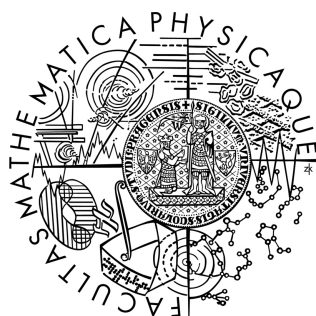


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Zdeněk Šabatka

Experimenty pro interaktivní fyzikální laboratoř - vybrané experimenty v rotujících soustavách

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí diplomové práce:
Doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.

Studijní program:
Fyzika, Učitelství fyziky-matematiky pro SŠ

2008

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především vedoucímu práce doc. RNDr. Leoši Dvořákovi, CSc. za jeho cenné rady, připomínky i náměty při obtížích nebo otázkách, na které jsem narazil. Mé poděkování patří také Ing. Ludvíku Němcovi za jeho pomoc při technickém zpracování experimentů a za výrobu většiny aparatury.

Děkuji také své rodině za obětavou podporu během mého studia na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 11. dubna 2008

Zdeněk Šabatka

Obsah

Abstrakt	6
Úvod	7
1 Experiment a jeho místo ve výuce fyziky	9
1.1 Pojem experiment ve výuce fyziky	9
1.2 Z historie experimentu	10
1.3 Důležitost experimentu ve školní praxi	11
2 Inerciální a neinerciální soustavy	14
2.1 Inerciální vztažná soustava	14
2.2 Neinerciální vztažná soustava	15
2.2.1 Jednotlivé příspěvky setrvačné síly	16
2.2.2 Rotující tekuté zrcadlo	18
2.2.3 Vybrané prameny zabývající se problematikou ex- perimentů v rotujících soustavách	20
3 Povrch kapaliny v rotující nádobě	21
3.1 Roztočení kapaliny	21
3.2 Teorie	22
3.2.1 Odvození pro středoškoly	22
3.2.2 Základní vysokoškolské odvození	24
3.2.3 Další odvození	27
3.2.4 Odvození „pomocí energií“	28
3.2.5 Shrnutí nalezených výsledků	31
3.3 Aparatura a technické provedení	31
3.3.1 Měření periody otáčení	34
3.4 Experimentální ověření teoretických úvah	35
3.4.1 Měření pomocí původního měřidla	35
3.4.2 Měření pomocí kvalitnější aparatury	37
3.4.3 Shrnutí výsledků experimentů	38

4	Chování lodičky na roztočené vodní hladině	41
4.1	Teorie	41
4.2	Aparatura a technické provedení	43
4.3	Experimentální ověření teoretických úvah	43
5	Olovnice v rotující soustavě (Řetízkový kolotoč)	46
5.1	Teorie	47
5.1.1	Iterace	48
5.1.2	Lineární aproximace - rozvoj do prvního řádu	49
5.1.3	Kvadratická aproximace	50
5.1.4	Srovnání aproximací	51
5.2	Aparatura a technické provedení	53
5.3	Experimentální ověření teoretických úvah	54
5.3.1	Shrnutí výsledků experimentů	54
6	Rotující závěs kuliček	57
6.1	Teorie	57
6.1.1	Jedna kulička (kónické kyvadlo)	57
6.1.2	Dvě kuličky	60
6.1.3	Tři kuličky	63
6.1.4	n kuliček	66
6.1.5	Zhodnocení	69
6.2	Aparatura a technické provedení	69
6.3	Experimentální ověření teoretických úvah	69
6.3.1	Jedna kulička	71
6.3.2	Dvě kuličky	72
6.3.3	Tři kuličky	73
6.3.4	Více kuliček	73
6.3.5	Shrnutí výsledku experimentů	74
	Závěr	76
	Literatura	78
	Přílohy	82
A	Použité matematické metody	83
A.1	Taylorův rozvoj	83
A.1.1	Lineární aproximace	83
A.1.2	Kvadratické aproximace	84
A.2	Vybrané numerické metody řešení nelineárních rovnic	84
A.2.1	Metoda půlení intervalu	85

A.2.2	Metoda prosté iterace	86
A.2.3	Metoda tečen (Newtonova)	86
A.2.4	Metoda sečen	87
A.2.5	Metoda regula falsi	87
B	Tabulky naměřených dat	88
C	Obsah přiloženého CD	94

Název práce: Experimenty pro interaktivní fyzikální laboratoř - vybrané experimenty v rotujících soustavách

Autor: Bc. Zdeněk Šabatka

Katedra (ústav): Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.

e-mail vedoucího: DvorakL@plk.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá vybranými experimenty v rotujících soustavách se zaměřením na fyzikální vzdělávání. Teoreticky zpracovává i experimentálně ověřuje tvar hladiny kapaliny v rotující nádobě a demonstruje chování lodičky na této hladině. Dalším zpracovaným experimentem je kónické kyvadlo a jeho různé modifikace. Teoreticky je zde propočítán problém, kdy je pod jedinou kuličku kónického kyvadla přidáváno postupně až n kuliček. Experimentálně jsou proměřeny závislosti až pro tři kuličky zavěšené pod sebou. Je také rozebrán problém kónického kyvadla zavěšeného mimo osu rotace. Příloha obsahuje tabulky naměřených dat a CD, které obsahuje dva videosnímky demonstrující pohyb lodičky na roztočené hladině.

Klíčová slova: experimenty, rotující soustava, povrch hladiny, kónické kyvadlo

Title: Experiments for an interactive physics lab - selected experiments in rotating frames

Author: Bc. Zdeněk Šabatka

Department: Department of Physics Education

Supervisor: Doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.

Supervisor's e-mail address: DvorakL@plk.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis describes selected experiments in rotating systems that may be used in physical education. Theoretically derived shape of rotating liquid is verified experimentally and the behaviour of a small boat on this surface is demonstrated. Further groups of experiments concern conical pendulum and its various modifications. The problem of one, two or several small balls hanging in the chain in rotating frame is investigated theoretically; for up to three balls the results of measurements are presented and compared with theory. Also the problem of a conical pendulum hanging at an off-axis point is analysed. The appendices contain tables of experimental data and CD with two video clips showing the motion of small boats on a rotation water surface.

Keywords: experiments, rotating frame, liquid surface, conical pendulum

Úvod

Cílem této diplomové práce, a také důvodem proč jsem se rozhodl věnovat této problematice, je zpracovat několik námětů na experimenty, které by bylo možné využít jako doplněk při výuce fyziky na střední škole. Měly by to být experimenty takové, které může student sám provést. A to ať už přímo ve škole, nebo tak že přijde do připravované interaktivní fyzikální laboratoře na MFF UK, kde bych byl rád, aby byly tyto experimenty umístěny. Proto také název „Experimenty pro interaktivní fyzikální laboratoř.“ Jelikož se všechny zpracované náměty týkají rotujících soustav, byl k názvu práce přidán podtitul: „Vybrané experimenty v rotujících soustavách.“

Text diplomové práce je členěn do několika kapitol. První dvě kapitoly uvádějí čtenáře do problematiky diplomové práce. První kapitola se věnuje pojmu experiment z hlediska jeho pozice ve školní praxi. Druhou kapitolu tvoří krátký text shrnující několik základních informací o inerciálních a neinerciálních soustavách, silách v nich působících, několika aplikacích a odkazuje na vybrané autory a jejich publikace, zabývající se tematikou rotujících soustav.

Třetí až šestá kapitola obsahují jednotlivé náměty na experimenty, každý z nich obsahuje teoretické odvození, výsledky experimentálního ověření, popis použité aparatury a zhodnocení námětu autorem.

Třetí kapitola pojednává o měření tvaru hladiny v rotující nádobě. Mimo několika různých teoretických odvození parabolického tvaru hladiny zde naleznete popis použité aparatury a graficky zpracované výsledky měření.

Čtvrtá kapitola rozebírá pohyb modelu lodičky po roztočené vodní hladině. Ukazuje, který z modelů lodiček se bude pohybovat do nejnižšího místa paraboloidu, a který bude naopak tažen k jeho okraji. Text kapitoly je doplněn názorně zpracovanými fotografiemi pokusu.

Pátá kapitola se zaměřuje na problém malé kuličky zavěšené v rotující soustavě mimo osu rotace. Tento problém vede na rovnici, která není přímo analyticky řešitelná. Lze ji však řešit pomocí iterací. Kapitola

mimo experimentálního ověření uvádí i přibližné vzorce, které dostaneme lineární a kvadratickou aproximací problému.

Šestá kapitola je věnována kónickému kyvadlu a jeho rozšíření. Pod jedinou kuličku kónického kyvadla jsou postupně zavěšovány další kuličky. Teoreticky jsou odvozeny rovnice pro jedinou kuličku, dvě kuličky, tři kuličky a n kuliček zavěšených pod sebou. Kapitola také obsahuje výsledky experimentálního ověření těchto vztahů pro jednu, dvě i tři kuličky. Situace více kuliček je dokumentována závěsem s osmi kuličkami.

Přílohy obsahují použité matematické metody, tabulky naměřených dat a CD se dvěma natočenými videozáznamy k druhému experimentu.

Celý text diplomové práce je také uložen ve formátu pdf na přiloženém CD. Tato diplomová práce byla kompletně zpracována v programu L^AT_EX. Všechny obrázky byly vytvořeny v programu METAPOST (resp. balíkem maker mfpic). Zdrojový kód celé diplomové práce (včetně obrázků) je k dispozici u autora práce.

Kapitola 1

Experiment a jeho místo ve výuce fyziky

Jelikož je celá práce věnovaná experimentům, které by mohli využívat středoškolští studenti a učitelé, následuje krátký text, který pojednává o experimentech z hlediska školní praxe (vzdělávání). Snaží se také ukázat důležitost a potřebnost experimentu pro vyučování na školách. Závěr této kapitoly pak hledá odpověď na otázku, je-li učitel povinen zařazovat experiment do výuky.

1.1 Pojem experiment ve výuce fyziky

Nejprve se ovšem podívejme na to, co je chápáno pod pojmem experiment.

Jednu z mnoha definic nalezneme například v příručce [1]: „*Jedná se o součást vědecké metody, záměrné umělé navození děje s předem stanovenými podmínkami tak, aby bylo možné ho za stejných podmínek opakovat. Experiment je prostředkem poznání a současně specifickou formou praxe.*“

Další dobrou definicí může být vyjádření nalezené ve wikipedii [2]: „*Pokus (též experiment) je soubor jednání a pozorování, jehož účelem je ověřit (verifikovat) nebo vyvrátit (falzifikovat) hypotézu nebo poznatek, který něco tvrdí o příčinných vztazích určitých fenoménů. Pokus je základem empirického rozšiřování vědeckého poznání.*“

Experiment se jednoznačně liší od prostého pozorování tím, že je do jeho průběhu nebo přípravy experimentátor vědomě zasahuje. Naopak u pozorování se pozorovatel snaží svůj vliv na probíhající děj minimalizovat.

O experimentech¹ ve výuce fyziky pojednávají skripta [3], kde také nalezneme následující rozdělení experimentů podle různých kritérií. „Podle účelu rozlišuje fyzikální věda **heuristický experiment**, jehož účelem je nalézt dosud neznámou zákonitost jevu, a **ověřovací experiment**, při němž se má ověřit platnost fyzikálního zákona. **Kvalitativní experiment** prokazuje existenci, či neexistenci jevu, **kvantitativní experiment** slouží k zjišťování zákonitostí a jejich vyjadřování ve formě fyzikálních teorií.“ **Myšlenkový experiment**, jehož postup a výsledky se odvozují ze známých fyzikálních zákonů za idealizovaných podmínek; probíhá tedy v podobě úvah, logických soudů apod. Naproti tomu **reálný experiment** je takový, při kterém sledujeme reálně probíhající děje a měříme je reálnými přístroji v reálném čase.

Ve školské fyzice má experiment nejen ověřovací a heuristické funkce, ale i funkci didaktickou. Experimenty jsou zde nejčastěji klasifikovány podle jejich zaměření, provedení, logické povahy a podle jejich didaktické funkce. Účelem této kapitoly není provádět dokonale podrobné přehledy. Proto zmiňme jen některé specifické pokusy, se kterými se nesetkáme nikde jinde než v pedagogické praxi, tak, jak je popisují skripta [3]. Jsou jimi například „**demonstrační pokus**, který slouží žákům k motivaci výkladu, objevení či objasnění nových fyzikálních poznatků nebo k jejich ověření“ a zpravidla je vyučujícím předváděn všem žákům najednou. Dále pak „**žákovský pokus**, který vykonává žák nebo skupina žáků v rámci vyučovacího procesu, popřípadě žák v rámci domácí přípravy.“ Speciálním případem žákovského pokusu je **laboratorní úloha**, která je náročnější. Počet i obsahové zaměření laboratorních úloh je doporučeno standardy vzdělávání.

1.2 Z historie experimentu

Mnoho o historii experimentu a fyziky se například dozvídáme z [4], [5], [6] a z [7].

Až do 15. století byl experiment jako součást poznání odmítán. Do té doby většina uznávaných osobností vycházela pouze z pozorování. Aristoteles dokonce odmítal experiment připravený badatelem jako nepřipustné zasahování a ovlivňování pozorovaného jevu.

Prvním, kdo využíval experiment jako rovnocenný zdroj poznání, byl Galileo Galilei (1564-1642), který bývá též označován jako otec moderní

¹V pedagogické literatuře se častěji než pojem experiment používá pojem pokus. Pro účely této práce, ale i nadále použijeme pojem experiment.

fyziky. „*Dvě tisíciletí*“, jak uvádí publikace [4], „byli přírodovědci a filozofové zajedno, že přírodu je možno pozorovat, aby byly objeveny její zákony. Experimenty byly považovány za nepřirozené, a tudíž pro tento účel nevhodné. Galilei našel jako první fyzikální přírodní zákon pomocí cíleného experimentu a dal mu matematický tvar.“ Jedná se o zákon volného pádu, který Galilei dokázal pomocí pohybu po nakloněné rovině, jež se, jak geometricky odvodil, řídí stejným zákonem. Po nakloněné rovině se žlábků, které vyložil pergamenem, pouštěl kuličky, které rozeznávaly osm za sebou napnutých strun ze střívek. Toto „brnkání“ srovnával s tempem písně, kterou hrál na loutnu, a posouval střívka tak, aby zněly po stejné době. Vzdálenosti mezi nimi, které kulička urazila za stejnou dobu, pak změřil a zjistil, že vzdálenosti se v průběhu dráhy zvětšují. Toto měření opakoval pro různé naklonění roviny. Koule tedy běží stále rychleji, a to tak, že její rychlost roste rovnoměrně s časem. Koule se pohybuje rovnoměrně zrychleně.

Postupně se experiment stával jedním z nejdůležitějších pomocníků vědců všeho druhu. To, co bylo (resp. bude) teoreticky předpovězeno, bylo (resp. bude) pomocí experimentu potvrzeno nebo vyvráceno. Je sice pravdou, že dnes se zdá nereálné, abychom se přiblížili černé díře a opravdu pozorovali, co se bude dít s kosmonautem padajícím do ní. Zatím nikdo nenalezl teoreticky předpovídaný graviton, jakožto částici zprostředkovávající gravitační interakci mezi tělesy. Takových příkladů by se dalo najít mnoho. Stejně tak si ovšem musíme uvědomit, že v minulosti také lidé neuměli ověřit svoje domněnky či předpoklady. Jedním z nejnázornějších příkladů je beze sporu atom, jehož myšlenkou se zabývali již filosofové v antickém Řecku.² Avšak teorii o nedělitelných atomech vyvrátil až v roce 1897 J. J. Thomson, který objevil elektron jakožto subatomární částici. Z tohoto a jiných příkladů plyne, že experiment má ve vědě nezastupitelné místo.

1.3 Důležitost experimentu ve školní praxi

Zajímavých otázek je hned několik. Je potřebné provádět experimenty ve škole? Má vůbec učitel povinnost zařazovat experimenty do výuky? A k čemu to studentům je?

²V 5. století př. n. l. představil Demokritos filosofickou teorii, podle které nelze hmotu dělit donekonečna, neboť na nejnižší úrovni existují dále nedělitelné částice, které označil slovem atomos. Podle této teorie je veškerá hmota složena z různě uspořádaných atomů různého druhu, které jsou nedělitelné, přičemž je nelze vytvářet ani ničit.

Jak plyne z výše uvedených definic, není nutně experiment záležitostí pouze fyziky nebo pouze přírodních věd. Vedle fyziky, chemie, biologie a např. medicíny se experimenty uplatňují v psychologii, sociologii, sociální psychologii, atd.

Dle mé zkušenosti se však průměrný středoškolák dozví o experimentech pouze ve fyzice, chemii a biologii. V rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia [8] je tato vzdělávací oblast společně s geografii a geologií označena jako „člověk a příroda.“ V charakteristice této oblasti se skutečně dozvíme, že přírodovědné disciplíny *„jsou si velmi blízké v metodách a prostředcích, které uplatňují ve své výzkumné činnosti. Používají totiž vždy souběžně empirické prostředky (tj. soustavné a objektivní pozorování, měření a experimenty) a prostředky teoretické (pojmy, hypotézy, modely a teorie). Každá z těchto složek je přitom v procesu výzkumu nezastupitelná, vzájemně se ovlivňují a podporují.“* Dále se zde píše, že žáci mají mít co nejvíce možností osvojit si vybrané empirické i teoretické metody přírodovědného výzkumu. V cílovém zaměření vzdělávací oblasti „člověk a příroda“ je uvedeno, že k utváření a rozvoji klíčových kompetencí žáka ho vede mimo jiné i *„provádění soustavných a objektivních pozorování, měření a experimentů (především laboratorního rázu) podle vlastního či týmového plánu nebo projektu, k zpracování a interpretaci získaných dat a hledání souvislostí mezi nimi.“* Z čehož vyplývá, že žák by neměl experimenty pouze pozorovat. Neměly by mu být jen předváděny, ale měl by se osobně zapojit do experimentování.

Přestože se experimentování v praxi uplatňuje i v jiných oborech³ než jsou jen přírodovědné, v RVP pro gymnázia o nich nikde jinde zmínku nenajdeme. Není tudíž povinné se o nich na gymnáziu zmiňovat. Otázkou zůstává, jestli je to dobře nebo špatně.

Stejně tak, jako se o experimentech zmiňuje RVP pro gymnázia [8], lze nalézt podobnou zmínku i v RVP pro základní vzdělávání [9]. Vzdělávací oblast člověk a příroda obsahuje rovněž apel na významnost osvojování si dovedností (*„soustavně, objektivně a spolehlivě pozorovat, experimentovat a měřit, vytvářet a ověřovat hypotézy o podstatě pozorovaných přírodních jevů, analyzovat výsledky tohoto ověřování a vyvozovat z nich závěry“*) žáky. Stejně tak je zde mimo jiné odkaz na to, že k rozvoji klíčových

³Uvedu zde několik příkladů [7] za všechny. Stanfordský vězeňský experiment, jakožto demonstrace přebírání sociálních rolí, deindividuace a depersonalizace. Aschův experiment, jakožto demonstrace konformity. Milgrenův experiment, jako demonstrace poslušnosti vůči autoritě. Či slavný myšlenkový experiment nazývaný argument čínského pokoje, který ukazuje, že schopnost smysluplně odpovídat na položené otázky není dostatečnou pro prokázání schopnosti porozumění.

kompetencí je třeba vést žáka „zkoumáním přírodních faktů a jejich souvislostí s využitím různých empirických metod poznávání (pozorování, měření, experiment).“

Navíc je potřeba si uvědomit, že toto „napodobování vědců“ a „objevování již objeveného“ pomáhá studentům uvědomit si důležitost empirických i teoretických metod pro poznání světa kolem nás. Jsou také dobrou ukázkou objektivnosti a správných logických postupů. Přírodovědné poznání, a tedy i jeho metody (např. experiment), obsahují i morální hodnoty, které by si člověk měl osvojit. Jsou jimi především „*požadavek nezkrášlovat data získávaná ve výzkumu a nevyužívat jeho výsledky pro vytváření technologií a dalších praktických aplikací, které by mohly poškozovat zdraví člověka či nevratně narušit přírodní a sociální prostředí.*“ [8]

Po této krátké úvaze a prozkoumání RVP, mohu odpovědět na výše položené otázky.

Je potřebné provádět experimenty ve škole? ANO! Experimenty jsou důležité, neboť pomáhají utvářet a rozvíjet klíčové kompetence studenta a rozhodně v sobě mají i mnoho z praxe (z běžného života), po čemž tak často právě studenti volají a čeho se dožadují.

K čemu to studentům bude? Viz odpověď na předchozí otázku.

Má učitel povinnost zařazovat experimenty do výuky? Pokud se jedná o předměty obsažené ve vzdělávací oblasti člověk a příroda, tak rozhodně ano. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [8] ani pro základní vzdělávání [9] však neuvádí v jaké míře. Udává pouze, že žáci mají mít „*co nejvíce možností osvojit si empirické i teoretické metody přírodovědného výzkumu.*“

Kapitola 2

Inerciální a neinerciální soustavy

Tato kapitola shrnuje základní informace o inerciálních a neinerciálních vztažných soustavách, které budeme potřebovat v následujících kapitolách. Při tvorbě tohoto souhrnu informací o vztažných soustavách jsem vycházel především z vlastních znalostí a z literatury [10], [1], další případné zdroje budou zmíněny.

Stejně jako celá práce, tak i tato kapitola je zpracovávána z pohledu klasické fyziky.

Pohyb každého tělesa vždy popisujeme vzhledem k jinému tělesu, které nazýváme vztažným (referenčním) tělesem, vztažnou (referenční) soustavou. Souřadnicové soustavy, vůči nimž je volný hmotný bod (tj. hmotný bod, na který nepůsobí žádné síly) v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, nazýváme inerciální souřadnicové soustavy. Ostatní nazýváme neinerciální.

2.1 Inerciální vztažná soustava

Platí, že inerciální soustavy jsou vůči sobě buď v klidu, nebo rovnoměrném přímočarém pohybu. Platí v nich zákon setrvačnosti, zákon síly i zákon akce a reakce.

Ideální inerciální soustavu ve vesmíru nenalezneme. Je to totiž pojem tak abstraktní, že jeho existence je principiálně vyloučena. K tomu, abychom zavedli inerciální soustavu souřadnic, potřebujeme alespoň tři nekolineární body, na které nebudou působit žádné síly. A takové ve vesmíru nenalezneme. Newtonův gravitační zákon totiž říká, že každá dvě tělesa na sebe působí silou, která je nepřímo úměrná kvadrátu je-

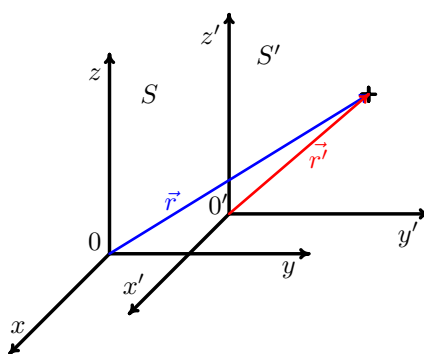
jich vzdálenosti. Je tedy pravda, že působící síla se s rostoucí vzdáleností zmenšuje a nulová bude až v limitním případě, kdy $r \rightarrow \infty$.

Newtonův gravitační zákon nám však umožňuje určit vzdálenost těles, tak aby je bylo možné s předem požadovanou přesností považovat za volné hmotné body. Takto je určena například tzv. Galileova soustava, která má počátek ve Slunci a její osy směřují ke stálicím.

Vztažná soustava spojená se Zemí (laboratorní vztažná soustava) je také neinerciální, protože se vzhledem ke Galileově vztažné soustavě pohybuje po zakřivené trajektorii a současně se otáčí. Při běžných dějích však nejsou projevy její neinerciálnosti příliš významné, a proto i ji často považujeme za soustavu inerciální.

2.2 Neinerciální vztažná soustava

V soustavách neinerciálních neplatí první a druhý Newtonův zákon.



Obrázek 2.1: Polohový vektor hmotného bodu v inerciální a neinerciální soustavě.

