0.059	0.061	0.054

Tabulka 7.93: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.030	0.046	0.033	0.033	0.049	0.042	0.037
Shapiro	0.047	0.054	0.051	0.051	0.053	0.053	0.054
DagoSkewness	0.049	0.053	0.054	0.053	0.064	0.062	0.057
DagoKurtosis	0.047	0.052	0.062	0.049	0.056	0.055	0.060
DagoOmnibus	0.058	0.046	0.058	0.071	0.056	0.055	0.043

Tabulka 7.94: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.041	0.042	0.034	0.038	0.051	0.042	0.042
Shapiro	0.045	0.039	0.040	0.041	0.055	0.043	0.056
DagoSkewness	0.060	0.050	0.059	0.044	0.053	0.043	0.047
DagoKurtosis	0.051	0.056	0.052	0.048	0.052	0.051	0.052
DagoOmnibus	0.052	0.048	0.052	0.066	0.051	0.060	0.045

Tabulka 7.95: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.036	0.045	0.038	0.035	0.047	0.046
Shapiro	0.056	0.046	0.049	0.049	0.041	0.044
DagoSkewness	0.062	0.042	0.059	0.048	0.053	0.047
DagoKurtosis	0.048	0.058	0.046	0.045	0.057	0.053
DagoOmnibus	0.034	0.057	0.049	0.058	0.051	0.051

Tabulka 7.96: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.066	0.052	0.047	0.040	0.030	0.039	0.044
Shapiro	0.357	0.171	0.094	0.045	0.058	0.046	0.063
DagoSkewness	0.147	0.116	0.062	0.058	0.068	0.057	0.059
DagoKurtosis	0.233	0.119	0.064	0.044	0.050	0.053	0.052
DagoOmnibus	0.252	0.127	0.069	0.061	0.047	0.044	0.053

Tabulka 7.97: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.330	0.097	0.067	0.054	0.043	0.038	0.046
Shapiro	0.640	0.259	0.103	0.068	0.058	0.055	0.048
DagoSkewness	0.281	0.152	0.082	0.066	0.041	0.045	0.049
DagoKurtosis	0.417	0.148	0.089	0.051	0.061	0.050	0.041
DagoOmnibus	0.551	0.191	0.103	0.060	0.056	0.059	0.047

Tabulka 7.98: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.016	0.009	0.014	0.020	0.026	0.037
Shapiro	0.232	0.028	0.028	0.038	0.039	0.057
DagoSkewness	0.002	0.005	0.019	0.027	0.041	0.049
DagoKurtosis	0.390	0.112	0.078	0.060	0.071	0.050
DagoOmnibus	0.310	0.075	0.047	0.053	0.051	0.066

Tabulka 7.99: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.177	0.020	0.019	0.030	0.037	0.037
Shapiro	0.409	0.039	0.035	0.030	0.044	0.041
DagoSkewness	0.000	0.001	0.007	0.029	0.040	0.043
DagoKurtosis	0.527	0.147	0.085	0.058	0.044	0.046
DagoOmnibus	0.432	0.093	0.054	0.034	0.053	0.050

Tabulka 7.100: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.032	0.041	0.030	0.030	0.044	0.035	0.039
Shapiro	0.178	0.091	0.069	0.052	0.051	0.068	0.055
DagoSkewness	0.077	0.074	0.042	0.060	0.058	0.058	0.057
DagoKurtosis	0.134	0.063	0.054	0.060	0.058	0.050	0.063
DagoOmnibus	0.117	0.069	0.068	0.068	0.056	0.056	0.046

Tabulka 7.101: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.143	0.070	0.042	0.045	0.052	0.041	0.047
Shapiro	0.407	0.124	0.050	0.047	0.059	0.052	0.057
DagoSkewness	0.171	0.101	0.068	0.050	0.044	0.052	0.057
DagoKurtosis	0.281	0.091	0.053	0.056	0.072	0.062	0.053
DagoOmnibus	0.339	0.102	0.046	0.057	0.055	0.057	0.049

Tabulka 7.102: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.410	0.104	0.047	0.040	0.041	0.033	0.037
Shapiro	0.662	0.161	0.068	0.048	0.040	0.048	0.047
DagoSkewness	0.326	0.137	0.067	0.044	0.035	0.051	0.057
DagoKurtosis	0.400	0.104	0.053	0.054	0.054	0.051	0.060
DagoOmnibus	0.579	0.133	0.072	0.057	0.049	0.049	0.047

Tabulka 7.103: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.015	0.012	0.016	0.032	0.040	0.036
Shapiro	0.088	0.027	0.032	0.053	0.048	0.057
DagoSkewness	0.010	0.017	0.031	0.047	0.058	0.052
DagoKurtosis	0.218	0.079	0.058	0.065	0.056	0.063
DagoOmnibus	0.144	0.060	0.048	0.065	0.061	0.050

Tabulka 7.104: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.064	0.021	0.033	0.037	0.051	0.049
Shapiro	0.190	0.038	0.036	0.051	0.054	0.037
DagoSkewness	0.000	0.004	0.023	0.034	0.049	0.048
DagoKurtosis	0.376	0.101	0.048	0.052	0.059	0.054
DagoOmnibus	0.307	0.051	0.062	0.054	0.055	0.058

Tabulka 7.105: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.215	0.034	0.035	0.041	0.051	0.041
Shapiro	0.351	0.032	0.032	0.040	0.041	0.054
DagoSkewness	0.000	0.006	0.029	0.039	0.036	0.057
DagoKurtosis	0.496	0.110	0.063	0.045	0.058	0.050
DagoOmnibus	0.417	0.068	0.048	0.046	0.048	0.048

Tabulka 7.106: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.035	0.048	0.034	0.041	0.032	0.034	0.050
Shapiro	0.064	0.053	0.045	0.049	0.053	0.063	0.061
DagoSkewness	0.046	0.053	0.051	0.051	0.054	0.056	0.052
DagoKurtosis	0.066	0.052	0.057	0.061	0.053	0.061	0.049
DagoOmnibus	0.051	0.051	0.052	0.051	0.061	0.053	0.061

Tabulka 7.107: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.038	0.038	0.037	0.042	0.042	0.045	0.044
Shapiro	0.053	0.046	0.044	0.045	0.051	0.061	0.054
DagoSkewness	0.047	0.056	0.054	0.055	0.049	0.054	0.049
DagoKurtosis	0.065	0.047	0.054	0.047	0.049	0.052	0.056
DagoOmnibus	0.054	0.037	0.053	0.042	0.066	0.043	0.054

Tabulka 7.108: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.036	0.045	0.034	0.043	0.033	0.032
Shapiro	0.060	0.052	0.048	0.044	0.050	0.062
DagoSkewness	0.046	0.052	0.049	0.054	0.051	0.060
DagoKurtosis	0.065	0.042	0.058	0.054	0.049	0.060
DagoOmnibus	0.051	0.048	0.049	0.059	0.062	0.045

Tabulka 7.109: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.037	0.043	0.041	0.038	0.039	0.041
Shapiro	0.054	0.048	0.045	0.043	0.051	0.055
DagoSkewness	0.038	0.051	0.053	0.050	0.053	0.052
DagoKurtosis	0.066	0.050	0.053	0.054	0.061	0.051
DagoOmnibus	0.056	0.040	0.052	0.053	0.064	0.046

Tabulka 7.110: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .



a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.035	0.033	0.045	0.038	0.038	0.040	0.035
Shapiro	0.050	0.046	0.049	0.047	0.053	0.057	0.062
DagoSkewness	0.059	0.048	0.057	0.048	0.060	0.054	0.054
DagoKurtosis	0.065	0.038	0.067	0.063	0.055	0.058	0.056
DagoOmnibus	0.046	0.066	0.053	0.059	0.058	0.057	0.068

Tabulka 7.111: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.041	0.042	0.040	0.040	0.045	0.042	0.041
Shapiro	0.029	0.047	0.044	0.036	0.043	0.058	0.045
DagoSkewness	0.051	0.048	0.058	0.046	0.038	0.047	0.043
DagoKurtosis	0.067	0.046	0.045	0.038	0.043	0.042	0.045
DagoOmnibus	0.049	0.060	0.060	0.054	0.056	0.052	0.051

Tabulka 7.112: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.031	0.039	0.035	0.038	0.041	0.040
Shapiro	0.048	0.041	0.041	0.044	0.049	0.054
DagoSkewness	0.055	0.046	0.059	0.049	0.053	0.058
DagoKurtosis	0.062	0.053	0.058	0.053	0.063	0.058
DagoOmnibus	0.053	0.053	0.066	0.048	0.058	0.064

Tabulka 7.113: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.049	0.043	0.039	0.044	0.042	0.040
Shapiro	0.037	0.049	0.047	0.045	0.045	0.050
DagoSkewness	0.050	0.049	0.065	0.050	0.037	0.045
DagoKurtosis	0.066	0.052	0.058	0.038	0.049	0.048
DagoOmnibus	0.058	0.061	0.061	0.059	0.063	0.051

Tabulka 7.114: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.472	0.524	0.542	0.523	0.545	0.535	0.555
Shapiro	0.682	0.746	0.802	0.819	0.811	0.828	0.835
DagoSkewness	0.666	0.705	0.720	0.764	0.751	0.753	0.725
DagoKurtosis	0.313	0.346	0.374	0.370	0.410	0.407	0.379
DagoOmnibus	0.590	0.609	0.625	0.647	0.630	0.657	0.642

Tabulka 7.115: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.905	0.925	0.932	0.939	0.932	0.936	0.924
Shapiro	0.980	0.990	0.996	0.995	0.993	0.994	0.997
DagoSkewness	0.963	0.975	0.976	0.983	0.978	0.978	0.982
DagoKurtosis	0.567	0.610	0.631	0.629	0.616	0.643	0.652
DagoOmnibus	0.933	0.921	0.933	0.934	0.927	0.929	0.941

Tabulka 7.116: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.544	0.558	0.560	0.550	0.551	0.550
Shapiro	0.792	0.856	0.833	0.847	0.821	0.843
DagoSkewness	0.733	0.765	0.763	0.771	0.769	0.769
DagoKurtosis	0.367	0.385	0.381	0.397	0.425	0.414
DagoOmnibus	0.641	0.636	0.650	0.667	0.649	0.661

Tabulka 7.117: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.938	0.929	0.932	0.940	0.934	0.932
Shapiro	0.997	0.996	0.996	0.996	0.998	0.996
DagoSkewness	0.978	0.979	0.975	0.984	0.982	0.983
DagoKurtosis	0.597	0.628	0.635	0.632	0.626	0.635
DagoOmnibus	0.947	0.929	0.948	0.943	0.937	0.931

Tabulka 7.118: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.332	0.388	0.432	0.479	0.490	0.473	0.477
Shapiro	0.449	0.579	0.625	0.664	0.699	0.736	0.727
DagoSkewness	0.451	0.549	0.623	0.635	0.645	0.657	0.660
DagoKurtosis	0.260	0.269	0.320	0.325	0.360	0.388	0.371
DagoOmnibus	0.423	0.515	0.527	0.549	0.565	0.582	0.571

Tabulka 7.119: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.825	0.896	0.901	0.899	0.903	0.914	0.909
Shapiro	0.925	0.976	0.978	0.988	0.983	0.993	0.986
DagoSkewness	0.920	0.961	0.969	0.961	0.959	0.973	0.968
DagoKurtosis	0.536	0.569	0.596	0.598	0.605	0.596	0.620
DagoOmnibus	0.865	0.903	0.898	0.919	0.899	0.911	0.922

Tabulka 7.120: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.418	0.457	0.479	0.514	0.504	0.505
Shapiro	0.644	0.705	0.726	0.730	0.725	0.740
DagoSkewness	0.592	0.680	0.696	0.685	0.682	0.689
DagoKurtosis	0.315	0.337	0.343	0.352	0.383	0.393
DagoOmnibus	0.542	0.580	0.602	0.596	0.590	0.614

Tabulka 7.121: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.890	0.910	0.912	0.909	0.912	0.911
Shapiro	0.980	0.985	0.990	0.990	0.988	0.991
DagoSkewness	0.962	0.967	0.976	0.966	0.976	0.963
DagoKurtosis	0.587	0.596	0.601	0.603	0.606	0.598
DagoOmnibus	0.898	0.930	0.910	0.925	0.917	0.918

Tabulka 7.122: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.169	0.263	0.309	0.353	0.394	0.390	0.396
Shapiro	0.190	0.348	0.458	0.501	0.552	0.577	0.601
DagoSkewness	0.213	0.367	0.462	0.522	0.568	0.556	0.601
DagoKurtosis	0.144	0.230	0.281	0.277	0.298	0.324	0.329
DagoOmnibus	0.218	0.357	0.397	0.454	0.504	0.498	0.505

Tabulka 7.123: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.723	0.820	0.849	0.865	0.870	0.875	0.877
Shapiro	0.813	0.928	0.952	0.964	0.974	0.971	0.974
DagoSkewness	0.846	0.926	0.941	0.951	0.959	0.952	0.957
DagoKurtosis	0.462	0.509	0.544	0.575	0.559	0.553	0.594
DagoOmnibus	0.739	0.851	0.885	0.894	0.888	0.891	0.883

Tabulka 7.124: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.999	0.999	1.000	0.999	0.999	1.000	1.000
Shapiro	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoSkewness	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoKurtosis	0.811	0.846	0.850	0.843	0.837	0.849	0.844
DagoOmnibus	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999

Tabulka 7.125: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.287	0.385	0.413	0.427	0.457	0.440
Shapiro	0.393	0.535	0.634	0.620	0.651	0.647
DagoSkewness	0.425	0.509	0.573	0.612	0.610	0.603
DagoKurtosis	0.223	0.278	0.329	0.299	0.341	0.371
DagoOmnibus	0.378	0.474	0.506	0.527	0.547	0.561

Tabulka 7.126: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.815	0.861	0.887	0.875	0.885	0.888
Shapiro	0.921	0.978	0.979	0.979	0.977	0.975
DagoSkewness	0.906	0.935	0.958	0.957	0.958	0.960
DagoKurtosis	0.541	0.566	0.576	0.590	0.561	0.581
DagoOmnibus	0.833	0.883	0.895	0.919	0.889	0.897

Tabulka 7.127: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000
Shapiro	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoSkewness	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000
DagoKurtosis	0.840	0.853	0.865	0.847	0.834	0.851
DagoOmnibus	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999

Tabulka 7.128: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.098	0.254	0.554	0.706	0.822	0.881	0.908
Shapiro	0.377	0.444	0.705	0.872	0.963	0.988	0.990
DagoSkewness	0.171	0.356	0.682	0.829	0.910	0.960	0.971
DagoKurtosis	0.262	0.165	0.265	0.412	0.516	0.566	0.622
DagoOmnibus	0.240	0.349	0.542	0.757	0.841	0.886	0.915

Tabulka 7.129: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.332	0.574	0.885	0.986	0.996	1.000	1.000
Shapiro	0.642	0.704	0.950	0.994	1.000	1.000	1.000
DagoSkewness	0.258	0.651	0.932	0.993	0.998	1.000	1.000
DagoKurtosis	0.413	0.251	0.472	0.648	0.746	0.822	0.869
DagoOmnibus	0.553	0.603	0.879	0.967	0.998	1.000	1.000

Tabulka 7.130: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.030	0.092	0.360	0.611	0.793	0.865
Shapiro	0.288	0.105	0.325	0.697	0.914	0.977
DagoSkewness	0.008	0.045	0.351	0.726	0.899	0.954
DagoKurtosis	0.453	0.193	0.289	0.422	0.526	0.560
DagoOmnibus	0.387	0.139	0.378	0.671	0.825	0.896

Tabulka 7.131: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.208	0.244	0.660	0.947	0.993	0.999
Shapiro	0.431	0.196	0.670	0.963	1.000	1.000
DagoSkewness	0.003	0.092	0.697	0.977	1.000	0.999
DagoKurtosis	0.523	0.261	0.501	0.684	0.773	0.853
DagoOmnibus	0.498	0.233	0.697	0.938	0.994	0.998

Tabulka 7.132: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 1,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.072	0.291	0.619	0.791	0.866	0.903	0.918
Shapiro	0.214	0.381	0.748	0.918	0.974	0.984	0.984
DagoSkewness	0.118	0.429	0.748	0.893	0.950	0.958	0.968
DagoKurtosis	0.153	0.158	0.336	0.504	0.539	0.557	0.613
DagoOmnibus	0.172	0.349	0.674	0.809	0.879	0.902	0.906

Tabulka 7.133: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.200	0.681	0.966	0.995	0.999	1.000	1.000
Shapiro	0.482	0.780	0.986	0.999	1.000	1.000	1.000
DagoSkewness	0.274	0.758	0.986	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoKurtosis	0.313	0.296	0.614	0.760	0.813	0.841	0.851
DagoOmnibus	0.405	0.687	0.954	0.996	1.000	1.000	1.000

Tabulka 7.134: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
c	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.508	0.956	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Shapiro	0.752	0.972	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoSkewness	0.395	0.973	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoKurtosis	0.437	0.552	0.886	0.970	0.987	0.992	0.996
DagoOmnibus	0.615	0.953	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabulka 7.135: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.036	0.185	0.560	0.773	0.860	0.895
Shapiro	0.144	0.185	0.633	0.914	0.970	0.982
DagoSkewness	0.013	0.110	0.659	0.897	0.945	0.963
DagoKurtosis	0.259	0.207	0.404	0.512	0.551	0.577
DagoOmnibus	0.195	0.226	0.588	0.842	0.877	0.902

Tabulka 7.136: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.095	0.441	0.914	0.992	0.999	1.000
Shapiro	0.267	0.375	0.935	0.997	1.000	1.000
DagoSkewness	0.003	0.326	0.943	0.998	0.999	0.999
DagoKurtosis	0.381	0.338	0.664	0.788	0.829	0.855
DagoOmnibus	0.300	0.423	0.907	0.994	0.999	1.000

Tabulka 7.137: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
c	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.247	0.749	1.000	1.000	1.000	1.000
Shapiro	0.388	0.680	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoSkewness	0.001	0.688	1.000	1.000	1.000	1.000
DagoKurtosis	0.516	0.592	0.902	0.966	0.986	0.995
DagoOmnibus	0.384	0.721	0.998	1.000	1.000	1.000

Tabulka 7.138: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ .



a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.397	0.454	0.469	0.469	0.475	0.465	0.490
Shapiro	0.581	0.644	0.689	0.700	0.717	0.712	0.726
DagoSkewness	0.566	0.636	0.639	0.681	0.695	0.692	0.663
DagoKurtosis	0.301	0.339	0.345	0.334	0.372	0.369	0.353
DagoOmnibus	0.534	0.534	0.547	0.578	0.557	0.574	0.587

Tabulka 7.139: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.868	0.894	0.907	0.922	0.913	0.914	0.895
Shapiro	0.971	0.984	0.991	0.985	0.985	0.987	0.988
DagoSkewness	0.961	0.969	0.959	0.971	0.969	0.968	0.980
DagoKurtosis	0.550	0.582	0.611	0.603	0.592	0.630	0.618
DagoOmnibus	0.917	0.901	0.916	0.923	0.902	0.910	0.915

Tabulka 7.140: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.476	0.517	0.497	0.490	0.504	0.499
Shapiro	0.695	0.770	0.738	0.725	0.732	0.734
DagoSkewness	0.664	0.684	0.682	0.705	0.713	0.700
DagoKurtosis	0.363	0.373	0.376	0.365	0.393	0.393
DagoOmnibus	0.606	0.573	0.589	0.605	0.593	0.603

Tabulka 7.141: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.910	0.912	0.903	0.922	0.918	0.909
Shapiro	0.988	0.992	0.988	0.991	0.986	0.987
DagoSkewness	0.971	0.972	0.965	0.972	0.974	0.974
DagoKurtosis	0.572	0.604	0.612	0.608	0.609	0.608
DagoOmnibus	0.939	0.914	0.928	0.931	0.914	0.910

Tabulka 7.142: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 2,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.289	0.339	0.366	0.418	0.401	0.400	0.399
Shapiro	0.339	0.470	0.529	0.559	0.573	0.620	0.610
DagoSkewness	0.354	0.488	0.553	0.546	0.584	0.575	0.583
DagoKurtosis	0.231	0.245	0.289	0.286	0.321	0.341	0.317
DagoOmnibus	0.361	0.435	0.455	0.498	0.488	0.505	0.513

Tabulka 7.143: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
b	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
JarqueBera	0.795	0.860	0.873	0.874	0.880	0.876	0.879
Shapiro	0.889	0.961	0.963	0.972	0.973	0.982	0.970
DagoSkewness	0.902	0.941	0.954	0.950	0.946	0.963	0.958
DagoKurtosis	0.511	0.546	0.575	0.580	0.582	0.568	0.599
DagoOmnibus	0.817	0.883	0.866	0.894	0.883	0.887	0.897

Tabulka 7.144: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.356	0.421	0.440	0.469	0.453	0.447
Shapiro	0.509	0.625	0.635	0.633	0.640	0.663
DagoSkewness	0.506	0.610	0.625	0.613	0.618	0.614
DagoKurtosis	0.286	0.306	0.314	0.316	0.350	0.365
DagoOmnibus	0.463	0.511	0.532	0.527	0.545	0.557

Tabulka 7.145: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 25$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

a	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
b	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50
JarqueBera	0.846	0.882	0.884	0.885	0.880	0.883
Shapiro	0.958	0.976	0.981	0.974	0.973	0.983
DagoSkewness	0.945	0.948	0.970	0.951	0.952	0.961
DagoKurtosis	0.565	0.577	0.583	0.583	0.601	0.574
DagoOmnibus	0.867	0.912	0.886	0.897	0.905	0.895

Tabulka 7.146: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ , odhadovaným řádem 3,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.184	0.184	0.131	0.114	0.114	0.129	0.093	0.125

Tabulka 7.147: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.283	0.198	0.136	0.095	0.095	0.074	0.073	0.088

Tabulka 7.148: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.357	0.163	0.107	0.080	0.053	0.066	0.056	0.067

Tabulka 7.149: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.414	0.163	0.085	0.079	0.066	0.059	0.072	0.068

Tabulka 7.150: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.432	0.107	0.078	0.078	0.069	0.053	0.080	0.068

Tabulka 7.151: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.682	0.284	0.190	0.149	0.133	0.109	0.118

Tabulka 7.152: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.607	0.170	0.103	0.086	0.069	0.064	0.067

Tabulka 7.153: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.521	0.144	0.071	0.071	0.075	0.066	0.064

Tabulka 7.154: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.430	0.088	0.060	0.062	0.067	0.056	0.070

Tabulka 7.155: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.309	0.071	0.062	0.069	0.053	0.058	0.064

Tabulka 7.156: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.137	0.310	0.257	0.221	0.167	0.132	0.127	0.120

Tabulka 7.157: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.422	0.426	0.305	0.190	0.162	0.131	0.092	0.082

Tabulka 7.158: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.596	0.355	0.221	0.159	0.121	0.095	0.079	0.067

Tabulka 7.159: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.743	0.305	0.164	0.123	0.105	0.093	0.073	0.079

Tabulka 7.160: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.813	0.215	0.114	0.091	0.086	0.079	0.072	0.067

Tabulka 7.161: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.837	0.561	0.369	0.264	0.201	0.160	0.135

Tabulka 7.162: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.861	0.391	0.201	0.134	0.121	0.098	0.080

Tabulka 7.163: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.805	0.268	0.117	0.072	0.077	0.079	0.083

Tabulka 7.164: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.698	0.185	0.085	0.065	0.065	0.055	0.077

Tabulka 7.165: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.642	0.088	0.052	0.042	0.053	0.053	0.056

Tabulka 7.166: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$c$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.207	0.291	0.340	0.316	0.242	0.208	0.162	0.122

Tabulka 7.167: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$c$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.496	0.504	0.385	0.291	0.227	0.191	0.139	0.095

Tabulka 7.168: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$c$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.812	0.514	0.291	0.226	0.179	0.118	0.116	0.078

Tabulka 7.169: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$c$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.939	0.456	0.227	0.168	0.124	0.104	0.097	0.086

Tabulka 7.170: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$b$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
$c$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.930	0.319	0.152	0.104	0.082	0.076	0.091	0.075

Tabulka 7.171: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$c$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.937	0.656	0.465	0.342	0.259	0.188	0.155

Tabulka 7.172: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$c$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.931	0.536	0.300	0.159	0.117	0.091	0.084

Tabulka 7.173: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$c$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.893	0.363	0.194	0.114	0.082	0.065	0.077

Tabulka 7.174: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$c$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.857	0.249	0.109	0.066	0.046	0.062	0.048

Tabulka 7.175: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$b$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
$c$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.809	0.141	0.053	0.039	0.042	0.053	0.051

Tabulka 7.176: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s normálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ .



$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.109	0.108	0.134	0.151	0.185	0.249	0.291	0.366

Tabulka 7.177: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.217	0.154	0.161	0.193	0.295	0.465	0.570	0.639

Tabulka 7.178: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.330	0.196	0.194	0.386	0.652	0.848	0.932	0.960

Tabulka 7.179: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.399	0.201	0.376	0.755	0.952	0.997	1.000	1.000

Tabulka 7.180: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	0.99	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30
Epps	0.439	0.304	0.787	0.994	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabulka 7.181: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.705	0.269	0.128	0.082	0.081	0.122	0.169

Tabulka 7.182: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 20$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.611	0.140	0.072	0.072	0.131	0.235	0.407

Tabulka 7.183: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 50$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.513	0.079	0.083	0.184	0.407	0.674	0.852

Tabulka 7.184: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 100$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.450	0.080	0.189	0.505	0.834	0.978	0.997

Tabulka 7.185: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 200$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

$a$	-0.99	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40
Epps	0.325	0.138	0.527	0.937	1.000	1.000	1.000

Tabulka 7.186: Simulované  $p$ -hodnoty AR procesu s exponenciálním bílým šumem s volbou  $N = 500$ ,  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ .

1–11	12–22	23–33	34–44	45–55	56–66	67–77	78–88
269	98	68	731	3311	1426	389	105
321	184	213	1638	6721	756	73	153
585	279	546	2725	4254	299	39	387
871	409	1033	2871	687	201	49	758
1475	2285	2129	2119	255	229	59	1307
2821	2685	2536	684	473	469	188	3465
3928	3409	957	299	358	736	377	6991
5943	1824	361	236	784	2042	1292	6313
4950	409	377	245	1594	2811	4031	3794
2577	151	225	552	1676	4431	3495	1836
523	45	360	1623	2251	2511	587	345
88–99	100–110	111–114					
382	108	1000					
808	229	1590					
1388	399	2657					
2713	1132	3396					
3800	2432						
3091	3574						
2985	2935						
3790	1537						
674	529						
81	485						
80	662						

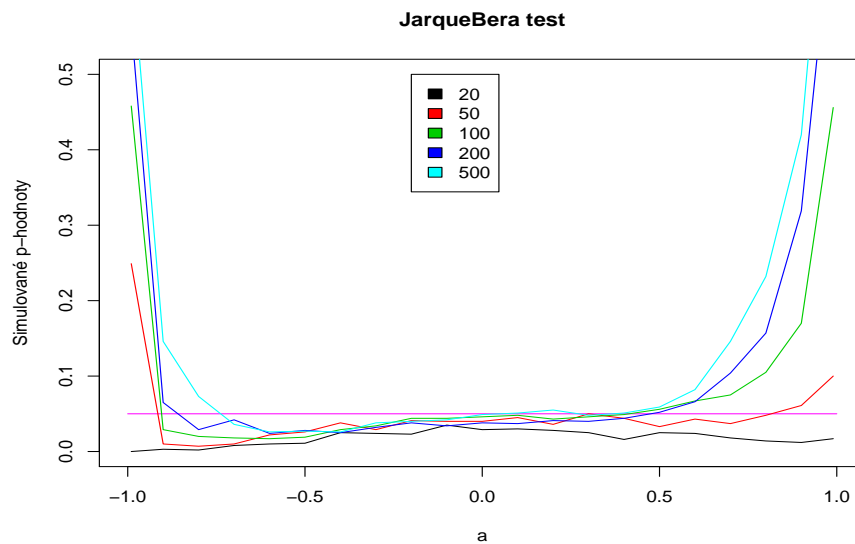
Tabulka 7.187: Výroční data o počtu chycených rysů z let 1821–1934.

