Univerzita Karlova v Praze

Filozofická fakulta

Katedra logiky

Bakalářská práce

Michal Dančák

Metoda sémantických stromů v neklasických logikách

Tableaux in non-classical logics

V Praze 2009 Mgr. Marta Bílková, PhD.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a použil jsem výhradně citovaných pramenů.

Abstrakt

Dalo by se říct, že jako důkazová metoda jsou sémantické stromy v Česku nepříliš používané, a to i přesto, že ve světě je to nejoblíbenější důkazový systém pro modální logiku [1]. Vedle základního Hilbertova kalkulu se v české literatuře nejčastěji objevují sekventové kalkuly, případně kalkul přirozené dedukce. Přesto má metoda sémantických stromů několik nezanedbatelných předností a zajímavých témat. Jak už název napovídá, tento kalkul vychází ze sémantiky - důkazy mají především sémantický charakter a pro "jednodušší" logiky jsou i velmi intuitivní. Dokazování je zároveň i vyvracení. Při dokazování metodou sémantických stromů vlastně hledáme protipříklad. Jestliže ho nenajdeme, a pokud jsme postupovali správně, tak neexistuje. Na pořadí použití pravidel také nezáleží (až na několik vyjímek v některých logikách, které si později ukážeme). I díky těmto výhodám je tato metoda také velmi vhodná pro strojové zpracování.

V této práci jsem se rozhodl zaměřit na to, jak se metoda sémantických stromů chová v substrukturální logice BCK (někdy též FLew). Začneme základními definicemi a tím, co to vlastně sémantické stromy jsou, dále bude následovat několik příkladů, definice logiky BCK a příslušných odvozovacích pravidel. Celá práce bude završena důkazem úplnosti a korektnosti tohoto kalkulu vůči kripkovské sémantice logiky BCK.

Obsah

1 Úvod

1.1 Základní definice

Na začátek budeme potřebovat některé základní pojmy z teorie grafů. Je to především proto, že svou strukturou jsou sémantické stromy právě stromy tak, jak se definují v teorii grafů [2].

Definice 1 ***Graf*** *G je uspořádaná dvojice* (V, E)*, kde V je konečná neprázdná množina vrcholů a E je množina dvoubodových podmnožin množiny V, nazývaných hrany.* ***Cesta*** *je posloupnost alespoň dvou vrcholů, kde každý člen této posloupnosti tvoří spolu s následujícím členem hranu.* ***Souvislý graf*** *je graf, mezi jehož každými dvěma body existuje cesta. Cesta o třech a více vrcholech se nazve* ***kružnice****, jestliže jeho první a poslední vrchol také tvoří hranu.* ***Stupeň vrcholu*** *je počet hran obsahujících daný vrchol.*

Definice 2 ***Strom*** *je souvislý graf*[1] *neobsahující kružnici. Vrcholy stupně 1 se nazývají* ***listy****.*

Větev stromu se většinou definuje jako cesta mezi dvěma vrcholy, respektive cesta mezi kořenem a listem, pro nás bude ale vhodnější zadefinovat větev nikoliv jako posloupnost, ale jako množinu.

Definice 3 ***Větev*** *stromu je množina všech vrcholů, vyskytujících se na cestě mezi kořenem a listem.*

Z této definice také jasně plyne, že kořen je obsažen v každé větvi, a že každý list je obsažen v právě jedné větvi.

Toto nám bude stačit pro to, abychom mohli zadefinovat pojem sémantického stromu, pro začátek v klasické logice.

Definice 4 ***Sémantický strom klasické výrovové logiky*** *je takový strom s kořenem, jehož každý vrchol je ohodnocen formulí klasické výrokové logiky. Větev b takového stromu se nazve* ***uzavřená***[2]*, jestliže existuje taková formule* φ*, že větev b obsahuje vrcholy ohodnocené* φ *a* $\neg\varphi$*, jinak je* ***otevřená****. Strom se nazve* ***uzavřený****, jestliže každá jeho větev je uzavřená, jinak se nazve* ***otevřený****.*

Definice 5 *Větev b sémantického stromu se nazve* ***plně rozvinutá****, jestliže jsou na ni aplikována všechna možná pravidla předem daného kalkulu, nebo jestliže je uzavřená. Strom je plně rozvinutý, jestliže každá jeho větev je plně rozvinutá.*

Z otevřeného stromu, který není plně rozvinutý, nelze vyčíst protipříklad (viz definice 7), protože je možné ho použitím některých dalších pravidel v budoucnu uzavřít.

[1] Pro naše potřeby budeme používat pouze stromy s kořenem, pevně zvoleným vyznačeným vrcholem, ve kterém ale povolíme libovolný konečný počet vrcholů, viz dále.

[2] Takovou větev budeme značit křížkem.

Definice 6 ***Důkaz*** *φ z množiny předpokladů Γ je takový uzavřený[3] sémantický strom, který v kořeni obsahuje všechny formule $\gamma \in \Gamma$ a $\neg\varphi$.*

Jak tedy bude vypadat dokazování je vcelku zřejmé. Při důkazu $\Gamma \vdash \varphi$ se do kořene se umístí příslušné formule $\gamma \in \Gamma$ a $\neg\varphi$ a postupně se aplikují všechna možná pravidla (většinou se postupuje odshora dolů, nahoře je tedy kořen a dole listy). Pokud se nám podaří nějakou větev uzavřít, můžeme ji již ignorovat - aplikace dalších pravidel na tuto větev je zcela zbytečná. Pokud se nám podaří uzavřít všechny větve, je tento strom důkazem dané formule z daných předpokladů. Pokud ovšem i po aplikaci všech pravidel zbyde nějaká otevřená větev, získáme protipříklad.

Definice 7 *Nechť existuje takový plně rozvinutý sémantický strom, který má v kořeni γ pro všechny formule $\gamma \in \Gamma$ a $\neg\varphi$. Nechť existuje alespoň jedna otevřená větev b v tomto stromu. Pak* ***protipříklad*** *na $\Gamma \vdash \varphi$ je takové ohodnocení, které všechny formule ψ, obsažené v b ohodnotí $|\psi| = 1$ a všechny formule $\neg\chi$, obsažené v b ohodnotí $|\chi| = 0$[4].*

Toto ohodnocení je korektní, protože je definováno pouze na otevřené větve. Formální důkaz lze najít v [3].

Metoda sémantických stromů pro klasickou výrokovou logiku většinou obsahuje pět až deset odvozovacích pravidel, záleží na autorovi. Pravidla pro binární logické spojky se vyskytují ve dvojicích, jedno z nich je pozitivní, druhé negativní. Metoda neobsahuje žádné axiomy a veškeré usuzování probíhá odvozovacími pravidly. Následující pravidla jsou převzatá z [3], kde je také důkaz úplnosti a korektnosti těchto pravidel vůči klasické výrokové logice.

Dvě pravidla konjunkce

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ \downarrow \\ \varphi \\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \wedge \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\varphi & & \neg\psi \end{array}$$

[3]Vzhledem k tomu, že nekonečně se rozvíjející se strom nelze uzavřít, plyne z toho i to, že důkaz je konečný strom. V klasické výrokové logice se sice nekonečné stromy nevyskytují, v logice BCK se už ale vyskytnout mohou.

[4]Na ohodnocení formulí, které se na větvi b nevyskytují tedy nezáleží.

