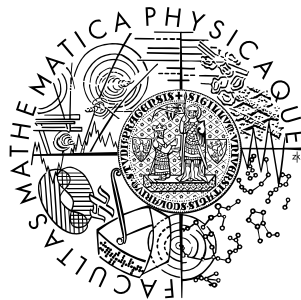


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Lucie Kračmerová

### **Stochastické finance v programu Mathematica**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2009

Děkuji na tomto místě RNDr. Jitce Zichové, Dr. za výběr tématu, ochotu ke konzultacím a pomoc při řešení problémů souvisejících s touto prací. Děkuji své rodině za podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 17.7.2009

Lucie Kračmerová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy</b>	<b>7</b>
2.1	Stochastický proces . . . . .	7
2.2	Brownův pohyb . . . . .	7
2.3	Stochastický integrál . . . . .	11
2.4	Itôova formule . . . . .	15
2.5	Stochastické diferenciální rovnice . . . . .	16
2.6	Změna míry . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Akciové opce</b>	<b>19</b>
3.1	Akcie . . . . .	19
3.1.1	Vývoj ceny akcie . . . . .	19
3.1.2	Cena akcie podle míry $Q$ . . . . .	24
3.2	Akciové opce . . . . .	25
3.2.1	Meze opční prémie . . . . .	29
3.2.2	Put-call parita . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Blackův-Scholesův model</b>	<b>31</b>
4.1	Binomický model . . . . .	32
4.2	Blackova-Scholesova-Mertonova rovnice . . . . .	35
4.2.1	Implementace put opce . . . . .	38
4.2.2	Implementace call opce . . . . .	43
4.3	Blackova-Scholesova formule I . . . . .	47
4.3.1	Rovnice tepla . . . . .	47
4.3.2	Odvození Blackovy-Scholesovy formule . . . . .	49
4.4	Blackova-Scholesova formule II . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Analýza citlivosti</b>	<b>53</b>
5.1	Delta . . . . .	54
5.2	Gamma . . . . .	57
5.3	Theta . . . . .	59
5.4	Vega . . . . .	61
5.5	Rho . . . . .	63

<b>6 Závěr</b>	<b>67</b>
<b>Literatura</b>	<b>68</b>
<b>A Programové řešení: Simulace vývoje ceny akcie</b>	<b>69</b>
<b>B Programové řešení: Blackova-Scholesova formule</b>	<b>69</b>

Název práce: Stochastické finance v programu Mathematica  
Autor: Lucie Kračmerová  
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky  
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.  
e-mail vedoucího: jitka.zichova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce se věnuje vybraným stochastickým metodám využívaným ve financích, které jsou aplikovány do softwaru Mathematica 6, obsahuje také analýzu těchto výstupů v podobě grafů či odvození matematických formulí. Zabýváme se základní teorií Wienerova procesu, stochastických integrálů a Itôovy formule, dále modelováním vývoje ceny akcie, opcemi a oceňováním opcí pomocí Blackova-Scholesova modelu. Práce zahrnuje odvození Blackovy-Scholesovy formule a následné derivace této formule v podobě Greeks.

Klíčová slova: Wienerův proces, cena akcie, Blackova-Scholesova formule, Greeks

Title: Stochastic Finance using Mathematica  
Author: Lucie Kračmerová  
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics  
Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr.  
Supervisor's e-mail address: jitka.zichova@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis is dedicated to selected stochastic methods used in finance, which are applied to the software Mathematica 6. It also contains analysis of the outputs in the form of graphs and derivations of mathematical formulas. We deal with the basic theory of Wiener process, stochastic integrals and Itô formula, modeling of the development of stock price, options and the valuation of options using Black-Scholes model. This work includes the derivation of Black-Scholes formula and the subsequent derivatives of this formula in the form of Greeks.

Keywords: Wiener process, stock price, Black-Scholes formula, Greeks

# Kapitola 1

## Úvod

V této práci se budeme zabývat teorií vybraných stochastických metod využívaných ve financích, kterou budeme v průběhu práce aplikovat do programu Mathematica a analyzovat výsledky.

V kapitole 2 se krátce seznámíme se základními pojmy používanými v textu, a to teorií stochastických procesů, Brownovým pohybem, stochastickým integrálem a Itôově formuli.

Akciovými opcemi se budeme zabývat v kapitole 3. Nejprve se obecně seznámíme s akciemi a vývojem ceny akcie a poté se budeme věnovat opcím, jejich základním druhům a charakteristikám.

Důležitou částí práce je kapitola 4 věnovaná Blackově-Scholesově modelu. Jedná se o model oceňování opcí, který sice vychází z uměle vytvořených předpokladů, ale považuje se za základní stavební kámen pro oceňování opčních kontraktů. Odvodíme zde také známou Blackovu-Scholesovu formuli, a to dvěma způsoby, v prvním případě za pomoci rovnice tepla, ve druhém pak přes teorii rizikově neutrálního oceňování.

Poslední část práce, kapitola 5, pojednává o analýze citlivosti. Uvedeme zde všech pět parametrů tzv. Greeks, které budeme dále podrobněji zkoumat.

V příloze se nacházejí některá programová řešení vztahující se k příslušným kapitolám.

# Kapitola 2

## Základní pojmy

V této kapitole vysvětlíme základní pojmy, které se budou vyskytovat v dalším textu a nadále rozšiřovat. Uvádíme pojmy pro modely se spojitým časem.

### 2.1 Stochastický proces

**Definice 1.** Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor. Rodina reálných náhodných veličin  $\{X(t), t \geq 0\}$  definovaných na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se nazývá *stochastický proces*. Uvažujeme-li časový interval  $T \subset \mathbb{R}^+$  a  $\{X(t), t \in T\}$ , mluvíme o *stochastickém procesu na intervalu  $T$* .

**Definice 2.** Necht'  $X(1), X(2), \dots, X(d)$  jsou stochastické procesy, potom proces  $X = \{X(1), X(2), \dots, X(d)\}$  nazýváme  *$d$ -rozměrný stochastický proces*.

Stochastický proces lze chápat jako náhodnou veličinu  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (R^T, \mathcal{B}(R)^T)$ , kde  $R^T = \{x = (x(t), t \in T); x(t) \in R; t \in T\}$ .

**Definice 3.** Necht'  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  je stochastický proces. Funkce  $\{X_\omega, \omega \in \Omega\} \subset R^T$  se nazývají *trajektorie* stochastického procesu.

### 2.2 Brownův pohyb

Brownův pohyb je stochastický proces, který zkonstruujeme následujícím způsobem. Necht'  $\{X_k\}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením s hodnotami  $\{-\sigma, \sigma\}$ . Označme  $P(X_k = \sigma) = p$ . Předpokládejme, že

$$P(X_k = \sigma) = p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Zvolme

$$B_t = \sum_{k=1}^{[nt]+1} \frac{X_k}{\sqrt{n}}$$

a použijeme charakteristické funkce pro určení rozdělení tohoto náhodného procesu  $B(t)$ .

$$\varphi(\tau) = \mathbb{E}e^{i\tau B_t} = \left( (1-p) \exp\left\{-\frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}}\right\} + p \exp\left\{\frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \right)^{[nt]+1} \quad (2.1)$$

Rozvineme exponenciální funkci pomocí Taylorova rozvoje

$$\exp\left\{\frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 + \frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\tau^2\sigma^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Úpravou v (2.1) s využitím výše uvedeného rozvoje a dosazením za  $p$  dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - \frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\tau^2\sigma^2}{2n} + 2p\frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 - \frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\tau^2\sigma^2}{2n} + \\ + 2\frac{i\tau\sigma}{2\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) &= 1 - \frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\tau^2\sigma^2}{2n} + \frac{i\tau\sigma}{\sqrt{n}} + \\ + \frac{i\tau\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 - \frac{\tau^2\sigma^2}{2n} + \frac{i\tau\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dosazením do (2.1) získáme

$$\varphi(\tau) = \left( 1 + \frac{\left(\frac{i\tau\mu}{n} - \frac{\tau^2\sigma^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)nt}{nt} \right)^{[nt]+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{it\mu\tau - \frac{1}{2}\tau^2\sigma^2t}$$

Vidíme, že  $\varphi(\tau)$  konverguje k charakteristické funkci normálního rozdělení  $N(\mu t, \sigma^2 t)$ . Vzhledem k tomu, že vycházíme ze vzájemně nezávislých náhodných veličin, přírůstky procesu  $B(t)$  jsou také nezávislé.

Vlastnosti procesu  $B(t)$  lze shrnout do následujících bodů:

1. Jedná se o proces s nezávislými přírůstky.
2. Rozdělení přírůstků  $B(t+s) - B(t)$  je  $N(\mu s, \sigma^2 s)$ .

Tento proces se nazývá *zobecněný jednorozměrný proces Brownova pohybu*. Následující definice jsou převzaty z [5].

**Definice 4.** *Zobecněný  $d$ -rozměrný proces Brownova pohybu* je  $d$ -rozměrný proces  $B$ , který splňuje následující podmínky:



1. Pro všechna  $\omega \in \Omega$  je funkce  $t \rightarrow B_t(\omega)$  spojitá.
2. Pro  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  jsou přírůstky procesu Brownova pohybu  $B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$  nezávislé.
3. Pro  $0 \leq s < t$  existují jednoznačně určená  $d$ -rozměrná čtvercová matice  $\Sigma$  a  $d$ -rozměrný vektor  $\mu$  takové, že přírůstek  $B(t) - B(s)$  má normální rozdělení se střední hodnotou  $(t - s)\mu$  a kovarianční maticí  $(t - s)\Sigma$ .

**Definice 5.** *Standardizovaný  $d$ -rozměrný proces Brownova pohybu* je proces  $B$ , který splňuje následující podmínky:

1.  $B(0) = 0$  skoro jistě.
2. Pro všechna  $\omega \in \Omega$  je funkce  $t \rightarrow B_t(\omega)$  spojitá.
3. Pro  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  jsou přírůstky procesu Brownova pohybu  $B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$  nezávislé.
4. Pro  $0 \leq s \leq t$  má přírůstek  $B(t) - B(s)$  normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí  $(t - s)I$ , kde  $I$  je jednotková matice  $d \times d$ .

Zobecněný proces Brownova pohybu lze zkonstruovat ze standardizovaného procesu Brownova pohybu.

**Definice 6.** Nechť  $\Omega$  je neprázdná množina,  $T > 0$  a předpokládejme, že máme  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}_t$  pro každé  $t \in [0, T]$ . Předpokládejme dále, že pokud  $s \leq t$ , potom  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ . Potom nazýváme množinu těchto  $\sigma$ -algeber *filtrace*.

**Definice 7.** Mějme pravděpodobnostní prostor s filtrací  $\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T$ . Nechť  $X(t)$  je množina náhodných veličin,  $t \in [0, T]$ . Řekneme, že tato množina je *stochastický adaptovaný proces*, pokud pro každé  $t$  platí, že  $X(t)$  je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelná.

**Definice 8.** Náhodný proces  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  je  *$d$ -rozměrný Wienerův proces vzhledem k filtraci  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*  když platí:

1.  $W(0) = 0$  skoro jistě.
2.  $W$  je adaptovaný na filtraci  $\mathcal{F}$
3. Pro  $0 \leq s \leq t$  je přírůstek  $W(t) - W(s)$  nezávislý na  $\mathcal{F}_s$  a má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí  $(t - s)I$ , kde  $I$  je jednotková matice  $d \times d$
4. Pro všechna  $\omega \in \Omega$  je funkce  $t \rightarrow W_t(\omega)$  spojitá.

Jak vidíme, Wienerův proces se vztahuje k nějaké konkrétní filtraci. Následující tvrzení ukazuje vztah mezi procesem Brownova pohybu a Wienerovým procesem.

**Tvrzení 1.** *Proces  $W$  je  $d$ -rozměrný Wienerův proces vzhledem k filtraci  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ , právě tehdy když platí*

1.  $W$  je  $d$ -rozměrný standardizovaný proces Brownova pohybu.
2.  $W$  je adaptovaný na filtraci  $\mathcal{F}$ .
3.  $W(t) - W(s)$  je nezávislé na  $\mathcal{F}_s$  pokud  $0 \leq s \leq t$ .

Důkaz je uveden v [5].

Uveďme si ještě definice martingalu a markovského procesu, které jsou důležité pro pochopení textu v dalších kapitolách.

**Definice 9.** Nechť  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $T > 0$ ,  $\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T$  je filtrace,  $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ . Uvažujme adaptovaný proces  $M(t), 0 \leq t \leq T$  takový, že  $EM(t) < \infty \forall t \in [0, T]$ . Pokud

$$E[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s) \quad \text{s.j.} \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

řekneme, že proces  $M$  je *martingal*. Pokud

$$E[M(t)|\mathcal{F}_s] \geq M(s) \quad \text{s.j.} \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

řekneme, že proces  $M$  je *submartingal*. Pokud

$$E[M(t)|\mathcal{F}_s] \leq M(s) \quad \text{s.j.} \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

řekneme, že proces  $M$  je *supermartingal*.

Příkladem martingalu může být  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ , Wienerův proces vzhledem k filtraci  $\mathcal{F}$ . Pro  $0 \leq s \leq t$  budiž

$$\begin{aligned} E[W(t)|\mathcal{F}_s] &= E[W(t) - W(s) + W(s)|\mathcal{F}_s] = E[W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s] + \\ &+ E[W(s)|\mathcal{F}_s] = E[W(t) - W(s)] + E[W(s)|\mathcal{F}_s] = \\ &= 0 + W(s) = W(s) \quad \text{s.j.} \end{aligned}$$

Při důkazu jsme postupně využili vlastnosti střední hodnoty (linearitu), přírůstky Wienerova procesu  $W(t) - W(s)$  jsou  $\mathcal{F}_s$  měřitelné a dle definice mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou.

**Definice 10.** Nechť  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $T > 0$ ,  $\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T$  je filtrace,  $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ . Nechť  $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$  a pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci  $f$  existuje borelovsky měřitelná funkce  $g$  taková, že

$$E[f(X(t))|\mathcal{F}_s] = g(X(s)).$$

Potom řekneme, že  $X$  je *markovský proces*.

Stochastický proces nazýváme markovský proces pokud tzv. nemá paměť. Pravděpodobnost výsledku v budoucím čase  $t + 1$ , když známe výsledek v přítomném čase  $t$ , je stejná, jako když známe výsledky v přítomném čase  $t$  a všechny výsledky z minulých časů  $t - 1, t - 2, \dots, 0$ . Pro budoucí vývoj procesu tedy stačí znát přítomnost, není zapotřebí minulého vývoje. Příkladem markovského procesu je cena akcie popsaná v kapitole 3.1.1. V dalším textu vždy uvažujeme stochastický markovský proces.

Pro větší přehlednost přejdeme v dalších částech této kapitoly ke značení  $W_t$  místo  $W(t)$  pro všechny proměnné.

## 2.3 Stochastický integrál

Budiž  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  Wienerův proces vzhledem k neklesající soustavě  $\sigma$ -algeber  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ . Budeme definovat

$$\int_0^t \Phi_s dW_s$$

pro dosti širokou třídu neanticipativních náhodných funkcí  $\Phi = \{\Phi_t, t \in [0, T]\}$ .

Neanticipativní funkce jsou funkce  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  mající pro  $t \geq 0$  tu vlastnost, že jejich hodnota  $Y_t$  je určena jevy do doby  $t$ . Nejprve zavedeme definici stochastického integrálu pro jednoduché funkce.

**Definice 11.** Náhodná funkce  $\Phi = \{\Phi_t, t \in [0, T]\}$  se nazývá *jednoduchá funkce*, je-li neanticipativní a existuje-li dělení  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  intervalu  $[0, T]$  spolu s náhodnými veličinami  $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$  tak, že platí  $\Phi_t = \phi_k$  pro  $t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Nechť  $\Phi$  je jednoduchá funkce, potom pro  $t \in [0, T]$  jejím stochastickým integrálem rozumíme

$$\int_0^t \Phi_s dW_s = \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \phi_k (W_t - W_{t_k}) \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

Uveďme vlastnosti integrálu jednoduchých funkcí:

1.  $\int_0^t \Phi_s dW_s$  je stejný pro všechna dělení intervalu  $[0, T]$  ve smyslu definice 11

$$2. \int_0^t (a\Phi_s + b\Psi_s) dW_s = a \int_0^t \Phi_s dW_s + b \int_0^t \Psi_s dW_s \text{ pro konstanty } a, b$$

$$3. \int_0^t \Phi_s dW_s \text{ je spojitou neanticipativní funkcí } t \text{ na intervalu } [0, T]$$

Nyní určíme střední hodnotu a rozptyl  $\int_0^t \Phi dW$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t \Phi_s dW_s &= \mathbb{E} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \phi_k (W_t - W_{t_k}) \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \phi_j \mathbb{E} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \mathbb{E} \phi_k \mathbb{E} (W_t - W_{t_k}) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \phi_j \cdot 0 + \mathbb{E} \phi_k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dle předpokladu je  $\Phi$  neanticipativní funkce, tudíž  $\phi_j$  a přírůstky Wienerova procesu jsou vzájemně nezávislé funkce a střední hodnotu součinu lze psát jako součin středních hodnot. Použili jsme také skutečnost, že přírůstky Wienerova procesu mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \int_0^t \Phi_s dW_s \right)^2 &= \mathbb{E} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \phi_k (W_t - W_{t_k}) \right)^2 = \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \phi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \right)^2 + \mathbb{E} (\phi_k (W_t - W_{t_k}))^2 = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \phi_j^2 \mathbb{E} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 + \mathbb{E} \phi_k^2 \mathbb{E} (W_t - W_{t_k})^2 = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \phi_j^2 (t_{j+1} - t_j) + \mathbb{E} \phi_k^2 (t - t_k) = \int_0^t \mathbb{E} \Phi_s^2 ds = \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \Phi_s^2 ds. \end{aligned}$$

Použili jsme nezávislosti  $\phi_j$  a  $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$  a nezávislosti  $\phi_j$  a  $W_t - W_{t_k}$  pro  $j = 1, 2, \dots, k$  spolu vlastnostmi střední hodnoty. Dále jsme podobně jako výše použili vlastnost normálního rozdělení přírůstků Wienerova procesu.

Poslední rovnost plyne ze spojitosti trajektorie Wienerova procesu, lze zaměnit pořadí integrálu a střední hodnotu.

Shrneme-li výše uvedené odvození, dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t \Phi_s dW_s &= 0 \\ \mathbb{E} \left( \int_0^t \Phi_s dW_s \right)^2 &= \mathbb{E} \int_0^t \Phi_s^2 ds \end{aligned}$$

Nyní zavedeme stochastický integrál pro obecné náhodné procesy.