1–28	29–58	57–84	85–112	113–140	141–168
5.0	103.0	10.2	10.2	5.0	64.6
11.0	73.0	32.4	24.1	12.2	36.7
16.0	47.0	47.6	82.9	13.9	24.2
23.0	35.0	54.0	132.0	35.4	10.7
36.0	11.0	62.9	130.9	45.8	15.0
58.0	5.0	85.9	118.1	41.1	40.1
29.0	16.0	61.2	89.9	30.1	61.5
20.0	34.0	45.1	66.6	23.9	98.5
10.0	70.0	36.4	60.0	15.6	124.7
8.0	81.0	20.9	46.9	6.6	96.3
3.0	111.0	11.4	41.0	4.0	66.6
0.0	101.0	37.8	21.3	1.8	64.5
0.0	73.0	69.8	16.0	8.5	54.1
2.0	40.0	106.1	6.4	16.6	39.0
11.0	20.0	100.8	4.1	36.3	20.6
27.0	16.0	81.6	6.8	49.6	6.7
47.0	5.0	66.5	14.5	64.2	4.3
63.0	11.0	34.8	34.0	67.0	22.7
60.0	22.0	30.6	45.0	70.9	54.8
39.0	40.0	7.0	43.1	47.8	93.8
28.0	60.0	19.8	47.5	27.5	95.8
26.0	80.9	92.5	42.2	8.5	77.2
22.0	83.4	154.4	28.1	13.2	59.1
11.0	47.7	125.9	10.1	56.9	44.0
21.0	47.8	84.8	8.1	121.5	47.0
40.0	30.7	68.1	2.5	138.3	30.5
78.0	12.2	38.5	0.0	103.2	16.3
122.0	9.6	22.8	1.4	85.7	7.3

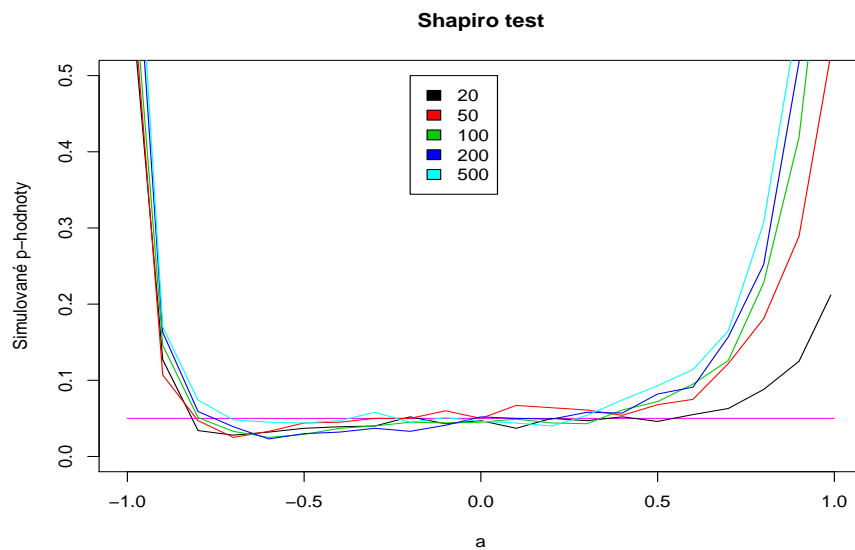
Tabulka 7.188: Výroční data slunečních skvrn z let 1700–1867.

169–196	197–224	225–252	253–261
37.6	41.8	16.7	31.5
74.0	26.2	44.3	13.9
139.0	26.7	63.9	4.4
111.2	12.1	69.0	38.0
101.6	9.5	77.8	141.7
66.2	2.7	64.9	190.2
44.7	5.0	35.7	184.8
17.0	24.4	21.2	159.0
11.3	42.0	11.1	112.3
12.4	63.5	5.7	
3.4	53.8	8.7	
6.0	62.0	36.1	
32.3	48.5	79.7	
54.3	43.9	114.4	
59.7	18.6	109.6	
63.7	5.7	88.8	
63.5	3.6	67.8	
52.2	1.4	47.5	
25.4	9.6	30.6	
13.1	47.4	16.3	
6.8	57.1	9.6	
6.3	103.9	33.2	
7.1	80.6	92.6	
35.6	63.6	151.6	
73.0	37.6	136.3	
85.1	26.1	134.7	
78.0	14.2	83.9	
64.0	5.8	69.4	

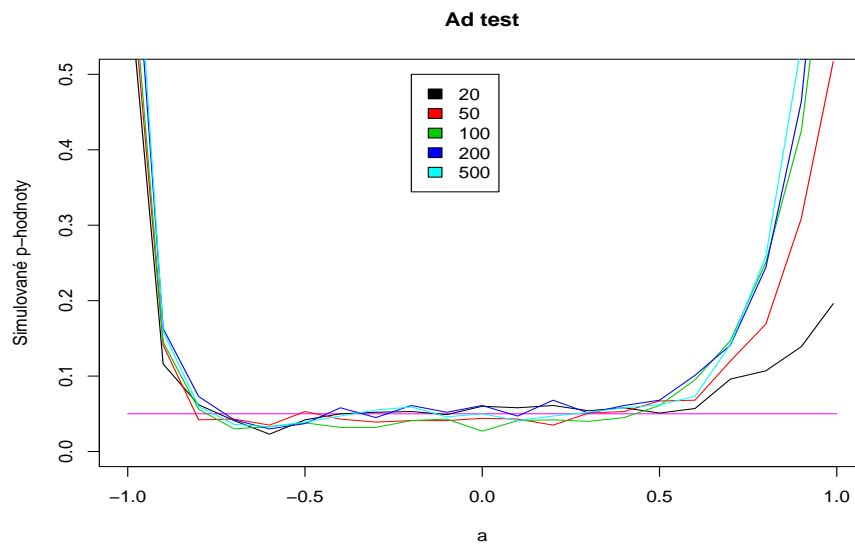
Tabulka 7.189: Výroční data slunečních skvrn z let 1868–1960.



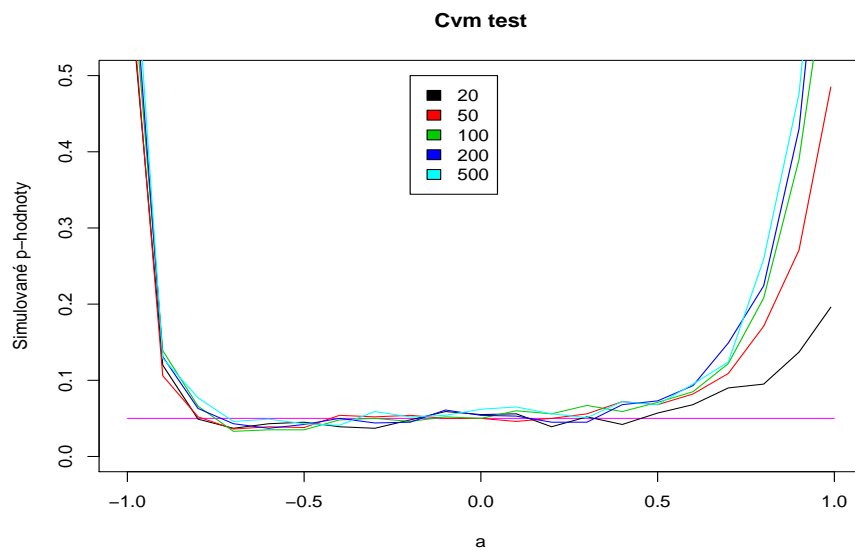
Obrázek 7.1: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.



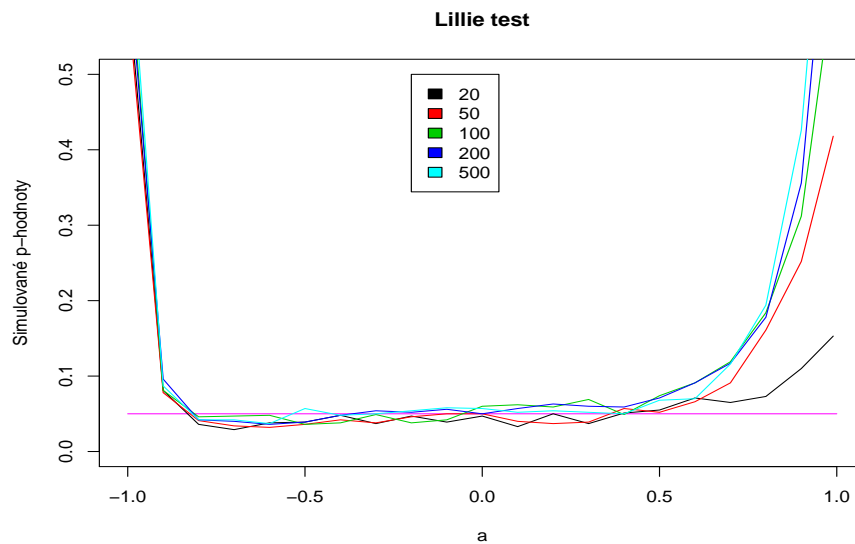
Obrázek 7.2: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.



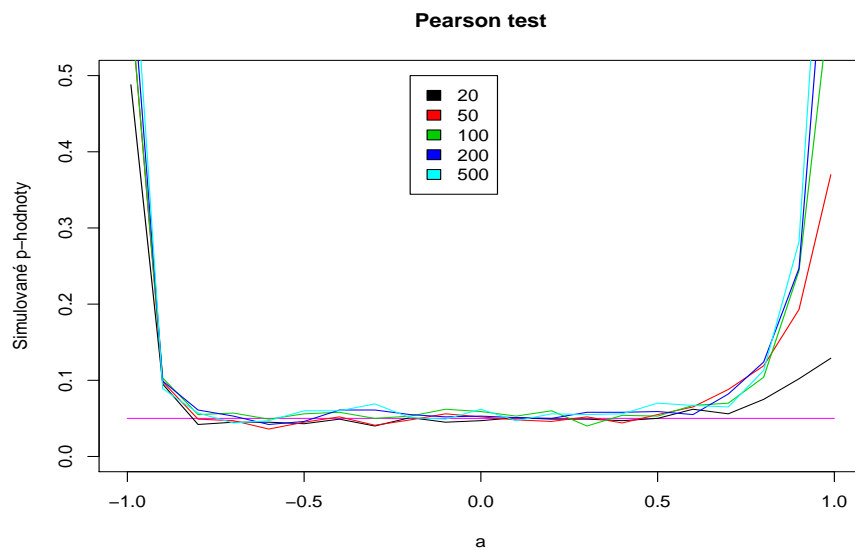
Obrázek 7.3: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.



Obrázek 7.4: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.

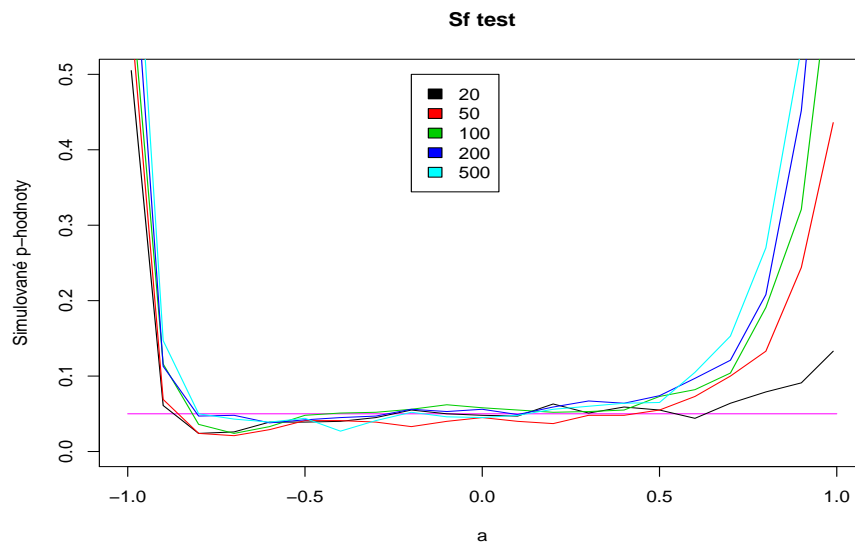


Obrázek 7.5: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.

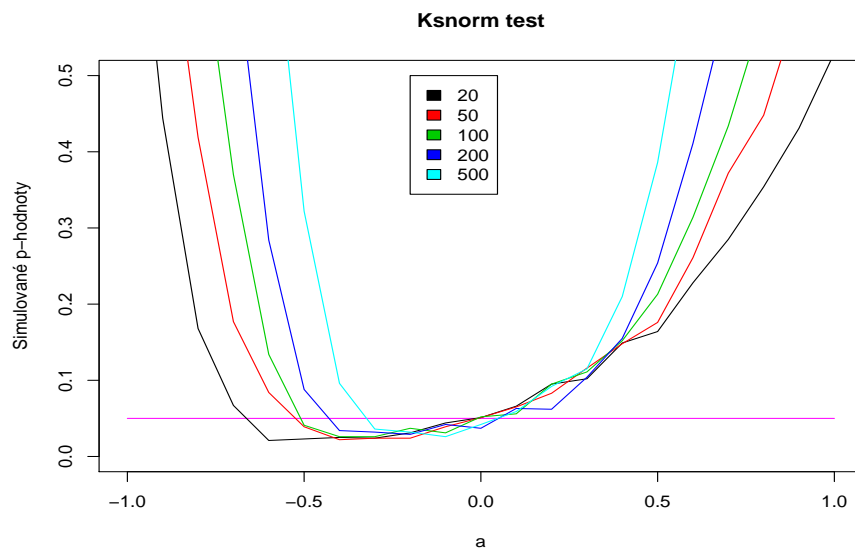


Obrázek 7.6: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.

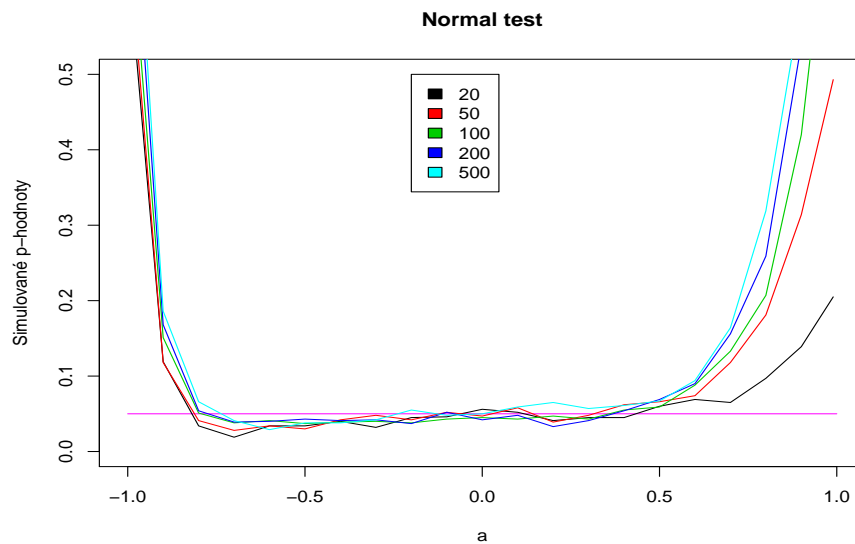




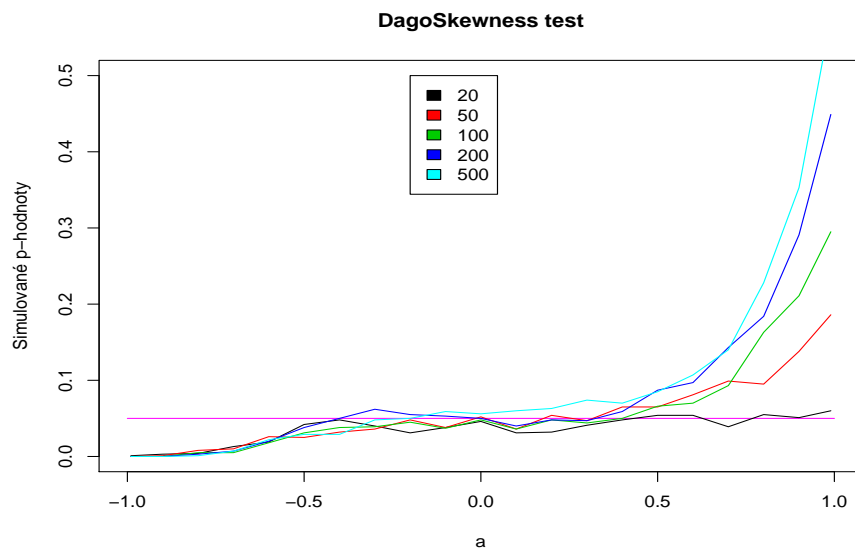
Obrázek 7.7: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.



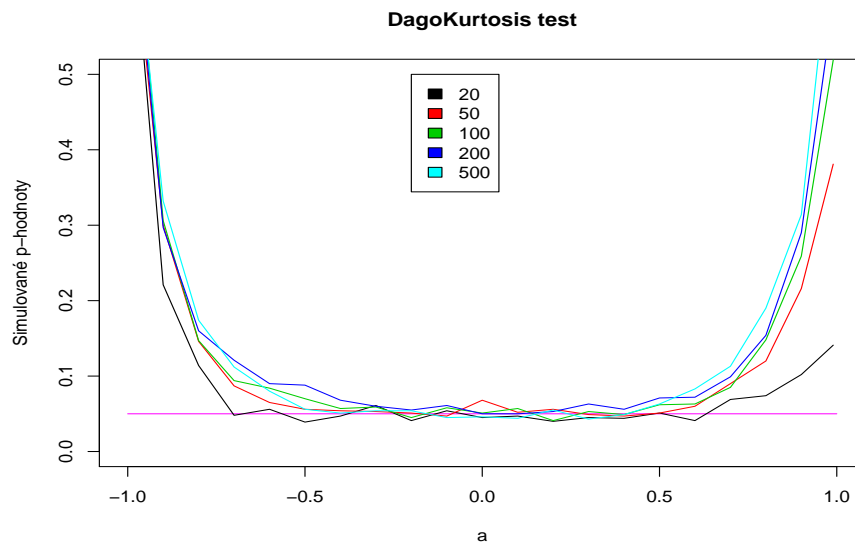
Obrázek 7.8: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)$  a na počtu pozorování.



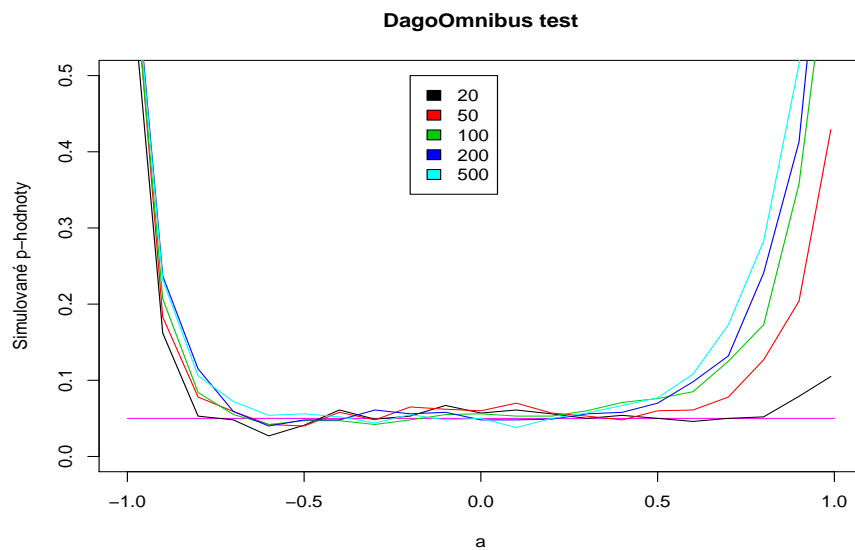
Obrázek 7.9: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



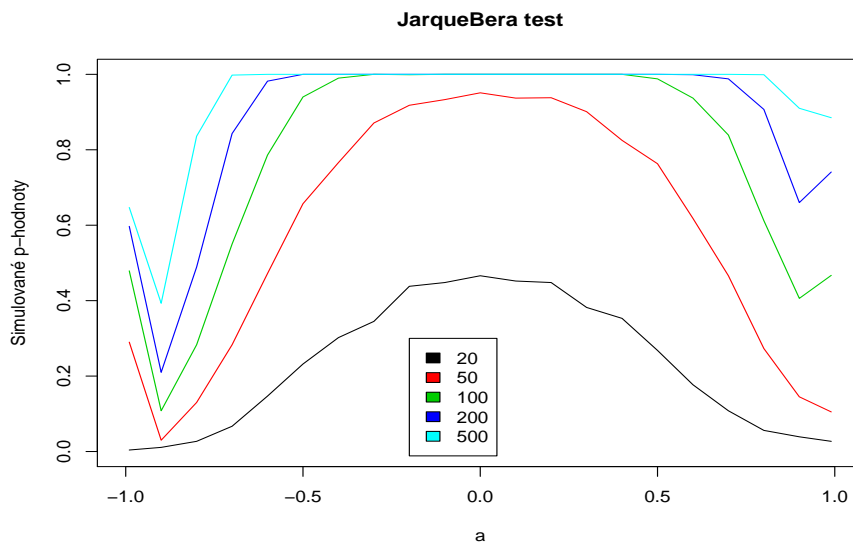
Obrázek 7.10: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



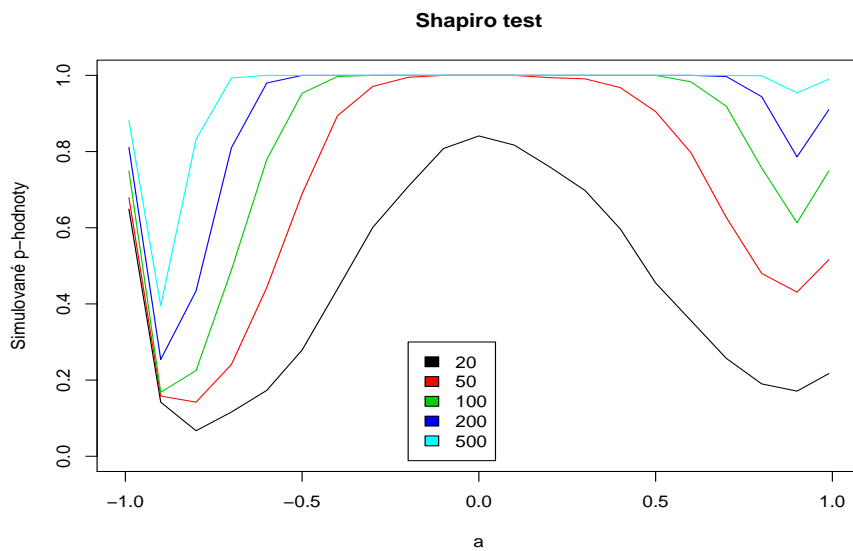
Obrázek 7.11: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



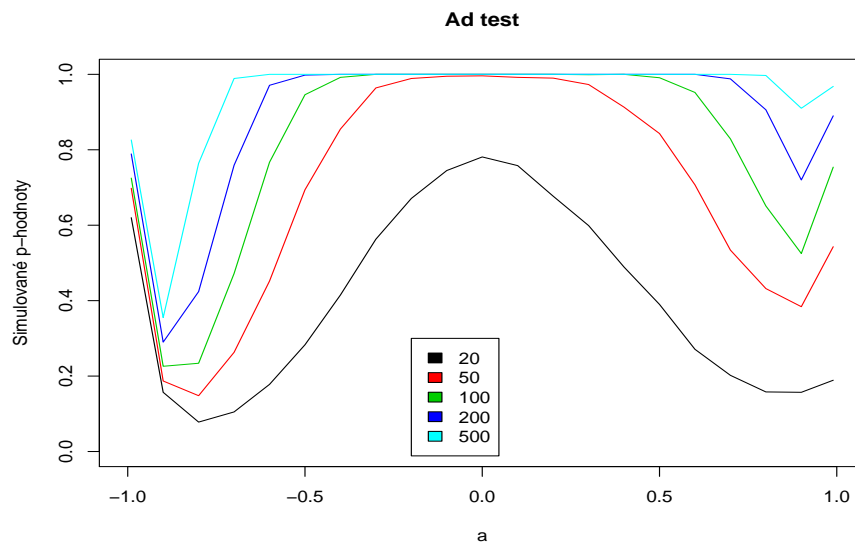
Obrázek 7.12: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



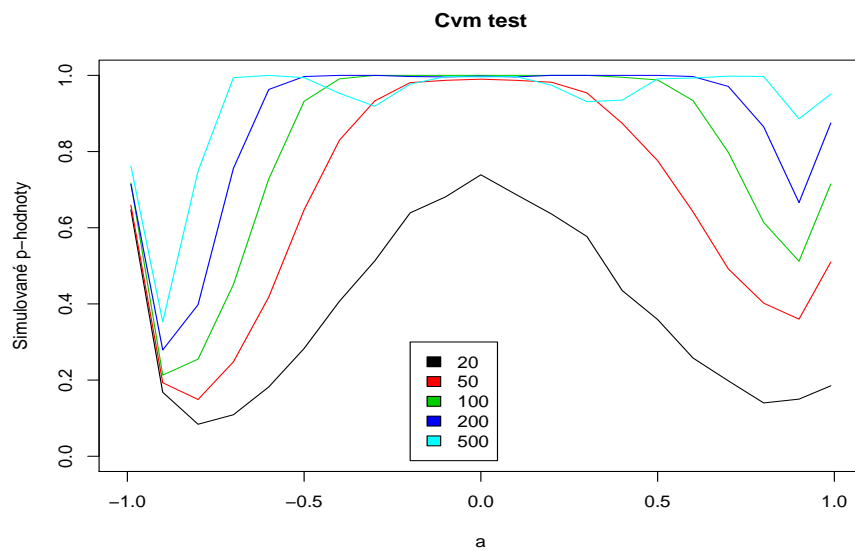
Obrázek 7.13: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



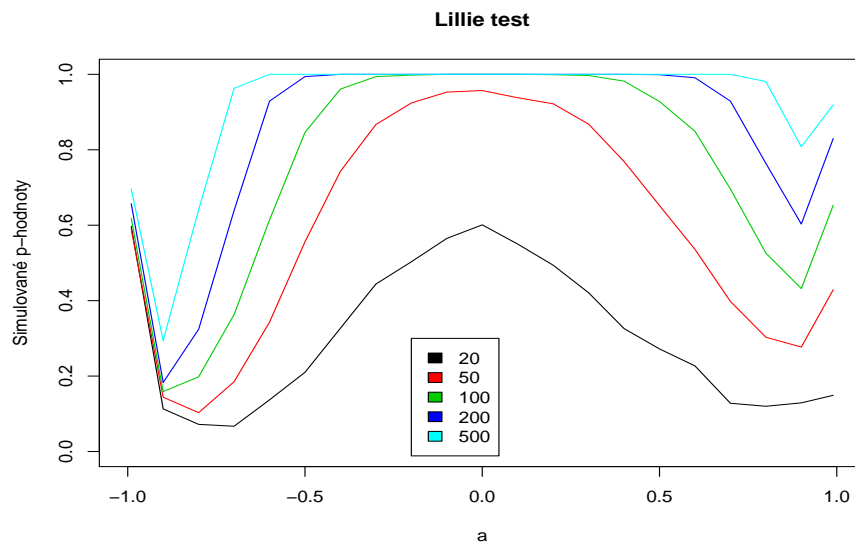
Obrázek 7.14: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



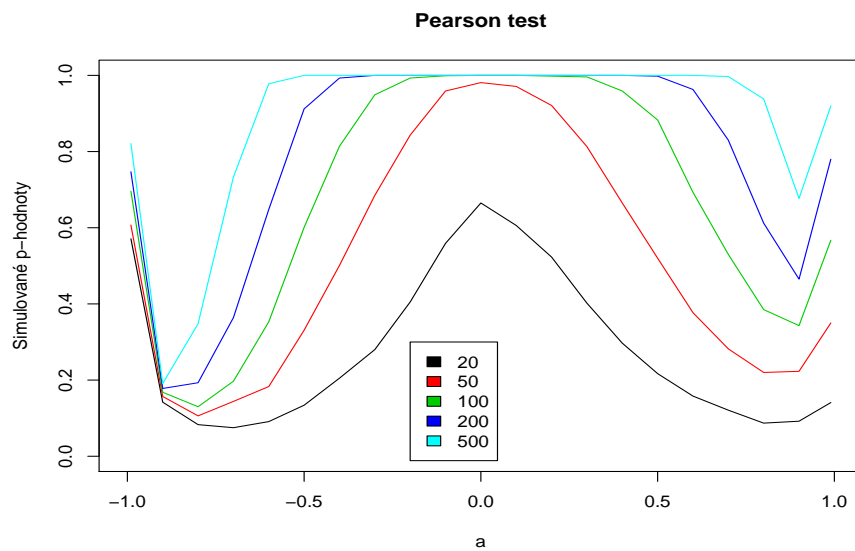
Obrázek 7.15: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