Sledujeme-li v neinerciální soustavě S' , která se vůči inerciální soustavě S nepohybuje rovnoměrně přímočaře, pohyb hmotného bodu s hmotností m , polohovým vektorem \vec{r}' , okamžitou rychlostí $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ a okamžitým zrychlením $\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$, vystaveného působení výsledné síly \vec{F} , pak obecně zjistíme, že

$$m\vec{a}' \neq \vec{F}.$$

Lze však určit takovou sílu \vec{F}' , že platí

$$m\vec{a}' = \vec{F}'.$$

Pro zrychlení \vec{a}' platí

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_u,$$

kde \vec{a} je zrychlení hmotného bodu vůči inerciální soustavě S a \vec{a}_u je unášivé zrychlení související se zrychlením $\vec{a}_{0'}$ počátku $0'$ a vektory úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a úhlového zrychlení $\vec{\varepsilon}$ soustavy S' vzhledem k soustavě S vztahem

$$\vec{a}_u = \vec{a}_{0'} + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}' \right] \right] + 2 \left[\vec{\omega} \times \vec{v}' \right] + \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' \right]. \quad (2.1)$$

Pro sílu \vec{F}' pak platí

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_S = m\vec{a} - m\vec{a}_u,$$

kde setrvačná síla \vec{F}_S je definována jako

$$\vec{F}_S = -m\vec{a}_u. \quad (2.2)$$

Z rovnic (2.2) a (2.1) tedy plyne, že setrvačná síla se skládá ze čtyř složek a platí

$$\vec{F}_S = -m\vec{a}_{0'} - m \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}' \right] \right] - 2m \left[\vec{\omega} \times \vec{v}' \right] - m \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' \right]. \quad (2.3)$$

Zatímco síla \vec{F} , která je vyvolaná vzájemným působením těles, bývá nazývána skutečnou silou, síla \vec{F}_S je označována jako síla zdánlivá. Jednotlivé složky (sčítance) setrvačné síly (vztah (2.3)) mají fyzikální rozměr síly. Jsou tedy pojímány také jako síly a nazývají se setrvačné (zdánlivé, fiktivní). Ne vždy se projevují všechny současně, proto bude dobré probrat každou odděleně.

2.2.1 Jednotlivé příspěvky setrvačné síly

První člen ve vztahu (2.3), $-m\vec{a}_{0'}$, který nemá své speciální označení, se projevuje pouze, pokud se neinerciální soustava S' pohybuje vůči S s nenulovým zrychlením, tj. $\vec{a}_{0'} \neq 0$.

Odstředivá síla

Druhý člen rovnice (2.3) bývá označován jako odstředivá síla. Ta je tedy definována jako

$$\vec{F}_{OD} = -m \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}' \right] \right].$$

Odstředivá síla se projevuje, pokud se neinerciální soustava otáčí s nenulovou úhlovou rychlostí a pokud hmotný bod, který zkoumáme, neleží na ose rotace.

Velikost odstředivé síly je dána vztahem

$$F_{OD} = m\omega^2 R,$$

kde R je tentokrát vzdálenost od osy rotace.

Odstředivá síla má mnoho aplikací. Zmiňme alespoň některé:

- Wattův odstředivý regulátor se používá ke stabilizaci otáček parního stroje. Skládá se ze dvou závaží, která rotují a jsou poháněna strojem, jehož otáčky mají být regulovány. Čím rychleji tato závaží rotují, tím větší je vlivem odstředivé síly jejich výchylka od svislé osy rotace. Uvedené vychýlení je převedeno soustavou pák a táhel k ventilu přivádějícímu páru ke stroji.
- Tvorba umělé gravitace. Za zmínku stojí studentský projekt Mars Gravity Biosatellite [11], [12], který si dává za cíl zjistit, jak se přizpůsobí savčí tělo na úroveň gravitace na Marsu. K tomuto bude vyvinut malý satelit, který pět týdnů ponese 15 myší na nízké oběžné dráze Země. K vytvoření umělé gravitace bude použito právě rotace. Bude to právě taková rotace, kterou by pocítili astronauti na Marsu (tj. přibližně $0,38g$).
- Centrifugy jsou používány ve vědě a průmyslu k rozdělení substancí.
- Různé zábavné atrakce, které simulují gravitaci.
- Výroba parabolických povrchů.

Coriolisova síla

Třetí člen rovnice (2.3) se nazývá Coriolisova síla a je definován vztahem

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}. \quad (2.4)$$

Její velikost je dána vztahem

$$F_C = 2m\omega v' \sin \vartheta,$$

kde ϑ je úhel sevřený mezi vektorem úhlové rychlosti a vektorem rychlosti vůči soustavě S' .

Coriolisova síla je kolmá současně na vektor rychlosti tělesa a vektor úhlové rychlosti. Svě jméno nese po Gustavu Gaspardu de Coriolisovi¹.

Coriolisova síla je důvodem například vírového pohybu proudících vzdušných mas v zemské atmosféře. Tento jev vzniká jako důsledek rovnováhy Coriolisovy síly a rozložení tlaku v atmosféře. Na severní polokouli se vytvářejí víry otáčející se proti směru hodinových ručiček, na jižní polokouli po směru. Na rovníku je Coriolisova síla nulová a víry se nevytváří.

Foucaultovo kyvadlo [13], [14] je vynikajícím příkladem, kde se projevuje vliv Coriolisovy síly na pohybující se těleso a který zároveň dokazuje, že se naše Země otáčí.

Foucaultovo kyvadlo je pojmenované po Francouzi Foucaultovi². Původní experiment byl proveden v roce 1851 v pařížském Pantheónu, kde bylo zavěšeno závaží kulové závaží s hrotem o hmotnosti 28 kilogramů na 68 metrů dlouhém laně. Doba kmitu kyvadla byla 16 sekund. Hrot zakresloval do písku na podlaze pohyb kyvadla. Jednalo se o první jasně viditelný důkaz toho, že se Země otáčí.

Eulerova síla

Posledním členem vztahu (2.3) je tzv. Eulerova síla, definovaná vztahem

$$\vec{F}_E = m\vec{r}' \times \vec{\varepsilon}.$$

Je to síla působící na tělesa v soustavě, která rotuje s proměnnou úhlovou rychlostí; tzn. úhlové zrychlení $\varepsilon \neq 0$.

2.2.2 Rotující tekuté zrcadlo

Zajímavým využitím setrvačných sil je tzv. rotující tekuté zrcadlo (rotating liquid mirror). Principiálně stejným jevem se budeme zabývat v experimentu č. 1 (povrch kapaliny v rotující nádobě).

¹Gaspard Gustave de Coriolis (*1792 Paříž, †1843). Zabýval se především matematickou analýzou a mechanikou. Zavedl pojmy jako práce a kinetická energie. Coriolis je též známý výpočtem sil působících v rotujících soustavách. Je také jedním ze 72 francouzských vědců, jejichž jména jsou vyryta na Eiffelově věži.

²Jean Bernard Léon Foucault [fukó] (*18. září 1819 Paříž, †11. února 1868 Paříž)

Tekutá zrcadla [15], [16] jsou obrovské rotující nádoby naplněné odrazivou tekutinou. Nejpoužívanější je rtuť, stejně tak dobře by však fungovaly i jiné tekutiny (např. různé slitiny galia). S myšlenkou rotující nádoby se rtutí a jejím využití jako astronomického zrcadla přišel už v roce 1850 italský hvězdář Ernesto Capocci. Ovšem první funkční tekutý dalekohled (liquid mirror telescope) byl vyroben v roce 1872 Henry Skeyem v Dunedin Observatory na Novém Zélandu.

Obrovskou výhodou takového teleskopu je jeho cena. Tyto dalekohledy jsou 10krát až 100krát levnější než stejně velké zrcadlové teleskopy. Ani jejich stavba není příliš složitá [17]. Naproti tomu jejich velkou nevýhodou je, že jsme omezeni pouze na pozorování zenitu. (Při naklonění by prostě teleskop stekl na podlahu.) Pro takový teleskop není kupodivu potřeba ani mnoho rtuti, jak by se na první pohled mohlo zdát. NASA-LMT si vystačil pouze s 5 litry rtuti.

Dva příklady světových tekutých dalekohledů:

- NASA-LMT (liquid mirror telescope); průměr 3 metry. Fungoval 1995-2002. Více na [18].
- Large Zenith Telescope; průměr 6 metrů, funguje od roku 2004. Více na [19].

Jak se dozvídáme v článcích [20], [21], tak již dokonce existuje návrh na stavbu obřího teleskopu o průměru až neuvěřitelných 100 metrů. Neměl by však být umístěn na Zemi, ale někde mimo atmosféru, pravděpodobně nejlépe na povrchu Měsíce. Mimo obrovskou plochu zrcadla, by dalšími výhodami měla být relativně nízká cena, jednoduchost konstrukce a její přeprava. Věc má však i několik úskalí. Nízká teplota na Měsíci vylučuje použití rtuti (tuhne už při -38°C). Bezvibrační konstrukce by mohla být založena na „magnetických polštářích.“ Problémem se také může jevit to, že bychom mohli pozorovat objekty pouze v zenitu. V tak velkých vzdálenostech, pro které by byl teleskop určen, nám to však nevádí, neboť jak uvádí [22] „*je hmota vesmíru od rozměru $> 1 \times 10^9$ ly stejnoměrně hustá.*“ Je zřejmé, že k podobné stavbě bude nutné, aby na opět Měsíc opět vyslání astronauti.

Tekutá zrcadla jsou velmi pěknou ukázkou toho, že i rotující vědro naplněné vodou může zásadním způsobem ovlivnit astronomii!

2.2.3 Vybrané prameny zabývající se problematikou experimentů v rotujících soustavách

Rozsáhlou sbírkou experimentů ze všech oborů, ve které nalezneme i řadu experimentů týkajících se rotujících soustav, je publikace [23] Richarda M. Suttona. Objevuje se zde i námět na experiment s rotující nádobou naplněnou kapalinou. Další rozpracování tohoto problému nalzáme v článkách [24], [25], [26], [27], [28].

I kónické kyvadlo je známým experimentem, proto i jemu je věnována řada publikací. Za všechny jmenujme alespoň [23], [29]. Na podobné modifikace³ experimentu s kónickým kyvadlem, jaké se nachází v této diplomové práci, jsem však při studiu literatury nenarazil.

Problematikou rotujících soustav se také zabývají J. Jarozs a A. Szczygielska. Jako příklad uveďme jejich příspěvek [30] na Veletrhu nápadů učitelů fyziky 12.

³Budeme se ptát, co se děje při rotaci s malou kuličkou na vlákně, nebude-li toto vlákno upevněno přímo na ose rotace, nýbrž na ramínku nenulové délky. Další otázkou bude, jaké budou odklony závěsů kuliček od svislice, nebude-li se jednat o „jednoduché“ kónické kyvadlo, ale o více kuliček zavěšených pod sebou.

Kapitola 3

Povrch kapaliny v rotující nádobě

První experiment se zaměřuje na známý, na vysoké škole často řešený příklad - tvar v hladiny rotující nádobě. Předvedu zde několik možných teoretických odvození, představím experimentální aparaturu, experimentální ověření teorie (naměřené hodnoty a jejich porovnání s odvozenými).

Tímto tématem jsem se zabýval společně s doc. Leošem Dvořákem v příspěvku [31] na Veletrhu nápadů učitelů fyziky 12.

3.1 Roztočení kapaliny

První otázka, která by nás mohla napadnout, je, zdali se vůbec bude s obsahem nádoby něco dít? Kdybychom roztáčeli například skleněný váleček, roztočí se hned celý, neboť se jedná o celistvé tuhé těleso. Pokud však budeme roztáčet skleněnou kádinku naplněnou vodou, kádinka se samozřejmě roztočí hned (sama o sobě je také tuhým tělesem), ale vodě uvnitř to bude chvíli trvat, neboť vazba mezi molekulami vody a kádinkou již není tak silná. Jakmile se začne kádinka točit, začne strhávat k pohybu i tekutinu. Ta však neobsahuje pevné vazby, takže bude jistou dobu trvat, než celý obsah nádoby bude rotovat se stejnou úhlovou rychlostí jako kádinka.¹ Do jakého tvaru se kapalina nakonec rozlije? Zřejmě již nebudeme moci mluvit o tom, že je hladina „vodorovná.“²

¹Touto problematikou se zabývali ve svém příspěvku Studium vlivu viskozity na roztáčení kapaliny [32] na Veletrhu nápadů učitelů fyziky v Praze Milan Rojko a Jakub Benda.

²To by byl zajímavý námět na diskuzi, neboť hladina vytváří paraboloid. Pokud bychom však šli po hladině, můžeme říci, že jdeme rovně po hladině (tj. „vodorovně“).

3.2 Teorie

Přestože toto odvození snadno nalezneme v literatuře [10], [24]-[28], bude dobré vytvořit přehled příslušných výpočtů.

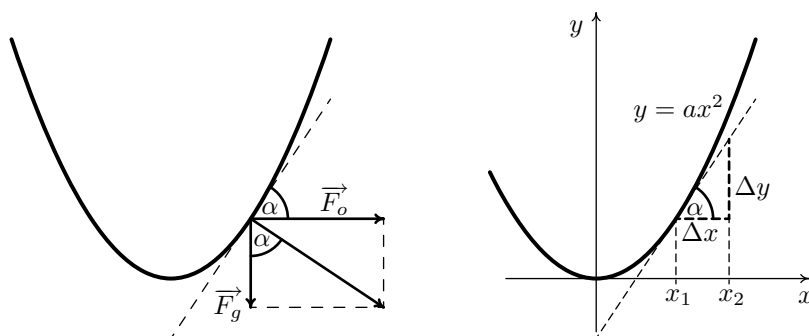
3.2.1 Odvození pro středoškoláky

Toto odvození bylo již dříve uveřejněno v článku [31]. Následující text určený středoškolákům je doplněnou citací tohoto článku.

Skutečnost, že hladina vody v rotujícím vědru či jiné nádobě je prohnutá, je jednoduše pochopitelná i na úrovni základní školy: Odstředivá síla (kterou zná na vlastní kůži každý, kdo projel v autě ostřejší zatáčku, o zkušenosti z různých pouťových atrakcí nemluvě) táhne vodu směrem od osy rotace, gravitace ji táhne dolů a výsledný tvar hladiny je dán „soupeřením“ těchto sil.

Víme-li, že odstředivá síla při konstantních otáčkách (tedy při konstantní úhlové rychlosti ω) roste se vzdáleností R od osy rotace, lze také jednoduše pochopit, že dál od osy je hladina strmější a strmější. Výsledná síla na „kousek vody“ se s rostoucí vzdáleností od osy více a více odchyluje od svislice – a hladina musí být na tuto výslednou sílu kolmá. (Místo teoretického zdůvodnění můžeme žákům připomenout, že hladina klidného rybníka či vody ve sklenici je také kolmá na sílu, působící na vodu.)

Nakreslíme si nejprve obrázek situace s rozložením příslušných sil.



Obrázek 3.1: Ke středoškoláckému odvození tvaru hladiny v rotující nádobě.

Z obrázku 3.1 a z velikostí sil vidíme, že

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_o}{F_g} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2}{g} x. \quad (3.1)$$

Sama tato rovnice již vlastně popisuje tvar hladiny. Říká nám, že tangens úhlu α (odklon tečny hladiny od vodorovného směru v bodě $[x, y]$) je přímo úměrný x . Hledáme tedy takovou závislost $y(x)$, aby $\operatorname{tg} \alpha = k \cdot x$.

Nyní bychom se mohli žáků ptát, jakou funkci by navrhovali. (Poradíme jim, že by se mohlo jednat o nějakou funkční závislost.) Nyní vlastně hádáme o jakou závislost by se mohlo jednat. Správný výsledek dostaneme pouze pro funkci typu $y = a \cdot x^2$.

Předpokládáme-li tedy závislost $y = a \cdot x^2$, můžeme podle obrázku 3.1 počítat

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) \doteq 2ax, \quad (3.2)$$

kde při konečné úpravě bereme $x_2 \doteq x_1 = x$. Vztah (3.2) nám dává přesně hledanou lineární závislost $\operatorname{tg} \alpha \sim x$.

Z porovnání obou výsledných výrazů (3.1), (3.2) pro $\operatorname{tg} \alpha$ plyne $2a = \omega^2/g$. Tvar hladiny je tedy dán rovnicí

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Častěji se tento vzorec ovšem přepisuje (pouze nahradíme y písmenem h a x písmenem R) jako:

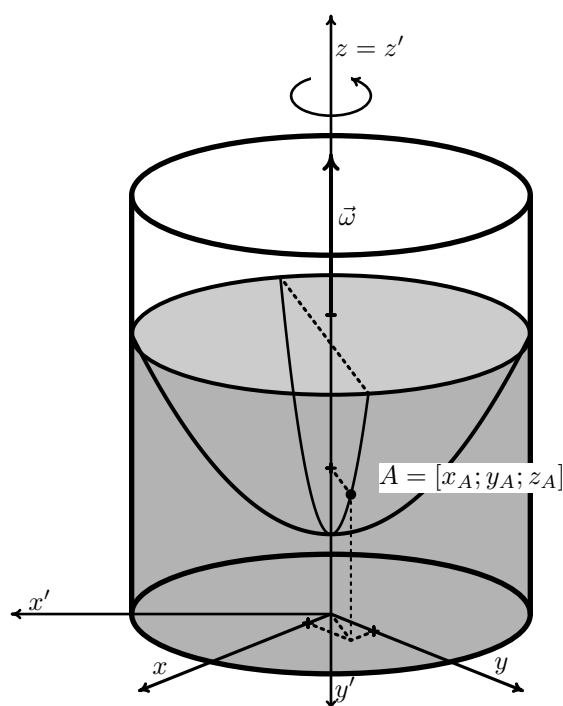
$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2, \quad (3.3)$$

kde h označuje výšku hladiny nad nejnižším bodem hladiny ve vzdálenosti R od osy otáčení.

Žákům bychom měli nyní objasnit, že i když jsme hledanou závislost jakoby uhodli, je toto odvození zcela regulérní, neboť pro jiné závislosti $y(x)$, nedostáváme přímou úměru mezi $\operatorname{tg} \alpha$ a x . Například pro $y = a|x|^3$ dostáváme obdobným postupem jako v rovnici (3.2) následující:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a|x_2|^3 - a|x_1|^3}{|x_2| - |x_1|} = a(|x_2|^2 + |x_2| \cdot |x_1| + |x_1|^2) \\ &\doteq 3a|x|^2 = 3ax^2, \end{aligned}$$

což neodpovídá hledané lineární závislosti.



Obrázek 3.2: K základnímu vysokoškolskému odvození. Zobrazeny jsou také soustavy souřadnic; neinerciální se otáčí společně s nádobou a kapalinou. Osy inerciální soustavy jsou x' , y' , z' (viz text).

3.2.2 Základní vysokoškolské odvození

V následujícím odvození postupujeme dle učebnice [10]. Pro větší přehlednost zde zjednodušíme značení.

Mějme kapalinu, která se spolu s nádobou, v níž je umístěna, otáčí úhlovou rychlostí ω . Vektor $\vec{\omega}$ leží ve svislé přímce. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic (x, y, z) pevně spjatou s kapalinou, jejíž z -ová osa má směr vektoru $\vec{\omega}$ a míří vzhůru. Tato neinerciální soustava souřadnic se otáčí stálou rychlostí vůči soustavě inerciální (x', y', z') .³ V takové neinerciální soustavě souřadnic vedle pravých sil působí zdánlivé síly odstředivá a Coriolisova. Jediná působící pravá síla je objemová síla⁴ tíhová \vec{G}^g , která ve zvolené soustavě souřadnic má složky

³Toto značení zavádím v rozporu s tradicí, kdy se inerciální soustavy značí nečárkovaně a neinerciální čárkovaně. Je to z toho důvodu, že budu pracovat především s neinerciální soustavou a příliš mnoho čárek by zbytečně znepráhledňovalo text.

⁴„Objemová síla je vektorová veličina definovaná v bodě kontinua, jehož polohový vektor je \vec{r} , limitním postupem $\vec{G}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(V)}{V}$.“ (viz [1])

$$G_x^g = G_y^g = 0, \quad G_z^g = -\rho g.$$

Zdánlivá síla odstředivá, vyjádříme-li ji jako sílu objemovou \vec{G}^o , je dána složkami

$$G_x^o = \rho\omega^2 x, \quad G_y^o = \rho\omega^2 y, \quad G_z^o = 0.$$

Zdánlivá síla Coriolisova se neuplatní, protože kapalina se otáčí spolu s nádobou, a tedy rychlost částic kapaliny vůči neinerciální soustavě souřadnic je nulová.

Výslednou objemovou sílu $\vec{G} = \vec{G}^g + \vec{G}^o$ dosadíme do pravé strany rovnice rovnováhy kontinua pro kapaliny⁵

$$\text{grad } p = \vec{G},$$

Pro jednotlivé složky pak tedy píšeme:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (3.6)$$

Z rovnice (3.6) plyne

$$p = -\rho g z + f_1(x, y).$$

Dosadíme-li toto vyjádření tlaku do rovnice (3.4), dostáváme pro funkci $f_1(x, y)$ podmínku

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \rho\omega^2 x,$$

ze které plyne

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + f_2(y).$$

⁵„Rovnice rovnováhy pro kapaliny je třísložková parciální diferenciální rovnice, jejíž splnění v každém bodě kontinua je podmínkou, při níž je kontinuum v rovnováze.“ (viz [1])

Tedy

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 + f_2(y). \quad (3.7)$$

Z rovnice (3.5) pak dostáváme

$$\frac{df_2}{dy} = \rho \omega^2 y,$$

odkud

$$f_2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y^2 + k.$$

Dosadíme-li takto vyjádřenou funkci $f_2(y)$ do rovnice (3.7), dostaneme hledaný výraz pro rozložení tlaku p v rotující kapalině

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) + k.$$

Hodnotu konstanty k lze určit, je-li známa absolutní velikost tlaku v jednom bodě kapaliny. Plochy, ve kterých kapalina nabývá stejného tlaku $p = K$, jsou rotační paraboloidy

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + \frac{K - k}{\rho g}. \quad (3.8)$$

Jednotlivé plochy se liší velikostí konstanty $(K - k) / \rho g$. Jednou z takových ploch je také hladina kapaliny. Otáčí-li se kapalina stálou úhlovou rychlostí kolem svislé osy, zaujme její hladina tvar rotačního paraboloidu.

Souřadnice x, y, z často nahrazujeme dvěma souřadnicemi (výškou h a vzdáleností od osy rotace R), místo konstantního zlomku pak můžeme psát jedinou konstantu c . Dostáváme tak stejnou rovnici v jiném tvaru

$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2 + c. \quad (3.9)$$

Poznámka k učebnici [10]

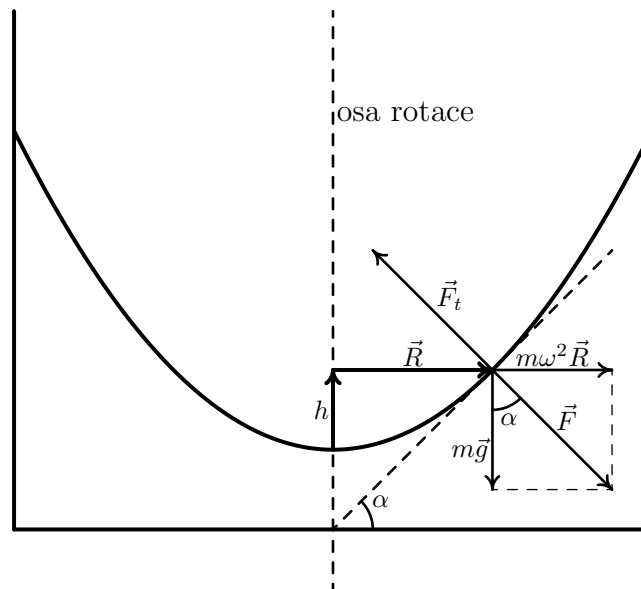
Na tomto místě bych chtěl upozornit na drobnou chybu, kterou jsem objevil v uvedené učebnici mechaniky [10].