**Definice 12.** Necht'  $\{\Phi^n, n = 1, 2, \dots\}$  je posloupnost jednoduchých funkcí. Řekneme, že posloupnost stochastických integrálů  $\{\int_0^t \Phi_s^n dW_s, t \in [0, T], n = 1, 2, \dots\}$  pro  $t \geq 0$  je *cauchyovská v pravděpodobnosti*, jestliže pro  $\varepsilon > 0$  platí:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t (\Phi_s^n - \Phi_s^m) dW_s \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Každou neanticipativní funkci  $\Phi$  splňující

$$\int_0^T \Phi_s^2 ds < \infty$$

lze aproximovat jednoduchými funkcemi. Existuje tedy posloupnost jednoduchých funkcí  $\{\Phi^n, n = 1, 2, \dots\}$  taková, že platí

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\Phi_s^n - \Phi_s)^2 ds = 0.$$

Symbol  $p \lim$  označuje konvergenci v pravděpodobnosti. Pokud tato rovnost platí, platí také cauchyovská podmínka (z Minkowského nerovnosti)

$$p \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_0^T (\Phi_s^m - \Phi_s^n)^2 ds = 0. \quad (2.2)$$

Cílem je ukázat, že posloupnost náhodných procesů  $\{\int_0^t \Phi_s^n dW_s, t \in [0, T], n = 1, 2, \dots\}$  je cauchyovská v pravděpodobnosti. K tomu nám pomůže následující tvrzení.

**Tvrzení 2.** Mějme jednoduchou funkci  $\Phi = \{\Phi_t, t \in [0, T]\}$ . Pro libovolná čísla  $a > 0, b > 0$  platí

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \Phi_s dW_s \right| > a \right) \leq \mathbb{P} \left( \int_0^T \Phi_s^2 ds > b \right) + 2 \exp \left\{ -\frac{a^2}{2b} \right\}.$$

Důkaz je uveden v [4].

Aplikací tvrzení na definici procesu cauchyovského v pravděpodobnosti získáváme

$$\begin{aligned} & \lim_{m, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t ({}^n \Phi_s - {}^m \Phi_s) dW_s \right| > \varepsilon \right) \leq \\ & \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \int_0^T ({}^n \Phi_s - {}^m \Phi_s)^2 ds > b \right) + 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2b} \right\} = 0. \end{aligned}$$

První sčítanec je nulový z (2.2) pro libovolné  $b > 0$ , druhý sčítanec lze učinit libovolně malý volbou dostatečně malého  $b$ .

**Definice 13.** Definujme  $\mathcal{L}^p(X)$  jako prostor všech  $\mu$ -měřitelných funkcí  $u$  na  $X$ , pro něž platí

$$\|u_p\| = \left( \int_X |u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pohybujeme se v úplném prostoru  $\mathcal{L}^2$ , tudíž zde každá cauchyovská posloupnost má limitu. Označme tuto limitu při konvergenci v pravděpodobnosti  $I_t$ . Posloupnost náhodných procesů  $\left\{ \int_0^t {}^n \Phi_s dW_s, t \in [0, T], n = 1, 2, \dots \right\}$  tedy konverguje ke spojitému náhodnému procesu  $I = \{I_t, t \in [0, T]\}$ . Tímto způsobem definujeme stochastický integrál, klademe

$$I_t = \int_0^t \Phi_s dW_s, \quad t \in [0, T].$$

Až na nerozlišitelnost je definice integrálu jednoznačná. Nezávisí rovněž na zvolené posloupnosti jednoduchých funkcí.

Shrňme vlastnosti stochastického integrálu pro obecné náhodné procesy:

1.  $\int_0^t \Phi_s dW_s$  je spojitou neanticipativní funkcí  $t$  na intervalu  $[0, T]$

$$2. \int_0^t (a\Phi_s + b\Psi_s) dW_s = a \int_0^t \Phi_s dW_s + b \int_0^t \Psi_s dW_s \text{ pro libovolné konstanty } a, b$$

$$3. \text{ Za podmínky } \int_0^T \Phi_s^2 ds < \infty \text{ platí: } \mathbb{E} \int_0^t \Phi_s dW_s = 0, \\ \mathbb{E} \left( \int_0^t \Phi_s dW_s \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^t \Phi_s^2 ds, \quad t \in [0, T]$$

4. Nechť trajektorie  $\Phi$  mají spojitou derivaci  $\Phi' = \{\Phi'_t, t \in [0, T]\}$ .  
Potom

$$\int_0^t \Phi_s dW_s = \Phi_t W_t - \int_0^t \Phi'_s W_s ds, \quad t \in [0, T]$$

## 2.4 Itôova formule

**Definice 14.** Řekneme, že proces  $X$  je *Itôův proces*, jestliže je ve tvaru

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t B_s dW_s, \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

kde  $X_0$  je  $\mathcal{F}_0$  měřitelná náhodná veličina,  $\{A_t\}, \{B_t\}$  jsou neanticipativní procesy splňující  $\int_0^T |A_s| ds < \infty, \int_0^T B_s^2 ds < \infty$  a  $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$  je Wienerův proces vzhledem k filtraci  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ . Pojmem *stochastický diferenciál Itôova procesu  $X$*  rozumíme výraz

$$dX_t = A_t dt + B_t dW_t, \quad t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Stochastický diferenciál (2.4) je pouze jiným zápisem pro integrální rovnici (2.3) a má následující vlastnosti:

1.  $d(X_t + Y_t) = dX_t + dY_t$
2.  $d(cX_t) = c dX_t$  pro libovolnou konstantu  $c$
3.  $d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$

Jak vidíme z definice, procesy mající stochastický diferenciál jsou neanticipativní. Uveďme ještě důležitá pravidla pro násobení diferenciálů, která budeme využívat v následujících kapitolách.

$$(dt)^2 = 0 \quad dt dW_t = 0 \quad (dW_t)^2 = dt \quad dW_t dW_s = 0, t \neq s \quad (2.5)$$

Nechť  $f(t, x)$  je funkce třídy  $\mathcal{C}^2$ , tedy funkce se spojitými derivacemi do druhého řádu. Označme

$$f_t(t, X_t) = f_t = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$$

$$f_x(t, X_t) = f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$$

$$f_{xx}(t, X_t) = f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(t, x).$$

Pak lze odvodit Itôovu formuli pro výpočet stochastického diferenciálu funkce  $f(t, x)$ . Důkaz následujícího tvrzení je uveden v [4].

**Tvrzení 3.** *Nechť  $X_t, t \geq 0$  je Itôův proces, pro který platí, že  $\int_0^t |A_s| ds$  a  $\int_0^t B_s^2 ds$  jsou konečné. Nechť  $f(t, x)$  je funkce třídy  $\mathcal{C}^2$ . Potom platí*

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t = \quad (2.6)$$

$$= f_t dt + f_x B_t dW_t + f_x A_t dt + \frac{1}{2}f_{xx} B_t^2 dt$$

## 2.5 Stochastické diferenciální rovnice

Krátce se ještě zaměříme na stochastické diferenciální rovnice, čili na rovnice tvaru

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (2.7)$$

s počáteční podmínkou  $X_{t_0} = X_0$ , kde  $W$  je Wienerův proces vzhledem k filtraci  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  a zobrazení  $\sigma, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jsou borelovsky měřitelné funkce splňující

$$\int_0^t (|b(s, X_s)| + \sigma^2(s, X_s))ds < \infty \quad \text{pro všechna } t \geq 0.$$

Úlohou pak bývá nalézt Itôův proces  $X$  splňující (2.7) s danou počáteční podmínkou. Procesu s tímto předpisem (2.7) se říká difúzní proces.

Příkladem stochastické diferenciální rovnice je geometrický Brownův pohyb vývoje ceny akcie

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

kterým se podrobněji budeme zabývat v následující kapitole.



## 2.6 Změna míry

V poslední části této kapitoly se budeme zabývat možností přechodu z tzv. skutečné pravděpodobnostní míry  $P$  na rizikově neutrální míru  $Q$ . Využívat budeme poznatků z [7].

**Tvrzení 4.** *Nechť  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravděpodobnostní prostor a nechť  $Z$  je nezáporná náhodná veličina s  $EZ = 1$ . Pro  $A \in \mathcal{F}$  definujme*

$$Q(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega).$$

*Potom  $Q$  je pravděpodobnostní míra. Navíc platí, že pokud  $X$  je nezáporná náhodná veličina, pak*

$$E^Q X = E[XZ].$$

*Pokud  $Z > 0$  skoro jistě, pak*

$$EY = E^Q \left[ \frac{Y}{Z} \right].$$

**Definice 15.** Míry  $P$  a  $Q$  jsou na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$  ekvivalentní, pokud

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Připomeňme větu z teorie míry, která ukazuje vztah mezi dvěma ekvivalentními mírami.

**Tvrzení 5. (Radon-Nikodym)** *Nechť  $P$  a  $Q$  jsou ekvivalentní míry na  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Potom existuje náhodná veličina  $Z > 0$  s.j. taková, že  $EZ = 1$ , pro kterou platí*

$$Q(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

**Definice 16.** Náhodná veličina  $Z$  z Radon-Nikodymovy věty se nazývá *Radon-Nikodymova derivace*  $Q$  podle  $P$ . Píšeme

$$Z = \frac{dQ}{dP}.$$

**Definice 17.** Mějme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  a filtraci  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T$ . Předpokládejme, že  $Z$  je náhodná veličina,  $EZ = 1$  a pravděpodobnostní míra  $Q$  je definovaná

$$Q(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Definujme *proces Radon-Nikodymovy derivace* vztahem

$$Z_t = E[Z | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Poznámka:* Proces Radon-Nikodymovy derivace je martingal.

Na závěr uveďme ještě Girsanovovu větu pro Wienerův proces.

**Tvrzení 6.** (*Girsanovova věta*) Nechť  $W_t, 0 \leq t \leq T$  je Wienerův proces vzhledem k filtraci  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T$ , na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Nechť  $\Theta_t, 0 \leq t \leq T$  je adaptovaný proces. Definujme

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \Theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_u^2 du\right\}$$

a

$$W_t^Q = W_t + \int_0^t \Theta_u du.$$

Předpokládejme dále, že

$$\mathbb{E} \int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2 du < \infty.$$

Položme  $Z = Z_T$ . Pak  $\mathbb{E}Z = 1$  a podle míry  $Q$  definované předpisem  $Z = \frac{dQ}{dP}$  je proces  $\{W_t^Q, 0 \leq t \leq T\}$  Wienerův proces.

# Kapitola 3

## Akciové opce

### 3.1 Akcie

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat akciemi, začneme teoretickým výkladem a ukážeme několik praktických příkladů s využitím poznatků z předchozí kapitoly.

*Akcie* jsou dle [2] obchodovatelné cenné papíry, s nimiž jsou spojena práva akcionáře jako společníka podílet se na řízení společnosti, na zisku společnosti, na likvidačním zůstatku při případném zániku společnosti a případně přednostně na nově emitovaných akciích. Akciové společnosti vytvářejí upisováním (emisí) akcií základní jmění.

S akciemi souvisí následující základní pojmy. *Nominální hodnota akcie* představuje podíl na majetku akciové společnosti vyplývající z vlastnictví akcie. Součet nominálních hodnot všech akcií je roven výši základního kapitálu. Nominální hodnota u akcií má pouze právní význam, u některých typů (hlavně v USA) nemusí být vůbec uvedena.

*Dividenda* je podíl na zisku společnosti vyplývající z vlastnictví akcie. Výplata dividend není předem zaručena.

*Tržní cena akcie* je cena, za kterou se akcie obchoduje na kapitálovém trhu vzhledem k momentálnímu stavu nabídky a poptávky.

#### 3.1.1 Vývoj ceny akcie

Předpokládejme, že vývoj ceny akcie je modelován geometrickým Brownovým pohybem, čili platí stochastická diferenciální rovnice (SDR)

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (3.1)$$

s počáteční podmínkou  $S(0) = S_0$ .

Nyní vyřešíme tuto rovnici,  $\alpha, \sigma, S_0$  berme jako konstanty. Uvažujme logaritmus ceny akcie, čili  $z = \log(S(t))$ . Použijeme Itôovu formuli (2.6) a pravidla pro diferenciály (2.5):

$$\begin{aligned} dz &= d\log(S(t)) = \frac{1}{S(t)}dS + \frac{1}{2}(dS(t))^2\left(-\frac{1}{S^2(t)}\right) = \\ &= \frac{1}{S(t)}(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2(t)}\right)\sigma^2 S^2(t)dt = \\ &= \alpha dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t) \end{aligned}$$

Po shrnutí tedy získáváme

$$dz = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t). \quad (3.2)$$

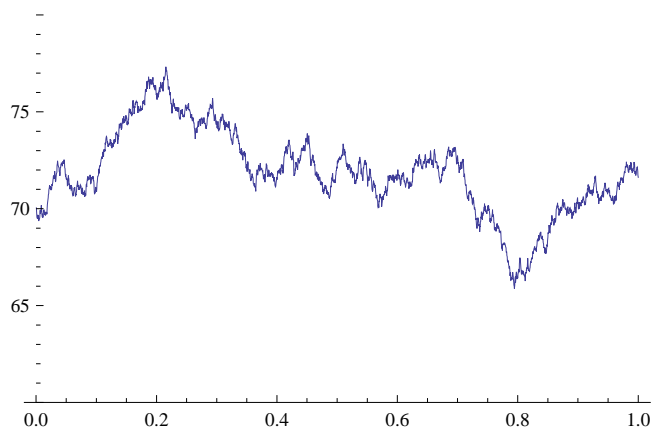
Výše uvedenou rovnici (3.2) můžeme převést na integrální tvar

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + t\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma \int_0^t dW(t) = z(0) + t\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \\ &+ \sigma(W(t) - W(0)) = \log(S(0)) + t\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma W(t) \end{aligned}$$

Aplikací exponenciální funkce na obě strany rovnosti získáme formuli pro model ceny akcie v integrálním tvaru

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}. \quad (3.3)$$

Z této formule je na obrázku 3.1 vytvořena simulace vývoje ceny akcie během jednoho roku, kde jsme zvolili  $S(0) = 70$ ,  $\alpha = 0.05$  a  $\sigma = 0.1$ . Kompletní programové řešení je uvedeno v příloze A.



Obrázek 3.1: simulace 1 akcie

Z formule (3.3) lze na první pohled vidět, že pokud  $t < \infty$  a  $S(0) > 0$ , cena akcie nikdy nedosáhne nuly,  $S(t) > 0$ . K dalším závěrům o vývoji ceny akcie můžeme dojít porovnáním mediánu a střední hodnoty  $S(t)$ . Z definice 8 v předchozí kapitole plyne, že  $W(t) \sim N(0, t)$ . Meze spolehlivosti pro  $S(t)$  jsou tedy

$$S(0) \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \pm \sigma\sqrt{t}u\left(1 - \frac{b}{2}\right)\right\}$$

s koeficientem spolehlivosti  $b$ , kde  $u(1 - \frac{b}{2})$  je kvantil rozdělení  $N(0, 1)$ . Pro určení mediánu  $S(t)$  hledáme takové  $m$ , pro které platí zároveň

$$P(S(t) \geq m) \geq \frac{1}{2}, \quad P(S(t) \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

Dosazením do první nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} & P\left[S(0) \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\} \geq m\right] = \\ &= P\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \geq \log\left(\frac{m}{S(0)}\right)\right] = \\ &= P\left[\frac{W(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{\log\left(\frac{m}{S(0)}\right) - \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right] = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{m}{S(0)}\right) - \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a odtud

$$\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{m}{S(0)}\right) - \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \leq \frac{1}{2},$$

kde  $\Phi$  je distribuční funkce rozdělení  $N(0, 1)$ . Stejným způsobem z druhé nerovnosti získáme

$$\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{m}{S(0)}\right) - \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \geq \frac{1}{2},$$

a proto platí rovnost

$$\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{m}{S(0)}\right) - \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2}.$$

S použitím faktu, že 50% kvantil  $N(0, 1)$  je nulový a platí  $u(b) = \Phi^{-1}(b)$ , máme

$$\left(\frac{\log\left(\frac{m}{S(0)}\right) - \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = u\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

čili  $\log(\frac{m}{S(0)}) = (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t$  a medián pro  $S(t)$  je

$$m = S(0) \exp\{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t\}. \quad (3.4)$$

Střední hodnotu  $S(t)$  odvodíme z tvaru (3.1), který upravíme do podoby

$$dS(t) - \alpha S(t)dt = \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0.$$

Použijme Itôovu formuli (2.6) na diskontovanou cenu akcie

$$\begin{aligned} d(e^{-\alpha t} S(t)) &= -\alpha e^{-\alpha t} S(t)dt + e^{-\alpha t} dS(t) + de^{-\alpha t} dS(t) = \\ &= -\alpha e^{-\alpha t} S(t)dt + \alpha e^{-\alpha t} S(t)dt + \sigma e^{-\alpha t} S(t)dW(t) + 0 \end{aligned}$$

a získáme

$$d(e^{-\alpha t} S(t)) = \sigma e^{-\alpha t} S(t)dW(t).$$

Převedením na integrální tvar dostaneme

$$e^{-\alpha t} S(t) - S(0) = \int_0^t \sigma e^{-\alpha s} S(s)dW(s).$$

Aplikujeme střední hodnotu na obě strany rovnosti za použití jejich známých vlastností a vlastností Wienerova procesu a získáme

$$e^{-\alpha t} ES(t) - S(0) = 0.$$

Nakonec získáváme tvar pro střední hodnotu  $S(t)$ , kterou porovnáme s vypočteným mediánem (3.4)

$$ES(t) = S(0) \exp\{\alpha t\} > S(0) \exp\{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t\}.$$