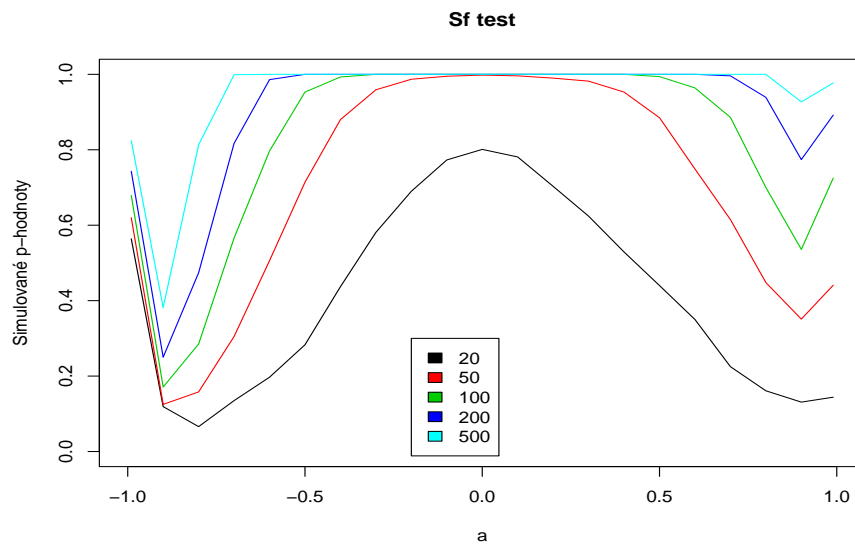
Obrázek 7.16: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



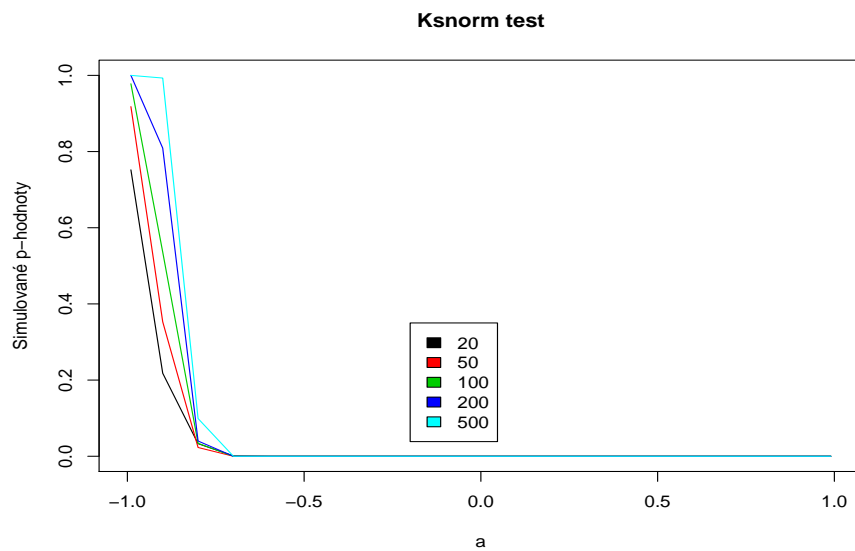
Obrázek 7.17: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



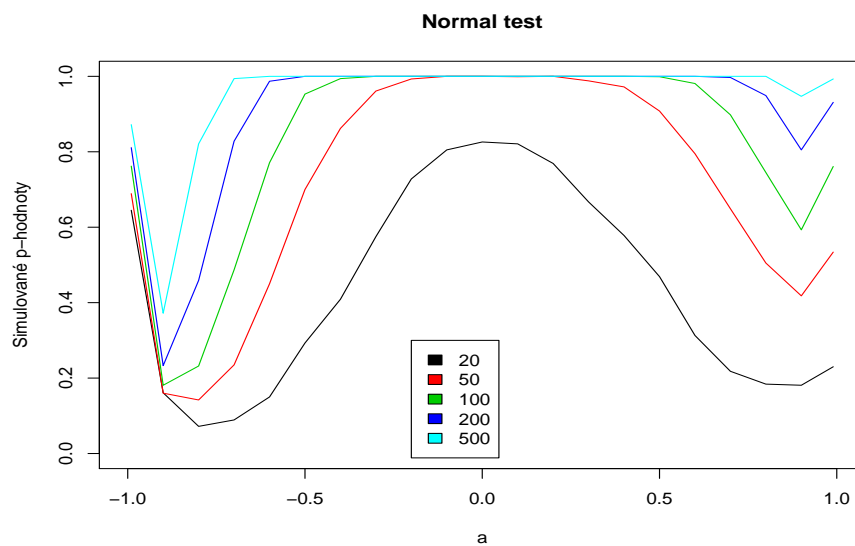
Obrázek 7.18: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



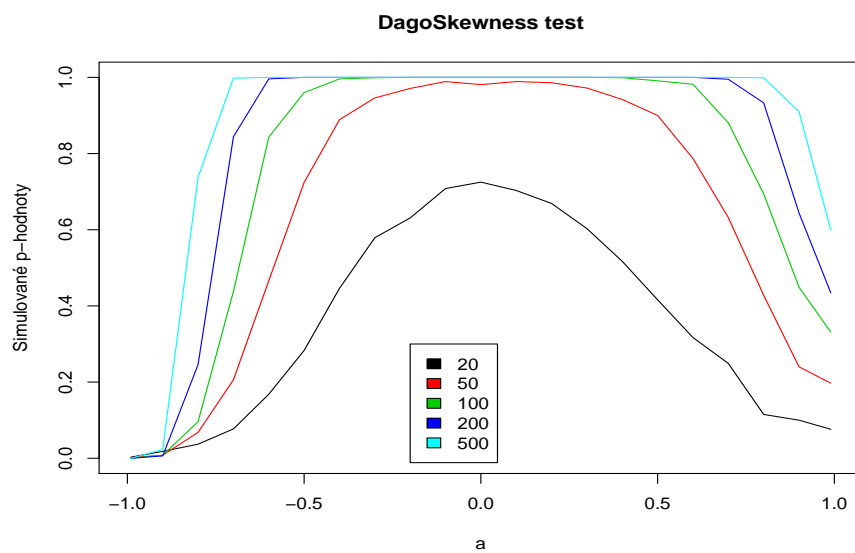
Obrázek 7.19: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



Obrázek 7.20: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.

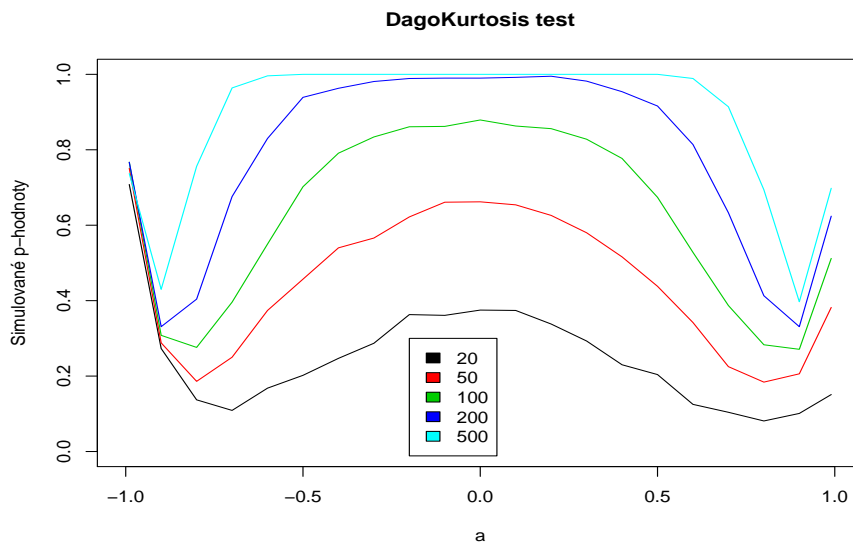


Obrázek 7.21: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.

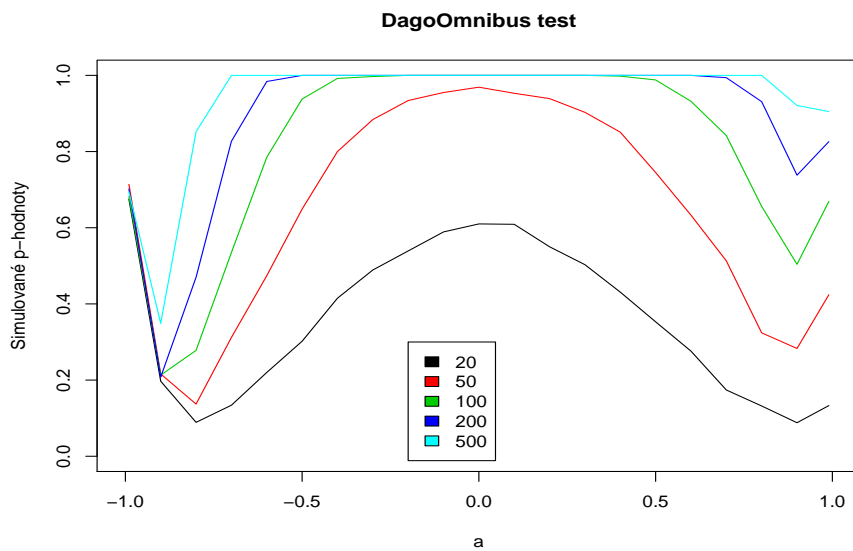


Obrázek 7.22: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.

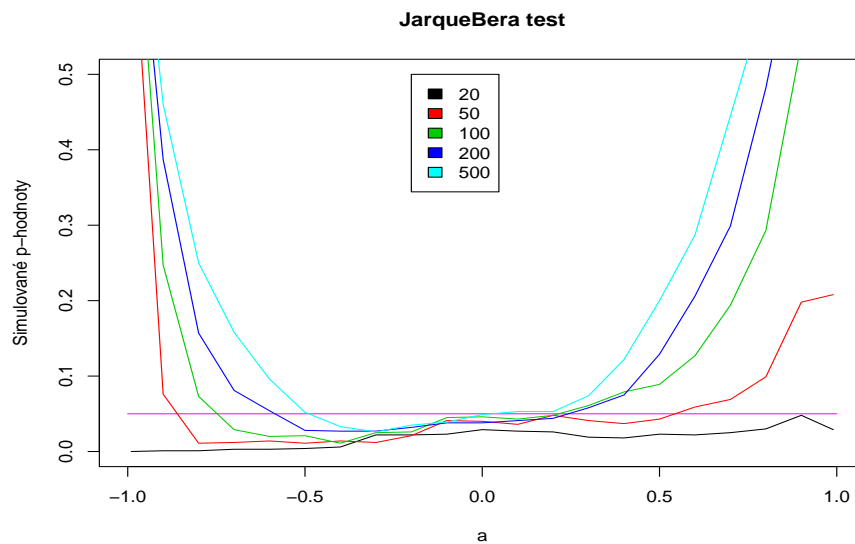




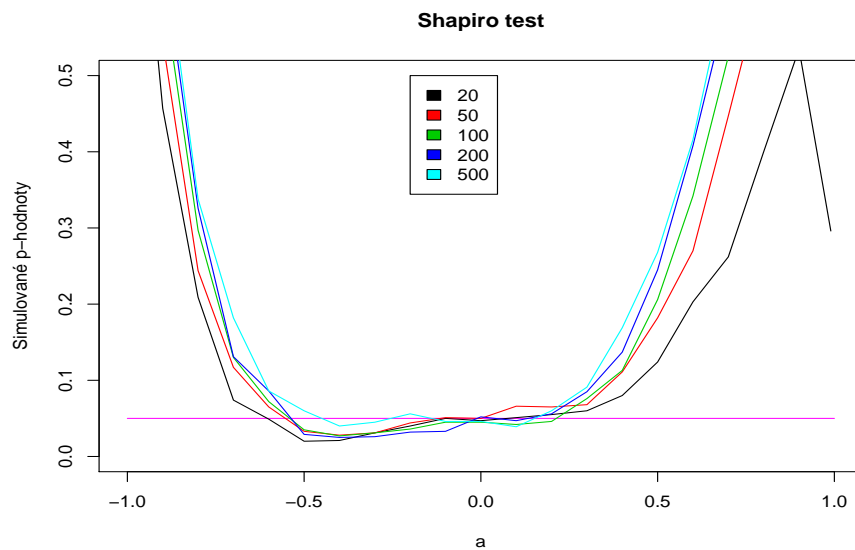
Obrázek 7.23: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



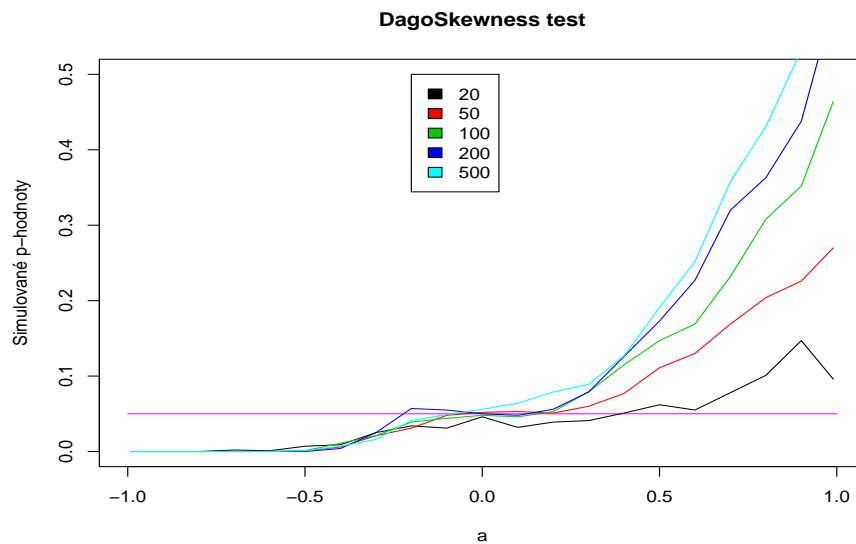
Obrázek 7.24: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



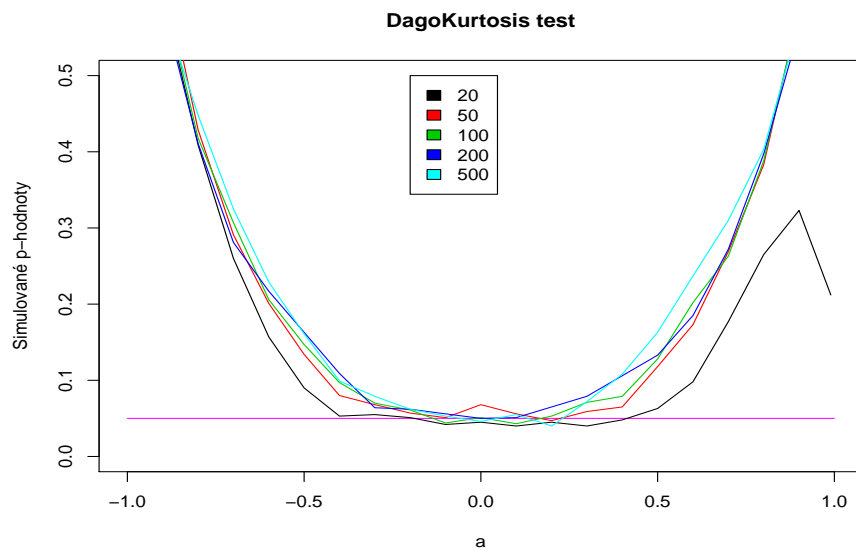
Obrázek 7.25: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



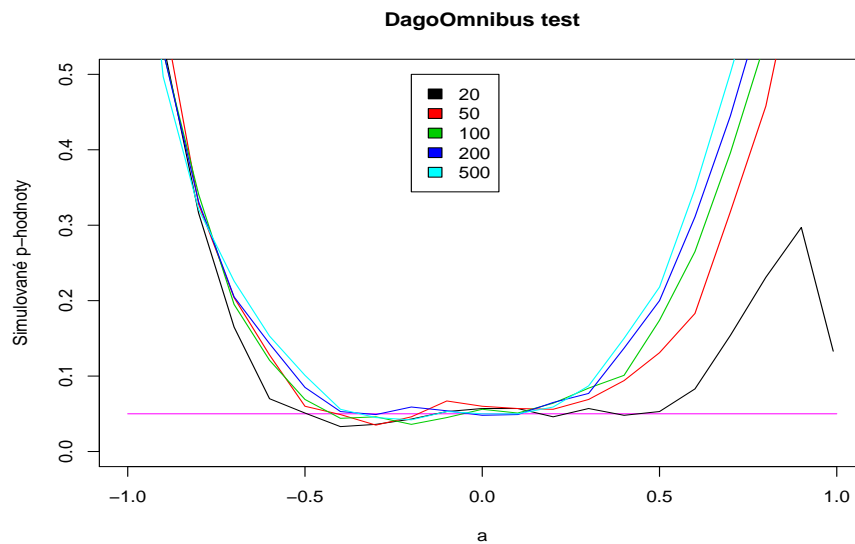
Obrázek 7.26: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



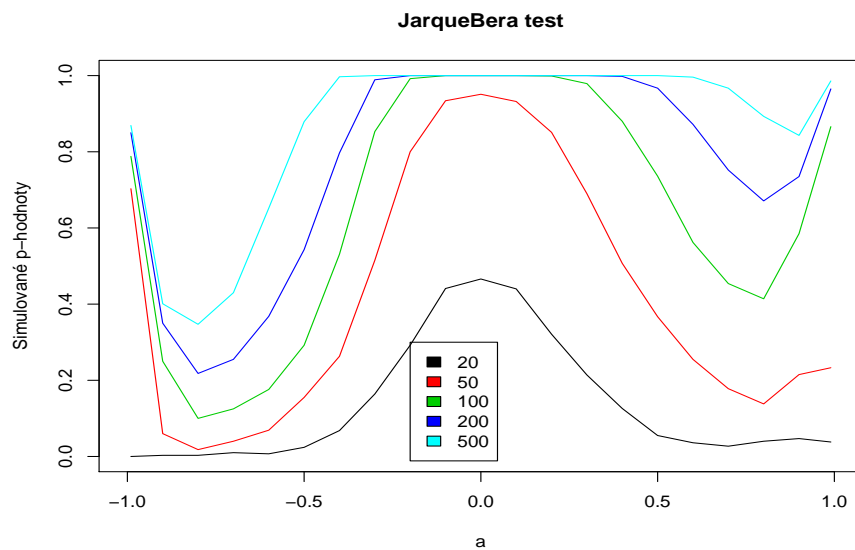
Obrázek 7.27: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



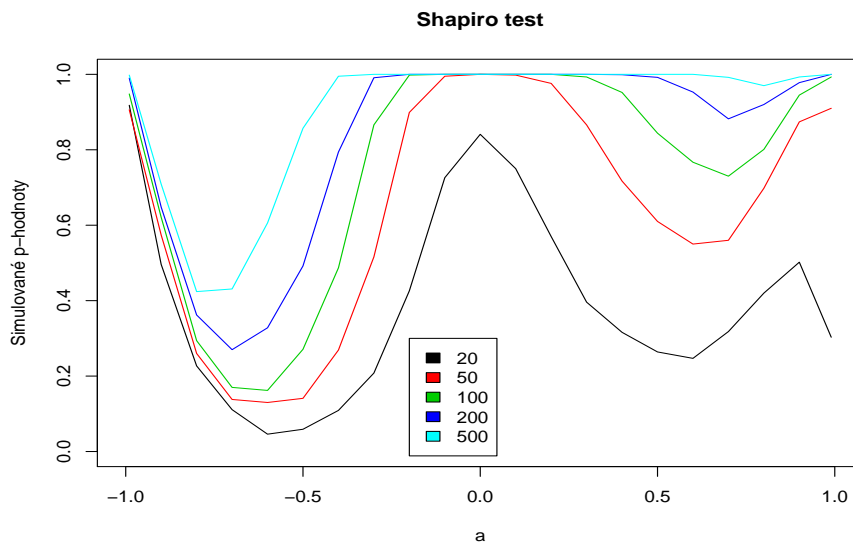
Obrázek 7.28: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



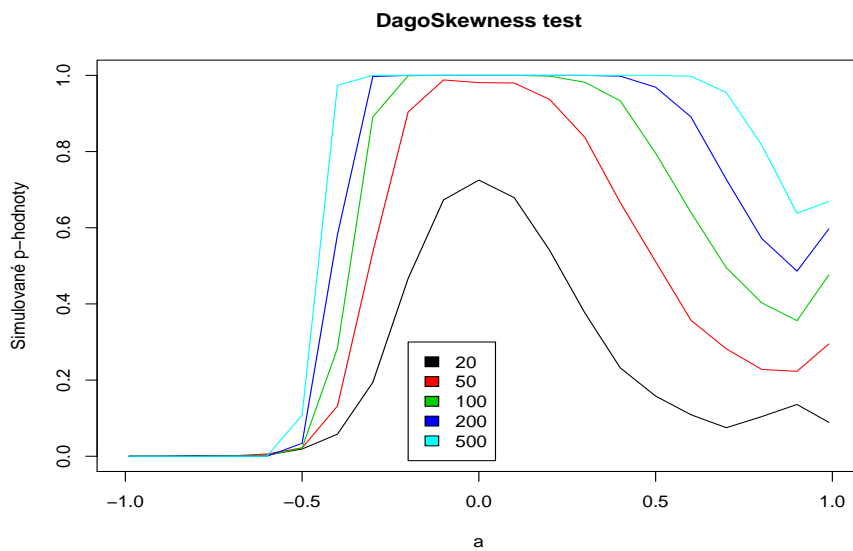
Obrázek 7.29: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



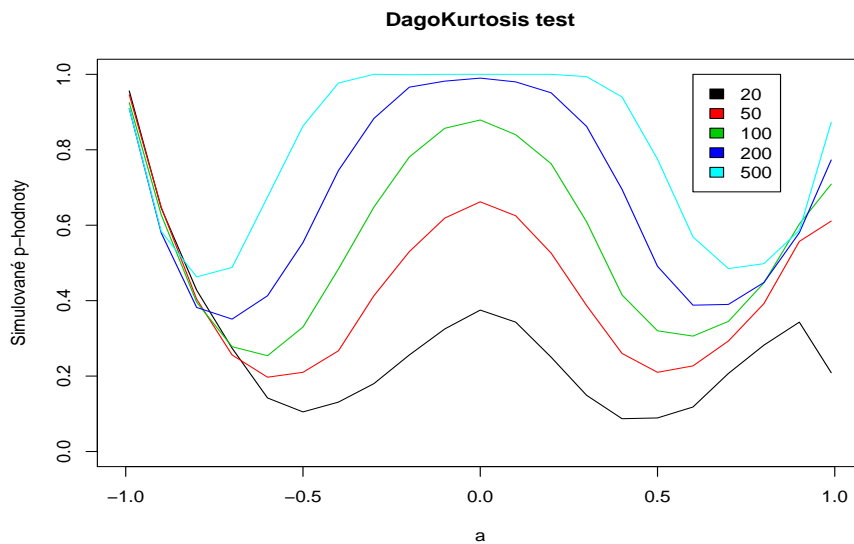
Obrázek 7.30: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



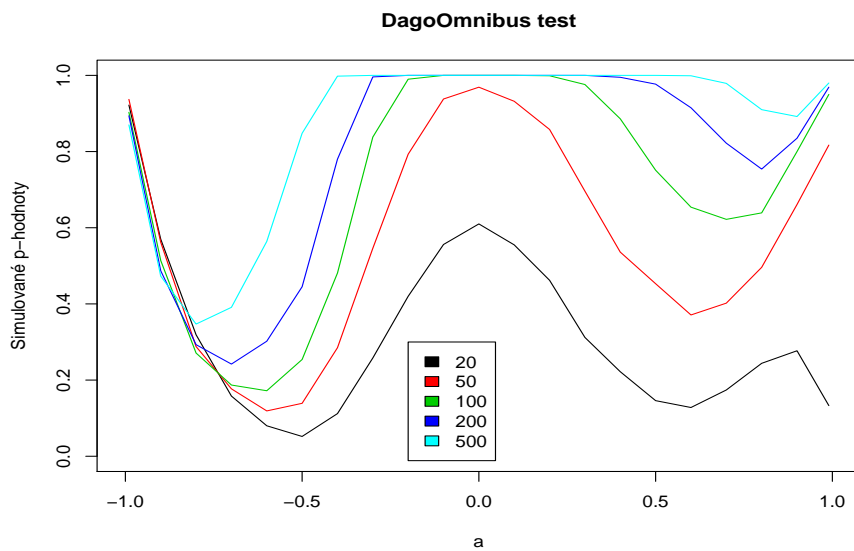
Obrázek 7.31: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



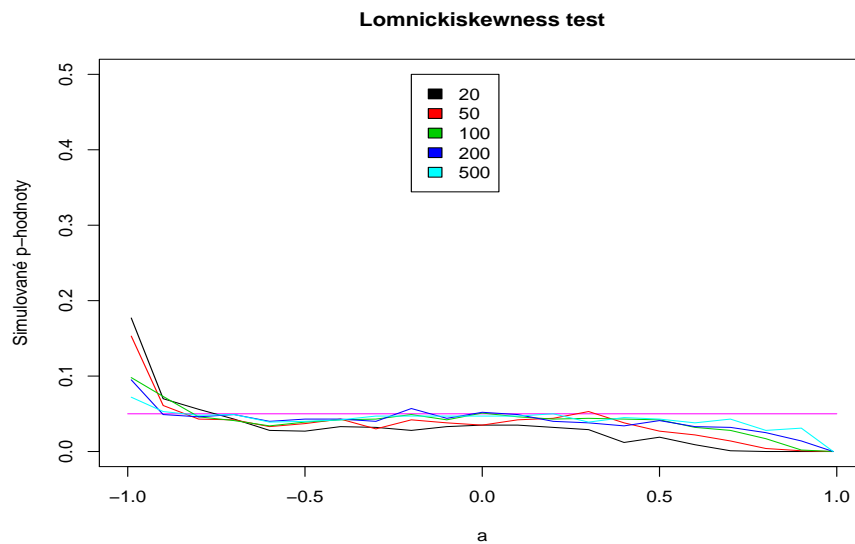
Obrázek 7.32: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



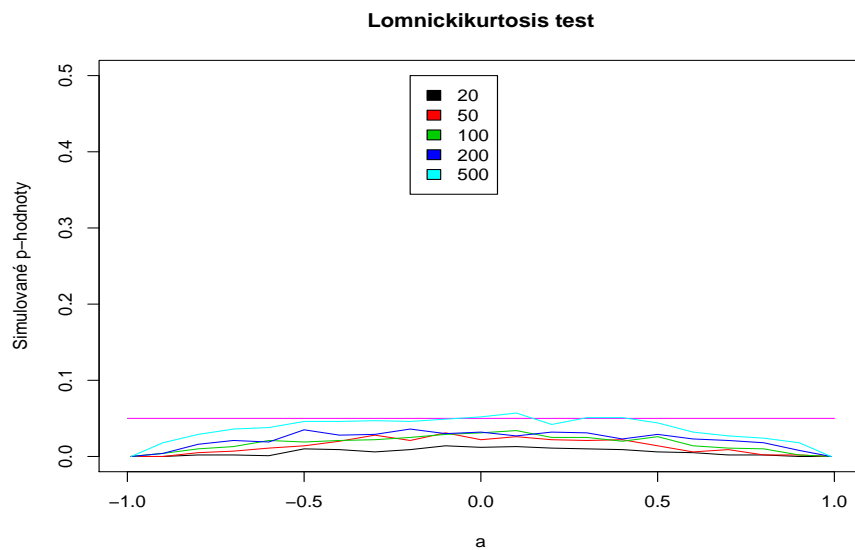
Obrázek 7.33: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



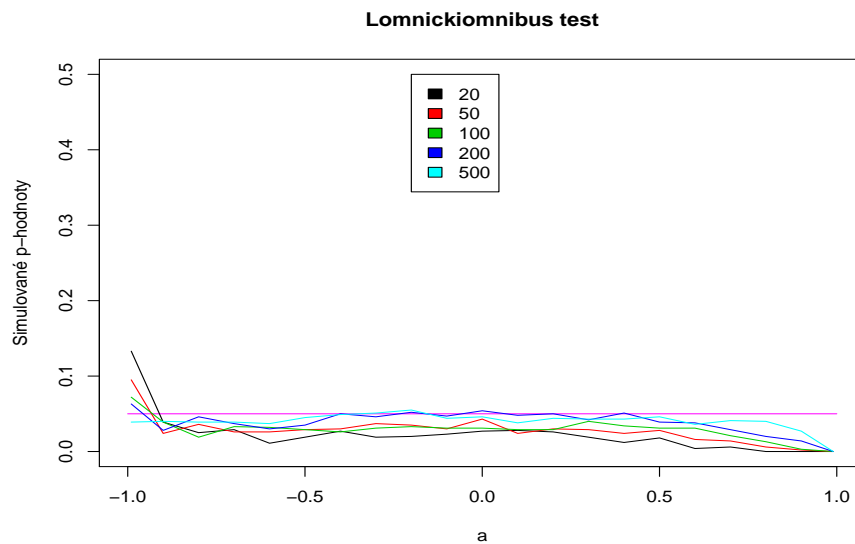
Obrázek 7.34: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



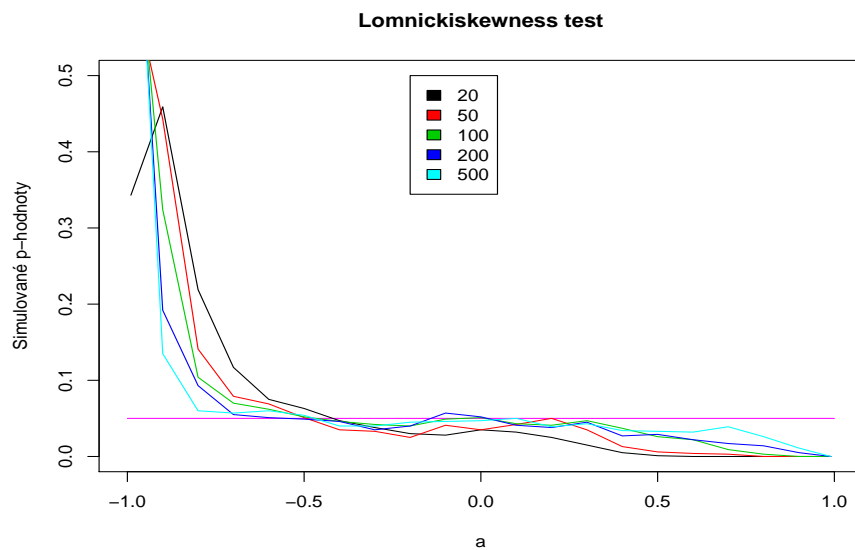
Obrázek 7.35: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



Obrázek 7.36: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.