Autor zavádí tíhovou objemovou sílu $\vec{G}^g = (-\rho g; 0; 0)$ (rovnice (2.28) v [10] na straně 339), což je vzhledem k zavedeným souřadnicím správně. Poté ovšem za stejnou tíhovou objemovou sílu dosazuje $\vec{G}^g = (\rho g; 0; 0)$. A v rovnici (2.30) v [10] na straně 340, tak dostává vztah $\frac{\delta p}{\delta y_1} = \rho g$, kde

ovšem chybí znaménko „-“. Správná rovnice by tak měla být $\frac{\delta p}{\delta y_1} = -\rho g$. Z této rovnice pak autor dochází k chybné rovnici pro parabolický povrch rotující kapaliny $y_1 = \frac{-\omega^2}{2g} (y_2^2 + y_3^2) + \frac{K-k}{\rho g}$. Toto by znamenalo, že se jedná o konkávní paraboloid, tj. kde vrchol je maximum, neboli paraboloid má vrchol „nahore.“ Správná rovnice nemá na pravé straně mínus a je tedy $y_1 = \frac{\omega^2}{2g} (y_2^2 + y_3^2) + \frac{K-k}{\rho g}$. Což je obdobný vztah jako uvádíme zde v rovnici (3.8).

3.2.3 Další odvození

Další odvození (viz např. článek [27]), využívající diferenciálního počtu, je poněkud kratší a méně detailní. (Zabývá se pouze povrchem kapaliny.)



Obrázek 3.3: K vysokoškolskému odvození tvaru hladiny v rotující nádobě - řez nádobou a kapalinou. Zobrazeny jsou i působící síly.

Situaci v rotující nádobě nám přibližuje obrázek 3.3. Na kousek hladiny kapaliny o hmotnosti m působí tři síly. Odstředivá síla $\vec{F}_o = m\omega^2\vec{R}$, tíhová síla $\vec{F}_g = m\vec{g}$ a tlaková síla \vec{F}_t , která je dána působením okolní kapaliny. Aby byla hladina ve statickém stavu, což po delší době opravdu pozorujeme, musí být celková síla působící na libovolný kousek hladiny kapaliny rovna nule. Platí tedy

$$\vec{F}_{\text{celk}} = \vec{F}_g + \vec{F}_o + \vec{F}_t = 0.$$

Síla \vec{F}_t je kolmá na povrch. Z předchozí úvahy plyne, že síla $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_o$ má stejnou velikost jako \vec{F}_t a je opačně orientovaná. To znamená, že i \vec{F} je v každém bodě hladiny kolmá na hladinu.

Z obrázku 3.3 můžeme spočítat

$$\text{tg } \alpha = \frac{dh}{dR} = \frac{F_o}{F_g} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \left(\frac{\omega^2}{g}\right) R, \quad (3.10)$$

kde ω je úhlová rychlost a g je tíhové zrychlení.

Úpravou rovnice (3.10) dostáváme vztah

$$dh = \frac{\omega^2}{g} R \cdot dR.$$

Integrací tohoto vztahu dostáváme:

$$\begin{aligned} h &= \int_0^R \left(\frac{\omega^2}{g}\right) R dR \\ h &= \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) R^2 + k, \end{aligned}$$

kde k je konstanta, která souvisí se zavedením souřadnic. Zvolíme-li souřadnice h a R tak, že ve vrcholu paraboly bude $R = h = 0$ (viz obrázek 3.3), bude i $k = 0$ a my tak můžeme pro popis tvaru povrchu kapaliny v rotující nádobě používat vztah

$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2. \quad (3.11)$$

3.2.4 Odvození „pomocí energií“

S tímto způsobem odvození jsem se setkal poprvé v článku [26]. Bude se zdát na první pohled možná poněkud zdlouhavé, ale to, že stejnou skutečnost dokážeme odvodit několika způsoby, ukazuje jakousi vnitřní krásu fyziky a jsou nám tak odhalovány jednotlivé souvislosti ve fyzice.

Když necháme rotovat nádobu s kapalinou úhlovou rychlostí ω , po jisté době se bude touto rychlostí otáčet nejen nádoba, ale i její obsah (kapalina). Na libovolný malý „kousek“ kapaliny (o hmotnosti m), tak bude působit trojice sil (viz obrázek 3.3). Tíhová síla

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

(m je hmotnost tělesa a $\vec{g} = (0, 0, -g)$ je tíhové zrychlení), odstředivá síla

$$\vec{F}_o = m\omega^2\vec{R} \quad (3.12)$$

(\vec{R} je vektor kolmý k ose rotace; jeho počáteční bod leží na ose rotace a koncový bod leží v místě vybraného „kousku“ kapaliny.) a tlaková síla \vec{F}_t daná působením okolní kapaliny na vybraný „kousek“ kapaliny.

Potenciální energie, které přísluší k tíhové síle F_g a odstředivé síle F_o , přispívají k celkové potenciální energii. Celková potenciální energie E_{celk} je tedy součtem potenciální tíhové energie E_g a potenciální energie odstředivé síly E_o .

$$E_{celk} = E_g + E_o \quad (3.13)$$

Abychom mohli spočítat jednotlivé energie, je třeba si uvědomit, jak je potenciální energie zavedena.

Uvažujme hmotný bod ve vnějším konzervativním silovém poli, které působí na hmotný bod silou \vec{F} . Změna potenciální energie hmotného bodu ΔE_p při přechodu z počáteční do koncové konfigurace je rovna záporně vzaté práci ($\Delta E_p = -W$), kterou při této změně vykonala síla \vec{F} . Změna potenciální energie hmotného bodu při jeho přesunu z polohy \vec{r}_1 do polohy \vec{r}_2 po křivce ξ je tedy

$$\Delta E_p = -W = - \int_{\xi} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Tento integrál však díky konzervativnosti síly $\vec{F}(\vec{r})$ nezávisí na tvaru křivky ξ a změna potenciální energie souvisí pouze s polohou jejího počátečního a koncového bodu.

Chceme-li tedy spočítat potenciální energii v daném místě, stačí určit, jak se změní při přesunu objektu z místa s nulovou potenciální energií.

Určeme nejprve např. tíhovou potenciální energii. Zvolíme-li nulovou hladinu E_g ve výšce $h = 0$, budeme pro určení tíhové potenciální energie v obecné výšce h počítat integrál

$$E_g(h) = - \int_{(x_1, y_1, 0)}^{(x_2, y_2, h)} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = - \int_{(x_1, y_1, 0)}^{(x_2, y_2, h)} m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{(x_1, y_1, 0)}^{(x_2, y_2, h)} m(0, 0, -g) \cdot (dx, dy, dz) = m \int_{(x_1, y_1, 0)}^{(x_2, y_2, h)} g dz = \\
&= m \int_0^h g dz = mgh + k'
\end{aligned}$$

Jelikož jsme zvolili nulovou hladinu E_g ve výšce $h = 0$, je $k' = 0$ a my tak přirozeně dostáváme známý vztah pro potenciální tíhovou energii

$$E_g(h) = mgh. \quad (3.14)$$

Podobným způsobem nalezneme vztah pro potenciální energii odstředivé síly E_o ve vzdálenosti R od osy rotace. Odstředivá síla je dána vztahem (3.12). Bez újmy na obecnosti můžeme brát $\vec{R} = (x, 0, 0)$ a osou rotace nechť je kartézská osa z . Pak potenciální odstředivou energii ve vzdálenosti R od osy rotace budeme počítat jako integrál

$$\begin{aligned}
E_o(R) &= - \int_{(0, y_1, z_1)}^{(R, y_2, z_2)} m\omega^2 \vec{R} \cdot d\vec{r} = \\
&= - \int_{(0, y_1, z_1)}^{(R, y_2, z_2)} m\omega^2 (x, 0, 0) \cdot (dx, dy, dz) = \\
&= - \int_0^R m\omega^2 x dx = -\frac{m\omega^2}{2} R^2 + k''
\end{aligned}$$

Nacházíme-li se ovšem na ose rotace (tj. $R = 0$), je přirozené, aby byla potenciální energie odstředivé síly rovna nule. Volíme tedy $k'' = 0$ a pro potenciální energii odstředivé síly dostáváme vztah

$$E_o(r) = -\frac{m\omega^2}{2} R^2. \quad (3.15)$$

Nyní již dokážeme zjistit celkovou potenciální energii a její závislost na výšce h a vzdálenosti od osy otáčení R . Do vztahu (3.13) dosadíme závislosti (3.14), (3.15). Při ustáleném tvaru hladiny kapaliny je hladina ekvipotenciální plochou. Celková potenciální energie libovolného kousku hladiny je tedy konstantní.

$$\begin{aligned}
E_{celk} &= mgh - \frac{m\omega^2}{2} R^2 = k \\
E_{celk} &= m \left(gh - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) = k
\end{aligned}$$

Pro $h = R = 0$ dostáváme $k = 0$ a celková potenciální energie v rotující soustavě je tedy dána vztahem

$$E_{celk} = m \left(gh - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) = 0$$

Odtud již snadno vypočteme rovnici pro tvar hladiny.

$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2, \quad (3.16)$$

kde h je výška hladiny, nad jejím nejnižším bodem, ve vzdálenosti R od osy otáčení při úhlové rychlosti ω .

3.2.5 Shrnutí nalezených výsledků

Několika metodami jsme dostali stejný vztah (3.3), (3.9), (3.11) a (3.16)

$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2, \quad (3.17)$$

kde h je výška hladiny nad jejím nejnižším bodem ve vzdálenosti R od osy otáčení při úhlové rychlosti ω , pro tvar hladiny kapaliny v rotující nádobě. Jedná se o část paraboloidu.

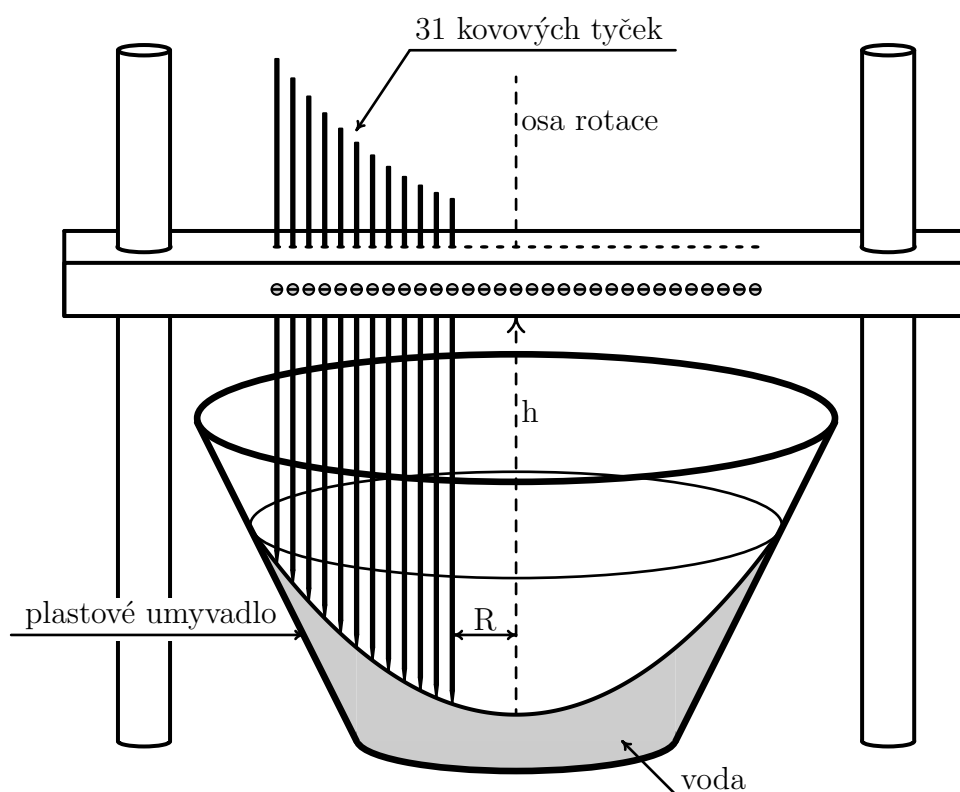
3.3 Aparatura a technické provedení

Pro roztočení kapaliny jsem se rozhodl použít motor z inventáře KDF MFF UK. Ing. Ludvík Němec vyrobil nástavec, na který je možno umístit nádoby o různých průměrech. Pro následující experimenty jsem použil zcela obyčejné plastové umyvadlo, které můžeme nalézt téměř v každé domácnosti.

Otázkou bylo, jak odměřit tvar hladiny. Nechal jsem se inspirovat článkem [26], kde odměřují tvar ztuhlé želatiny pomocí 21 kovových tyček, které zasouvají do jistého upínacího zařízení tak, aby se těsně dotýkaly tuhého povrchu.

Dle mého názoru je velmi těžké najít takový roztok, který bude při rotaci tuhnout a za jistou dobu udrží svůj tvar. Po několika nepříliš zdařilých pokusech se sádrou jsem se rozhodl sestrojít podobné zařízení (nákres viz obrázek 3.4), ale tak, aby bylo možné měřit tvar hladiny přímo při rotaci.

Nejprve jsem pro ověření tohoto mechanismu vyrobil provizorní dřevěnou konstrukci (viz obrázek 3.5). Jelikož jsem chtěl použít co největší



Obrázek 3.4: Schématický náčrt zařízení pro měření tvaru hladiny v rotující nádobě za chodu.

nádobu, bylo třeba pro větší přesnost použít více odečítacích tyček (celkem 31). Jako posuvných tyček jsem použil obyčejných špejlí. Každou špejli jsem zajistil aretovacím šroubkem, nemohlo tak dojít k jejímu pozdějšímu posunutí při odečítání naměřených hodnot. Nevýhodnou této pomůcky byly právě dřevěné špejle, které se snadno prohnuly a různě deformovaly. Docházelo tak ke zvyšování nepřesnosti měření. Ukázalo se však, že i s touto jednoduchou pomůckou lze provést kvalitní a až nečekaně přesné měření (viz výsledky experimentu 3.4.1).

Později bylo toto zařízení vyrobeno z kovu (z hliníkových trubiček a trámků), viz obrázek 3.6. Díky za její zhotovení patří Ing. Ludvíku Němcovi z KDF MFF UK.



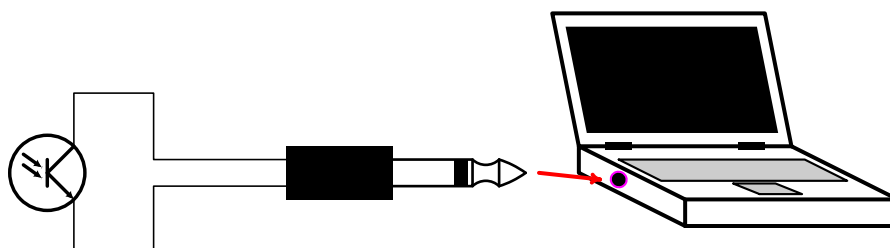
Obrázek 3.5: Provizorní zkušební zařízení pro měření tvaru kapaliny vyrobené autorem práce.



Obrázek 3.6: Měřicí zařízení pro určení parabolického povrchu kapaliny v rotující nádobě vyrobené Ing. Ludvíkem Němcem.

3.3.1 Měření periody otáčení

Periodu otáčení jsem se rozhodl měřit pomocí čidla zhotoveného z fototranzistoru, které jsem připojil ke zvukové kartě počítače. Čidlo se skládá pouze z jednoho fototranzistoru, jehož vývody jsou přivedeny pomocí kabelu na malý mono-jack (průměr 3,5 mm), který je možné zasunout do mikrofonního (růžového) vstupu zvukové karty počítače. Signál jsem nahrával a zpracovával v programu Audacity.⁶ Na obrázku 3.7 je schématicky znázorněno zapojení čidla.



Obrázek 3.7: Schéma připojení čidla k počítači.

Jelikož je čidlo citlivé na světlo, je potřeba převést periodičnost otáčení na periodičnost nějakého světelného signálu. To jsem provedl tak, že jsem na rotující desku přístroje připevnil značku odlišné barvy. (Jelikož je deska světlá, použil jsem černou značku.) Před začátkem experimentu bylo čidlo připevněno na část aparatury (viz obrázek 3.6) tak, aby bylo namířené na místo desky, kterým bude při otáčení procházet i černá značka. Při měření se tato změna barvy rotujícího kotouče projevila prudkou změnou amplitudy nahrávaného signálu.

Bližší popis a jiná využití grafické karty počítače lze nalézt například v článku [33].

⁶Audacity je zvukový editor a rekordér pro nejrůznější operační systémy. Domovská stránka tohoto freewaru je <<http://audacity.sourceforge.net/>>, kde je také možné získat nejnovější verzi tohoto programu.

3.4 Experimentální ověření teorie

Abych ověřil správnost teoretického odvození, vynesu do grafu odečtené body hladiny a proložím jimi parabolou. Kvadratický koeficient této paraboly pak bude porovnán s kvadratickým koeficientem $\frac{\omega^2}{2g}$ z rovnice (3.17).

3.4.1 Měření pomocí původního měřidla

Plastové umyvadlo připevněné na aparatuře bylo částečně naplněno vodou. Dále bylo zapotřebí nechat nádobu rotovat. Po několika minutách se na dně objevilo suché místo. Postupně byla dolévána voda, ale vždy tak aby nepřetekla. Jelikož však byla rychlost otáčení příliš velká, suché místo na dně zůstalo a nádoba byla přesto plná po okraj. Hladina by tak měla být částí rotačního paraboloidu (bez jeho vrcholové části). Po určení periody otáčení⁷ byly nastaveny všechny špejle těsně k hladině, poté byla z důvodu kontroly opět určena perioda otáčení. Jelikož se špejle kroutily, bylo nutné přenést polohy jejich koncových bodů nejprve na papír, odkud bylo možné dobře odečítat hodnoty.



Obrázek 3.8: Odečtení koncových bodů špejlí na papír. Polohy těchto bodů již lze snadno odečíst a zpracovat je.

Naměřenými hodnotami (viz tabulka B.1) byla proložena parabola (viz obrázek 3.9). Je patrné, že parabola dobře odpovídá naměřenému průběhu. V programu Excel byla určena rovnice této křivky. Nyní je

⁷K měření periody otáčení byl použit fototranzistor v kombinaci se zvukovou kartou počítače a programem Audacity. Čidlo bylo připevněno ke stativu. (viz část 3.3.1)

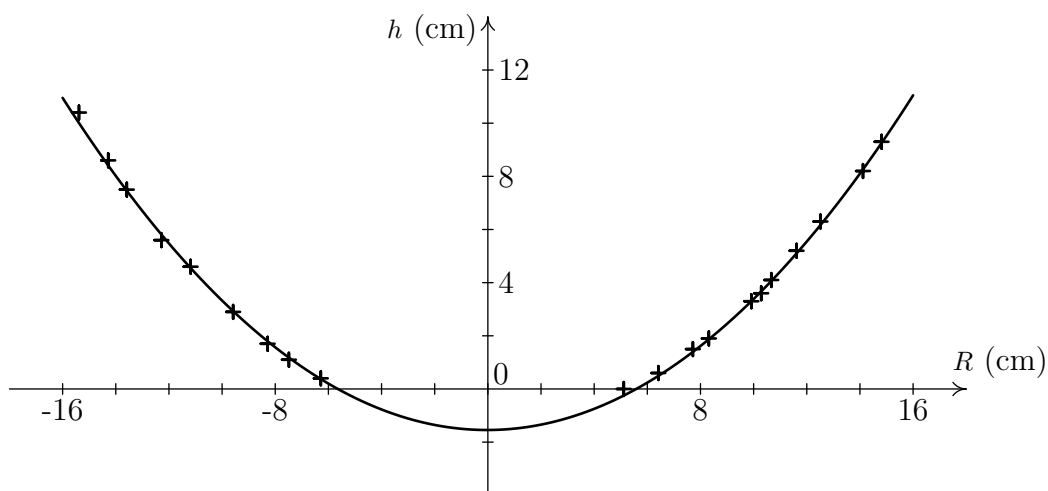
možné porovnat kvadratický koeficient této rovnice, který určuje tvar paraboly⁸, s kvadratickým členem z teoreticky získaného vztahu (3.17). Teoretický kvadratický koeficient je tedy dán vztahem

$$k_t = \frac{\omega^2}{2g} = \frac{2\pi^2}{gT^2},$$

kde ω je úhlová rychlost, T perioda otáčení a $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ tíhové zrychlení.

Relativní odchylka experimentálního a teoretického kvadratického členu byla vypočtena jako

$$\delta k = 2 \cdot \frac{k_t - k_e}{k_t + k_e} \cdot 100 \%.$$



Obrázek 3.9: Body hladiny rotující kapaliny proložené parabolou. Odečítání pomocí špejlí.

⁸Lineární a absolutní koeficient udávají pouze posunutí paraboly vůči osám x, y .

Tabulka 3.1: Hodnoty získané při měření původním měřidlem.

rovnice experimentálně získané paraboly:	$h = 4,94R^2 - 1,52R + 0,10$
experimentálně získaný kvadratický koeficient:	$k_e \doteq 4,94 \text{ m}^{-1}$
perioda otáčení plastového umyvadla:	$T \doteq 0,63 \text{ s}$
teoretický koeficient:	$k_t = 4,99 \text{ m}^{-1}$
relativní odchylka	$\delta k = 0,9 \%$

Porovnáním kvadratických koeficientů k_e a k_t z tabulky 3.1, zjišťujeme, že jejich vzájemná relativní odchylka je přibližně 0,9 %.

3.4.2 Měření pomocí kvalitnější aparatury

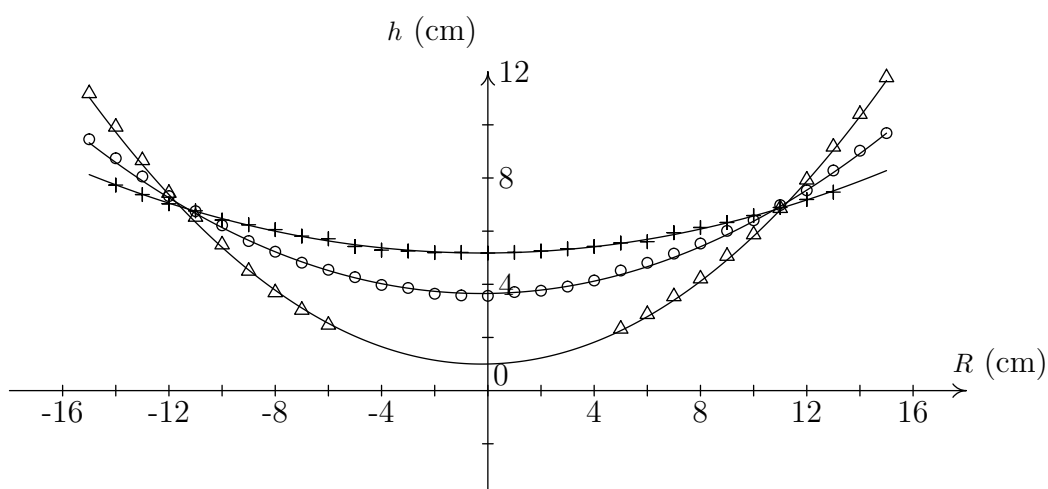
S kvalitnější aparaturou bylo provedeno 5 dalších měření, v zásadě stejným postupem jako byl popsán v článku 3.4.1. Měření byla očíslována jako 2-6. Navíc již bylo možné použít upravený motor s lepším regulátorem otáček. Bylo tak možné dosáhnout i nižších otáček (delších period otáčení). I za toto patří dík Ing. Němcovi.

Postup je obdobný jako v předchozím případě.

