

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Ilona Bartoníčková

Vzdálenost mezi náhodně zvolenými body

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Studijní plán: Matematická statistika

Děkuji především svému vedoucímu diplomové práce prof. RNDr. Jiřímu Andělovi, DrSc., za cenné připomínky a rady při vypracování diplomové práce. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 7.4.2010

Ilona Bartoníčková

Obsah

1	Úvod	5
2	Dva soustředné kruhy	6
2.1	Jeden kruh	9
2.2	Kruh a vnější mezikruží	10
2.3	Dva soustředné kruhy jako vážený průměr	16
3	Dva disjunktní obdélníky	18
3.1	Rozdelení Z pro $\alpha \geq 0$ a $\beta \geq 0$	20
3.2	Rozdelení Z pro $\alpha < 0$ a $\beta \geq 0$	35
3.3	Rozdelení Z pro $\alpha \geq 0$ a $\beta < 0$	45
4	Jeden obdélník	46
A	Některé výpočty a výsledky	49
B	Zdrojový kód	55
	Literatura	59

Název práce: Vzdálenost mezi náhodně zvolenými body

Autor: Ilona Bartoníčková

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

e-mail vedoucího: Jiri.Andel@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme střední hodnotu vzdálenosti dvou bodů, volených náhodně a vzájemně nezávisle v daných množinách. Tato úloha je často spojována se vzdáleností dvou měst pevného tvaru. Města jsou pro jednoduchost většinou uvažována jako kruhy nebo obdélníky. Práce se zabývá dvěma dílčími problémy. První z nich je uveden v kapitole 2. Body jsou zde náhodně voleny ve dvou soustředných kruzích. Popsaná metoda využívá geometrickou definici pravděpodobnosti. Kapitola 3 popisuje stejný problém ve dvou disjunktních obdélníkách. Řešení je založeno na transformaci náhodných veličin. V kapitole 4 je ukázán limitní případ pro jednu dimenzi. Práce je doplněna o simulace pro různé konkrétní případy.

Klíčová slova: geometrická pravděpodobnost, náhodně volené body, transformace náhodných veličin

Title: Distance between randomly chosen points

Author: Ilona Bartoníčková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

Supervisor's e-mail address: Jiri.Andel@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study expected value of distance between two points, which are chosen randomly and independently in given sets. This problem is often associated with travel distance between two cities of the fixed shape. Cities are mostly considered as circles or rectangles for simplification. The work deals with two separate problems. The first of them is introduced in chapter 2. Points are chosen randomly in two concentric circles. The described method uses the definition of geometric probability. Chapter 3 describes the same problem for two disjoint rectangles. The solution is based on transformation of variables. The limit case in one dimension is then obtained in chapter 4. The work is supplemented by numerous simulations.

Keywords: geometric probability, randomly chosen points, transformation of variables

Kapitola 1

Úvod

V dalších kapitolách budeme hledat střední hodnotu vzdálenosti dvou bodů v případě, že pro každý z nich známe množinu, ve které je tento bod náhodně volen. Proto je třeba nejdříve ujasnit, co myslíme náhodnou volbou bodu v množině. Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat pouze úlohami v rovině, stačí definovat tento pojem následujícím způsobem.

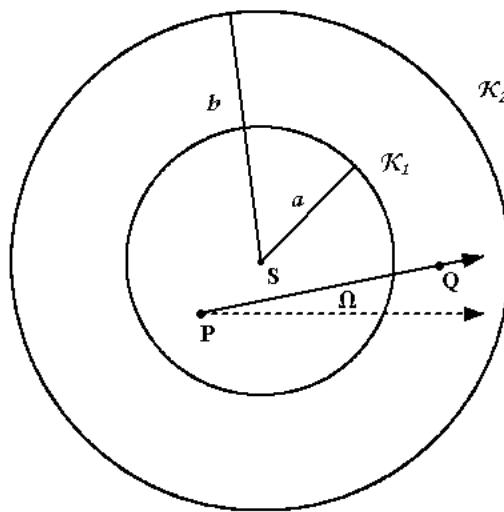
Definice: Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic O_{xy} dvojrozměrného eukleidovského prostoru. Bud' M borelovská množina v O_{xy} o nenulové konečné Lebesgueově mře $\lambda(M)$ a P bud' bod v O_{xy} . Nechť X, Y jsou náhodné veličiny popisující souřadnice bodu P v O_{xy} . Potom říkáme, že bod P je volen náhodně v množině M , jestliže náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení v množině M , tj. pokud hustota vektoru (X, Y) je

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(M)} & \text{pro } (x, y) \in M, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Kapitola 2

Dva soustředné kruhy

Uvažujme následující úlohu. Máme dány dva soustředné kruhy o známých poloměrech a, b tak, že $a \leq b$. V každém z nich zvolíme náhodně a vzájemně nezávisle jeden bod. Úkolem je určit střední hodnotu vzdálenosti těchto dvou bodů. V této kapitole rozpracujeme postup, který je stručně nastíněn v článku [2].



Obrázek 2.1: Náhodně zvolené body.

Nechť \mathcal{K}_1 značí menší kruh o poloměru a , \mathcal{K}_2 větší kruh o poloměru b , S buď společný střed obou kruhů a P, Q nechť jsou po řadě náhodně volené body v kruzích $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ (viz obrázek 2.1).

Vzdálenost bodů P, Q je náhodná veličina, kterou budeme značit Z . Její rozdílení nás zajímá. Ještě zavedeme náhodnou veličinu Ω , která popisuje úhel sevřený polopřímkou PQ a pevně daným směrem (např. 0 rad), jak ukazuje obrázek 2.1. Veličina Ω nabývá hodnot z intervalu $[0, 2\pi)$.

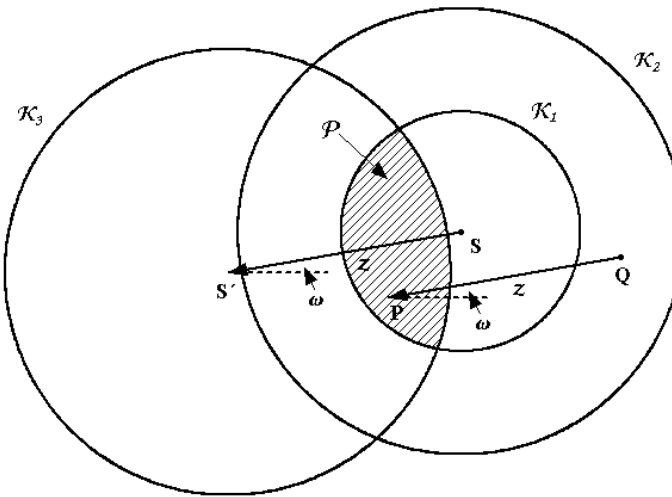
Poznámka: Pro velikosti geometrických útvarů budeme nadále používat značení pomocí dvou svislých čar. Například $|AB|$ bude značit délku úsečky AB a $|O|$ obsah obdélníka O .

Označme

$$p_{Z\Omega} = \mathbb{P}\{z \leq Z \leq z + dz, \omega \leq \Omega \leq \omega + d\omega\}.$$

Nalezení $p_{Z\Omega}$ je založeno na následujících dvou úvahách.

1. Nechť známe polohu bodu Q a máme pevně dané hodnoty náhodných veličin $Z = z$ a $\Omega = \omega$. Tyto hodnoty jednoznačně určují polohu bodu P . Sestrojme kruh \mathcal{K}_3 jako obraz posunutí kruhu \mathcal{K}_2 o vektor \overrightarrow{QP} , jeho střed označme S' (viz obrázek 2.2). Bod P nyní musí ležet v průniku $\mathcal{P} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_3$, což můžeme ukázat následovně.



Obrázek 2.2: Poloha bodu P .

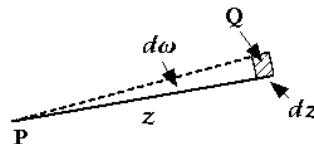
Čtyřúhelník $PQSS'$ je rovnoběžník, tedy $|S'P| = |SQ|$. Dále platí

$$Q \in \mathcal{K}_2 \Rightarrow |SQ| \leq b \Rightarrow |S'P| \leq b \Rightarrow P \in \mathcal{K}_3 \Rightarrow P \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_3.$$

2. Nechť známe polohu bodu P a hodnoty veličin Z, Ω jsou v mezích

$$z \leq Z \leq z + dz, \omega \leq \Omega \leq \omega + d\omega.$$

Potom bod Q musí ležet v části mezikruží \mathcal{Q} vyšrafovované na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Poloha bodu Q .

Podle geometrické definice pravděpodobnosti platí

$$p_{Z\Omega} = \mathbb{P}\{P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\} = \frac{|\mathcal{P}|}{\pi a^2} \frac{|\mathcal{Q}|}{\pi b^2}. \quad (2.1)$$

V závislosti na z se výpočet $|\mathcal{P}|$ rozpadá do těchto tří možností:

(i) Nechť $0 \leq z \leq b - a$. Volme bod $A \in \mathcal{K}_1$ libovolně. Pro vzdálenost tohoto bodu od středu S' platí

$$|S'A| \leq |S'S| + |SA|, \text{ kde } |S'S| = z \leq b - a \text{ a } |SA| \leq a. \text{ Proto } |S'A| \leq b - a + a = b.$$

Tím jsme dokázali implikaci $(A \in \mathcal{K}_1) \Rightarrow (A \in \mathcal{K}_3)$. Tedy $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_3$ a $\mathcal{P} = \mathcal{K}_1$, z čehož plyne $|\mathcal{P}| = \pi a^2$.

(ii) Nechť $b - a \leq z \leq b + a$. Potom

$$|\mathcal{P}| = \frac{1}{2} a^2 (2\beta - \sin 2\beta) + \frac{1}{2} b^2 (2\alpha - \sin 2\alpha), \quad (2.2)$$

kde

$$\cos \alpha = \frac{b^2 - a^2 + z^2}{2bz}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + z^2}{2az} \quad (2.3)$$

(výpočet je uveden v dodatku A).

(iii) Nechť $z > b + a$. Postupujme podobně jako v případě (i). Vzdálenost libovolného bodu $A \in \mathcal{K}_1$ od středu S' splňuje nerovnost

$$|S'A| \geq |S'S| - |SA|, \text{ kde } |S'S| = z > b + a \text{ a } |SA| \leq a. \text{ Proto } |S'A| > b + a - a = b,$$

a platí implikace $(A \in \mathcal{K}_1) \Rightarrow (A \notin \mathcal{K}_3)$. Tedy $\mathcal{P} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_3 = \emptyset$, což nám dává $|\mathcal{P}| = 0$.

Nyní spočteme obsah \mathcal{Q} . Na obrázku 2.3 vidíme, že se jedná o rozdíl dvou kruhových výsečí o poloměrech $z + dz$ a z . Je tedy

$$|\mathcal{Q}| = \pi (z + dz)^2 \frac{d\omega}{2\pi} - \pi z^2 \frac{d\omega}{2\pi} = [2z dz + (dz)^2] \frac{d\omega}{2} = z dz d\omega$$

(při poslední úpravě zanedbáváme $(dz)^2$).

Po dosazení do (2.1) můžeme $p_{Z\Omega}$ přepsat do tvaru

$$p_{Z\Omega} = \begin{cases} \frac{z}{\pi b^2} dz d\omega & \text{pro } 0 \leq \omega \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b - a, \\ \frac{z}{2\pi^2} \left(\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta - \sin 2\beta}{b^2} \right) dz d\omega & \text{pro } 0 \leq \omega \leq 2\pi, b - a \leq z \leq b + a, \\ 0 & \text{pro } 0 \leq \omega \leq 2\pi, z > b + a, \end{cases}$$

kde α, β splňují (2.3). Označme $F_{Z\Omega}$ sdruženou distribuční funkci náhodných veličin Z, Ω a $f_{Z\Omega}$ jejich hustotu. Zřejmě platí

$$p_{Z\Omega} = F_{Z\Omega}(z + dz, \omega + d\omega) - F_{Z\Omega}(z + dz, \omega) - F_{Z\Omega}(z, \omega + d\omega) + F_{Z\Omega}(z, \omega).$$

Pro sdruženou hustotu náhodných veličin Z, Ω tedy dostáváme

$$\begin{aligned} f_{Z\Omega}(z, \omega) &= \frac{\partial^2 F_{Z\Omega}(z, \omega)}{\partial z \partial \omega} = \frac{p_{Z\Omega}}{dz d\omega} \\ &= \begin{cases} \frac{z}{\pi b^2} & \text{pro } 0 \leq \omega \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b-a, \\ \frac{z}{2\pi^2} \left(\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta-\sin 2\beta}{b^2} \right) & \text{pro } 0 \leq \omega \leq 2\pi, b-a \leq z \leq b+a, \\ 0 & \text{pro } 0 \leq \omega \leq 2\pi, z > b+a, \end{cases} \end{aligned}$$

kde α, β splňují (2.3). Označme f_Z hustotu náhodné veličiny Z . Potom máme

$$f_Z(z) = \int_0^{2\pi} f_{Z\Omega}(z, \omega) d\omega = \begin{cases} \frac{2z}{b^2} & \text{pro } 0 \leq z \leq b-a, \\ \frac{z}{\pi} \left(\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta-\sin 2\beta}{b^2} \right) & \text{pro } b-a \leq z \leq b+a, \\ 0 & \text{pro } z > b+a, \end{cases}$$

kde α, β splňují (2.3).

2.1 Jeden kruh

Zaměřme se nyní speciálně na případ $a = b$, tj. body P, Q volíme ve stejném kruhu. Pak platí $\alpha = \beta$ (viz (2.3) nebo obrázek A.1 v dodatku A). Hustota náhodné veličiny Z v případě $a = b$ je dána vzorcem

$$f_{[Z|_{a=b}]}(z) = \frac{z}{\pi a^2} (4\alpha - 2 \sin 2\alpha) \quad \text{pro } 0 \leq z \leq 2a$$

a $f_{[Z|_{a=b}]}(z) = 0$ jinak. Úhel α přitom splňuje rovnost $\cos \alpha = \frac{z}{2a}$. Střední hodnota vzdálenosti bodů P, Q je

$$\mathbb{E}[Z|_{a=b}] = \int_0^{2a} z f_{[Z|_{a=b}]}(z) dz = \int_0^{2a} \frac{z^2}{\pi a^2} (4\alpha - 2 \sin 2\alpha) dz, \quad (2.4)$$

kde

$$\cos \alpha = \frac{z}{2a}, \quad \text{a tedy} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{z^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - z^2}}{2a}.$$

Odtud máme

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{4a^2 - z^2}}{2a}, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{z}{2a^2} \sqrt{4a^2 - z^2}.$$

Dosazením těchto výsledků do (2.4) dostaneme

$$\mathbb{E}[Z|_{a=b}] = \frac{4}{\pi a^2} \int_0^{2a} z^2 \arcsin \frac{\sqrt{4a^2 - z^2}}{2a} dz - \frac{1}{\pi a^4} \int_0^{2a} z^3 \sqrt{4a^2 - z^2} dz.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int_0^{2a} z^2 \arcsin \frac{\sqrt{4a^2 - z^2}}{2a} dz \quad \text{a} \quad I_2 = \int_0^{2a} z^3 \sqrt{4a^2 - z^2} dz,$$

$$\text{potom } \mathbb{E}[Z|_{a=b}] = \frac{4}{\pi a^2} I_1 - \frac{1}{\pi a^4} I_2.$$

Integrál I_1 upravíme pomocí metody per partes. Platí

$$I_1 = \left[\frac{z^3}{3} \arcsin \frac{\sqrt{4a^2 - z^2}}{2a} \right]_0^{2a} + \int_0^{2a} \frac{z^3}{3\sqrt{4a^2 - z^2}} dz = \frac{1}{3} \int_0^{2a} \frac{z^3}{\sqrt{4a^2 - z^2}} dz.$$

Po substituci $s = \sqrt{4a^2 - z^2}$ dostaneme

$$I_1 = \frac{1}{3} \int_0^{2a} (4a^2 - s^2) ds = \frac{1}{3} \left(8a^3 - \frac{8a^3}{3} \right) = \frac{16a^3}{9}.$$

Stejnou substitucí $s = \sqrt{4a^2 - z^2}$ spočteme integrál I_2 . Platí

$$I_2 = \int_0^{2a} (4a^2 - s^2) s^2 ds = \frac{32a^5}{3} - \frac{32a^5}{5} = \frac{64a^5}{15}.$$

Proto

$$\mathbb{E}[Z|_{a=b}] = \frac{4}{\pi a^2} I_1 - \frac{1}{\pi a^4} I_2 = \frac{4}{\pi a^2} \frac{16a^3}{9} - \frac{1}{\pi a^4} \frac{64a^5}{15} = \frac{128a}{45\pi}. \quad (2.5)$$

2.2 Kruh a vnější mezikruží

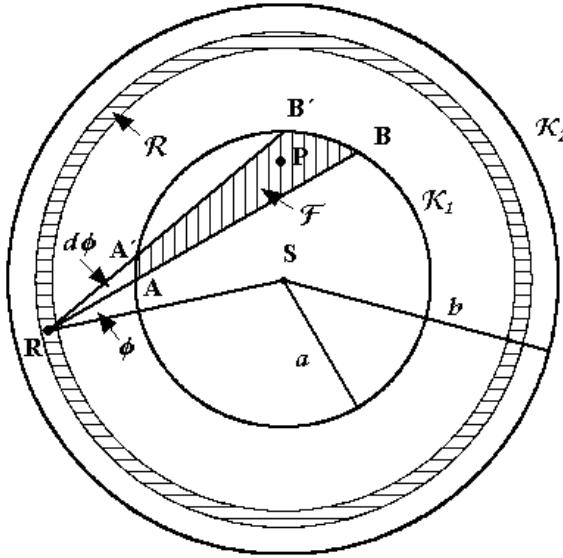
Pro případ $a < b$ nevede však výše odvozená hustota f_Z ke snadnému výpočtu $\mathbb{E}Z$. Proto k nařazení střední hodnoty vzdálenosti bodů P, Q použijeme následující alternativní úvahu.

Nechť R značí bod náhodně volený v mezikruží o středu S , vnitřním poloměru a a vnějším poloměru b . Dále zavedeme náhodné veličiny V a Φ tak, že V je vzdálenost bodu R od středu kruhu, tj. $V = |RS|$, a Φ popisuje úhel SRP . Označme

$$p_{V\Phi} = \mathbb{P}\{v \leq V \leq v + dv, \phi \leq \Phi \leq \phi + d\phi\}.$$

Podle definice podmíněné pravděpodobnosti platí

$$p_{V\Phi} = \mathbb{P}\{v \leq V \leq v + dv\} \mathbb{P}\{\phi \leq \Phi \leq \phi + d\phi \mid v \leq V \leq v + dv\}. \quad (2.6)$$

Obrázek 2.4: Poloha bodů P a R .