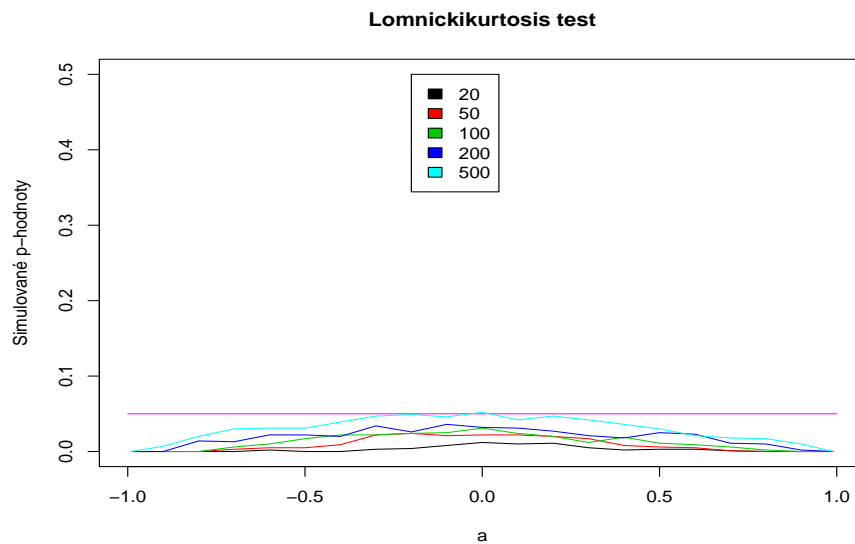


Obrázek 7.37: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.

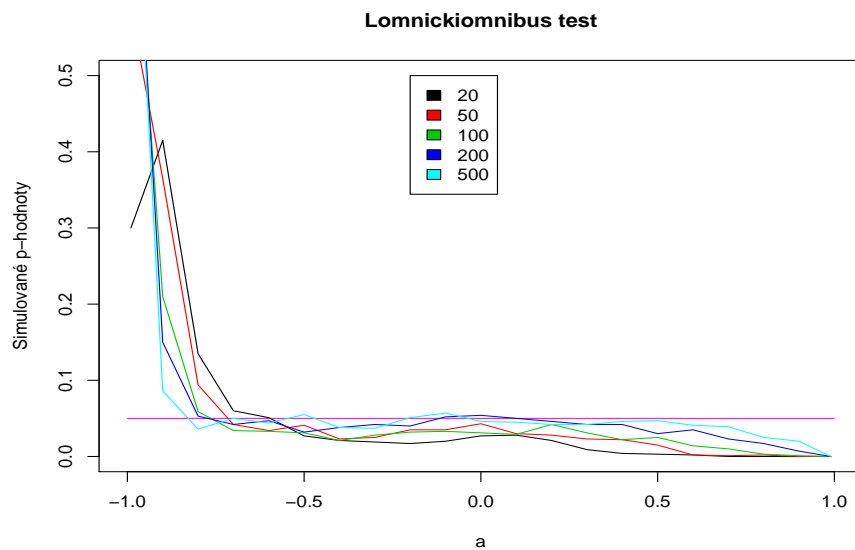


Obrázek 7.38: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.

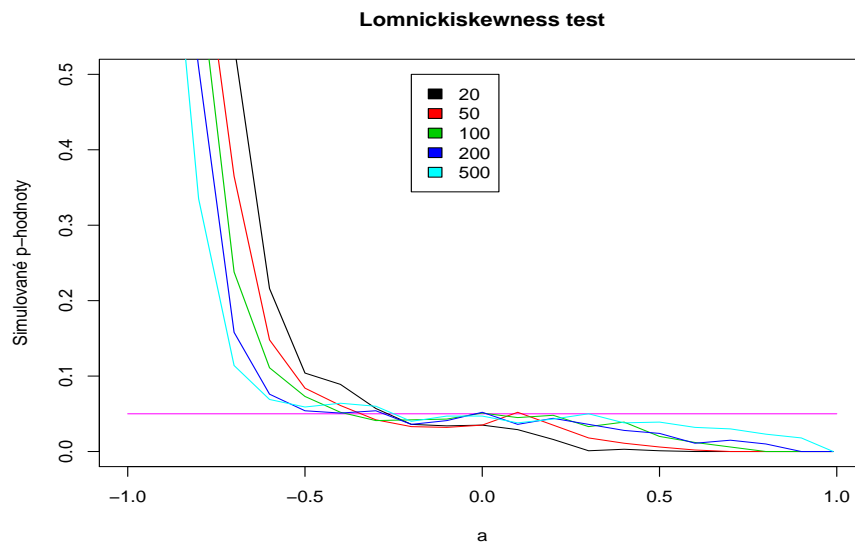




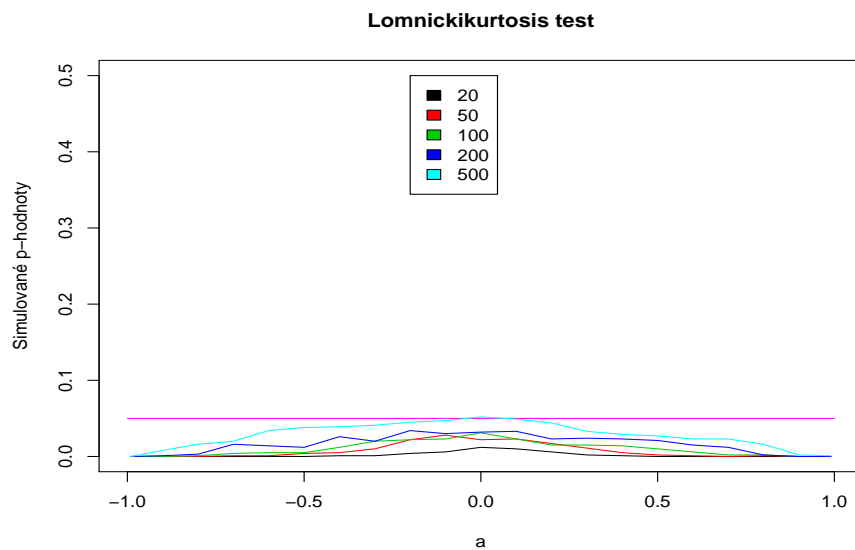
Obrázek 7.39: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



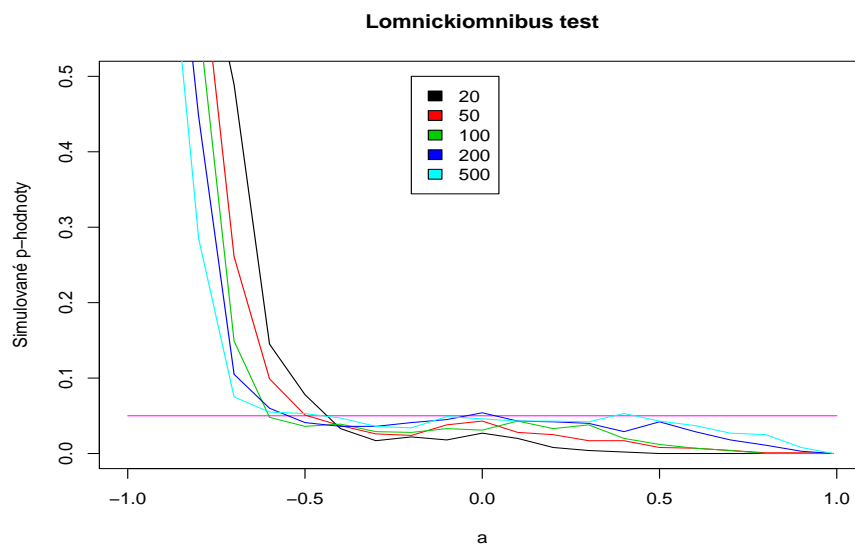
Obrázek 7.40: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



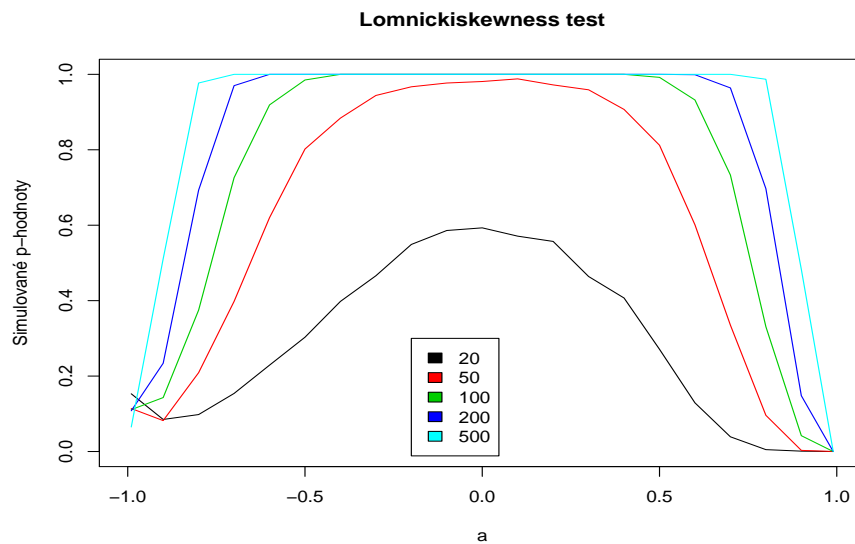
Obrázek 7.41: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$  a na počtu pozorování.



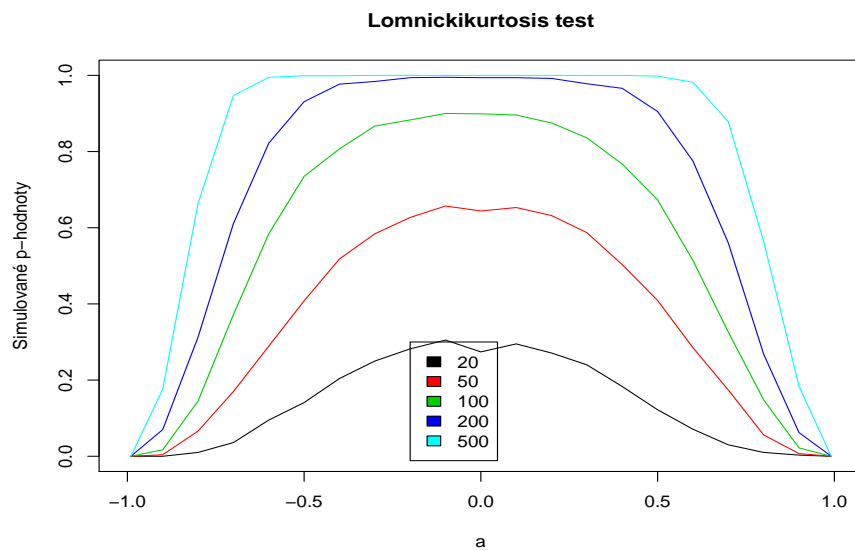
Obrázek 7.42: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$  a na počtu pozorování.



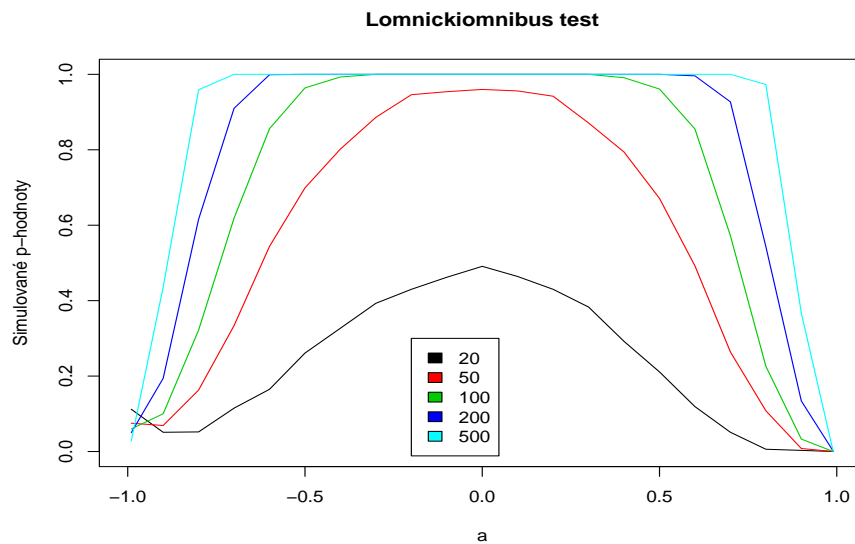
Obrázek 7.43: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$  a na počtu pozorování.



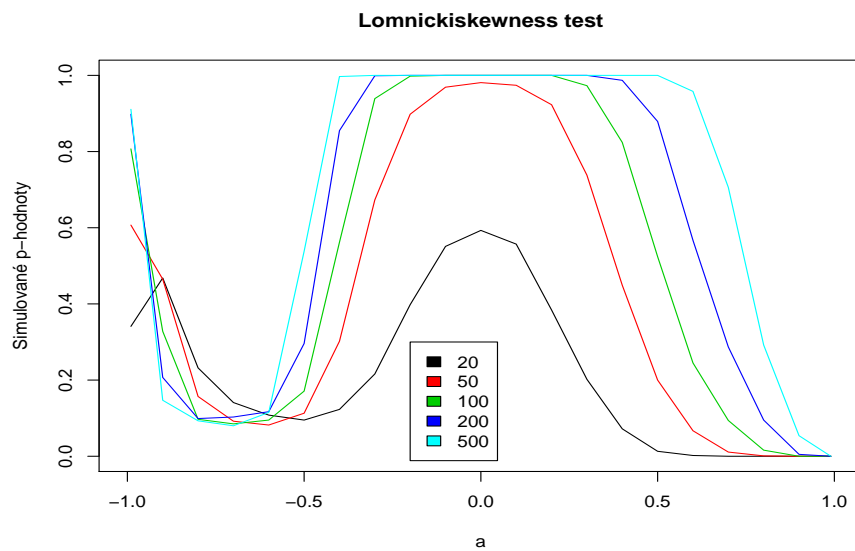
Obrázek 7.44: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



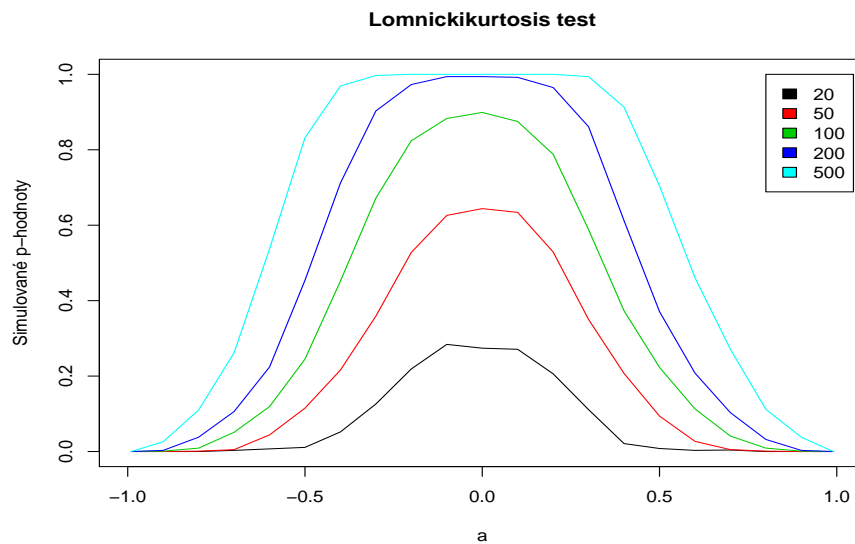
Obrázek 7.45: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



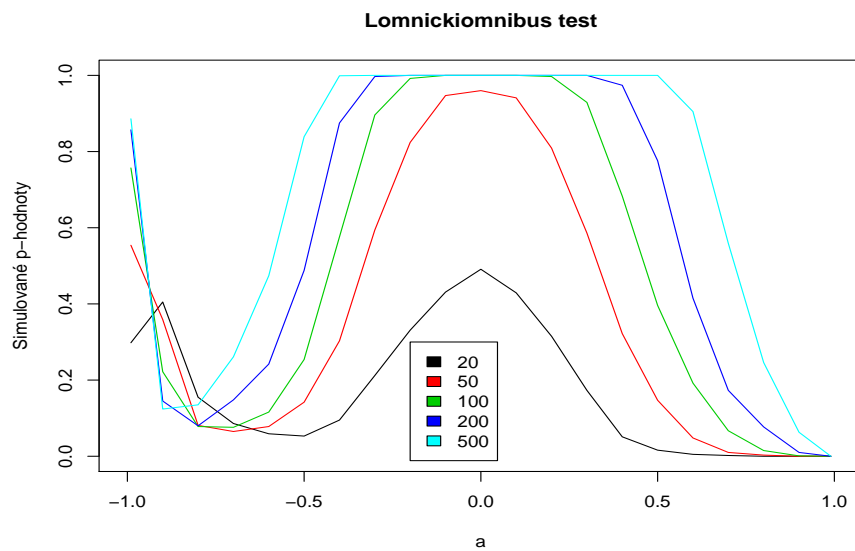
Obrázek 7.46: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



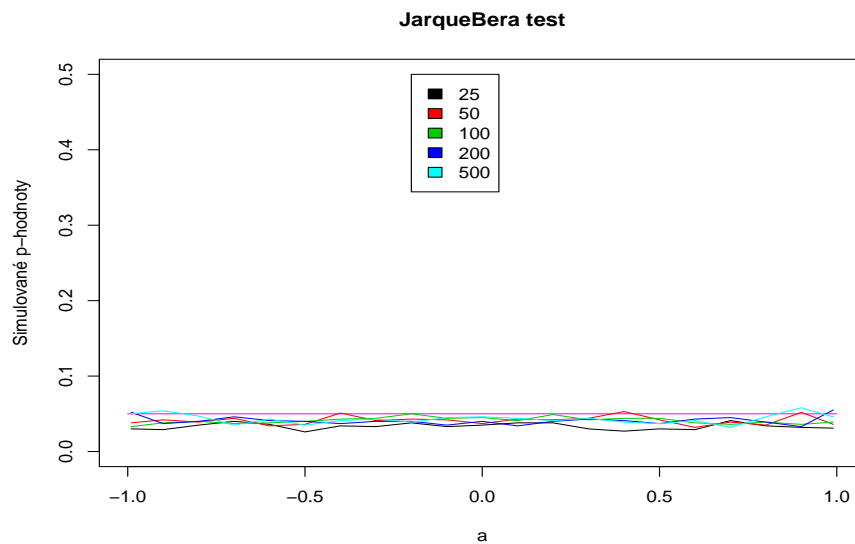
Obrázek 7.47: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



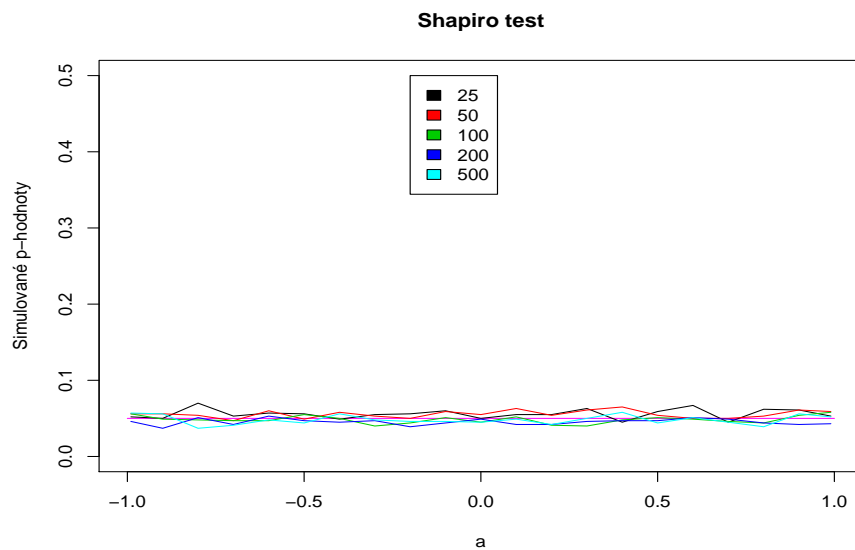
Obrázek 7.48: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



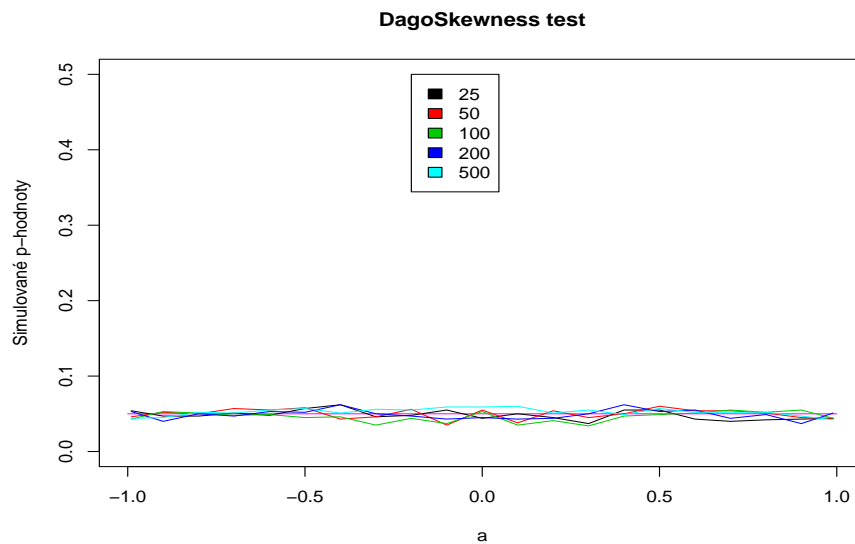
Obrázek 7.49: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



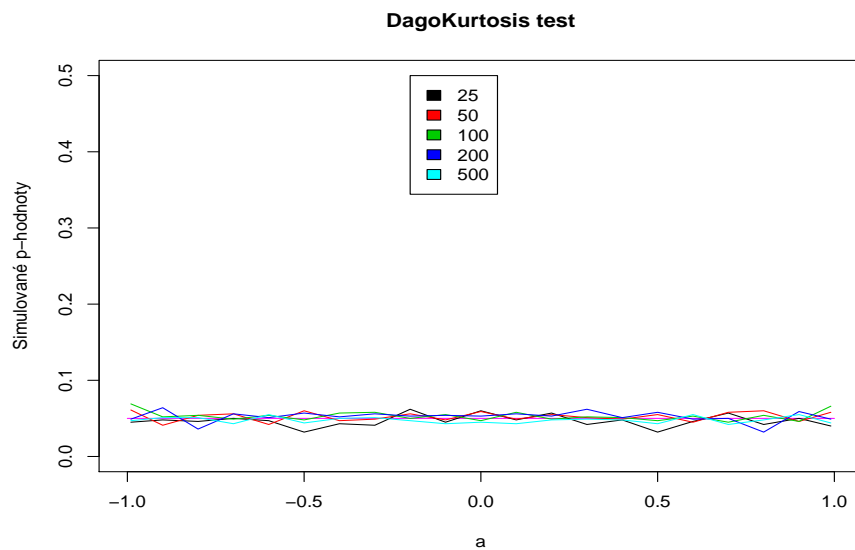
Obrázek 7.50: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



Obrázek 7.51: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.

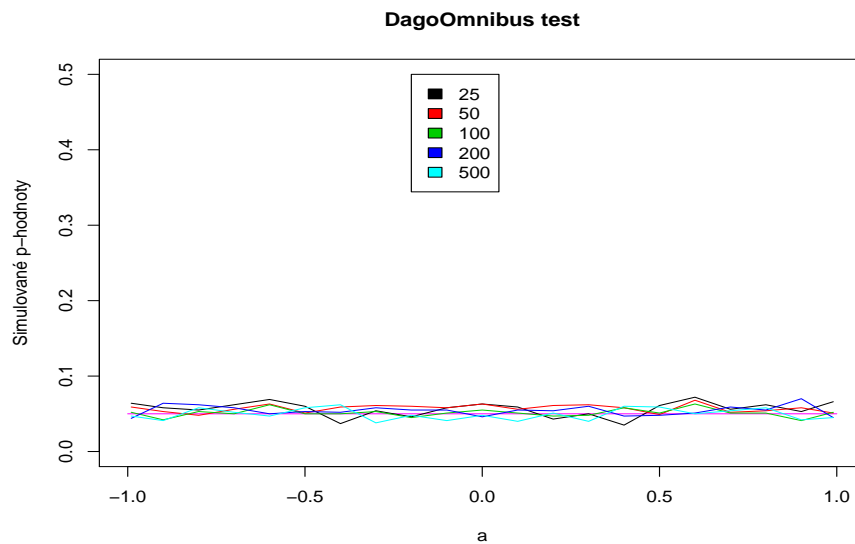


Obrázek 7.52: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.