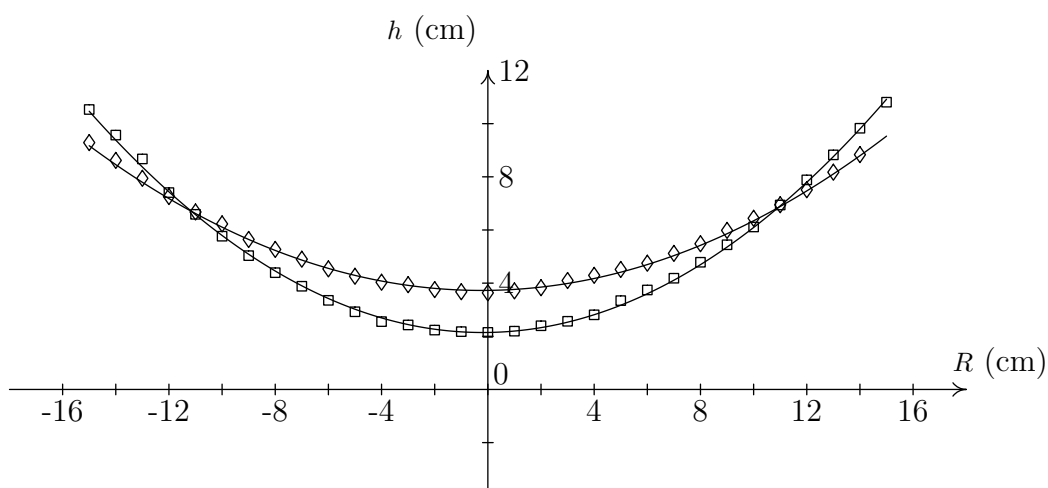
Naměřené hodnoty bodů hladiny jsou uvedeny v tabulce B.2 (viz příloha B) a vyneseny do grafů 3.10 a 3.11. Porovnání teoretického koeficientu k_t a experimentálního koeficientu k_e nalezneme v tabulce 3.2.

Tabulka 3.2: Další měření novou aparaturou.

č. m.	symbol	T (s)	k_t (m^{-1})	k_e (m^{-1})	δk
2	\triangle	0,64	4,86	4,67	4,0 %
3	\square	0,72	3,86	3,83	0,8 %
4	\circ	0,87	2,64	2,65	-0,6 %
5	\diamond	0,88	2,61	2,56	2,0 %
6	+	1,21	1,37	1,35	2,2 %



Obrázek 3.10: Body hladiny rotující kapaliny proložené parabolou. Měření číslo 2, 4, 6. Odečítání pomocí kvalitnějšího zařízení.



Obrázek 3.11: Body hladiny rotující kapaliny proložené parabolou. Měření číslo 3, 5. Odečítání pomocí kvalitnějšího zařízení.

3.4.3 Shrnutí výsledků experimentů

Jak je patrné z grafů 3.9, 3.10 a 3.11 lze naměřenými body hladiny dobře proložit parabolou. Navíc porovnáním kvadratických koeficientů k_e a k_t zjišťujeme, že jejich vzájemná relativní odchylka se pohybuje v řádu jednotek procent, v našem případě to jsou maximálně 4%. Jsou tyto čtyři

procenta hodně? Odhadnutím relativní chyby měření se ukazuje, že nikoliv. Experimentální kvadratický koeficient je určován z naměřených hodnot h a R , a platí $k_e \sim \frac{R^2}{h}$. Odtud můžeme alespoň zhruba odhadnout relativní chybu experimentálního určení kvadratického koeficientu jako $\delta k_e = 2\delta R + \delta h$, kde δR je relativní chyba měření R a δh je relativní chyba určení h . Odhad platí spíše pro systematické chyby měření; náhodné chyby měření se při výpočtu k_e z mnoha bodů budou mít tendenci vyrušit a pro jejich vliv na výslednou chybu by platil složitější vztah.

Jelikož není možné přiblížit se s odečítací tyčkou dokonale těsně k hladině rotující kapaliny⁹, projeví se toto právě při určení výšky hladiny kapaliny h . Je zřejmé, že absolutní chyba Δh bude minimálně 1 mm. Jelikož se měřená výška kapaliny pohybuje maximálně do 120 mm, bude relativní chyba $\delta h \sim (1 - 2) \%$. Podobně lze odhadnout relativní chybu $\delta R \sim (1 - 2) \%$.

Relativní chybu experimentálního určení kvadratického koeficientu tak můžeme zhruba odhadnout¹⁰ na $\delta k_e = (3 - 6) \%$.

Při výpočtu k_t byla použita naměřená hodnota periody otáčení T . Drobné kolísání hodnoty T dává chybu opět maximálně v řádu procent.

Je tedy patrné, že hodnoty k_e a k_t se v rámci odhadnuté chyby měření shodují.

Z tabulek 3.1 a 3.2 také plyne, že až na jednu výjimku je $k_e < k_t$. Zdá se tedy, že parabola určená z naměřených bodů hladiny není tak strmá jak by odpovídalo parabole při dané periodě otáčení. To může souviset s tím, že u okrajů nádoby je možné lépe se s odečítací tyčkou přiblížit hladině než uprostřed, kde je tato vzdálenost hůře pozorovatelná.

Celkově lze dle mého soudu říci, že zvolený způsob měření tohoto jevu je pro ověření parabolického povrchu kapaliny v rotující nádobě dobře použitelný a vztah, který tento paraboloid určuje, je jasně průkazný.

Doporučený postup měření

Při ověřování teoretických výsledků navíc vykrytalizoval následný postup měření, který mohu označit jako doporučený:

⁹Tyčka se nesmí hladiny dotýkat a nedá se zaručit, že všechny tyčky jsou od hladiny stejně vzdáleny.

¹⁰Hrubý odhad relativní chyby experimentálního koeficientu bychom také mohli provést přičítáním náhodných čísel v rozmezí $(-0, 5; 0, 5)$ mm k naměřeným hodnotám h a R . Toto lze snadno provést v aplikaci Excel, která obsahuje generátor náhodných čísel. Relativní odchylka maximálních a minimálních hodnot k_e získaných při této simulaci vychází pro jednotlivá měření například 0,9 %, 1,3 %, ale i 3,2 %.

1. Připravíme nádobu s vodou (přiměřené množství) a umístíme ji na otočnou desku aparatury. Nezapomeňme ji upevnit!
2. Zapneme motor a necháme umyvadlo rotovat do doby, kdy se již nebude tvar hladiny měnit.
3. Vytvoří-li se na dně nádoby suché místo, opatrně doléváme vodu, do doby kdy bude hladina celistvá.
4. Určíme periodu otáčení. Máme-li možnost, měříme periodu otáčení po celou dobu nastavování tyček.
5. Pomalu zasouváme tyčky těsně k hladině. Dobrý způsob může být takový, že tyčku ponoříme a pomalu ji vytahujeme až do chvíle, kdy se právě „odtrhne“ od hladiny. Poté tyčku zaaretujeme šroubkem. Takto nastavíme všechny tyčky.
6. Opět určíme periodu otáčení. (Zejména pro kontrolu, abychom zjistili, zda se během nastavování tyček nezměnila.)
7. Odečteme délky zasunutých tyček.
8. Zjištěná data zadáme do počítače. Použijeme například program Excel, nebo jiný program pro zpracování dat. Vytvoříme tabulku a graf (v Excelu tzv. bodový). Grafem proložíme parabolou a určíme její rovnici.
9. Porovnáme kvadratický koeficient s vypočteným koeficientem. (Ten získáme z naměřené hodnoty periody otáčení.)

Kapitola 4

Chování lodičky na roztočené vodní hladině

Již jsme prokázali, že hladina kapaliny v rotující nádobě má skutečně tvar paraboloidu. Nyní bychom si mohli položit otázku: „Co se stane, když na takovou hladinu položíme nějaký předmět nebo dokonce lodičku?“ Tento problém jsem již s doc. Dvořákem nastínil v článku [31].

Abychom mohli tento problém řešit, musíme si nejprve uvědomit, jaké síly budou na lodičku působit. Jistě to bude tíhová síla a jelikož se nacházíme v rotující soustavě, tak také odstředivá síla.

4.1 Teorie

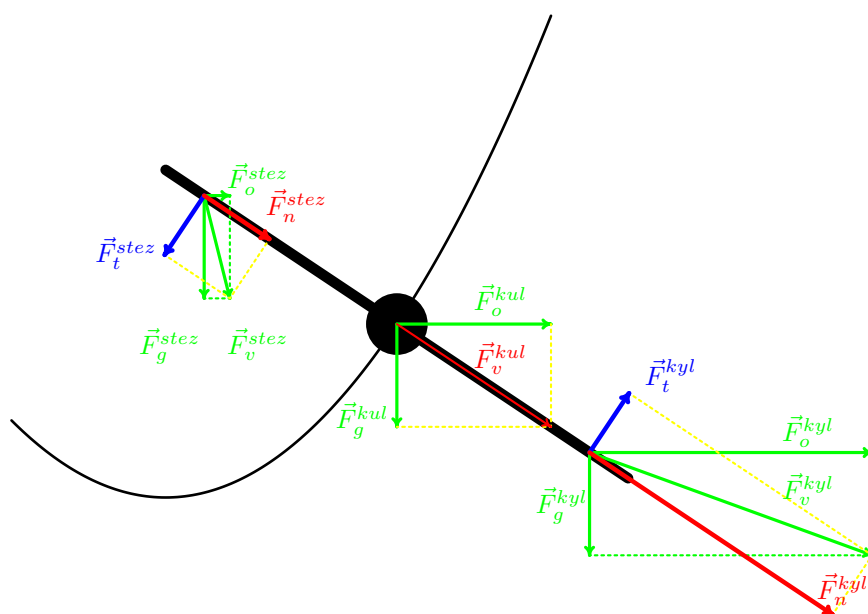
Ukazuje se, že matematický popis uvedeného problému bude obecně značně komplikovaný a jeho řešení přesáhne rámec nejen středoškolské, ale i úvodní vysokoškolské fyziky. Proto (vzhledem k zaměření práce na pokusy pro středoškoláky) se zde do obecného analytického resp. kvantitativního řešení nepouštíme. Na kvalitativní úrovni však dají zajímavé výsledky již vcelku jednoduché úvahy. Jako model této situace si zvolme lodičku, která bude tvořena malou kuličkou, která plave tak, že je ponořená právě polovinou svého objemu, a místo kýlu a stěžně má úzké tyčky (viz obrázek 4.1).

Nyní tuto lodičku umístíme na hladinu rotující kapaliny tak, jak asi předpokládáme, že bude její rovnovážná poloha. Položme ji tedy na hladinu tak, že kýl a stěžně jsou kolmé k hladině. Nyní si promysleme, jak to vypadá se silami, které působí na jednotlivé části lodičky.

Pro těžiště malé kuličky je to jasné. To se nachází na hladině kapaliny a výslednice sil \vec{F}_v^{kul} , které na ně působí (tíhová \vec{F}_g^{kul} a odstředivá \vec{F}_o^{kul}),

je kolmá na hladinu kapaliny a až na znaménko je rovna velikosti tlakové síly kapaliny působící na kuličku. Půjdeme-li po kýlu směrem od těžiště lodi, bude se odstředivá síla působící na část kýlu zvětšovat (vzdalují se od osy otáčení), tíhová síla však zůstává stejná. Výslednice sil na kýl \vec{F}_v^{kyl} se tedy bude odchylovat od kolmice k hladině v kladném smyslu. Naproti tomu pro stěžeň se odstředivá síla \vec{F}_o^{stez} působící na část stěžeň zmenšuje a i zde zůstává tíhová síla \vec{F}_g^{stez} stejná. Výslednice sil působících na stěžeň \vec{F}_v^{stez} tak bude od svislého směru odchýlena naopak v záporném smyslu.

Lodička se díky silám působícím na kýl a stěžeň nakloní. Otázkou zůstává, jestli spadne úplně, či nikoliv.



Obrázek 4.1: Síly působící na jednotlivé části lodičky

Rozdělíme-li teoreticky problém lodičky na dvě části, na lodičku pouze s kýlem a na lodičku pouze se stěžeň, dojdeme pomocí předešlých úvah k tomu, že lodička pouze s kýlem bude zřejmě tažena nahoru (k okraji nádoby) a lodička pouze se stěžeň¹ bude tažena dolů (do vrcholu paraboloиду).

Tuto úvahu můžeme dále rozvinout tak, že pokud bude těžiště lodičky pod hladinou, bude celá lodička tažena směrem k okraji nádoby. Pokud

¹Toto je však pouze teoretická úvaha, neboť kulová lodička nemůže mít pouze stěžeň.

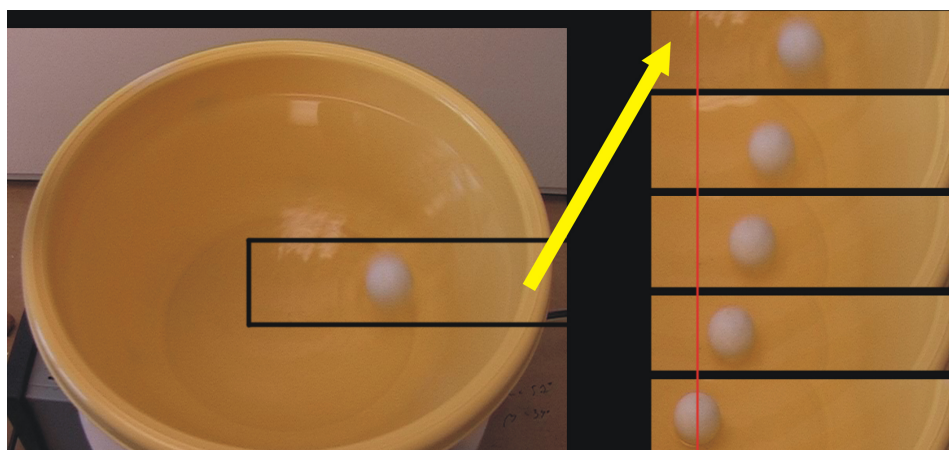
bude naopak těžiště nad hladinou, bude lodička pravděpodobně tažena směrem dolů (k vrcholu vodního paraboloidu).

4.2 Aparatura a technické provedení

Pro ověření teoretických úvah jsem použil téměř stejnou aparaturu jako v prvním experimentu² v kapitole 3. Pro záznam jsem použil videokameru zapůjčenou z KDF MFF UK. Záznam byl pořízen z místa mimo rotující soustavu.

4.3 Experimentální ověření teorie

Jelikož při tomto experimentu není žádný vzorec k ověřování, bude se jednat o experiment kvalitativní. Budeme pozorovat, co se stane s lodičkou, která má své těžiště nad hladinou a naopak s lodičkou, kterou na její spodní straně dostatečně zatížíme.



Obrázek 4.2: Experiment s ping-pongovým míčkem (jako lodičkou). Obrázek je složen z několika políček natočeného videozáznamu. Časový interval mezi jednotlivými políčky filmu není konstantní. Červená čára naznačuje přibližný střed nádoby. Snímky jsou uspořádány tak, že čas narůstá shora dolů.

²Motor k němuž je připevněna deska a na ní je umístěno plastové umyvadlo s vodou.



Obrázek 4.3: Experiment s polystyrénem jako lodičkou. Obrázek je složen z částí několika políček natočeného videozáznamu. Časový interval mezi jednotlivými políčky je náhodný (není konstantní). Modrá čára naznačuje přibližný střed nádoby. Červeně je značen nezatížený polystyrén a zelenou tečkou je označen kousek polystyrénu zatížený malým vrutem. Snímky jsou uspořádány chronologicky tak, že čas roste zleva doprava.

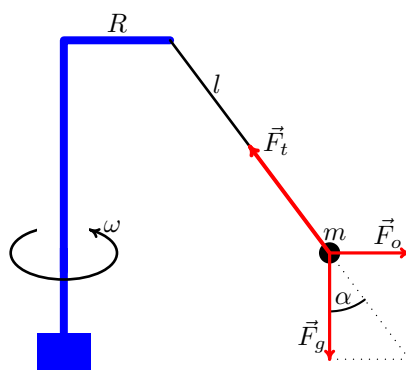
Pro experiment jsem jako modelů lodiček využil polystyrén a ping-pongový míček. Pro zatížení polystyrénu jsem použil malý vrut. Jak je patrné z natočených videoklipů, které jsou uloženy na přiloženém CD a obrázků, je ping-pongový míček (obrázek 4.2) a nezatížený polystyrén

(červeně značený na obrázku 4.3) po svém vložení na hladinu tažen dolů do vrcholu paraboloidu. Naproti tomu, zatížíme-li polystyrén (v tomto případě malým vrutem), je tento model lodičky (na obrázku 4.3 značen zeleně) tažen nahoru k okraji nádoby. Lodička se tedy chová podle teoretických předpokladů.

Kapitola 5

Olovnice v rotující soustavě (Řetízkový kolotoč)

Následující experiment bývá často v různých variantách počítán v základních fyzikálních kurzech na vysoké škole. Jedná se o závaží o hmotnosti m upevněné na konci tuhého vlákna konstantní délky l , jehož hmotnost je zanedbatelná a jehož druhý konec je upevněn na ramínku nenulové délky R . Toto ramínko je upevněno na ose rotace, kolem které celé zařízení rotuje (viz obrázek 5.1). Nás bude zajímat, jaká je výchylka vlákna od svislého směru v závislosti na délce závěsu l , délce ramínka R , hmotnosti závaží m a úhlové rychlosti ω .



Obrázek 5.1: Kulička hmotnosti m na závěsu délky l , který je připevněn na rameni o délce R . Tato soustava se otáčí úhlovou rychlostí ω , na kuličku působí odstředivá síla \vec{F}_o , tíhová síla \vec{F}_g a tahová síla vlákna \vec{F}_t .

Speciálním případem je tzv. kónické kyvadlo, u něhož je vlákno (závěs) upevněno přímo na ose rotace, neboli délka ramínka $R = 0$ m. Kónickým

kyvadlem a jeho dalšími variantami se zabývá následující kapitola 6.

5.1 Teorie

Nyní se pokusme spočítat, jak se olovnice (závaží) vychýlí, budeme-li popsanou aparaturou točit?

Na kuličku na závěsu bude působit tíhová síla \vec{F}_g , odstředivá síla \vec{F}_o a tahová síla vlákna \vec{F}_t .

$$\begin{aligned} F_g &= mg \\ F_o &= m\omega^2 r = m\omega^2 (R + l \sin \alpha) \end{aligned}$$

Jaký bude úhel α , který svírá výslednice sil a závěs od svislice, v závislosti na délce závěsu l ? Z geometrie této situace (viz obrázek 5.1) plyne následující vztah pro tangens úhlu α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_o}{F_g} = \frac{m\omega^2 (R + l \sin \alpha)}{mg} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{g} (R + l \sin \alpha) \quad (5.2)$$

Vztah pro výchylku závěsu α neobsahuje hmotnost závaží, ale pouze úhlovou rychlost ω , délku ramínka R a délku vlákna l .

Tento vztah (5.2) nelze jednoduše upravit na vztah typu $\alpha = f(l)$. Než se pustíme do numerického řešení tohoto problému, můžeme si položit několik otázek, abychom prověřili možnou správnost vztahu. Jaká bude úhlová rychlost při nulové výchylce? Logicky by měla být nulová. Jaká bude úhlová rychlost při výchylce $\frac{\pi}{2}$? Zřejmě by měla růst nade všechny meze. Tyto úvahy lze matematicky podložit například následujícími odvozeními (5.3), (5.4).

$$\begin{aligned} \text{jestliže } \alpha = 0, \quad \wedge \quad l, R \neq 0, \text{ pak} \\ \omega^2 (R + l \sin 0) &= g \operatorname{tg} 0 \\ \omega^2 R &= 0 \\ \omega &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\text{jestliže } \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \wedge \quad l, R \neq 0, \text{ pak}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(R + l \sin \frac{\pi}{2} \right) &= g \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty \\ \omega^2 &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.4)$$

Jelikož nelze rovnici (5.2) vyřešit jednoduše analyticky, musíme se pokusit získat vztah pro α některou z numerických metod (viz příloha A).

5.1.1 Iterace

Jako nejsnazší cestou vedoucí k cíli se ukázala být metoda prosté iterace, která není za použití některého tabulkového procesoru nijak náročná. Touto metodou sice nezískáme analytický vzorec pro α , ale budeme tak moci počítat předpokládané (teoretické) výsledky experimentu pro zvolené parametry (úhlová rychlost otáčení, hmotnost kuličky, délka závěsu, délka ramene).

Nejprve převedeme rovnici (5.2) na rovnici typu $x = \tilde{f}(x)$, se kterou budeme moci dále pracovat:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{\omega^2 R}{g} \left(1 + \frac{l}{R} \sin \alpha \right) \right] \quad (5.5)$$

Označíme-li

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 R}{g} &= k \\ \frac{l}{R} &= \varepsilon, \end{aligned}$$

můžeme psát rovnici (5.5) ve tvaru:

$$\alpha = \operatorname{arctg} [k(1 + \varepsilon \sin \alpha)] \quad (5.6)$$

Rovnici (5.6) lze nyní řešit iteracemi:

$$\alpha_{n+1} = \tilde{f}(\alpha_n), \quad \text{kde } \tilde{f}(\alpha) = \operatorname{arctg} [k(1 + \varepsilon \sin \alpha)] \quad \text{a} \quad \alpha_0 = 0$$

Limita iterací je rovna α . Jsme však omezeni konečným počtem iterací. Ukázalo se, že pro malé k a malé ε ($k < 0,3$, $\varepsilon < 2$) se liší devatenáctá a dvacátá iterace minimálně až na devátém platném místě, tj:

$$\Delta\alpha_{19,20} = \frac{|\alpha_{20} - \alpha_{19}|}{|\text{průměr}(\alpha_{20}, \alpha_{19})|} \leq 10^{-9}$$

a je tak možné hodnotu α_{20} pro malá k a malá ε s dobrou přesností položit rovnu přímo α .

5.1.2 Lineární aproximace - rozvoj do prvního řádu

Iterováním dokážeme nalézt téměř přesnou hodnotu α pro předem zadané podmínky. Tato metoda však nedává žádný (ani přibližný) vzoreček pro α . Z tohoto důvodu jsem se rozhodl provést dvě aproximace a najít tak přibližné vzorce pro α v závislosti na zadaných podmínkách.

Návod na linearizaci a kvadraticizaci, kterou získáme níže uvedené vzorce, naleznete v příloze A.

Funkci, kterou budeme rozvíjet, získáme jako nenulovou stranu anulované rovnice (5.2), resp. (5.6):

$$f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - k(1 + \varepsilon \sin \alpha) = 0 \quad (5.7)$$

Pro $l \rightarrow 0$ a tedy i $\varepsilon \rightarrow 0$ se rovnice (5.6) zredukuje na tvar

$$\operatorname{tg} \alpha = k.$$

Jako bod, ve kterém budeme provádět rozvoje, proto volme bod α_0 , pro který platí

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = k.$$

Abychom mohli vyjádřit rozvoj do prvního řádu funkce f , potřebujeme znát hodnotu funkce f v bodě α_0 a derivaci funkce f v bodě α_0 :

$$\begin{aligned} f(\alpha_0) &= \operatorname{tg} \alpha_0 - k - k\varepsilon \sin \alpha_0 = -k\varepsilon \sin \alpha_0 \\ f'(\alpha_0) &= \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} - k\varepsilon \cos \alpha_0 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha_0 \varepsilon \cos \alpha_0 = \\ &= 1 + k^2 - \varepsilon \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

Rozvoj do prvního řádu funkce f v bodě α_0 má pak tvar

$$\begin{aligned} T_1(\alpha) &= f(\alpha_0) + f'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) = \\ &= -k\varepsilon \sin \alpha_0 + (1 + k^2 - \varepsilon \sin \alpha_0)(\alpha - \alpha_0). \end{aligned}$$

Tento rozvoj položíme roven nule (viz rovnice (5.7)), z tohoto vztahu pak vypočteme α :

$$\begin{aligned} 0 &= -k\varepsilon \sin \alpha_0 + (1 + k^2 - \varepsilon \sin \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) \\ \alpha &= \alpha_0 + \frac{k\varepsilon \sin \alpha_0}{1 + k^2 - \varepsilon \sin \alpha_0} \end{aligned}$$

Rozvojem funkce (5.7) do prvního řádu jsme tedy získali vztah

$$\alpha_{\text{lin}} = \alpha_0 + \frac{k\varepsilon \sin \alpha_0}{1 + k^2 - \varepsilon \sin \alpha_0}.$$

5.1.3 Kvadratická aproximace

Přesnější by měl být rozvoj do druhého řádu. K jeho určení potřebujeme znát navíc hodnotu druhé derivace funkce f (5.7) v bodě α_0 .

$$f''(\alpha_0) = 2 \operatorname{tg} \alpha_0 + 2 \operatorname{tg}^3 \alpha_0 + k\varepsilon \sin \alpha_0 = 2k + 2k^3 + k\varepsilon \sin \alpha_0$$

Rozvoj do druhého řádu má pak tvar:

$$\begin{aligned} T_2(\alpha) &= f(\alpha_0) + f'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{f''(\alpha_0)}{2}(\alpha - \alpha_0)^2 = \\ &= -k\varepsilon \sin \alpha_0 + (1 + k^2 - \varepsilon \sin \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \\ &\quad + \left(k + k^3 + \frac{k\varepsilon}{2} \sin \alpha_0\right)(\alpha - \alpha_0)^2 \end{aligned}$$

Položíme-li $T_2(\alpha) = 0$ a označíme-li

$$a = k + k^3 + \frac{k\varepsilon}{2} \sin \alpha_0, \quad (5.8)$$

$$b = 1 + k^2 - \varepsilon \sin \alpha_0, \quad (5.9)$$

$$c = -k\varepsilon \sin \alpha_0, \quad (5.10)$$

dostáváme kvadratickou rovnici

$$a(\alpha - \alpha_0)^2 + b(\alpha - \alpha_0) + c = 0. \quad (5.11)$$

Pro α , tak existují dvě možná řešení:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \alpha_2 &= \alpha_0 - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

To je ovšem pouze matematické odvození, po porovnání s výsledky získanými iteracemi a linearizací zjišťujeme, že pouze α_1 odpovídá hodnotám získaných jinými metodami. Rozvojem funkce (5.7) do druhého řádu jsme tedy získali vztah

$$\alpha_{\text{kvadr}} = \alpha_0 - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kde koeficienty a, b, c jsou dány vztahy (5.8), (5.9), (5.10).