Vidíme, že medián je menší než střední hodnota ceny akcie, což nám dokazuje obrázek 3.2 níže. Červenou barvou je zobrazena střední hodnota vývoje těchto akcií a zelenou barvou medián. Černé křivky zobrazují meze spolehlivosti pro vývoj ceny akcie s koeficientem spolehlivosti 0.99. Následuje programové řešení v Mathematice. Chceme vytvořit 60 simulací cen akcie během 1 roku, kde počáteční cena akcie je 70, drift  $\alpha = 0.5$  a volatilita  $\sigma = 0.6$ . Proměnná *delSim* vyjadřuje, kolikrát se změní cena akcie během daného období.

```
Clear[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]];

S0 = 70; delSim = 2500; \[Alpha] = 0.5; \[Sigma] = 0.6;

Cena[S0_, delSim_, \[Alpha]_, \[Sigma]_] :=
  S0 Exp[(\[Alpha]/delSim - 1/2 (\[Sigma]/Sqrt[delSim])^2)*
    Range[delSim] + \[Sigma]/Sqrt[delSim]*
```

```

Rest[NestList[(# + RandomReal[NormalDistribution[0, 1]])&, 0,
delSim]]];

Graf = Table[
  ListPlot[
    Transpose[{Range[delSim]/delSim,
      Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]]}], Joined -> True ,
    Ticks -> Automatic, DisplayFunction -> Identity,
    PlotRange -> {0, 500}], {60}];

Graf1 = Plot[S0 Exp\[Alpha] t], {t, 0, 1}, PlotStyle -> Red,
  DisplayFunction -> Identity];

Spol[S0_, delSim_, t_, \[Alpha]_, \[Sigma]_, kvantil_] :=
  S0 Exp[(\[Alpha] - 1/2 \[Sigma]^2)*t + \[Sigma]*Sqrt[t]
    Quantile[NormalDistribution[0, 1], kvantil]];

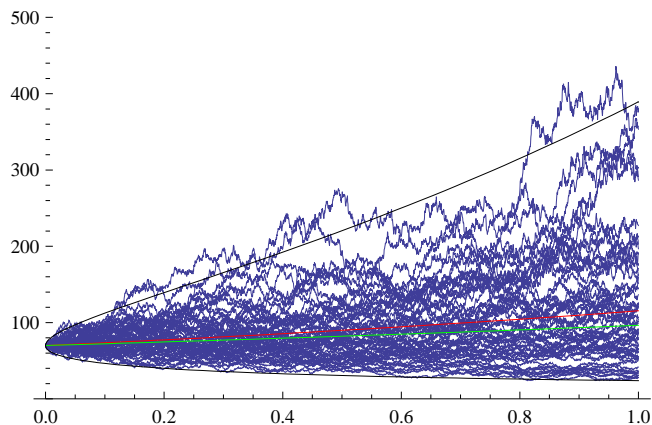
median =
  Plot[Spol[S0, delSim, t, \[Alpha], \[Sigma], 0.5],
    {t, 0, 1}, PlotStyle -> Green];

maximum =
  Plot[Spol[S0, delSim, t, \[Alpha], \[Sigma], 0.99],
    {t, 0, 1}, PlotStyle -> Black];

minimum =
  Plot[Spol[S0, delSim, t, \[Alpha], \[Sigma], 0.01],
    {t, 0, 1}, PlotStyle -> Black];

Show[Graf, Graf1, median, maximum, minimum,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]

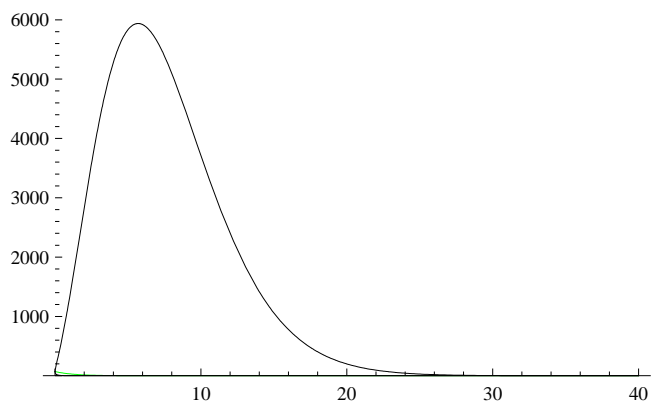
```



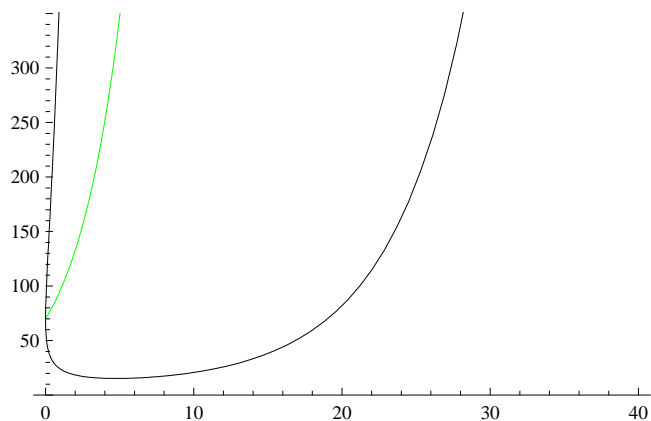
Obrázek 3.2: simulace 100 akcií

Předpokládejme nyní, že  $\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$ . Potom, pokud  $t \rightarrow \infty$ , se všechny konfidenční meze blíží k 0, jak vidíme na obrázku 3.3. Zvolme  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma = 1.6$ . Tím tedy znovu dospějeme k závěru, že pokud  $\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$ ,

cena akcie nikdy nedosáhne nuly, pouze se k nule blíží, čili  $S(t) \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow \infty$ . Na druhou stranu, pokud  $\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$ , například  $\alpha = 0.5$  a  $\sigma = 0.6$ , konfidenční meze porostou do nekonečna, jak ukazuje obrázek 3.4. Proto cena akcie poroste do nekonečna,  $S(t) \rightarrow \infty$  pro  $t \rightarrow \infty$ .



Obrázek 3.3: konfidenční meze 1



Obrázek 3.4: konfidenční meze 2

### 3.1.2 Cena akcie podle míry Q

Předpokládejme standardní model ceny akcie modelovaný zobecněným geometrickým Brownovým pohybem

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t) \quad 0 \leq t \leq T,$$

kde  $\alpha(t)$  a  $\sigma(t)$  jsou adaptované procesy,  $\sigma(t) > 0$  s.j.  $\forall t$ .

Dále předpokládejme adaptovaný proces  $r(t)$ , nazývaný v [7] *okamžitý úrok*. Definujme diskontní proces jako

$$dD(t) = -r(t)D(t)dt, \tag{3.5}$$



ekvivalentně

$$D(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}.$$

Chceme, aby diskontovaná cena akcie byla martingal. Vyjádříme diferenciál pomocí Itôovy formule (2.6), výrazu (3.5) a pravidel pro diferenciály (2.5)

$$\begin{aligned} d(D(t)S(t)) &= S(t)dD(t) + D(t)dS(t) + dS(t)dD(t) = \\ &= -r(t)S(t)D(t)dt + D(t)dS(t) + 0 = \\ &= -r(t)S(t)D(t)dt + \alpha(t)S(t)D(t)dt + \sigma(t)S(t)D(t)dW(t) = \\ &= \sigma(t)S(t)D(t)(\vartheta(t)dt + dW(t)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde  $\vartheta(t) = \frac{\alpha(t)-r(t)}{\sigma(t)}$  nazýváme *tržní cena rizika*. Použijme nyní Girsanovovu větu 6 pro  $\vartheta(t)$  a dostaneme

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)S(t)D(t)dW(t)^Q, \tag{3.7}$$

$W(t)^Q = W(t) + \int_0^t \theta_u du$ . Diskontovaná cena akcie je martingal, protože neobsahuje člen s  $dt$ .  $Q$  je rizikově neutrální míra, která je ekvivalentní původní míře.

Podíváme se ještě, jak vypadá příslušná stochastická diferenciální rovnice. Spojením (3.7) a (3.6) máme

$$\sigma(t)S(t)D(t)dW(t)^Q = -r(t)S(t)D(t)dt + D(t)dS(t)$$

a tedy

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)^Q. \tag{3.8}$$

Jinými slovy, při rizikově neutrální míře  $Q$  mají všechna aktiva stejný očekávaný výnos, který je roven bezrizikové úrokové míře.

## 3.2 Akciové opce

Opce obecně jsou jedním z druhů finančních derivátů. To jsou takové nástroje, jejichž hodnota závisí na hodnotě tzv. podkladových aktiv. Na opčních burzách se obchoduje s opcemi standardizovaného typu, ve větší míře pak na mimoburzovních trzích (OTC) s opcemi konstruovanými individuálně. Pokladovým aktivem u akciových opcí je právě akcie. Nejprve si uvedeme základní druhy opcí a jejich charakteristiky.

Opce je termínový kontrakt probíhající mezi dvěma stranami. Na jedné straně je držitel opce (kupující) a na straně druhé upisovatel opce (prodávající). Rozlišujeme dva základní typy opcí, a to call opce a put opce.

*Call opce* je opce, jejíž držitel má právo koupit a upisovatel povinnost prodat podkladové aktivum za předem sjednaných podmínek.

*Put opce* je opce, jejíž držitel má právo prodat a upisovatel povinnost koupit podkladové aktivum za předem sjednaných podmínek, které obsahují:

1. *realizační cenu* (označme  $k$ ) neboli cenu, za kterou může držitel call opce koupit příslušné podkladové aktivum. V případě put opce pak realizační cena vyjadřuje cenu, za kterou držitel opce může podkladové aktivum prodat.
2. *objem opce* neboli množství podkladového aktiva v opčním kontraktu.
3. *datum splatnosti opce* (označme  $T$ ) neboli datum uplatnění opce. Opci lze uplatnit buď přesně k datu splatnosti (tzv. *evropská opce*) nebo ji lze uplatnit kdykoliv do data splatnosti (tzv. *americká opce*). Na burzovním trhu s opcemi pak převládají americké opce.

Jak již bylo zmíněno, u evropské call (resp. put) opce má držitel opce právo se v čase splatnosti  $T$  rozhodnout, zda od upisovatele akcii koupí (resp. ji prodá) a tím opci uplatní. Rozhoduje se na základě porovnání realizační ceny opce s aktuální cenou podkladového aktiva - akcie, označme ji  $S$ . Říkáme, že opce je

- *na penězích* (at the money), je-li realizační cena rovna ceně podkladového aktiva, tj.

$$k = S$$

- *v penězích* (in the money), je-li realizační cena pro držitele opce výhodnější než cena podkladového aktiva, tj. pro call opci

$$k < S \quad (\text{resp. } k > S \text{ pro put})$$

- *mimo peníze* (out of the money), je-li realizační cena pro držitele opce méně výhodná než cena podkladového aktiva, tj. u call opce

$$k > S \quad (\text{resp. } k < S \text{ u put}).$$

Zisk držitele call opce a tedy zároveň ztráta upisovatele call opce je

$$Z = \max(S - k, 0) - c,$$

kde  $c$  je opční prémie, čili cena call opce. Stejným způsobem určíme zisk držitele opce put a zároveň ztrátu upisovatele put opce, kde  $p$  je cena put opce (opční prémie)

$$Z = \max(k - S, 0) - p.$$

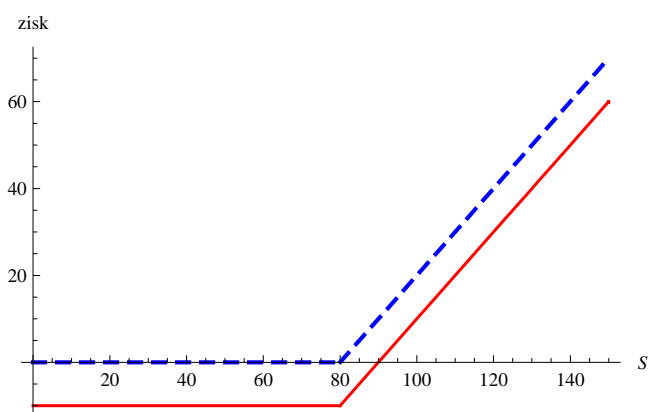
Porovnání výplatní funkce put a call opce a zároveň zisk nebo ztráta držitele (upisovatele) opcí jsou vykreslené v následujících grafech. Předpokládejme nejprve, že investor nakoupil call opci na akcii za cenu  $c = 10$  s realizační cenou  $k = 80$ . Na obrázku 3.5 je červenou plnou čarou znázorněn zisk držitele opce (dlouhá pozice), značíme *ziskcall*, čárkovanou modrou čarou pak výplatní funkce této call opce, *vyplatacall*. Upisovatel této call opce (krátká pozice) pak stejným způsobem utrží ztrátu, jak vidíme na obrázku 3.6. Programové řešení je pro svou jednoduchost uváděno pouze pro držitele opce.

```
k = 80; c = 10;

vyplatacall =
  Plot[Max[S - k, 0], {S, 0, 150}, AxesLabel -> {S, zisk},
    PlotStyle -> {Thickness[0.007], Blue, Dashing[{0.02, 0.02}]},
    PlotRange -> All, DisplayFunction -> Identity];

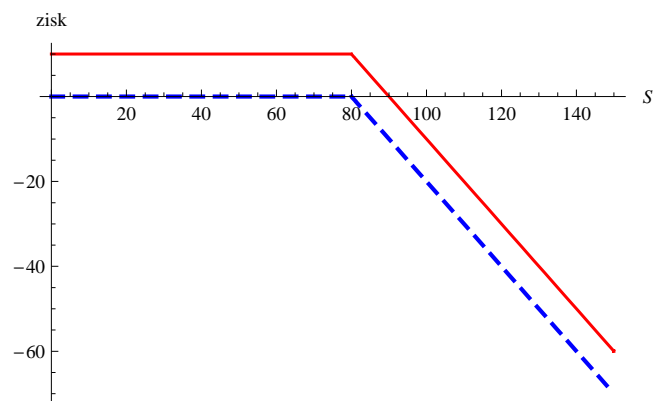
ziskcall =
  Plot[Max[S - k, 0] - c, {S, 0, 150}, AxesLabel -> {S, zisk},
    PlotStyle -> {Thickness[0.005], Red}, PlotRange -> All,
    DisplayFunction -> Identity];

DrzitelCall =
  Show[vyplatacall, ziskcall, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Obrázek 3.5: Výplatní funkce a zisk držitele call opce

Nyní předpokládejme, že investor koupí put opci na akcii za cenu  $p = 15$  s realizační cenou  $k = 80$ . Stejným způsobem pak na obrázku 3.7 můžeme



Obrázek 3.6: Výplatní funkce a zisk upisovatele call opce

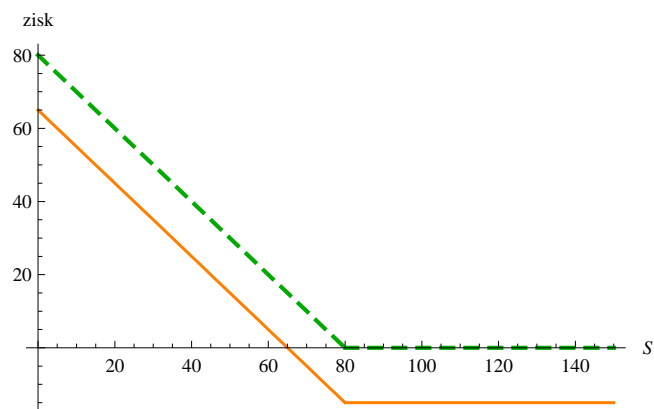
oranžovou čarou vidět zisk držitele této opce (dlouhá pozice), čárkovaná zelená čára pak zobrazuje výplatní funkci put opce. Obrázek 3.8 ukazuje tyto funkce z pohledu upisovatele put opce (krátká pozice).

$k = 80; p = 15;$

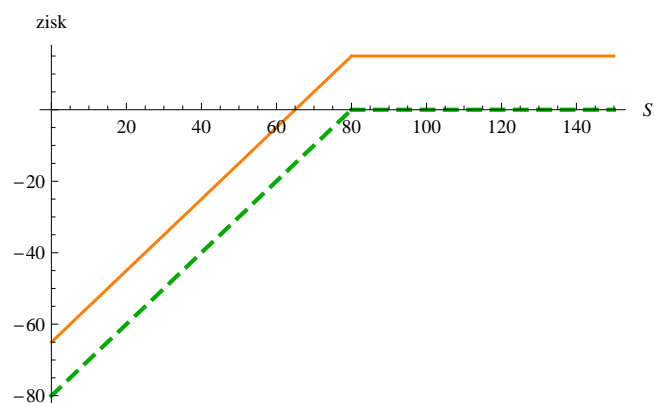
```
vyplataput =
  Plot[Max[k - S, 0], {S, 0, 150}, AxesLabel -> {S, zisk},
    PlotStyle -> {Thickness[0.007], Darker[Green]},
    Dashing[{0.02, 0.02}], PlotRange -> All,
    DisplayFunction -> Identity];

ziskput =
  Plot[Max[k - S, 0] - p, {S, 0, 150}, AxesLabel -> {S, zisk},
    PlotStyle -> {Thickness[0.005], Orange}, PlotRange -> All,
    DisplayFunction -> Identity];

DrzitelPut =
  Show[vyplataput, ziskput, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Obrázek 3.7: Výplatní funkce a zisk držitele put opce



Obrázek 3.8: Výplatní funkce a zisk upisovatele put opce

### 3.2.1 Meze opční prémie

Ještě se krátce zaměříme na meze pro opční prémie put a call opce, v našem značení  $c$  a  $p$ .

1.  $c \leq S(0)$
2.  $p \leq ke^{-rT}$
3.  $c \geq S(0) - ke^{-rT}$
4.  $p \geq ke^{-rT} - S(0)$

Na ukázkou dokážeme body 2 a 3. Pro důkaz nerovnosti  $p \leq ke^{-rT}$  sestavme portfolio skládající se z prodeje jedné put opce na akcii a vkladu  $ke^{-rT}$  na účet s úročením sazbou  $r$ . V čase  $t = 0$  tedy máme hodnotu portfolia  $\Pi(0) = ke^{-rT} - p$ . V čase splatnosti  $t = T$  se hodnota portfolia změní na

$$\Pi(T) = k - \max(k - S(T), 0).$$

Rozeberme možnosti, které mohou nastat. Pokud  $S(T) \leq k$ , pak  $\Pi(T) = k - k + S(T) = S(T) \geq 0$ . Jestliže  $S(T) > k$ , potom  $\Pi(T) = k - 0 = k \geq 0$ . Tedy vidíme, že portfolio v čase  $T$  má vždy nezápornou hodnotu. Aby nedošlo k arbitráži, musí mít portfolio nezápornou hodnotu i v čase 0, tudíž  $\Pi(0) = ke^{-rT} - p \geq 0$ .

K důkazu bodu 3 sestavme portfolio skládající se z nákupu jedné call opce, prodeje jedné akcie a vkladu  $ke^{-rT}$  na účet s úročením sazbou  $r$ . V čase  $t = 0$  je tedy hodnota portfolia rovna  $\Pi(0) = c - S(0) + ke^{-rT}$ . V čase splatnosti  $t = T$  pak získáváme

$$\Pi(T) = \max(S(T) - k, 0) - S(T) + k.$$

Stejně jako v předchozím případě, jestliže  $S(T) \leq k$ , dostaneme  $\Pi(T) = 0 - S(T) + k \geq 0$ . Pokud naopak  $S(T) > k$ , pak  $\Pi(T) = S(T) - k - S(T) +$

$k = 0$ . Hodnota portfolia v čase  $T$  je tedy vždy nezáporná, proto musí mít nezápornou hodnotu i v čase 0, jinak by došlo k arbitráži (definice v kapitole 4). Celkově tedy  $c \geq S(0) - ke^{-rT}$ .

Důkazy bodu 1 a 4 jsou založeny na stejném principu, důležité je pouze správně nadefinovat počáteční portfolio.

### 3.2.2 Put-call parita

Put-call parita určuje vztah pro evropské opce, a to mezi cenou opce put a cenou opce call. Předpokládejme portfolio složené z nákupu jedné akcie, nákup jedné put opce na tuto akcii a prodej jedné call opce na tuto akcii. Obě opce mají stejnou realizační cenu  $k$ , jedná se o opce evropského typu se splatností v čase  $T$ .

Hodnota portfolia v čase  $t < T$  je

$$\Pi(t) = S(t) + p(t) - c(t). \quad (3.9)$$

V okamžiku splatnosti se hodnota portfolia změní na

$$\Pi(T) = S(T) + \max(0, k - S(T)) - \max(0, S(T) - k).$$

V případě, že nyní  $S(T) \leq k$ , dostaneme  $\Pi(T) = S(T) + k - S(T) - 0 = k$ . Podobně pro  $S(T) > k$  dostaneme  $\Pi(T) = S(T) + 0 - S(T) + k = k$ .