Sledujme nyní obrázek 2.4 a uvažujme následovně. Pro $v \leq V \leq v + dv$ musí bod R ležet v mezikruží \mathcal{R} o středu S , vnitřním poloměru v a vnějším poloměru $v + dv$. Pokud navíc $\phi \leq \Phi \leq \phi + d\phi$, potom bod P musí ležet v prostoru \mathcal{F} vyšrafovovaném mezi průsečíky A, B, B', A' . Podle geometrické definice pravděpodobnosti můžeme psát

$$\mathbb{P}\{v \leq V \leq v + dv\} = \frac{|\mathcal{R}|}{\pi(b^2 - a^2)}, \quad \mathbb{P}\{\phi \leq \Phi \leq \phi + d\phi \mid v \leq V \leq v + dv\} = \frac{|\mathcal{F}|}{\pi a^2}$$

a dosazením do (2.6) dostaneme

$$p_{V\Phi} = \frac{|\mathcal{R}|}{\pi(b^2 - a^2)} \frac{|\mathcal{F}|}{\pi a^2}. \quad (2.7)$$

Plocha \mathcal{R} je mezikruží a pro jeho obsah platí

$$|\mathcal{R}| = \pi [(v + dv)^2 - v^2] = 2\pi v dv$$

(v poslední úpravě zanedbáváme dv^2).

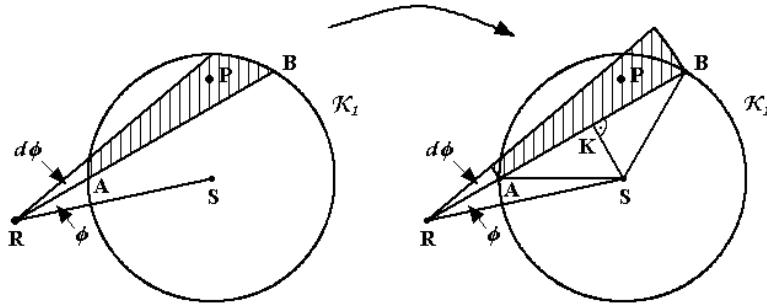
Pro výpočet obsahu \mathcal{F} budeme předpokládat $V = v$ a použijeme approximaci, jak ukazuje obrázek 2.5. Plochu \mathcal{F} zde nahradíme rozdílem dvou kruhových výsečí o společném středu R a poloměrech $|RA|$ a $|RB|$. Tuto approximovanou plochu označíme \mathcal{F}_a . Potom máme

$$p_{V\Phi} \doteq \frac{|\mathcal{R}|}{\pi(b^2 - a^2)} \frac{|\mathcal{F}_a|}{\pi a^2}. \quad (2.8)$$

Poloměry $|RA|$ a $|RB|$ získáme následující cestou. Označme K patu výšky na stranu AB v trojúhelníku ASB . Tím dostaneme dva pravoúhlé trojúhelníky RSK a SBK . Využitím goniometrických funkcí v trojúhelníku RSK můžeme spočítat délky úseček RK a SK .

Úsečka KB je odvěsnou v trojúhelníku SBK , její délku tedy dopočteme pomocí Pythagorovy věty. Tímto postupem dostáváme

$$|RK| = v \cos \phi, \quad |SK| = v \sin \phi, \quad |KB| = \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}.$$



Obrázek 2.5: Aproximace plochy \mathcal{F} — kruhové výseče.

Zřejmě platí

$$|RB| = |RK| + |KB|, \quad |RA| = |RK| - |AK|,$$

kde $|AK| = |KB|$, neboť trojúhelník ASB je rovnoramenný. Máme tedy

$$|RB| = v \cos \phi + \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, \quad |RA| = v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}.$$

Obsah \mathcal{F}_a je

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_a| &= \pi \left[\left(v \cos \phi + \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} \right)^2 - \left(v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} \right)^2 \right] \frac{d\phi}{2\pi} \\ &= 2v \cos \phi \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} d\phi. \end{aligned}$$

Po dosazení do (2.8) dostaneme

$$p_{V\Phi} \doteq \frac{2\pi v dv}{\pi(b^2 - a^2)} \frac{2v \cos \phi \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} d\phi}{\pi a^2}.$$

Označíme-li $F_{V\Phi}$ sdruženou distribuční funkci náhodných veličin V, Φ a $f_{V\Phi}$ jejich hustotu, potom platí

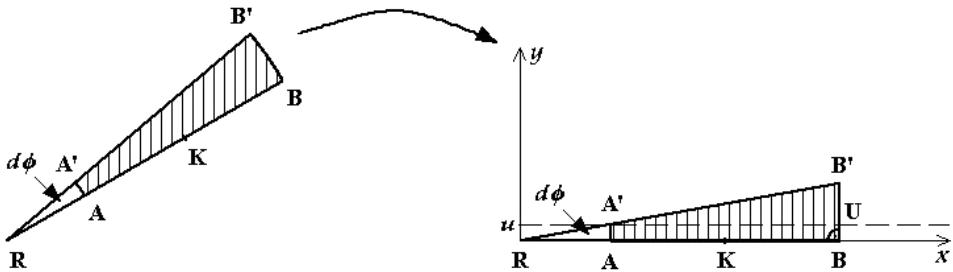
$$p_{V\Phi} = F_{V\Phi}(v + dv, \phi + d\phi) - F_{V\Phi}(v + dv, \phi) - F_{V\Phi}(v, \phi + d\phi) + F_{V\Phi}(v, \phi),$$

$$f_{V\Phi}(v, \phi) = \frac{\partial^2 F_{V\Phi}(v, \phi)}{\partial v \partial \phi} = \frac{p_{V\Phi}}{dv d\phi} = \frac{4}{\pi a^2 (b^2 - a^2)} v^2 \cos \phi \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}.$$

Nechť Z^* značí vzdálenost bodů R, P . Soustředíme se nyní na podmíněnou střední hodnotu Z^* při pevných hodnotách $V = v, \Phi = \phi$, tj. nejbližším cílem je výpočet

$$\mathbb{E}[Z^*|V = v, \Phi = \phi].$$

Za tímto účelem budeme potřebovat ještě hrubší approximaci plochy \mathcal{F} , kterou ukazuje obrázek 2.6. Uvažujme tedy místo kruhových výsečí RAA' a RBB' pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech A a B , přičemž zachováme velikost úhlu $d\phi$ a vzdálenosti $|RK|$, $|RA|$, $|RB|$, zatímco vzdálenosti $|RA'|$ a $|RB'|$ se změní, stejně jako $|AA'|$ a $|BB'|$.



Obrázek 2.6: Aproximace plochy \mathcal{F}_a — pravoúhlé trojúhelníky.

K výpočtu využijeme analytickou geometrii v rovině. Budť R počátkem kartézské soustavy souřadnic, kde osa x prochází úsečkou RB (viz obrázek 2.6). Označme ještě x -ovou, resp. y -ovou souřadnici daného bodu nebo vektoru v této soustavě symbolem x , resp. y s indexem daného bodu nebo vektoru (například $A[x_A, y_A]$). Vzdálenost $|AA'|$ neznáme, označíme ji u . Souřadnice jednotlivých bodů jsou

$$\begin{aligned} R[0, 0], \quad K[v \cos \phi, 0], \\ A\left[v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, 0\right], \\ B\left[v \cos \phi + \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, 0\right], \\ A'\left[v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, u\right], \\ B'\left[v \cos \phi + \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, u \frac{v \cos \phi + \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}{v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}\right] \end{aligned}$$

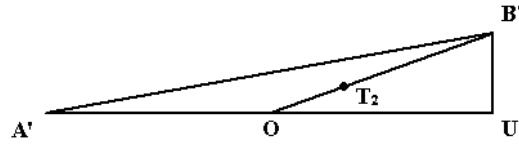
(y -ová souřadnice bodu B' vychází z podobnosti trojúhelníků RAA' a RBB'). Nechť U je bod o souřadnicích $\left[v \cos \phi + \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, u\right]$.

Bod P je nyní náhodně volen v lichoběžníku $ABB'A'$. Jelikož hledáme střední hodnotu vzdálenosti $|RP|$, zajímá nás těžiště tohoto lichoběžníka. Označíme jej T . Pro tuto approximaci stačí pouze x -ová souřadnice T , tedy

$$\mathbb{E}[Z^*|V = v, \Phi = \phi] \doteq x_T.$$

Rozdělme náš lichoběžník na obdélník $ABUA'$ a pravoúhlý trojúhelník $A'UB'$, jak ukazuje obrázek 2.6. Najdeme těžiště v každém z těchto útvarů zvlášť. Těžiště celého lichoběžníka bude jejich váženým průměrem, kde vahami budou obsahy těchto útvarů. Těžiště T_1 obdélníka $ABUA'$ leží v jeho geometrickém středu. Tedy zřejmě

$$x_{T_1} = \frac{1}{2} (x_A + x_B) = v \cos \phi.$$



Obrázek 2.7: Těžiště trojúhelníka $A'UB'$.

Těžiště trojúhelníka leží na každé z jeho těžnic, a to vždy ve vzdálenosti jedné třetiny délky těžnice od středu příslušné strany trojúhelníka. Volme těžnici na stranu $A'U$ trojúhelníka $A'UB'$ (viz obrázek 2.7). Střed O této strany, vektor $\overrightarrow{OB'}$ a těžiště T_2 trojúhelníka $A'UB'$ mají po řadě x -ové souřadnice

$$\begin{aligned} x_O &= \frac{x_{A'} + x_U}{2} = v \cos \phi, \\ x_{\overrightarrow{OB'}} &= x_{B'} - x_O = \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, \\ x_{T_2} &= x_O + \frac{1}{3} x_{\overrightarrow{OB'}} = v \cos \phi + \frac{1}{3} \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}. \end{aligned}$$

Označíme-li S_1 , resp. S_2 obsah obdélníka $ABUA'$, resp. trojúhelníka $A'UB'$, potom platí

$$\begin{aligned} S_1 &= u(x_B - x_A) = 2u \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}, \\ S_2 &= \frac{1}{2}(x_U - x_{A'})(y_{B'} - y_U) = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} \right) \left(\frac{2u \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}{v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}} \right) \\ &= \frac{2u(a^2 - v^2 \sin^2 \phi)}{v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}. \end{aligned}$$

Celý lichoběžník má obsah

$$S_1 + S_2 = \frac{2uv \cos \phi \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}{v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}.$$

Nyní máme vše potřebné k výpočtu x -ové souřadnice těžiště T lichoběžníka $ABB'A'$. Platí

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{S_1 \cdot x_{T_1} + S_2 \cdot x_{T_2}}{S_1 + S_2} \\ &= \frac{2uv \cos \phi \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} + \left(v \cos \phi + \frac{1}{3} \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}\right) \frac{2u(a^2 - v^2 \sin^2 \phi)}{v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}}{\frac{2uv \cos \phi \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}{v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}}} \\ &= v \cos \phi - \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} + \frac{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}} + \frac{a^2 - v^2 \sin^2 \phi}{3v \cos \phi} \\ &= \frac{3v^2 \cos^2 \phi + a^2 - v^2 \sin^2 \phi}{3v \cos \phi} = \frac{4v^2 \cos^2 \phi + a^2 - v^2}{3v \cos \phi} = \frac{a^2 + v^2(4 \cos^2 \phi - 1)}{3v \cos \phi}. \end{aligned}$$

Hledaná podmíněná střední hodnota je tudíž

$$\mathbb{E}[Z^* | V = v, \Phi = \phi] \doteq x_T = \frac{a^2 + v^2(4 \cos^2 \phi - 1)}{3v \cos \phi}.$$

Střední hodnotu Z^* můžeme tedy počítat následujícím způsobem

$$\mathbb{E}Z^* = \int_a^b \int_{-y}^y \mathbb{E}[Z^* | V = v, \Phi = \phi] \cdot f_{V\Phi}(v, \phi) dv d\phi, \quad (2.9)$$

kde $y = \arcsin \frac{a}{v}$, neboť $|SK| = v \sin \phi$ a zároveň $0 \leq |SK| \leq a$. Tedy pro velikost úhlu ϕ platí $0 \leq |\phi| \leq \arcsin \frac{a}{v}$. Po dosazení do (2.9) dostaneme

$$\mathbb{E}Z^* \doteq \frac{4}{3\pi a^2(b^2 - a^2)} \int_a^b J_1 v dv, \quad (2.10)$$

kde

$$J_1 = \int_{-y}^y [a^2 + v^2(4 \cos^2 \phi - 1)] \sqrt{a^2 - v^2 \sin^2 \phi} d\phi.$$

Zabýejme se nejprve vnitřním integrálem J_1 . Užitím substituce $a \sin \theta = v \sin \phi$ můžeme tento integrál přepsat do tvaru

$$J_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (a^2 + 3v^2 - 4a^2 \sin^2 \theta) \frac{1}{\sqrt{v^2 - a^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

Dosazením tohoto výsledku do (2.10) a následnou záměnou pořadí integrace dostaneme

$$\mathbb{E}Z^* \doteq \frac{4}{3\pi(b^2 - a^2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_2 \cos^2 \theta d\theta, \quad (2.11)$$

kde

$$J_2 = \int_a^b v(a^2 + 3v^2 - 4a^2 \sin^2 \theta) \frac{1}{\sqrt{v^2 - a^2 \sin^2 \theta}} dv.$$

Ve vnitřním integrálu J_2 užijeme substituci $s = \sqrt{v^2 - a^2 \sin^2 \theta}$ a máme

$$J_2 = \int_{a \cos \theta}^{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta}} (a^2 \cos^2 \theta + 3s^2) ds = (b^2 - a^2 + 2a^2 \cos^2 \theta) \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta} - 2a^3 \cos^3 \theta.$$

Po dosazení do (2.11) můžeme tedy psát

$$\mathbb{E}Z^* \doteq \frac{8}{3\pi(b^2 - a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \left[(b^2 - a^2 + 2a^2 \cos^2 \theta) \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta} - 2a^3 \cos^3 \theta \right] d\theta$$

(neboť integrand tohoto výrazu je sudou funkcí θ).

2.3 Dva soustředné kruhy jako vážený průměr

Doposud jsme uvažovali vzdálenost Z^* bodů R, P , kde R byl náhodně volený bod v mezi-kruži o středu S , vnitřním poloměru a a vnějším poloměru b . S využitím $\mathbb{E}Z^*$ chceme nyní nalézt střední hodnotu vzdálenosti Z bodů Q, P , kde Q je náhodně volený bod z celého kruhu \mathcal{K}_2 . Připomeňme, že pro speciální případ rovnosti poloměrů \mathcal{K}_1 a \mathcal{K}_2 jsme již $\mathbb{E}Z$ spočetli předchozí metodou (viz (2.5)). Hledanou střední hodnotu Z pro $a < b$ můžeme tedy vyjádřit jako vážený průměr

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \mathbb{E}Z^* + \frac{a^2}{b^2} \cdot \mathbb{E}[Z|_{a=b}] \\ &\doteq \frac{8}{3\pi b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (b^2 - a^2 + 2a^2 \cos^2 \theta) \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta} d\theta - \frac{16a^3}{3\pi b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta + \frac{128a^3}{45\pi b^2} \\ &= \frac{8}{3\pi b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (b^2 - a^2 + 2a^2 \cos^2 \theta) \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Upřavíme integrál (2.12) na tvar

$$\mathbb{E}Z \doteq \frac{8(b^2 - a^2)}{3\pi b} M_1 + \frac{16a^2}{3\pi b} M_2, \quad (2.13)$$

kde

$$M_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta} d\theta, \quad M_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta} d\theta.$$

Integrály M_1, M_2 se dají vyjádřit pomocí eliptických integrálů. Označme $K(\frac{a}{b})$ a $E(\frac{a}{b})$ po řadě úplné Legendrovy eliptické integrály prvního a druhého druhu. Pomocí softwaru *Wolfram Mathematica 6.0* získáme

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{(a^2 + b^2) E\left(\frac{a}{b}\right) + (a^2 - b^2) K\left(\frac{a}{b}\right)}{3a^2}, \\ M_2 &= \frac{(3a^4 + 7a^2b^2 - 2b^4) E\left(\frac{a}{b}\right) + 2(3a^4 - 4a^2b^2 + b^4) K\left(\frac{a}{b}\right)}{15a^4}. \end{aligned}$$

Dosazením do (2.13) dostaneme

$$\mathbb{E}Z \doteq \frac{8}{45\pi a^2 b} \left[(a^4 + 14a^2 b^2 + b^4) E\left(\frac{a}{b}\right) - (b^2 - a^2)(7a^2 + b^2) K\left(\frac{a}{b}\right) \right].$$

Následující tabulka udává takto spočtené hodnoty $\mathbb{E}Z$ pro vybraná a, b . Vzhledem k četným approximacím při výpočtu jsou zde pro srovnání uvedeny výsledky simulací provedených v softwaru *Wolfram Mathematica 6.0*. Pro každou variantu bylo v tomto softwaru generováno 500 000 dvojic náhodných bodů P, Q a následně spočítána jejich vzdálenost. V posledním sloupci tabulky je uveden vždy výběrový průměr těchto vzdáleností a v závorce za ním příslušná výběrová směrodatná odchylka.

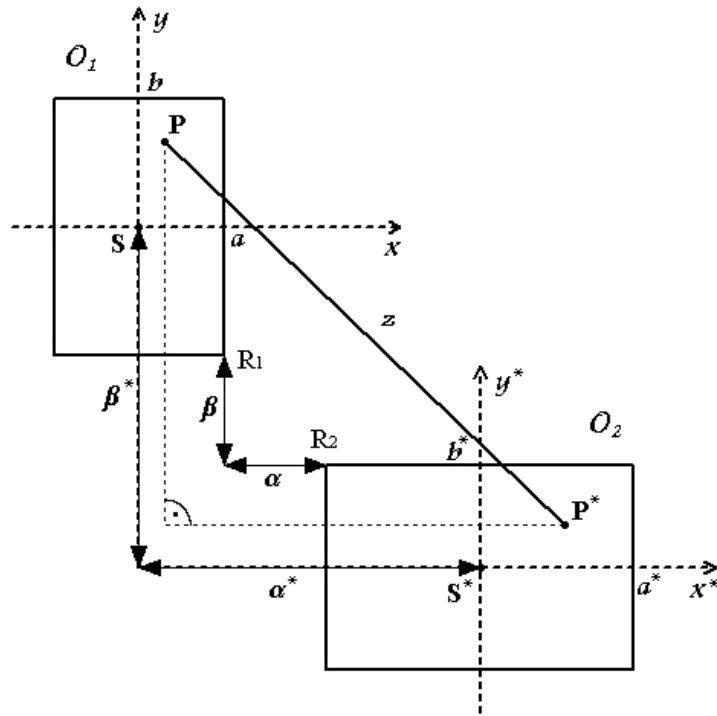
Varianta č.	a	b	$\mathbb{E}Z$	Simulace
1	1	1	0.905415	0.905952 (0.424600)
2	1	2	1.457010	1.456345 (0.614979)
3	1	3	2.082945	2.082500 (0.812181)
4	1	5	3.383250	3.386851 (1.245560)
5	1	10	6.691656	6.696241 (2.390102)
6	2	3	2.326972	2.327373 (1.041293)
7	2	5	3.531986	3.529668 (1.421227)
8	2	7	4.809035	4.809207 (1.835244)
9	5	17	11.699648	11.702438 (4.480522)
10	13	20	15.407573	15.406031 (6.859660)

Tabulka 2.1: Spočtené hodnoty $\mathbb{E}Z$ a výsledky simulací pro vybraná a, b .