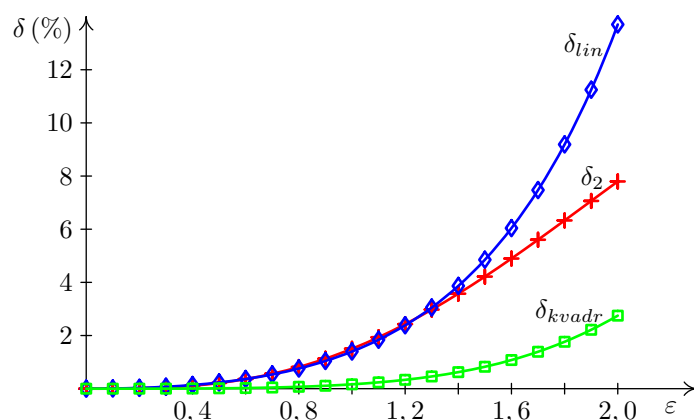
5.1.4 Srovnání aproximací

Jelikož rozvoje do prvního a druhého řádu jsou pouze přibližné metody, bude dobré ukázat, jaká je jejich přesnost, jak se navzájem liší, a porovnat je s některou nižší iterací. Do grafu 5.2 vyneseme závislost relativní chyby úhlu α v závislosti na ε pro konstantní k . Naopak do grafu 5.3 vyneseme závislost relativní chyby úhlu α v závislosti na k při konstantním ε . Tyto závislosti vyneseme pro aproximaci do prvního a druhé řádu a také pro druhou iteraci.

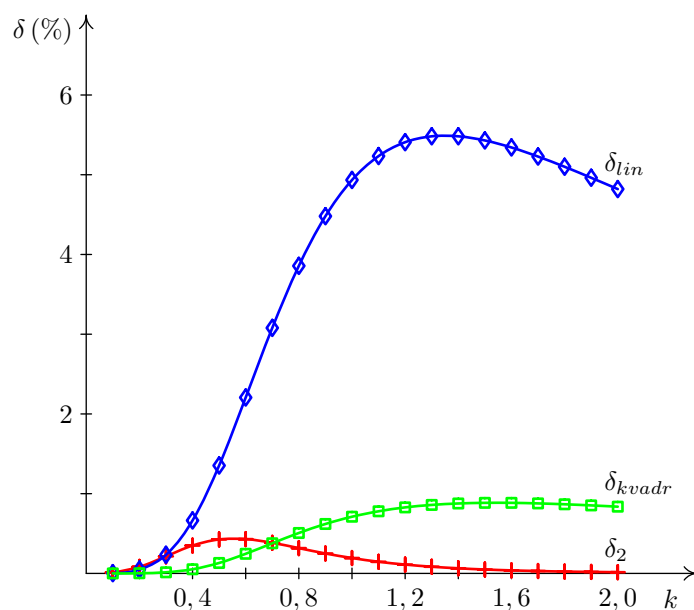
Relativní chyba je dána vztahem

$$\delta_{2,\text{lin},\text{kvadr}} = \left| \frac{\alpha - \alpha_{2,\text{lin},\text{kvadr}}}{\alpha} \right| \cdot 100\%,$$

kde α je získáno jako dvacátá iterace a za $\alpha_{2,\text{lin},\text{kvadr}}$ dosazujeme druhou iteraci, lineární aproximaci, nebo kvadratickou aproximaci podle toho, kterou relativní chybu počítáme.



Obrázek 5.2: Srovnání relativních chyb lineární a kvadratické aproximace s druhou iterací pro $k = 0,3$. +... relativní chyba druhé iterace; \diamond ... relativní chyba lineární aproximace; \square ... relativní chyba kvadratické aproximace.



Obrázek 5.3: Srovnání relativních chyb lineární a kvadratické aproximace s druhou iterací pro $\varepsilon = 0,5$. +...relativní chyba druhé iterace; \diamond ...relativní chyba lineární aproximace; \square ...relativní chyba kvadratické aproximace.

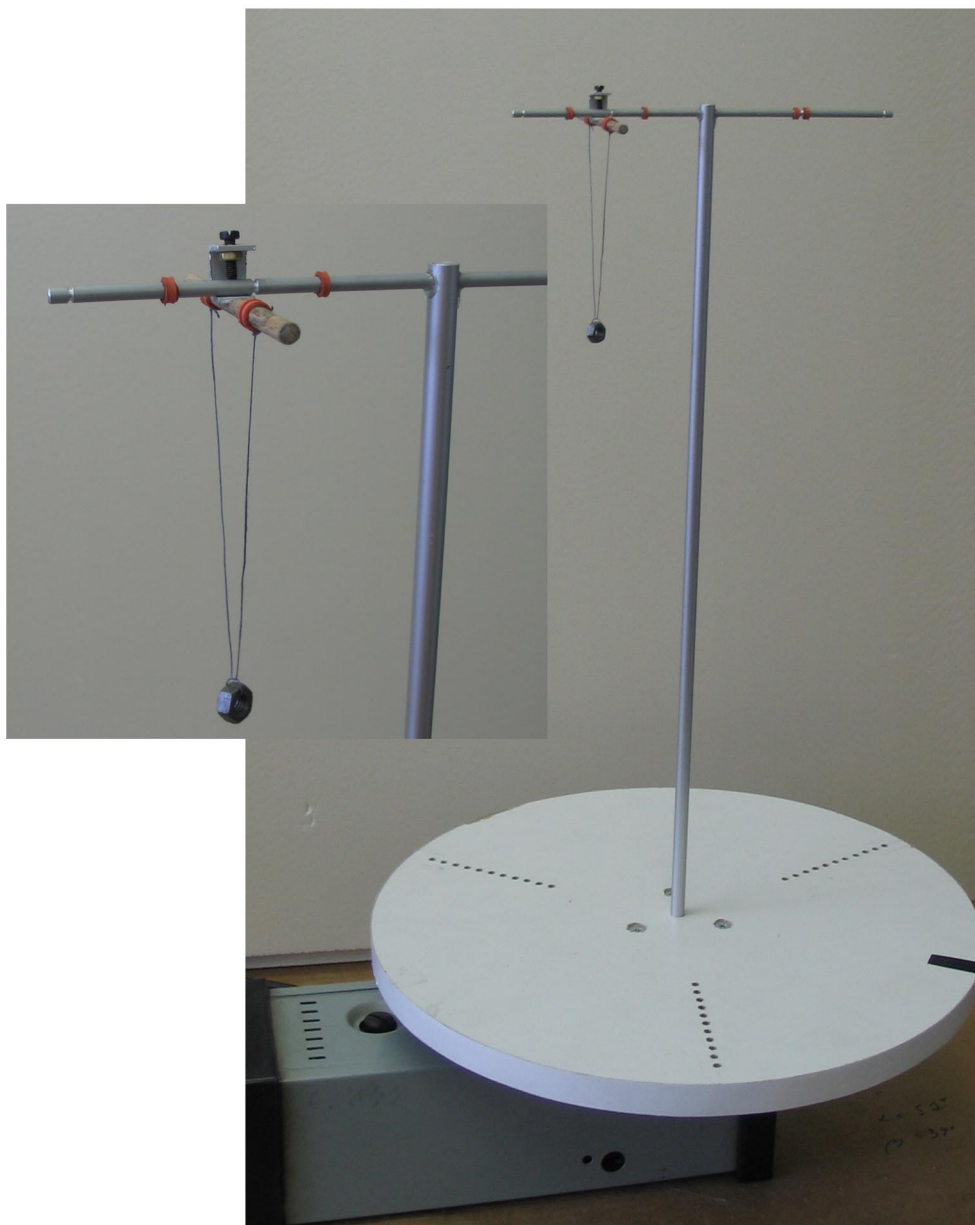
Z grafu 5.2 je patrné, že s rostoucím ε se zvyšuje i relativní chyba δ .

Z grafu 5.3 je vidět, že pro malá k je rozvoj do prvního řádu přibližně stejně přesný jako druhá iterace. Rozvoj do druhého řádu je pak pro malá k ještě přesnější než druhá iterace. Tyto intervaly se mění v závislosti na ε . Pro menší ε je tento interval, kdy je kvadratická aproximace lepší než druhá iterace, větší.

Po dosažení maximální hodnoty začne δ druhé iterace, linearizace i kvadratické aproximace s rostoucím k klesat. Pokaždé však klesá s jinou rychlostí. Nejrychleji se blíží nule relativní chyba druhé iterace, poté kvadratické aproximace. Nejpomaleji klesá chyba lineární aproximace. Pro $k \rightarrow \infty$ (tj. $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$) se blíží všechny $\delta \rightarrow 0$.

Pokud bychom chtěli mít explicitní vzorec pro úhel α , mohli bychom použít vztahy získané lineární nebo kvadratickou aproximací. Museli bychom však počítat s tím, že se jedná pouze o přibližné vztahy a pro vyšší hodnoty ε již nejsou chyby těchto vztahů zanedbatelné.

5.2 Aparatura a technické provedení



Obrázek 5.4: Aparatura pro experiment: olovnice v rotujících soustavě (řetízkový kolotoč).

Pro experimentální ověření byl použit stejný základ aparatury jako v experimentu s rotující nádobou (viz kapitola 3). Na motor byla upevněna

stejná deska, ke které byla do středu připevněna hliníková tyčka o průměru 8 mm a délce 447 mm. Na jejím vrcholu je umístěno ramínko, na které bylo připevněno druhé pro upevnění bifilárního závěsu (viz fotografie na obrázku 5.4). Jako závaží bylo využito maticek.

Pro zaznamenání odchylek byla použita videokamera¹ zapůjčená z vybavení KDF MFF UK. Kamera byla umístěna vně rotující soustavy, jelikož by se nevešla na rotující desku. Pokud by se vzala deska větší, stejně by nebylo možné nafilmovat celý závěs, jelikož by byla kamera příliš blízko a navíc by byl celý rotující systém nestabilní. Záznam byl pořízen po částech, vždy krátký snímek o délce několik sekund pro danou frekvenci otáčení, délku závěsu a závaží.

Většinu informací o analýze videozáznamu jsem načerpal na webových stránkách RNDr. Jana Koupila [34]. Filmový záznam jsem převedl do počítače pomocí programu Windows Movie Maker². Pomocí programu Virtual Dub³ jsem určil periodu otáčení soustavy. Programem Virtual Dub jsem také našel jednotlivá políčka filmu, která jsem mohl použít pro další analýzu. Na těchto políčkách filmu jsem poté v programu Corel Draw určil vzájemnou polohu upevnění závěsu maticky a středu (těžiště) maticky. Z těchto údajů již nebylo obtížné dopočítat odchylku od svislého směru.

5.3 Experimentální ověření teorie

Experimentální ověření jsem provedl dvěma měřeními s maticí o hmotnosti $m = 2,19$ g. Experimentální data jsou zanesena do grafů 5.5 a 5.6. Příslušná data naleznete v příloze B v tabulce B.3. Pro každé nastavení experimentu (pro stejnou maticku, délku vlákna, délku ramínka a frekvenci rotace) jsem odečetl úhel α z více vyhovujících políček filmu. Experimentální úhel α^e je pak jejich aritmetickým průměrem.

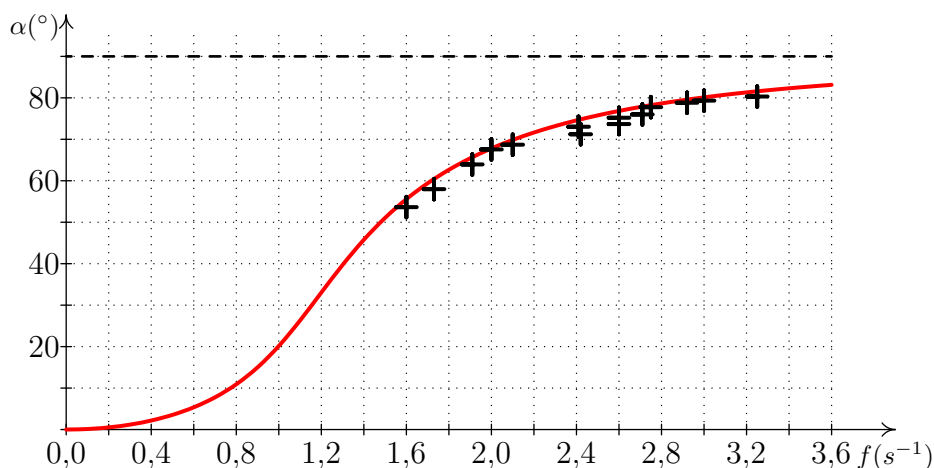
5.3.1 Shrnutí výsledků experimentů

Z grafů 5.5 a 5.6 je patrné, že experimentálně naměřené hodnoty výchylky závěsu α dobře odpovídají teoretické závislosti (křivce), která byla proložena body získanými pro danou situaci iteracemi vzorce (5.6).

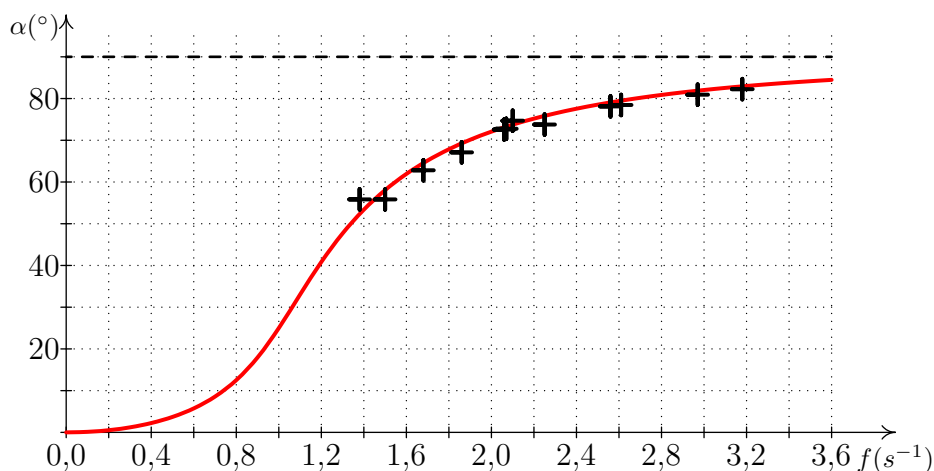
¹Jedná se o videokameru Panasonic NV-GS400.

²Jednolivé úseky jsem uložil do počítače ve formátu DV-AVI. Ty jsem pak mohl dále analyzovat.

³Virtual Dub je jednoduchý freeware pro střih videa, úpravy obrazu, apod.



Obrázek 5.5: Graf závislosti výchylky závěsu na frekvenci otáčení pro matici na závěsu o délce $l = 105$ mm upevněném na ramínku délky $R = 55$ mm. Do grafu jsou vyneseny experimentálně získané hodnoty pro matici o hmotnosti $m = 2,19$ g. Příslušná data viz tabulka B.3.



Obrázek 5.6: Graf závislosti výchylky závěsu na frekvenci otáčení pro matici na závěsu o délce $l = 144$ mm upevněném na ramínku délky $R = 55$ mm. Do grafu jsou vyneseny experimentálně získané hodnoty pro matici o hmotnosti $m = 2,19$ g. Příslušná data viz tabulka B.3.

Z tabulky B.3 si povšimněme, že odchylka teoretických hodnot, získaných pro danou frekvenci iteracemi, se od naměřených hodnot α liší v průměru o 1,7 %. Maximálně však přibližně o 6 %. Větší odchylky odpovídají

především nižší úhlové rychlosti (též frekvenci), jelikož zde se projevuje větší strmost měřené závislosti. Stejná změna frekvence zde odpovídá větší změně výchylky, než je tomu u vyšších frekvencí.

Měli bychom se ptát, je-li chyba do 6 % přijatelná. Je nutné si uvědomit, že aparatura není naprosto dokonalá a celá se při rotaci chvěje. Stejně i osa, na které je upevněno ramínko není naprosto tuhá, a proto se při rotaci chvěje. Všechny tyto vlivy mají podíl na tom, že závěs při dané úhlové rychlosti nesvírá se svislým směrem právě jeden neměnný úhel, ale spíše kolem něj jemně kmitá. Dalším vlivem, který může způsobovat toto vychylování z jedné konstantní polohy je také již výše popsany problém závislosti výchylky na frekvenci, který v kombinaci s možnou nestálostí otáček motoru a úmyslnou změnou⁴ otáček způsobí rozkmitání vlákna. Tyto výchylky dokumentuje i v tabulce B.3 uváděná hodnota variačního koeficientu⁵ $v(\alpha^e)$.

Jak je patrné z tabulky B.3, variační koeficient $v(\alpha^e)$ se pohybuje také maximálně do šesti procent. Opět je nižší pro menší frekvence. I když δ a $v(\alpha^e)$ naprosto přesně nekorelují pro jednotlivé frekvence, je dle mého soudu průkazné, že naměřené hodnoty odpovídají v rámci možné přesnosti teoretickým předpokladům.

⁴Úmyslnou změnou rozumějme to, že motor zapínáme nebo nastavujeme jinou rychlost otáčení.

⁵Bližší poznámka k variačnímu koeficientu je uvedena v příloze B na straně 90.

Kapitola 6

Rotující závěs kuliček

Myšlenka tohoto experimentu vychází z předchozího pokusu, kterému je věnována kapitola 5. Nyní se však podíváme na to, jak se problém změní, bude-li vlákno připevněno přímo k ose rotace, tj. délka ramínka je rovna nule. Jedná se o tzv. kónické kyvadlo. Problém také budeme postupně ztěžovat tím, že budeme pod sebe zavěšovat další a další závaží. Co se bude dít, když těchto závaží bude n ?

6.1 Teorie

Pusťme se tedy nejprve do teoretického vyřešení těchto problémů. Jaké budou odklony jednotlivých závěsů od svislice?

6.1.1 Jedna kulička (kónické kyvadlo)

Začněme jednou kuličkou. Jaký bude odklon (viz obrázek 6.1) závěsu délky l kuličky o hmotnosti m od svislice, je-li úhlová rychlost rotace ω ?

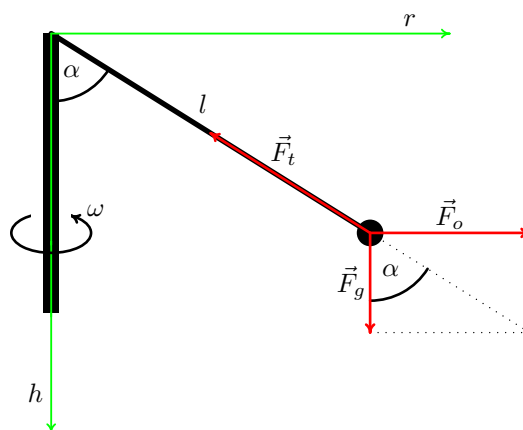
Na kuličku působí tíhová síla \vec{F}_g , odstředivá síla \vec{F}_o a tahová síla vlákna \vec{F}_t ¹.

$$\begin{aligned} F_g &= mg \\ F_o &= m\omega^2 r, \end{aligned}$$

kde r je vzdálenost kuličky od osy rotace a platí pro ni tedy

$$r = l \sin \alpha.$$

¹Velikost tahové síly vlákna není pro odvození popisovaná v celé této kapitole potřebná, proto ji neuvádím. Dala by se však snadno spočítat jako $F_t = \frac{F_g}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha}$.



Obrázek 6.1: Kónické kyvadlo: závěs s jednou kuličkou.

Aby byla výchylka kuličky při rotaci konstantní, musí být součet všech sil, které na ni působí, roven nule.

$$\vec{F}_t + \vec{F}_g + \vec{F}_o = \vec{0}$$

Z toho mimo jiné plyne (viz obrázek 6.1), že pro $\text{tg } \alpha$ platí následující vztah

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_o}{F_g} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2}{g} l \sin \alpha. \quad (6.1)$$

Vztah (6.1) bychom také mohli získat z rovnice (5.2) za předpokladu, že $R = 0$ m. A tak je jasné, že ani výchylka kónického kyvadla není závislá na hmotnosti kuličky.

Je zřejmé, že pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ vztah (6.1) nemá smysl. Platila by však limitní verze tohoto vztahu, ze které ho plyne, že pokud $\alpha \rightarrow 0$, pak $\omega^2 l \rightarrow \infty$. To znamená, že by rychlost otáčení rostla nad všechny meze, nebo by se jednalo o nekonečně dlouhý závěs. Ani s jednou z těchto možností se v praxi nesetkáme a proto je vyloučíme a budeme dále předpokládat $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Vztah (6.1) můžeme dále upravovat:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\omega^2}{g} l \sin \alpha, \\ 0 &= \left(\frac{\omega^2}{g} l - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Součin je roven nule, pokud je jeden z čítelů roven nule, tj:

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{l} \quad \vee \quad \sin \alpha = 0. \quad (6.2)$$

Dále nelze zapomenout na známou vlastnost goniometrických funkcí, tj.: $|\sin \alpha| \leq 1$ a $|\cos \alpha| \leq 1$. Obecně může být $\frac{g}{\omega^2 l} > 1$. Pak tedy nelze použít rovnici pro kosinus podmínky (6.2). V takovém případě bude muset platit $\sin \alpha = 0$, tzn. $\alpha = 0$.