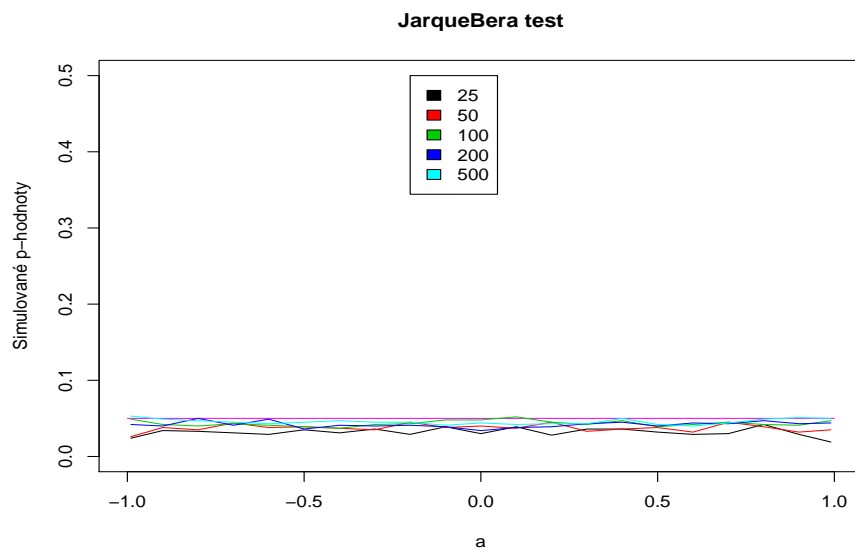


Obrázek 7.53: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.

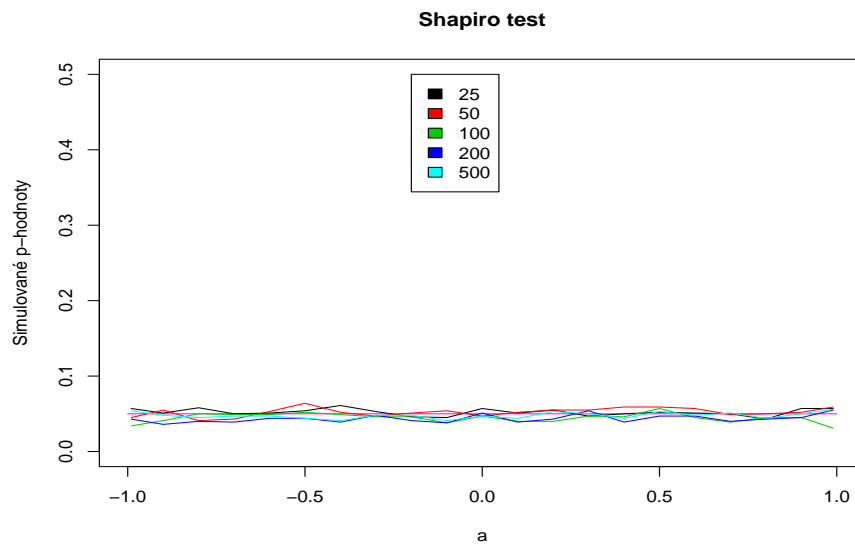




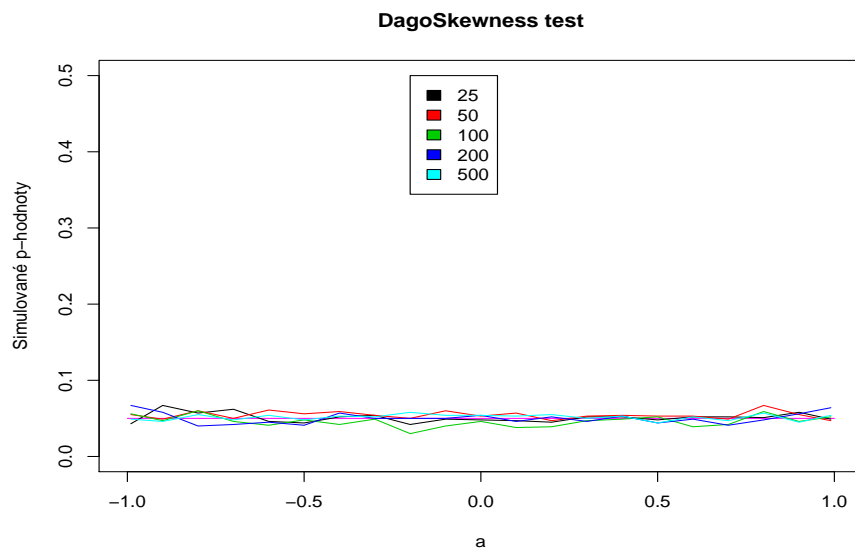
Obrázek 7.54: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



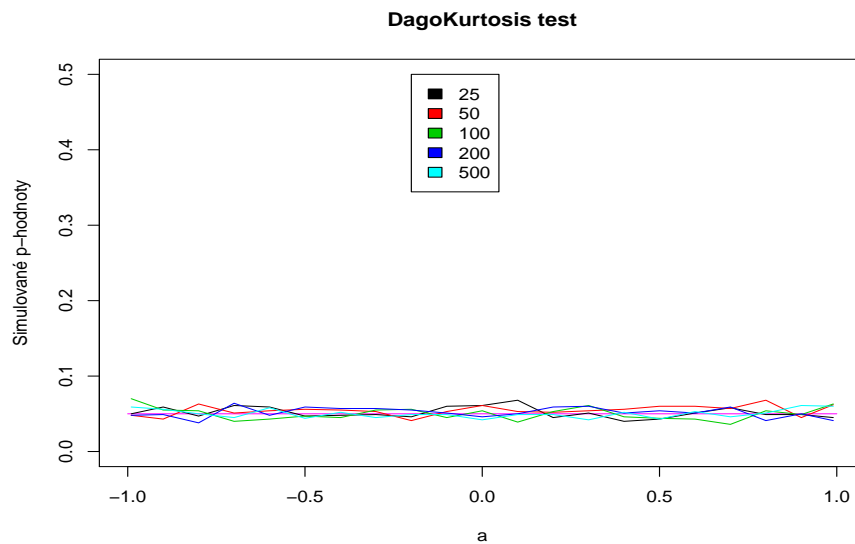
Obrázek 7.55: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



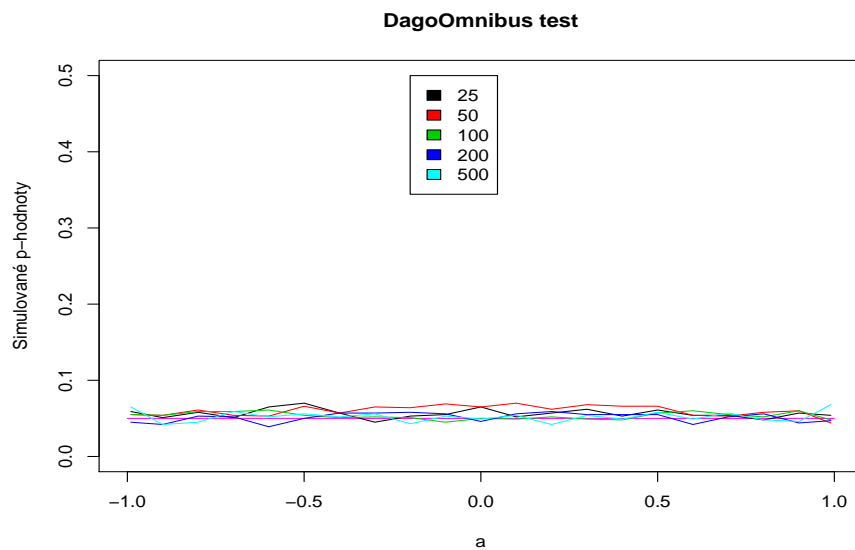
Obrázek 7.56: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



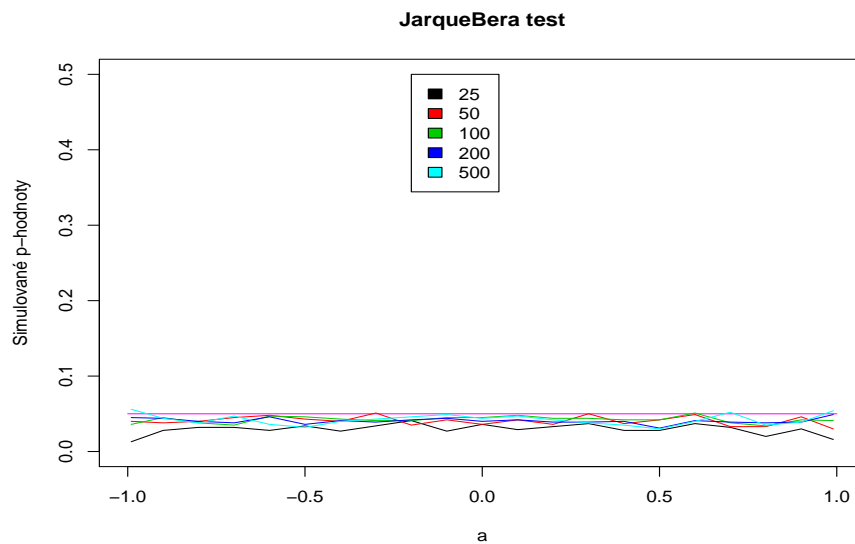
Obrázek 7.57: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



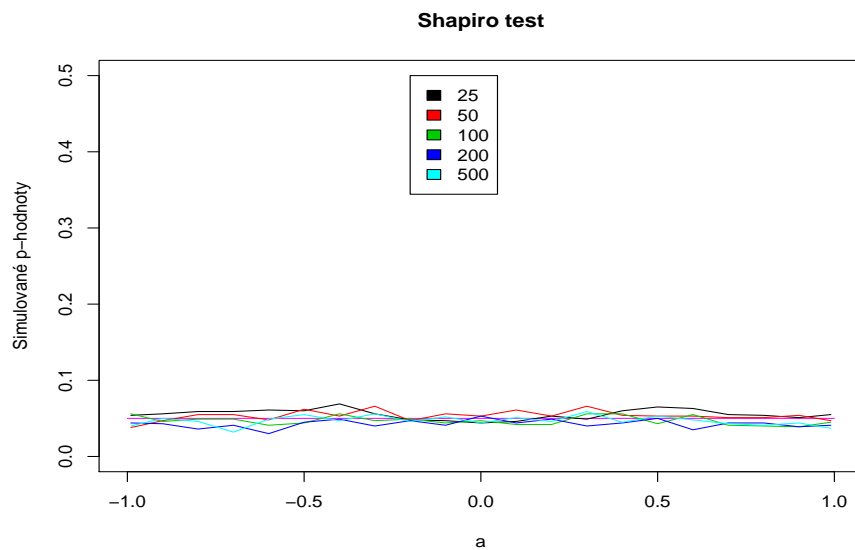
Obrázek 7.58: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



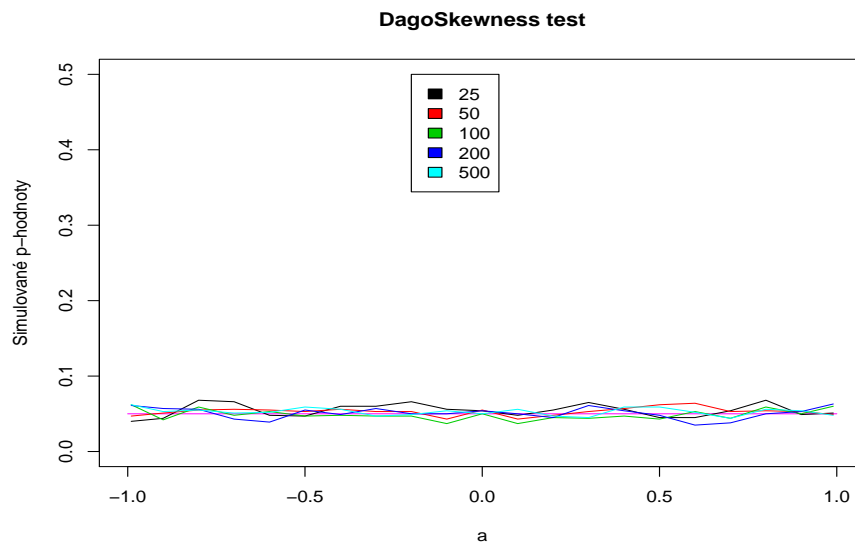
Obrázek 7.59: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



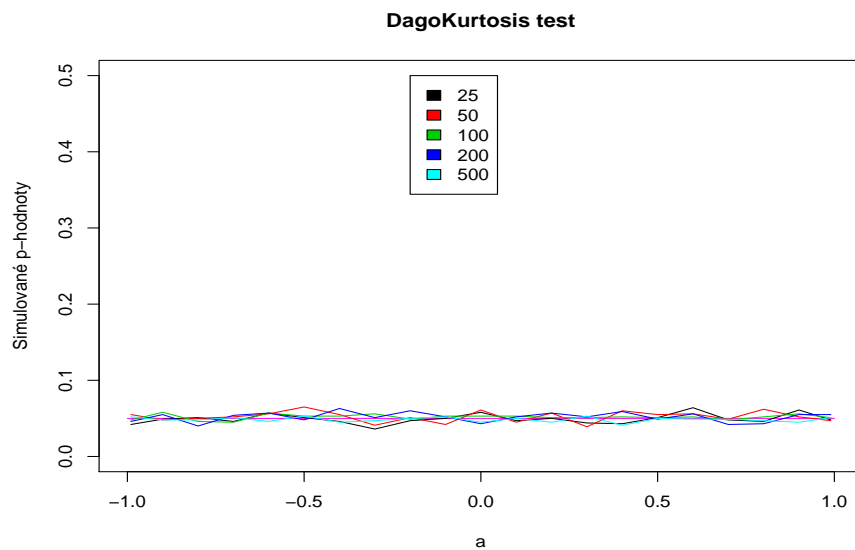
Obrázek 7.60: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



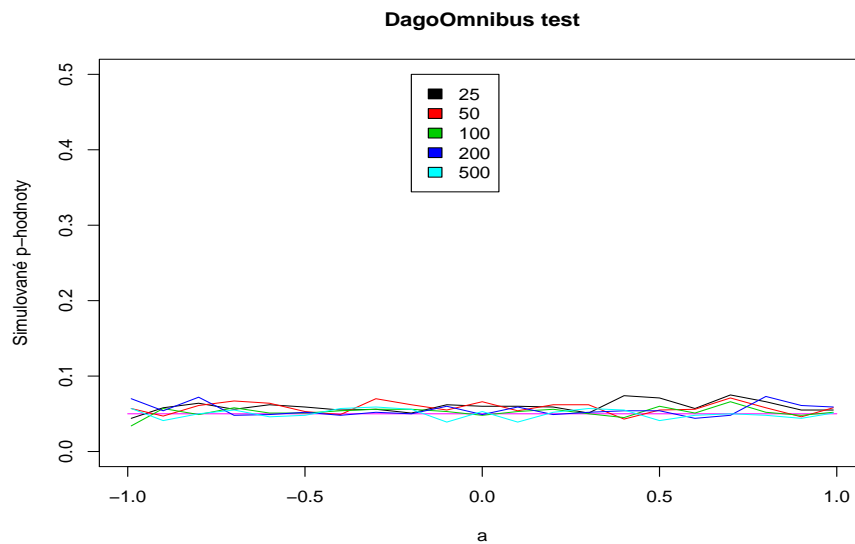
Obrázek 7.61: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



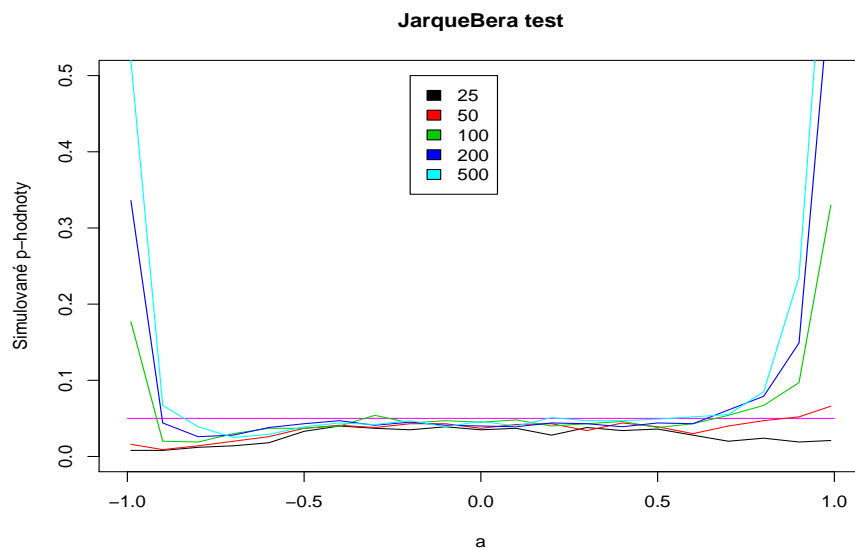
Obrázek 7.62: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



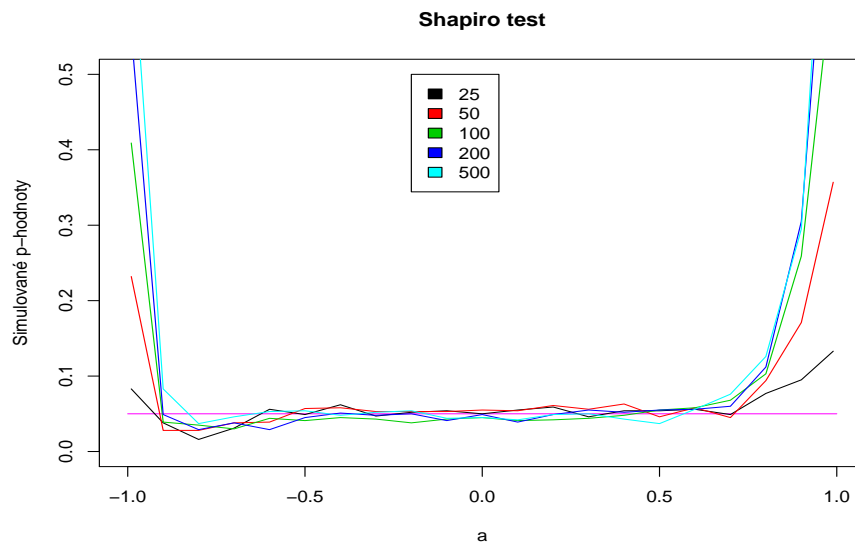
Obrázek 7.63: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



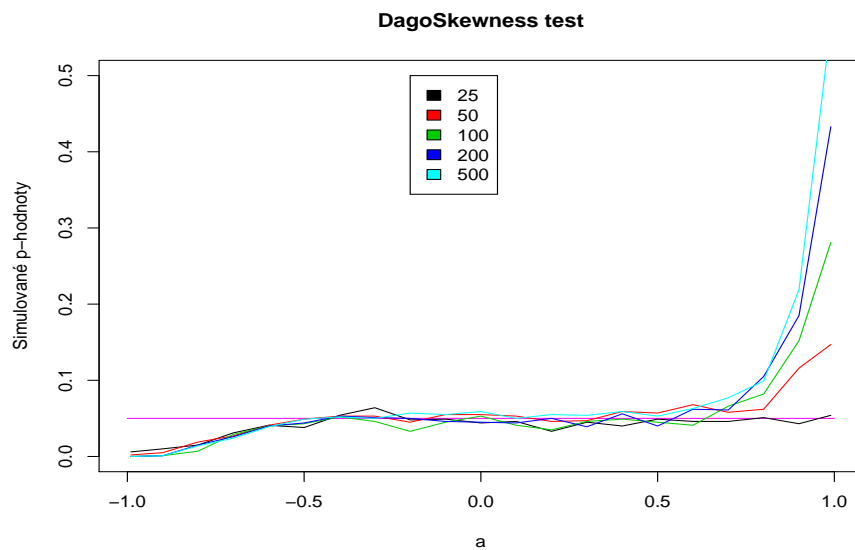
Obrázek 7.64: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



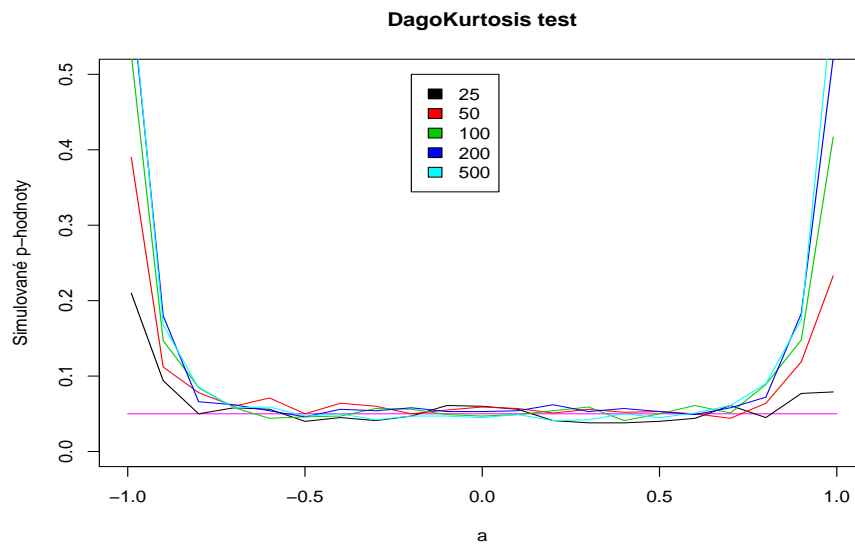
Obrázek 7.65: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



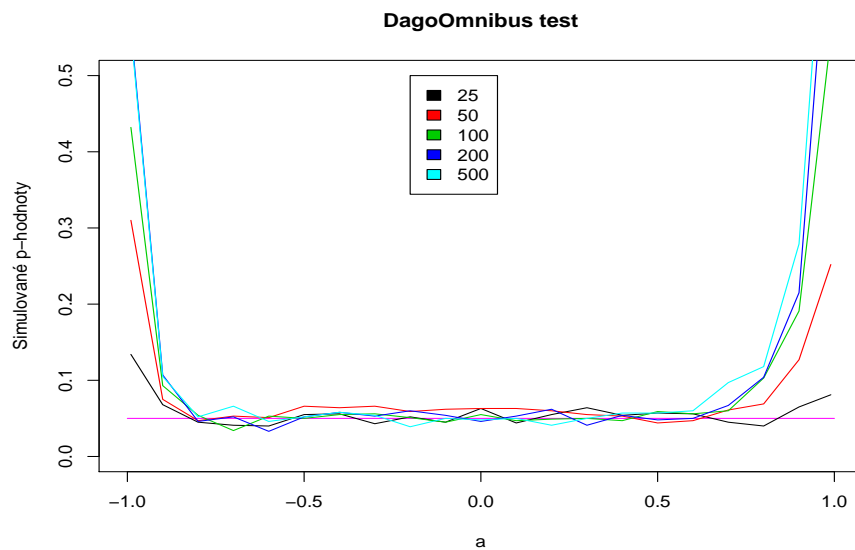
Obrázek 7.66: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



Obrázek 7.67: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.

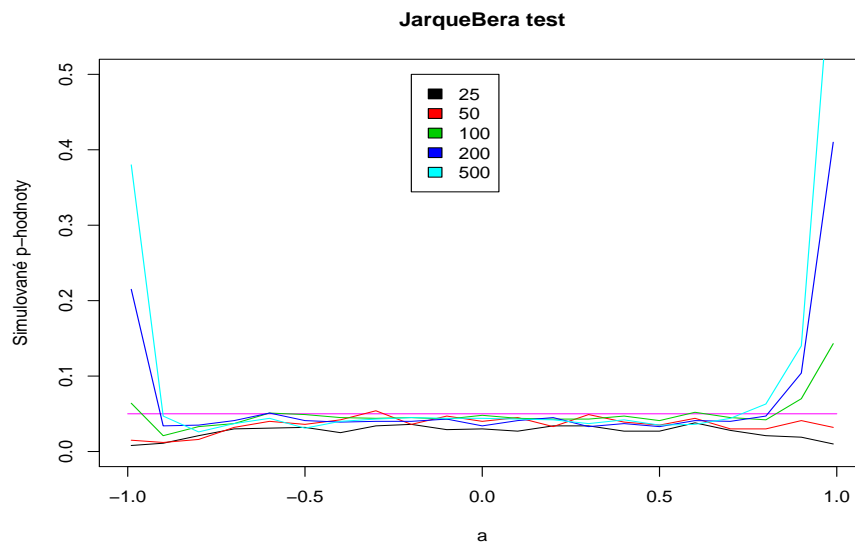


Obrázek 7.68: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.

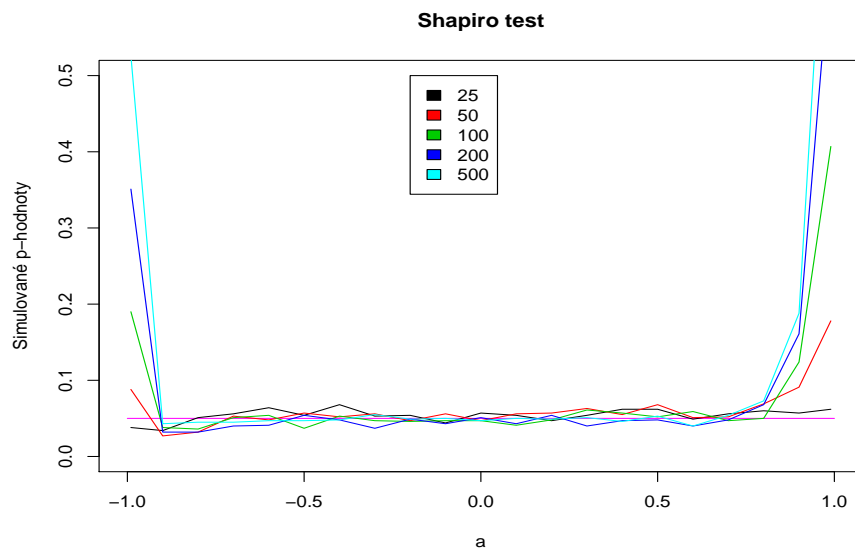


Obrázek 7.69: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.