Jak vidíme, v okamžiku splatnosti je hodnota takového portfolia vždy rovna realizační ceně  $k$ , jedná se o bezrizikové portfolio. Hodnota portfolia v čase  $t < T$ , uvažujeme-li spojitě úročení, je rovna

$$\Pi(t) = ke^{-r(T-t)},$$

kde  $r$  je bezriziková úroková míra.

Dosazením do (3.9) získáme vzorec pro put-call paritu

$$S(t) + p(t) = ke^{-r(T-t)} + c(t), \quad t \leq T.$$

Tento vzorec nelze aplikovat na americké opce.

# Kapitola 4

## Blackův-Scholesův model

V této kapitole se budeme podrobně zabývat Blackovým-Scholesovým modelem, nejznámějším modelem pro oceňování akciových opcí. V průběhu této kapitoly budeme teorii aplikovat do softwaru Mathematica a interpretovat výsledky.

**Definice 18.** *Arbitráž* je obchodní strategie, která dovoluje investorovi bez rizika realizovat zisk, čili strategie s nulovou pravděpodobností ztráty peněz a kladnou pravděpodobností jejich zisku.

Předtím, než začneme s odvozováním, budeme předpokládat, že

- na trhu neexistují žádné transakční náklady a daně
- neexistuje rozdíl mezi nabídkovou a poptávkovou cenou aktiv
- všechna aktiva jsou perfektně dělitelná a mohou být obchodovatelná v jakémkoliv množství
- připouštíme prodeje nakrátko
- existuje právě jedna konstantní bezriziková úroková míra a investoři si mohou půjčit nebo mohou půjčit jakékoliv množství za tuto úrokovou míru
- na trhu neexistuje příležitost pro arbitráž
- všechny informace jsou dostupné pro všechny investory ve stejný čas.

Trh s těmito vlastnostmi bývá označován jako eficientní trh.

## 4.1 Binomický model

Nejprve ukážeme binomický model oceňování pro určení ceny akciové opce. Vzhledem k tomu, že se budeme pohybovat v diskrétním čase, je nutné znovu uvést některé definice a pojmy pro diskrétní čas.

Předpokládejme následující model:

$$S_0 = 1$$

$$S_1(H) = uS_0, \quad S_1(T) = dS_0$$

Z předchozí kapitoly si připomeňme, že  $S_t$  je cena akcie v čase  $t$ . Označení  $H, T$  je převzato z anglického Heads (cena akcie vzroste), Tails (cena akcie klesne). Veličiny  $u, d$  jsou známé konstanty. Označme  $p$  pravděpodobnost zisku a  $q = 1 - p$  pravděpodobnost ztráty,  $r$  je bezriziková úroková míra, čili 1 Kč investována na trhu v čase 0 by přinesla výnos  $1 + r$  v čase 1. Aby nedošlo k arbitráži, musí platit následující pravidlo

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Mějme call opci vyplácející  $V(H) = uS_0 - K$  a  $V(T) = dS_0 - K = 0$ . Naším cílem je určit správnou cenu opce v čase 0, v tomto případě 1 období před její splatností. K tomu využijeme replikaci portfolia.

**Definice 19.** *Replikační portfolio* je takové portfolio, které po úvodním pořízení můžeme upravovat tak, aby k datu vypořádání dalo hodnotu výplatní funkce. Na konci období je hodnota portfolia rovna výnosu z opce.

V čase 0, tedy na počátku mějme jmění  $X_0$ , nakoupíme  $\Delta_0$  akcií a k dispozici máme peníze v hodnotě  $X_0 - \Delta_0 S_0$ . V čase 1 pak hodnota portfolia činí

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0). \quad (4.1)$$

Chceme najít  $X_0$  (cenu opce v čase 0) a  $\Delta_0$  (počet akcií) tak, aby byla splněna definice replikačního portfolia, čili

$$X_1(H) = V(H) \quad \text{a} \quad X_1(T) = V(T).$$

Úpravou výrazu (4.1) a dosazením do těchto rovností získáme 2 rovnice o dvou neznámých

$$X_0 + \Delta_0 \left( \frac{1}{1+r} S_1(H) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(H)$$

$$X_0 + \Delta_0 \left( \frac{1}{1+r} S_1(T) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(T).$$



Vynásobením první rovnice číslem  $\tilde{p}$  a druhé rovnice číslem  $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$  a sečtením obou rovnic dostaneme

$$X_0 + \Delta_0 \left( \frac{1}{1+r} (\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)).$$

Zvolme  $\tilde{p}$  tak, aby platilo

$$S_0 = \frac{1}{1+r} (\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)). \quad (4.2)$$

Potom jednoduchým dosazením dostáváme naši hledanou cenu opce v čase 0

$$X_0 = \frac{1}{1+r} (\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)).$$

Dále určíme  $\tilde{p}$  a  $\tilde{q}$ , nazývané rizikově neutrální pravděpodobnosti. Dosadíme do (4.2), upravme

$$S_0 = \frac{1}{1+r} (\tilde{p}uS_0 + \tilde{q}dS_0) = \frac{1}{1+r} (\tilde{p}uS_0 + dS_0 - \tilde{p}dS_0)$$

a odtud získáme

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

Zbývá vyřešit  $\Delta_0$ . Do rovnice (4.1) dosadíme  $X_0$  a použijeme (4.2),

$$\begin{aligned} V_1(H) &= (1+r)X_0 + \Delta_0(S_1(H) - (1+r)S_0) = \\ &= (\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)) + \Delta_0(S_1(H) - (\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T))) = \\ &= ((1-\tilde{q})V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)) + \Delta_0(S_1(H) - (1-\tilde{q})S_1(H) - \\ &\quad - \tilde{q}S_1(T)) \end{aligned}$$

odkud

$$\Delta_0 \tilde{q} (S_1(H) - S_1(T)) = \tilde{q} (V_1(H) - V_1(T)).$$

Dostáváme tzv.  $\Delta$ -hedging formuli

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}.$$

**Definice 20.** *Delta*  $\Delta$  je matematický nástroj, který vyjadřuje závislost změny ceny finančního instrumentu na změnách v ceně podkladového aktiva. Matematicky lze  $\Delta$  vyjádřit jako

$$\frac{\partial V}{\partial S},$$

kde  $V$  je cena finančního instrumentu a  $S$  je cena podkladového aktiva.  $\Delta$  – *hedging* je finanční proces zaměřený na portfolio aktiv (např. opcí) vedoucí k tomu, aby delta portfolia, tedy závislost na změnách v ceně podkladových aktiv, byla nula.

Uveďme nyní zobecnění pro  $n$ -krokový model, přitom zachováme značení

$$S_{n+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n H) = u S_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

$$S_{n+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n T) = d S_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Při stejných rizikově neutrálních pravděpodobnostech  $\tilde{p}, \tilde{q}$  a derivátu vyplácejícím  $V_n(S_n)$  dostáváme formuli pro  $\Delta$ -hedging a cenu opce v čase 0

$$\Delta_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n T)}$$

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}^Q V_n(S_n) = \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tilde{p}^{(k)} \tilde{q}^{(n-k)} V_n(H, \dots, H, T, \dots, T). \end{aligned}$$

Výraz  $V_n(H, \dots, H, T, \dots, T)$  značí, že opce  $k$  krát vydělala,  $n - k$  krát prodělala. Pohybujeme se v prostoru s rizikově neutrální mírou  $Q$ .

**Definice 21.** Mějme binomický model. Nechť  $M_0, M_1, \dots, M_n$  je adaptovaný stochastický proces, čili posloupnost měřitelných náhodných veličin vůči  $\sigma$ -algebře  $\sigma(S_1, S_2, \dots, S_n)$ , tj.  $M_n \in \sigma(S_1, S_2, \dots, S_n)$ . Pokud podmíněná střední hodnota splňuje  $E_n[M_{n+1}] = M_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ , nazývá se tento proces *martingal*.

**Definice 22.** Nechť  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}$  je adaptovaný proces,  $X_0 \in \mathbb{R}$ . Definujme  $X_1, X_2, \dots, X_N$  rekurzivně

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n).$$

Posloupnost  $X_1, X_2, \dots, X_N$  nazýváme *samofinancující portfolio*.

Samofinancující portfolio je portfolio, u něhož změna ceny je realizovatelná změnou cen jeho složek tak, aby nebylo nutné měnit složení portfolio. V našem jednokrokovém modelu je příkladem výraz (4.1).

**Tvrzení 7.** Mějme binomický model s  $N$  kroky, platí  $0 < d < 1 + r < u$ . Nechť rizikově neutrální pravděpodobnosti jsou dány předpisem

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

Potom, podle rizikově neutrální míry  $Q$ , diskontovaná cena akcie je *martingal*.

Důkaz: Chceme dokázat rovnost z definice 21, uijeme vlastností podmíněné střední hodnoty a pohyb ceny akcie v binomickém modelu, čili  $S_{n+1} = uS_n$  s pravděpodobností  $\tilde{p}$  a  $S_{n+1} = dS_n$  s pravděpodobností  $\tilde{q}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n^Q \left[ \frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] &= \mathbb{E}_n^Q \left[ \frac{S_n}{(1+r)^{n+1}} \frac{S_{n+1}}{S_n} \right] = \\ &= \frac{S_n}{(1+r)} \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_n^Q \left[ \frac{S_{n+1}}{S_n} \right] = \frac{S_n}{(1+r)^n} \frac{1}{1+r} \frac{uS_n\tilde{p} + dS_n\tilde{q}}{S_n} = \frac{S_n}{(1+r)^n} \end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme dosadili za rizikově neutrální pravděpodobnosti

$$u\tilde{p} + d\tilde{q} = u \frac{1+r-d}{u-d} + d \frac{u-1-r}{u-d} = \frac{(u-d) + r(u-d)}{u-d} = 1+r. \quad \square$$

**Tvrzení 8.** *Diskontované samofinancující portfolio je martingal podle rizikově neutrální míry  $Q$ .*

Důkaz: Chceme dokázat rovnost z definice 21, uijeme definice 22, vlastností podmíněné střední hodnoty a tvrzení 7.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n^Q \left[ \frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] &= \mathbb{E}_n^Q \left[ \frac{\Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n)}{(1+r)^{n+1}} \right] = \\ &= \Delta_n \mathbb{E}_n^Q \left[ \frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} = \Delta_n \frac{S_n}{(1+r)^n} + \frac{X_n}{(1+r)^n} - \\ &\quad - \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^n} = \frac{X_n}{(1+r)^n}. \quad \square \end{aligned}$$

Důsledkem posledního tvrzení je, že žádný obchodní systém nemůže v průměru (ve střední hodnotě) vydělat při rizikově neutrální míře  $Q$  více, než úrok  $r$ . Jinými slovy, pokud existuje rizikově neutrální míra  $Q$ , nemůže v modelu existovat arbitráž. Pokud by zde existovala arbitráž, diskontovaná hodnota samofinancujícího portfolio by nebyla martingal.

## 4.2 Blackova-Scholesova-Mertonova rovnice

Nyní budeme odvozovat Blackovu-Scholesovu-Mertonovu parciální diferenciální rovnici, která bude vést ke známé Blackově-Scholesově formuli pro určení ceny opce.

Předpokládejme na úvod, že investor v čase  $t$  vlastní portfolio o hodnotě  $X(t)$ . Investor investuje peníze s úrokem  $r$  a také do akcie, která je modelována geometrickým Brownovým pohybem (3.1)

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \quad W_t \in \mathcal{F}_t. \quad (4.3)$$

V každém čase  $t$  má investor  $\Delta(t)$  akcií, kde  $\Delta(t) \in \sigma(W_t)$ , tj. investor nemůže "vidět do budoucnosti". Portfolio se skládá z evropské put opce, akcií a peněz, které má investor v daném čase na účtu (cash). Předpokládejme dále, že opce vyplácí v den splatnosti  $T$  částku  $\max(0, k - S_T)$ , kde  $k$  je v našem značení realizační cena opce. V kapitole 2 jsme uvedli, že cena akcie je markovský proces, tedy cena opce v čase  $t$  bude pouze funkcí času a ceny akcie  $(t, S(t))$  a budeme ji značit  $p(t, S(t))$ . Stejně tak, množství akcií v dlouhé pozici je  $-\Delta(t, S(t)) > 0$  a hodnota těchto akcií pak  $-\Delta(t, S(t))S(t) > 0$ . Uvažujeme akcie nevyplácející dividendy. Hotovost (cash) na účtě označme jako  $C(t)$ .

Celková hodnota portfolia je rovna

$$X(t) = p(t, S(t)) - \Delta(t, S(t))S(t) + C(t). \quad (4.4)$$

Předpokládejme, že pro  $C(t)$  platí

$$dC(t) = r(t)C(t)dt + S(t+dt)d\Delta(t), \quad (4.5)$$

neboli změna hodnoty peněz na účtě je způsobena úročením zůstatku bezrizikovou úrokovou mírou a náklady na nákup či prodej dalších akcií, kde  $d\Delta(t) = \Delta(t+dt) - \Delta(t)$  v čase  $t+dt$ .

Spočítáme diferenciál ceny opce, použijeme Itôovu formuli (2.6), dolní indexy vyjadřují derivaci podle dané proměnné

$$\begin{aligned} dp(t, S(t)) &= p_t(t, S(t))dt + p_x(t, S(t))dS(t) + \\ &+ \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))dS(t)dS(t) = p_t(t, S(t))dt + \\ &+ p_x(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW_t)^2 = \\ &= p_t(t, S(t))dt + p_x(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Nyní odvodíme diferenciál hodnoty celkového portfolia. S využitím vlastností stochastického diferenciálu uvedených v kapitole 2.4. lze psát

$$\begin{aligned} dX(t) &= dp(t, S(t)) - d(\Delta(t, S(t))S(t)) + dC(t) = \\ &= dp(t, S(t)) - (\Delta(t, S(t))dS(t) + S(t)d\Delta(t, S(t)) + dS(t)d\Delta(t, S(t))) + \\ &+ dC(t) = dp(t, S(t)) - \Delta(t, S(t))dS(t) - S(t+dt)d\Delta(t, S(t)) + r(t)C(t)dt + \\ &+ S(t+dt)d(\Delta(t, S(t))) = dp(t, S(t)) - \Delta(t, S(t))dS(t) + r(t)C(t)dt. \end{aligned}$$

Dosazením diferenciálu ceny opce do poslední rovnosti získáváme

$$dX(t) = p_t(t, S(t))dt + p_x(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S(t)^2 dt -$$

$$-\Delta(t, S(t))dS(t) + r(t)C(t)dt.$$

Nyní se budeme snažit z portfolia vyloučit náhodný člen, a to nejprve použitím  $\Delta$ -hedging strategie v souladu s definicí 20, proto

$$\Delta(t, S(t)) = \frac{\partial p(t, S(t))}{\partial S(t)} = p_x(t, S(t)). \quad (4.6)$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} dX(t) &= p_t(t, S(t))dt + \Delta(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S(t)^2 dt - \\ &\quad - \Delta(t, S(t))dS(t) + r(t)C(t)dt = \\ &= p_t(t, S(t))dt + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S(t)^2 dt + r(t)C(t)dt. \end{aligned}$$

V tomto vztahu již není člen  $dS(t)$  obsahující podle (4.3) přírůstek Wienerova procesu  $dW$ , tudíž se portfolio chová deterministicky (bezrizikově) a k jeho zhodnocování lze použít bezrizikovou úrokovou míru

$$dX(t) = r(t)X(t)dt.$$

Porovnáním získáme

$$p_t(t, S(t))dt + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S(t)^2 dt + r(t)C(t)dt = r(t)X(t)dt$$

a dosazením (4.4) do této rovnice a použitím (4.6) konečně dostaneme

$$\begin{aligned} p_t(t, S(t))dt + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S(t)^2 dt &= r(t)p(t, S(t))dt - \\ &\quad - r(t)p_x(t, S(t))S(t)dt \end{aligned}$$

Hledáme tedy spojitou funkci  $p(t, x)$  která je řešením Blackovy-Scholesovy-Mertonovy parciální diferenciální rovnice

$$p_t(t, x) + rxp_x(t, x) + \frac{1}{2}p_{xx}(t, x)x^2\sigma^2 = rp(t, x), \quad (4.7)$$

pro všechna  $t \in [0, T]$ ,  $x \geq 0$  a s okrajovou podmínkou

$$p(T, x) = \max(0, k - x).$$

Podobně bychom postupovali při určení ceny call opce, dostali bychom stejnou parciální diferenciální rovnici, s okrajovou podmínkou  $c(T, x) = \max(0, x - k)$ .

## 4.2.1 Implementace put opce

V této části budeme výše uvedenou teorii aplikovat do programu Mathematica, nejprve pro put opci.

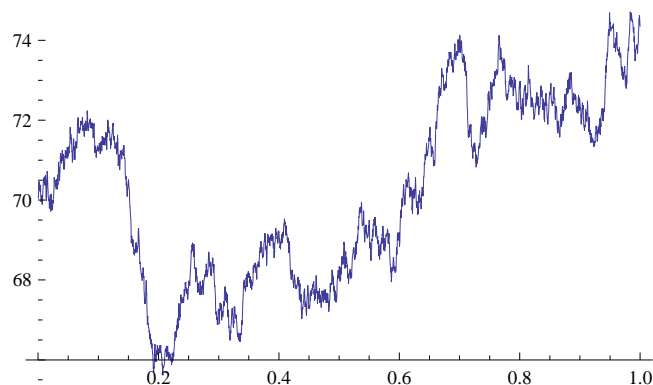
V programu vynulujeme všechny proměnné, které budeme v této části používat, a nadefinujeme vývoj jedné ceny akcie s počáteční hodnotou  $S(0) = 70$ , driftem  $\alpha = 0.05$ , volatilitou  $\sigma = 0.1$ . Sledujeme vývoj během jednoho roku, kdy cena akcie se změní 2500 krát, což vyjadřuje proměnná  $delSim$ . Pro vývoj této ceny akcie, zachycené na obrázku 4.1, používáme vzorec (3.3).

```
Clear[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma], T, r, k, cash];

S0 = 70; delSim = 2500; \[Alpha] = 0.05; \[Sigma] = 0.1;

Cena[S0_, delSim_, \[Alpha]_, \[Sigma]_] :=
  S0 Exp[(\[Alpha]/delSim - 1/2 (\[Sigma]/Sqrt[delSim])^2)*
    Range[delSim] + \[Sigma]/Sqrt[delSim]*
    Rest[NestList[(# + RandomReal[NormalDistribution[0, 1]]) &, 0,
    delSim]]];

Graf = ListPlot[
  Transpose[{Range[delSim]/delSim,
    Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]]}],
  Joined -> True, Ticks -> Automatic, PlotRange -> All,
  DisplayFunction -> Identity]
```



Obrázek 4.1: Vývoj ceny akcie

Naším cílem je ukázat, jak vypadá portfolio  $X(t)$  popsané vzorcem (4.4). Abychom mohli zobrazit člen  $p(t, S(t))$ , budeme potřebovat Blackovu-Scholesovu formuli, popsanou v kapitole 4.3. Uvažujme čas splatnosti opce  $T = 1$  rok, bezrizikovou úrokovou míru  $r = 0.05$  a realizační cenu opce  $k = 70$ . Pro put opci tuto formuli vyjádříme proměnnou  $put$ .

```

T = 1; r = 0.05; k = 70;

\Phi[x_] := CDF[NormalDistribution[0, 1], x];

put[t_, S_, T_, k_, r_, \Sigma_] :=
Module[{d1, d2},
  d1 = (Log[S/k] + (r + \Sigma^2/2) (T - t))/(\Sigma Sqrt[
    T - t]);
  d2 = (Log[S/k] + (r - \Sigma^2/2) (T - t))/(\Sigma Sqrt[
    T - t]);
  k Exp[-r (T - t)]*\Phi[-d2] - S*\Phi[-d1]]

```

Můžeme tedy vyjádřit člen  $p(t, S(t))$ , to jest cenu opce v čase  $t$ , který označme jako *CenaPutOpce*. Proměnná *CenaPut* hlídá, zda se nacházíme v čase před splatností, kde použijeme na výpočet opce Blackovu-Scholesovu formuli, či jsme již v čase splatnosti, a tedy opce bude mít hodnotu výplatní funkce  $\max(k - S, 0)$ . Vývoj ceny opce je uveden na obrázku 4.2.