Kapitola 3

Dva disjunktní obdélníky

V této kapitole budeme uvažovat dva obdélníky a v každém z nich náhodně a vzájemně nezávisle volený bod. Cíl bude stejný jako v předchozí kapitole, tj. určit střední hodnotu vzdálenosti těchto dvou bodů. Zaměříme se pouze na případ, kdy strany jednotlivých obdélníků jsou vzájemně rovnoběžné. Dále budeme v celé kapitole předpokládat, že se obdélníky nepřekrývají. Metody výpočtu uvedené v této kapitole jsou převzaté z článku [3].



Obrázek 3.1: Vzájemná poloha dvou obdélníků pro $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Na obrázku 3.1 je zavedeno následující značení. Máme obdélníky $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Jejich středy S, S^* určují zároveň počátky kartézských soustav souřadnic $O_{xy}, O_{x^*y^*}$. Horizontální rozměr \mathcal{O}_1 , resp. \mathcal{O}_2 bud' $2a$, resp. $2a^*$, vertikální $2b$, resp. $2b^*$. Dále R_1 a R_2 jsou po řadě pravý dolní

roh \mathcal{O}_1 a levý horní roh \mathcal{O}_2 . Stejně jako v předchozí kapitole značíme x_{R_1} x -ovou souřadnici bodu R_1 a obdobně u bodu R_2 a ostatních souřadnicových os. Položíme

$$\alpha = x_{R_2} - x_{R_1} = x_{R_2}^* - x_{R_1}^*, \quad \beta = y_{R_1} - y_{R_2} = y_{R_1}^* - y_{R_2}^*.$$

Jde obecně o horizontální a vertikální vzdálenost nejbližších rohů jednotlivých obdélníků. Nechť α^* a β^* značí po řadě horizontální a vertikální vzdálenost středů obdélníků. Uvažujeme pouze případ $\alpha^* \geq 0, \beta^* \geq 0$. Zřejmě platí

$$\alpha^* = \alpha + a + a^*, \quad \beta^* = \beta + b + b^*.$$

V závislosti na hodnotách α a β rozlišíme tři základní vzájemné polohy \mathcal{O}_1 a \mathcal{O}_2 :

1. $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$,
2. $\alpha < 0, \beta \geq 0$,
3. $\alpha \geq 0, \beta < 0$.

První možnost je uvedena na obrázku 3.1 a dále rozebírána v odstavci 3.1. Druhá a třetí možnost vypovídají o tom, že obdélníky leží částečně pod sebou nebo vedle sebe, což upřesníme v odstavcích 3.2 a 3.3. Libovolná jiná vzájemná poloha obdélníků \mathcal{O}_1 a \mathcal{O}_2 se dá převést na jednu z těchto možností pomocí osové souměrnosti s jednou z výše zavedených souřadnicových os jakožto osy souměrnosti.

V \mathcal{O}_1 volíme náhodně bod P , v \mathcal{O}_2 bod P^* . Zavedeme náhodné veličiny X, Y , resp. X^*, Y^* k vyjádření souřadnic bodu P v O_{xy} , resp. bodu P^* v $O_{x^*y^*}$. Náhodná veličina Z nechť popisuje vzdálenost bodů P, P^* .

Vzhledem k tomu, že bod P je volen v \mathcal{O}_1 náhodně, mají náhodné veličiny X, Y rovnoměrné rozdělení po řadě na intervalech $[-a, a], [-b, b]$. Podobně uvažujeme o rozdělení X^*, Y^* . Platí tedy

$$X \sim R[-a, a], \quad Y \sim R[-b, b], \quad X^* \sim R[-a^*, a^*], \quad Y^* \sim R[-b^*, b^*].$$

Tudíž hustoty veličin X, Y, X^*, Y^* mají po řadě tvary

$$f_X(x) = \frac{1}{2a} \text{ pro } x \in [-a, a], \quad f_Y(y) = \frac{1}{2b} \text{ pro } y \in [-b, b],$$

$$f_{X^*}(x^*) = \frac{1}{2a^*} \text{ pro } x^* \in [-a^*, a^*], \quad f_{Y^*}(y^*) = \frac{1}{2b^*} \text{ pro } y^* \in [-b^*, b^*],$$

mimo tyto intervaly jsou nulové. Náhodné veličiny X, Y, X^*, Y^* jsou nezávislé, jejich sdružená hustota je proto součinem marginálních. Máme tedy

$$f(x, y, x^*, y^*) = \frac{1}{16aba^*b^*} \text{ pro } x \in [-a, a], y \in [-b, b], x^* \in [-a^*, a^*], y^* \in [-b^*, b^*]$$

a $f(x, y, x^*, y^*) = 0$ jinak.

Na obrázku 3.1 je vyznačen pravoúhlý trojúhelník s přeponou PP^* , jejíž délku popisuje náhodná veličina Z . Podle Pythagorovy věty platí

$$Z^2 = (\alpha^* - X + X^*)^2 + (\beta^* + Y - Y^*)^2. \quad (3.1)$$

3.1 Rozdělení Z pro $\alpha \geq 0$ a $\beta \geq 0$

Zde uvedeme dvě metody. První z nich je tzv. *přímá* a zahrnuje transformaci funkce čtyř proměnných, zatímco druhá je tzv. *nepřímá* a jde postupně o dvě transformace funkcí dvou proměnných.

Přímá metoda

Uvažujme transformaci $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, kde

$$\begin{aligned} t_1 &: U_1 = (\alpha^* - X + X^*)^2 + (\beta^* - Y - Y^*)^2, \\ t_2 &: U_2 = (\alpha^* - X + X^*)^2, \\ t_3 &: U_3 = X, \\ t_4 &: U_4 = Y. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Potom

$$U_1 = Z^2. \tag{3.3}$$

Položíme-li

$$G = \{(x, y, x^*, y^*); -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -a^* \leq x^* \leq a^*, -b^* \leq y^* \leq b^*\}, \tag{3.4}$$

hustota náhodného vektoru (X, Y, X^*, Y^*) je

$$f(x, y, x^*, y^*) = \frac{1}{16aba^*b^*} \text{ pro } (x, y, x^*, y^*) \in G$$

a 0 jinak. Zřejmě $\int_G f(x, y, x^*, y^*) dx dy dx^* dy^* = 1$. Zobrazení \mathbf{t} je prosté, neboť platí

$$\begin{aligned} \alpha^* - x + x^* &= \alpha + (a - x) + (a^* + x^*) \geq 0 \quad \forall x \in [-a, a], \forall x^* \in [-a^*, a^*], \\ \beta^* + y - y^* &= \beta + (b + y) + (b^* - y^*) \geq 0 \quad \forall y \in [-b, b], \forall y^* \in [-b^*, b^*]. \end{aligned}$$

Označme $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ inverzní transformaci k \mathbf{t} . Potom máme

$$\begin{aligned} \tau_1 &: X = U_3, \\ \tau_2 &: Y = U_4, \\ \tau_3 &: X^* = -\alpha^* + \sqrt{U_2} + U_3, \\ \tau_4 &: Y^* = \beta^* - \sqrt{U_1 - U_2} + U_4. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Podle věty o transformaci má náhodný vektor $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ hustotu

$$g(\mathbf{u}) = \begin{cases} f[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})] \cdot |D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u})| & \text{pro } \mathbf{u} \in \mathbf{t}(G), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \tag{3.6}$$

kde $D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u})$ je jakobián zobrazení $\boldsymbol{\tau}$ v bodě \mathbf{u} . Podle jeho definice dostaneme

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}) &= \frac{D(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)}{D(u_1, u_2, u_3, u_4)}(\mathbf{u}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \frac{\partial \tau_1}{\partial u_4}(\mathbf{u}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tau_4}{\partial u_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \frac{\partial \tau_4}{\partial u_4}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{u_2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{u_1-u_2}} & \frac{1}{2\sqrt{u_1-u_2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{u_2(u_1-u_2)}}. \end{aligned}$$

Pro vyjádření hustoty \mathbf{U} nám ještě chybí $\mathbf{t}(G)$, tj. chceme vyjádřit meze pro (u_1, u_2, u_3, u_4) na základě mezí pro (x, y, x^*, y^*) . Vyjdeme z jednotlivých vztahů transformace τ za předpokladu $(x, y, x^*, y^*) \in G$ (viz (3.4) a (3.5)). Platí

$$\left. \begin{array}{l} -a \leq x \leq a \\ x = u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow -a \leq u_3 \leq a, \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} -b \leq y \leq b \\ y = u_4 \end{array} \right\} \Rightarrow -b \leq u_4 \leq b, \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{array}{l} -a^* \leq x^* \leq a^* \\ x^* = -\alpha^* + \sqrt{u_2} + u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + a \leq \sqrt{u_2} + u_3 \leq \alpha + a + 2a^*, \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} -b^* \leq y^* \leq b^* \\ y^* = \beta^* - \sqrt{u_1 - u_2} + u_4 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta + b \leq \sqrt{u_1 - u_2} - u_4 \leq \beta + b + 2b^*. \quad (3.10)$$

Množina $\mathbf{t}(G)$ tedy vypadá takto

$$\mathbf{t}(G) = \{(u_1, u_2, u_3, u_4); -a \leq u_3 \leq a, -b \leq u_4 \leq b, \alpha + a \leq \sqrt{u_2} + u_3 \leq \alpha + a + 2a^*, \beta + b \leq \sqrt{u_1 - u_2} - u_4 \leq \beta + b + 2b^*\}.$$

Označme $\psi = 64aba^*b^*$. Dosazením do (3.6) dostaneme

$$g(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} \text{ pro } (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbf{t}(G)$$

a 0 jinak.

Nejbližším cílem je nyní integrace $g(u_1, u_2, u_3, u_4)$ podle u_3 , abychom dostali sdruženou hustotu veličin U_1, U_2, U_4 , tj. chceme vyjádřit $g(u_1, u_2, u_4)$. Označme dolní, resp. horní mez integrace podle u_3 jako $d(u_3)$, resp. $h(u_3)$, a dále restrikci množiny $\mathbf{t}(G)$ na vektor (u_1, u_2, u_4) jako $\mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2, u_4)}$. Z nerovností (3.7) a (3.9) odvodíme jednak hodnoty $d(u_3), h(u_3)$, jednak nerovnost podstatnou pro vyjádření $\mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2, u_4)}$. Platí

$$\begin{aligned} d(u_3) &= \max\{-a, \alpha + a - \sqrt{u_2}\}, \quad h(u_3) = \min\{a, \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2}\}, \\ \alpha \leq \alpha + a - u_3 &\leq \sqrt{u_2} \leq \alpha + a + 2a^* - u_3 \leq \alpha + 2a + 2a^*. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tedy

$$\mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2, u_4)} = \{(u_1, u_2, u_4); -b \leq u_4 \leq b, \alpha \leq \sqrt{u_2} \leq \alpha + 2a + 2a^*, \beta + b \leq \sqrt{u_1 - u_2} - u_4 \leq \beta + b + 2b^*\}$$

a pro $(u_1, u_2, u_4) \in \mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2, u_4)}$ můžeme obecně psát

$$g(u_1, u_2, u_4) = \int_{d(u_3)}^{h(u_3)} g(u_1, u_2, u_3, u_4) du_3 = (h(u_3) - d(u_3)) \cdot g(u_1, u_2, u_3, u_4)|_{u_3 \in [d(u_3), h(u_3)]}, \quad (3.12)$$

neboť $g(u_1, u_2, u_3, u_4)$ je konstantní vzhledem k $u_3 \in [d(u_3), h(u_3)]$. V závislosti na hodnotách výrazů $-a, a, \alpha + a - \sqrt{u_2}, \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2}$ se nám výpočet $g(u_1, u_2, u_4)$ rozpadá do čtyř možností:

1.

$$\left. \begin{array}{l} -a \leq \alpha + a - \sqrt{u_2} \\ a \leq \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_3) = \alpha + a - \sqrt{u_2} \\ h(u_3) = a \\ u_2 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \end{array} \right.$$

Z nerovnosti (3.11) navíc víme, že $u_2 \geq \alpha^2$.

2.

$$\left. \begin{array}{l} -a \leq \alpha + a - \sqrt{u_2} \\ a \geq \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_3) = \alpha + a - \sqrt{u_2} \\ h(u_3) = \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2} \\ (\alpha + 2a^*)^2 \leq u_2 \leq (\alpha + 2a)^2 \end{array} \right.$$

3.

$$\left. \begin{array}{l} -a \geq \alpha + a - \sqrt{u_2} \\ a \leq \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_3) = -a \\ h(u_3) = a \\ (\alpha + 2a)^2 \leq u_2 \leq (\alpha + 2a^*)^2 \end{array} \right.$$

4.

$$\left. \begin{array}{l} -a \geq \alpha + a - \sqrt{u_2} \\ a \geq \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_3) = -a \\ h(u_3) = \alpha + a + 2a^* - \sqrt{u_2} \\ u_2 \geq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \end{array} \right.$$

Z nerovnosti (3.11) navíc víme, že $u_2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2$.

Všimněme si, že pro $a < a^*$, resp. $a > a^*$ nemusíme uvažovat druhou, resp. třetí z výše uvedených možností, neboť v těchto případech je dolní mez pro u_2 větší než mez horní. Postupným dosazením těchto možností do (3.12) máme pro $(u_1, u_2, u_4) \in \mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2, u_4)}$ následující tvar hledané hustoty

$$g(u_1, u_2, u_4) = \begin{cases} \frac{\sqrt{u_2 - \alpha}}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } \alpha^2 \leq u_2 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{2 \min\{a, a^*\}}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq u_2 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{u_2}}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq u_2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále chceme integrovat $g(u_1, u_2, u_4)$ podle u_4 a získat tak sdruženou hustotu veličin U_1 , U_2 , tj. $g(u_1, u_2)$. Použijeme obdobné značení jako v předchozím odstavci; $d(u_4)$, resp. $h(u_4)$ a $\mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2)}$ bude značit po řadě dolní, resp. horní mez integrace a restrikci množiny $\mathbf{t}(G)$ na vektor (u_1, u_2) . Z nerovností (3.8) a (3.10) dostaneme

$$d(u_4) = \max\{-b, \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^*\}, \quad h(u_4) = \min\{b, \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b\},$$

$$\beta \leq \beta + b + u_4 \leq \sqrt{u_1 - u_2} \leq \beta + b + 2b^* + u_4 \leq \beta + 2b + 2b^*. \quad (3.13)$$

Odtud

$$\mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2)} = \{(u_1, u_2); \alpha \leq \sqrt{u_2} \leq \alpha + 2a + 2a^*, \beta \leq \sqrt{u_1 - u_2} \leq \beta + 2b + 2b^*\}$$

a pro $(u_1, u_2) \in \mathbf{t}(G)|_{(u_1, u_2)}$ platí

$$g(u_1, u_2) = \int_{d(u_4)}^{h(u_4)} g(u_1, u_2, u_4) du_4 = (h(u_4) - d(u_4)) \cdot g(u_1, u_2, u_4)|_{u_4 \in [d(u_4), h(u_4)]}, \quad (3.14)$$

neboť $g(u_1, u_2, u_4)$ je konstantní vzhledem k $u_4 \in [d(u_4), h(u_4)]$. Porovnáním hodnot výrazů $-b$, b , $\sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^*$, $\sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b$ máme následující možnosti:

1.

$$\left. \begin{array}{l} -b \leq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^* \\ b \leq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_4) = \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^* \\ h(u_4) = b \\ u_1 - u_2 \geq (\beta + 2 \max\{b, b^*\})^2 \end{array} \right.$$

Z nerovnosti (3.13) navíc víme, že $u_1 - u_2 \leq (\beta + 2b + 2b^*)^2$.

2.

$$\left. \begin{array}{l} -b \leq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^* \\ b \geq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_4) = \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^* \\ h(u_4) = \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b \\ (\beta + 2b^*)^2 \leq u_1 - u_2 \leq (\beta + 2b)^2 \end{array} \right.$$

3.

$$\left. \begin{array}{l} -b \geq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^* \\ b \leq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_4) = -b \\ h(u_4) = b \\ (\beta + 2b)^2 \leq u_1 - u_2 \leq (\beta + 2b^*)^2 \end{array} \right.$$

4.

$$\left. \begin{array}{l} -b \geq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b - 2b^* \\ b \geq \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u_4) = -b \\ h(u_4) = \sqrt{u_1 - u_2} - \beta - b \\ u_1 - u_2 \leq (\beta + 2 \min\{b, b^*\})^2 \end{array} \right.$$

Z nerovnosti (3.13) navíc víme, že $u_1 - u_2 \geq \beta^2$.

Pro $b < b^*$, resp. $b > b^*$ nemusíme uvažovat druhou, resp. třetí z výše uvedených možností, neboť v těchto případech je dolní mez pro $u_1 - u_2$ větší než mez horní. Shrnutím těchto možností dostaneme

$$h(u_4) - d(u_4) = \begin{cases} \sqrt{u_1 - u_2} - \beta & \text{pro } \beta^2 \leq u_1 - u_2 \leq (\beta + 2 \min\{b, b^*\})^2, \\ 2 \min\{b, b^*\} & \text{pro } (\beta + 2 \min\{b, b^*\})^2 \leq u_1 - u_2 \\ & \leq (\beta + 2 \max\{b, b^*\})^2, \\ \beta + 2b + 2b^* - \sqrt{u_1 - u_2} & \text{pro } (\beta + 2 \max\{b, b^*\})^2 \leq u_1 - u_2 \\ & \leq (\beta + 2b + 2b^*)^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zápis dále zjednodušíme značením

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha^2, & A_2 &= (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, & A_3 &= (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, & A_4 &= (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ B_1 &= \beta^2, & B_2 &= (\beta + 2 \min\{b, b^*\})^2, & B_3 &= (\beta + 2 \max\{b, b^*\})^2, & B_4 &= (\beta + 2b + 2b^*)^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zřejmě platí

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq A_4, \quad B_1 \leq B_2 \leq B_3 \leq B_4.$$

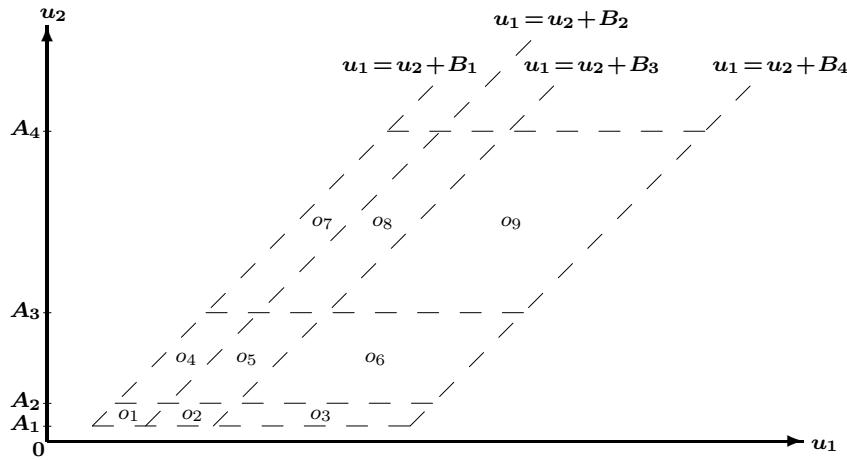
Toto značení tedy zohledňuje uspořádání mezních hodnot intervalů pro u_1 , resp. pro $u_1 - u_2$ podle velikosti. Hledanou hustotu $g(u_1, u_2)$ dostaneme dosazením jednotlivých tvarů výrazu $h(u_4) - d(u_4)$ a hustoty $g(u_1, u_2, u_4)|_{u_4 \in [d(u_4), h(u_4)]}$ do (3.14). Dojdeme k výsledku

$$g(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{u_2} - \alpha)(\sqrt{u_1 - u_2} - \beta)}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_1 \leq u_2 \leq A_2, B_1 \leq u_1 - u_2 \leq B_2, \\ \frac{(\sqrt{u_2} - \alpha)(2 \min\{b, b^*\})}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_1 \leq u_2 \leq A_2, B_2 \leq u_1 - u_2 \leq B_3, \\ \frac{(\sqrt{u_2} - \alpha)(\beta + 2b + 2b^* - \sqrt{u_1 - u_2})}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_1 \leq u_2 \leq A_2, B_3 \leq u_1 - u_2 \leq B_4, \\ \frac{(2 \min\{a, a^*\})(\sqrt{u_1 - u_2} - \beta)}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_2 \leq u_2 \leq A_3, B_1 \leq u_1 - u_2 \leq B_2, \\ \frac{(2 \min\{a, a^*\})(2 \min\{b, b^*\})}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_2 \leq u_2 \leq A_3, B_2 \leq u_1 - u_2 \leq B_3, \\ \frac{(2 \min\{a, a^*\})(\beta + 2b + 2b^* - \sqrt{u_1 - u_2})}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_2 \leq u_2 \leq A_3, B_3 \leq u_1 - u_2 \leq B_4, \\ \frac{(\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{u_2})(\sqrt{u_1 - u_2} - \beta)}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_3 \leq u_2 \leq A_4, B_1 \leq u_1 - u_2 \leq B_2, \\ \frac{(\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{u_2})(2 \min\{b, b^*\})}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_3 \leq u_2 \leq A_4, B_2 \leq u_1 - u_2 \leq B_3, \\ \frac{(\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{u_2})(\beta + 2b + 2b^* - \sqrt{u_1 - u_2})}{\psi \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} & \text{pro } A_3 \leq u_2 \leq A_4, B_3 \leq u_1 - u_2 \leq B_4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Hustota $g(u_1, u_2)$ má tudíž svůj specifický nenulový tvar pro každou z devíti oblastí, které jsou znázorněny na obrázku 3.2 níže a jsou po řadě označeny symboly o_1, \dots, o_9 .