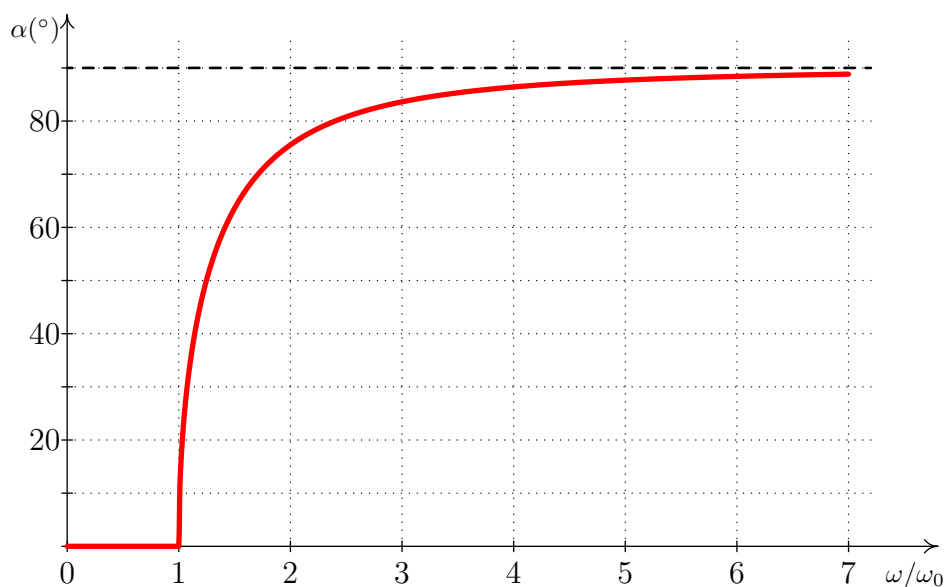
Pro odklon závěsu kuličky v závislosti na počátečních podmínkách tak dostáváme následující vztahy:

$$\text{pro } \omega < \omega_0 \quad : \quad \alpha = 0, \quad (6.3)$$

$$\text{pro } \omega \geq \omega_0 \quad : \quad \alpha = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{l} \right), \quad (6.4)$$

kde ω_0 definujeme jako

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6.5)$$

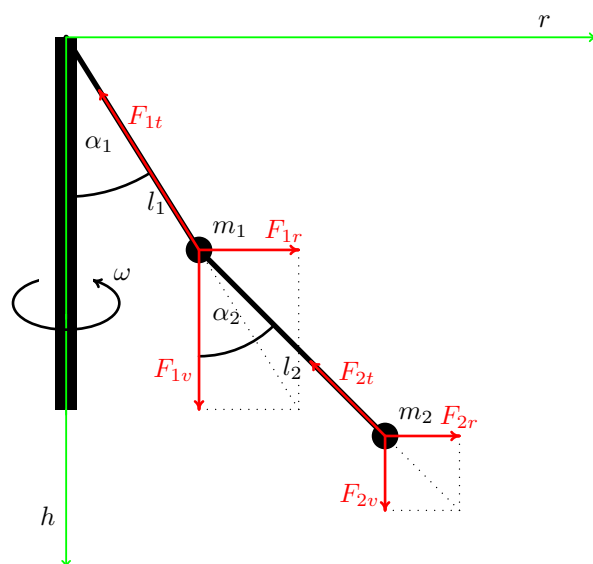


Obrázek 6.2: Závislost výchylky závěsu jedné kuličky na parametrech experimentu (na $\frac{\omega}{\omega_0}$).

Podle vztahů (6.3) a (6.4) byl sestaven graf 6.2 závislosti úhlu α na frekvenci otáčení f pro zafixovanou délku závěsu l .

6.1.2 Dvě kuličky

Trošku složitější situace nastane, když na první kuličku bude zavěšena další. Nyní se tedy jedná o závěs se dvěma kuličkami. Je zřejmé, že na každou z obou kuliček budou působit síly o různých velikostech a různých směrech. Celá tato situace je znázorněna na obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: Závěs se dvěma kuličkami. Tahová síla druhého vlákna působící na první kuličku je již zahrnuta v silách \vec{F}_{1r} a \vec{F}_{1v} , proto není na obrázku znázorněna. Bližší popis působících sil viz text této kapitoly.

První kulička

Na první kuličku bude působit tahová síla prvního vlákna o délce l_1 , dále odstředivá síla F_{1o} , tíhová síla F_{1g} , ale také tahová síla druhého vlákna o délce l_2 . Tato tahová síla druhého vlákna odpovídá součtu odstředivé a tíhové síly působících na druhou kuličku. Tyto čtyři se dají převést na tři síly:

- \vec{F}_{1t} ... Tahová síla vlákna, na kterém první kulička sama visí.
- \vec{F}_{1r} ... Radiální síla, působící na první kuličku ve směru od osy rotace. Je dána součtem odstředivých sil působících na obě kuličky.
- \vec{F}_{1v} ... Vertikální síla, působící na kuličku ve svislém směru. Je dána součtem tíhových sil působících na obě kuličky.

Pro velikosti těchto sil tak platí

$$\begin{aligned} F_{1v} &= F_{1g} + F_{2g} = (m_1 + m_2)g, \\ F_{1r} &= F_{1o} + F_{2o} = m_1\omega^2 r_1 + m_2\omega^2 r_2 = \omega^2 (m_1 r_1 + m_2 r_2), \end{aligned}$$

kde pro r_1 a r_2 platí

$$\begin{aligned} r_1 &= l_1 \sin \alpha_1 \\ r_2 &= r_1 + l_2 \sin \alpha_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

Druhá kulička

Na druhou kuličku působí opět tahová síla vlákna l_2 , radiální síla \vec{F}_{2r} , která odpovídá pouze odstředivé síle působící na kuličku, a vertikální síla \vec{F}_{2v} , která odpovídá tíhové síle působící na kuličku.

$$\begin{aligned} F_{2r} &= m_2\omega^2 r_2 \\ F_{2v} &= m_2g \end{aligned}$$

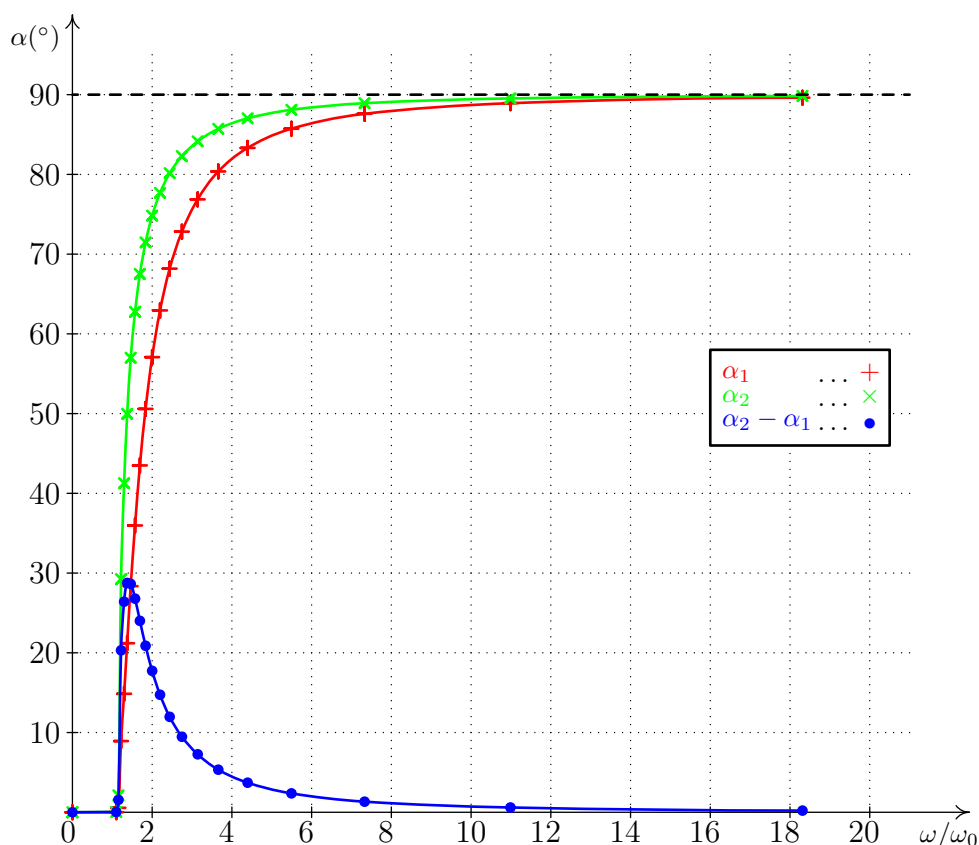
Odklony závěsů od svislice

Hledáme takový stav, ve kterém budou odklony vláken α_1 a α_2 od svislice pro danou úhlovou rychlost ω konstantní. To znamená, že celková síla působící na jednotlivé kuličky musí být nulová. Z geometrie této situace (viz obrázek 6.3) tak pro úhly α_1 a α_2 plynou následující vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{F_{2r}}{F_{2v}} = \frac{m_2\omega^2 r_2}{m_2g} = \frac{\omega^2}{g} (l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2) \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{F_{1r}}{F_{1v}} = \frac{m_1\omega^2 r_1 + m_2\omega^2 r_2}{m_1g + m_2g} = \\ &= \frac{m_1\omega^2 l_1 \sin \alpha_1 + m_2\omega^2 (l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)g} = \\ &= \frac{(m_1 + m_2)\omega^2 l_1 \sin \alpha_1 + m_2\omega^2 l_2 \sin \alpha_2}{(m_1 + m_2)g} = \\ &= \frac{\omega^2}{g} \left(l_1 \sin \alpha_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_2 \sin \alpha_2 \right) \quad (6.7) \end{aligned}$$

Pro $m_2 = 0$ přejde vztah pro $\operatorname{tg} \alpha_1$ na vztah pro jednu kuličku (kónické kyvadlo). Dále pro libovolné $m_1, m_2 \neq 0$ platí $\alpha_1 < \alpha_2$.



Obrázek 6.4: Závislost výchylky závěsů na $\frac{\omega}{\omega_0}$ pro dvě kuličky zavěšené pod sebou. Délky závěsů: $l_1 = 0,1$ m, $l_2 = 0,2$ m; hmotnosti kuliček jsou v poměru $m_1 : m_2 = 5 : 1$. Do grafu je také zanesena závislost rozdílu $(\alpha_2 - \alpha_1)$ na $\frac{\omega}{\omega_0}$. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_1+l_2}}$. Vynesené body byly vypočteny iterací vztahů (6.8), (6.9) a jimi byly proloženy křivky představující hledané závislosti.

Výpočet α_i

Nijak jednoduše nelze vyjádřit vztah pro α_i ani pro $(\alpha_2 - \alpha_1)$. Za zmínku snad stojí, že lze nalézt vcelku jednoduchý vzorec pro $\text{tg } \alpha_1 - \text{tg } \alpha_2$, i když možnost jeho využití a užitečnost je zřejmě malá.

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha_2 - \text{tg } \alpha_1 &= \frac{\omega^2}{g} l_2 \sin \alpha_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\omega^2}{g} l_2 \sin \alpha_2 = \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\omega^2}{g} l_2 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

Abychom však mohli později porovnat teorii s experimentem, musíme být schopni najít úhly α_1 a α_2 pro danou frekvenci (nebo úhlovou rychlost), hmotnosti závaží, délky závěsu. Toho docílíme opět iteracemi, tentokrát vztahů získaných úpravou rovnic (6.7) a (6.6):

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\omega^2}{g} (l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2) \right] \quad (6.8)$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\omega^2}{g} \left(l_1 \sin \alpha_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_2 \sin \alpha_2 \right) \right] \quad (6.9)$$

Abychom mohli znázornit závislost $\alpha_i(f)$, byly tímto způsobem vypočteny hodnoty α pro dva konkrétní hmotné body na konkrétních závěsech a několik frekvencí. Stejně jako v případě jedné kuličky byla frekvence f přepočtena na $\frac{\omega}{\omega_0}$, kde

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2}}.$$

Do grafu 6.4 jsou pak vyneseny úhly α_i v závislosti na $\frac{\omega}{\omega_0}$. I zde se ukazuje, že pro $\omega < \omega_0$ jsou $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

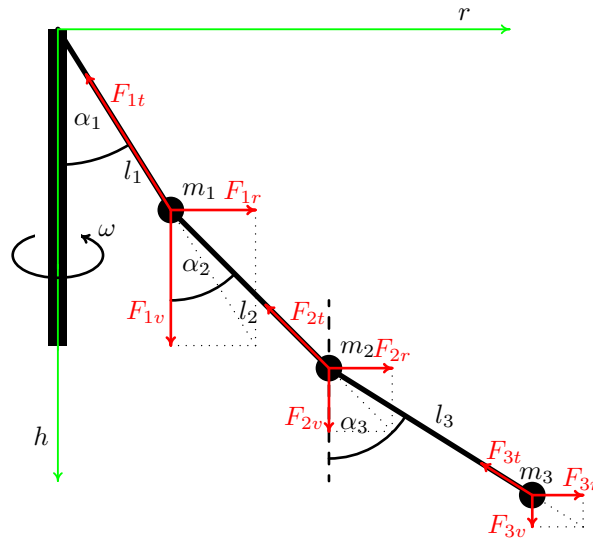
6.1.3 Tři kuličky

Ještě složitější situace nastane, budou-li pod sebou na závěsu zavěšeny tři kuličky. Tuto situaci znázorňuje obrázek 6.5.

Stejně jako v případě pro dvě kuličky mohou celkovou sílu na jednotlivé kuličky rozdělit do tří složek; na tahovou sílu vlákna \vec{F}_{it} , radiální sílu \vec{F}_{ir} a vertikální sílu \vec{F}_{iv} . Pro jejich velikosti platí:

$$\begin{aligned} F_{1r} &= (m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3) \omega^2, \\ F_{1v} &= (m_1 + m_2 + m_3) g, \\ F_{2r} &= (m_2 r_2 + m_3 r_3) \omega^2, \\ F_{2v} &= (m_2 + m_3) g, \\ F_{3r} &= m_3 \omega^2 r_3, \\ F_{3v} &= m_3 g, \end{aligned}$$

kde



Obrázek 6.5: Závěs se třemi kuličkami.

$$\begin{aligned} r_1 &= l_1 \sin \alpha_1, \\ r_2 &= l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2, \\ r_3 &= l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3. \end{aligned}$$

Opět hledám závislost odchylky α_i na úhlové rychlosti a na délce závěsů.

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{F_{3x}}{F_{3y}} = \frac{\omega^2}{g} (l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3) \quad (6.10)$$

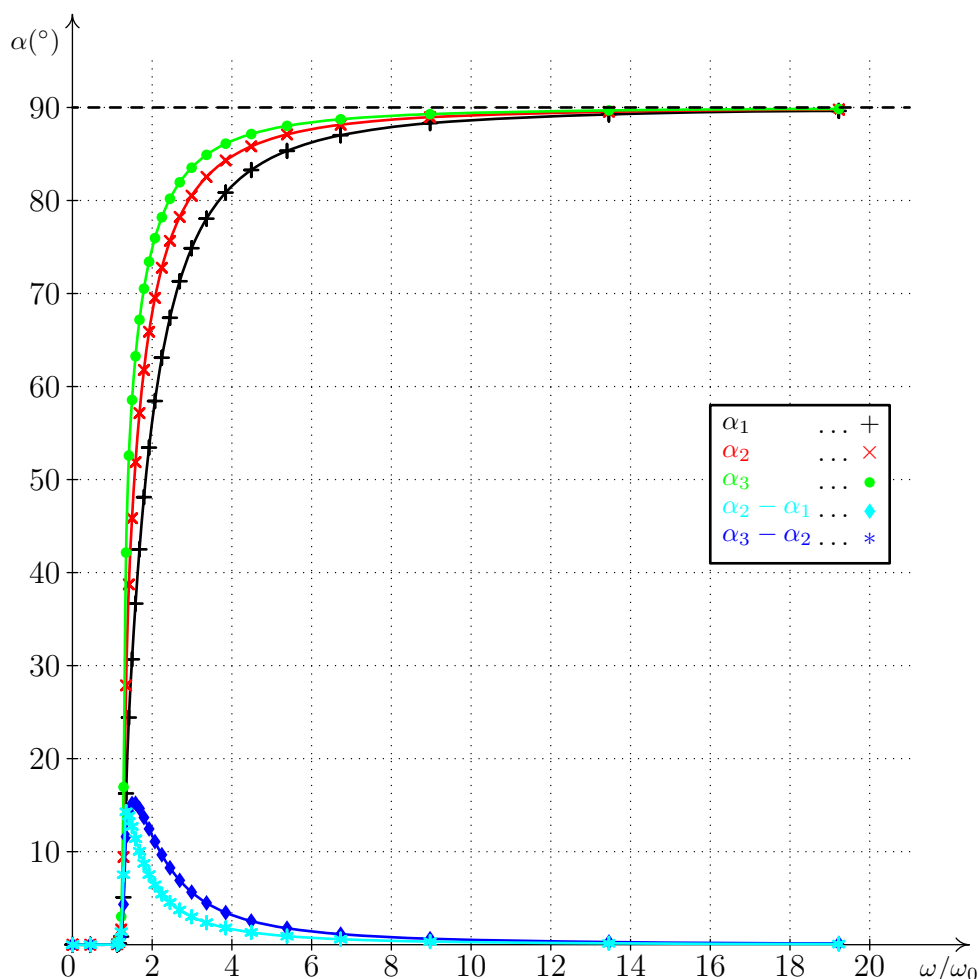
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{F_{2x}}{F_{2y}} = \frac{\omega^2}{g} \left(l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + \frac{m_3}{m_2 + m_3} l_3 \sin \alpha_3 \right) \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\omega^2}{g} \left(l_1 \sin \alpha_1 + \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l_2 \sin \alpha_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l_3 \sin \alpha_3 \right) \quad (6.12) \end{aligned}$$

Z rovnic (6.10), (6.11), (6.12) je jasně vidět, že pro libovolné nenulové hodnoty l_i a m_i platí, že buď $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_3 = 0$ nebo $0 <$

$\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2 < \operatorname{tg} \alpha_3$. Jelikož je funkce tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ rostoucí a prostá, pak pro α_1, α_2 a α_3 platí:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad \vee \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$



Obrázek 6.6: Závislost výchylky závěsů na $\frac{\omega}{\omega_0}$ pro tři kuličky zavěšené pod sebou. Délky závěsů: $l_1 = 0,10$ m, $l_2 = 0,15$ m, $l_3 = 0,20$ m; hmotnosti kuliček jsou v poměru $m_1 : m_2 : m_3 = 5 : 2 : 1$. Do grafu jsou také zaneseny závislosti rozdílů $(\alpha_2 - \alpha_1)$ a $(\alpha_3 - \alpha_2)$ na $\frac{\omega}{\omega_0}$. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2 + l_3}}$. Vynesené body byly vypočteny iterací vztahů (6.13), (6.14), (6.15) a jimi byly proloženy křivky představující hledané závislosti.

Výpočet α_i

Abychom mohli ověřit experimentálně naměřená data, musíme umět vypočítat úhly α_1 , α_2 , α_3 . Toho docílíme iterací vztahů

$$\alpha_1 = \arctg \left[\frac{\omega^2}{g} (l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3) \right], \quad (6.13)$$

$$\alpha_2 = \arctg \left[\frac{\omega^2}{g} \left(l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + \frac{m_2}{m_2 + m_3} l_3 \sin \alpha_3 \right) \right] \quad (6.14)$$

$$\alpha_3 = \arctg \left[\frac{\omega^2}{g} \left(l_1 \sin \alpha_1 + \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l_2 \sin \alpha_2 + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l_3 \sin \alpha_3 \right) \right], \quad (6.15)$$

které jsme získali úpravou rovnic (6.12), (6.11), (6.10). Takto byly získány i hodnoty vynesené do grafu 6.6 a byla jimi proložena křivka vyjadřující závislost $\alpha_i(\frac{\omega}{\omega_0})$, kde

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2 + l_3}}.$$

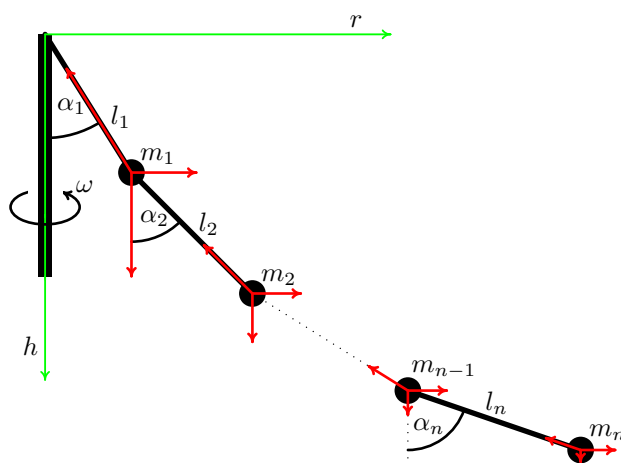
Stejně jako pro případ jedné a dvou kuliček je nyní z grafu 6.6 patrné, že pro $\omega < \omega_0$ jsou $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

6.1.4 n kuliček

Fyzika je ovšem hloubavá věda a vždy se snaží najít i hraniční řešení, proto se i my musíme ptát, jaká bude odchylka α_i pro závěs i -té kuličky, jestliže bude pod sebou pověšeno n kuliček²? Co by se stalo, kdyby počet těchto kuliček rostl do nekonečna?

Nyní již nebudeme rozebírat kuličku po kuličce. Zaměříme se na libovolnou, ale pevně zvolenou, kuličku. Zajímáme se tedy o síly působící na i -tou kuličku a odchylku i -tého závěsu od svislého směru. Celkovou sílu působící na libovolnou kuličku lze rozložit na tři složky. Na tahovou sílu vlákna, na kterém kulička visí, na radiální složku, působící ve směru od osy otáčení a na vertikální složku působící ve svislém směru. Tyto úvahy

²Bude se vlastně jednat o jakýsi řetěz. Dalo by se tak spekulovat, co bude mít výsledný tvar společného s řetězovkou, tedy s křivkou, kterou vytvoří řetěz, jež je za své konce zavěšen v gravitačním poli. V tomto případě se však jedná o řetěz, který má jeden konec volný.



Obrázek 6.7: Závěs s n kuličkami. Z důvodu přehlednosti jsou vynechány popisky sil. Ty však již jasně plynou z předchozích obrázků a z textu této kapitoly.

již byly rozvíjeny výše v této kapitole. Pro radiální a vertikální složku síly působící na i -tou kuličku platí

$$F_{ir} = \omega^2 \sum_{k=i}^n m_k r_k,$$

$$F_{iv} = g \sum_{k=i}^n m_k,$$

kde

$$r_k = \sum_{j=1}^k l_j \sin \alpha_j.$$

Pak radiální síla má tvar

$$F_{ir} = \omega^2 \sum_{k=i}^n m_k \sum_{j=1}^k l_j \sin \alpha_j.$$

Nyní můžeme určit³ tangens odchylky α_i i -tého závěsu od svislého směru.

³Neuvádím celý výpočet. Je příliš zdlouhavý a nepřispívá k objasnění fyzikální podstaty. Jednalo by se spíše o matematické cvičení na řady.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha_i(n) &= \frac{F_{ir}}{F_{iv}} = \frac{\omega^2 \sum_{k=i}^n m_k \sum_{j=1}^k l_j \sin \alpha_j}{g \sum_{k=i}^n m_k} = \\
&= \frac{\omega^2 \left(\sum_{k=1}^i l_k \sin \alpha_k \sum_{j=i}^n m_j + \sum_{k=i+1}^n l_k \sin \alpha_k \sum_{j=k}^n m_j \right)}{g \sum_{j=i}^n m_j} = \\
&= \frac{\omega^2}{g} \left[\sum_{k=1}^i l_k \sin \alpha_k + \frac{\sum_{k=i+1}^n l_k \sin \alpha_k \sum_{j=k}^n m_j}{\sum_{j=i}^n m_j} \right] = \\
&= \frac{\omega^2}{g} [l_1 \sin \alpha_1 + \dots + l_i \sin \alpha_i] + \\
&\quad + \left[\frac{\sum_{j=i+1}^n m_j}{\sum_{j=i}^n m_j} l_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + \dots + \frac{m_n}{\sum_{j=i}^n m_j} l_n \sin \alpha_n \right] \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Závěry

Jak se změna α_i bude-li se zvyšovat počet kuliček n ? Pro zjednodušení předpokládejme, že všechny kuličky mají stejnou hmotnost m a všechny provázky mají stejnou délku l . Z rovnice (6.16) plyne, že úhel α_i se bude také zvětšovat. Stačí ukázat, že

$$\operatorname{tg} \alpha_i(n+1) - \operatorname{tg} \alpha_i(n) > 0 \quad \text{pro } 1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}.$$

Jak se dá tento rozdíl vyčíslit?

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} \alpha_i(n+1) - \operatorname{tg} \alpha_i(n) = \\
&= \frac{\omega^2 l}{g} \sum_{k=1}^{n-i+1} \frac{k}{(n-i+1)(n-i+2)} \sin \alpha_{i+k} > 0
\end{aligned}$$

Zvyšuje-li se tedy počet kuliček, vzroste i úhel α_i , tj. odklon závěsu i -té kuličky od svislice.

6.1.5 Zhodnocení

Pro situaci s jednou kuličkou získáváme jednoduché vzorce (6.3) a (6.4), podle kterých lze ze znalosti délky závěsu l a úhlové rychlosti ω určit odklon závěsu α . Úhel α v tomto případě nezávisí na hmotnosti kuličky.