Dvě pravidla disjunkce

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \varphi \lor \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \neg(\varphi \lor \psi) \arrow[d] \\ \begin{array}{c} \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array} \end{tikzcd}$$

Dvě pravidla implikace

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \varphi \to \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \neg\varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \neg(\varphi \to \psi) \arrow[d] \\ \begin{array}{c} \varphi \\ \neg\psi \end{array} \end{tikzcd}$$

Dvě pravidla ekvivalence

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \varphi \leftrightarrow \psi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array} & & \begin{array}{c} \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \begin{array}{c} \varphi \\ \neg\psi \end{array} & & \begin{array}{c} \neg\varphi \\ \psi \end{array} \end{tikzcd}$$

Eliminace dvojí negace

$$\begin{tikzcd} \neg\neg\varphi \arrow[d] \\ \varphi \end{tikzcd}$$

Alternativní cesta je použít co nejmenší počet odvozovacích pravidel, ale využívat sémantické znalosti dané logiky. Negace konjunkce tak lze například převést na disjunkce negací pomocí De Morganova zákona, čímž se ušetří jedno odvozovací pravidlo[5].

1.2 Dokazování

O tom, jak vypadá dokazování metodou sémantických stromů, jsme se již zmínili výše. Chceme-li tedy například dokázat, že $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \vee \psi$, umístíme do kořene stromu veškeré předpoklady a negaci závěru, a postupně aplikujeme pravidla kalkulu. Tím hledáme protipříklad, který poté vyčteme z libovolné otevřené větve, jestliže taková větev existuje. Jestli neexistuje, můžeme si být jisti, že $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Příklad 1

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ \neg(\varphi \vee \psi) \\ \downarrow \\ \varphi \\ \psi \\ \downarrow \\ \neg\varphi \\ \neg\psi \\ \times \end{array}$$

Nejprve jsme aplikovali pravidlo konjunkce, poté pravidlo negace disjunkce, čímž se uzavřela každá (jediná) větev tohoto stromu. Není tedy možné najít protipříklad, a tedy $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \vee \psi$ je tautologie. Naopak kdybychom se pokusili dokázat $\neg(\varphi \to \psi), \varphi \vee \psi \vdash \varphi \wedge \psi$, zůstane alespoň jedna větev otevřená.

Příklad 2

$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \to \psi) \\ \varphi \vee \psi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) \\ \downarrow \\ \varphi \\ \neg\psi \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \varphi \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} \neg\varphi & \neg\psi \\ \times & \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \psi \\ \times \\ \\ \end{array} \end{array} \end{array}$$

V tomto případě se neuzavřela větev obsahující φ a $\neg\psi$, protipříklad tedy bude ohodnocení $|\varphi| = 1, |\psi| = 0$.

[5]Tento postup používat nebudeme. Naopak, abychom se nemuseli vůbec uchylovat k sémantickým znalostem, bude kalkul logiky BCK navržen tak, aby obsahoval co nejvíce smysluplných pravidel, i za cenu možné předimenzovanosti.

2 Logika BCK

2.1 Sémantika

Logika BCK je substrukturální logika s mnoha zajímavými vlastnostmi [4]. Její název pochází z kombinatorické logiky [5] a značí použití tří strukturálních pravidel - asociativity B, silné komutativity C a oslabení K. Tato, a mnoho dalších strukturálních pravidel, jsou podrobněji popsána v [6]. Ze sémantického hlediska se logika BCK chová podobně jako intuicionistická logika, je ale o něco slabší co do množiny tautologií. Je to způsobeno tím, že neobsahuje strukturální pravidlo kontrakce[6], není v ní možné odvodit $\vdash \varphi \to \varphi \& \varphi$. Jeden z vedlejších efektů tohoto je, že logika BCK obsahuje dvě různé konjunkce - slabou $\wedge$, která se chová "klasicky", a silnou &. Rozdíl mezi těmito dvěma spojkami se vyjasní, jakmile zadefinujeme kripkovský model této logiky. Druhý velký rozdíl oproti intuicionistické logice se ukáže ve stejném okamžiku. V kripkovské sémantice totiž BCK používá dvě různé relace. Binární relaci $\leq$ a ternární relaci dosažitelnosti R.

Pro definici kripkovského rámce logiky BCK si vypůjčíme značení z [6].

Definice 8 *Nechť R je ternární relace, pak*

- $R(ij)kl \Leftrightarrow \exists w(Rijw \wedge Rwkl)$
- $Ri(jk)l \Leftrightarrow \exists w(Rjkw \wedge Riwl)$

Definice 9 ***Rámec*** *$\mathcal{F}$ logiky BCK je čtveřice $\langle W, \leq, R, g\rangle$, kde*

- $g \in W$
- *$\leq$ je částečné uspořádání na W*
- *R je ternární relace na W*
- *R splňuje tzv. plump podmínku, tedy*
  - $\forall i, j, k, i', j', k' \in W(Rijk \wedge i' \leq i \wedge j' \leq j \wedge k \leq k' \Rightarrow Ri'j'k')$
- *R dále splňuje podmínky $\forall i, j, k, l \in W$*
  - $Rijk \Rightarrow Rjik$
  - $Rijk \Rightarrow i \leq k$
  - $R(ij)kl \Leftrightarrow Ri(jk)l$
- *$Rgjk$ iff $j \leq k$*

Podrobnější informace o plump podmínce jsou v [6].

Model ke čtveřici $\langle W, \leq, R, g\rangle$ přidá ještě "vyplývátko" $\Vdash$, určující sémantické vlastnosti modelu. Definice platnosti je modifikací sémantiky z [7, 8] tak, jak je v [9].

[6] Kdyby se toto pravidlo k logice BCK přidalo, dostali bysme právě intuicionistickou logiku.

Definice 10 ***Model*** *$\mathcal{M}$ logiky BCK je pětice $\langle W, \leq, R, g, \Vdash \rangle$, kde $\langle W, \leq, R, g \rangle$ je rámec logiky BCK a $\Vdash \subseteq W \times A$, kde A je množina atomů. Dále platí pro každý model $\mathcal{M}$, každé $i, j, k \in W$, každý atom $p \in A$ a každou formuli φ a ψ následující*

1. $\mathcal{M}, i \Vdash p$ *iff* $\langle i, p \rangle \in \Vdash$
2. $(\mathcal{M}, i \Vdash p \wedge i \leq j) \Rightarrow \mathcal{M}, j \Vdash p$
3. $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \wedge \psi$ *iff* $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi$ *a* $\mathcal{M}, i \Vdash \psi$
4. $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \vee \psi$ *iff* $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi$ *nebo* $\mathcal{M}, i \Vdash \psi$
5. $\mathcal{M}, i \Vdash \neg\varphi$ *iff* $\forall j, k(Rijk \Rightarrow \mathcal{M}, j \nVdash \varphi)$
6. $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ *iff* $\forall j, k((Rijk \wedge \mathcal{M}, j \Vdash \varphi) \Rightarrow \mathcal{M}, k \Vdash \psi)$
7. $\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \& \psi$ *iff* $\exists j, k(Rjki \wedge \mathcal{M}, j \Vdash \varphi \wedge \mathcal{M}, k \Vdash \psi)$
8. $\mathcal{M}, i \nVdash \bot$

Lze dokázat, že perzistence (bod 2. předchozí definice) funguje i pro celé formule, nejen pro atomy, což ukazuje následující lemma.