Dalším dílčím cílem bude vyjádření hustoty $g(u_1)$ náhodné veličiny U_1 , tzn. integrace hustoty $g(u_1, u_2)$ podle u_2 . Za tímto účelem nejprve odvodíme tvar primitivní funkce k funkci $g(u_1, u_2)$ vzhledem k proměnné u_2 , a to na jednotlivých devíti oblastech zvlášt'. Pro $i = 1, \dots, 9$ položme

$$\begin{aligned} g_i(u_1, u_2) &= \begin{cases} g(u_1, u_2) & \text{pro } (u_1, u_2) \in o_i, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \\ G_i(u_1, u_2) &= \int g_i(u_1, u_2) du_2. \end{aligned}$$

Obrázek 3.2: Jednotlivé oblasti pro (u_1, u_2) .

Pro $i = 1, \dots, 9$ lze nenulovou část $g_i(u_1, u_2)$ vyjádřit ve tvaru

$$g_i(u_1, u_2) = \frac{1}{\psi} \left(R_i + S_i \cdot \frac{1}{\sqrt{u_2}} + T_i \cdot \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_2}} + W_i \cdot \frac{1}{\sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} \right) \quad \text{pro } (u_1, u_2) \in o_i,$$

kde R_i, S_i, T_i, W_i jsou konstanty pro každé $i = 1, \dots, 9$. Jednotlivé funkce $g_i, i = 1, \dots, 9$ se tedy liší pouze těmito konstantami, jejichž hodnoty udává tabulka 3.1. Pro příslušné primitivní funkce platí

$$G_i(u_1, u_2) = \frac{1}{\psi} \left(R_i \int du_2 + S_i \int \frac{du_2}{\sqrt{u_2}} + T_i \int \frac{du_2}{\sqrt{u_1 - u_2}} + W_i \int \frac{du_2}{\sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} \right),$$

kde $i = 1, \dots, 9$.

i	R_i	S_i	T_i	W_i
1	1	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha\beta$
2	0	0	$2 \min\{b, b^*\}$	$-2\alpha \min\{b, b^*\}$
3	-1	α	$\beta + 2b + 2b^*$	$-\alpha(\beta + 2b + 2b^*)$
4	0	$2 \min\{a, a^*\}$	0	$-2\beta \min\{a, a^*\}$
5	0	0	0	$4 \min\{a, a^*\} \min\{b, b^*\}$
6	0	$-2 \min\{a, a^*\}$	0	$2 \min\{a, a^*\} (\beta + 2b + 2b^*)$
7	-1	$\alpha + 2a + 2a^*$	β	$-\beta(\alpha + 2a + 2a^*)$
8	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\} (\alpha + 2a + 2a^*)$
9	1	$-(\alpha + 2a + 2a^*)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(\alpha + 2a + 2a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$

Tabulka 3.1: Konstanty $R_i, S_i, T_i, W_i, i = 1, \dots, 9$.

Zřejmě

$$\int du_2 = u_2, \quad \int \frac{du_2}{\sqrt{u_2}} = 2\sqrt{u_2}, \quad \int \frac{du_2}{\sqrt{u_1 - u_2}} = -2\sqrt{u_1 - u_2}.$$

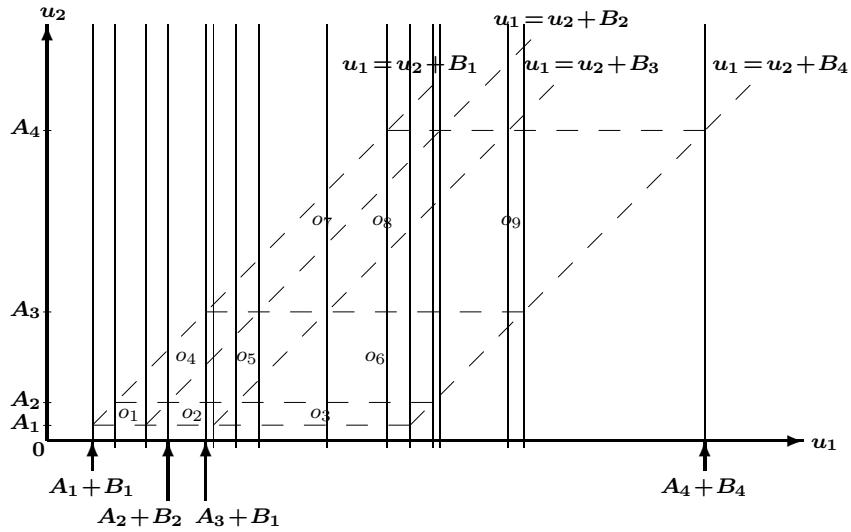
Pro výpočet $\int \frac{1}{\sqrt{u_2(u_1-u_2)}} du_2$ použijeme substituci $v = \arccos \sqrt{\frac{u_2}{u_1}}$. Dostaneme

$$\int \frac{du_2}{\sqrt{u_2(u_1-u_2)}} = \int (-2) dv = -2 \arccos \sqrt{\frac{u_2}{u_1}}.$$

Odtud pro $i = 1, \dots, 9$ máme

$$G_i(u_1, u_2) = \frac{1}{\psi} \left(R_i \cdot u_2 + 2 S_i \cdot \sqrt{u_2} - 2 T_i \cdot \sqrt{u_1 - u_2} - 2 W_i \cdot \arccos \sqrt{\frac{u_2}{u_1}} \right). \quad (3.17)$$

Známe-li tyto primitivní funkce, k vyjádření $g(u_1)$ stačí rozdělit interval $(A_1 + B_1, A_4 + B_4)$ na 15 dílčích podintervalů, jak ukazuje obrázek 3.3, a spočítat příslušný tvar $g(u_1)$ na každém z nich zvlášť.



Obrázek 3.3: Jednotlivé oblasti pro (u_1, u_2) .

Obecné vyjádření této hustoty však nepotřebujeme, proto uvedeme jen příklad výpočtu $g(u_1)$ pro $u_1 \in (A_2 + B_2, A_3 + B_1)$ za předpokladu, že hodnoty A_i, B_j , $i, j = 1, \dots, 4$ odpovídají obrázku 3.3, a tím i příslušnému dělení na podintervaly. V tomto speciálním případě využijeme výše spočtené primitivní funkce $G_2(u_1, u_2)$, $G_4(u_1, u_2)$, $G_5(u_1, u_2)$, přičemž meze integrace vyčteme z obrázku 3.3. Pro $u_1 \in (A_2 + B_2, A_3 + B_1)$ tedy platí

$$g(u_1) = [G_2(u_1, u_2)]_{A_1}^{A_2} + [G_5(u_1, u_2)]_{A_2}^{u_1 - B_2} + [G_4(u_1, u_2)]_{u_1 - B_2}^{u_1 - B_1}. \quad (3.18)$$

Podobně bychom postupovali na ostatních podintervalech.

Nyní potřebujeme vypočítat hustotu $f(z)$ náhodné veličiny Z . Z předchozího víme, že $U_1 = Z^2$ (viz (3.3)). Při známé hustotě $g(u_1)$ stačí tedy použít transformaci

$$t : Z = \sqrt{U_1} \quad \text{a její inverzi} \quad \tau : U_1 = Z^2. \quad (3.19)$$

Dostaneme

$$f(z) = g[\tau(z)] \cdot |D_\tau(z)| = 2z \cdot g[\tau(z)] \quad \text{pro } z \in (\sqrt{A_1 + B_1}, \sqrt{A_4 + B_4})$$

a $f(z) = 0$ jinak.

Dosadíme-li do speciálního případu (3.18), potom pro $z \in (\sqrt{A_2 + B_2}, \sqrt{A_3 + B_1})$ máme

$$g[\tau(z)] = [G_2(\tau(z), u_2)]_{A_1}^{A_2} + [G_5(\tau(z), u_2)]_{A_2}^{z^2 - B_2} + [G_4(\tau(z), u_2)]_{z^2 - B_2}^{z^2 - B_1},$$

kde obecně

$$G_i(\tau(z), u_2) = \frac{1}{\psi} \left(R_i \cdot u_2 + 2 S_i \cdot \sqrt{u_2} - 2 T_i \cdot \sqrt{z^2 - u_2} - 2 W_i \cdot \arccos \sqrt{\frac{u_2}{z^2}} \right) \quad (3.20)$$

pro $i = 1, \dots, 9$. Tímto způsobem bychom mohli spočítat $f(z)$ i pro ostatní podintervaly intervalu $(\sqrt{A_1 + B_1}, \sqrt{A_4 + B_4})$.

Cílem však není samotná hustota $f(z)$, ale střední hodnota náhodné veličiny Z , pro kterou platí

$$\mathbb{E}Z = \int_{\mathbb{R}} z f(z) dz = 2 \int_{\mathbb{R}} z^2 g[\tau(z)] dz = 2 \int_{\mathbb{R}} z^2 \left(\int_{\mathbb{R}} g[\tau(z), u_2] du_2 \right) dz.$$

Podle Fubiniové věty máme

$$\mathbb{E}Z = 2 \int_O z^2 g[\tau(z), u_2] d(u_2, z), \quad \text{kde } O = \bigcup_{i=1}^9 o_i.$$

V případě množiny O jde zřejmě o disjunktní sjednocení oblastí o_i , $i = 1, \dots, 9$, proto můžeme na uvedený integrál pohlížet jako na součet

$$\mathbb{E}Z = 2 \sum_{i=1}^9 \int_{o_i} z^2 g[\tau(z), u_2] d(u_2, z).$$

Nyní opět využijeme Fubiniovu větu a dostaneme

$$\mathbb{E}Z = 2 \sum_{i=1}^9 \int_{\mathbb{R}} z^2 \left(\int_{\mathbb{R}} g_i[\tau(z), u_2] du_2 \right) dz.$$

Nejprve se budeme zabývat vnitřními integrály. Pro $i = 1, \dots, 9$ označme

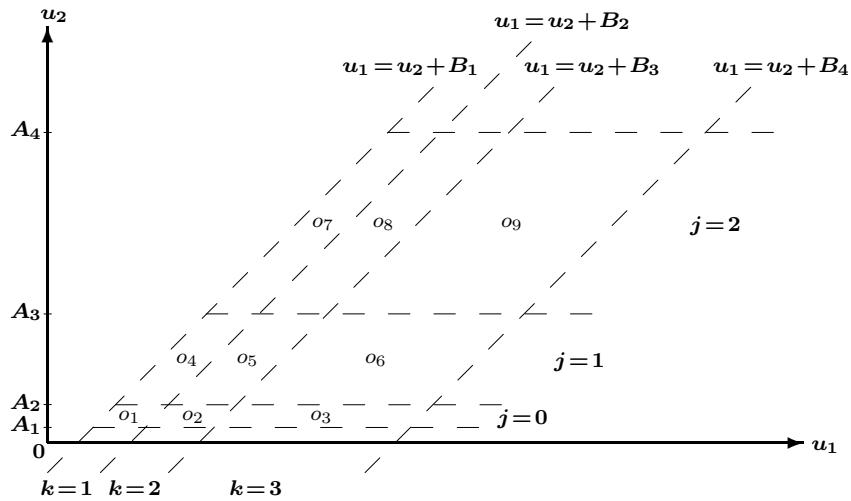
$$K_i(z) = \int_{\mathbb{R}} g_i[\tau(z), u_2] du_2. \quad (3.21)$$

Potom tedy

$$\mathbb{E}Z = 2 \sum_{i=1}^9 \int_{\mathbb{R}} z^2 K_i(z) dz. \quad (3.22)$$

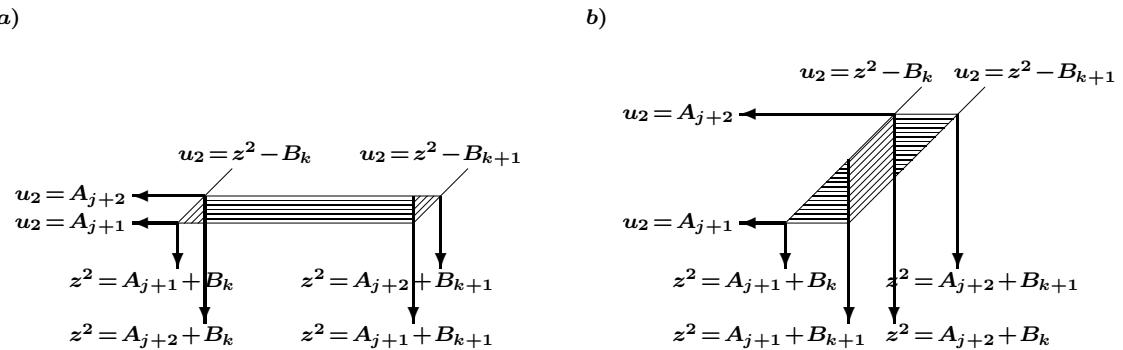
Primitivní funkce $G_i(\tau(z), u_2)$ k funkcím $g_i[\tau(z), u_2]$ podle u_2 , $i = 1, \dots, 9$ máme k dispozici (viz (3.20)) a pro jednoduchost zápisu je nadále budeme značit pouze G_i , $i = 1, \dots, 9$. Stačí tedy určit příslušné meze integrace podle u_2 .

Jednotlivé oblasti o_i , $i = 1, \dots, 9$, jsou zřejmě rovnoběžníky. Souřadnice jejich vrcholů můžeme popsat pomocí vertikálního indexu $j \in \{0, 1, 2\}$ a horizontálního indexu $k \in \{1, 2, 3\}$ (viz obrázek 3.4), přičemž $i = 3j + k$ pokryje pro všechny možné kombinace hodnot j, k celou indexovou množinu $\{1, \dots, 9\}$. V tomto značení mají vrcholy rovnoběžníka o_{3j+k} po řadě u_1 -souřadnice $A_{j+1} + B_k$, $A_{j+1} + B_{k+1}$, $A_{j+2} + B_{k+1}$, $A_{j+2} + B_k$, a to pro všechna $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$.



Obrázek 3.4: Oblasti o_{3j+k} , $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$.

Pro výpočet integrálů (3.21) je podstatné rozlišit dva typy rovnoběžníků, jak ukazuje obrázek 3.5. Varianta (a) zde znázorňuje rovnoběžník o_{3j+k} , pro který $(A_{j+2} + B_k) < (A_{j+1} + B_{k+1})$, zatímco varianta (b) ukazuje případ s opačnou nerovností.



Obrázek 3.5: Dva možné typy oblastí o_{3j+k} , $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$.