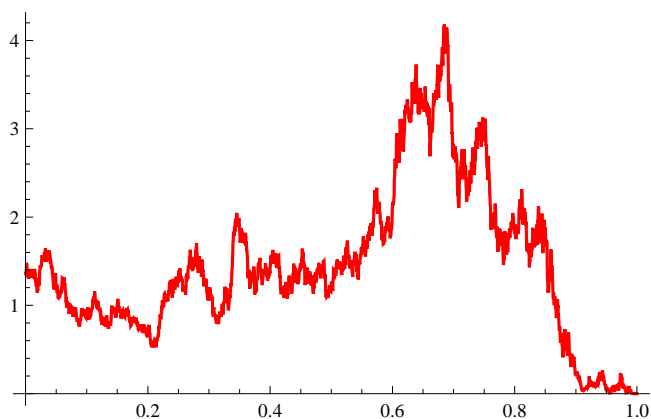
```

CenaPut[{t_, S_}] :=
  If[t < T, put[t, S, T, k, r, \Sigma], Max[k - S, 0]]

CenaPutOpce =
  Map[CenaPut,
    Transpose[{Range[delSim]/delSim,
      Cena[S0, delSim, \Alpha, \Sigma]}]];

GrafCenaPutOpce =
  ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, CenaPutOpce}],
    Joined -> True, DisplayFunction -> Identity,
    PlotStyle -> {Red, Thickness[0.005]}, PlotRange -> All]

```



Obrázek 4.2: Vývoj ceny opce

Dalším členem portfolia  $X(t)$  je hodnota akcií  $-\Delta(t, S(t))S(t)$ . Jak víme z definice 20, *Delta* vyjadřuje závislost změny ceny opce na změnách

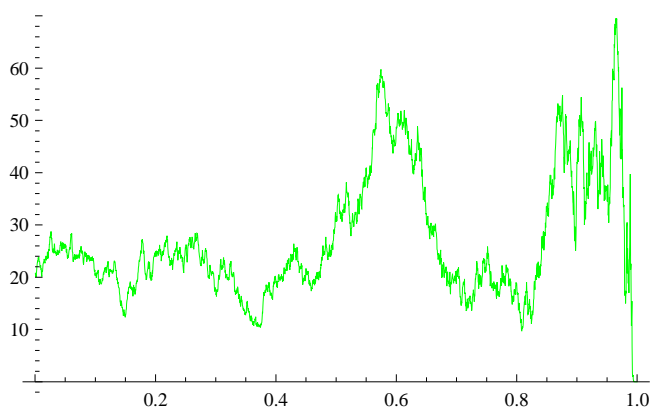
v ceně akcie. Výraz  $\Delta(t, S(t))$  určující množství akcií je v programovém řešení označen jako *DeltaPut*, celková hodnota akcií  $-\Delta(t, S(t))S(t)$  pak výrazem *DeltaPutOpce*, která je také znázorněna na obrázku 4.3.

```
Delta[{t_, S_}] = D[CenaPut[{t, S}], S];

DeltaPut =
  Map[Delta,
    Transpose[{Range[delSim]/delSim,
      Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]]}]];

DeltaPutOpce = -DeltaPut*Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]];

GrafDeltaPutOpce =
  ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, DeltaPutOpce}],
    Joined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> Green,
    PlotRange -> All]
```



Obrázek 4.3: Vývoj hodnoty akcií

Posledním členem portfolia je hodnota peněz na účtě, označována jako  $C(t)$ . Použijeme formuli (4.5). Nejprve znázorníme náklady na nákup či prodej akcií  $d\Delta(t, S(t))S(t + dt)$ , značeno *NakladyPut*, abychom měli v každém intervalu  $t + dt$  zajištěnou pozici ( $\Delta$ -hedging). Proměnná *dDeltaPut* znázorňuje  $d\Delta(t, S(t))$ , čili jaká změna v počtu držných akcií nastala za daný interval. Celkové náklady spojené s nákupem a prodejem akcií vidíme na obrázku 4.4.

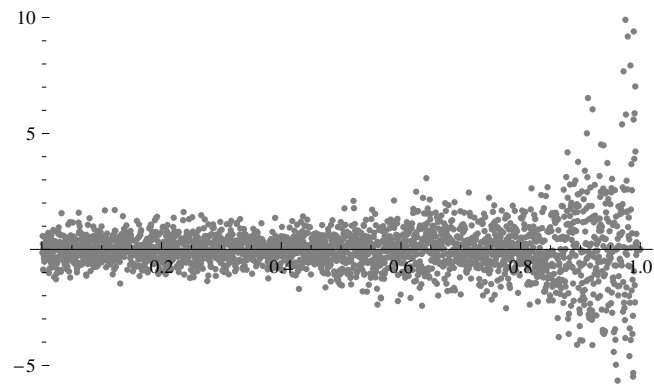
```
dDeltaPut = Drop[DeltaPut, 1] - Drop[DeltaPut, -1];

NakladyPut = dDeltaPut*
  Drop[Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]], 1];

GrafNakladyPut =
  ListPlot[Transpose[{Drop[Range[delSim]/delSim, 1], NakladyPut}],
```



```
DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> Gray,
PlotRange -> All]
```



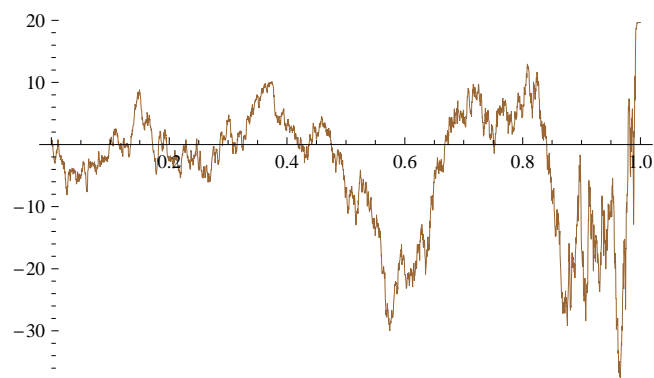
Obrázek 4.4: Náklady na nákup a prodej akcií

Zbývá už jen znázornit  $C(t)$ , které vyjadřuje *CashPut*. Předpokládejme, že hodnota peněz (značíme *cash*) na účtu v čase 0 je nula.

```
cash = 0;

CashPut = FoldList[1/delSim r #1 + #1 + #2 &, cash, NakladyPut];

GrafCashPut =
ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, CashPut}],
Joined -> True, DisplayFunction -> Identity,
PlotStyle -> Brown, PlotRange -> All]
```



Obrázek 4.5: Hodnota peněz na účtě (Cash)

Vycházíme z formule (4.5), v každém intervalu  $dt$  dojde k úročení peněz, které jsou momentálně na účtu a úročí se bezrizikovou úrokovou mírou  $r$ , k nim se přičtou náklady spojené s nákupem a prodejem akcií v čase  $t+dt$

a nakonec se přičte hodnota peněz na počátku tohoto intervalu. Takto získáme  $C(t)$  pro všechny intervaly až do času splatnosti, znázorněné na obrázku 4.5.

Nyní máme vše potřebné pro znázornění hodnoty portfolia  $X(t)$  během jednoho roku. *PortfolioPut* je součet všech složek tohoto portfolia, tedy hodnoty opce s podkladovým aktivem akcií, hodnota těchto akcií a zůstatek peněz na účtě. Portfolio je zobrazeno na obrázku 4.6.

```
PortfolioPut = CenaPutOpce + DeltaPutOpce + CashPut;

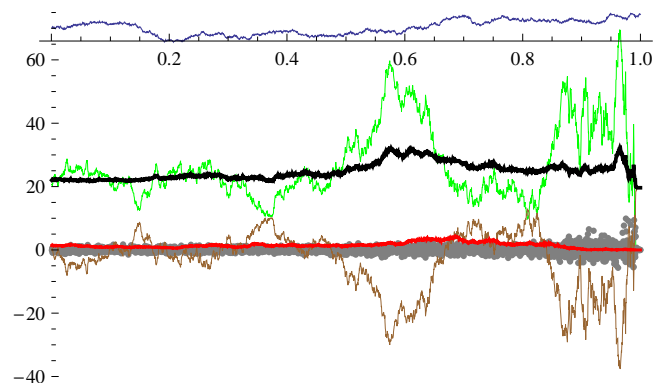
GrafPortfolioPut =
ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, PortfolioPut}],
  Joined -> True, DisplayFunction -> Identity,
  PlotStyle -> {Black, Thickness[0.006]}, PlotRange -> All]
```



Obrázek 4.6: Hodnota portfolia  $X(t)$

Abychom měli ucelenou představu, jak se mění hodnota portfolia a všechny jeho složky, obrázek 4.7 znázorňuje všechny výše uvedené grafy. Můžeme si všimnout, jak správně funguje změna hodnoty akcií a pohybu peněz na účtu, porovnáním zelené a hnědé křivky. Také vidíme, že při použití  $\Delta$ -hedgingu se hodnota portfolia mění minimálně, eliminovali jsme náhodnou složku ceny akcie.

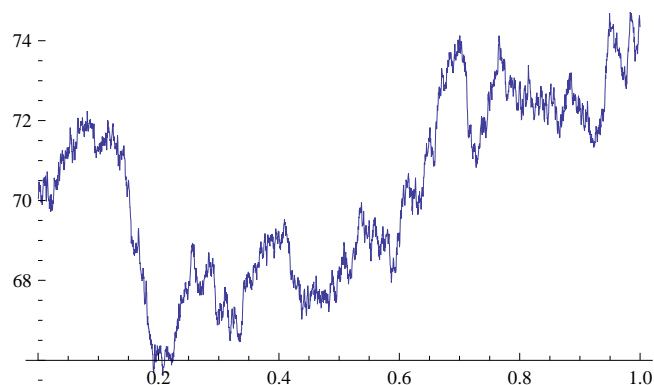
```
Show[Graf, GrafDeltaPutOpce, GrafNakladyPut, GrafCashPut,
  GrafPortfolioPut, GrafCenaPutOpce,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Obrázek 4.7: Všechny složky portfolia  $X(t)$

## 4.2.2 Implementace call opce

Stejně jako u put opce budeme postupovat v případě call opce.



Obrázek 4.8: Vývoj ceny akcie

Cílem bude znovu sestavit portfolio  $X(t)$ , nyní však finančním instrumentem bude call opce s podkladovým aktivem akcií  $S(t)$ . Tuto akcii, kterou popisuje obrázek 4.8 ponechme stejnou jako u put opce, proto  $S(0) = 70$ , drift  $\alpha = 0.05$ , volatilita  $\sigma = 0.1$ . Sledujeme vývoj během jednoho roku, kdy cena akcie se změní 2500 krát, což vyjadřuje proměnná  $delSim$ . Nejprve tedy spočítáme cenu call opce v čase  $t$ , čili  $c(t, S(t))$ , opět pomocí Blackovy-Scholesovy formule (4.11) pro výpočet call opce. Připomeňme, že se jedná o opci se splatností  $T = 1$  rok, realizační cenou  $k = 70$ , bezrizikovou úrokovou mírou  $r = 0.05$ . Formulí označme proměnnou  $call$ .

```
T = 1; r = 0.05; k = 70;
```

```
\[Phi][x_] := CDF[NormalDistribution[0, 1], x];
```

```

call[t_, S_, T_, k_, r_, \[Sigma]_] :=
Module[{d1, d2},
  d1 = (Log[S/k] + (r + \[Sigma]^2/2) (T - t))/(\[Sigma] Sqrt[
    T - t]);
  d2 = (Log[S/k] + (r - \[Sigma]^2/2) (T - t))/(\[Sigma] Sqrt[
    T - t]);
  S*\[Phi][d1] - k Exp[-r (T - t)]*\[Phi][d2]]

```

Nyní můžeme snadno znázornit cenu opce  $c(t, S(t))$ . Proměnná *CenaCall* určuje hodnotu call opce buď přímo Black-Scholesovou formulí, pokud se pohybujeme v čase do splatnosti, nebo hodnotou výplatní funkce  $\max(S - k, 0)$  v čase splatnosti. Vývoj této ceny označené jako *CenaCallOpce* znázorňuje obrázek 4.9.

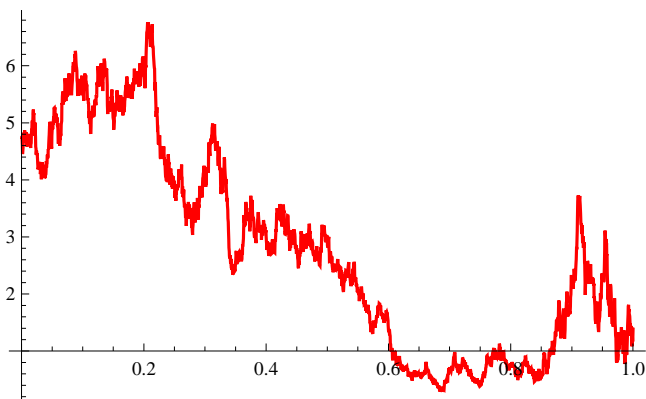
```

CenaCall[{t_, S_}] :=
If[t < T, call[t, S, T, k, r, \[Sigma]], Max[S - k, 0]]

CenaCallOpce =
Map[CenaCall,
  Transpose[{Range[delSim]/delSim,
    Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]]}]];

GrafCenaCallOpce =
ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, CenaCallOpce}],
  Joined -> True, DisplayFunction -> Identity,
  PlotStyle -> {Red, Thickness[0.005]}, PlotRange -> All]

```



Obrázek 4.9: Vývoj ceny opce

Nyní vyjádříme druhý člen portfolia  $X(t)$ , čili  $-\Delta(t, S(t))S(t)$ . Podobně jako u put opce označuje *Delta* derivaci ceny opce podle ceny podkladového aktiva, *DeltaCall* pak značí výraz  $\Delta(t, S(t))$  a *DeltaCallOpce* celkový výraz  $-\Delta(t, S(t))S(t)$ , který ukazuje obrázek 4.10.

```

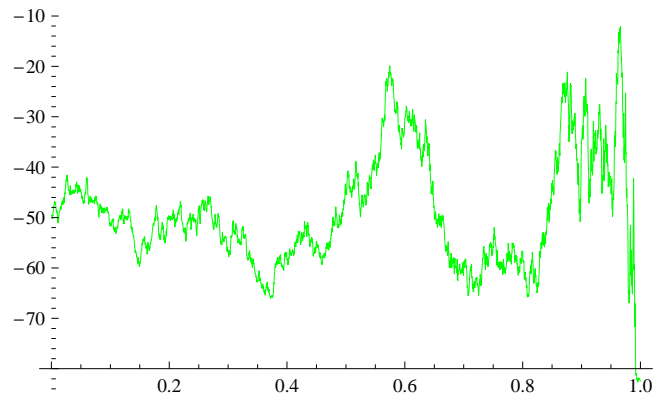
Delta[{t_, S_}] = D[CenaCall[{t, S}], S];

DeltaCall =
  Map[Delta,
    Transpose[{Range[delSim]/delSim,
      Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]]}]];

DeltaCallOpce = -DeltaCall*
  Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]];

GrafDeltaCallOpce =
  ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, DeltaCallOpce}],
    Joined -> True, DisplayFunction -> Identity,
    PlotStyle -> Green, PlotRange -> All]

```



Obrázek 4.10: Vývoj hodnoty akcií

Zbývá ještě poslední člen, hodnota peněz na účtu  $C(t)$ . Náklady na nákup či prodej akcií  $d\Delta(t, S(t))S(t+dt)$  znázorněné na obrázku 4.11 označujeme jako *NakladyCall*, dílčí část  $d\Delta(t, S(t))$  pak  $dDeltaCall$ .