Lemma 1 *Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \leq, R, g, \Vdash \rangle$ je modelem logiky BCK, nechť φ je libovolná formule logiky BCK a nechť $i, j \in W$. Pak platí $(\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \wedge i \leq j) \Rightarrow \mathcal{M}, j \Vdash \varphi$.*

Důkaz (indukcí)

1. $\varphi \equiv p$
   Platí z definice.
2. φ je formule složená z
   (a) $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$
   Tedy $\mathcal{M}, i \Vdash \psi \wedge \chi$, takže z definice $\mathcal{M}, i \Vdash \psi$ a $\mathcal{M}, i \Vdash \chi$, z indukčního předpokladu $\mathcal{M}, j \Vdash \psi$ a $\mathcal{M}, j \Vdash \chi$, a tedy $\mathcal{M}, j \Vdash \psi \wedge \chi$.
   (b) $\varphi \equiv \psi \vee \chi$
   Analogické.
   (c) $\varphi \equiv \neg\psi$
   Tedy $\mathcal{M}, i \Vdash \neg\psi$, takže z definice $\forall k, l(Rikl \Rightarrow \mathcal{M}, k \nVdash \psi)$. Chceme dokázat, že když $i \leq j$, pak $\mathcal{M}, j \Vdash \neg\psi$, neboli že $\forall m, n(Rjmn \Rightarrow \mathcal{M}, m \nVdash \psi)$. Nechť tedy $i \leq j$ a uvažme libovolné m, n takové, že $Rjmn$. Protože $i \leq j$ z předpokladu a $m \leq m$, $n \leq n$ z reflexivity $\leq$, z plump vlastnosti máme $Rimn$. Protože $\mathcal{M}, i \Vdash \neg\psi$, musí platit $\mathcal{M}, m \nVdash \psi$ a to pro libovolná m, n taková, že $Rjmn$ a tedy konečně $\mathcal{M}, j \Vdash \neg\psi$.
   (d) $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$
   $\mathcal{M}, i \Vdash \psi \rightarrow \chi$, tedy $\forall k, l((Rikl \wedge \mathcal{M}, k \Vdash \psi) \Rightarrow \mathcal{M}, l \Vdash \chi)$. Chceme dokázat, že když $i \leq j$, tak $\mathcal{M}, j \Vdash \psi \rightarrow \chi$, neboli že $\forall m, n((Rjmn \wedge \mathcal{M}, m \Vdash \psi) \Rightarrow \mathcal{M}, n \Vdash \chi)$. Nechť tedy $i \leq j$ a uvažme libovolná m, n taková, že $Rjmn \wedge \mathcal{M}, m \Vdash \psi$. Protože $i \leq j$, $m \leq m$, $n \leq n$ a $Rjmn$, tak z plump vlastnosti $Rimn$, což spolu s $\mathcal{M}, m \Vdash \psi$ dá $\mathcal{M}, n \Vdash \chi$ a tedy $\mathcal{M}, j \Vdash \psi \rightarrow \chi$.

(e) $\varphi \equiv \psi \& \chi$
$\mathcal{M}, i \Vdash \psi \& \chi$, tedy $\exists k, l(Rkli \wedge \mathcal{M}, k \Vdash \psi \wedge \mathcal{M}, l \Vdash \chi)$. Nechť $i \leq j$, a chceme dokázat, že $\mathcal{M}, j \Vdash \psi \& \chi$, neboli že $\exists m, n(Rmnj \wedge \mathcal{M}, m \Vdash \psi \wedge \mathcal{M}, n \Vdash \chi)$. Protože $Rkli$, $i \leq j$, $k \leq k$ a $l \leq l$, tak z plump vlastnosti plyne $Rklj$. Přitom ale platí $\mathcal{M}, k \Vdash \psi$ a $\mathcal{M}, l \Vdash \chi$, tedy $\mathcal{M}, j \Vdash \psi \& \chi$.

□

Můžeme tedy bez obav místo $(\mathcal{M}, i \Vdash p \wedge i \leq j) \Rightarrow \mathcal{M}, j \Vdash p$ v definici modelu používat $(\mathcal{M}, i \Vdash \varphi \wedge i \leq j) \Rightarrow \mathcal{M}, j \Vdash \varphi$. Obě definice totiž, jak dokazuje předchozí lemma, si jsou ekvivalentní. Tuto vlastnost využijeme později v důkazu korektnosti.

Model logiky BCK lze chápat více způsoby, nejintuitivnější ale zřejmě je, chápat světy kripkovské sémantiky logiky BCK jako informační stavy. Svět, či spíše stav, g by se dal nazvat jako stav obsahující nutné minimem informací. Lze snadno dokázat, že $\forall x(g \leq x)$, neboli každý stav obsahuje alespoň tolik informací, jako stav g. Relací R pak tyto informace kombinujeme. Platí-li $Rijk$, znamená to, že kombinací informací ze stavů i a j, dostaneme informaci, obsaženou ve stavu k. Informace $\varphi \& \psi$ tedy vznikne kombinací informací ze stavu obsahujícího φ a stavu obsahujícího ψ, kdežto když stav, obsahující informaci $\varphi \rightarrow \psi$, zkombinujeme se stavem, obsahující informaci φ, dostaneme stav, obsahující informaci ψ (a z perzistence i $\varphi \rightarrow \psi$ a φ).

2.2 Sémantické stromy

Je zřejmé, že díky dvěma relacím dosažitelnosti a podmínkám, které jsou na ně kladeny, se metoda sémantických stromů zkomplikuje. Pro potřeby logiky BCK musíme také upravit samotnou definici sémantického stromu a definici důkazu.

Definice 11 ***Sémantický strom logiky BCK*** *je takový strom s kořenem, jehož každý vrchol je ohodnocen $\varphi, +i$ nebo $\varphi, -i$ nebo $i \leq j$ nebo $Rijk$, kde φ je libovolná formule logiky BCK a $i, j, k \in N \cup \{g\}$*[7]*. Větev b takového stromu se nazve* ***uzavřená****, jestliže existuje taková formule φ a takové $i \in N \cup \{g\}$, že vrcholy $\varphi, +i$ a $\varphi, -i$ jsou obsaženy ve větvi b, v opačném případě se nazve* ***otevřená****. Strom se nazve* ***uzavřený****, jestliže každá jeho větev je uzavřená. V opačném případě se nazve* ***otevřený****.*

Je vidět, že tím, že se ve větvi vyskytnou $\varphi, +i$ a $\neg\varphi, +i$ (respektive $\varphi, -i$ a $\neg\varphi, -i$), se ještě větev uzavřít nemusí.

Definice 12 ***Důkaz*** *φ z množiny předpokladů Γ je takový uzavřený sémantický strom, který $\forall \gamma \in \Gamma$ obsahuje v kořeni $\gamma, +0$ a $\varphi, -0$.*

Změna v definici důkazu vychází, vcelku pochopitelně, ze změn v definici stromu.

[7]Co to znamená z hlediska modelů se osvětlí v pozdějších definicích.

Definice 13 *Nechť b je plně rozvinutá otevřená větev libovolného sémantického stromu. Pak model* $\mathcal{M} = \langle W, \leq, R, g, \Vdash \rangle$ *nazveme modelem* ***indukovaným*** *větví b, jestliže*

- $W = \{w_i; i \in N \text{ se vyskytuje na } b\} \cup \{g\}$
- $w_i \leq w_j$ *iff* $i \leq j$ *je obsažený v* b
- $Rw_iw_jw_k$ *iff* $Rijk$ *je obsažený v* b
- $\mathcal{M}, w_i \Vdash p$ *iff* $p, +i$ *je obsažený v* b

Tato definice by se hodila spíše k důkazu úplnosti, kde je o indukovaných modelech dokázáno jedno důležité lemma (využité právě v důkazu o úplnosti), potřebujeme ji ale už teď k definici protipříkladu[8].