Použijme ještě značení $K_{3j+k}^{(a)}(z)$, resp. $K_{3j+k}^{(b)}(z)$ pro integrál $K_{3j+k}(z)$ v oblasti o_{3j+k} typu (a), resp. typu (b), $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$. Obrázek 3.5 ukazuje, že v obou těchto případech musíme příslušný interval pro z rozdělit na tři dílčí podintervaly a na každém z nich zvlášť určit meze integrace podle u_2 . Pro $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$ vychází

$$K_{3j+k}^{(a)}(z) = \begin{cases} [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{z^2-B_k} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+2} + B_k}), \\ [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{A_{j+2}} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}), \\ [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{A_{j+2}} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$K_{3j+k}^{(b)}(z) = \begin{cases} [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{z^2-B_k} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}), \\ [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{z^2-B_k} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2} + B_k}), \\ [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{A_{j+2}} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Dosazením do (3.22) dostaneme pro $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$

$$\mathbb{E}Z = 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}} z^2 K_{3j+k}(z) dz,$$

kde

$$K_{3j+k}(z) = \begin{cases} K_{3j+k}^{(a)}(z) & \text{pro } (A_{j+2} + B_k) \leq (A_{j+1} + B_{k+1}), \\ K_{3j+k}^{(b)}(z) & \text{pro } (A_{j+2} + B_k) > (A_{j+1} + B_{k+1}). \end{cases}$$

S využitím výsledků (3.23), (3.24) máme

$$\begin{aligned} \int z^2 K_{3j+k}^{(a)}(z) dz &= \int_{\sqrt{A_{j+1} + B_k}}^{\sqrt{A_{j+2} + B_k}} z^2 [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{z^2-B_k} dz + \int_{\sqrt{A_{j+2} + B_k}}^{\sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{A_{j+2}} dz \\ &\quad + \int_{\sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}}^{\sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{A_{j+2}} dz, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \int z^2 K_{3j+k}^{(b)}(z) dz &= \int_{\sqrt{A_{j+1} + B_k}}^{\sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{z^2-B_k} dz + \int_{\sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}}^{\sqrt{A_{j+2} + B_k}} z^2 [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{z^2-B_k} dz \\ &\quad + \int_{\sqrt{A_{j+2} + B_k}}^{\sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{A_{j+2}} dz. \end{aligned} \quad (3.26)$$

EZ je tedy součtem 27 integrálů. Mezi nimi se však vyskytují pouze následující čtyři typy

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \int_g^h z^2 [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{z^2 - B_k} dz, \\ & \bullet \quad \int_g^h z^2 [G_{3j+k}]_{A_{j+1}}^{A_{j+2}} dz, \\ & \bullet \quad \int_g^h z^2 [G_{3j+k}]_{z^2 - B_{k+1}}^{A_{j+2}} dz, \\ & \bullet \quad \int_g^h z^2 [G_{3j+k}]_{z^2 - B_{k+1}}^{z^2 - B_k} dz, \end{aligned} \tag{3.27}$$

kde $g, h \in \{\sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}\}$ a opět $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$, přičemž v rámci každého takového integrálu je $g \leq h$. Po jejich rozepsání dostaneme

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), z^2 - B_k) dz - \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), A_{j+1}) dz, \\ & \bullet \quad \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), A_{j+2}) dz - \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), A_{j+1}) dz, \\ & \bullet \quad \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), A_{j+2}) dz - \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), z^2 - B_{k+1}) dz, \\ & \bullet \quad \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), z^2 - B_k) dz - \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), z^2 - B_{k+1}) dz. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Odtud je vidět, že stačí vyřešit dva typy integrálů, a to

$$L_1(j, k, g, h, c) = \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), z^2 - c^2) dz, \quad L_2(j, k, g, h, d) = \int_g^h z^2 G_{3j+k}(\tau(z), d^2) dz,$$

kde $c \in \{\sqrt{B_k}, \sqrt{B_{k+1}}\}$, $d \in \{\sqrt{A_{j+1}}, \sqrt{A_{j+2}}\}$, $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3$ (g, h viz výše). Nahlédnutím zpět do (3.25), (3.26) můžeme ověřit, že u každého integrálu typu L_1 , resp. L_2 je $c \leq g$, resp. $d \leq g$, což budeme potřebovat později. Dosadíme podle (3.20) a po snadných úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} L_1(j, k, g, h, c) &= \frac{1}{\psi} \int_g^h z^2 \left(R_{3j+k} \cdot (z^2 - c^2) + 2 S_{3j+k} \cdot \sqrt{z^2 - c^2} - 2c \cdot T_{3j+k} \right. \\ &\quad \left. - 2 W_{3j+k} \cdot \arccos \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{z^2}} \right) dz \\ &= \frac{1}{\psi} \left[\frac{R_{3j+k}}{5} (h^5 - g^5) - \frac{c}{3} (c R_{3j+k} + 2 T_{3j+k}) (h^3 - g^3) \right. \\ &\quad \left. + 2 S_{3j+k} \int_g^h z^2 \sqrt{z^2 - c^2} dz - 2 W_{3j+k} \int_g^h z^2 \arccos \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{z^2}} dz \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(j, k, g, h, d) &= \frac{1}{\psi} \int_g^h z^2 \left(d^2 \cdot R_{3j+k} + 2d \cdot S_{3j+k} - 2 T_{3j+k} \cdot \sqrt{z^2 - d^2} \right. \\
&\quad \left. - 2 W_{3j+k} \cdot \arccos \frac{d}{z} \right) dz \\
&= \frac{1}{\psi} \left[\frac{d}{3} (d R_{3j+k} + 2 S_{3j+k}) (h^3 - g^3) \right. \\
&\quad \left. - 2 T_{3j+k} \int_g^h z^2 \sqrt{z^2 - d^2} dz - 2 W_{3j+k} \int_g^h z^2 \arccos \frac{d}{z} dz \right].
\end{aligned}$$

Označíme-li

$$M_1(g, h, c) = \int_g^h z^2 \arccos \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{z^2}} dz, \quad (3.29)$$

$$M_2(g, h, d) = \int_g^h z^2 \arccos \frac{d}{z} dz, \quad (3.30)$$

$$M_3(g, h, c) = \int_g^h z^2 \sqrt{z^2 - c^2} dz, \quad (3.31)$$

potom máme

$$\begin{aligned}
L_1(j, k, g, h, c) &= \frac{1}{\psi} \left[\frac{R_{3j+k}}{5} (h^5 - g^5) - \frac{c}{3} (c R_{3j+k} + 2 T_{3j+k}) (h^3 - g^3) \right. \\
&\quad \left. + 2 S_{3j+k} \cdot M_3(g, h, c) - 2 W_{3j+k} \cdot M_1(g, h, c) \right], \\
L_2(j, k, g, h, d) &= \frac{1}{\psi} \left[\frac{d}{3} (d R_{3j+k} + 2 S_{3j+k}) (h^3 - g^3) \right. \\
&\quad \left. - 2 T_{3j+k} \cdot M_3(g, h, d) - 2 W_{3j+k} \cdot M_2(g, h, d) \right]
\end{aligned}$$

a postupným dosazením do (3.28) a (3.27) dostaneme pro integrály (3.25) a (3.26) vyjádření

$$\begin{aligned}
\int z^2 K_{3j+k}^{(a)}(z) dz &= L_1(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{B_k}) \\
&\quad - L_2(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+1}}) \\
&\quad + L_2(j, k, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2}}) \\
&\quad - L_2(j, k, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+1}}) \\
&\quad + L_2(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2}}) \\
&\quad - L_1(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}, \sqrt{B_{k+1}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int z^2 K_{3j+k}^{(b)}(z) dz = & L_1(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{B_k}) \\ & - L_2(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+1}}) \\ & + L_1(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{B_k}) \\ & - L_1(j, k, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{B_{j+1}}) \\ & + L_2(j, k, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+2}}) \\ & - L_1(j, k, \sqrt{A_{j+2} + B_k}, \sqrt{A_{j+2} + B_{k+1}}, \sqrt{B_{k+1}}). \end{aligned}$$

Integrály (3.29), (3.30), (3.31) spočteme buď ručně (viz dodatek A) nebo pomocí softwaru *Wolfram Mathematica 6.0*, ve kterém lze naprogramovat celý výše uvedený výpočetní postup. Jeho výsledky pro vybrané hodnoty vektoru $(a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta)$ jsou uvedeny v tabulce 3.2 ve sloupci **EZ**. Pro srovnání můžeme jednak spočítat vzdálenosti středů daných obdélníků podle vzorce

$$\sqrt{(\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2} = \sqrt{(\alpha + a + a^*)^2 + (\beta + b + b^*)^2} \quad (\text{viz sloupec } \textit{Odhad} \text{ tabulky 3.2}),$$

jednak na základě konkrétních hodnot $a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta$ simulovat hodnoty náhodných veličin X, Y, X^*, Y^* , a následně spočítat příslušnou vzdálenost bodů $P[X, Y], P^*[X^*, Y^*]$ podle vzorce

$$\sqrt{(\alpha^* - X + X^*)^2 + (\beta^* - Y + Y^*)^2} = \sqrt{(\alpha + a + a^* - X + X^*)^2 + (\beta + b + b^* - Y + Y^*)^2}.$$

Sloupec *Simulace* tabulky 3.2 udává výsledky simulací v softwaru *Wolfram Mathematica 6.0*, přičemž pro každou variantu zde bylo generováno 1 000 000 dvojic náhodných bodů P, P^* . V tabulce je uveden vždy výběrový průměr vzdáleností těchto bodů a v závorce za ním příslušná výběrová směrodatná odchylka.

$(a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta)$	EZ	<i>Odhad</i>	<i>Simulace</i>
(1, 1, 1, 1, 0, 0)	2.94712	2.82843	2.94661 (0.80382)
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	4.32136	4.24264	4.32099 (0.81319)
(1, 1, 1, 1, 1, 2)	5.06679	5.00000	5.06586 (0.81313)
(1, 1, 2, 2, 0, 0)	4.43929	4.24264	4.44027 (1.27254)
(1, 1, 2, 2, 1, 1)	5.80402	5.65685	5.80235 (1.28203)
(1, 1, 2, 2, 1, 2)	6.53325	6.40312	6.53085 (1.28412)
(1, 2, 3, 4, 1, 1)	8.86667	8.60233	8.86506 (2.32278)

Tabulka 3.2: Spočtené hodnoty **EZ** v porovnání se vzdálenostmi středů obdélníků a výsledky simulací pro vybraná $a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta$.

Vidíme, že vzdálenost středů obdélníků je ve všech případech menší než střední hodnota vzdálenosti náhodně volených bodů v těchto obdélníkách, tento odhad tedy podhodnocuje **EZ**.

Nepřímá metoda

Zde uvedeme jiný postup k získání sdružené hustoty náhodných veličin U_1, U_2 na základě znalosti rozdělení náhodných veličin X, Y, X^*, Y^* .

Mějme transformaci $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, kde

$$\begin{aligned} r_1: \quad & V_1 = \alpha^* - X + X^*, \\ r_2: \quad & V_2 = X^*. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Připomeňme, že X a X^* jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením a náhodný vektor (X, X^*) má hustotu

$$f(x, x^*) = \frac{1}{4aa^*} \quad \text{pro } -a \leq x \leq a, \quad -a^* \leq x^* \leq a^*$$

a 0 jinak. Bud' $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$ inverzní transformace k \mathbf{r} . Potom platí

$$\begin{aligned} \rho_1: \quad & X = V_2 - V_1 + \alpha^*, \\ \rho_2: \quad & X^* = V_2. \end{aligned}$$

Podle věty o transformaci má náhodný vektor $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ hustotu

$$q(\mathbf{v}) = f[\boldsymbol{\rho}(\mathbf{v})] \cdot |D_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{v})| \quad \text{pro } -\alpha - 2a - a^* \leq v_2 - v_1 \leq -\alpha - a^*, \quad -a^* \leq v_2 \leq a^* \quad (3.33)$$

a 0 jinak. Symbol $D_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{v})$ zde značí jakobián zobrazení $\boldsymbol{\rho}$ v bodě \mathbf{v} . Platí

$$D_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{v}) = \frac{D(\rho_1, \rho_2)}{D(v_1, v_2)}(\mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial v_1}(\mathbf{v}) & \frac{\partial \rho_1}{\partial v_2}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial v_1}(\mathbf{v}) & \frac{\partial \rho_2}{\partial v_2}(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Dosadíme do (3.33) a dostaneme sdruženou hustotu veličin V_1, V_2

$$q(v_1, v_2) = \frac{1}{4aa^*} \quad \text{pro } -\alpha - 2a - a^* \leq v_2 - v_1 \leq -\alpha - a^*, \quad -a^* \leq v_2 \leq a^*$$

a 0 jinak. Integrováním $q(v_1, v_2)$ podle v_2 nám vyjde hustota náhodné veličiny V_1

$$\begin{aligned} q(v_1) &= \int_{\mathbb{R}} q(v_1, v_2) dv_2 = \frac{1}{4aa^*} \int_{\max\{v_1 - \alpha - 2a - a^*, -a^*\}}^{\min\{v_1 - \alpha - a^*, a^*\}} dv_2 \\ &= \begin{cases} \frac{v_1 - \alpha}{4aa^*} & \text{pro } \alpha \leq v_1 \leq \alpha + 2 \min\{a, a^*\}, \\ \frac{\min\{a, a^*\}}{2aa^*} & \text{pro } \alpha + 2 \min\{a, a^*\} \leq v_1 \leq \alpha + 2 \max\{a, a^*\}, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - v_1}{4aa^*} & \text{pro } \alpha + 2 \max\{a, a^*\} \leq v_1 \leq \alpha + 2a + 2a^*, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.34) \end{aligned}$$

Dále provedeme transformaci

$$r_3 : W_1 = V_1^2 \quad (3.35)$$

s inverzí

$$\rho_3 : V_1 = \sqrt{W_1}$$

a vypočteme hustotu $p_1(w_1)$ náhodné veličiny W_1 . Platí

$$p_1(w_1) = q[\rho_3(w_1)] \cdot |D_{\rho_3}(w_1)| = \frac{1}{2\sqrt{w_1}} \cdot q[\rho_3(w_1)] \quad \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2$$

a $p_1(w_1) = 0$ jinak. Odtud a z výsledku (3.34) dostaneme

$$p_1(w_1) = \begin{cases} \frac{\sqrt{w_1} - \alpha}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\min\{a, a^*\}}{4aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.36)$$

Stejným způsobem lze odvodit hustotu náhodné veličiny $W_2 = (\beta^* + Y - Y^*)^2$. Dojdeme ke tvaru

$$p_2(w_2) = \begin{cases} \frac{\sqrt{w_2} - \beta}{8bb^*\sqrt{w_2}} & \text{pro } \beta^2 \leq w_2 \leq (\beta + 2 \min\{b, b^*\})^2, \\ \frac{\min\{b, b^*\}}{4bb^*\sqrt{w_2}} & \text{pro } (\beta + 2 \min\{b, b^*\})^2 \leq w_2 \leq (\beta + 2 \max\{b, b^*\})^2, \\ \frac{\beta + 2b + 2b^* - \sqrt{w_2}}{8bb^*\sqrt{w_2}} & \text{pro } (\beta + 2 \max\{b, b^*\})^2 \leq w_2 \leq (\beta + 2b + 2b^*)^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.37)$$

Veličiny W_1, W_2 jsou nezávislé, jejich sdružená hustota je tudíž součinem marginálních

$$p(w_1, w_2) = p_1(w_1) \cdot p_2(w_2).$$

Vraťme se zpět ke vztahu (3.1) a transformaci (3.2). Zřejmě platí

$$U_1 = Z^2 = W_1 + W_2 \quad \text{a} \quad U_2 = W_1.$$

Nabízí se tedy transformace $s = (s_1, s_2)$, pro kterou

$$\begin{aligned} s_1 : U_1 &= W_1 + W_2, \\ s_2 : U_2 &= W_1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Její inverzi označíme $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Potom

$$\begin{aligned}\sigma_1: \quad W_1 &= U_2, \\ \sigma_2: \quad W_2 &= U_1 - U_2.\end{aligned}$$

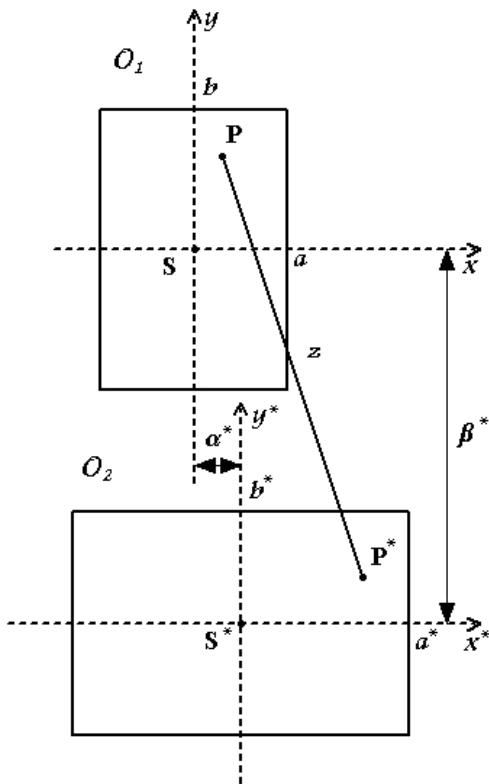
Z věty o transformaci má sdružená hustota veličin U_1, U_2 pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ tvar

$$g(\mathbf{u}) = p[\sigma(\mathbf{u})] \cdot |D_\sigma(\mathbf{u})| = p_1[\sigma_1(\mathbf{u})] \cdot p_2[\sigma_2(\mathbf{u})]$$

pro $\alpha^2 \leq u_2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2$, $\beta^2 \leq u_1 - u_2 \leq (\beta + 2b + 2b^*)^2$ a $g(\mathbf{u}) = 0$ jinak, neboť $|D_\sigma(\mathbf{u})| = 1$.

Dosadíme-li do tohoto vyjádření podle (3.36) a (3.37), potom za použití značení (3.15) dostaneme naprosto stejný tvar hustoty $g(u_1, u_2)$ jako v (3.16). Dále bychom postupovali stejně, jak je popsáno v přímé metodě.

3.2 Rozdělení Z pro $\alpha < 0$ a $\beta \geq 0$



Obrázek 3.6: Vzájemná poloha dvou obdélníků pro $\alpha < 0$, $\beta \geq 0$.

Pro odvození hustoty náhodné veličiny Z využijeme opět vztah (3.1)

$$Z^2 = (\alpha^* - X + X^*)^2 + (\beta^* + Y - Y^*)^2.$$

Oproti odstavci 3.1 zde však narazíme na následující problém. Náhodná veličina daná vzorcem

$$\alpha^* - X + X^* = \alpha + (a - X) + (a^* + X^*)$$

může pro $\alpha < 0$ nabývat jak kladných, tak záporných hodnot. Při transformaci budeme tedy muset rozlišit více případů, aby byla splněna podmínka prostého zobrazení. Přímá metoda by zde byla z tohoto důvodu příliš komplikovaná, použijeme tedy metodu nepřímou, kde najednou transformujeme pouze dvě proměnné, nikoli čtyři jako v metodě přímé.

Výpočet hustoty $q(v_1)$ náhodné veličiny $V_1 = \alpha^* - X + X^*$ probíhá stejně jako pro $\alpha \geq 0$ (viz (3.34)). Dále potřebujeme vyjádřit hustotu p_1 náhodné veličiny $W_1 = V_1^2$. Za tímto účelem zavedeme dvě transformace (a jejich inverze) rozlišené podle znaménka V_1 , máme tedy

$$\begin{aligned} \text{pro } V_1 \geq 0 \quad r_{31} : \quad W_1 &= V_1^2, \quad \rho_{31} : \quad V_1 = \sqrt{W_1}, \\ \text{pro } V_1 < 0 \quad r_{32} : \quad W_1 &= V_1^2, \quad \rho_{32} : \quad V_1 = -\sqrt{W_1}. \end{aligned}$$

Označme ještě

$$q^+(v_1) = \begin{cases} q(v_1) & \text{pro } v_1 \geq 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad q^-(v_1) = \begin{cases} q(v_1) & \text{pro } v_1 < 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom máme

$$\begin{aligned} p_1(w_1) &= q^+[\rho_{31}(w_1)] \cdot |D_{\rho_{31}}(w_1)| + q^-[\rho_{32}(w_1)] \cdot |D_{\rho_{32}}(w_1)| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{w_1}} (q^+[\rho_{31}(w_1)] + q^-[\rho_{32}(w_1)]). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Abychom mohli jednoduše dosadit do tohoto vyjádření, potřebujeme nejprve zjistit, jak je to se znaménkem mezních hodnot α , $\alpha + 2 \min\{a, a^*\}$, $\alpha + 2 \max\{a, a^*\}$, $\alpha + 2a + 2a^*$ a s velikostí čtverců těchto hodnot. V předchozím odstavci platilo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq \alpha + 2 \min\{a, a^*\} \leq \alpha + 2 \max\{a, a^*\} \leq \alpha + 2a + 2a^*, \\ \alpha^2 &\leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2. \end{aligned}$$

Připomeňme, že v celé této kapitole předpokládáme $\alpha^* \geq 0$. Dokážeme, že pro $\alpha < 0$ platí následující nerovnosti:

- (a) $\alpha + 2 \max\{a, a^*\} \geq 0$,
- (b) $\alpha + 2a + 2a^* \geq 0$,
- (c) $(\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2$,
- (d) $\alpha^2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2$,
- (e) $(\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2$,
- (f) $(\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2$.