```

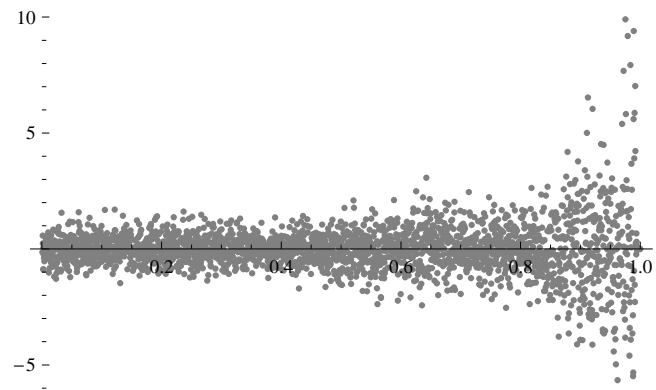
dDeltaCall = Drop[DeltaCall, 1] - Drop[DeltaCall, -1];

NakladyCall =
  dDeltaCall*Drop[Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]], 1];

GrafNakladyCall =
  ListPlot[Transpose[{Drop[Range[delSim]/delSim, 1], NakladyCall}],
    DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> Gray,
    PlotRange -> All]

```

Celkovou hodnotu  $C(t)$  označovanou jako *CashCall* můžeme vidět na obrázku 4.12, v programovém řešení je postup a vysvětlení stejné jako u put opce. Předpokládejme, že investor má v čase 0 na účtě hodnotu  $cash=30$ .



Obrázek 4.11: Náklady na nákup a prodej akcií

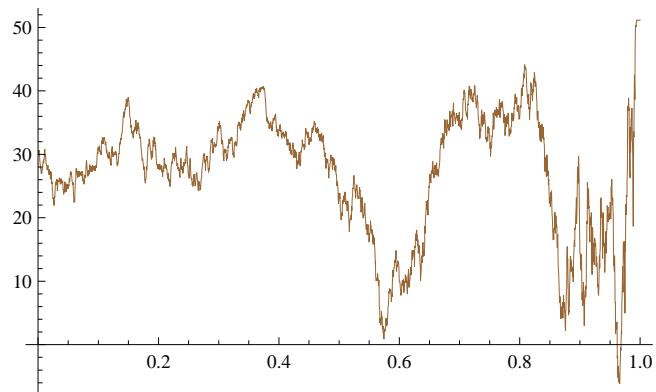
```

cash = 30;

CashCall = FoldList[1/delSim r #1 + #1 + #2 &, cash, NakladyCall];

GrafCashCall =
ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, CashCall}],
Joined -> True, DisplayFunction -> Identity,
PlotStyle -> Brown, PlotRange -> All]

```



Obrázek 4.12: Hodnota peněz na účtě (Cash)

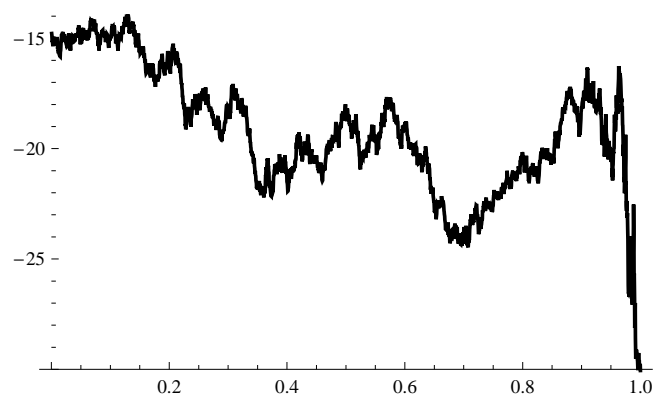
Máme tedy vše potřebné pro sestavení celkové hodnoty portfolia, kterou zobrazuje obrázek 4.13. Poslední obrázek 4.14 obsahuje opět všechny složky portfolia  $X(t)$  pro call opci.

```

PortfolioCall = CenaCallOpce + DeltaCallOpce + CashCall;

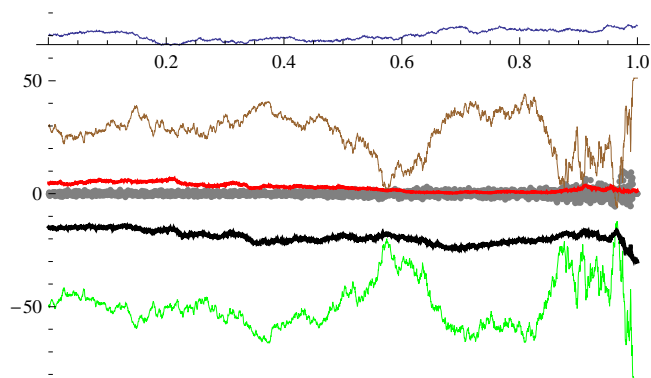
GrafPortfolioCall =
ListPlot[Transpose[{Range[delSim]/delSim, PortfolioCall}],
Joined -> True, DisplayFunction -> Identity,
PlotStyle -> {Black, Thickness[0.006]}, PlotRange -> All]

```



Obrázek 4.13: Hodnota portfolia  $X(t)$

```
Show[Graf, GrafDeltaCallOpce, GrafNakladyCall, GrafCashCall,
GrafPortfolioCall, GrafCenaCallOpce,
DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Obrázek 4.14: Všechny složky portfolia  $X(t)$

## 4.3 Blackova-Scholesova formule I

V této části odvodíme Blackovu-Scholesovu formuli, a to za pomoci rovnice tepla. Zároveň budeme toto odvození implementovat do programu Mathematica. Úplný program včetně výstupů je uveden v příloze B.

### 4.3.1 Rovnice tepla

Naším cílem nyní bude Blackovu-Scholesovu-Mertonovu parciální diferenciální rovnici (PDR), která je obtížně řešitelná, převést na rovnici tepla. Z této rovnice pak snadno najdeme řešení PDR a dostaneme tak

známou Blackovu-Scholesovu formuli. Přepišme tedy rovnici (4.7) do následujícího tvaru

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + rS \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rV(t, S), \quad (4.8)$$

kde  $V(t, S)$  je výplatní funkce. Pro call opci  $V(T, S) = \max(S(T) - k, 0)$ .

Uvažujme call opci, parciální diferenciální rovnice má potom následující okrajové podmínky:

1.  $V(t, 0) = 0$
2.  $V(T, S) = \max(S(T) - k, 0)$
3.  $\lim_{S \rightarrow \infty} (V(t, S) - S) = e^{-r(T-t)} k$

Použijeme transformaci proměnných následujícím způsobem

- $S = ke^x$
- $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$
- $V(T, S) = kv(\tau, x)$ .

Na vyjádření jednotlivých členů z (4.8) si pomůžeme řetízkovým pravidlem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, S)}{\partial t} &= k \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial t} = k \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = k \frac{-\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} &= k \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial S} = k \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) = \frac{k}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{k}{S} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x} \right) = \\ &= -\frac{k}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k}{S} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial x} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) = -\frac{k}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Dosazením do (4.8) a drobnými úpravami máme

$$k \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} = rk \frac{\partial v}{\partial x} - k \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rkv.$$

Vydělením obou stran rovnice výrazem  $\frac{\sigma^2}{2}$ , substitucí  $c = \frac{2r}{\sigma^2}$  dostáváme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} = (c-1) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial x^2} - cv(\tau, x), \quad x \in (-\infty, \infty), \tau > 0$$



s okrajovou podmínkou  $v(0, x) = \max(e^x - 1, 0)$ .

Použitím ještě jedné transformace

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x)$$

se po dalších algebraických úpravách dostáváme k rovnici tepla ve tvaru

$$\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2}$$

s okrajovou podmínkou

$$u(0, x) = \max(e^{\frac{1}{2}(c-1)x}(e^x - 1), 0). \quad (4.9)$$

### 4.3.2 Odvození Blackovy-Scholesovy formule

Nyní už máme výsledek ve tvaru rovnice tepla, která je snadno řešitelná, a proto bude jednoduché odvodit Blackovu-Scholesovu formuli. Z publikace [5] víme, že rovnice

$$\frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} = 0$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, x) = \theta(x)$$

má pro  $t > 0$  řešení

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} \theta(\xi) d\xi. \quad (4.10)$$

Dosadíme tedy do této rovnice podmínku (4.9) a vyřešíme numericky integrál

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} e^{\frac{1}{2}(c-1)\xi} (e^\xi - 1) d\xi, \quad \tau > 0.$$

Nyní již pouze vrátíme transformace zpět, čili

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x),$$

$$S = ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad V(T, S) = kv(\tau, x)$$

a dostáváme Blackovu-Scholesovu formuli pro určení ceny call opce v následujícím tvaru

$$x\Phi(d_1(\tau, x)) - e^{-r\tau}k\Phi(d_2(\tau, x)) \quad (4.11)$$

kde

$$d_1(\tau, x) = \frac{\log(\frac{x}{k}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2(\tau, x) = \frac{\log(\frac{x}{k}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Uveďme ještě bez odvození Blackovu-Scholesovu formuli pro put opci

$$e^{-r\tau}k\Phi(-d_2(\tau, x)) - x\Phi(-d_1(\tau, x)). \quad (4.12)$$

Numerické řešení integrálu a příslušný program v Mathematice opět nalezneme v příloze.

## 4.4 Blackova-Scholesova formule II

Pro zajímavost ještě odvodíme Blackovu-Scholesovu formuli jiným způsobem, za pomoci rizikově neutrálního oceňování. Užijeme poznatky z kapitoly 3.1.2.

Víme, že cena akcie, modelovaná Brownovým pohybem, má podle skutečné míry rovnici

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Podle rizikově neutrální míry  $Q$ , kde uvažujeme  $r$  konstantní, je cena akcie vyjádřena stochastickou diferenciální rovnicí

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)^Q.$$

Cena call opce v čase  $t$  je

$$c(t, S(t)) = E^Q[e^{-r(T-t)} \max(S(T) - k, 0) | \mathcal{F}_t]. \quad (4.13)$$

Podle míry  $Q$  lze cenu akcie vyjádřit jako

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)^Q\right\},$$

a tedy v čase splatnosti

$$\begin{aligned} S(T) &= S(0) \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)^Q\right\} = \\ &= S(t) \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W(T)^Q - W(t)^Q)\right\} = \\ &= S(t) \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y\right\}, \end{aligned}$$

kde

$$Y = \frac{W(T)^Q - W(t)^Q}{\sqrt{T-t}}$$

a  $Y \sim N(0, 1)$ . Připomeňme, že cena akcie je  $\mathcal{F}_t$ -měřitelná. Jednoduchým způsobem pak odvodíme dosazením do (4.13) Blackovu-Scholesovu formuli pro call opci. Označme  $\tau = T - t$ .

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \mathbb{E}^Q \left[ e^{-r\tau} \max \left( x \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma \sqrt{\tau} Y \right\} - k, 0 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau} \max \left( x \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma \sqrt{\tau} y \right\} - k, 0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log(\frac{k}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-r\tau} \left( x \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma \sqrt{\tau} y \right\} - k \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned}$$

Rozdělme tento integrál na 2 části, které budeme řešit zvlášť.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log(\frac{k}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} x e^{\left( -\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{1}{2}y^2 \right)} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log(\frac{k}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{\tau})^2} dy = \\ &= x \left( 1 - \Phi \left( \frac{\log(\frac{k}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau} \right) \right) = \\ &= x \left( 1 - \Phi \left( \frac{\log(\frac{k}{x}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right) = x(1 - \Phi(-d_1(\tau, x))) = \\ &= x\Phi(d_1(\tau, x)), \end{aligned}$$

kde

$$d_1(\tau, x) = \frac{\log(\frac{x}{k}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Druhý integrál má potom tvar

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log(\frac{k}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-r\tau} k e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log(\frac{k}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} k e^{-\frac{1}{2}y^2} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-r\tau} k \left( 1 - \Phi \left( \frac{\log\left(\frac{k}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right) = \\
&= e^{-r\tau} k (1 - \Phi(-d_2(\tau, x))) = e^{-r\tau} k \Phi(d_2(\tau, x)),
\end{aligned}$$

kde

$$d_2(\tau, x) = \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Po shrnutí tedy získáváme pro call opci Blackovu-Scholesovu formuli shodnou s (4.11)

$$x\Phi(d_1(\tau, x)) - e^{-r\tau} k\Phi(d_2(\tau, x)),$$

kde

$$\begin{aligned}
d_1(\tau, x) &= \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
d_2(\tau, x) &= \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.
\end{aligned}$$

# Kapitola 5

## Analýza citlivosti

V této kapitole si ukážeme, jak se změní hodnota portfolia změnou různých faktorů. Změny těchto hodnot jsou nazývány řeckými písmeny (tzv. *Greeks*) a udávány derivacemi Blackovy-Scholesovy formule. K výpočtu Blackovy-Scholesovy formule potřebujeme cenu akcie a její volatilitu, realizační cenu opce, bezrizikovou úrokovou míru a dobu do splatnosti. Předpokládejme, že máme call opci na akcii, kterou jsme ohodnotili pomocí Blackovy-Scholesovy formule a chceme vědět, jak neočekávané změny akcie, úrokové sazby a volatility ovlivní hodnotu opce. Chceme zjistit, jaká je citlivost hodnoty opce na těchto veličinách.

Připomeňme si z předchozí kapitoly, jak vypadá cena call a put opce. Pro call opci dostáváme cenu z (4.11), z put-call parity (viz kap. 3.2.2) cenu pro put opci

$$c = S\Phi(d_1) - ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (5.1)$$

$$p = ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1), \quad (5.2)$$

kde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (5.3)$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (5.4)$$

a  $\Phi$  je distribuční funkce rozdělení  $N(0, 1)$  a  $\varphi$  jeho hustota

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.5)$$

Pro další části si tyto vzorce připravme v programu Mathematica.

```
Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]
\[CapitalPhi][x_] := CDF[NormalDistribution[0, 1], x];
```

```

d1 = (Log[S/k] + (r + \[Sigma]^2/2) (T - t))/
      (\[Sigma] Sqrt[T - t]);

d2 = (Log[S/k] + (r - \[Sigma]^2/2) (T - t))/
      (\[Sigma] Sqrt[T - t]);

call[t_, S_, T_, k_, r_, \[Sigma]_] :=
  S*\[CapitalPhi][d1] - k Exp[-r (T - t)]*\[CapitalPhi][d2];

put[t_, S_, T_, k_, r_, \[Sigma]_] :=
  k Exp[-r (T - t)]*\[CapitalPhi][-d2] - S*\[CapitalPhi][-d1];

```

## 5.1 Delta

Delta měří poměr změny ceny opce  $V$  v závislosti na změně ceny akcie  $S$ . Pokud je delta kupní opce 0.5 znamená to, že pokud vzroste cena akcie o 1 Kč, cena opce vzroste o 50%, tj, o 50 haléřů. Deltu vyjádříme jako

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Odvodíme, jak vypadá delta pro call opci s cenou  $c$ .

$$\begin{aligned}
\Delta_c &= \frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_1) + S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} - k e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial S} = \\
&= \Phi(d_1) + S \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - k e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} = \\
&= \Phi(d_1) + S \Phi'(d_1) \frac{1}{S \sigma \sqrt{T-t}} - k e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{1}{S \sigma \sqrt{T-t}} = \\
&= \Phi(d_1) + \frac{S \Phi'(d_1) - k e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)}{S \sigma \sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

Nyní spočteme  $\frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} &= \frac{\varphi(d_1)}{\varphi(d_2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_2)^2}{2}}} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2)\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}(d_1^2 - (d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2)\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}(-2r(T-t) + 2\log\left(\frac{S}{k}\right))\right\} = \frac{k}{S} e^{-r(T-t)}
\end{aligned}$$

Proto

$$\Phi'(d_1) = e^{-r(T-t)} \frac{k}{S} \Phi'(d_2). \quad (5.6)$$

Tím tedy získáváme

$$\Delta_c = \Phi(d_1) + \frac{S e^{-r(T-t)} \frac{k}{S} \Phi'(d_2) - k e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)}{S \sigma \sqrt{T-t}} = \Phi(d_1).$$

Na obrázku 5.1 můžeme vidět deltu call opce v závislosti na době splatnosti, a to zvláště pro případy opce v penězích, opce na penězích a opce mimo peníze. V dalších grafech zelená barva znázorňuje opci v penězích, červená barva opci na penězích a modrá barva opci mimo peníze. Programové řešení uvádíme pouze pro call opci s realizační cenou  $k = 65$ , úrokovou sazbou  $r = 0.05$ , volatilitou  $\sigma = 0.5$  a cenou akcie  $S = 70$ .

```
DeltaCall = D[call[t, S, T, k, r, \[Sigma]], S];

t = 0; k = 65; r = 0.05; \[Sigma] = 0.5; S = 70;

DeltaCallVpenezich =
  Plot[DeltaCall, {T, 0, 1/2}, PlotStyle -> Darker[Green],
    PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
    DisplayFunction -> Identity];

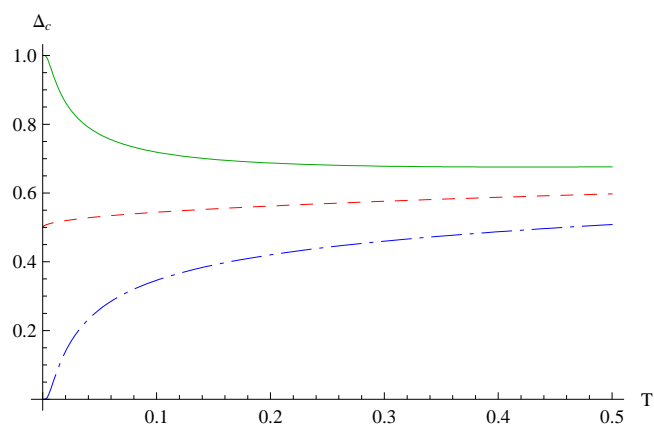
S = 65;

DeltaCallNaPenezich =
  Plot[DeltaCall, {T, 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Red, Dashing[{0.02, 0.02}]}, PlotRange -> All,
    AxesOrigin -> {0, 0}, DisplayFunction -> Identity];

S = 60;

DeltaCallMimoPenize =
  Plot[DeltaCall, {T, 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Blue, Dashing[{0.05, 0.015, 0.005, 0.015}]},
    PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
    DisplayFunction -> Identity];

Show[{DeltaCallVpenezich, DeltaCallNaPenezich,
  DeltaCallMimoPenize}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AxesLabel -> {"T", "Subscript[\[CapitalDelta], c]"}]
```



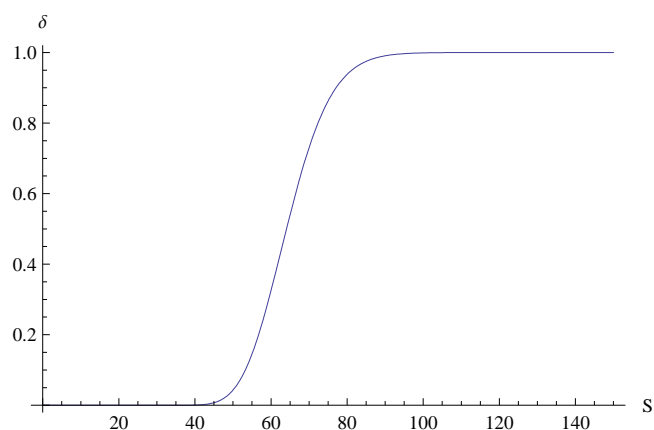
Obrázek 5.1: Delta call opce v závislosti na době do splatnosti

Dále pozorujeme na obrázku 5.2, že kupní opce je tím citlivější na změnu ceny akcie, čím je cena akcie větší.

```
Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

t = 1/12; T = 1/6; k = 65; r = 0.05; \[Sigma] = 0.5;

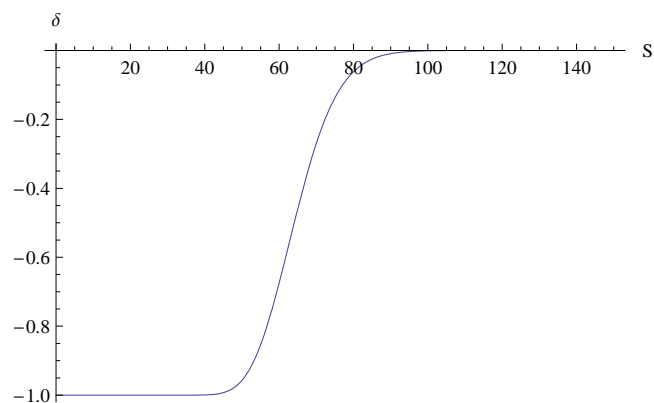
DeltaCallGraf =
Plot[Evaluate[D[call[t, S, T, k, r, \[Sigma]], S]],
{S, 0, 150}, AxesLabel -> {"S", "\[Delta]"}]
```



Obrázek 5.2: Delta call opce v závislosti na ceně akcie

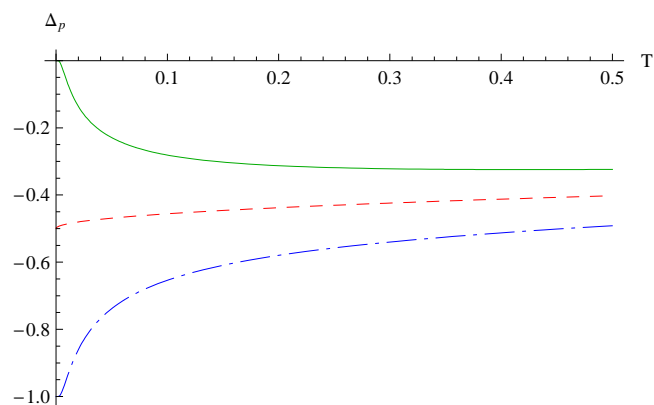
Naopak na obrázku 5.3 vidíme, že prodejní opce je citlivější na změnu ceny akcie, čím je cena akcie nižší. Obrázek 5.4 znázorňuje deltu put opce pro všechny tři případy opcí, podobně jako pro opci call. Z put-call parity lze odvodit, že

$$\Delta_p = \Phi(d_1) - 1.$$



Obrázek 5.3: Delta put opce v závislosti na ceně akcie





Obrázek 5.4: Delta put opce v závislosti na době do splatnosti

## 5.2 Gamma

Gamma představuje poměr změny delty v závislosti na změně ceny podkladové akcie. Gamma pomáhá pochopit, jak se chová delta v závislosti na změně ceny akcie. Pokud je gamma nízká, delta se mění se změnou ceny akcie pomalu. Když je gamma vysoká, delta je velmi citlivá na změnu ceny akcie.