Naproti tomu pro situaci, kdy je zavěšeno více kuliček pod sebou, nebyly nalezeny jednoduché vzorce. Úhly α_i je třeba počítat některou z numerických metod. Jako dostatečná se ukazuje metoda prosté iterace, která dává velmi přesné výsledky již po dvaceti iteračních cyklech, což za použití počítače nečiní řešiteli větší obtíže. Její velkou výhodou je také její přímočarost. Řešitel se také obejde bez dovednosti programování a vystačí si s jednoduchým tabulkovým procesorem (např. Microsoft Excel).

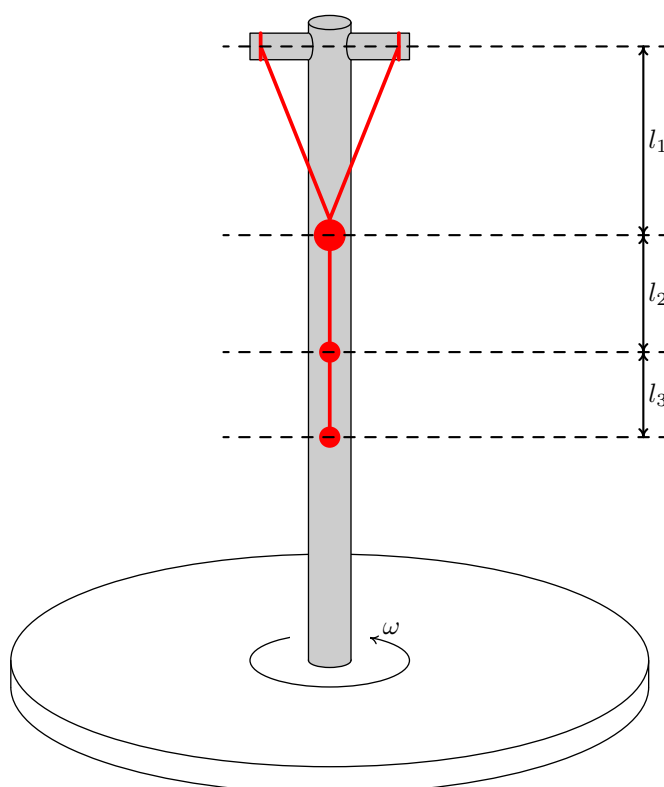
6.2 Aparatura a technické provedení

Pro experimentální ověření byl použit stejný základ aparatury jako v experimentu s rotující nádobou (viz kapitola 3). Na motor byla upevněna stejná deska, ke které byla do středu připevněna hliníková tyčka o průměru 8 mm a délce 447 mm. Na jejím vrcholu je umístěno ramínko, které slouží pro připevnění bifilárního závěsu prvního závaží, ostatní závaží zavěšují již na jednoduchý závěs postupně pod sebe (viz obrázek 6.8 a fotografie na obrázku 6.9). Místo v teorii zmiňovaných kuliček, které dobře slouží jako přiblížení představy hmotného bodu, bylo použito matic různých velikostí. Matice mají tu výhodu, že jsou malé, lehké a dobře se k nim přivazují provázky. Pro ověření experimentu není podstatné, kolik jednotlivá závažíčka váží. Podstatný je poměr hmotností jednotlivých závaží.

Pro zaznamenání odchylek byla použita opět kamera. Blíže k videoměření viz předchozí kapitola 5.

6.3 Experimentální ověření teorie

Své teoretické závěry jsem se rozhodl ověřit pro všechny tři případy; tj. pro jedno, dvě i tři závaží na závěsu. Měření jsem provedl i pro různé hmotnosti a délky závěsů.



Obrázek 6.8: Aparatura pro měření odchylky několika rotujících zatížených závěsů o různých délkách (l_1 , l_2 , l_3). První zátěž je zavěšena bifilárně. Celá aparatura se otáčí úhlovou rychlostí ω .

Pro každou konfiguraci závaží⁴, délek závěsů a frekvenci jsem natočil krátký videozáznam. Z něj jsem posléze vybral několik snímků (minimálně však čtyři) vhodných k analýze. Tak jsem tedy našel několik hodnot odchylek daného závěsu dané matice při jisté frekvenci otáčení. Z těchto hodnot jsem vypočetl průměry, které jsou uvedeny dále, a které jsem porovnal s hodnotami vypočtenými z teorie. Mimo frekvence otáčení f , experimentální hodnoty úhlu α^e (zmiňovaná průměrná hodnota) a teoretické hodnoty α^t jsou v tabulkách dále uvedeny: relativní odchylka teoretické a experimentální hodnoty δ a variační koeficient $v(\alpha_i^e)$ ⁵.

Pro přehlednost uvádím u každé z možností (zavěšená jedna, dvě, nebo tři matice) pouze příslušný graf. Naměřené hodnoty jsou pak uvedeny v příloze v příslušných tabulkách.

⁴Místo závaží jsem použil matice. Proto dále již budu mluvit pouze o maticích, či matickách.

⁵Blíže k variačnímu koeficientu na straně 90.



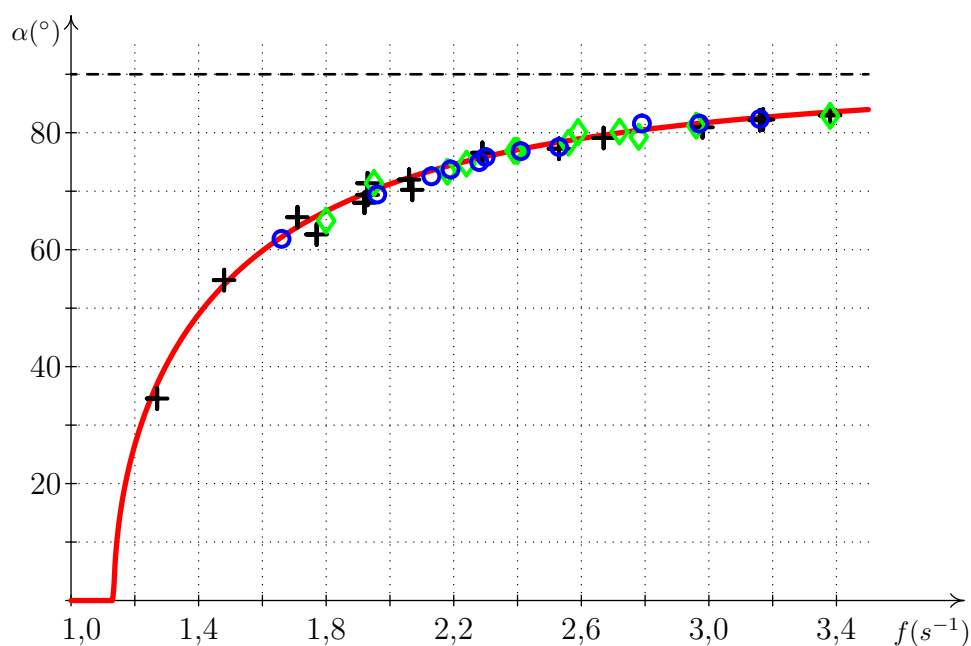
Obrázek 6.9: Aparatura pro experiment: rotující závěs kuliček.

6.3.1 Jedna kulička

Nejprve jsem se pustil do proměření jediné matice na závěsu. Učinil jsem tak pro tři matice o různých hmotnostech. Data získaná při těchto měření uvádím v tabulce B.4 a grafu 6.10, kde jsou také porovnána s teoretickými údaji⁶.

Z grafu 6.10 je patrné, že hodnoty pro nižší frekvence byly naměřeny pouze pro nejlehčí matici. Je to z toho důvodu, že u závěsů s těžšími maticemi docházelo k jejich příliš velkým výkyvům. Hodnoty takto získané by tudíž neměly příliš dobrou vypovídací hodnotu o skutečné výchylce vlákna.

⁶Teoretické hodnoty úhlů při daných frekvencích byly opět určeny ze vztahů (6.3) a (6.4).

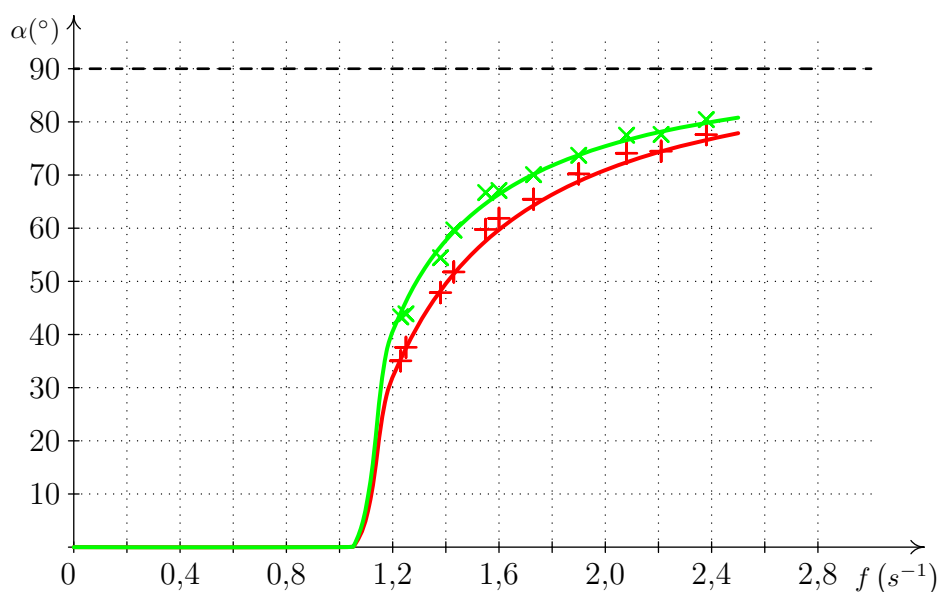


Obrázek 6.10: Graf závislosti výchylky závěsu na frekvenci otáčení pro matice na závěsu o délce $l = 193$ mm. (Křivka byla vynesena na základě vztahů (6.3) a (6.4).) Do grafu jsou vyneseny také experimentálně získané hodnoty pro matice o různých hmotnostech $+ \dots m = 2,19$ g ; $\diamond \dots m = 4,48$ g ; $\circ \dots m = 10,49$ g. (data viz tabulka B.4).

6.3.2 Dvě kuličky

Ověření pro dvě závažíčka zavěšená pod sebou bylo provedeno se dvěma stejně těžkými maticemi. Naměřené hodnoty jsou vyneseny do grafu⁷ 6.11 a zaznamenány v tabulce B.5.

⁷Teoretické křivky vynesené na tomto grafu byly získány, stejně jako v teoretické části tohoto experimentu, iteracemi příslušných vztahů (6.8) a (6.9).



Obrázek 6.11: Graf závislosti výchylek závěsů dvou matic ($m_1 = m_2 = 2,19\text{ g}$) o délkách $l_1 = 127,4\text{ mm}$ (červená křivka) a $l_2 = 122,4\text{ mm}$ (zelená křivka) na frekvenci otáčení. Graf je doplněn o experimentálně naměřené hodnoty (data viz tabulka B.5). Experimentální body pro jednotlivé matice jsou vyneseny stejnou barvou jako teoretická křivka, ke které přísluší.

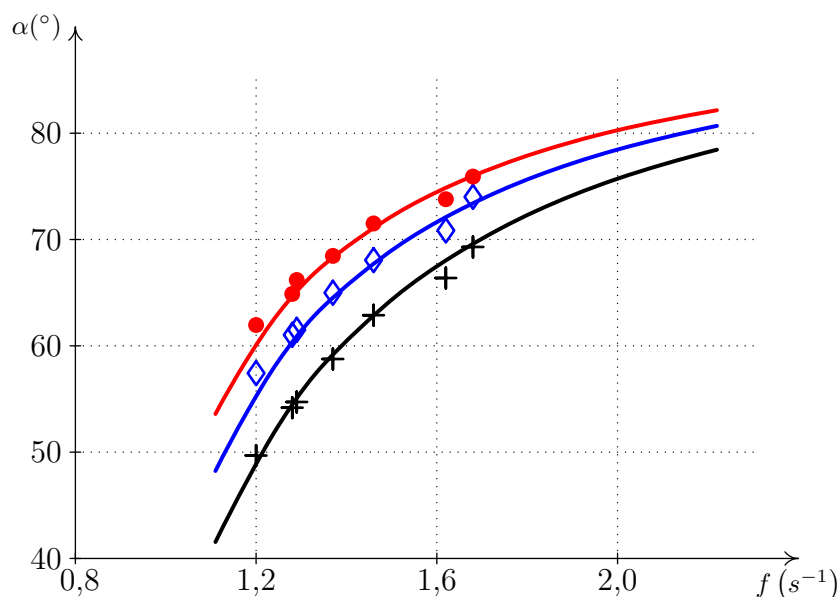
6.3.3 Tři kuličky

I pro ověření vztahu tří závažíček pod sebou bylo použito tří stejných matic. Naměřené hodnoty jsou vyneseny do grafu⁸ 6.12 a zaznamenány v tabulce B.6.

6.3.4 Více kuliček

Pro více než tři kuličky jsem již měření neprováděl, pouze jsem nechal rotovat závěs osmi kuliček. Fotografie (obrázek 6.13) pořízené jednak fotoaparátem, jednak získané jako políčka filmu, zachycují prohnutí závěsu s matičkami.

⁸Teoretické křivky byly také vyneseny na základě iterací vztahů (6.13), (6.14) a (6.15).



Obrázek 6.12: Graf závislosti výchylek tří závěsů matic ($m_1 = m_2 = m_3 = 2,19$ g) o délkách $l_1 = 127,4$ mm (černá), $l_2 = 125,2$ mm (modrá) a $l_3 = 118,1$ mm (červená). Graf je doplněn o experimentálně naměřené hodnoty (data viz tabulka B.6). Experimentální body pro jednotlivé matice jsou vyneseny stejnou barvou jako teoretická křivka, ke které přísluší.

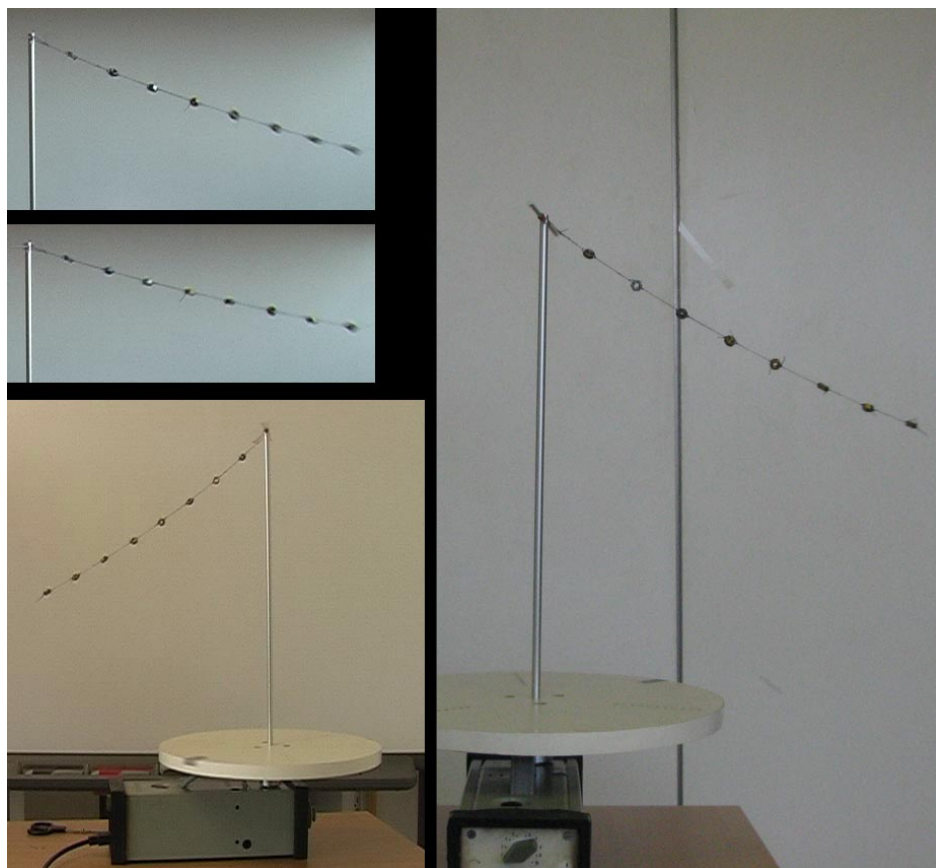
6.3.5 Shrnutí výsledku experimentů

Jak je patrné z grafů 6.10, 6.11 a 6.12, naměřené hodnoty úhlů dobře odpovídají teoreticky určeným. Z příslušných tabulek B.4, B.5 a B.6 plyne, že odchylka teoretických hodnot od experimentálních je v průměru 0,59%. Odchylka měření je pro jednotlivé frekvence maximálně 6,2%. Stejně jako i v předchozím experimentu i zde hraje velkou roli rozkmitání závěsů⁹. Variační koeficient¹⁰ $v(\alpha_i^e)$ i v tomto případě udává míru odchylky naměřených hodnot od průměru (tj. α_i^e) pro konkrétní frekvenci. Maximální (spíše výjimečná) hodnota variačního koeficientu¹¹ je 12,7%, mimo takovýchto několik výjimečných hodnot se většinou pohybuje opět maximálně do 6%. I u tohoto experimentu tak můžeme prohlásit, že ex-

⁹Možné příčiny vzniku tohoto rozkmitávání byl již nastíněny v předešlé kapitole v části 5.3.1 Shrnutí výsledku experimentů na straně 54.

¹⁰Blíže k variačnímu koeficientu na straně 90.

¹¹Pro třetí variantu experimentu (tj. tři matičky zavěšené pod sebou) již z důvodu nedostatku místa v tabulce B.6 hodnoty $v(\alpha_i^e)$ neuvádím. Jejich hodnota je nicméně srovnatelná s hodnotami uváděnými při ostatních měřeních.



Obrázek 6.13: Rotující závěs s osmi pod sebou uchycenými matičkami. Na obrázku je zachyceno několik snímků při různé úhlové rychlosti otáčení.

perimentální hodnoty se v rámci možné přesnosti provedení experimentu shodují s teoreticky vypočtenými hodnotami.

Závěr

V průběhu tvorby diplomové práce vykrytalizovaly náměty na čtyři experimenty v rotujících soustavách. Každému z nich byla věnována jedna kapitola.

V prvním experimentu byl zpracován námět na proměřování tvaru hladiny vody v rotující nádobě. Bylo vyvinuto speciální zařízení pro měření tvaru hladiny kapaliny při rotaci. Byl tak vylepšen námět nalezený v literatuře, kdy bylo možné odměřovat body pouze na tuhém tělese. Pomocí této aparatury byl několika způsoby ověřen teoreticky odvozený vztah pro tvar hladiny. Jedná se o experiment, který je časově dosti náročný. Jak samo naměření hodnot, tak i zpracování dat, které je natolik složité, že je nutné ho provést pomocí počítače.

Druhý experiment je spíše kvalitativní povahy. Jeho námět vychází z prvního experimentu. Otázkou je, jak se bude chovat model lodičky na hladině vody v rotující nádobě v závislosti na poloze těžiště lodičky. Teoreticky odvozené závěry byly i experimentálně ověřeny. Na příloženém CD jsou uloženy dva videosnímky, které toto chování dokumentují. Jedná se o experiment, který není složitý a je tedy možné, aby ho prováděli i méně zruční studenti. Není ani časově náročný.

Třetí a čtvrtý experiment pojednávají o závažích zavěšených na vláčkách v rotující soustavě. Jsou také náročnější na čas a zpracování, které je opět nutné provádět pomocí počítače. Kromě kónického kyvadla se jedná o experimenty, které nejsou běžně v literatuře uváděny a řešeny.

Návrh prvního a druhého experimentu byl již prezentován na Veletrhu nápadů učitelů fyziky 12 v Praze, stejně tak je obsahem článku v příslušném sborníku [31].

Část materiálů může sloužit i jako návod při eventuelním použití experimentů ve výuce fyziky.

Z výsledků této práce plynou i některé problémy, které si zaslouží drobný komentář. Pěkným doplněním prvního experimentu by bylo nalezení vhodného tekutého odrazového materiálu. Ten bychom pak mohli použít pro konstrukci vlastního jednoduchého teleskopu (liquid mirror

telescope). Druhý experiment byl pojat pouze kvalitativně, bylo by však jistě velmi zajímavé dořešit problém lodičky na rotující hladině i početně. Všechny experimenty byly snímány z vnějšku rotující soustavy. Bylo by však zřejmě mnohem názornější, kdyby se podařilo umístit kameru přímo do rotující soustavy.

Pevně doufám, že některý ze zde zpracovaných námětů bude využit v připravované interaktivní laboratoři na MFF UK.

Literatura

- [1] MECHLOVÁ, Erika, KOŠTÁL, Karel, et al. *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz fyziky*. Praha : Prometheus, 2001. 588 s. ISBN 80-7196-151-5.
- [2] *Experiment* [online], poslední aktualizace 27. 11. 2007 13:02 [cit. 2008-02-18], Wikipedie.
Dostupné z WWW: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Experiment>>.
- [3] SVOBODA, Emanuel, KOLÁŘOVÁ, Růžena. *DIDAKTIKA FYZIKY ZÁKLADNÍ A STŘEDNÍ ŠKOLY : Vybrané kapitoly*. 1. vyd. Praha : Karolinum, 2006. 230 s. ISBN 80-246-1181-3.
- [4] BÜHRKE, Thomas. *Převratné objevy fyziky : Od Galileiho k Lise Meitnerové*. Ludmila Eckerová. 1. vyd. Praha : Academia, 1999. 231s. ISBN 80-200-0743-1.
- [5] VYBÍRAL, Bohumil. *Fundamentální experimenty ve fyzice* [online]. 2005 [cit. 2008-02-18]. Dostupný z WWW:
<<http://www.kof.zcu.cz/ak/trendy/2/sbornik/vybiral/srni.doc>>.
- [6] *History of physics* [online], poslední aktualizace 18. 2. 2008 [cit. 2008-02-18], Wikipedie. Dostupné z WWW:
<http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_physics>
- [7] *Seznam slavných experimentů* [online], poslední aktualizace 19. 1. 2007 [cit. 2008-02-19], Wikipedie. Dostupné z WWW:
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_slavných_experimentů>
- [8] BALADA, Jan, et al. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. Praha : VÚP, 2007. 100 s. Dostupný z WWW:
<http://www.rvp.cz/soubor/RVP_G.pdf>.
ISBN 978-80-87000-11-3.

- [9] JEŘÁBEK, Jaroslav, et al. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání : se změnami provedenými k 1. 9. 2007* [online]. 2007 [cit. 2008-02-19]. Dostupný z WWW: <http://www.rvp.cz/soubor/RVPZV_2007-07.pdf>.
- [10] KVASNICA, Jozef, et al. *Mechanika*. Praha : Academia, 2004. 476s. ISBN 80-200-1268-0.
- [11] *Mars Gravity Biosatellite* [online]. 2008 [cit. 2008-02-25]. Dostupný z WWW: <<http://www.marsgravity.org/main/>>.
- [12] *Mars Gravity Biosatellite : From Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 2008 , 5 February 2008 [cit. 2008-02-25]. Dostupný z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Mars_Gravity_Biosatellite>.
- [13] *About Foucault Pendulums* [online]. 2008 [cit. 2008-02-25]. Dostupný z WWW: <<http://www.calacademy.org/products/pendulum/index.html>>.
- [14] *Foucault pendulum : From Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 2008 [cit. 2008-02-25]. Dostupný z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum>.
- [15] BORRA, Ermanno F. The liquid-mirror telescope as a viable astronomical tool. *The Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*. 1982, vol. 76, no. 4, s. 245-256. Dostupný z WWW: <http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-data_query?bibcode=1982JRASC..76..245B&link_type=ARTICLE&db_key=AST&high=>.
- [16] *Liquid mirror : From Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 2007 [cit. 2008-02-26]. Dostupný z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_mirror>.
- [17] *Construction of a Liquid Mirror* [online]. 2004 [cit. 2008-02-26]. Dostupný z WWW: <http://wood.phy.ulaval.ca/liquid_mirrors/construction/lmtpic_0.php>.
- [18] *NASA Orbital Debris Observatory* [online]. 2005 [cit. 2008-02-26]. Dostupný z WWW: <<http://www.astro.ubc.ca/lmt/Nodo/index.html>>.
- [19] *The Large Zenit Telescope* [online]. 2004 [cit. 2008-02-26]. Dostupný z WWW: <<http://www.astro.ubc.ca/LMT/lzt/index.html>>.