Pro $a \geq 0$, $a^* \geq 0$ zřejmě

$$\alpha + 2a + 2a^* \geq \alpha + 2 \max\{a, a^*\} \geq \alpha + a + a^* = \alpha^* \geq 0.$$

Tím jsou dokázány nerovnosti (a), (b). Dále si uvědomme, že při porovnávání druhých mocnin výrazů se stačí zaměřit na absolutní hodnoty těchto výrazů. V případě nerovnosti (c) tedy stačí dokázat

$$|\alpha + 2 \min\{a, a^*\}| \leq |\alpha + 2 \max\{a, a^*\}|.$$

To je zřejmé, je-li $\alpha + 2 \min\{a, a^*\} \geq 0$, kdežto pro $\alpha + 2 \min\{a, a^*\} < 0$ máme

$$\begin{aligned} |\alpha + 2 \min\{a, a^*\}| &= (-\alpha) - 2 \min\{a, a^*\} \leq (a + a^*) - 2 \min\{a, a^*\} \\ &= \max\{a, a^*\} - \min\{a, a^*\} = 2 \max\{a, a^*\} - (a + a^*) \\ &\leq \alpha + 2 \max\{a, a^*\} = |\alpha + 2 \max\{a, a^*\}|, \end{aligned}$$

čímž je nerovnost (c) dokázána. Podobně postupujeme u nerovnosti (d). Dostáváme

$$|\alpha| = -\alpha \leq a + a^*, \text{ tedy } -2\alpha \leq 2a + 2a^*, \text{ a proto } -\alpha \leq \alpha + 2a + 2a^*.$$

Nerovnost (f) je zřejmá, neboť na obou stranách je čtverec nezáporného výrazu. A konečně nerovnost (e) plyne z nerovností (c) a (f).

Shrnutím nerovností (c) až (f) dostaneme

$$(\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \quad \alpha^2 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2.$$

Odtud je vidět, že podle velikosti α^2 budeme rozlišovat tyto tři varianty:

- 1) $\alpha^2 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2$,
- 2) $(\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq \alpha^2 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2$,
- 3) $(\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq \alpha^2$.

U první varianty je $\alpha + 2 \min\{a, a^*\} \geq 0$, neboť opačná nerovnost by při porovnání absolutních hodnot vedla ke sporu. Nicméně u druhé a třetí varianty rozlišíme ještě dva případy:

- A) $\alpha + 2 \min\{a, a^*\} \geq 0$,
- B) $\alpha + 2 \min\{a, a^*\} < 0$.

Máme tedy celkem pět variant a pro každou z nich chceme spočítat tvar hustoty náhodné veličiny $W_1 = (\alpha^* - X + X^*)^2$.

Zabývejme se první variantou. Podle (3.34) a definičních vztahů q^+, q^- máme

$$q^+(v_1) = \begin{cases} \frac{v_1 - \alpha}{4aa^*} & \text{pro } 0 \leq v_1 \leq \alpha + 2 \min\{a, a^*\}, \\ \frac{\min\{a, a^*\}}{2aa^*} & \text{pro } \alpha + 2 \min\{a, a^*\} \leq v_1 \leq \alpha + 2 \max\{a, a^*\}, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - v_1}{4aa^*} & \text{pro } \alpha + 2 \max\{a, a^*\} \leq v_1 \leq \alpha + 2a + 2a^*, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$q^-(v_1) = \begin{cases} \frac{v_1 - \alpha}{4aa^*} & \text{pro } \alpha \leq v_1 \leq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Odtud

$$q^+[\rho_{31}(w_1)] = \begin{cases} \frac{\sqrt{w_1} - \alpha}{4aa^*} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq \alpha^2, \\ \frac{\sqrt{w_1} - \alpha}{4aa^*} & \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\min\{a, a^*\}}{2aa^*} & \text{pro } (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{w_1}}{4aa^*} & \text{pro } (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$q^-[\rho_{32}(w_1)] = \begin{cases} \frac{-\sqrt{w_1} - \alpha}{4aa^*} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq \alpha^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dosazením do (3.39) dostaneme pro první variantu hustotu W_1

1)

$$p_1(w_1) = \begin{cases} \frac{-\alpha}{4aa^* \sqrt{w_1}} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq \alpha^2, \\ \frac{\sqrt{w_1} - \alpha}{8aa^* \sqrt{w_1}} & \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\min\{a, a^*\}}{4aa^* \sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{w_1}}{8aa^* \sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Podobně bychom postupovali u ostatních čtyř variant. Výsledné tvary hustoty W_1 jsou

2A)

$$p_1(w_1) = \begin{cases} \frac{-\alpha}{4aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{2 \min\{a, a^*\} - \alpha - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq \alpha^2, \\ \frac{\min\{a, a^*\}}{4aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.41)$$

2B)

$$p_1(w_1) = \begin{cases} \frac{\min\{a, a^*\}}{2aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{2 \min\{a, a^*\} - \alpha - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq \alpha^2, \\ \frac{\min\{a, a^*\}}{4aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.42)$$

3A)

$$p_1(w_1) = \begin{cases} \frac{-\alpha}{4aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{2 \min\{a, a^*\} - \alpha - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \min\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{a + a^* - \sqrt{w_1}}{4aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2 \max\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq \alpha^2, \\ \frac{\alpha + 2a + 2a^* - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.43)$$

3B)

$$p_1(w_1) = \begin{cases} \frac{\min\{a, a^*\}}{2aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq (\alpha + 2\min\{a, a^*\})^2, \\ \frac{2\min\{a, a^*\} - \alpha - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2\min\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2\max\{a, a^*\})^2, \\ \frac{a+a^* - \sqrt{w_1}}{4aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } (\alpha + 2\max\{a, a^*\})^2 \leq w_1 \leq \alpha^2, \\ \frac{\alpha+2a+2a^* - \sqrt{w_1}}{8aa^*\sqrt{w_1}} & \text{pro } \alpha^2 \leq w_1 \leq (\alpha + 2a + 2a^*)^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.44)$$

Nyní známe hustotu p_1 náhodné veličiny $W_1 = (\alpha^* - X + X^*)^2$ a hustota p_2 náhodné veličiny $W_2 = (\beta^* + Y - Y^*)^2$ je stejná jako v předchozím odstavci (viz (3.37)). Opět použijeme transformaci (3.38) k odvození sdružené hustoty $g(u_1, u_2)$ náhodných veličin

$$U_1 = (\alpha^* - X + X^*)^2 + (\beta^* + Y - Y^*)^2 = W_1 + W_2, \quad U_2 = (\alpha^* - X + X^*)^2 = W_1.$$

Platí

$$g(u_1, u_2) = p_1[\sigma_1(u_1, u_2)] \cdot p_2[\sigma_2(u_1, u_2)].$$

Stačí tedy dosadit u_2 za w_1 do jednotlivých tvarů hustoty $p_1(w_1)$ (viz (3.40), (3.41), (3.42), (3.43), (3.44)) a $(u_1 - u_2)$ za w_2 do hustoty $p_2(w_2)$ (viz (3.37)).

Pro přehlednější zápis označme mezní hodnoty

$$0, \alpha^2, (\alpha + 2a)^2, (\alpha + 2a^*)^2, (\alpha + 2a + 2a^*)^2$$

symboly A_i , $i = 0, \dots, 4$ tak, že $A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq A_4$.

Zřejmě $A_0 = 0$ a $A_4 = (\alpha + 2a + 2a^*)^2$ vždy, zatímco hodnoty A_1, A_2, A_3 se mění podle konkrétní varianty. Obdobně pro hodnoty

$$\beta^2, (\beta + 2b)^2, (\beta + 2b^*)^2, (\beta + 2b + 2b^*)^2$$

použijeme symboly B_i , $i = 1, \dots, 4$ s tím, že $B_1 \leq B_2 \leq B_3 \leq B_4$.

Zde zřejmě

$$B_1 = \beta^2, \quad B_2 = (\beta + 2\min\{b, b^*\})^2, \quad B_3 = (\beta + 2\max\{b, b^*\})^2, \quad B_4 = (\beta + 2b + 2b^*)^2.$$

Stejně jako v předchozím odstavci označme ještě $\psi = 64aba^*b^*$.

V tomto značení pro první variantu dostaneme

$$g(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{-2\alpha(\sqrt{u_1-u_2}-\beta)}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_0 \leq u_2 \leq A_1, B_1 \leq u_1 - u_2 \leq B_2, \quad (1) \\ \frac{-2\alpha(2 \min\{b, b^*\})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_0 \leq u_2 \leq A_1, B_2 \leq u_1 - u_2 \leq B_3, \quad (2) \\ \frac{-2\alpha(\beta+2b+2b^*-\sqrt{u_1-u_2})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_0 \leq u_2 \leq A_1, B_3 \leq u_1 - u_2 \leq B_4, \quad (3) \\ \frac{(\sqrt{u_2}-\alpha)(\sqrt{u_1-u_2}-\beta)}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_1 \leq u_2 \leq A_2, B_1 \leq u_1 - u_2 \leq B_2, \quad (4) \\ \frac{(\sqrt{u_2}-\alpha)(2 \min\{b, b^*\})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_1 \leq u_2 \leq A_2, B_2 \leq u_1 - u_2 \leq B_3, \quad (5) \\ \frac{(\sqrt{u_2}-\alpha)(\beta+2b+2b^*-\sqrt{u_1-u_2})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_1 \leq u_2 \leq A_2, B_3 \leq u_1 - u_2 \leq B_4, \quad (6) \\ \frac{(2 \min\{a, a^*\})(\sqrt{u_1-u_2}-\beta)}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_2 \leq u_2 \leq A_3, B_1 \leq u_1 - u_2 \leq B_2, \quad (7) \\ \frac{(2 \min\{a, a^*\})(2 \min\{b, b^*\})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_2 \leq u_2 \leq A_3, B_2 \leq u_1 - u_2 \leq B_3, \quad (8) \\ \frac{(2 \min\{a, a^*\})(\beta+2b+2b^*-\sqrt{u_1-u_2})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_2 \leq u_2 \leq A_3, B_3 \leq u_1 - u_2 \leq B_4, \quad (9) \\ \frac{(\alpha+2a+2a^*-\sqrt{u_2})(\sqrt{u_1-u_2}-\beta)}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_3 \leq u_2 \leq A_4, B_1 \leq u_1 - u_2 \leq B_2, \quad (10) \\ \frac{(\alpha+2a+2a^*-\sqrt{u_2})(2 \min\{b, b^*\})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_3 \leq u_2 \leq A_4, B_2 \leq u_1 - u_2 \leq B_3, \quad (11) \\ \frac{(\alpha+2a+2a^*-\sqrt{u_2})(\beta+2b+2b^*-\sqrt{u_1-u_2})}{\psi \sqrt{u_2(u_1-u_2)}} & \text{pro } A_3 \leq u_2 \leq A_4, B_3 \leq u_1 - u_2 \leq B_4, \quad (12) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.45)$$

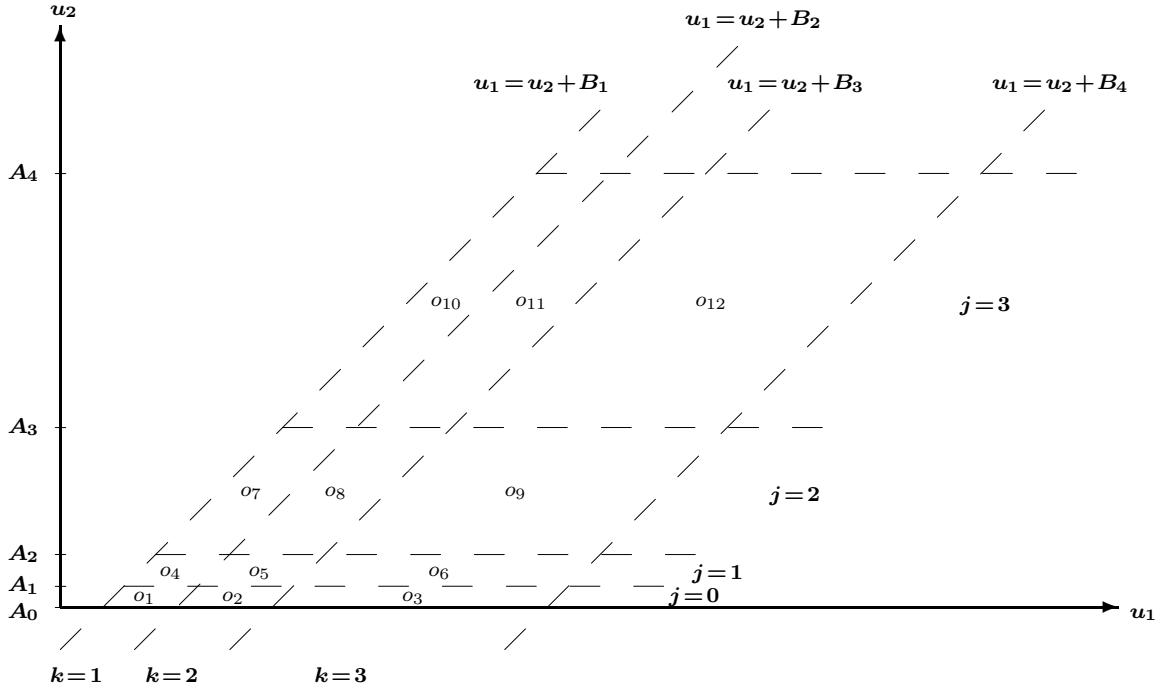
Zde tedy rozlišíme dvanáct oblastí o_i , $i = 1, \dots, 12$ s vlastním nenulovým tvarem hustoty $g(u_1, u_2)$. Tyto oblasti jsou znázorněny na obrázku 3.7.

Dále postupujeme obdobně jako v předchozím odstavci. Pro $i = 1, \dots, 12$ má

$$g_i(u_1, u_2) = \begin{cases} g(u_1, u_2) & \text{pro } (u_1, u_2) \in o_i, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

nenulový tvar

$$g_i(u_1, u_2) = \frac{1}{\psi} \left(R_i + S_i \cdot \frac{1}{\sqrt{u_2}} + T_i \cdot \frac{1}{\sqrt{u_1-u_2}} + W_i \cdot \frac{1}{\sqrt{u_2(u_1-u_2)}} \right) \quad \text{pro } (u_1, u_2) \in o_i,$$

Obrázek 3.7: Oblasti o_{3j+k} , $j = 0, 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$.

kde R_i, S_i, T_i, W_i jsou konstanty pro každé $i = 1, \dots, 12$, obecně odlišné od výše uvedených stejně značených konstant v odstavci 3.1. Pro první variantu jsou tyto konstanty v tabulce 3.3, pro ostatní varianty v dodatku A.

Pro $i = 1, \dots, 12$ označíme $G_i(u_1, u_2) = \int g_i(u_1, u_2) du_2$ a z transformace (3.19) máme

$$G_i = G_i(\tau(z), u_2) = \frac{1}{\psi} \left(R_i \cdot u_2 + 2S_i \cdot \sqrt{u_2} - 2T_i \cdot \sqrt{z^2 - u_2} - 2W_i \cdot \arccos \sqrt{\frac{u_2}{z^2}} \right),$$

což je stejný výsledek jako v (3.20).

Jak je naznačeno na obrázku 3.7, zavedeme indexy $j = 0, 1, 2, 3$ a $k = 1, 2, 3$ k vyjádření $i = 3j + k \in \{1, \dots, 12\}$. Z tohoto obrázku odvodíme, že u_1 -souřadnice rovnoběžníka o_{3j+k} jsou po řadě

$$A_j + B_k, A_j + B_{k+1}, A_{j+1} + B_{k+1}, A_{j+1} + B_k ; \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ve srovnání s vrcholy rovnoběžníka o_{3j+k} na obrázku 3.4 je zde index j snížen o jednotku. Celý následný výpočetní postup EZ se tedy od předchozího odstavce liší pouze tím, že u mezních hodnot A_0, \dots, A_4 změníme index j na $j - 1$. S využitím výsledků (3.22), (3.23), (3.24) dostaneme

$$\text{EZ} = 2 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}} z^2 K_{3j+k}(z) dz,$$

i	R_i	S_i	T_i	W_i
1	0	-2α	0	$2\alpha\beta$
2	0	0	0	$-4\alpha \min\{b, b^*\}$
3	0	2α	0	$-2\alpha(\beta + 2b + 2b^*)$
4	1	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha\beta$
5	0	0	$2 \min\{b, b^*\}$	$-2\alpha \min\{b, b^*\}$
6	-1	α	$\beta + 2b + 2b^*$	$-\alpha(\beta + 2b + 2b^*)$
7	0	$2 \min\{a, a^*\}$	0	$-2\beta \min\{a, a^*\})$
8	0	0	0	$4 \min\{a, a^*\} \min\{b, b^*\}$
9	0	$-2 \min\{a, a^*\}$	0	$2 \min\{a, a^*\}(\beta + 2b + 2b^*)$
10	-1	$\alpha + 2a + 2a^*$	β	$-\beta(\alpha + 2a + 2a^*)$
11	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(\alpha + 2a + 2a^*)$
12	1	$-(\alpha + 2a + 2a^*)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(\alpha + 2a + 2a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$

Tabulka 3.3: Konstanty R_i , S_i , T_i , W_i , $i = 1, \dots, 12$ pro první variantu.

kde pro $j = 0, 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$

$$K_{3j+k}(z) = \begin{cases} K_{3j+k}^{(a)}(z) & \text{pro } (A_{j+1} + B_k) \leq (A_j + B_{k+1}), \\ K_{3j+k}^{(b)}(z) & \text{pro } (A_{j+1} + B_k) > (A_j + B_{k+1}), \end{cases}$$

přičemž

$$K_{3j+k}^{(a)}(z) = \begin{cases} [G_{3j+k}]_{A_j}^{z^2 - B_k} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_j + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_k}), \\ [G_{3j+k}]_{A_j}^{A_{j+1}} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_j + B_{k+1}}), \\ [G_{3j+k}]_{z^2 - B_{k+1}}^{A_{j+1}} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_j + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$K_{3j+k}^{(b)}(z) = \begin{cases} [G_{3j+k}]_{A_j}^{z^2 - B_k} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_j + B_k}, \sqrt{A_j + B_{k+1}}), \\ [G_{3j+k}]_{z^2 - B_{k+1}}^{z^2 - B_k} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_j + B_{k+1}}, \sqrt{A_{j+1} + B_k}), \\ [G_{3j+k}]_{z^2 - B_{k+1}}^{A_{j+1}} & \text{pro } z \in (\sqrt{A_{j+1} + B_k}, \sqrt{A_{j+1} + B_{k+1}}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Odtud nebo odvozením z (3.25) a (3.26) máme pro $j = 0, 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \int z^2 K_{3j+k}^{(a)}(z) dz &= \int_{\sqrt{A_j+B_k}}^{\sqrt{A_{j+1}+B_k}} z^2 [G_{3j+k}]_{A_j}^{z^2-B_k} dz + \int_{\sqrt{A_{j+1}+B_k}}^{\sqrt{A_j+B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{A_j}^{A_{j+1}} dz \\ &\quad + \int_{\sqrt{A_j+B_{k+1}}}^{\sqrt{A_{j+1}+B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{A_{j+1}} dz, \\ \int z^2 K_{3j+k}^{(b)}(z) dz &= \int_{\sqrt{A_j+B_k}}^{\sqrt{A_j+B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{A_j}^{z^2-B_k} dz + \int_{\sqrt{A_j+B_{k+1}}}^{\sqrt{A_{j+1}+B_k}} z^2 [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{z^2-B_k} dz \\ &\quad + \int_{\sqrt{A_{j+1}+B_k}}^{\sqrt{A_{j+1}+B_{k+1}}} z^2 [G_{3j+k}]_{z^2-B_{k+1}}^{A_{j+1}} dz. \end{aligned}$$

$\mathbb{E}Z$ je tedy tentokrát součtem 36 integrálů, které se dají spočítat stejným postupem jako v předchozím odtavci.