Gammu lze vyjádřit jako

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Pro call opci lze potom odvodit

$$\Gamma_c = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} = \varphi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \varphi(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Pro put opci z put-call parity platí

$$\Gamma_p = \Gamma_c = \varphi(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Na obrázku 5.5 lze vidět průběh gammy u call opce ve všech třech případech opcí v závislosti na době do splatnosti, podobně jako u delty. Lze pozorovat, že pro opce s delší splatností se citlivost snižuje. Programové řešení uvádíme pouze pro call opci, výsledný graf je však pro call a put opci stejný.

```
Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

DeltaCall = D[call[t, S, T, k, r, \[Sigma]], S];

GammaCall = D[DeltaCall, S];

t = 0; k = 65; r = 0.05; \[Sigma] = 0.5; S = 70;
```

```

GammaCallVpenezich =
  Plot[GammaCall, {T, 0, 1/2}, PlotStyle -> Darker[Green],
    PlotRange -> {0, 0.25}, DisplayFunction -> Identity];

S = 65;

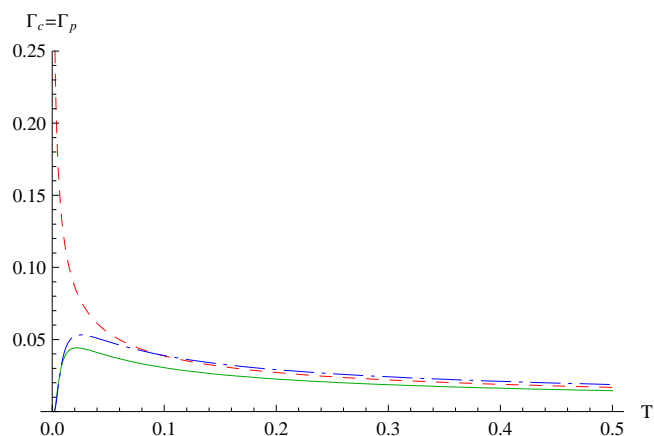
GammaCallNaPenezich =
  Plot[GammaCall, {T, 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Red, Dashing[{0.02, 0.02}]},
    PlotRange -> {0, 0.25}, DisplayFunction -> Identity];

S = 60;

GammaCallMimoPenize =
  Plot[GammaCall, {T, 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Blue, Dashing[{0.05, 0.015, 0.005, 0.015}]},
    PlotRange -> {0, 0.25}, DisplayFunction -> Identity];

Show[{GammaCallVpenezich, GammaCallNaPenezich,
  GammaCallMimoPenize}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AxesLabel -> {"T", "Subscript[\CapitalGamma,c]
  = Subscript[\CapitalGamma,p]"}]

```



Obrázek 5.5: Gamma call a put opce v závislosti na době do splatnosti

Gamma call a put opce v závislosti na změně ceny akcie se neliší a je zobrazena na obrázku 5.6. Všimněme si, že vrchol křivky je přesně v bodě realizační ceny opce, čili  $k = 65$ .

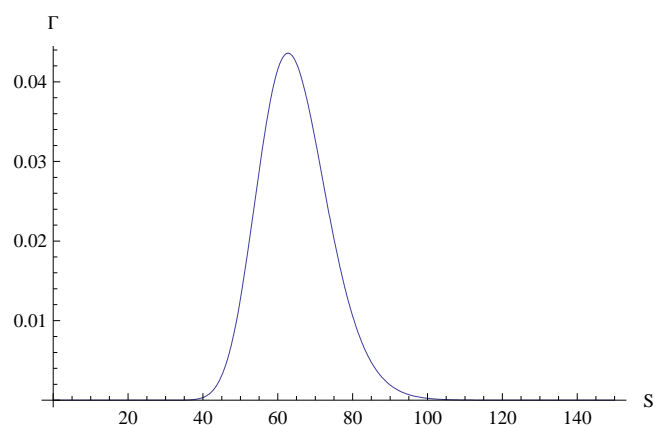
```

Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

t = 1/12; T = 1/6; k = 65; r = 0.05; \[Sigma] = 0.5;

GammaCallGraf =
  Plot[Evaluate[D[DeltaCall, S]], {S, 0, 150},
    AxesLabel -> {"S", "\[CapitalGamma]"}]

```



Obrázek 5.6: Gamma call a put opce v závislosti na ceně akcie

### 5.3 Theta

Theta měří poměr změny hodnoty opce v závislosti na čase. Hodnota opce se v čase mění, i když cena akcie zůstává stejná. Jak se blíží okamžik splatnosti opce, tak se očekávaná změna v hodnotě podkladové akcie zmenšuje. Theta je většinou záporná a lze ji vyjádřit jako

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Pro call opci, s použitím (5.4) a (5.6) lze vyjádřit

$$\begin{aligned} \Theta_c &= \frac{\partial c}{\partial t} = S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial t} - kre^{-r(T-t)} \Phi(d_2) - ke^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial t} = \\ &= S \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial t} - kre^{-r(T-t)} \Phi(d_2) - ke^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial t} = \\ &= Se^{-r(T-t)} \frac{k}{S} \Phi'(d_2) \left( \frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t} \right) - kre^{-r(T-t)} \Phi(d_2) = \\ &= ke^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \left( -\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \right) - kre^{-r(T-t)} \Phi(d_2) = \\ &= -ke^{-r(T-t)} \left( \frac{\sigma \varphi(d_2)}{2\sqrt{T-t}} + r \Phi(d_2) \right). \end{aligned}$$

Pro put opci máme vyjádření

$$\Theta_p = \Theta_c + kre^{-r(T-t)}.$$

Na obrázku 5.7 můžeme vidět vyjádření thety pro call opci v závislosti na čase. Pro volbu realizační ceny opce  $k = 65$  a ceny akcie  $S = 35$  můžeme na modré křivce pozorovat, že je-li opce hluboko mimo peníze, téměř nereaguje na ubíhající čas. Nejcitlivější na čas jsou opce na penězích.

Můžeme si také všimnout, že citlivost opcí na penězích na čas se zvyšuje s blížícím se datem splatnosti (červená křivka). Programové řešení uvádíme pouze pro call opci.

```

Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

ThetaCall = D[call[t, S, T, k, r, \[Sigma]], t];

T = 1/2; k = 65; r = 0.05; \[Sigma] = 0.5; S = 70;

ThetaCallVpenezich =
  Plot[ThetaCall, {t, 0, 1/2}, PlotStyle -> Darker[Green],
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {-50, 0} ,
    DisplayFunction -> Identity];

S = 65;

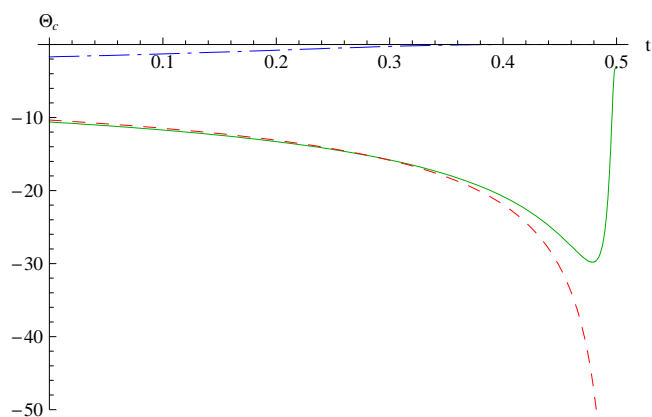
ThetaCallNaPenezich =
  Plot[ThetaCall, {t, 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Red, Dashing[{0.02, 0.02}]},
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {-50, 0},
    DisplayFunction -> Identity];

S = 35;

ThetaCallMimoPenize =
  Plot[ThetaCall, {t, 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Blue, Dashing[{0.05, 0.015, 0.005, 0.015}]},
    PlotRange -> {-50, 0}, AxesOrigin -> {0, 0},
    DisplayFunction -> Identity];

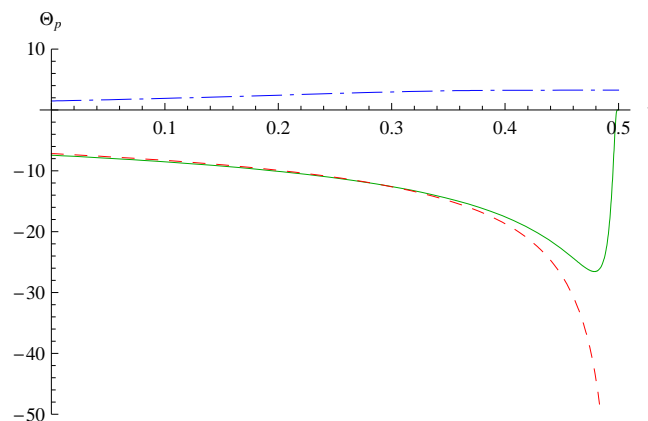
Show[{ThetaCallVpenezich, ThetaCallNaPenezich,
  ThetaCallMimoPenize}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AxesLabel -> {"T", "Subscript[CapitalTheta,c]"}]

```



Obrázek 5.7: Theta call opce v závislosti na čase

Na obrázku 5.8 pak máme vyjádřenou theta pro put opci v závislosti na čase. Vidíme, že citlivost na ubíhající čas je největší u opcí na penězích a u opcí hluboko mimo peníze, kde je dokonce theta kladné. Citlivost opcí na penězích s časem dramaticky roste, theta je záporné a rychle klesá.



Obrázek 5.8: Theta put opce v závislosti na čase

## 5.4 Vega

Vega měří vztah mezi volatilitou akcie a hodnotou opce. Pokud je vega vysoká, hodnota opce je velmi citlivá i na malé změny volatility. Pokud je nízká, tak volatilita nemá významný dopad na hodnotu opce.

Hodnotu vega lze vyjádřit jako

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Dále vyjádříme hodnotu vega za pomoci upraveného výrazu (5.6)

$$\Phi'(d_2) = \frac{S}{k} e^{r(T-t)} \Phi'(d_1).$$

$$\begin{aligned} \nu_c &= \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} - k e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial \sigma} = \\ &= S \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - k e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \\ &= S \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - S \Phi'(d_1) e^{-r(T-t)} e^{r(T-t)} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \\ &= S \varphi(d_1) \left( \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \right) = S \varphi(d_1) \sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Z put-call parity lze odvodit, že pro prodejní opci platí

$$\nu_p = \nu_c = S \varphi(d_1) \sqrt{T-t}.$$

Na následujícím obrázku 5.9 lze vidět parametr vega vyjádřený pro tři typy call opce v závislosti na volatilitě. Vidíme, že nejcitlivější na volatilitu jsou opce na penězích. Opce hluboko mimo peníze, kde jsme pro realizační cenu  $k = 65$  zvolili cenu akcie  $S = 45$ , a opce hluboko v penězích ( $S = 90$ ) jsou na volatilitu pro malé hodnoty volatility téměř necitlivé. Citlivost na volatilitu se s ubíhajícím časem blíží k nule (obrázek 5.10). Výsledky jsou stejné pro call a put opci, programové řešení uvádíme pouze pro call opci.

```

Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

VegaCall = D[call[t, S, T, k, r, \[Sigma]], \[Sigma]];

T = 1/2; t = 0; k = 65; r = 0.05; S = 90;

VegaCallVpenezich =
  Plot[VegaCall, {\[Sigma], 0, 1/2}, PlotStyle -> Darker[Green],
    PlotRange -> All, DisplayFunction -> Identity];

S = 65;

VegaCallNaPenezich =
  Plot[VegaCall, {\[Sigma], 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Red, Dashing[{0.02, 0.02}]}, PlotRange -> All,
    DisplayFunction -> Identity];

S = 45;

VegaCallMimoPenize =
  Plot[VegaCall, {\[Sigma], 0, 1/2},
    PlotStyle -> {Blue, Dashing[{0.05, 0.015, 0.005, 0.015}]},
    PlotRange -> All, DisplayFunction -> Identity];

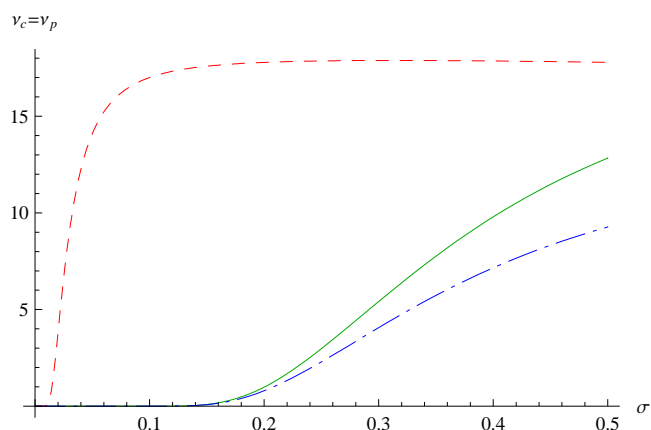
Show[{VegaCallVpenezich, VegaCallNaPenezich, VegaCallMimoPenize},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AxesLabel -> {"\[Sigma]",
    "Subscript[\[Nu],c] = Subscript[\[Nu],p]"}]

Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

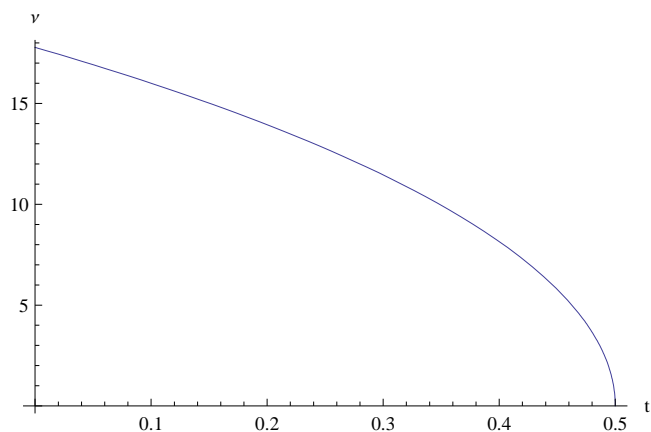
T = 1/2; k = 65; r = 0.05; S = 65; \[Sigma] = 0.5;

VegaCallGraf =
  Plot[VegaCall, {t, 0, 1/2}, AxesLabel -> {"t", "\[Nu]"}]

```



Obrázek 5.9: Vega call a put opce v závislosti na volatilitě



Obrázek 5.10: Vega call a put opce v závislosti na čase

## 5.5 Rho

Posledním parametrem, kterým se budeme zabývat, je rho. Rho měří citlivost hodnoty opce na úrokovou sazbu. Je to poměr změny hodnoty opce v závislosti na úrokové sazbě. Pokud je rho 12.1516, znamená to, že s každým procentním bodem nárůstu úrokové sazby, tj. s růstem 0.01, hodnota opce vzroste o 12.15%. Platí, že rho je vždycky kladné u evropské kupní opce a vždycky záporné u evropské prodejní opce.

Definujme rho jako

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Jako u předchozích parametrů odvodíme rho pro call opci za pomoci (5.6).