- [20] ZIMMER, Miroslav. *Tekutý dalekohled* [online]. 2007 [cit. 2008-03-31]. Dostupný z WWW: <http://www.rozhlas.cz/planetarium/astronomie/_zprava/372831>.
- [21] HICKSON, Paul. *Liquid-Mirror Telescopes* [online]. 2007 [cit. 2008-03-31]. Dostupný z WWW: <<http://www.americanscientist.org/template/AssetDetail/assetid/55126/page/4>>.
- [22] *Kosmologické pojmy* [online]. c2007 [cit. 2008-03-31]. Dostupný z WWW: <http://www.geneze.info/kosmologie/kosmo_pojmy.htm>.
- [23] SUTTON, Richard Manliffe. *Demonstration Experiment in Physics*. USA: American Association in Physics, 2003. 545s. Poprvé vydáno roku 1938 nakladatelstvím McGraw-Hill Book Company. Dostupný z WWW: <<http://physicslearning.colorado.edu/PiraHome/Sutton/Sutton.htm>>. [cit. 21.11.2007]. ISBN 1-931024-05-7.
- [24] GRUBE, Jack. Centripetal force and parabolic surfaces. *The Physics Teacher*. 1973, vol. 11, is. 2, s. 109-111.
- [25] PRICE, Channon P. Teacup Physics: Centripetal Acceleration. *The Physics Teacher*. 1990, vol. 28, is. 1, s. 49-50.
- [26] BASTA, M., PICCIARELLI, V., STELLA, R. A simple experiment to study parabolic surfaces. *Physics Education*. 2000, vol. 35, no. 2, s. 120-123.
- [27] BERG, Richard E. Rotating liquid mirror. *American Journal of Physics*. 1990, vol. 58, no. 3, s. 280-281.
- [28] GOODMAN, John M. Paraboloids and Vortices in Hydrodynamics. *American Journal of Physics*. 1969, vol. 37, no. 9, s. 864-868.
- [29] PROCTOR, Ivan, EDWARDS, T. H. Conical Pendulum Experiment. *American Journal of Physics*. June 1968, vol. 36, is. 6, s. 555-556.
- [30] JAROSZ, Jerzy, SZCZYGIELSKA, Aneta. We live on Earth - the rotating system. In *Veletrh nápadů učitelů fyziky 12 : Sborník z konference*. Praha : Prometheus, 2007. s. 147-151. ISBN 978-80-7196-352-3.
- [31] ŠABATKA, Zdeněk, DVOŘÁK, Leoš. Vodní paraboloid. In *Veletrh nápadů učitelů fyziky 12 : sborník z konference*. Praha : Prometheus, 2007. s. 197-201. ISBN 978-80-7196-352-3

- [32] BENDA, Jakub, ROJKO, Milan. Vliv viskozity na roztáčení kapaliny. In *Veletrh nápadů učitelů fyziky 12 : Sborník z konference*. Praha: Prometheus, 2007. s. 202-208. ISBN 978-80-7196-352-3.
- [33] DVOŘÁK, Leoš. Pokusy se zvukovou kartou. In *Dělny Heuréky 2005: Sborník konference projektu Heuréka*. 1. vyd. Praha : Prometheus, 2006. s. 39-48. ISBN 80-7196-334-8.
- [34] KOUPIL, Jan. *Katedra didaktiky fyziky : RNDr. Jan Koupil* [online]. 2006 [cit. 2008-03-24]. Dostupný z WWW: <<http://kdf.mff.cuni.cz/koupil/>>.
- [35] PRESS, William H., et al. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. United States of America : Cambridge University Press, 1986. 818 s. ISBN 0-521-30811-9.
- [36] VICHER, Miroslav. *Numerická matematika* [online]. 2003 , 7.1.2003 [cit. 2008-02-19]. Dostupný z WWW: <http://alpha.ujep.cz/~mli sal/nm_1/vicher_nm1.pdf>.

Přílohy

Příloha A

Použité matematické metody

Tato příloha shrnuje informace běžně uváděné v učebnicích matematické analýzy. Je to z toho důvodu, že zde uvedené pojmy se objevují i v práci samotné a je tedy nutné shodnout se na značení a tyto matematické metody okomentovat.

A.1 Taylorův rozvoj

Chceme-li nějakou složitou funkci $f(x)$ nahradit polynomem $T_n(x)$ stupně n , použijeme k tomu například Taylorův rozvoj. Polynom $T_n(x)$ nazýváme Taylorovým polynomem. Taylorův rozvoj je vlastně lokální aproximace. Aproximace znamená, že výsledný polynom dává hodnoty blízké původní funkci. Lokální znamená, že hodnoty jsou blízké pouze v určitém okolí bodu x_0 , ve kterém rozvoj počítáme. Stupeň n se nazývá řád aproximace. Polynom má $n + 1$ členů a podmínkou jeho existence je, aby původní funkce $f(x)$ měla derivace do řádu n , neboť od původního rozvoje $T_n(x)$ požadujeme, aby se v bodě x_0 shodoval s původní funkcí ve funkční hodnotě i v derivacích do řádu n . To je i charakteristikou Taylorova polynomu.

Taylorův polynom stupně n funkce jedné proměnné $f(x)$ má pak tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

A.1.1 Lineární aproximace

Pro $n = 1$ dostáváme rozvoj do prvního řádu, neboli lineární aproximaci funkce $f(x)$. O lineární aproximaci (též linearizaci) se mluví z toho

důvodu, že funkci $f(x)$ vlastně nahrazujeme tečnou v bodě x_0 , jak je patrné z následujícího vztahu

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Lineární aproximace goniometrických funkcí

Pro malá čísla ε , tj. pro $|\varepsilon| \ll 1$, můžeme linearizovat funkce \sin a \cos jako:

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon &\approx \varepsilon \\ \cos \varepsilon &\approx 1\end{aligned}$$

A.1.2 Kvadratické aproximace

Je-li $n = 2$ jedná se o rozvoj do druhého řádu nebo-li o kvadratickou aproximaci funkce $f(x)$. V okolí bodu x_0 nahradíme funkci $f(x)$ polynomem druhého stupně, tj. kvadratickou funkcí.

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Kvadratická aproximace goniometrických funkcí

Pro malá čísla ε , tj. pro $|\varepsilon| \ll 1$, provést rozvoj funkcí \sin a \cos do druhého řádu jako:

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon &\approx \varepsilon \\ \cos \varepsilon &\approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\end{aligned}$$

A.2 Vybrané numerické metody řešení nelineárních rovnic

I zdánlivě jednoduchá fyzikální úloha může vést k rovnicím, jejichž analytické řešení je velmi obtížné, ne-li nemožné. V takovém případě je nutné použít nějaké přibližné numerické metody [35], [36]. Pokud by byl některý z čtenářů inspirován úlohami, které jsou zpracovány v této práci, a chtěl se pustit do řešení podobných problémů a neměl dostatečné matematické

znalosti, budiž mu nápomocen tento přehled.

Pokud chceme hledat kořeny algebraické rovnice

$$f(x) = 0,$$

budeme tak činit iteračními metodami. Začneme přibližným odhadem kořene x_0 a tento odhad budeme postupně zpřesňovat x_1, x_2, \dots . Nový odhad bude vypočítán z předchozích. Tato posloupnost je taková, že v limitě dává hledaný kořen x .

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$$

V numerickém řešení se vždy hledá výsledek pouze s určitou přesností p , tj. takový člen posloupnosti x_k , pro který platí $|f(x_k)| < p$.

Numerické metody řešení rovnice $f(x) = 0$ lze rozdělit na metody, které vyžadují separaci kořenů a metody, které vyžadují dobrou počáteční aproximaci x_0 . Separovat kořeny znamená nalézt interval $\langle a, b \rangle$, pro který platí:

- $f(a)f(b) < 0$
- funkce $f(x)$ je v intervalu spojitá
- v intervalu leží jen jeden kořen

A.2.1 Metoda půlení intervalu

Tato metoda vyžaduje separaci kořenů. Znamená to, že známe interval $\langle a, b \rangle$ splňující podmínky uvedené výše. Nejprve rozdělíme interval na dvě části - střed označím jako x_1 :

$$x_1 = \frac{a + b}{2}$$

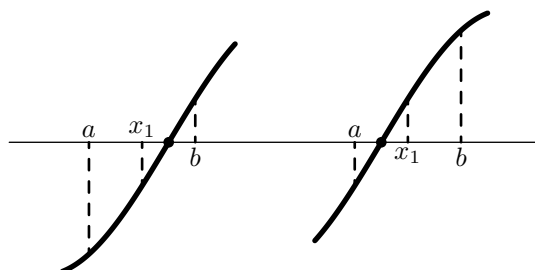
Poté zjistíme, zda x_1 neodpovídá hledanému řešení s předem stanovenou přesností p :

$$|f(x_1)| < p$$

Není-li tato podmínka splněna, je třeba zjistit zda

$$f(a)f(x_1) < 0.$$

Pokud ano, nachází se kořen v intervalu $\langle a, x_1 \rangle$, v opačném případě se nachází v intervalu $\langle x_1, b \rangle$. Tento postup opakujeme, dokud není nalezen kořen s požadovanou přesností.



Obrázek A.1: K metodě půlení intervalu.

A.2.2 Metoda prosté iterace

Tato metoda nevyžaduje separaci kořene, na druhou stranu musíme odhadnout počáteční aproximaci x_0 . Rovnici $f(x) = 0$ je nutné upravit na tvar

$$x = g(x).$$

Poté provádíme iterace

$$x_{i+1} = g(x_i).$$

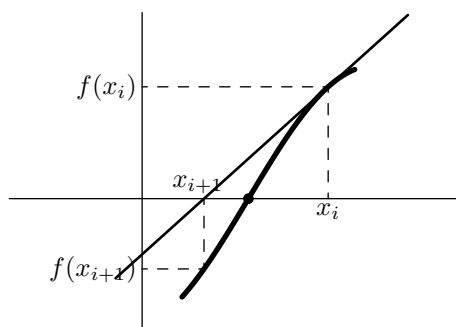
Tento proces konverguje, pouze pokud v nějakém okolí kořene platí $|g'(x)| < 1$.

A.2.3 Metoda tečen (Newtonova)

Opět se jedná o iterační metodu vyžadující odhad počáteční aproximace x_0 . V tomto bodě sestrojíme tečnu ke grafu funkce f . Průsečík s osou x použijeme jako další odhad kořene.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Pokud tato metoda konverguje, konverguje velice rychle. Pro hladkou funkci vždy existuje okolí kořene, ve kterém metoda konverguje. Tato metoda se většinou používá v kombinaci s jinou metodou zaručující konvergenci.



Obrázek A.2: K metodě tečen.

A.2.4 Metoda sečen

Metoda sečen vychází z Newtonovi metody. Nyní jsou však potřeba dva počáteční odhady. Místo tečny se používá sečna procházející počátečními body. Nový odhad kořene je průsečíkem sečny a osy x .

$$x_{i+2} = x_i - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} f(x_i)$$

Tato metoda není vždy konvergentní.

A.2.5 Metoda regula falsi

Je velmi podobná metodě půlení intervalu. Rozdíl je v tom, že místo středu původního intervalu $\langle a, b \rangle$ (předchozích dvou odhadů) budeme brát jako další odhad průsečík sečny procházející těmito body s osou x .

$$f(a)f(b) < 0$$

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

Tato metoda je vždy konvergentní.

Příloha B

Tabulky naměřených dat

Tabulka B.1: Experimentálně zjištěné body hladiny vody v rotující nádobě s původním měřidlem (se špejlemi). Tyto hodnoty jsou vyneseny do grafu [3.9](#).

R (cm)	-15.4	-14.3	-13.6	-12.3	-11.2	-10.3	-9.6	-8.3	-7.5	-6.3
h (cm)	10.4	8.6	7.5	5.6	4.6	3.6	2.9	1.7	1.1	0.4
R (cm)	5.1	6.4	7.7	8.3	9.9	10.7	11.6	12.5	14.1	14.8
h (cm)	0.0	0.6	1.5	1.9	3.3	4.1	5.2	6.3	8.2	9.3

Tabulka B.2: Experimentálně zjištěné body hladiny a odpovídající periody otáčení. Všechna měření byla provedena pomocí kvalitní aparatury (kovové tyčky). Uvedené hodnoty byly použity při tvorbě grafů 3.10, 3.11.

$R(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$	$h_5(m)$	$h_6(m)$
-0,15	0,112	0,105	0,095	0,093	
-0,14	0,099	0,096	0,087	0,086	0,077
-0,13	0,087	0,087	0,081	0,079	0,074
-0,12	0,074	0,074	0,073	0,073	0,070
-0,11	0,065	0,066	0,068	0,067	0,068
-0,10	0,055	0,058	0,062	0,062	0,064
-0,09	0,045	0,050	0,056	0,056	0,062
-0,08	0,037	0,044	0,052	0,053	0,061
-0,07	0,030	0,039	0,048	0,049	0,058
-0,06	0,025	0,034	0,045	0,045	0,057
-0,05		0,029	0,043	0,043	0,054
-0,04		0,026	0,040	0,040	0,053
-0,03		0,024	0,039	0,039	0,053
-0,02		0,022	0,036	0,038	0,052
-0,01		0,022	0,036	0,037	0,052
0,00		0,021	0,036	0,036	0,052
0,01		0,022	0,037	0,037	0,052
0,02		0,024	0,038	0,038	0,053
0,03		0,026	0,039	0,041	0,053
0,04		0,028	0,041	0,043	0,054
0,05	0,023	0,033	0,045	0,045	0,056
0,06	0,029	0,037	0,048	0,047	0,056
0,07	0,035	0,042	0,052	0,051	0,059
0,08	0,042	0,048	0,055	0,055	0,061
0,09	0,051	0,054	0,060	0,060	0,063
0,10	0,059	0,061	0,064	0,064	0,066
0,11	0,069	0,069	0,070	0,069	0,069
0,12	0,079	0,079	0,075	0,075	0,072
0,13	0,092	0,088	0,083	0,082	0,075
0,14	0,104	0,098	0,090	0,088	
0,15	0,118	0,108	0,097		

Poznámka k variačnímu koeficientu:

$v(\alpha^e)$ je variační koeficient. Je definován jako

$$v(\alpha^e) = \frac{s(\alpha^e)}{\alpha^e} \cdot 100\%, \quad (\text{B.1})$$

kde $s(\alpha^e)$ je výběrová směrodatná odchylka hodnoty α^e . Úhel α^e je totiž průměrem několika experimentálních hodnot, proto má smysl určovat jeho směrodatnou odchylku a tedy i variační koeficient.

Tabulka B.3: Experimentální hodnoty naměřené pro matici o hmotnosti $m = 2,19$ g na závěsu délky l upevněném na ramínku délky $R = 55$ mm. f ... frekvence otáčení; α^e ... odklon závěsu získaný experimentálně; α^t ... odklon závěsu vypočtený iterací vztahu (5.6); δ ... relativní odchylka experimentu a teorie; $v(\alpha^e)$... variační koeficient α^e (viz strana 90).

$l(\text{mm})$	$f(\text{s}^{-1})$	$\alpha^e(^{\circ})$	$\alpha^t(^{\circ})$	δ	$v(\alpha^e)$
105	1,60	53,64	55,68	3,7%	4,6%
105	1,73	57,98	60,45	4,2%	6,1%
105	1,91	63,94	65,71	2,7%	1,2%
105	2,00	67,56	67,80	0,3%	5,5%
105	2,10	68,70	69,82	1,6%	1,8%
105	2,41	73,03	74,66	2,2%	3,4%
105	2,42	71,22	74,76	4,8%	2,3%
105	2,60	75,20	76,88	2,2%	2,0%
105	2,60	73,68	76,88	4,3%	0,9%
105	2,71	76,00	77,88	2,4%	2,5%
105	2,75	77,75	78,27	0,7%	2,5%
105	2,92	78,82	79,57	0,9%	1,8%
105	3,00	79,33	80,11	1,0%	2,1%
105	3,25	80,32	81,59	1,6%	1,7%
144	1,38	55,83	52,19	-6,7%	4,5%
144	1,50	55,83	58,07	3,9%	5,4%
144	1,68	62,81	64,49	2,6%	2,5%
144	1,86	67,10	69,19	3,1%	4,0%
144	2,06	72,58	73,11	0,7%	0,9%
144	2,07	72,76	73,34	0,8%	2,9%
144	2,10	74,69	73,79	-1,2%	1,4%
144	2,25	73,77	75,87	2,8%	2,0%
144	2,56	78,12	79,07	1,2%	1,3%
144	2,61	78,46	79,49	1,3%	2,1%
144	2,97	80,93	81,86	1,1%	0,2%
144	3,18	82,25	82,92	0,8%	1,4%

Tabulka B.4: Experimentální hodnoty naměřené pro matici o hmotnosti m na závěsu délky $l = 193\text{mm}$. $f \dots$ frekvence otáčení; $\alpha_i^e \dots$ odklon i -tého závěsu získaný experimentálně; $\alpha_i^t \dots$ odklon i -tého závěsu vypočtený podle vztahů (6.3) a (6.4); $\delta \dots$ relativní odchylka experimentu a teorie; $v(\alpha^e) \dots$ variační koeficient α^e (viz strana 90).

symbol	$m(\text{g})$	$f(\text{s}^{-1})$	$\alpha^e(^{\circ})$	$\alpha^t(^{\circ})$	δ	$v(\alpha^e)$
+	2,19	1,27	34,54	36,75	6,2%	5,0%
+	2,19	1,48	54,80	53,75	-1,9%	8,1%
+	2,19	1,71	65,56	63,93	-2,5%	6,6%
+	2,19	1,77	62,60	65,73	4,9%	5,6%
+	2,19	1,92	68,02	69,47	2,1%	5,3%
+	2,19	1,93	69,37	69,85	0,7%	2,2%
+	2,19	1,93	71,36	69,87	-2,1%	2,5%
+	2,19	2,06	71,98	72,35	0,5%	0,7%
+	2,19	2,07	70,23	72,60	3,3%	3,6%
+	2,19	2,29	76,57	75,77	-1,1%	1,2%
+	2,19	2,53	77,26	78,38	1,5%	3,7%
+	2,19	2,67	79,10	79,57	0,6%	3,2%
+	2,19	2,98	80,93	81,64	0,9%	0,8%
+	2,19	3,16	82,15	82,59	0,5%	1,1%
+	2,19	3,17	82,27	82,62	0,4%	0,9%
+	2,19	3,38	82,97	83,52	0,7%	1,0%
◇	4,48	1,80	64,97	66,59	2,47%	1,76%
◇	4,48	1,95	71,39	70,21	-1,66%	0,88%
◇	4,48	2,18	73,30	74,33	1,39%	2,22%
◇	4,48	2,24	74,70	75,15	0,60%	0,97%
◇	4,48	2,39	76,89	76,97	0,10%	1,54%
◇	4,48	2,40	76,89	77,13	0,31%	3,83%
◇	4,48	2,56	78,28	78,68	0,51%	2,58%
◇	4,48	2,59	80,11	78,90	-1,53%	3,11%
◇	4,48	2,72	80,18	79,99	-0,24%	2,74%
◇	4,48	2,78	79,29	80,39	1,38%	1,29%
◇	4,48	2,96	81,20	81,54	0,41%	1,31%
◇	4,48	3,38	82,87	83,52	0,79%	0,37%
○	10,49	1,66	61,85	61,96	0,2%	12,7%
○	10,49	1,96	69,44	70,43	1,4%	1,4%
○	10,49	2,13	72,55	73,53	1,3%	1,8%
○	10,49	2,19	73,72	74,47	1,0%	2,6%
○	10,49	2,28	74,99	75,70	0,9%	1,2%
○	10,49	2,30	75,85	75,92	0,1%	1,2%
○	10,49	2,41	76,85	77,24	0,5%	3,1%
○	10,49	2,53	77,56	78,43	1,1%	3,7%
○	10,49	2,79	81,58	80,48	-1,4%	0,6%
○	10,49	2,97	81,56	81,63	0,1%	0,7%
○	10,49	3,16	82,35	82,61	0,3%	0,6%

Tabulka B.5: Experimentální hodnoty naměřené pro dvě matice o hmotnostech $m_1 = m_2 = 2,19$ g na závěsech o délkách $l_1 = 127,4$ mm, $l_2 = 122,4$ mm. f ... frekvence otáčení; α_i^e ... odklon i-tého závěsu získaný experimentálně; α_i^t ... odklon i-tého závěsu vypočtený iteracemi vztahů (6.8) a (6.9); δ_i ... relativní odchylka experimentální a teoretické hodnoty α_i ; $v(\alpha_i^e)$... variační koeficient α_i^e (viz strana 90).

$f(s^{-1})$	$\alpha_1^e(^{\circ})$	$\alpha_2^e(^{\circ})$	$\alpha_1^t(^{\circ})$	$\alpha_2^t(^{\circ})$	δ_1	δ_2	$v(\alpha_1^e)$	$v(\alpha_2^e)$
1,23	35,05	43,34	34,75	43,48	0,9%	-0,3%	9,3%	8,4%
1,25	37,59	43,89	36,89	45,68	1,9%	-4,0%	2,5%	1,8%
1,38	47,88	54,45	48,32	56,58	-0,9%	-3,8%	5,1%	6,8%
1,43	51,77	59,67	51,57	59,47	0,4%	0,3%	3,5%	4,0%
1,55	59,77	66,70	57,72	64,75	3,5%	3,0%	3,1%	2,0%
1,60	61,86	67,09	59,81	66,49	3,4%	0,9%	4,7%	6,0%
1,73	65,45	70,07	64,29	70,15	1,8%	-0,1%	5,2%	5,1%
1,90	70,22	73,71	68,84	73,79	2,0%	-0,1%	4,1%	2,9%
2,08	74,10	77,49	72,38	76,56	2,3%	1,2%	0,9%	2,3%
2,21	74,48	77,63	74,40	78,13	0,1%	-0,6%	0,9%	1,0%
2,38	77,60	80,43	76,62	79,84	1,3%	0,7%	0,3%	0,4%

Tabulka B.6: Experimentální hodnoty naměřené pro tři matice. $m_1 = m_2 = m_3 = 2,19$ g; $l_1 = 127,4$ mm, $l_2 = 125,2$ mm, $l_3 = 118,1$ mm. f ... frekvence otáčení; α_i^e ... odklon i-tého závěsu získaný experimentálně; α_i^t ... odklon i-tého závěsu vypočtený iteracemi vztahů (6.13), (6.14) a (6.15); δ_i ... relativní odchylka experimentální a teoretické hodnoty α_i .

$f(s^{-1})$	$\alpha_1^e(^{\circ})$	$\alpha_2^e(^{\circ})$	$\alpha_3^e(^{\circ})$	$\alpha_1^t(^{\circ})$	$\alpha_2^t(^{\circ})$	$\alpha_3^t(^{\circ})$	$\delta\alpha_1$	$\delta\alpha_2$	$\delta\alpha_3$
1,20	49,7	57,4	62,0	48,9	55,3	60,1	1,53%	3,78%	3,03%
1,28	54,2	61,0	64,9	54,3	60,2	64,5	-0,22%	1,36%	0,58%
1,29	54,7	61,5	66,2	54,8	60,7	64,9	-0,23%	1,31%	1,90%
1,37	58,8	65,0	68,5	59,1	64,5	68,3	-0,57%	0,82%	0,30%
1,46	62,9	68,1	71,5	62,7	67,6	71,0	0,23%	0,66%	0,71%
1,62	66,4	70,8	73,8	68,1	72,2	74,9	-2,60%	-1,86%	-1,53%
1,68	69,3	74,0	75,9	69,6	73,4	76,0	-0,47%	0,78%	-0,11%

Příloha C

Obsah přiloženého CD

Součástí diplomové práce je i CD, které obsahuje:

- Text diplomové práce ve formátu pdf s barevnými odkazy. Verze určená pro použití v počítači.
- Text diplomové práce ve formátu pdf s černě zbarvenými odkazy. Verze určená pro tisk.
- Dva videozáznamy natočené v rámci druhého experimentu: chování lodičky na roztočené vodní hladině. Klipy demonstrují pohyb modelů lodiček po takovéto hladině.