$(a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta)$	<i>Varianta</i>	$\mathbb{E}Z$	<i>Odhad</i>	<i>Simulace</i>
(2, 1, 2, 1, -0.5, 1)	1	4.7843	4.6098	4.7830 (1.3003)
(2, 1, 2, 2, -0.5, 1)	1	5.5270	5.3151	5.5291 (1.4260)
(2, 2, 2, 1, -0.5, 1)	1	5.5270	5.3151	5.5284 (1.4262)
(1, 1, 2, 1, -1.2, 1)	2A	3.6998	3.4986	3.6996 (0.9413)
(1, 1, 2, 2, -1.2, 1)	2A	4.5796	4.3863	4.5802 (1.2657)
(1, 2, 2, 1, -1.2, 3)	2A	6.3989	6.2642	6.4007 (1.2752)
(1, 1, 3, 2, -2.5, 0)	2B	3.8041	3.3541	3.8027 (1.3329)
(1, 1, 3, 3, -2.5, 1)	2B	5.5517	5.2202	5.5509 (1.7594)
(1, 2, 3, 3, -2.5, 2)	2B	7.4054	7.1589	7.4036 (2.0217)
(1, 1, 1, 1, -1.5, 1)	3A	3.1537	3.0414	3.1547 (0.7985)
(2, 2, 3, 3, -3, 0)	3A	5.8037	5.3852	5.8043 (1.9954)
(1, 1, 1, 1, -2, 0)	3A	2.1763	2.0000	2.1764 (0.7727)
(1, 1, 2, 2, -2.5, 1)	3B	4.2462	4.0311	4.2466 (1.2446)
(1, 1, 2, 2, -3, 1)	3B	4.2173	4.0000	4.2172 (1.2435)
(2, 1, 4, 3, -5, 1)	3B	5.7278	5.0990	5.7264 (1.7875)
(1, 4, 2, 3, -1, 1)	1, 2A	8.3883	8.2462	8.3902 (2.7651)
(1, 4, 2, 3, -2, 1)	2A, 3A	8.1887	8.0623	8.1912 (2.8182)
(1, 1, 1, 1, -1, 0)	1, 2A, 3A	2.3899	2.2361	2.3905 (0.7887)
(1, 1, 1, 1, -1, 1)	1, 2A, 3A	3.2696	3.1623	3.2695 (0.8020)

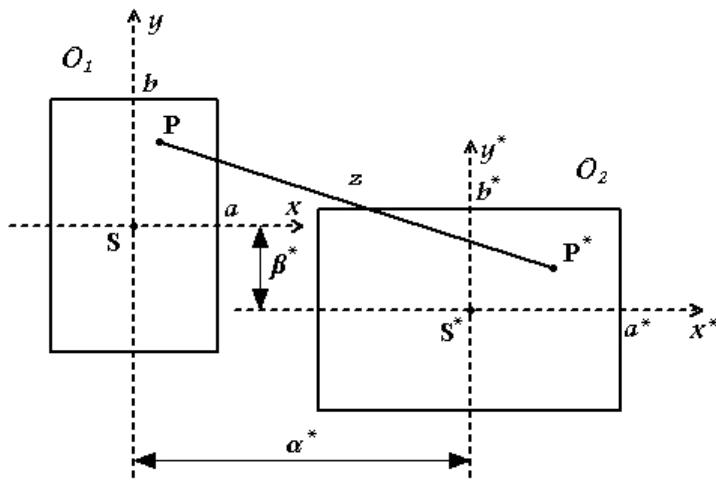
Tabulka 3.4: Spočtené hodnoty $\mathbb{E}Z$ v porovnání se vzdálenostmi středů obdélníků a výsledky simulací pro vybraná $a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta$.

Tvar $g(u_1, u_2)$ a příslušné konstanty $R_i, S_i, T_i, W_i, i = 1, \dots, 12$ jsme uvedli pouze pro první variantu. Obdobným způsobem by se postupovalo i u ostatních zmíněných variant. Výsledky takto spočtené $\mathbb{E}Z$, včetně vzdálenosti středů obdélníků a simulací jsou pro některé konkrétní

hodnoty vektoru $(a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta)$ uvedeny v tabulce 3.4. Opět byl použit software *Wolfram Mathematica 6.0*.

Vzdálenost středů obdélníků jakožto *odhad* opět podhodnocuje střední hodnotu vzdálenosti náhodně volených bodů v těchto obdélníkách.

3.3 Rozdělení Z pro $\alpha \geq 0$ a $\beta < 0$



Obrázek 3.8: Vzájemná poloha dvou obdélníků pro $\alpha \geq 0, \beta < 0$.

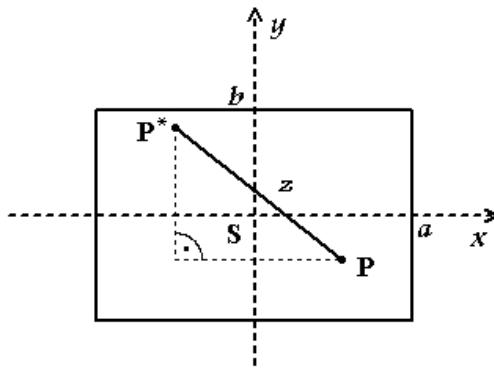
Zde si stačí uvědomit, že otočením obrázku 3.8 o 90° v záporném směru otáčení a následným použitím osové souměrnosti s jednou ze svislých os jakožto osy souměrnosti dostaneme případ, který je zobrazen na obrázku 3.6. Stačí tedy zaměnit hodnoty

$$a \longleftrightarrow b, \quad a^* \longleftrightarrow b^*, \quad \alpha \longleftrightarrow \beta$$

a použít řešení z minulého odstavce.

Kapitola 4

Jeden obdélník



Obrázek 4.1: Vzdálenost bodů náhodně volených v jednom obdélníku.

Podobný postup, jakým jsme spočetli střední hodnotu vzdálenosti bodů náhodně volených ve dvou různých obdélníkách (viz kapitola 3), můžeme použít také v jednom obdélníku.

Nechť Z opět značí vzdálenost bodů P, P^* , které tentokrát volíme náhodně ve stejném obdélníku. Horizontální rozměr tohoto obdélníka buď $2a$, vertikální $2b$ (viz obrázek 4.1). Náhodné veličiny X, Y popisují souřadnice bodu P a X^*, Y^* souřadnice bodu P^* ve stejné kartézské soustavě souřadnic.

Pro odvození střední hodnoty veličiny Z využijeme vztah

$$Z^2 = (X - X^*)^2 + (Y - Y^*)^2.$$

Další postup je zjednodušením nepřímé metody z odstavce 3.1. Náhodný vektor (X, X^*) má zde hustotu

$$f(x, x^*) = \frac{1}{4a^2} \quad \text{pro } -a \leq x \leq a, -a \leq x^* \leq a$$

a 0 jinak. Označíme-li $q(v_1)$ hustotu náhodné veličiny $V_1 = X - X^*$, $p_1(w_1)$ hustotu náhodné veličiny $W_1 = (X - X^*)^2$ a $p_2(w_2)$ hustotu náhodné veličiny $W_2 = (Y - Y^*)^2$, potom obdobnými transformacemi jako v odstavci 3.1 (viz (3.32), (3.35)) dojdeme k výsledným tvarům

$$q(v_1) = \begin{cases} \frac{2a+v_1}{4a^2} & \text{pro } -2a \leq v_1 \leq 0, \\ \frac{2a-v_1}{4a^2} & \text{pro } 0 \leq v_1 \leq 2a, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$p_1(w_1) = \begin{cases} \frac{2a-\sqrt{w_1}}{4a^2\sqrt{w_1}} & \text{pro } 0 \leq w_1 \leq 4a^2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$p_2(w_2) = \begin{cases} \frac{2b-\sqrt{w_2}}{4b^2\sqrt{w_2}} & \text{pro } 0 \leq w_2 \leq 4b^2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

které jsou po řadě speciálními případy (3.34), (3.36), (3.37) pro $a=a^*$, $\alpha=-2a$. Položíme-li $U_1 = W_1 + W_2$ a $U_2 = W_1$, dostaneme sdruženou hustotu těchto veličin

$$g(u_1, u_2) = \frac{(2a - \sqrt{u_2})(2b - \sqrt{u_1 - u_2})}{16 a^2 b^2 \sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} \quad \text{pro } 0 \leq u_2 \leq 4a^2, 0 \leq u_1 - u_2 \leq 4b^2 \quad (4.1)$$

a 0 jinak. Její nenulová část lze upravit na tvar

$$\frac{1}{16 a^2 b^2} \left(1 - 2a \frac{1}{\sqrt{u_2}} - 2b \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_2}} + 4ab \frac{1}{\sqrt{u_2(u_1 - u_2)}} \right).$$

Označíme-li

$$G(u_1, u_2) = \int g(u_1, u_2) du_2,$$

potom pro $0 \leq u_2 \leq 4a^2$, $0 \leq u_1 - u_2 \leq 4b^2$

$$G(u_1, u_2) = \frac{1}{\psi} \left(R \cdot u_2 - 2S \cdot \sqrt{u_2} - 2T \cdot \sqrt{u_1 - u_2} - 2W \cdot \arccos \sqrt{\frac{u_2}{u_1}} \right),$$

kde $\psi = 16 a^2 b^2$ a pro konstanty R, S, T, W platí

$$R = 1, S = -2a, T = -2b, W = 4ab,$$

což je výsledek obdobný jako v (3.17) odstavce 3.1 s tím, že zde se jedná pouze o jednu oblast, nikoli devět.

Uvažujme nyní speciálně $b \leq a$. Potom stejným postupem jako v odstavci 3.1 dostaneme

$$\begin{aligned} EZ &= \frac{2b^3 - 2b^2\sqrt{a^2 + b^2}}{15a^2} + \frac{2}{5}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{2a^2}{15(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ &\quad - \frac{b^2 \log \frac{1}{b} + b^2 \log (\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{3a} + \frac{a^2 \log \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2} - b}}{3b} \end{aligned}$$

a limita tohoto výrazu pro $b \rightarrow 0$ vyjde

$$\lim_{b \rightarrow 0} EZ = \frac{2a}{3}.$$

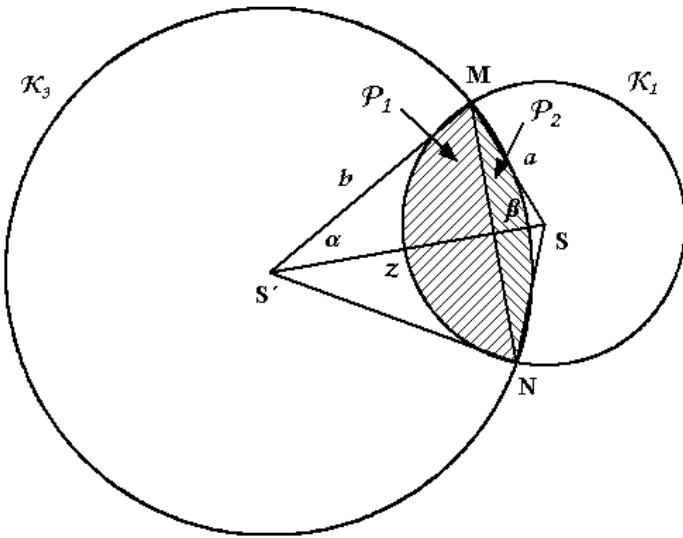
Přesně tento výsledek intuitivně očekáváme jako řešení úlohy, kdy body P, P^* volíme náhodně na úsečce délky $2a$. Tato úloha je řešena v [1], str. 187 – 188 se stejným výsledkem.

Dodatek A

Některé výpočty a výsledky

Výpočet vzorců (2.2), (2.3)

Nejprve doplňme značení. Nechť M, N jsou průsečíky kruhů $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$ a α, β nechť jsou úhly při vrcholech S', S v trojúhelníku $S'SM$. Jak ukazuje obrázek A.1, plocha \mathcal{P} je sjednocením dvou kruhových úsečí \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 , tedy $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2|$. Obsah kruhové úseče spočteme jako



Obrázek A.1: Výpočet $|\mathcal{P}|$.

rozdíl obsahu kruhové výseče a obsahu příslušného rovnoramenného trojúhelníka. Platí tedy

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_1| &= \pi a^2 \frac{2\beta}{2\pi} - (a \sin \beta)(a \cos \beta) = a^2 \beta - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\beta = \frac{1}{2} a^2 (2\beta - \sin 2\beta), \\ |\mathcal{P}_2| &= \pi b^2 \frac{2\alpha}{2\pi} - (b \sin \alpha)(b \cos \alpha) = b^2 \alpha - \frac{1}{2} b^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} b^2 (2\alpha - \sin 2\alpha), \\ |\mathcal{P}| &= |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| = \frac{1}{2} a^2 (2\beta - \sin 2\beta) + \frac{1}{2} b^2 (2\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned}$$

Vztahy pro $\cos \alpha$ a $\cos \beta$ (viz (2.3)) získáme užitím kosinové věty na trojúhelník $S'SM$.

Výpočet integrálů (3.29), (3.30), (3.31)

Pro přehlednější zápis označme tyto integrály

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_g^h z^2 \arccos \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{z^2}} dz, \\ M_2 &= \int_g^h z^2 \arccos \frac{d}{z} dz, \\ M_3 &= \int_g^h z^2 \sqrt{z^2 - c^2} dz. \end{aligned}$$

Speciálně pro $c = 0$, resp. $d = 0$ máme

$$M_{01} = 0, \tag{A.1}$$

$$M_{02} = \frac{\pi}{6} (h^3 - g^3), \tag{A.2}$$

$$M_{03} = \frac{1}{4} (h^4 - g^4). \tag{A.3}$$

Pro $0 < c \leq g \leq h$, resp. $0 < d \leq g \leq h$ u každého z těchto integrálů nejdříve spočteme příslušnou primitivní funkci (tj. neurčitý integrál) a poté dosadíme meze integrace. Nechť H_1, H_2, H_3 značí po řadě neurčité integrály k M_1, M_2, M_3 . Upravíme je následujícím způsobem (u prvních dvou využijeme metodu per partes)

$$H_1 = \int z^2 \arccos \sqrt{1 - \frac{c^2}{z^2}} dz = \frac{1}{3} z^3 \arccos \sqrt{1 - \frac{c^2}{z^2}} + \frac{c}{3} \int \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - c^2}} dz, \tag{A.4}$$

$$H_2 = \int z^2 \arccos \frac{d}{z} dz = \frac{1}{3} z^3 \arccos \frac{d}{z} - \frac{d}{3} \int \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - d^2}} dz, \tag{A.5}$$

$$H_3 = \int z^2 \sqrt{z^2 - c^2} dz = \int \frac{z^4}{\sqrt{z^2 - c^2}} dz - c^2 \int \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - c^2}} dz. \tag{A.6}$$

Vidíme, že ve všech případech se objevuje stejný integrál až na hodnotu konstanty. Počítejme například s konstantou c a označme tento integrál I_1 . K jeho vyjádření budeme opakováně užívat metodu per partes. Připomeňme ještě, že platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}} dz &= \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}), \\ \int \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) dz &= z \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - \sqrt{z^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Počítejme

$$I_1 = \int z^2 \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}} dz = z^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - 2I_2, \tag{A.7}$$

kde

$$I_2 = \int z \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) dz = z^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - z \sqrt{z^2 - c^2} - I_2 + I_3, \tag{A.8}$$

kde

$$I_3 = \int \sqrt{z^2 - c^2} dz = \int (z^2 - c^2) \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}} dz = I_1 - c^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}). \quad (\text{A.9})$$

Nyní dosadíme výsledek (A.9) do (A.8) a máme

$$2I_2 = z^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - c^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - z \sqrt{z^2 - c^2} + I_1. \quad (\text{A.10})$$

Pak dosadíme výsledek (A.10) do (A.7), čímž získáme

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[c^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) + z \sqrt{z^2 - c^2} \right].$$

Odtud, dále z rovnosti $\arccos \sqrt{1 - \frac{c^2}{z^2}} = \arcsin \frac{c}{z}$ a s využitím výsledku (A.4) vychází

$$H_1 = \frac{1}{3} z^3 \arcsin \frac{c}{z} + \frac{c}{3} I_1 = \frac{1}{3} z^3 \arcsin \frac{c}{z} + \frac{c}{6} \left[c^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) + z \sqrt{z^2 - c^2} \right]. \quad (\text{A.11})$$

Obdobným způsobem dopočítáme H_2 (viz (A.5)) a dostaneme

$$H_2 = \frac{1}{3} z^3 \arccos \frac{d}{z} - \frac{d}{6} \left[d^2 \log(z + \sqrt{z^2 - d^2}) + z \sqrt{z^2 - d^2} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Zbývá vyjádřit H_3 . Z rovnosti (A.6) máme

$$H_3 = J_1 - c^2 I_1, \quad (\text{A.13})$$

kde

$$J_1 = \int z^4 \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Integrál J_1 budeme upravovat podobně jako I_1 , tj. opakováným použitím metody per partes. Dostáváme

$$J_1 = z^4 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - 4J_2, \quad (\text{A.14})$$

kde

$$J_2 = \int z^3 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) dz = z^4 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - z^3 \sqrt{z^2 - c^2} - 3J_2 + 3H_3,$$

odkud

$$4J_2 = z^4 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) - z^3 \sqrt{z^2 - c^2} + 3H_3. \quad (\text{A.15})$$

Dosazením výsledku (A.15) do (A.14) vyjde

$$J_1 = z^3 \sqrt{z^2 - c^2} - 3H_3$$

a z rovnosti (A.13) dostaneme

$$H_3 = \frac{1}{4} z^3 \sqrt{z^2 - c^2} - \frac{c^2}{8} \left[c^2 \log(z + \sqrt{z^2 - c^2}) + z \sqrt{z^2 - c^2} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Dosazením mezí g, h do již spočtených primitivních funkcí H_1, H_2, H_3 (viz (A.11), (A.12), (A.16)) získáme

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{3} \left[h^3 \arcsin \frac{c}{h} - g^3 \arcsin \frac{c}{g} - \frac{c^3}{2} \log \frac{h - \sqrt{h^2 - c^2}}{g - \sqrt{g^2 - c^2}} + \frac{c}{2} (h\sqrt{h^2 - c^2} - g\sqrt{g^2 - c^2}) \right], \\ M_2 &= \frac{1}{3} \left[h^3 \arccos \frac{d}{h} - g^3 \arccos \frac{d}{g} + \frac{d^3}{2} \log \frac{h - \sqrt{h^2 - d^2}}{g - \sqrt{g^2 - d^2}} - \frac{d}{2} (h\sqrt{h^2 - d^2} - g\sqrt{g^2 - d^2}) \right], \\ M_3 &= \frac{1}{4} \left[h^3 \sqrt{h^2 - c^2} - g^3 \sqrt{g^2 - c^2} - \frac{c^4}{2} \log \frac{h + \sqrt{h^2 - c^2}}{g + \sqrt{g^2 - c^2}} - \frac{c^2}{2} (h\sqrt{h^2 - c^2} - g\sqrt{g^2 - c^2}) \right]. \end{aligned}$$

Pro úplnost ještě připomeňme, že toto vyjádření je platné pouze pro $0 < c \leq g \leq h$, resp. $0 < d \leq g \leq h$. V případě $c = 0$, resp. $d = 0$ použijeme M_{01}, M_{02}, M_{03} (viz (A.1), (A.2), (A.3)).