Definice 14 *Nechť existuje takový plně rozvinutý sémantický strom, který má v kořeni* $\gamma, +0$ *pro všechna* $\gamma \in \Gamma$ *a* $\varphi, -0$. *Nechť existuje alespoň jedna otevřená větev b v tomto stromu. Pak* ***protipříklad*** *na* $\Gamma \vdash \varphi$ *je model indukovaný větví b.*

Nutnost oddělit splněnost a nesplněnost formulí ve vrcholech vyplývá z toho, že neplatí zákon o vyloučení třetího. Stejně jako například v kripkovských modelech intuicionistické logiky, může existovat svět (či stav), kde neplatí φ ani $\neg\varphi$. Při dokazování $\Gamma \vdash \varphi$ tedy v kořeni stromu nebudou obsaženy všechny formule z předpokladu a negace formule závěru[9], ale $\forall \gamma \in \Gamma$ umístíme do kořene $\gamma, +0$ a $\varphi, -0$.

Další věc, na kterou si musíme dát pozor je, že se může stát, že se strom nikdy nestane plně rozvinutý. Je možné aplikovat pravidla na stále nově vznikající stavy, aniž by to vedlo k nějakému výsledku. Pro formální definici tohoto nekonečného rozvoje bych čtenáře odkázal na [10].

Nyní konečně můžeme definovat odvozovací pravidla metody sémantických stromů pro logiku BCK. Těchto pravidel je celkem 21. Pokud si tato pravidla porovnáme s pravidly v definicích rámce a modelu, ukáže se právě ona intuitivnost metody sémantických stromů.

[8] Technicky vzato ji samozřejmě nepotřebujeme, ale přesto nám definici protipříkladu značně usnadní. Důsledkem je ale bohužel jistá roztříštěnost, protože tuto definici až do důkazu úplnosti nevyužijeme.

[9] Takto utvořený strom by ostatně nebyl sémantickým stromem logiky BCK dle definice.

Definice 15 *Metoda sémantických stromů pro logiku BCK obsahuje následující* ***odvozovací pravidla***

Dvě pravidla disjunkce

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \varphi \vee \psi, +i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi, +i & & \psi, +i \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} \varphi \vee \psi, -i \\ \downarrow \\ \varphi, -i \\ \psi, -i \end{array}$$

Dvě pravidla konjunkce

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi, +i \\ \downarrow \\ \varphi, +i \\ \psi, +i \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \varphi \wedge \psi, -i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi, -i & & \psi, -i \end{tikzcd}$$

Dvě pravidla negace a jedno konstanty sporu

$$\begin{array}{c} \neg\varphi, \pm i \\ \downarrow \\ \varphi \to \bot, \pm i \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bot, -i \end{array}$$

*Dvě pravidla implikace**

$$\begin{array}{c} \varphi \to \psi, +i \\ Rijk \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \varphi, -j \qquad \psi, +k \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \varphi \to \psi, -i \\ \downarrow \\ Rijk \\ \varphi, +j \\ \psi, -k \end{array}$$

*Dvě pravidla silné konjunkce**

$$\begin{array}{c} \varphi \& \psi, +i \\ \downarrow \\ Rjki \\ \varphi, +j \\ \psi, +k \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \varphi \& \psi, -i \\ Rjki \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \varphi, -j \qquad \psi, -k \end{array}$$

Dvě pravidla o uspořádání

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ i \leq i \end{array}$$

$$\begin{array}{c} i \leq j \\ j \leq k \\ \downarrow \\ i \leq k \end{array}$$

Dvě pravidla o světě g

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ g \leq i \end{array}$$

$$\begin{array}{c} i \leq j \\ \downarrow \\ Rgij \end{array}$$

Dvě pravidla o relaci R[10]

$$\begin{array}{c} Rijk \\ \downarrow \\ i \leq k \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Rijk \\ \downarrow \\ Rjik \end{array}$$

Dvě "strukturální pravidla"[11]*

$$\begin{array}{c} Rijk \\ Rklm \\ \downarrow \\ Rjlx \\ Rixm \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Rijk \\ Rklm \\ \downarrow \\ Rilx \\ Rxjm \end{array}$$

[10] První z nich je možné nazvat pravidlem oslabení.

[11] První z nich je možné nazvat pravidlem asociativity, druhé pravidlem silné komutativity.

Pravidlo perzistence

$$\begin{array}{c} \varphi, +i \\ i \leq j \\ \downarrow \\ \varphi, +j \end{array}$$

Plump pravidlo

$$\begin{array}{c} Rijk \\ i' \leq i \\ j' \leq j \\ k \leq k' \\ \downarrow \\ Ri'j'k' \end{array}$$

*Pravidlo[12]

$$\begin{array}{c} \varphi \to \psi, +i \\ Rijk \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi, -j \qquad \psi, +k \end{array}$$

se musí aplikovat na všechna j, k taková, že se na dané větvi vyskytuje $Rijk$. To samé platí i pro pravidlo $\alpha\&\beta, -x$. Naopak pravidla $\alpha \to \beta, -x$, $\alpha\&\beta, +x$ a pravidla asociativity a silné komutativity nové světy vytváří. Tyto světy se nesmí ještě na dané větvi nikde vyskytovat.

Je zjevné, že některá pravidla je lepší použít dříve než jiná. Z hlediska dokazatelnosti na pořadí aplikace pravidel nezáleží, rozdíl je pouze ve složitosti a pracnosti samotného důkazu. Obecně řečeno je lepší aplikovat pravidla, která nevětví strom dříve než ta, která ho větví, a pravidla, která zavádějí nové světy dříve než ta, která se musí použít na všechny již existující. Protože přidáním vrcholů typu $i \leq j$ a $Rijk$ nemůžeme uzavřít větev, má také smysl použít pravidla pro spojky a pravidlo perzistence dříve, než ta zbylá. Ať už budeme postupovat v jakémkoliv pořadí, je nutné mít na paměti, že pokud vytvoříme nějakým pravidlem nové světy, musíme na ně aplikovat všechna pravidla, týkajících se všech světů na dané větvi, a to i zpětně.

[12] Dále ho budu nazývat pravidlem $\alpha \to \beta, +x$, podobně i další pravidla pro logické spojky.

2.3 Příklady použití

Následující dva příklady demonstrují správný postup dokazování. Jsou to dva jednoduché stromy důkazu $\varphi \to \psi \vdash (\varphi \wedge \chi) \to \psi$. V prvním případě jsme nejprve aplikovali pravidlo $\alpha \to \beta, -x$, ve druhém jsme jako první použili pravidlo $\alpha \to \beta, +x$. Povšimněme si, že abychom mohli v příkladě číslo 4 vůbec začít dokazovat tímto postupem, musíme vzít v úvahu svět g.

Příklad 3

$$\begin{array}{c}
\varphi \to \psi, +0 \\
(\varphi \wedge \chi) \to \psi, -0 \\
\downarrow \\
R012 \\
\varphi \wedge \chi, +1 \\
\psi, -2 \\
\downarrow \\
\varphi, +1 \\
\chi, +1 \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc} \varphi, -1 & \psi, +2 \\ \times & \times \end{array}
\end{array}$$

Příklad 4

$$\begin{array}{c}
\varphi \to \psi, +0 \\
(\varphi \wedge \chi) \to \psi, -0 \\
0 \leq 0 \\
Rg00 \\
R0g0 \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \varphi, -g \\ \downarrow \\ R012 \\ \varphi \wedge \chi, +1 \\ \psi, -2 \\ \downarrow \\ \varphi, +1 \\ \chi, +1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} \varphi, -1 & \psi, +2 \\ \times & \times \end{array} \end{array}
&
\begin{array}{c} \psi, +0 \\ \downarrow \\ R012 \\ \varphi \wedge \chi, +1 \\ \psi, -2 \\ \downarrow \\ \varphi, +1 \\ \chi, +1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} \varphi, -1 & \psi, +2 \\ \times & \times \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

V příkladu 4 jsme po aplikaci pravidla $\alpha \to \beta, -x$ museli dodatečně aplikovat pravidlo $\alpha \to \beta, +x$ na nově vzniklé světy $1, 2$, protože se na (každé) větvi vyskytl vrchol $R012$, čímž se naplnily předpoklady pravidla $\alpha \to \beta, +x$.