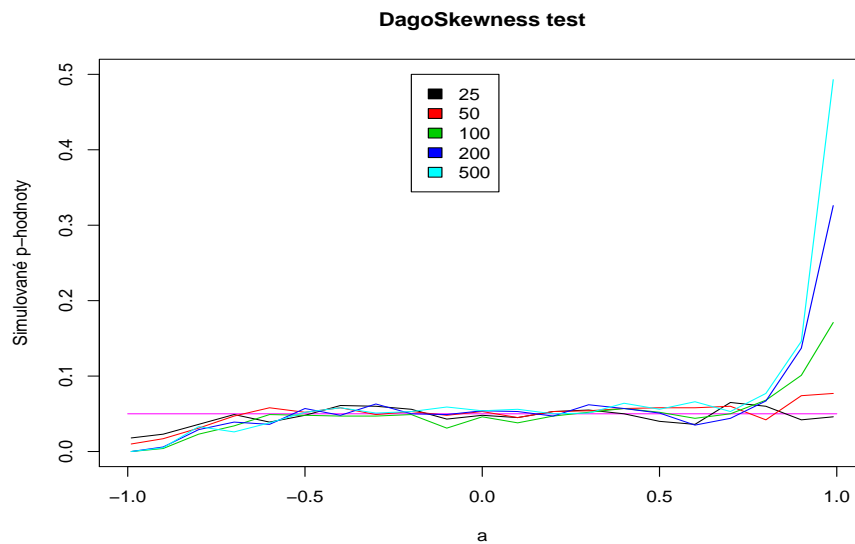




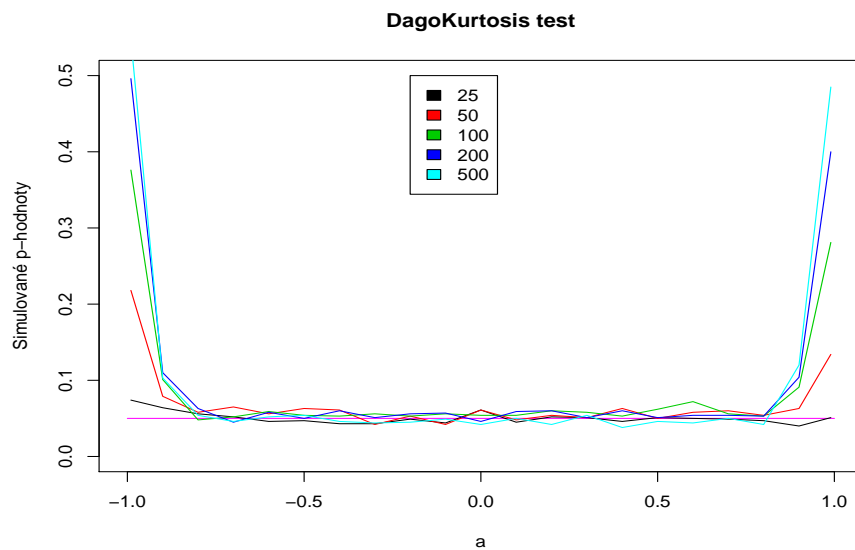
Obrázek 7.70: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



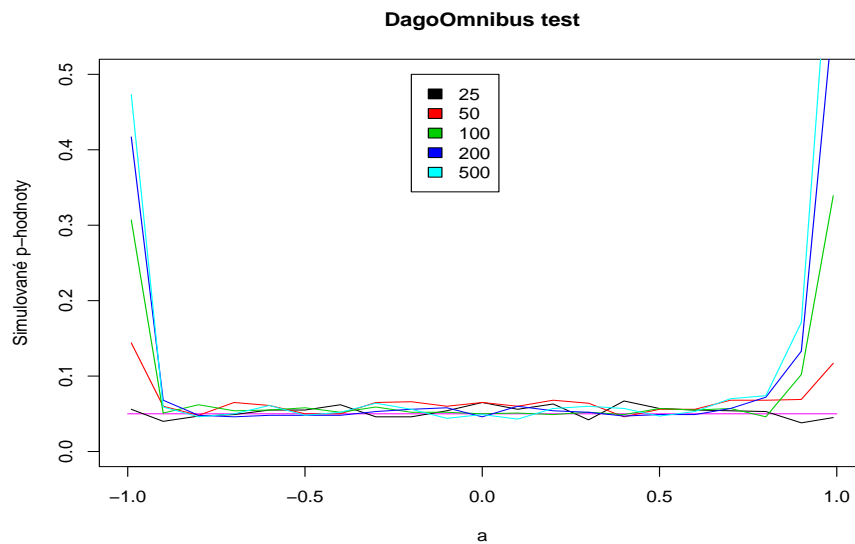
Obrázek 7.71: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



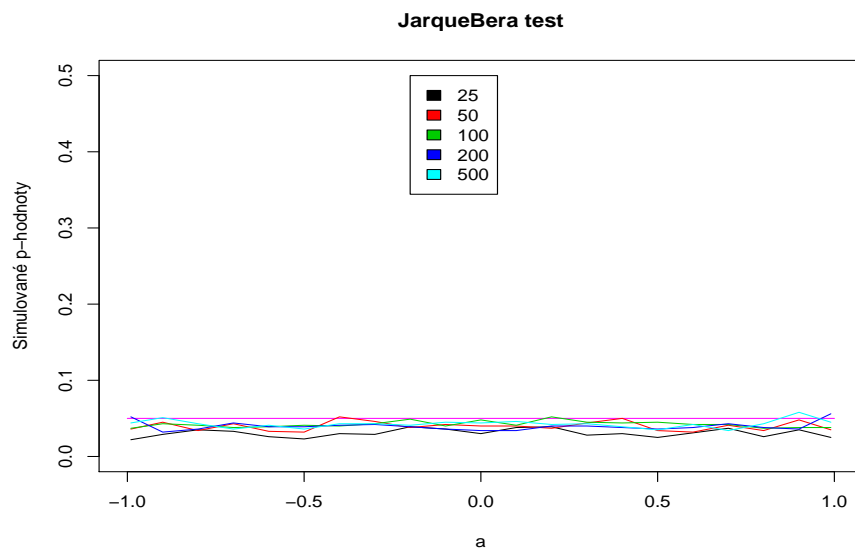
Obrázek 7.72: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



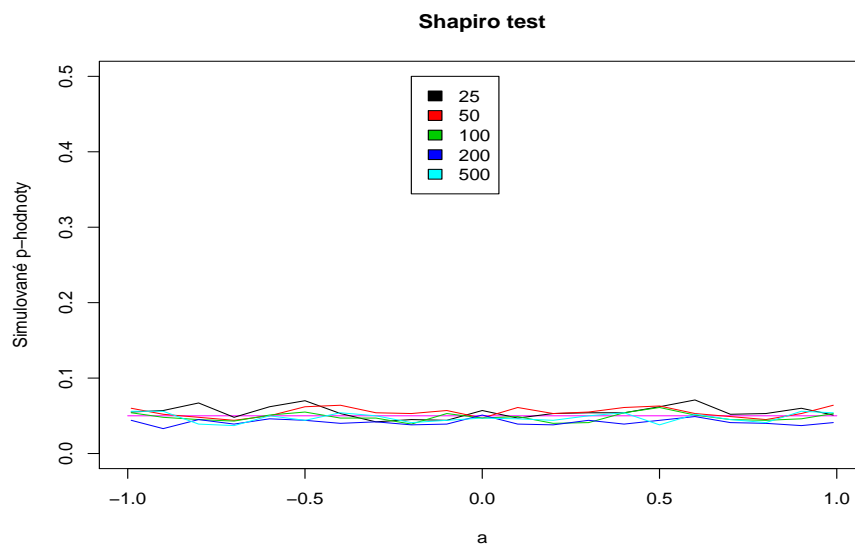
Obrázek 7.73: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



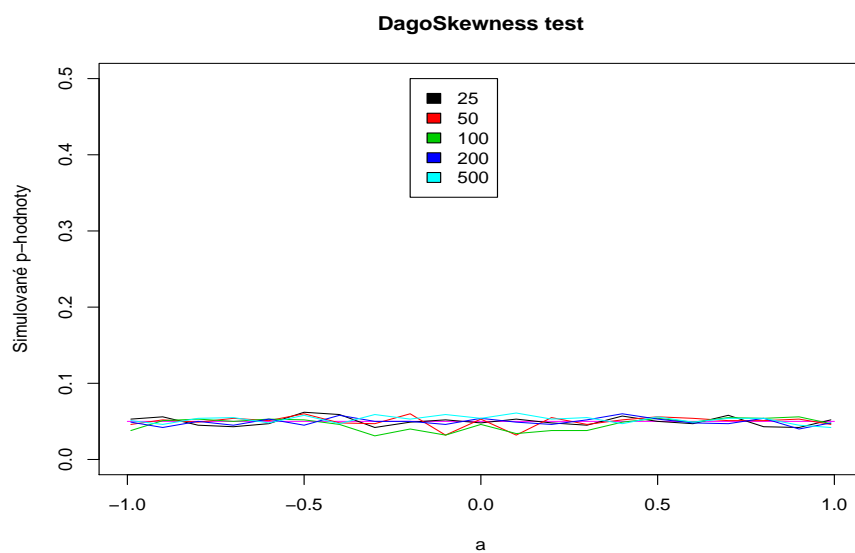
Obrázek 7.74: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



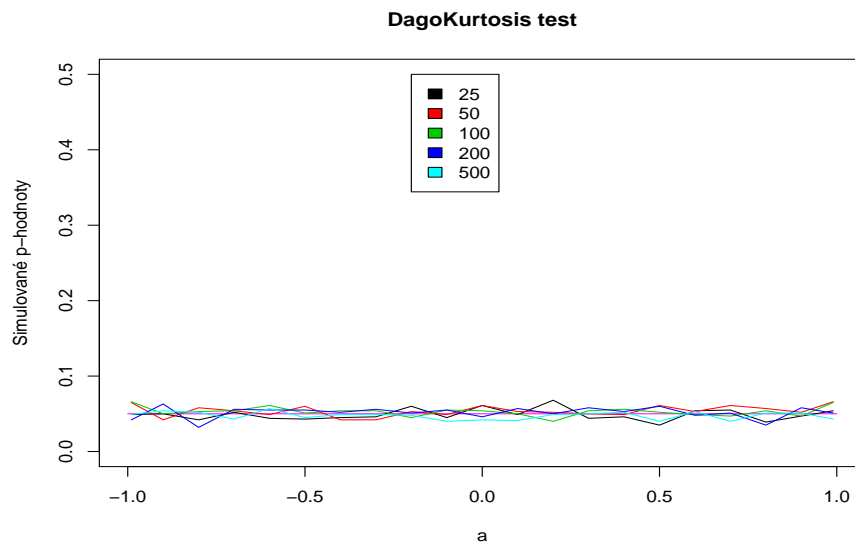
Obrázek 7.75: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



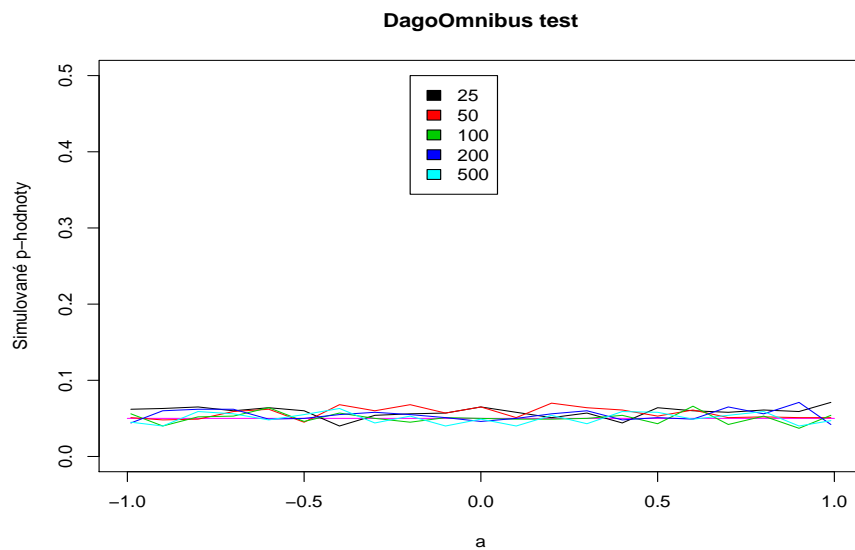
Obrázek 7.76: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



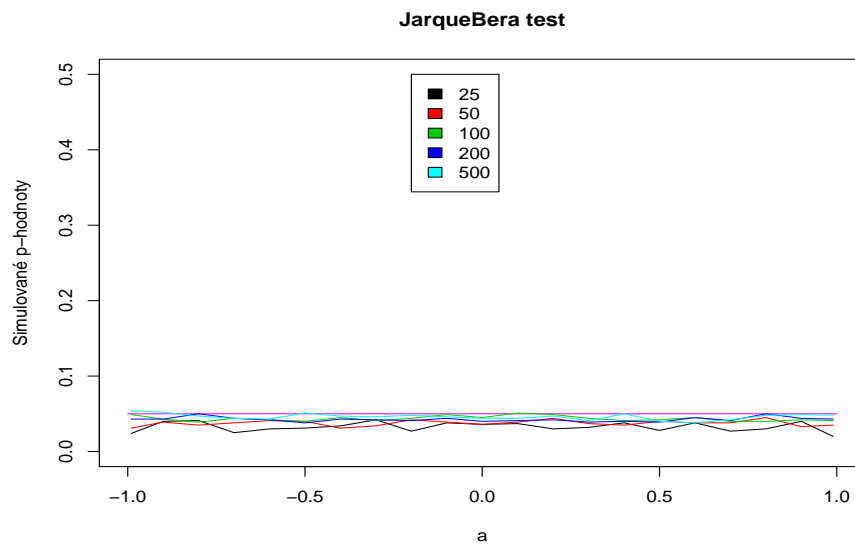
Obrázek 7.77: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



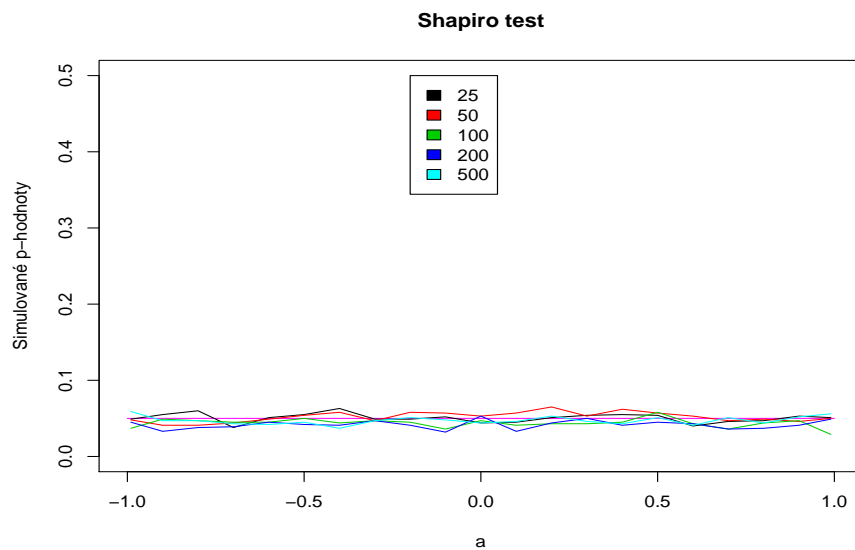
Obrázek 7.78: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



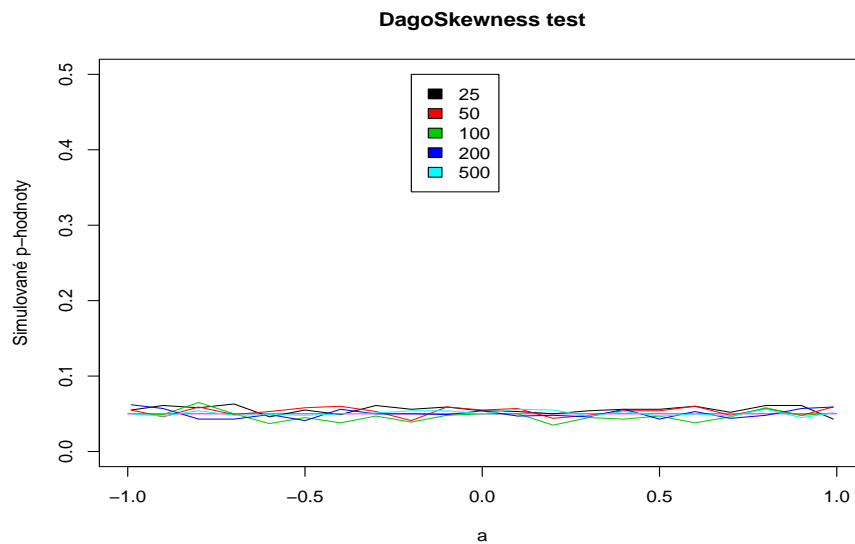
Obrázek 7.79: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



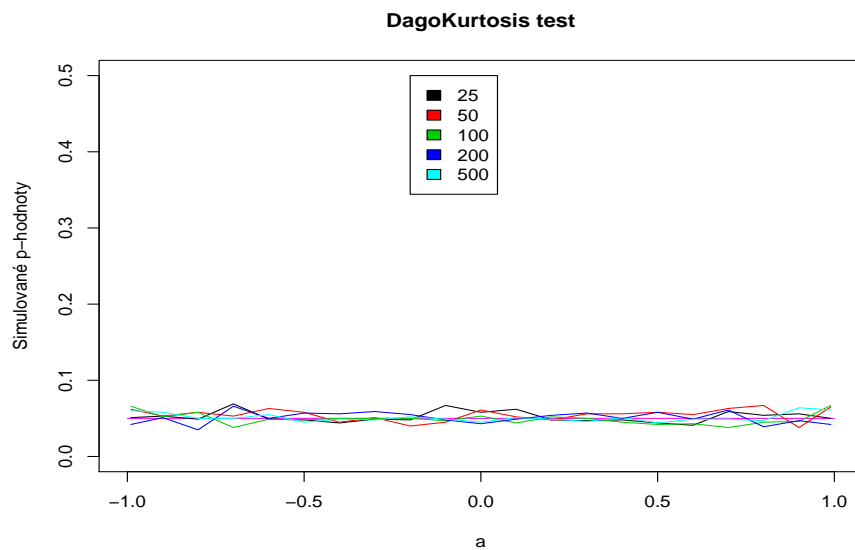
Obrázek 7.80: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



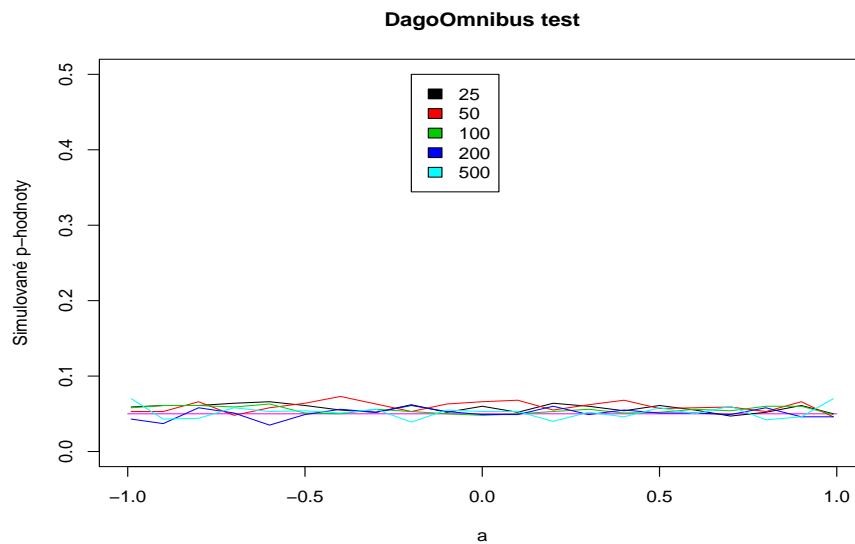
Obrázek 7.81: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



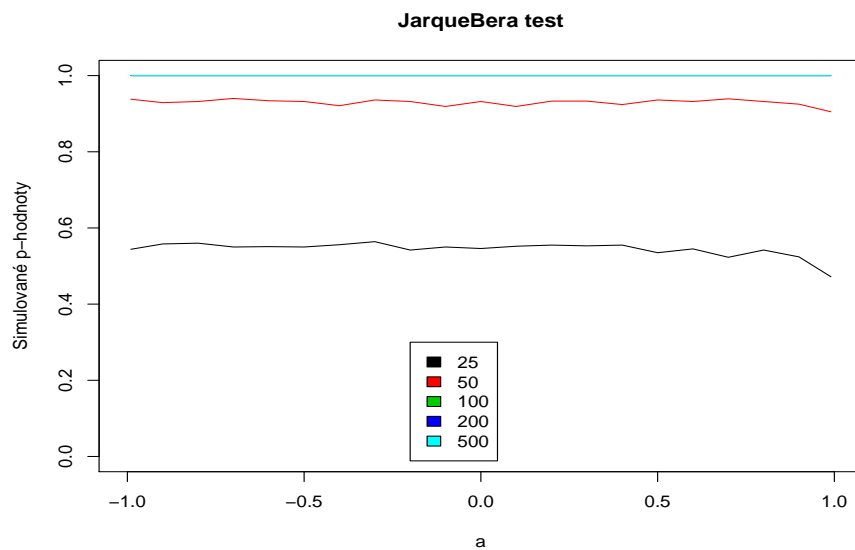
Obrázek 7.82: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.



Obrázek 7.83: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.

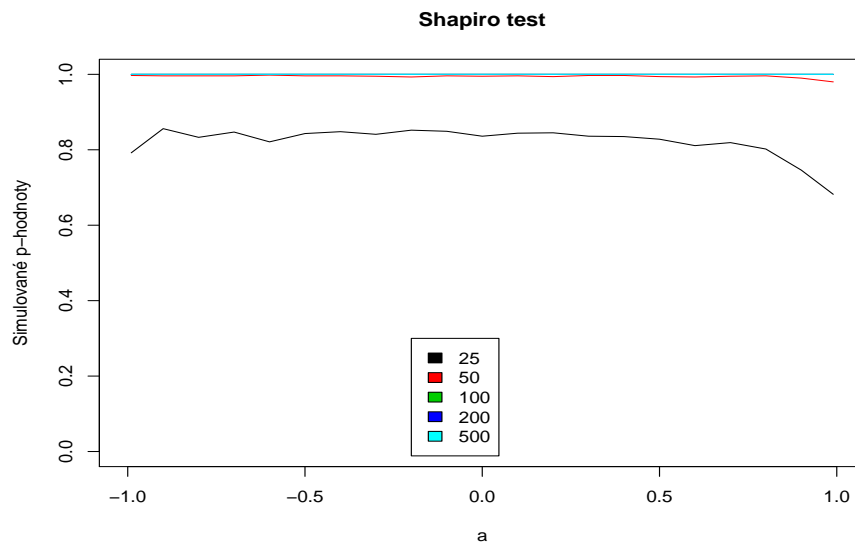


Obrázek 7.84: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3 a na počtu pozorování.

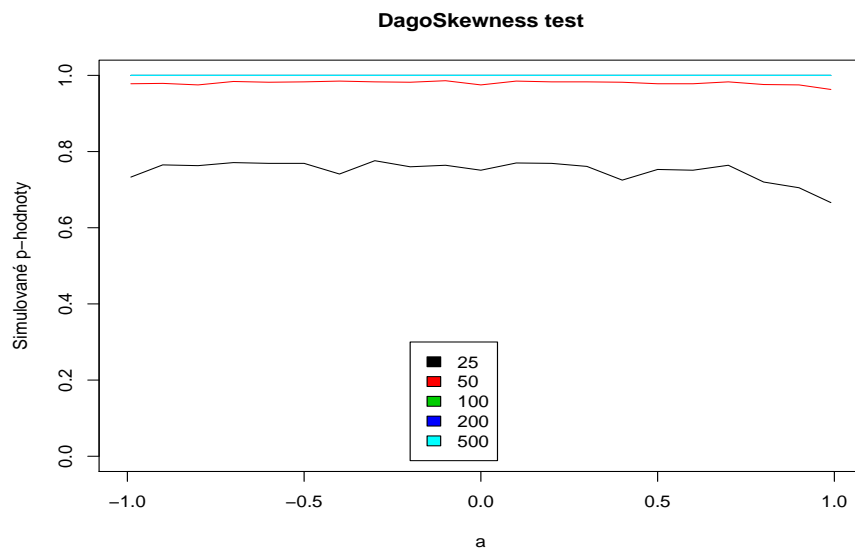


Obrázek 7.85: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.

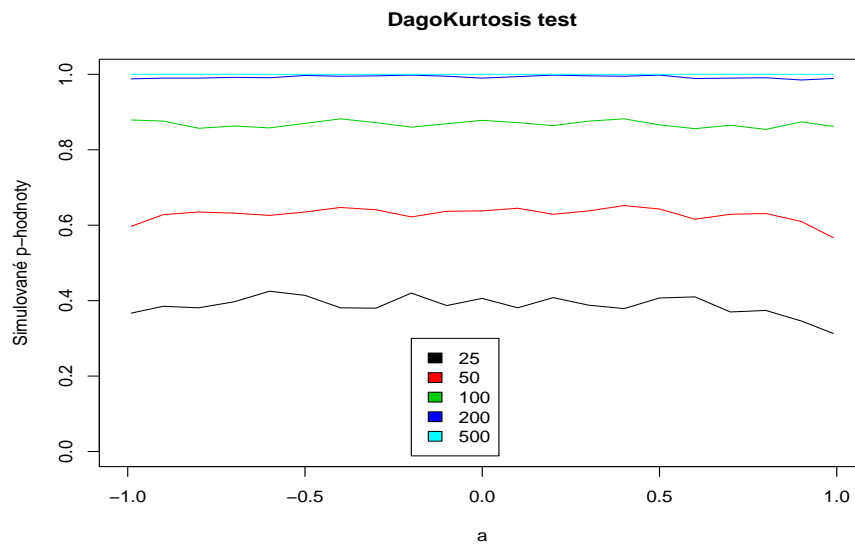




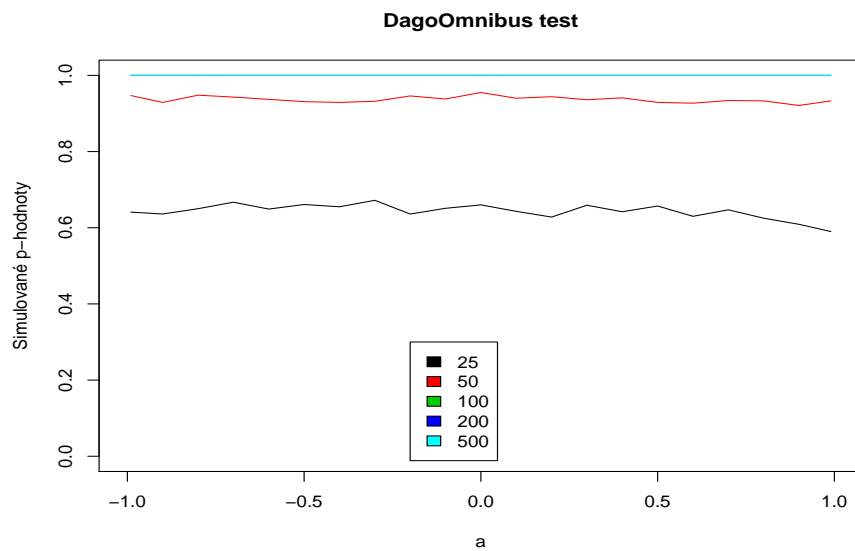
Obrázek 7.86: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



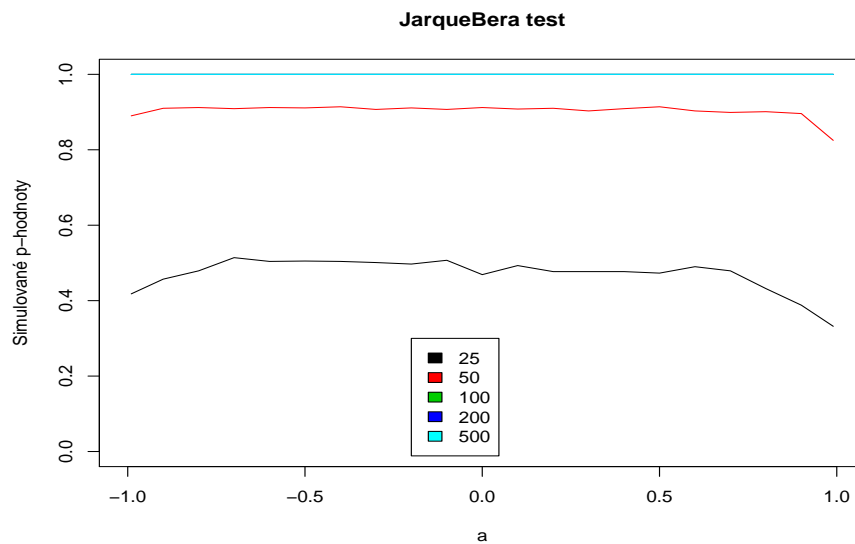
Obrázek 7.87: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



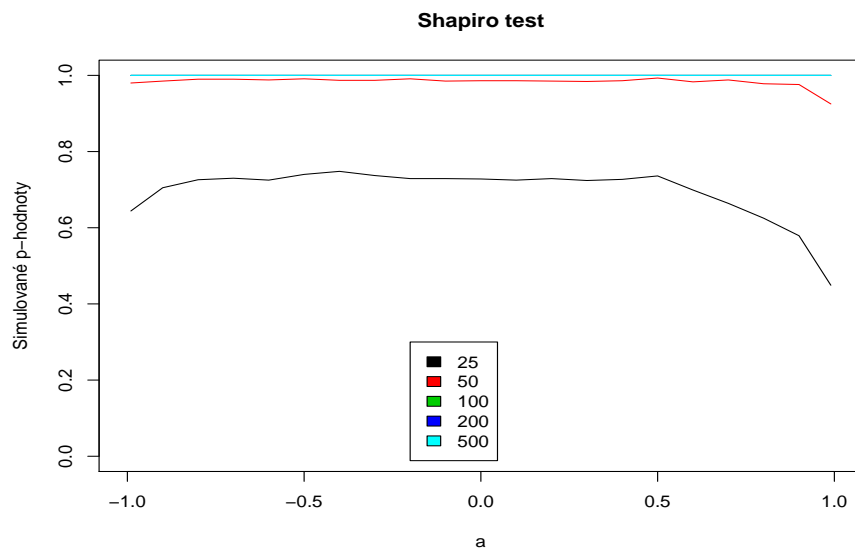
Obrázek 7.88: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



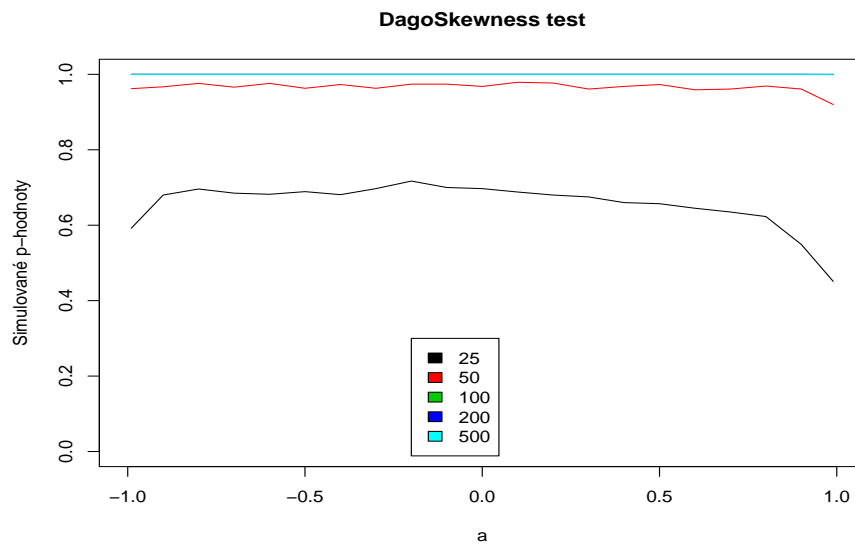
Obrázek 7.89: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 1 a na počtu pozorování.