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial r} - ke^{-r(T-t)}(t-T)\Phi(d_2) - ke^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial r} =$$

$$\begin{aligned}
&= S \frac{k}{S} e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_1}{\partial r} + k e^{-r(T-t)} (T-t) \Phi(d_2) - \\
&- k e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} = k e^{-r(T-t)} \varphi(d_2) \left( \frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r} \right) + \\
&+ k e^{-r(T-t)} (T-t) \Phi(d_2)
\end{aligned}$$

A protože

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} (T-t) = \frac{\partial d_2}{\partial r},$$

rozdíl těchto parciálních derivací je nulový a získáváme

$$\rho_c = k e^{-r(T-t)} (T-t) \Phi(d_2).$$

Lze snadno vyjádřit, že

$$\rho_p = -k e^{-r(T-t)} (T-t) \Phi(-d_2).$$

Na obrázku 5.11 lze pozorovat vývoj rho pro call opci v závislosti na úrokové míře. Vidíme, že nejcitlivější na úrokovou míru jsou opce hluboko v penězích, kdy cena akcie je  $S = 90$  a realizační cena opce  $k = 65$ . Naopak opce hluboko mimo peníze, kdy  $S = 35$ , jsou na úrokovou míru téměř necitlivé. Naopak tomu je u put opce, kterou pozorujeme na obrázku 5.12. Citlivost na úrokovou míru se snižuje s ubíhajícím časem a to téměř lineárně, jak dokazuje obrázek 5.13, který vyjadřuje rho call opce v závislosti na čase. Programové řešení je opět uvedeno pouze pro call opci.

```

Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

RhoCall = D[call[t, S, T, k, r, \[Sigma]], r];

T = 1/2; k = 65; t = 0; \[Sigma] = 0.5; S = 90;

RhoCallVpenezich =
  Plot[RhoCall, {r, 0, 0.1}, PlotStyle -> Darker[Green],
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All,
    DisplayFunction -> Identity];

S = 65;

RhoCallNaPenezich =
  Plot[RhoCall, {r, 0, 0.1},
    PlotStyle -> {Red, Dashing[{0.02, 0.02]}],
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All,
    DisplayFunction -> Identity];

S = 35;

RhoCallMimoPenize =

```

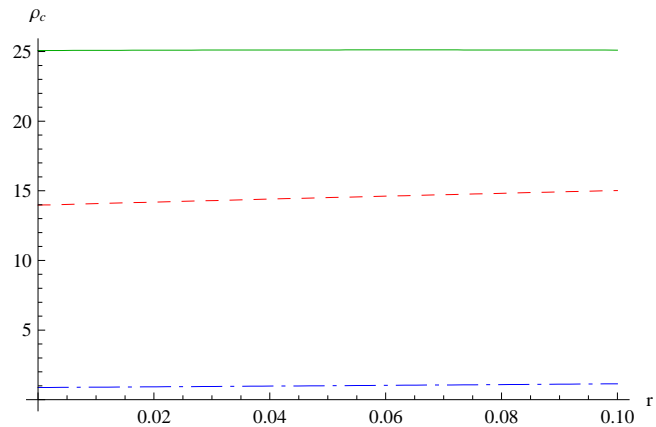


```

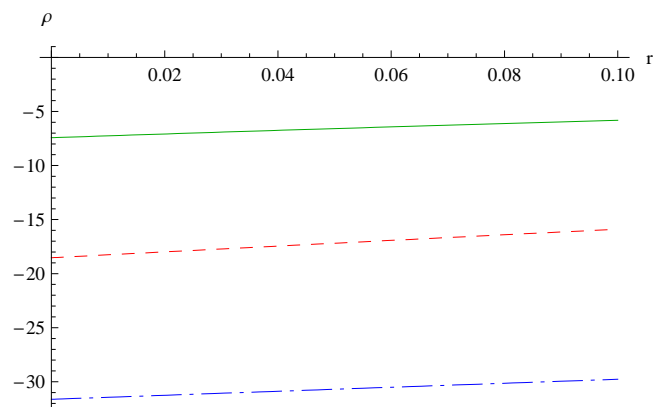
Plot[RhoCall, {r, 0, 0.1},
  PlotStyle -> {Blue, Dashing[{0.05, 0.015, 0.005, 0.015}]},
  PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
  DisplayFunction -> Identity];

Show[{RhoCallVpenezich, RhoCallNaPenezich, RhoCallMimoPenize},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  AxesLabel -> {"r", "Subscript[\[Rho],c]"}]

```



Obrázek 5.11: Rho call opce v závislosti na úrokové míře



Obrázek 5.12: Rho put opce v závislosti na úrokové míře

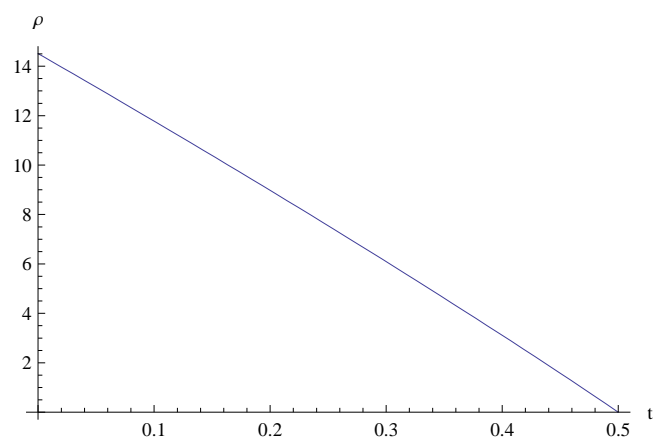
```

Clear[t, S, T, k, r, \[Sigma]]

T = 1/2; k = 65; r = 0.05; S = 65; \[Sigma] = 0.5;

RhoCallGraf = Plot[RhoCall, {t, 0, 1/2},
  AxesLabel -> {"t", "\[Rho]"}]

```



Obrázek 5.13: Rho call opce v závislosti na čase

# Kapitola 6

## Závěr

Cílem této práce bylo implementovat vybranou teorii stochastických financí do programu Mathematica.

V jednotlivých kapitolách byla součástí textu programová řešení, která vedla k výpočtům a odvozením matematických formulí či ke grafům, které napomáhají k lepšímu pochopení a analýze výsledků a umožňují čtenáři lépe se v dané problematice orientovat.

Mezi stěžejní body aplikované do programu Mathematica v této práci patří simulace vývoje ceny akcie během určitého období, simulace investora portfolio skládajícího se z opce, akcií a peněz, které má investor k dispozici, a v neposlední řadě odvození Blackovy-Scholesovy formule pro určení ceny opce.

# Literatura

- [1] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha, 2007
- [2] Cipra T.: *Matematika cenných papírů*, HZ Praha, Praha, 2000.
- [3] Dupačová J.,Hurt J.,Štěpán J.: *Stochastic modeling in economics and finance*, Springer, Kluwer, 2002.
- [4] Mandl P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia, Praha, 1985.
- [5] Nielsen L.T.: *Pricing and hedging of derivative securities*, Oxford, New York, 1999.
- [6] Stojanovic S.: *Computational financial mathematics using Mathematica*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [7] Přednáška s kódem NSTP175 na MFF UK *Stochastická analýza ve finanční matematice*

# Příloha A

## Programové řešení: Simulace vývoje ceny akcie

```
Clear[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]];

S0 = 70; delSim = 2500; \[Alpha] = 0.05; \[Sigma] = 0.1;

Cena[S0_, delSim_, \[Alpha]_, \[Sigma]_] :=
  S0 Exp[(\[Alpha]/delSim - 1/2 (\[Sigma]/Sqrt[delSim])^2)*
    Range[delSim] + \[Sigma]/Sqrt[delSim]*
    Rest[NestList[(# +
      RandomReal[NormalDistribution[0, 1]]) &, 0,
      delSim]]];

Graf = Table[
  ListPlot[
    Transpose[{Range[delSim]/delSim,
      Cena[S0, delSim, \[Alpha], \[Sigma]]}], Joined -> True ,
    Ticks -> Automatic, DisplayFunction -> Identity,
    PlotRange -> {60, 80}], {1}];

Show[Graf, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



# Příloha B

## Programové řešení: Blackova-Scholesova formule

### A) PŘEVOD BLACKOVY- SCHOLESOVY PDR NA ROVNICI TEPLA

(zadefinujeme vzorec (4.8) spolu s počátečními podmínkami pro call a put opci)

$$\text{In[1]:= BlackPDE} = \partial_t V[t, S] + r S \partial_S V[t, S] + 1/2 \partial_{(S,2)} V[t, S] S^2 \sigma^2 - r V[t, S] == 0$$

$$\text{Out[1]=} -r V[t, S] + r S V^{(0,1)}[t, S] + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 V^{(0,2)}[t, S] + V^{(1,0)}[t, S] == 0$$

$$\text{In[2]:= PodminkyCall} = V[T, S] == \text{Max}[S - k, 0];$$

$$\text{In[3]:= PodminkyPut} = V[T, S] == \text{Max}[k - S, 0];$$

(zavedeme první transformaci proměnných viz kapitola 4.3.1)

$$\text{In[4]:= x[S_] := Log}[S / k]$$

$$\text{In[5]:= } \tau[t_] := 1 / 2 \sigma^2 (T - t)$$

$$\text{In[6]:= Sub}[t_, S_] := k v[\tau[t], x[S]]$$

(po první transformaci mají PDR a počáteční podmínky tuto podobu)

$$\text{In[7]:= BlackPDE2} = \text{BlackPDE} /. V \rightarrow \text{Sub} /. \{1 / 2 \sigma^2 (T - t) \rightarrow \tau, \text{Log}[S / k] \rightarrow x\} // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[7]=} k (2 r v[\tau, x] + (-2 r + \sigma^2) v^{(0,1)}[\tau, x] + \sigma^2 (-v^{(0,2)}[\tau, x] + v^{(1,0)}[\tau, x])) == 0$$

$$\text{In[8]:= PodminkyCall1} = \text{PodminkyCall} /. V \rightarrow \text{Sub} /. \{1 / 2 \sigma^2 (T - t) \rightarrow \tau, \text{Log}[S / k] \rightarrow x, S \rightarrow k e^x\}$$

$$\text{Out[8]=} k v[0, x] == \text{Max}[0, -k + e^x k]$$

$$\text{In[9]:= PodminkyPut1} = \text{PodminkyPut} /. V \rightarrow \text{Sub} /. \{1 / 2 \sigma^2 (T - t) \rightarrow \tau, \text{Log}[S / k] \rightarrow x, S \rightarrow k e^x\}$$

$$\text{Out[9]=} k v[0, x] == \text{Max}[0, k - e^x k]$$

(zavedeme druhou transformaci)

In[10]:=  $v[\tau, x] := u[\tau, x] \text{Exp}[-1/2 (2r/\sigma^2 - 1)x - 1/4 (2r/\sigma^2 + 1)^2 \tau]$

(provedeme konečné úpravy PDR a počátečních podmínek)

In[11]:= **BlackPDE3 = BlackPDE2 // FullSimplify**

Out[11]:=  $e^{x \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2r}{\sigma^2} \right)^2 \tau} k \sigma \left( u^{(0,2)}[\tau, x] - u^{(1,0)}[\tau, x] \right) = 0$

In[12]:= **MaxFunkce = {a\_ Max[0, b\_] → Max[0, a b] /; a ≥ 0};**

In[13]:= **PodminkyCall2 = Reduce[PodminkyCall1, u[0, x]] [[2, 3]] /. MaxFunkce**

Out[13]:=  $u[0, x] = \left( \text{Max} \left[ 0, \frac{e^{\frac{1}{2}x \left( -1 + \frac{2r}{\sigma^2} \right)} (-k + e^x k)}{k} \right] /; \frac{e^{\frac{1}{2}x \left( -1 + \frac{2r}{\sigma^2} \right)}}{k} \geq 0 \right)$

In[14]:= **PodminkyPut2 = Reduce[PodminkyPut1, u[0, x]] [[2, 3]] /. MaxFunkce**

Out[14]:=  $u[0, x] = \left( \text{Max} \left[ 0, \frac{e^{\frac{1}{2}x \left( -1 + \frac{2r}{\sigma^2} \right)} (k - e^x k)}{k} \right] /; \frac{e^{\frac{1}{2}x \left( -1 + \frac{2r}{\sigma^2} \right)}}{k} \geq 0 \right)$

(dostáváme se k rovnici tepla s počátečními podmínkami (4.9))

In[15]:= **BlackPDE4 = BlackPDE3 [[1, 4]] == 0**

Out[15]:=  $u^{(0,2)}[\tau, x] - u^{(1,0)}[\tau, x] = 0$

In[16]:= **PodminkyCall3 = PodminkyCall2 [[1]] == Simplify[PodminkyCall2 [[2, 1]]]**

Out[16]:=  $u[0, x] = \text{Max} \left[ 0, e^{x \left( -\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right)} (-1 + e^x) \right]$

In[17]:= **PodminkyPut3 = PodminkyPut2 [[1]] == Simplify[PodminkyPut2 [[2, 1]]]**

Out[17]:=  $u[0, x] = \text{Max} \left[ 0, -e^{x \left( -\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right)} (-1 + e^x) \right]$

## **B) PŘEVOD ROVNICE TEPLA NA BLACKOVU-SCHOLESOVU FORMULI**

In[18]:= **Clear[ξ, r, σ, k, S, t, T]**

(upravíme počáteční podmínky pro pozdější použití)

In[19]:= **PodminkyCall3**

Out[19]:=  $u[0, x] = \text{Max} \left[ 0, e^{x \left( -\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right)} (-1 + e^x) \right]$

In[20]:= **ExpPodminkyCall3[x\_] = PodminkyCall3 [[2, 2]]**

Out[20]:=  $e^{x \left( -\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right)} (-1 + e^x)$

In[21]:= **PodminkyPut3**

Out[21]:=  $u[0, x] = \text{Max} \left[ 0, -e^{x \left( -\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right)} (-1 + e^x) \right]$



In[22]:= **ExpPodminkyPut3 [x\_] = PodminkyPut3 [[2, 2]]**

$$\text{Out[22]= } -e^{x \left( -\frac{1}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)} (-1 + e^x)$$

(vyřešíme numericky rovnici tepla dle (4.10) pro call a put opci)

In[23]:= **HeatPDECall [τ\_, x\_] =**

$$\frac{1}{2 \sqrt{\text{Pi } \tau}} \text{Integrate} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} \text{ExpPodminkyCall3} [\xi], \{\xi, 0, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow \tau > 0 \right]$$

$$\text{Out[23]= } \frac{1}{2} e^{-\frac{(-2x+\sigma^2)(\sigma^2(2x-\tau)+2x\tau)}{4\sigma^4}} \left( -2 + e^{x+\frac{2x\tau}{\sigma^2}} \left( 1 + \text{Erf} \left[ \sqrt{\tau} \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{x+\tau}{2\tau} \right) \right] \right) + \text{Erfc} \left[ \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{x}{\tau} \right) \right) \sqrt{\tau} \right] \right)$$

In[24]:= **HeatPDEPut [τ\_, x\_] =**

$$\frac{1}{2 \sqrt{\text{Pi } \tau}} \text{Integrate} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} \text{ExpPodminkyPut3} [\xi], \{\xi, -\infty, 0\}, \text{Assumptions} \rightarrow \tau > 0 \right]$$

$$\text{Out[24]= } \frac{1}{2} e^{-\frac{(-2x+\sigma^2)(\sigma^2(2x-\tau)+2x\tau)}{4\sigma^4}} \left( \text{Erfc} \left[ \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{x}{\tau} \right) \right) \sqrt{\tau} \right] - e^{x+\frac{2x\tau}{\sigma^2}} \text{Erfc} \left[ \sqrt{\tau} \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{x+\tau}{2\tau} \right) \right] \right)$$

(vrátíme zpět obě transformace)

In[25]:= **v [τ\_, x\_] = HeatPDECall [τ, x] Exp[-1/2 (2 r / σ^2 - 1) x - 1/4 (2 r / σ^2 + 1) ^ 2 τ]**

$$\text{Out[25]= } \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} x \left( -1 + \frac{2x}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2x}{\sigma^2} \right)^2 \tau - \frac{(-2x+\sigma^2)(\sigma^2(2x-\tau)+2x\tau)}{4\sigma^4}}$$

$$\left( -2 + e^{x+\frac{2x\tau}{\sigma^2}} \left( 1 + \text{Erf} \left[ \sqrt{\tau} \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{x+\tau}{2\tau} \right) \right] \right) + \text{Erfc} \left[ \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{x}{\tau} \right) \right) \sqrt{\tau} \right] \right)$$

(Blackova-Scholesova formule pro call opci vypadá následovně)

In[26]:= **CallFormule [t\_, S\_, T\_, k\_, r\_, σ\_] = FullSimplify [k v [τ [t], x [S]]]**

$$\text{Out[26]= } \frac{1}{2} \left( S + S \text{Erf} \left[ \frac{-(t-T)(2r+\sigma^2) + 2 \text{Log} \left[ \frac{S}{k} \right]}{2 \sqrt{2} \sqrt{-(t+T) \sigma^2}} \right] + \right.$$

$$\left. e^{r(t-T)} k \left( -2 + \text{Erfc} \left[ \frac{\sqrt{-(t+T) \sigma^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{\text{Log} \left[ \frac{S}{k} \right]}{-(t+T) \sigma^2} \right)}{\sqrt{2}} \right] \right) \right)$$

In[27]:= **Clear [t, S, T, k, r, σ]**

In[28]:= **v [τ\_, x\_] = HeatPDEPut [τ, x] Exp[-1/2 (2 r / σ^2 - 1) x - 1/4 (2 r / σ^2 + 1) ^ 2 τ]**

$$\text{Out[28]= } \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} x \left( -1 + \frac{2x}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2x}{\sigma^2} \right)^2 \tau - \frac{(-2x+\sigma^2)(\sigma^2(2x-\tau)+2x\tau)}{4\sigma^4}}$$

$$\left( \text{Erfc} \left[ \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{x}{\tau} \right) \right) \sqrt{\tau} \right] - e^{x+\frac{2x\tau}{\sigma^2}} \text{Erfc} \left[ \sqrt{\tau} \left( \frac{r}{\sigma^2} + \frac{x+\tau}{2\tau} \right) \right] \right)$$

(a zbývá Blackova-Scholesova formule pro put opci)

```
In[29]:= PutFormule[t_, S_, T_, k_, r_, σ_] = FullSimplify[k v[t][t], x[S]]
```

$$\text{Out[29]} = \frac{1}{2} \left( -S \operatorname{Erfc} \left[ \frac{-(t-T)(2r + \sigma^2) + 2 \operatorname{Log} \left[ \frac{S}{k} \right]}{2 \sqrt{2} \sqrt{-(t+T) \sigma^2}} \right] + e^{r(t-T)} k \operatorname{Erfc} \left[ \frac{\sqrt{-(t+T) \sigma^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{\operatorname{Log} \left[ \frac{S}{k} \right]}{-(t+T) \sigma^2} \right)}{\sqrt{2}} \right] \right)$$

Výše uvedená Blackova-Scholesova formule pro výpočet ceny call a put opce se shoduje se vzorci (4.11) a (4.12), což dokazuje následující příklad.

### PŘÍKLAD

Spočtěme cenu call a put opce s následujícími parametry. Necht'  $t = 1/12$ , čas splatnosti  $T = 1/6$ , cena akcie  $S = 45$ ,

realizační cena opce  $k = 65$ , úroková sazba  $r = 0.05$  a volatilita  $\sigma = 0.5$ .

(nejprve dosadíme do právě odvozených vzorců)

```
In[30]:= PutFormule[1/12, 45, 1/6, 65, 0.05, 0.5]
```

```
Out[30]= 19.7444
```

```
In[31]:= CallFormule[1/12, 45, 1/6, 65, 0.05, 0.5]
```

```
Out[31]= 0.0146944
```

(nyní definujeme vzorce (4.11) a (4.12))

```
In[32]:= Clear[t, S, T, k, r, σ]
```

```
In[33]:= Φ[x_] := CDF[NormalDistribution[0, 1], x];
```

```
In[34]:= put[t_, S_, T_, k_, r_, σ_] :=
Module[{d1, d2}, d1 = (Log[S/k] + (r + σ^2/2) * (T - t)) / (σ * Sqrt[T - t]);
d2 = (Log[S/k] + (r - σ^2/2) * (T - t)) / (σ * Sqrt[T - t]);
k * Exp[-r * (T - t)] * Φ[-d2] - S * Φ[-d1]]
```

```
In[35]:= call[t_, S_, T_, k_, r_, σ_] :=
Module[{d1, d2},
d1 = (Log[S/k] + (r + σ^2/2) * (T - t)) / (σ * Sqrt[T - t]);
d2 = (Log[S/k] + (r - σ^2/2) * (T - t)) / (σ * Sqrt[T - t]);
S * Φ[d1] - k * Exp[-r * (T - t)] * Φ[d2]]
```

```
In[36]:= t = 1/12; T = 1/6; k = 65; r = 0.05; σ = 0.5; S = 45;
```

(vypočteme cenu put a call opce)

```
In[37]:= put[t, S, T, k, r, σ]
```

```
Out[37]= 19.7444
```

```
In[38]:= call[t, S, T, k, r, σ]
```

```
Out[38]= 0.0146944
```

Vidíme, že ceny put a call opce se shodují a odvození Blackovy-Scholesovy formule je tedy korektní.