Tabulky konstant pro odstavec 3.2

<i>i</i>	R_i	S_i	T_i	W_i
1	0	-2α	0	$2\alpha\beta$
2	0	0	0	$-4\alpha \min\{b, b^*\}$
3	0	2α	0	$-2\alpha(\beta + 2b + 2b^*)$
4	-1	$2 \min\{a, a^*\} - \alpha$	β	$-\beta(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
5	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
6	1	$-(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)(\beta + 2b + 2b^*)$
7	0	$2 \min\{a, a^*\}$	0	$-2\beta \min\{a, a^*\}$
8	0	0	0	$4 \min\{a, a^*\} \min\{b, b^*\}$
9	0	$-2 \min\{a, a^*\}$	0	$2 \min\{a, a^*\}(\beta + 2b + 2b^*)$
10	-1	$\alpha + 2a + 2a^*$	β	$-\beta(\alpha + 2a + 2a^*)$
11	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(\alpha + 2a + 2a^*)$
12	1	$-(\alpha + 2a + 2a^*)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(\alpha + 2a + 2a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$

Tabulka A.1: Konstanty R_i , S_i , T_i , W_i , $i = 1, \dots, 12$ pro variantu **2A**.

<i>i</i>	R_i	S_i	T_i	W_i
1	0	$4 \min\{a, a^*\}$	0	$-4\beta \min\{a, a^*\}$
2	0	0	0	$8 \min\{a, a^*\} \min\{b, b^*\}$
3	0	$-4 \min\{a, a^*\}$	0	$4 \min\{a, a^*\}(\beta + 2b + 2b^*)$
4	-1	$2 \min\{a, a^*\} - \alpha$	β	$-\beta(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
5	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
6	1	$-(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)(\beta + 2b + 2b^*)$
7	0	$2 \min\{a, a^*\}$	0	$-2\beta \min\{a, a^*\}$
8	0	0	0	$4 \min\{a, a^*\} \min\{b, b^*\}$
9	0	$-2 \min\{a, a^*\}$	0	$2 \min\{a, a^*\}(\beta + 2b + 2b^*)$
10	-1	$\alpha + 2a + 2a^*$	β	$-\beta(\alpha + 2a + 2a^*)$
11	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(\alpha + 2a + 2a^*)$
12	1	$-(\alpha + 2a + 2a^*)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(\alpha + 2a + 2a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$

Tabulka A.2: Konstanty R_i , S_i , T_i , W_i , $i = 1, \dots, 12$ pro variantu **2B**.

<i>i</i>	R_i	S_i	T_i	W_i
1	0	-2α	0	$2\alpha\beta$
2	0	0	0	$-4\alpha \min\{b, b^*\}$
3	0	2α	0	$-2\alpha(\beta + 2b + 2b^*)$
4	-1	$2 \min\{a, a^*\} - \alpha$	β	$-\beta(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
5	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
6	1	$-(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)(\beta + 2b + 2b^*)$
7	-2	$2(a + a^*)$	2β	$-2\beta(a + a^*)$
8	0	0	$-4 \min\{b, b^*\}$	$4 \min\{b, b^*\}(a + a^*)$
9	2	$-2(a + a^*)$	$-2(\beta + 2b + 2b^*)$	$2(a + a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$
10	-1	$\alpha + 2a + 2a^*$	β	$-\beta(\alpha + 2a + 2a^*)$
11	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(\alpha + 2a + 2a^*)$
12	1	$-(\alpha + 2a + 2a^*)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(\alpha + 2a + 2a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$

Tabulka A.3: Konstanty $R_i, S_i, T_i, W_i, i = 1, \dots, 12$ pro variantu **3A**.

<i>i</i>	R_i	S_i	T_i	W_i
1	0	$4 \min\{a, a^*\}$	0	$-4\beta \min\{a, a^*\}$
2	0	0	0	$8 \min\{a, a^*\} \min\{b, b^*\}$
3	0	$-4 \min\{a, a^*\}$	0	$4 \min\{a, a^*\}(\beta + 2b + 2b^*)$
4	-1	$2 \min\{a, a^*\} - \alpha$	β	$-\beta(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
5	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$
6	1	$-(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(2 \min\{a, a^*\} - \alpha)(\beta + 2b + 2b^*)$
7	-2	$2(a + a^*)$	2β	$-2\beta(a + a^*)$
8	0	0	$-4 \min\{b, b^*\}$	$4 \min\{b, b^*\}(a + a^*)$
9	2	$-2(a + a^*)$	$-2(\beta + 2b + 2b^*)$	$2(a + a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$
10	-1	$\alpha + 2a + 2a^*$	β	$-\beta(\alpha + 2a + 2a^*)$
11	0	0	$-2 \min\{b, b^*\}$	$2 \min\{b, b^*\}(\alpha + 2a + 2a^*)$
12	1	$-(\alpha + 2a + 2a^*)$	$-(\beta + 2b + 2b^*)$	$(\alpha + 2a + 2a^*)(\beta + 2b + 2b^*)$

Tabulka A.4: Konstanty $R_i, S_i, T_i, W_i, i = 1, \dots, 12$ pro variantu **3B**.

Dodatek B

Zdrojový kód

(*Wolfram Mathematica 6.0*)

Funkce **Kruhy** je určena pro kapitolu 2 a po zadání vstupních hodnot a, b spočte jednak hodnotu EZ , jednak výběrový průměr a směrodatnou odchylku simulací veličiny Z .

Clear;

```
Kruhy[a_, b_]:=Module[{i, xP, yP, xQ, yQ, XP, YP, XQ, YQ, z},
i = 1; While[i \leq 500000, xP[i] = RandomReal[{-a, a}]; yP[i] = RandomReal[{-a, a}];
If[xP[i]^2 + yP[i]^2 \leq a^2, i++]];
i = 1; While[i \leq 500000, xQ[i] = RandomReal[{-b, b}]; yQ[i] = RandomReal[{-b, b}];
If[xQ[i]^2 + yQ[i]^2 \leq b^2, i++]];
XP = Table[xP[i], {i, 500000}]; YP = Table[yP[i], {i, 500000}];
XQ = Table[xQ[i], {i, 500000}]; YQ = Table[yQ[i], {i, 500000}];
z = Sqrt[(YQ - YP)^2 + (XQ - XP)^2];
EZ = If[a < b, 8/(45Pi a^2 b) ((a^4 + 14 a^2 b^2 + b^4) EllipticE[a^2/b^2]
-(b^2 - a^2)(7 a^2 + b^2) EllipticK[a^2/b^2]) //N, 128 a/(45 \pi)];
{EZ, Mean[z], Sqrt[Variance[z]]}]
```

Funkce **Konstanty** očekává na vstupu hustotu $g(u_1, u_2)$ v podobě vektoru

$$\{g_1(u_1, u_2), \dots, g_m(u_1, u_2)\},$$

kde $m = 9$ pro odstavec 3.1, $m = 12$ pro odstavec 3.2 a $m = 1$ pro kapitolu 4 (viz (3.16), (3.45) a (4.1)). Při spuštění upraví tvar této hustoty tak, aby se z něho daly získat konstanty $R_i, S_i, T_i, W_i, i = 1, \dots, m$. Na výstupu máme vektory RR, SS, TT, WW s těmito konstantami a také vypsanou tabulkou s hodnotami těchto konstant.

Clear;

```
Konstanty[gu12_]:=Module[{g, u1, u2, i, j, U, V, x, M},
g:=Function[{u1, u2}, gu12/.u1 \rightarrow u1/.u2 \rightarrow u2];
For[i = 1, i \leq Length[gu12], i++, For[j = 1, j \leq 4, j++, V[i, j] = 0]];
```

```

For[i = 1, i ≤ Length[gu12], i++, U[i] = CoefficientList[Simplify
  [Refine[ψ * √(u1 - u2)u2 * g[u1, u2][[i]] // Expand, u1 > u2&&u2 > 0]]
  /. √u2 → x /. √u1 - u2 → x^2 /. √(u1 - u2)u2 → x^3, x]];
For[i = 1, i ≤ Length[gu12], i++, For[j = 1, j ≤ Length[U[i]], j++,
  V[i, 4 - Length[U[i]] + j] = U[i][[Length[U[i]] - j + 1]]];
M = Array[V, {Length[gu12], 4}];
RR = Transpose[M][[1]]; SS = Transpose[M][[2]];
TT = Transpose[M][[3]]; WW = Transpose[M][[4]];
{{Style["i", Italic], Range[Length[gu12]]}, {Style["Ri", Italic], RR}, {
  Style["Si", Italic], SS}, {Style["Ti", Italic], TT}, {Style["Wi", Italic], WW}}
//Factor //Transpose //TableForm]

```

Funkce M_1, M_2, M_3 , popř. M_{11}, M_{22}, M_{33} představují integrály (3.29), (3.30), (3.31).

```

M1[g_, h_, c_]:=If[c > 0, 1/3 (h^3 ArcSin[c/h] - g^3 ArcSin[c/g] - c^3/2 Log[(h - √(h^2 - c^2))/(g - √(g^2 - c^2))] + c/2 (h √(h^2 - c^2) - g √(g^2 - c^2))), 0];
M2[g_, h_, d_]:=If[d > 0, 1/3 (h^3 ArcCos[d/h] - g^3 ArcCos[d/g] + d^3/2 Log[(h - √(h^2 - d^2))/(g - √(g^2 - d^2))] - d/2 (h √(h^2 - d^2) - g √(g^2 - d^2))), π/6 (h^3 - g^3)];
M3[g_, h_, c_]:=If[c > 0, 1/4 (h^3 √(h^2 - c^2) - g^3 √(g^2 - c^2) - c^4/2 Log[(h + √(h^2 - c^2))/(g + √(g^2 - c^2))] - c^2/2 (h √(h^2 - c^2) - g √(g^2 - c^2))), 1/4 (h^4 - g^4)];
M11[g_, h_, c_]:=If[c > 0, Integrate[z^2 ArcCos[√(z^2 - c^2)/z], {z, g, h}], 0];
M22[g_, h_, d_]:=If[d > 0, Integrate[z^2 ArcCos[d/z], {z, g, h}], π/6 (h^3 - g^3)];
M33[g_, h_, c_]:=If[c > 0, Integrate[z^2 √(z^2 - c^2), {z, g, h}], 1/4 (h^4 - g^4)];

```

Funkce **EZ1** počítá s předem získanými vektory konstant RR, SS, TT, WW , přičemž jako vstup očekává konkrétní hodnoty

$$a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta,$$

pro které spočte **EZ** podle odstavce 3.1.

```

Clear;
EZ1[aa_, bb_, aastar_, bbstar_, αα_, ββ_]:=Module[{A, B, ψ, R, S, T, W, g, h, c, d, j, k},
A = {αα^2, (αα + 2aa)^2, (αα + 2aastar)^2, (αα + 2aa + 2aastar)^2};
B = {ββ^2, (ββ + 2bb)^2, (ββ + 2bbstar)^2, (ββ + 2bb + 2bbstar)^2};
ψ = 64aabbaastarbbstar;
R:=RR/.a → aa/.b → bb/.astar->aastar/.bstar->bbstar/.α → αα/.β → ββ;
S:=SS/.a → aa/.b → bb/.astar->aastar/.bstar->bbstar/.α → αα/.β → ββ;
T:=TT/.a → aa/.b → bb/.astar->aastar/.bstar->bbstar/.α → αα/.β → ββ;

```

$W := WW/.a \rightarrow aa/.b \rightarrow bb/.astar \rightarrow aastar/.bstar \rightarrow bbstar/. \alpha \rightarrow \alpha \alpha/. \beta \rightarrow \beta \beta;$

$$\begin{aligned} L_1[j_-, k_-, g_-, h_-, c_-] &:= \frac{1}{\psi} \left(\frac{R[3j+k]}{5} (h^5 - g^5) - \frac{c}{3} (cR[3j+k] + 2T[3j+k]) (h^3 - g^3) \right. \\ &\quad \left. + 2S[3j+k]M_3[g, h, c] - 2W[3j+k]M_1[g, h, c] \right); \\ L_2[j_-, k_-, g_-, h_-, d_-] &:= \frac{1}{\psi} \left(\frac{d}{3} (dR[3j+k] + 2S[3j+k]) (h^3 - g^3) \right. \\ &\quad \left. - 2T[3j+k]M_3[g, h, d] - 2W[3j+k]M_2[g, h, d] \right); \end{aligned}$$

$\text{For}[j = 0, j \leq 2, j++, \text{For}[k = 1, k \leq 3, k++, \text{If}[A[[j+2]] + B[[k]] \leq A[[j+1]] + B[[k+1]],$
 $\text{SUM}[3j+k] = L_1 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{B[[k]]} \right]$

$$\begin{aligned} &- L_2 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]]} \right] \\ &+ L_2 \left[j, k, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+2]]} \right] \\ &- L_2 \left[j, k, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]]} \right] \\ &+ L_2 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+2]]} \right] \\ &- L_1 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k+1]]}, \sqrt{B[[k+1]]} \right], \\ \text{SUM}[3j+k] &= L_1 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{B[[k]]} \right] \\ &- L_2 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]]} \right] \\ &+ L_1 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{B[[k]]} \right] \\ &- L_1 \left[j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{B[[k+1]]} \right] \\ &+ L_2 \left[j, k, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+2]]} \right] \\ &- L_1 \left[j, k, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+2]] + B[[k+1]]}, \sqrt{B[[k+1]]} \right] \Big]; \end{aligned}$$

SOUSET = Array[SUM, 9];

2Total[SOUSET]///N]

Funkce **EZ2** je obdobou předchozí funkce, počítá však podle odstavce 3.2.

Clear;

$$\begin{aligned} EZ2[aa_-, bb_-, aastar_-, bbstar_-, \alpha\alpha_-, \beta\beta_-] &:= \text{Module}[\{(*A,B,*)\psi, R, S, T, W, g, h, c, d, j, k\}, \\ A &= \text{Sort}[\{\alpha\alpha^2, (\alpha\alpha + 2aa)^2, (\alpha\alpha + 2aastar)^2, (\alpha\alpha + 2aa + 2aastar)^2\}]; A[[0]] = 0; \\ B &= \text{Sort}[\{\beta\beta^2, (\beta\beta + 2bb)^2, (\beta\beta + 2bbstar)^2, (\beta\beta + 2bb + 2bbstar)^2\}]; \\ \psi &= 64aabbaastarbbstar; \\ R &:= RR/.a \rightarrow aa/.b \rightarrow bb/.astar \rightarrow aastar/.bstar \rightarrow bbstar/. \alpha \rightarrow \alpha \alpha/. \beta \rightarrow \beta \beta; \\ S &:= SS/.a \rightarrow aa/.b \rightarrow bb/.astar \rightarrow aastar/.bstar \rightarrow bbstar/. \alpha \rightarrow \alpha \alpha/. \beta \rightarrow \beta \beta; \\ T &:= TT/.a \rightarrow aa/.b \rightarrow bb/.astar \rightarrow aastar/.bstar \rightarrow bbstar/. \alpha \rightarrow \alpha \alpha/. \beta \rightarrow \beta \beta; \\ W &:= WW/.a \rightarrow aa/.b \rightarrow bb/.astar \rightarrow aastar/.bstar \rightarrow bbstar/. \alpha \rightarrow \alpha \alpha/. \beta \rightarrow \beta \beta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1[j_-, k_-, g_-, h_-, c_-] &:= \frac{1}{\psi} \left(\frac{R[3j+k]}{5} (h^5 - g^5) - \frac{c}{3} (cR[3j+k] + 2T[3j+k]) (h^3 - g^3) \right. \\ &\quad \left. + 2S[3j+k]M_3[g, h, c] - 2W[3j+k]M_1[g, h, c] \right); \\ L_2[j_-, k_-, g_-, h_-, d_-] &:= \frac{1}{\psi} \left(\frac{d}{3} (dR[3j+k] + 2S[3j+k]) (h^3 - g^3) \right. \\ &\quad \left. - 2T[3j+k]M_3[g, h, d] - 2W[3j+k]M_2[g, h, d] \right); \end{aligned}$$

```


$$-2T[[3j+k]]M_3[g,h,d] - 2W[[3j+k]]M_2[g,h,d]) ;$$


For[j = 0, j ≤ 3, j++, For[k = 1, k ≤ 3, k++, If[A[[j+1]] + B[[k]] ≤ A[[j]] + B[[k+1]],
SUM[3j+k] = L1 [j, k,  $\sqrt{A[[j]] + B[[k]]}$ ,  $\sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}$ ,  $\sqrt{B[[k]]}$ ]
 $-L_2 \left[ j, k, \sqrt{A[[j]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j]]} \right]$ 
 $+L_2 \left[ j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]]} \right]$ 
 $-L_2 \left[ j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j]]} \right]$ 
 $+L_2 \left[ j, k, \sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]]} \right]$ 
 $-L_1 \left[ j, k, \sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{B[[k+1]]} \right],$ 
SUM[3j+k] = L1 [j, k,  $\sqrt{A[[j]] + B[[k]]}$ ,  $\sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}$ ,  $\sqrt{B[[k]]}$ ]
 $-L_2 \left[ j, k, \sqrt{A[[j]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j]]} \right]$ 
 $+L_1 \left[ j, k, \sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{B[[k]]} \right]$ 
 $-L_1 \left[ j, k, \sqrt{A[[j]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{B[[k+1]]} \right]$ 
 $+L_2 \left[ j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{A[[j+1]]} \right]$ 
 $-L_1 \left[ j, k, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k]]}, \sqrt{A[[j+1]] + B[[k+1]]}, \sqrt{B[[k+1]]} \right]]];$ 
SOUSET = Array[SUM, 12];
2Total[SOUSET]//N]

```

Funkce **Odhad** spočte po zadání vstupních hodnot $a, b, a^*, b^*, \alpha, \beta$ vzdálenost středů obdélníků a funkce **Simulace** dá při stejném vstupu výběrový průměr a směrodatnou odchylku simulací hodnoty náhodné veličiny Z (viz kapitola 3).

```

Clear;
Odhad[a_, b_, astar_, bstar_, α_, β_]:=  $\sqrt{(\alpha + a + \text{astar})^2 + (\beta + b + \text{bstar})^2} // N;$ 

Clear;
Simulace[a_, b_, astar_, bstar_, α_, β_]:=Module[{x, y, xstar, ystar, z},
x = RandomReal[{-a, a}, 1000000];
y = RandomReal[{-b, b}, 1000000];
xstar = RandomReal[{-astar, astar}, 1000000];
ystar = RandomReal[{-bstar, bstar}, 1000000];

z =  $\sqrt{(\alpha + a + \text{astar} - x + \text{xstar})^2 + (\beta + b + \text{bstar} + y - \text{ystar})^2};$ 
 $\{\text{Mean}[z], \sqrt{\text{Variance}[z]}\}$ 

```

Literatura

- [1] Anděl J. (2003): Matematika náhody. Matfyzpress, Praha.
- [2] Fairthorne D. (1964): The distance between random points in two concentric circles. *Biometrika* **51**, 275–277.
- [3] Chu D. P. (2006): Distance between random points in two rectangular cities. *Communications in Statistics — Simulation and Computation* **35**, č. 2, 257–276.