Jak již bylo výše zmíněno, ač pořadí aplikace pravidel neovlivní to, co všechno budeme moci dokázat, přesto si musíme dát pozor. Je možné nešikovným pořadím aplikace pravidel strom neuzavřít a to i tehdy, když je možné strom uzavřít aplikací jiného pravidla, jak dokládá následující příklad špatného postupu důkazu $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \varphi \to (\psi \to (\chi \vee \gamma))$.

Příklad 5

$$
\begin{array}{c}
\varphi \to (\psi \to \chi), +0 \\
\varphi \to (\psi \to (\chi \vee \gamma)), -0 \\
\downarrow \\
R012 \\
\varphi, +1 \\
\psi \to (\chi \vee \gamma), -2 \\
\downarrow \\
R234 \\
\psi, +3 \\
\chi \vee \gamma, -4 \\
\downarrow \\
\chi, -4 \\
\gamma, -4 \\
\downarrow \\
R135 \\
R054 \\
R504 \\
\downarrow \\
R306 \\
R164 \\
R614 \\
\downarrow \\
R017 \\
R374 \\
R734 \\
\vdots
\end{array}
$$

Tím jsme se dostali do nekonečného regresu, kde opakovaně aplikujeme pravidla asociativity a prohození předpokladů R, i když bychom mohli dvojím použitím pravidla $\alpha \to \beta, +x$ strom uzavřít. Počítačové důkazové systémy tento problém řeší tak, že každé pravidlo má určitou váhu, která ovlivňuje to, v jakém pořadí se je počítač pokouší aplikovat [11].

Zajímavé je porovnávat, jak odlišně se chovají silná a slabá konjunkce. Zatímco spor formulovaný silnou konjunkcí explozivní je, což dokazuje následující příklad, spor formulovaný slabou kojunkcí už není, viz dále.

Příklad 6

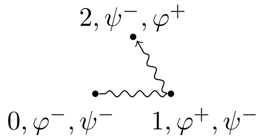
$$
\begin{array}{c}
(\varphi\&\neg\varphi) \to \psi, -0 \\
\downarrow \\
R012 \\
\varphi\&\neg\varphi, +1 \\
\psi, -2 \\
\downarrow \\
R341 \\
\varphi, +3 \\
\neg\varphi, +4 \\
\downarrow \\
\varphi \to \bot, +4 \\
R431 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\varphi, -3 & \bot, +1 \\
\times & \downarrow \\
 & \bot, -1 \\
 & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Pravidla byla aplikována v pořadí $\alpha \to \beta, -x$, $\alpha\&\beta, +x$, negace, "prohození zdrojů R", $\alpha \to \beta, +x$ a pravidlo sporu.

Příklad 7

$$
\begin{array}{c}
(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi, -0 \\
\downarrow \\
R012 \\
\varphi \wedge \neg\varphi, +1 \\
\psi, -2 \\
\downarrow \\
\varphi, +1 \\
\neg\varphi, +1 \\
\downarrow \\
\varphi \to \bot, +1 \\
R102 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\varphi, -0 & \bot, +2 \\
 & \downarrow \\
 & \bot, -2 \\
 & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Pravidla byla aplikována v pořadí $\alpha \to \beta, -x$, $\alpha \wedge \beta, +x$, negace, "prohození zdrojů R", $\alpha \to \beta, +x$ a pravidlo sporu. Strom sice můžeme rozvíjet dál, ale každý další postup by byl už zbytečný. Protipříklad na $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ tedy bude vypadat[13]



Podobně jako explozivita sporu se chová i modus ponens[14]. Zformulovaný pomocí silné konjunkce je tautologický, zformulovaný pomocí slabé konjunkce je pouze splnitelný.

[13] φ^+ ve světě 2 a ψ^- ve světech 0 a 1 bylo doplněno v souladu s pravidlem perzistence. V modelu není zobrazen stav g, který tam dle definice musí být, protože v tomto případě není důležitý, a byl vynechán z důvodu přehlednosti.

[14] Tento příklad ponechám na čtenáři.

3 Korektnost a úplnost

Důkaz korektnosti a úplnosti tohoto kalkulu vůči sémantice logiky BCK je vcelku přímočarý, což je poměrně častý jev při použití metody sémantických stromů. Postupovat budeme podobně jako v [3]. Hlavní část práce odvedeme v několika lemmatech, ve kterých ukážeme, že protipříklady, jak jsme je definovali dříve, jsou modely logiky BCK. Věty samotné jsou už poměrně snadné.

3.1 Korektnost

Definice 16 *Model $\mathcal{M} = \langle W, \leq, R, g, \Vdash \rangle$ nazveme **věrný** větvi b v daném sémantickém stromu, jestliže existuje funkce $f : N \cup \{g\} \rightarrow W$ taková, že $f(g) = g$, pro každý vrchol $\varphi, +i$ na větvi b platí $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \varphi$, pro každý vrchol $\psi, -j$ na větvi b platí $\mathcal{M}, f(j) \nVdash \psi$. Dále platí pro každý vrchol tvaru $i \leq j$ na b, že v $\mathcal{M}$ je $f(i) \leq f(j)$, a konečně pro každý vrchol tvaru $Rijk$ na b platí, že v $\mathcal{M}$ je $Rf(i)f(j)f(k)$.*

Je zjevné, že uzavřená větev nemůže mít věrný model, což dokazuje následující lemma.

Lemma 2 *Nechť $\mathcal{M}$ je model věrný větvi b v libovolném sémantickém stromu. Pak větev b je otevřená.*

Důkaz (sporem) Nechť b je uzavřená. Pak existuje formule φ a $i \in N \cup \{g\}$ takové, že na větvi b se vyskytují vrcholy $\varphi, +i$ a $\varphi, -i$. Protože model $\mathcal{M}$ je věrný větvi b, musí existovat funkce f taková, že $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \varphi$ a $\mathcal{M}, f(i) \nVdash \varphi$, což je spor.

$\square$

Následuje důležité lemma, které dokazuje, že aplikace pravidel zachovává věrnost modelů.

Lemma 3 *Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \leq, R, g, \Vdash \rangle$ je model věrný větvi b. Pak jestliže se na větev b aplikuje libovolné pravidlo, pak $\mathcal{M}$ je věrný alespoň jedné z nově vzniklých větví.*

Důkaz (po případech) Mějme libovolnou větev b v libovolném důkazovém stromu a model $\mathcal{M} = \langle W, \leq, R, g, \Vdash \rangle$, který je věrný větvi b. Budeme postupně rozebírat pravidla, která je možné aplikovat na větev b.

1. $\varphi \vee \psi, +i$
   $\mathcal{M}$ je věrný větvi b, platí tedy z definice, že $\exists f : N \cup \{g\} \rightarrow W$ taková, že $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \varphi \vee \psi$. Chceme dokázat, že po aplikaci pravidla

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \varphi \vee \psi, +i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \varphi, +i & & \psi, +i \end{tikzcd}$$

   bude $\mathcal{M}$ věrný jedné z nově vzniklých větví $b \cup \{\varphi, +i\}$ nebo $b \cup \{\psi, +i\}$. Víme, že $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \varphi \vee \psi$. Z definice modelu to znamená, že $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \varphi$ nebo $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \psi$. Nechť tedy $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \varphi$. Pak ale $\mathcal{M}$ je věrný větvi $b \cup \{\varphi, +i\}$. V opačném případě musí být věrný větvi $b \cup \{\psi, +i\}$.