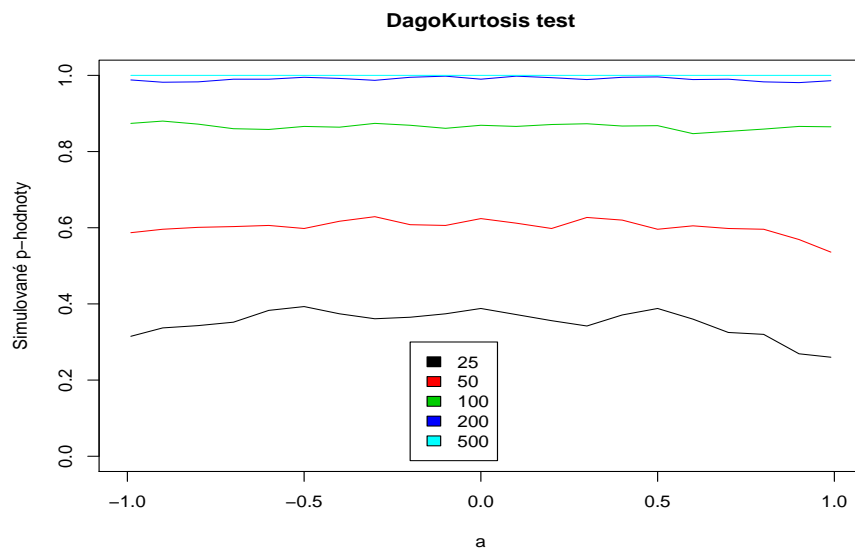
Obrázek 7.90: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.



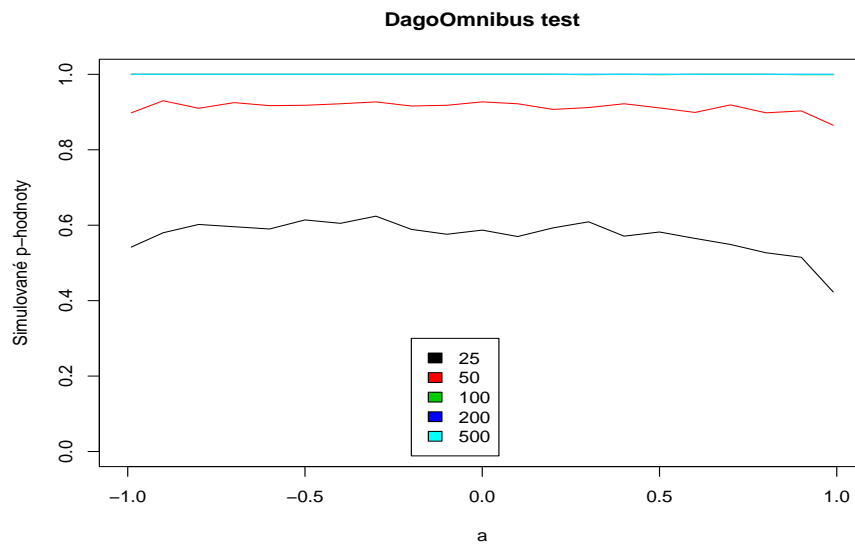
Obrázek 7.91: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.



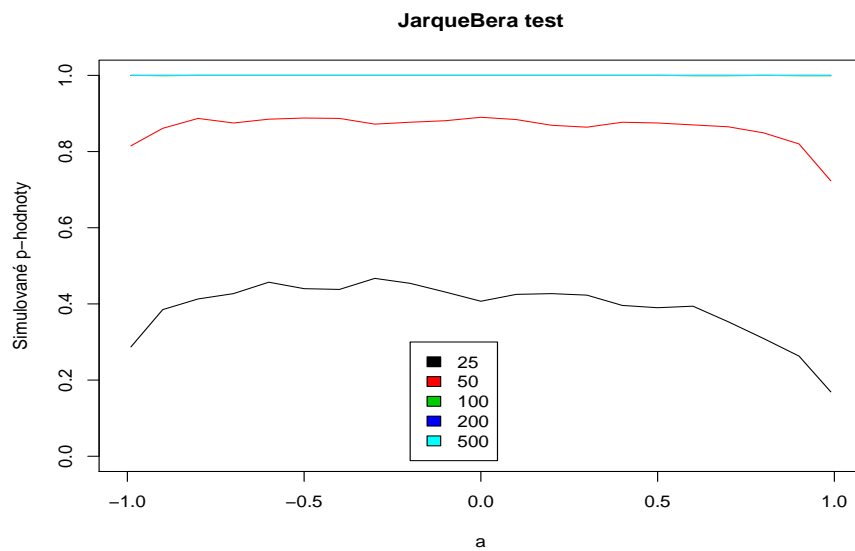
Obrázek 7.92: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.



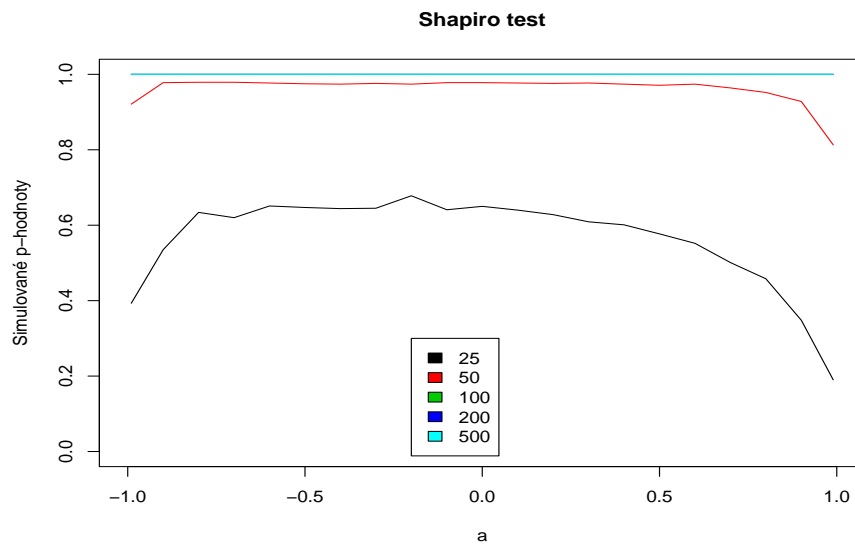
Obrázek 7.93: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.



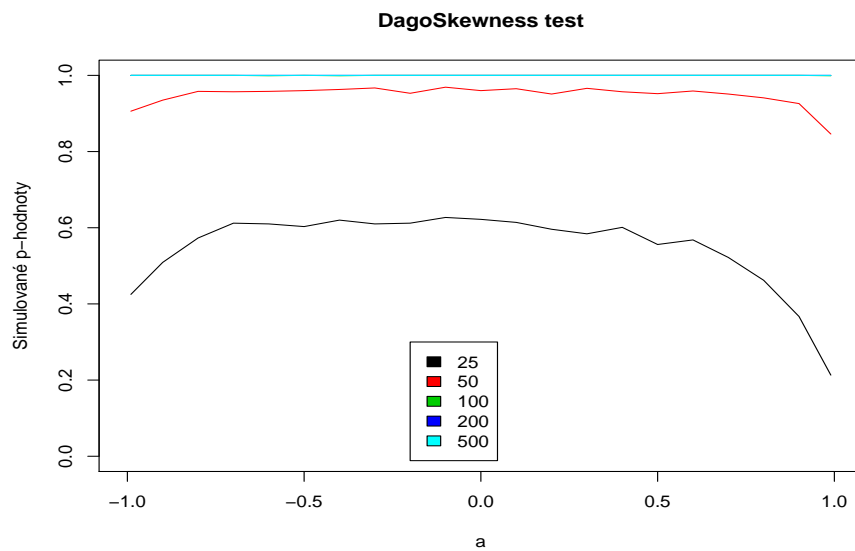
Obrázek 7.94: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.



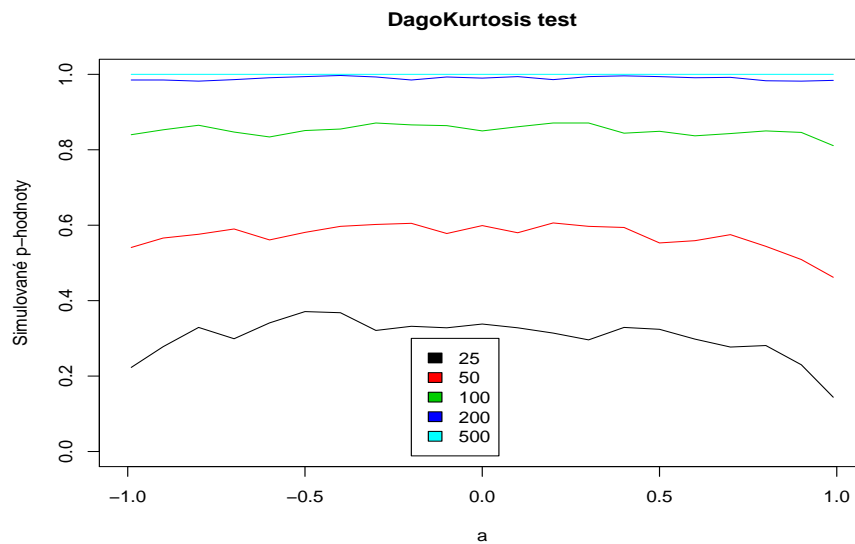
Obrázek 7.95: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^3$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



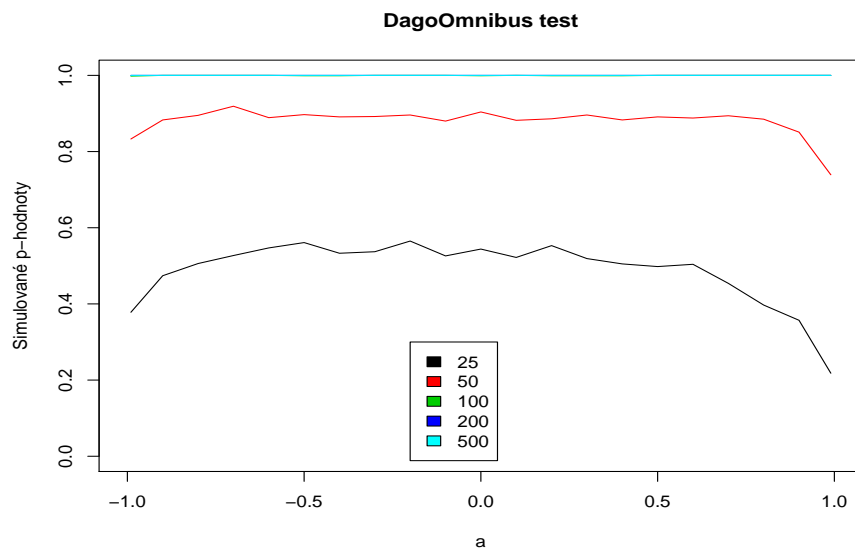
Obrázek 7.96: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



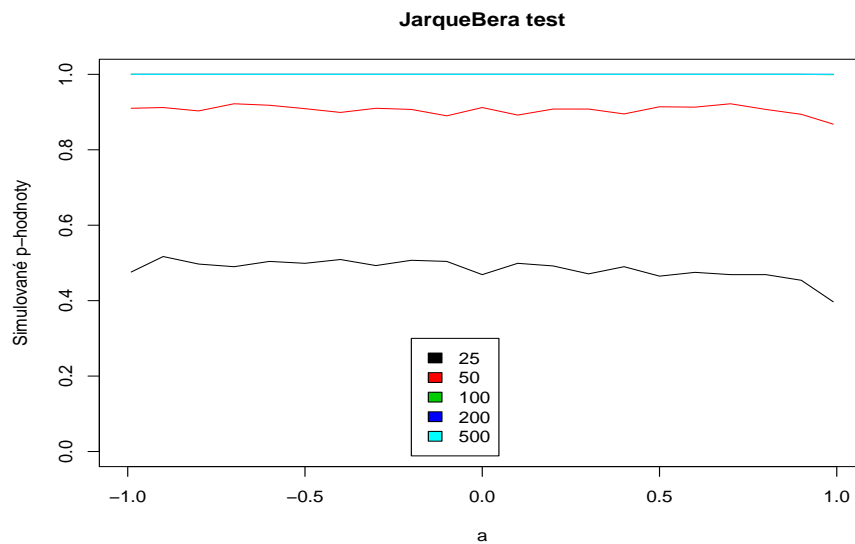
Obrázek 7.97: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



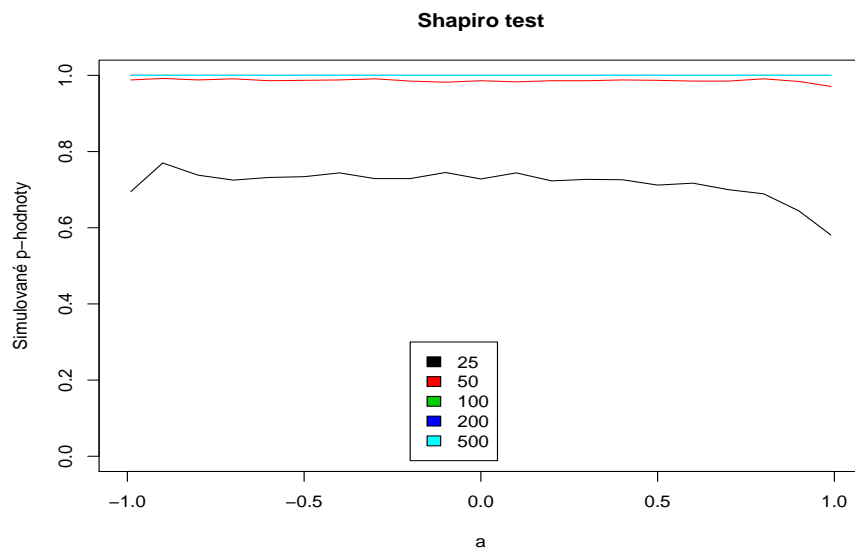
Obrázek 7.98: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



Obrázek 7.99: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.

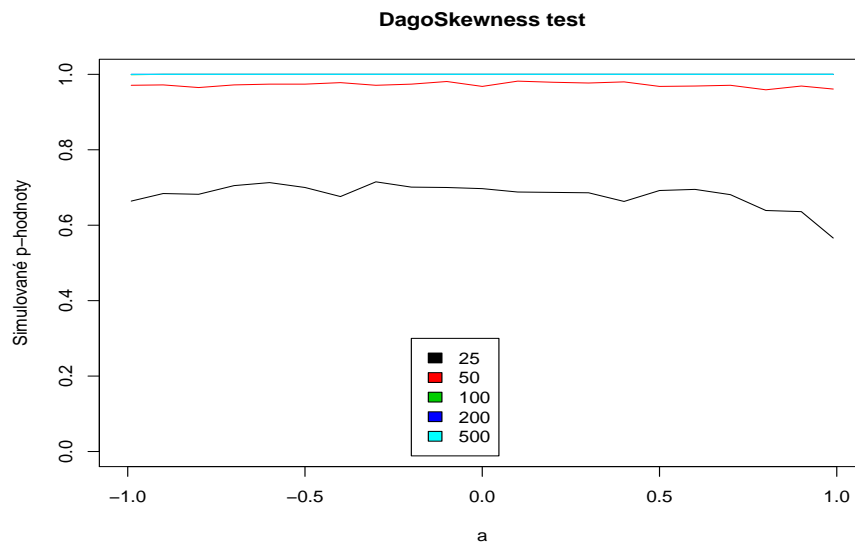


Obrázek 7.100: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.

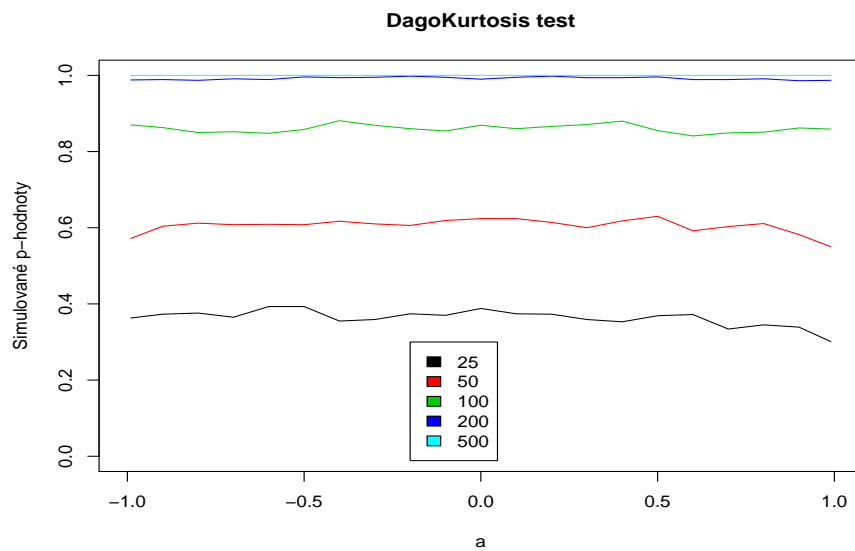


Obrázek 7.101: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.

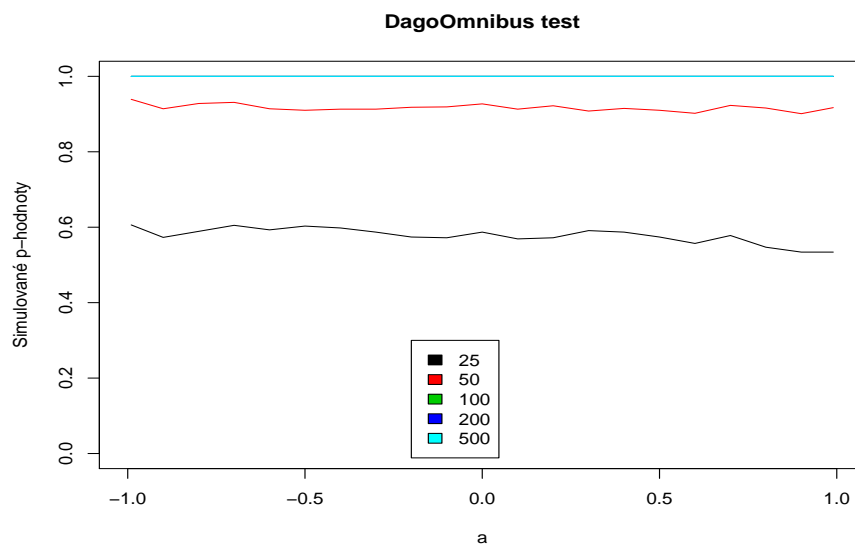




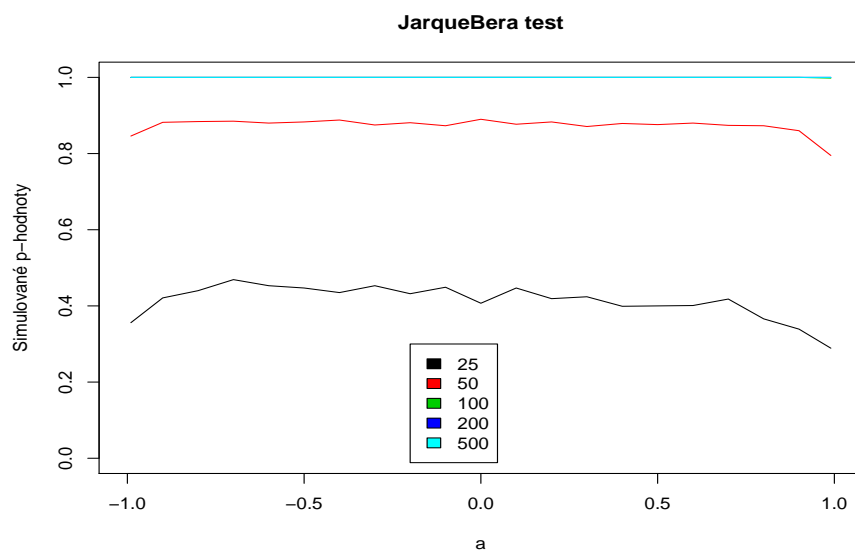
Obrázek 7.102: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



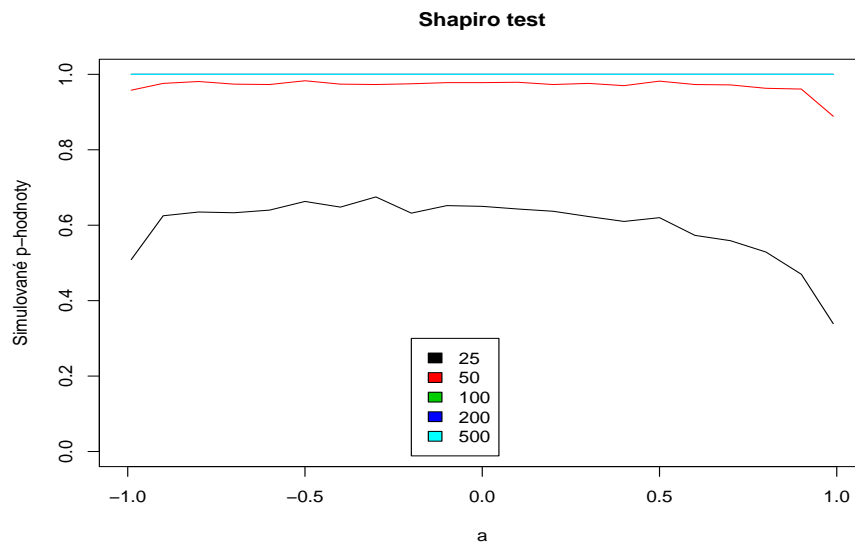
Obrázek 7.103: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



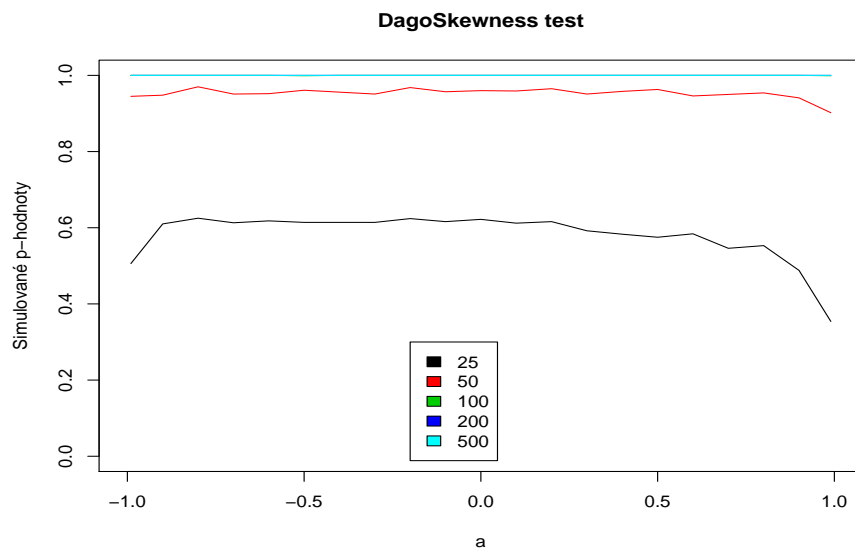
Obrázek 7.104: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$ , s odhadnutým řádem 2 a na počtu pozorování.