2. $\varphi \vee \psi, -i$
   $\mathcal{M}$ je věrný větvi b, tedy z definice $\exists f : N \cup \{g\} \rightarrow W$ taková, že $\mathcal{M}, f(i) \nVdash \varphi \vee \psi$, tedy z definice modelu $\mathcal{M}, f(i) \nVdash \varphi$ a $\mathcal{M}, f(i) \nVdash \psi$. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} \varphi \vee \psi, -i \\ \downarrow \\ \varphi, -i \\ \psi, -i \end{array}$$

   pak bude model $\mathcal{M}$ věrný nově vzniklé větvi z definice.

3. $\varphi \wedge \psi, +i$
   Analogické případu 2.

4. $\varphi \wedge \psi, -i$
   Analogické případu 1.

5. $\varphi \rightarrow \psi, +i$
   $\mathcal{M}$ je věrný b, tedy $\exists f : N \cup \{g\} \rightarrow W$ taková, že $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \varphi \rightarrow \psi$. Aplikujme nyní na větev b pravidlo

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \rightarrow \psi, +i & \\ & Rijk & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi, -j & & \psi, +k \end{array}$$

   na všechny j, k takové, že se na větvi b vyskytuje vrchol $Rijk$. Tím nám pro každou takovou dvojici j, k vzniknou dvě nové větve. Uvážíme-li první takovou dvojici, na níž se toto pravidlo aplikuje (zbylé dvojice jsou analogické), získáme větve $b_1 = b \cup \{\varphi, -j\}$ a $b_2 = b \cup \{\psi, +k\}$. Protože $\mathcal{M}$ je věrný b, a protože $Rijk$ se na větvi b vyskytuje, pak v modelu $\mathcal{M}$ platí $Rf(i)f(j)f(k)$. Nyní jestliže $\mathcal{M}, f(j) \nVdash \varphi$, pak $\mathcal{M}$ je věrný větvi b_1. Jestliže naopak $\mathcal{M}, f(j) \Vdash \varphi$, pak musí platit i $\mathcal{M}, f(k) \Vdash \psi$ a tedy $\mathcal{M}$ je věrný větvi b_2.

6. $\varphi \to \psi, -i$
Postupujme stejně, jako v předchozích případech. Víme, že $\mathcal{M}, f(i) \nVdash \varphi \to \psi$, tedy že $\exists x, y(Rf(i)xy \wedge \mathcal{M}, x \Vdash \varphi \wedge \mathcal{M}, y \nVdash \psi)$. Aplikací pravidla

$$\begin{array}{c} \varphi \to \psi, -i \\ \downarrow \\ Rijk \\ \varphi, +j \\ \psi, -k \end{array}$$

na b dostaneme větev $b' = b \cup \{Rijk\} \cup \{\varphi, +j\} \cup \{\psi, -k\}$ a chceme dokázat, že $\mathcal{M}$ je věrný větvi b', tedy chceme, aby existovala taková funkce $f_1 : N \cup \{g\} \to W$, že $Rf_1(i)f_1(j)f_1(k) \wedge \mathcal{M}, f_1(j) \Vdash \varphi \wedge \mathcal{M}, f_1(k) \nVdash \psi$. Definujme funkci f' identickou k funkci f s tím rozdílem, že $f'(j) = x$ a $f'(k) = y$. Protože j a k se na větvi b nevyskytují, znamená to, že $\mathcal{M}$ je věrný větvi b i podle funkce f'. Tedy platí $Rf'(i)f'(j)f'(k)$, $\mathcal{M}, f'(j) \Vdash \varphi$ a $\mathcal{M}, f'(k) \nVdash \psi$, což jsme chtěli dokázat.

7. $\varphi \& \psi, +i$
Analogické případu 6.

8. $\varphi \& \psi, -i$
Analogické případu 5.

9. $\neg\varphi, +i$
Model $\mathcal{M}$ je věrný větvi b funkcí f, takže $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \neg\varphi$, tedy $\forall x, y(Rf(i)xy \Rightarrow \mathcal{M}, x \nVdash \varphi)$. Aplikujme na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} \neg\varphi, +i \\ \downarrow \\ \varphi \to \bot, +i \end{array}$$

a hledáme funkci, podle níž bude model $\mathcal{M}$ věrný větvi $b \cup \{\varphi \to \bot, +i\}$. Chceme tedy funkci f' takovou, že $\mathcal{M}$ je věrný větvi b funkcí f' a zároveň $\mathcal{M}, f'(i) \Vdash \varphi \to \bot$. Nyní ukážeme, že samotná funkce f tyto požadavky splňuje. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{M}$ je věrný větvi b funkcí f z předpokladu, stačí dokázat, že $\forall x', y'(Rf(i)x'y' \wedge \mathcal{M}, x' \Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, y' \Vdash \bot)$. Mějme tedy libovolná x', y' taková, že $Rf(i)x'y' \wedge \mathcal{M}, x' \Vdash \varphi$. Protože $\mathcal{M}, f(i) \Vdash \neg\varphi$, tak $\mathcal{M}, x' \nVdash \varphi$, což je spor. Nemůžou tedy nikdy platit předpoklady implikace $(Rf(i)x'y' \wedge \mathcal{M}, x' \Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, y' \Vdash \bot)$, tudíž implikace samotná platit musí.

10. $\neg\varphi, -i$

    Postupujeme podobně, jako v předchozím případě. Protože $\mathcal{M}$ je věrný větvi b funkcí f, platí, že $\exists x, y(Rf(i)xy \wedge \mathcal{M}, x \Vdash \varphi)$. Aplikací pravidla

$$\begin{array}{c} \neg\varphi, -i \\ \downarrow \\ \varphi \to \bot, -i \end{array}$$

    dostaneme větev $b \cup \{\varphi \to \bot, -i\}$ a chceme najít funkci f' takovou, že $\mathcal{M}, f'(i) \nVdash \varphi \to \bot$, neboli takovou funkci, že $\exists x', y'(Rf'(i)x'y' \wedge \mathcal{M}, x' \Vdash \varphi \wedge \mathcal{M}, y' \nVdash \bot)$. Uvážíme-li opět $f = f'$, z definice modelu je už vidět, že x a y jsou ona hledaná x' a y'.

11. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bot, -i \end{array}$$

    pak chceme najít funkci f' takovou, že $\mathcal{M}, f'(i) \nVdash \bot$, a podle níž by $\mathcal{M}$ byl věrný větvi b. Toto opět splňuje funkce f, protože podle definice modelu je $\mathcal{M}, f(i) \nVdash \bot$ splněno vždy pro každé i.

12. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ i \leq i \end{array}$$

    pak opět platí, že $\mathcal{M}$ je věrný větvi $b \cup \{i \leq i\}$ funkcí f, protože relace $\leq$ je reflexivní na W.

13. Aplikujme na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} i \leq j \\ j \leq k \\ \downarrow \\ i \leq k \end{array}$$

    Postup bude stejný, jako v předchozím případě.

14. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ g \leq i \end{array}$$

na libovolné i na větvi b, chceme najít funkci f', podle níž je $\mathcal{M}$ věrný b, a pro kterou platí $f'(g) \leq f'(i)$. Uvažme opět $f = f'$. Z definice modelu lze snadno dokázat, že $\forall x(g \leq x)$ a tedy $f(g) \leq f(i)$.

15. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} i \leq j \\ \downarrow \\ Rgij \end{array}$$

tak chceme najít takovou f', že $Rgf'(i)f'(j)$. Opět nechť $f' = f$. Protože $f(i) \leq f(j)$, tak musí platit i $Rgf(i)f(j)$ přímo z definice rámce.

16. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} Rijk \\ \downarrow \\ i \leq k \end{array}$$

tak víme, že $Rf(i)f(j)f(k)$. Z toho plyne z definice rámce, že $f(i) \leq f(k)$, což jsme chtěli.

17. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} Rijk \\ \downarrow \\ Rjik \end{array}$$

tak víme, že $Rf(i)f(j)f(k)$. Z toho plyne z definice rámce, že $Rf(j)f(i)f(k)$, což jsme chtěli.

18. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} Rijk \\ Rklm \\ \downarrow \\ Rjlx \\ Rixm \end{array}$$

kde x se na větvi b nevyskytuje, pak protože $\mathcal{M}$ je věrný větvi b, musí existovat funkce f taková, že $Rf(i)f(j)f(k)$ a $Rf(k)f(l)f(m)$. Pak z definice rámce musí platit $\exists q(Rf(j)f(l)q \wedge Rf(i)qf(m))$, a tedy $\mathcal{M}$ je věrný větvi $b \cup \{Rjlx\} \cup \{Rixm\}$.

19. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} Rijk \\ Rklm \\ \downarrow \\ Rilx \\ Rxjm \end{array}$$

kde x se na větvi b nevyskytuje, pak protože $\mathcal{M}$ je věrný větvi b , musí existovat funkce f taková, že $Rf(i)f(j)f(k)$ a $Rf(k)f(l)f(m)$. Z definice rámce a z $Rf(i)f(j)f(k)$ máme $Rf(j)f(i)f(k)$ a tedy opět z definice rámce $\exists q(Rf(i)f(l)q \wedge Rf(j)qf(m))$ a tedy $Rqf(j)f(m)$.

20. Aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} \varphi, +i \\ i \leq j \\ \downarrow \\ \varphi, +j \end{array}$$

pak z (rozšířené) perzistence zjevně plyne, že $\mathcal{M}, f(j) \Vdash \varphi$, a tedy $\mathcal{M}$ je věrný větvi $b \cup \{\varphi, +j\}$.

21. A konečně aplikujeme-li na větev b pravidlo

$$\begin{array}{c} Rijk \\ i' \leq i \\ j' \leq j \\ k \leq k' \\ \downarrow \\ Ri'j'k' \end{array}$$

pak musí existovat funkce f taková, že $Rf(i)f(j)f(k)$, $f(i') \leq f(i)$, $f(j') \leq f(j)$ a $f(k) \leq f(k')$. Protože model $\mathcal{M}$ splňuje plump podmínku, musí platit i $Rf(i')f(j')f(k')$ a tedy $\mathcal{M}$ je věrný větvi $b \cup \{Ri'j'k'\}$.

□

Věta 1 (o korektnosti) *Nechť Γ je konečná množina formulí a φ formule taková, že $\Gamma \vdash \varphi$. Pak $\Gamma \vDash \varphi$.*

Důkaz (sporem) Nechť $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Gamma \nvDash \varphi$. To znamená, že existuje model $\mathcal{M} = \langle W, \leq, R, g, \Vdash \rangle$ takový, že $\exists x \in W \, \forall \psi \in \Gamma(\mathcal{M}, x \Vdash \psi \wedge \mathcal{M}, x \nVdash \varphi)$. Protože $\Gamma \vdash \varphi$, tedy existuje důkaz takový, že v kořeni jsou všechna $\psi, +0$ a $\varphi, -0$ a každá větev tohoto stromu se uzavře. Model $\mathcal{M}$ je kořeni tohoto stromu věrný funkcí $f(0) = x$. Podle předchozího lemmatu musí být věrný alespoň jedné z větví stromu, vzniklého z kořene aplikací libovolného možného pravidla. Protože strom je uzavřený a tedy konečný, musí být model $\mathcal{M}$ věrný alespoň jedné větvi plně rozvinutého stromu. Tento strom je ale uzavřený, tudíž $\mathcal{M}$ musí být věrný uzavřené větvi, což je spor s lemmatem 2.

□

3.2 Úplnost

Na tomto místě bych rád upozornil na definici indukovaného modelu ze strany 11, která bude zapotřebí pro následující lemma, které prováže modely BCK a modely indukované větvemi sémantických stromů.

Lemma 4 *Nechť b je otevřená, plně rozvinutá větev stromu a nechť $\mathcal{M}$ je model indukovaný větví b. Pak $\mathcal{M}$ je modelem logiky BCK.*

Důkaz (po případech)

- $g \in W$ z definice.
- R je ternární relace na W z definice.
- R splňuje plump podmínku, protože jestliže je v modelu $\mathcal{M}$ $Rw_iw_jw_k$, $w_{i'} \leq w_i$, $w_{j'} \leq w_j$ a $w_k \leq w_{k'}$, pak se na větvi b vyskytuje $Rijk$, $i' \leq i$, $j' \leq j$ a $k \leq k'$, pak, protože b je plně rozvinutá, je na ní i $Ri'j'k'$. Tudíž v modelu $\mathcal{M}$ musí být i $Rw_{i'}w_{j'}w_{k'}$.

- Relace $\leq$ je reflexivní, protože když máme libovolné $w_i \in W$, pak i se vyskytuje na větvi b, která je plně rozvinutá, a tedy obsahuje vrchol $i \leq i$, a tedy v modelu $\mathcal{M}$, který je indukovaný větví b musí platit $w_i \leq w_i$.
- Relace $\leq$ je tranzitivní, protože máme-li libovolné $w_i, w_j, w_k \in W$ takové, že vrcholy $i \leq j$ a $j \leq k$ se vyskytují na větvi b, pak i $i \leq k$ se musí vyskytovat na větvi b a tedy z definice $w_i \leq w_k$.
- Nechť $w_i \leq w_j$ a nechť $\mathcal{M}, w_i \Vdash p$. Pak z definice $i \leq j$ a $p, +i$ se vyskytují na b, a protože b je plně rozvinutý, musí se i $p, +j$ vyskytovat na b, a tedy $\mathcal{M}, w_j \Vdash p$, a tedy relace $\leq$ je perzistentní.
- Nechť $Rw_iw_jw_k$, pak $Rijk$ je na větvi b, tedy $Rjik$ je na větvi b, a tedy $Rw_jw_iw_k$.
- Nechť $Rw_iw_jw_k$, pak $Rijk$ je na větvi b, tedy $i \leq k$ je na větvi b, a tedy $w_i \leq w_k$.
- Mějme libovolné w_i,w_j,w_k,w_l takové, že $\exists w_u(Rw_iw_jw_u \wedge Rw_uw_kw_l)$. Pak na b jsou vrcholy $Riju$ a $Rukl$, takže na větvi b musí být i vrcholy $Rjkm$ a $Riml$ dle pravidla asociativity, jež jsou prvním a druhým výskytem m na větvi b. Pak ale z definice $Rw_jw_kw_m$ a $Rw_iw_mw_l$.
- Mějme libovolné w_i,w_j,w_k,w_l takové, že $\exists w_q(Rw_jw_kw_q \wedge Rw_iw_qw_l)$. Pak na b jsou vrcholy $Rjkq$ a $Riql$, takže na větvi b musí být i vrchol $Rqil$, a tedy i vrcholy $Rjiu$ a $Rukl$ dle pravidla silné komutativity, jež jsou prvním a druhým výskytem u na větvi b. Navíc na větvi b musí být vrchol $Riju$. Pak ale z definice $Rw_iw_jw_u$ a $Rw_uw_kw_l$.
- Platí Rgw_iw_j iff $Rgij$ je na b iff $i \leq j$ je na b iff $w_i \leq w_j$, protože

$$\begin{array}{c} i \leq j \\ \downarrow \\ Rgij \end{array}$$

a

$$\begin{array}{c} Rgij \\ \downarrow \\ Rigj \\ \downarrow \\ i \leq j \end{array}$$

$\square$

Lemma 5 *Nechť b je otevřená, plně rozvinutá větev stromu a nechť $\mathcal{M}$ je model indukovaný větví b. Pak platí*

- *Když $\varphi, +i$ je na větvi b, tak $\mathcal{M}, w_i \Vdash \varphi$.*
- *Když $\varphi, -i$ je na větvi b, tak $\mathcal{M}, w_i \nVdash \varphi$.*

Důkaz (indukcí dle složitosti φ)

1. Když φ je atom, plyne to z definice indukovaného modelu.
2. Indukční krok - φ je složená formule
   (a) Když $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$
      i. Nechť $\varphi, +i$ se vyskytuje na b. Pak $\varphi_1, +i$ je na b a $\varphi_2, +i$ je na b, z indukčního předpokladu $\mathcal{M}, w_i \Vdash \varphi_1$ a $\mathcal{M}, w_i \Vdash \varphi_2$, a tedy $\mathcal{M}, w_i \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
      ii. Nechť $\varphi, -i$ se vyskytuje na b. Pak $\varphi_1, -i$ je na b nebo $\varphi_2, -i$ je na b, z indukčního předpokladu $\mathcal{M}, w_i \nVdash \varphi_1$ nebo $\mathcal{M}, w_i \nVdash \varphi_2$, a tedy $\mathcal{M}, w_i \nVdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
   (b) Když $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$, řeší se zcela analogicky.
   (c) Když $\varphi \equiv \psi \to \chi$
      i. Nechť $\varphi, +i$ se vyskytuje na b. Uvažme libovolné j, k takové, že $Rijk$ je na b. Pak $\psi, -j$ je na b nebo $\chi, +k$ je na b. Z definice indukovaného modelu plyne, že $Rw_iw_jw_k$. Dále z indukčního předpokladu $\mathcal{M}, w_j \nVdash \psi$ nebo $\mathcal{M}, w_k \Vdash \chi$, a tedy protože j, k byla zvolena libovolně, tak i $\mathcal{M}, w_i \Vdash \psi \to \chi$.
      ii. Nechť $\varphi, -i$ se vyskytuje na b. Pak na musí existovat taková j, k, která se na b dříve nevyskytla taková, že $Rijk$ je na b, $\psi, +j$ je na b a $\chi, -k$ je na b. Z definice indukovaného modelu opět plyne, že $Rw_iw_jw_k$ a z indukčního předpokladu $\mathcal{M}, w_j \Vdash \psi$ a $\mathcal{M}, w_k \nVdash \chi$, a tedy $\mathcal{M}, w_i \nVdash \psi \to \chi$.
   (d) Když $\varphi \equiv \psi \& \chi$, je řešení analogické případu implikace.
   (e) Když $\varphi \equiv \neg\psi$
      i. Nechť $\varphi, +i$ se vyskytuje na b. Pak i $\psi \to \bot, +i$ se musí vyskytovat na b. Tedy pro každé j, k takové, že $Rijk$ se vyskytuje na b platí, že buď $\psi, -j$ je na b nebo $\bot, +k$ je na b. Protože větev b je plně rozvinutá, musí se na ní vyskytovat $\bot, -k$, takže se na ní nemůže vyskytnout $\bot, +k$. Tedy $\psi, -j$ je na b a z indukčního předpokladu $\mathcal{M}, w_j \nVdash \psi$. Z definice indukovaného modelu platí, že $Rw_iw_jw_k$, a to pro libovolná j, k taková, že $Rijk$ je na b, a tedy $\mathcal{M}, w_i \Vdash \neg\psi$.
      ii. Případ $\varphi, -i$ na b se řeší analogicky.

$\square$

Věta 2 (o úplnosti) *Nechť* Γ *je konečná množina formulí, a* φ *je formule taková, že* $\Gamma \models \varphi$. *Pak* $\Gamma \vdash \varphi$.

Důkaz (sporem) Nechť $\Gamma \nvdash \varphi$. Uvažme libovolný, plně rozvinutý strom důkazu φ z Γ. V kořeni takového stromu tedy bude pro každou formuli $\psi \in \Gamma$ $\psi, +0$ a $\varphi, -0$. Tento strom bude mít alespoň jednu větev otevřenou, protože $\Gamma \nvdash \varphi$. Vezměme libovolnou takovou větev a nazvěme ji b. Uvažme nyní model $\mathcal{M}$ indukovaný větví b. Protože kořen stromu leží na každé větvi, musí z lemmatu 5 v modelu $\mathcal{M}$ platit, že $\forall \psi \in \Gamma(\mathcal{M}, w_0 \Vdash \psi \wedge \mathcal{M}, w_0 \nVdash \varphi)$. Přitom ale $\Gamma \models \varphi$, tedy musí platit $\forall \mathcal{M} \forall w \in W \forall \psi \in \Gamma(\mathcal{M}, w \Vdash \psi \Rightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \varphi)$, což je spor.

$\square$

4 Závěr

V této práci jsem chtěl přiblížit metodu sémantických stromů, především pomocí některé ze substrukturálních logik, aby se ukázaly jak výhody, tak nevýhody této metody. Logika BCK pro toto posloužila jako ideální kandidát. Není mi známo, že by se v nějaké literatuře objevila metoda sémantických stromů v souvislosti s právě logikou BCK. Odvozovací pravidla jsou proto původní, stejně tak i důkaz korektnosti a úplnosti těchto pravidel. Vychází sice z [3], kde je korektnost a úplnost příslušných pravidel dokázána vůči jiným logikám, ukazuje se tím ale univerzální aplikovatelnost tohoto postupu pro v podstatě libovolnou logiku. Na tomto poli přesto zůstává několik zajímavých témat, například porovnání metody sémantických stromů s dalšími důkazovými metodami (ať již v logice BCK, či v jiné substrukturální logice), či otázka, zda by sémantické stromy byly stejně intuitivní, kdybychom místo kripkovské sémantiky použili algebraickou.

Použitá literatura

[1] Girle R., *Modal Logics and Philosophy*, Acumen Publishing, 2000

[2] Matoušek J., Nešetřil J., *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, 2003

[3] Priest G., *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, 2001

[4] Ono H., Komori Y., *Logics Without the Contraction Rule*, Journal of Symbolic Logic, 1985

[5] Curry H., Feys R., *Combinatory Logic*, North-Holland, 1958

[6] Restall G., *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge, 2000

[7] Routley R., Meyer R., *Semantics of Entailment*, Truth, Syntax and Modality, North-Holland, 1973

[8] Routley R., Meyer R., *Semantics of Entailment - II*, The Journal of Philosophical Logic, D. Reidel Publishing Company, 1972

[9] Restall G., *Relevant and Substructural Logics*, Macquarie University, 2001

[10] D'Agostino M., Gabbay D., Hähnle R., Posegga J., *Handbook of Tableau Methods*, Kluwer Academic Publishers, 1999

[11] Waaler A., Wallen L., *Tableaux for Intuitionistic Logics*, Handbook of Tableau Methods, Kluwer Academic Publishers, 1999