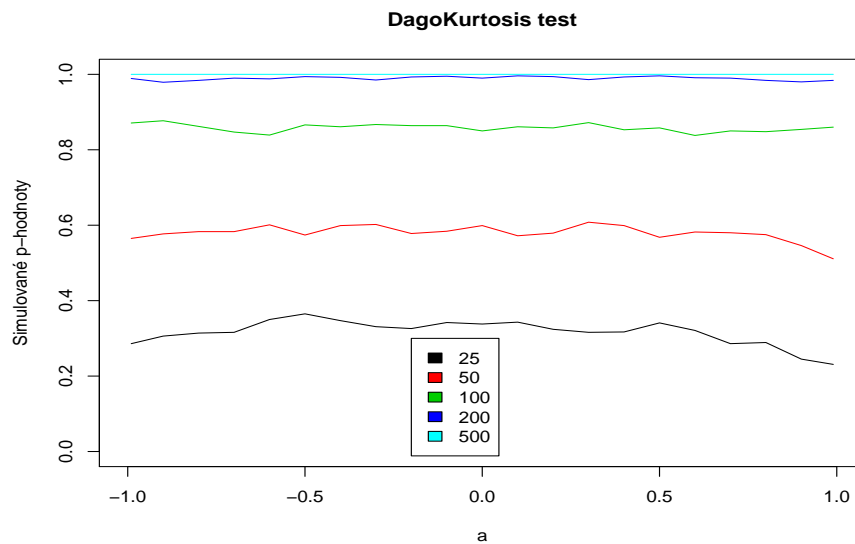
Obrázek 7.105: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



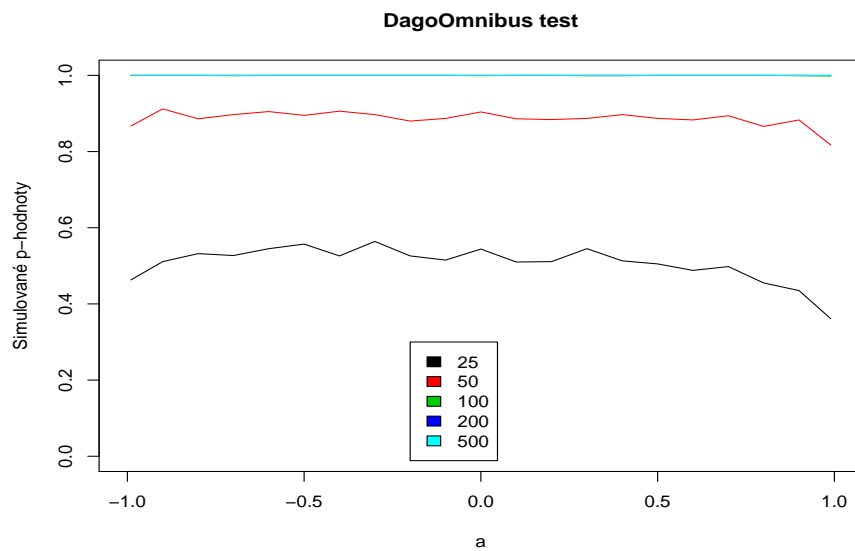
Obrázek 7.106: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



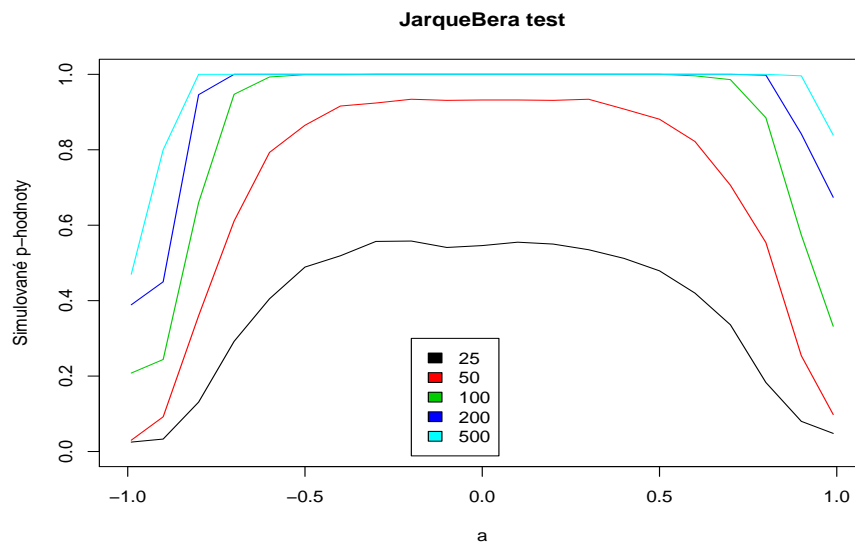
Obrázek 7.107: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



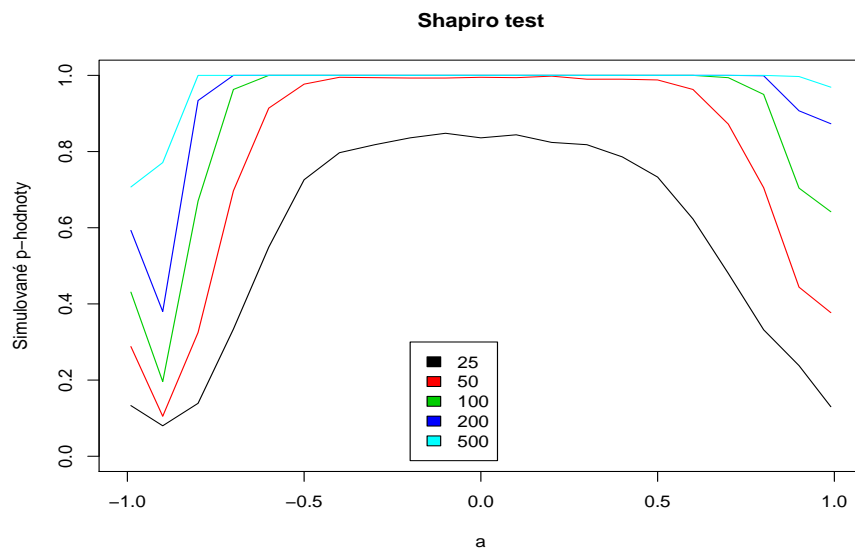
Obrázek 7.108: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



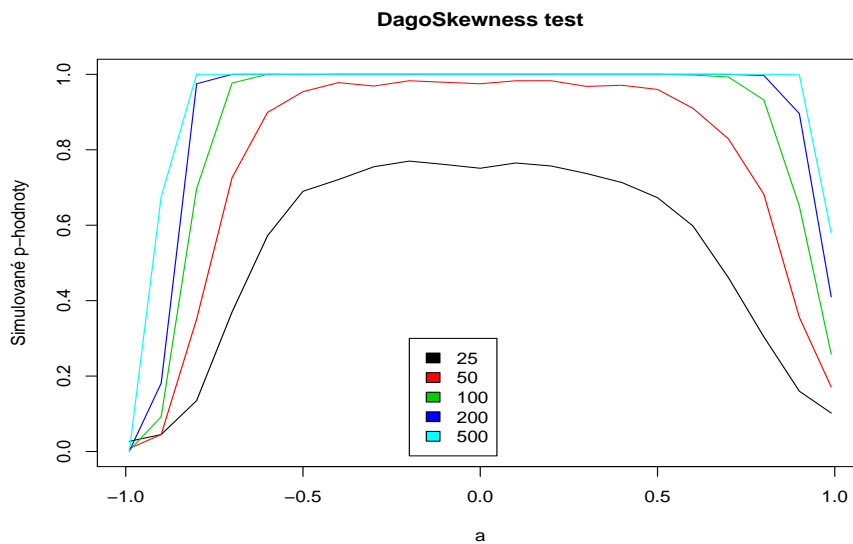
Obrázek 7.109: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 3, na počtu pozorování.



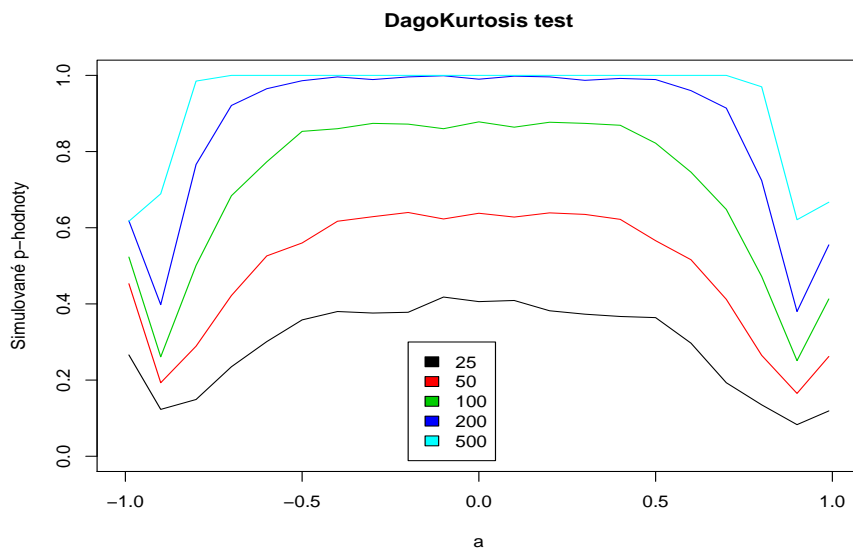
Obrázek 7.110: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 1, na počtu pozorování.



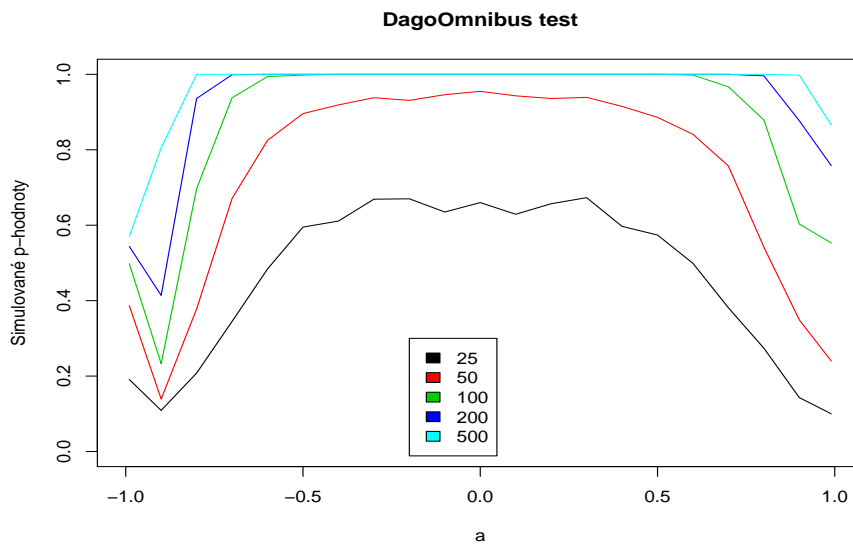
Obrázek 7.111: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$ , s odhadnutým řádem 1, na počtu pozorování.



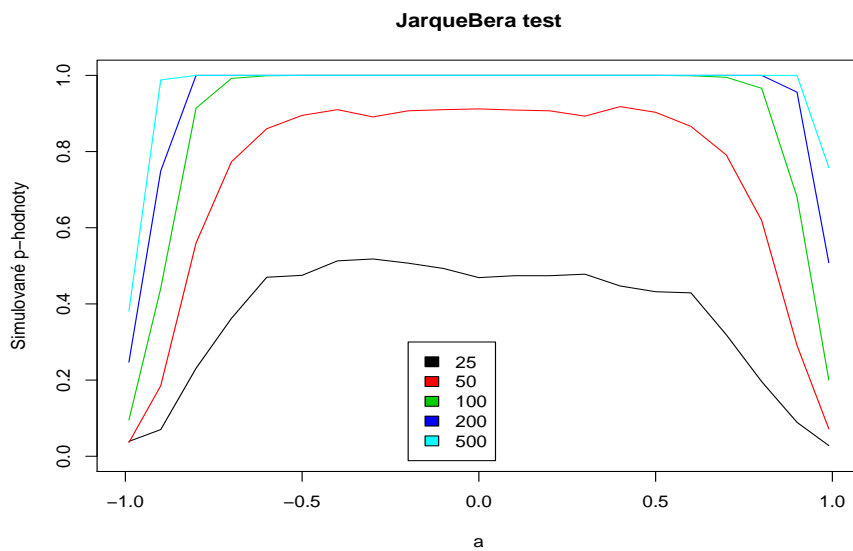
Obrázek 7.112: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 1, na počtu pozorování.



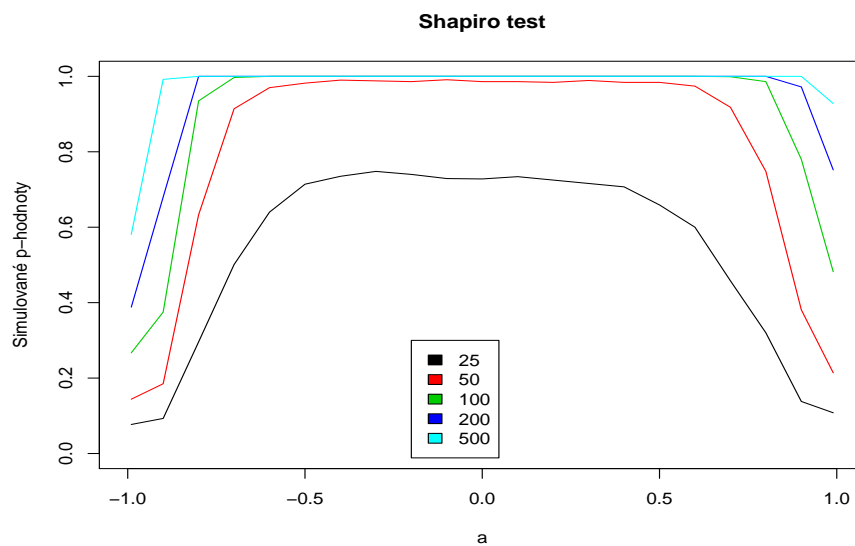
Obrázek 7.113: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 1, na počtu pozorování.



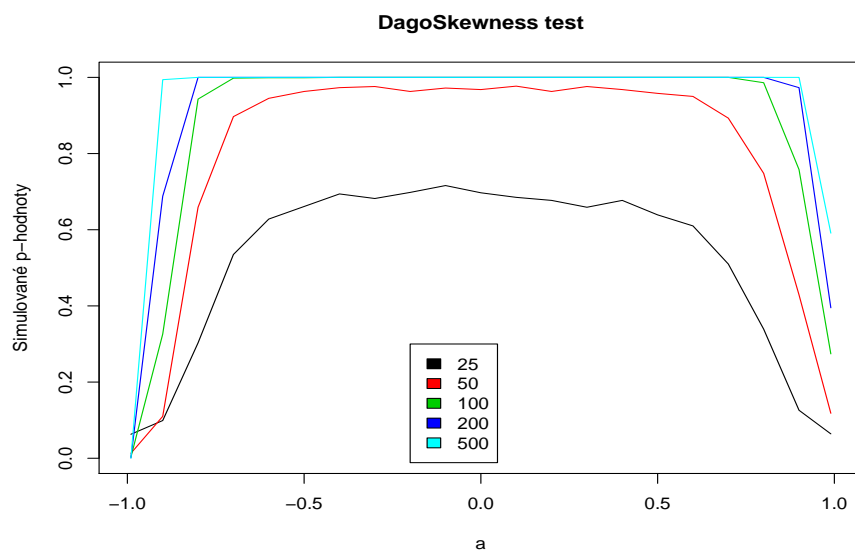
Obrázek 7.114: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^2$ , s odhadnutým řádem 1, na počtu pozorování.



Obrázek 7.115: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^3$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.

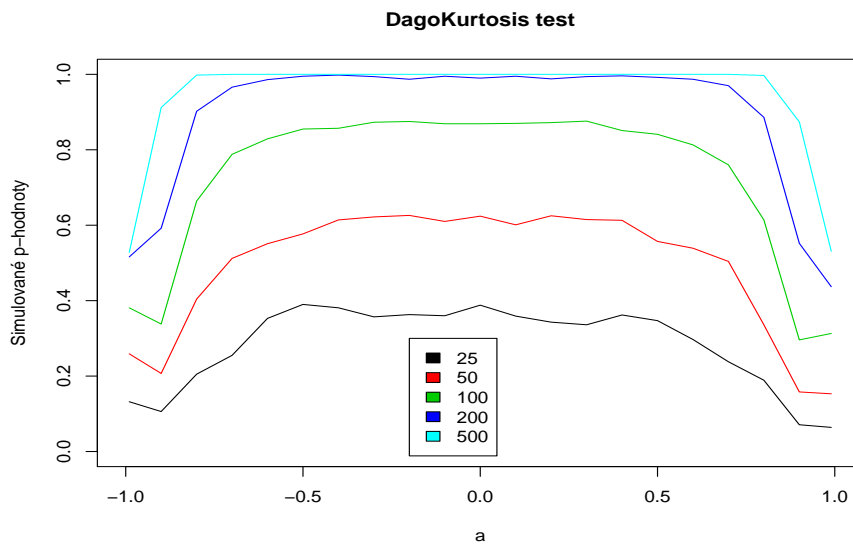


Obrázek 7.116: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^3$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.

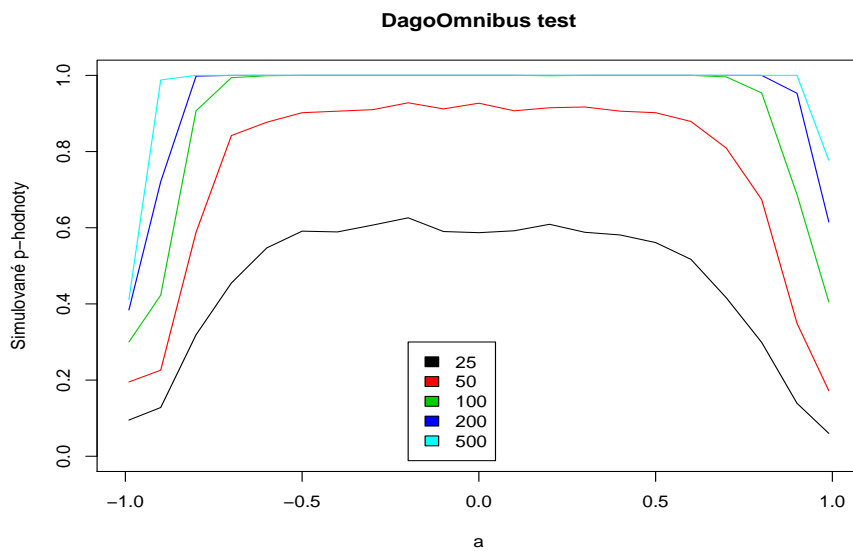


Obrázek 7.117: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^3$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.

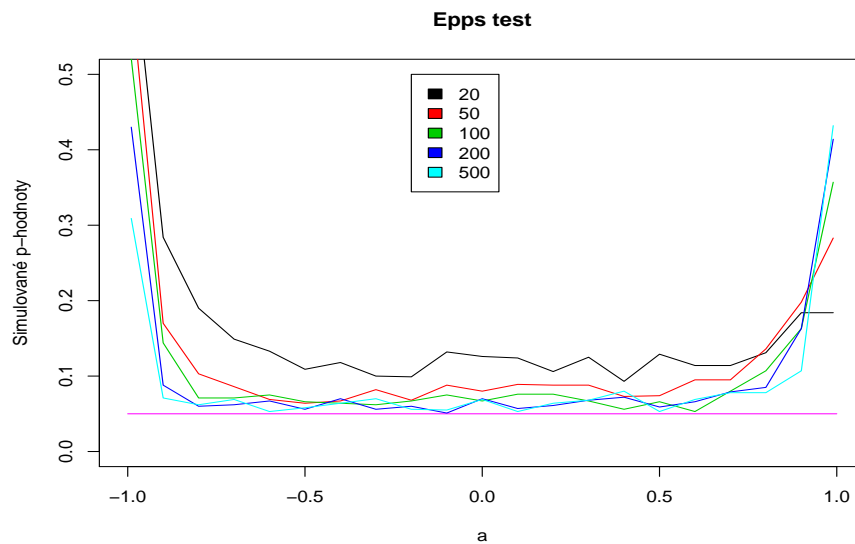




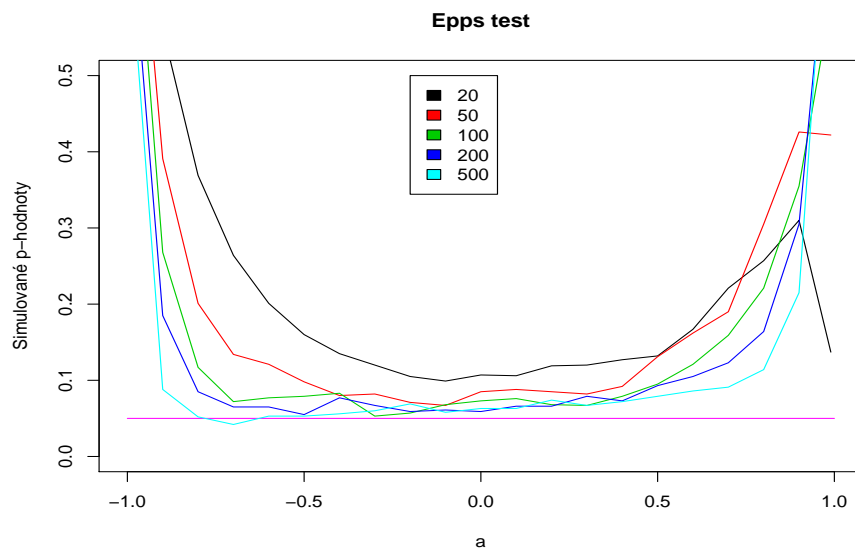
Obrázek 7.118: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^3$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.



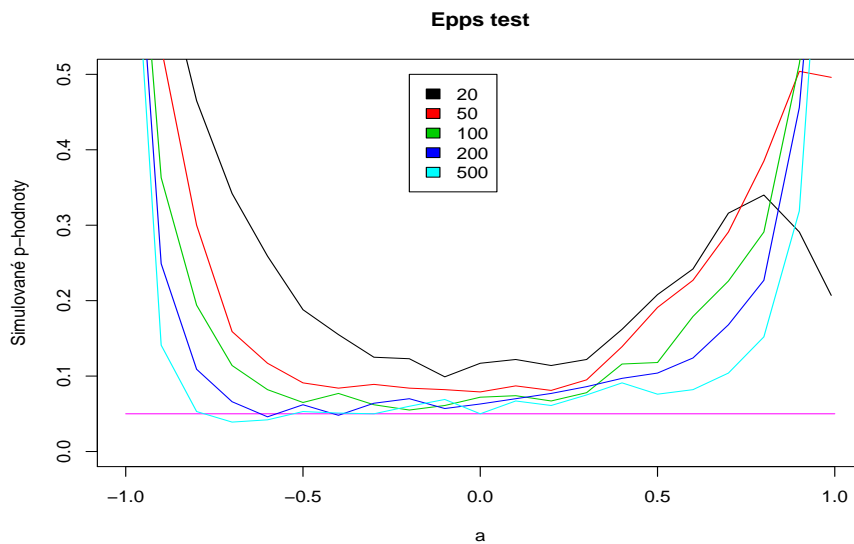
Obrázek 7.119: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z-a)^3$ , s odhadnutým řádem 2, na počtu pozorování.



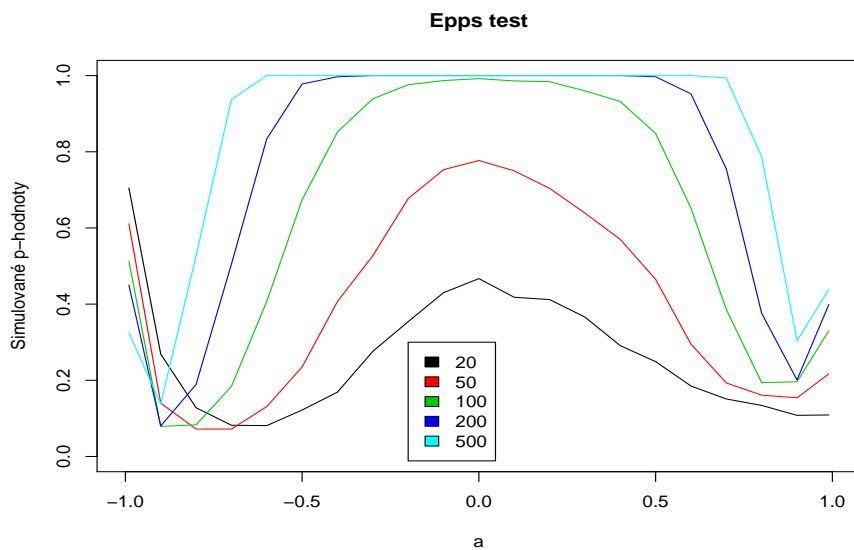
Obrázek 7.120: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



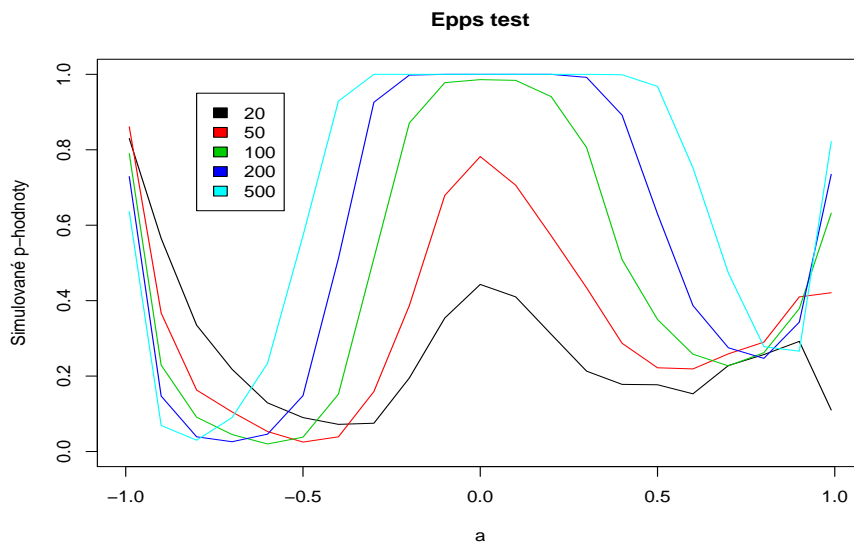
Obrázek 7.121: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



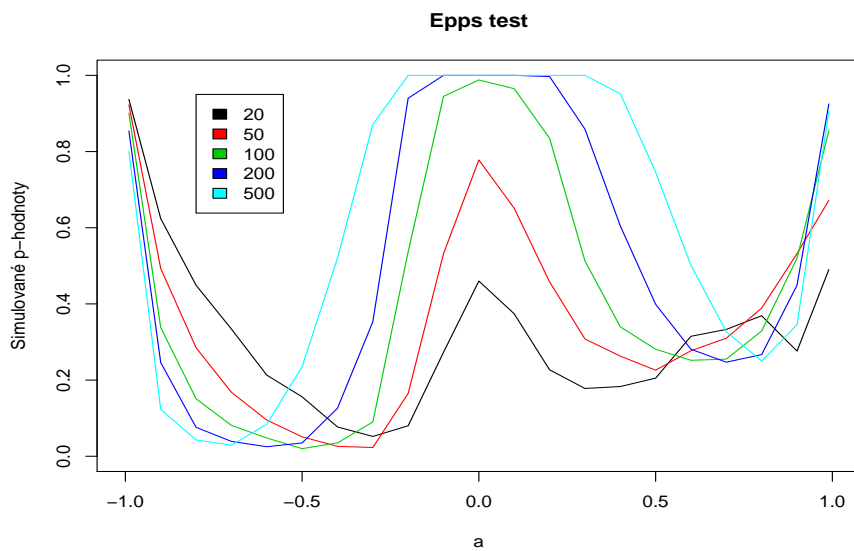
Obrázek 7.122: Hladina testu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$  a na počtu pozorování.



Obrázek 7.123: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)$  a na počtu pozorování.



Obrázek 7.124: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^2$  a na počtu pozorování.



Obrázek 7.125: Síla testu v případě exponenciálního bílého šumu v závislosti na  $a$  polynomu  $\tilde{a}(z) = (z - a)^3$  a na počtu pozorování.

# Literatura

- [1] Anderson T. W. (1971): The Statistical Analysis of Time series. Wiley, New York.
- [2] Billingsley P. (1968): Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.
- [3] Brillinger D. (1965): An Introduction to Polyspectra. *Ann. Math. Statist.* **36**, 1351-1374.
- [4] Brillinger D. and M. Rosenblatt (1967): Asymptotic Theory of k-th Order Spectra. Spectra Analysis of Time Series, edited by B. Harris. Wiley, New York, pp. 153-188.
- [5] Brillinger D. (1975): Time Series, Data Analysis and Theory. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [6] Cambell M. J. and Walker A. M. (1977): A survey of statistical work on the Mackenzie River series of annual Canadian lynx trappings for the years 1821-1934 and a new analysis. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A* **140**, 411-431.
- [7] Cramér H. (1946): Mathematical Methods of Statistics. Princenton University Press, Princeton.
- [8] Cramér H. Leadbetter M. R. (1967): Stationary and Related Stochastic Processes. New York, Wiley.
- [9] Durbin J. (1973): Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated. *Ann. Statist.* **1**, 279-90.
- [10] Epps T. W. (1987): Testing that a stationary time series is Gaussian. *Ann. Statist.* **15**, 1683-1698.

- [11] Fuller W. A. (1976): Introduction to Statistical Time Series. Wiley, New York.
- [12] Gaposhkin V. F. (1980): Almost sure convergence of estimates for the spectral density of a stationary process. *Theory Probab. Appl.* **25**, 169-176.
- [13] Gastwirth J. L. and Rubin H. (1975): The asymptotic distribution theory of the empiric cdf for mixing stochastic processes. *Ann. Statist.* **3**, 809-824.
- [14] Hannan E. J. (1970): Multiple Time Series. Wiley, New York.
- [15] Hinich M. J. (1982): Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series. *J. Time Ser. Anal.* **3**, 169-176.
- [16] Kendall M. G. (1949): Tables of autoregressive series. *Biometrika* **36**, 267-289.
- [17] Laning, J. H. and Battin, R. H. (1956): Random Processes in Automatic Control. Mac Graw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London.
- [18] Lomnicki Z. A. (1961): Tests for departure from normality in the case of linear stochastic processes. *Metrika* **8**, 37-61.
- [19] Lomnicki Z. A. and Zaremba S. K. (1955): Some applications zero-one processes. *J. Roy. Stat. Soc., B* **17**, 243-255.
- [20] Lomnicki Z. A. and Zaremba S. K. (1957): On some moments and distributions occurring in the theory of linear stochastic processes. I. Monats. Math Vol. 61, 318-358.
- [21] Loynes R. M. (1980): The empirical distribution function of residuals from generalised regression. *Ann. Statist.* **8**, 285-98.
- [22] Moran P.A.P. (1949): Some theorems on time series I. *Biometrika* **34**, 281-291.
- [23] Pierce D. A. (1982): The asymptotic effect of substituting estimators for parameters in certain types of statistics. *Ann. Statist.* **10**, 475-8.
- [24] Pierce D. A. (1985): Testing normality in autoregressive models. *Biometrika* **72**, 293-297.

- [25] Pierce D. A. Kopecky, K. J. (1979): Testing goodness of fit for the distribution of errors in regression models. *Biometrika* **66**, 1-5.
- [26] Priestley M. B. (1981): Spectral Analysis and Time Series. Academic, London.
- [27] Rozanov Y. A. (1967): Stationary Random Processes. Holden-Day, San Francisco.
- [28] Van Ness J. W. (1966): Asymptotic Normality of Bispectral Estimates. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1257-1275.
- [29] Waldmeier, W. (1961): The Sunspot Activity in the Years 1610-1960. Schulthess, Zürich.