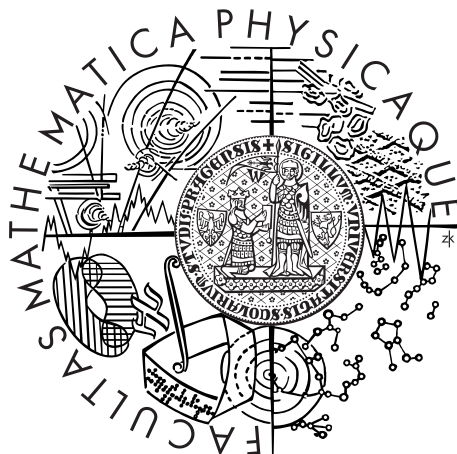


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Ondřej Chochola

Rekurzivní postupy pro detekci změny rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Marie Hušková, DrSc.
Studijní program: Matematická statistika

Poděkování

Děkuji vedoucí diplomové práce paní Prof. RNDr. Marie Huškové, DrSc. za hodnotné rady a připomínky, které výrazně přispěly ke zlepšení této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze 7. srpna 2007

Ondřej Chochola

Název práce: Rekurzivní postupy pro detekci změny rozdělení

Autor: Ondřej Chochola

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Marie Hušková, DrSc.

e-mail vedoucího: huskova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme otázku sekvenčního testování změny měřítka. Předpokládáme, že máme k dispozici stabilní historické období délky m . Cílem je odvodit testy s asymptoticky omezenou pravděpodobností chyby I. druhu a silou 1 při m jdoucím do nekonečna. Byly navrženy dvě takovéto procedury, první využívající odhadů rozptylu z historického období a druhá odhadů rekurzivních. Pro obě testové statistiky byla odvozena rozdělení jak za platnosti nulové hypotézy, kdy se model nemění, tak i za platnosti alternativy, kdy v neznámém čase dojde ke změně měřítka. Dále byla provedena simulační studie pro vyhodnocení výkonnosti procedur při konečném m .

Klíčová slova: testy změny měřítka, rekurzivní postupy, sekvenční testy

Title: Recursive procedures for detection of changes

Author: Ondřej Chochola

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Marie Hušková, DrSc.

Supervisor's e-mail address: huskova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the thesis we study a sequential monitoring scheme for detecting a change in variance. We assume to have a stable historical period of length m . The goal is to propose tests with asymptotically small probability of type I error and power 1 as m tends to infinity. Two such procedures were proposed. The first uses estimates of variance from the historical period, the second uses recursive estimates. The distribution under the null hypothesis and also under the alternative hypothesis was derived for both test statistics. Furthermore a simulation study for of the finite sample performance of the monitoring schemes was conducted.

Keywords: tests for a change in the scale, recursive procedures, sequential tests

Obsah

Úvod	4
1 Možné přístupy k detekci změny	5
1.1 Retrospektivní přístup	5
1.2 Sekvenční testování změny modelu	6
1.2.1 Metoda založená na ARL	6
1.2.2 Metoda založená na omezení pravděpodobnosti chyb	7
2 Změna rozptylu	9
2.1 Předpoklady	9
2.2 Procedura I	10
2.2.1 Testová statistika I	10
2.2.2 Asymptotické chování testové statistiky I	11
2.3 Procedura II	11
2.3.1 Testová statistika II	11
2.3.2 Asymptotické chování testové statistiky II	12
2.4 Důkazy vět	13
2.4.1 Důkaz vět 1 a 2	13
2.4.2 Důkaz vět 3 a 4	21
3 Simulace k proceduře I	29
3.1 Nulová hypotéza	29
3.2 Alternativní hypotéza	33
3.2.1 Normální rozdělení	34
3.2.2 Porovnání kritických hodnot	42
3.2.3 Laplaceovo rozdělení	42
3.3 Shrnutí simulací k proceduře I	45
4 Simulace k proceduře II	46
4.1 Nulová hypotéza	46
4.2 Alternativní hypotéza	47
4.3 Porovnání obou procedur	51
Závěr	53
Apendix	54
Literatura	57

Úvod

V otázce *strukturní stability modelu* předpokládáme, že časově uspořádaná data vyhovují jistému modelu, který se však v průběhu času může změnit. Úkolem je zjistit, zda k takové změně došlo a pokud ano, najít čas změny.

Strukturní stabilita je významná pro mnoho oblastí vědy, techniky i ekonomie. Za všechny můžeme jmenovat např. kontrolu jakosti. Zde například sledujeme stroj vyrábějící nějaké zboží a kontrolujeme, zda jsou jisté parametry těchto výrobků v daných mezích. Je přirozeným předpokladem, že nový stroj je nastaven správně a produkuje tedy dobré výrobky. V momentě, kdy začnou být výrobky špatné (tj. jejich parametry překročí povolené hranice), je třeba přerušit výrobu a stroj opravit.

Existují dva typy procedur pro testování změny modelu. První, takzvané *retrospektivní*, vycházejí z kompletního souboru historických dat a hledají změnu nastalou v minulosti. V druhých, takzvaných *sekvenčních*, neustále přicházejí nová data. Protože jsme tedy stále uprostřed pozorování, nazývá se tento postup také anglickým termínem *online* monitorování. O retrospektivním přístupu hovoříme v této souvislosti jako o *offline* přístupu. Popisu obou metod se budeme krátce věnovat v kapitole 1.

Tato práce se zaměřuje na sekvenční přístup k detekci změny modelu. Vychází především z prací skupiny kolem profesora Horvátha a profesorky Huškové, tj. především z článku [5] a disertační práce [7]. Ty se zaměřovaly na testování změny regresního parametru. Cílem této práce je přizpůsobit vyvinuté metody na testování změny v měřítku.

Kapitola 1 krátce popisuje možné přístupy k testování strukturní stability. V kapitole 2 zavedeme model se kterým budeme pracovat a odvodíme dvě testovací procedury pro změnu rozptylu. V závěrečných kapitolách 3 a 4 na základě simulací prozkoumáme výkonnost obou procedur. V appendixu jsou shrnuta některá důležitá tvrzení použitá v textu.

Kapitola 1

Možné přístupy k detekci změny

1.1 Retrospektivní přístup

V této části se zaměříme na krátké shrnutí klasického přístupu k problému změny modelu. Jak již bylo řečeno, vyskytuje se tato úloha v praxi velmi často a proto není divu, že je studována poměrně dlouho. Byla zkoumána již celá řada alternativ změny, především změna v poloze, regresi či měřítku.

Úloha změny modelu v historických datech může být formulována následujícím způsobem. Uvažujme soubor n časově uspořádaných dat Y_1, \dots, Y_n splňujících jistý statistický model, který se však v průběhu mohl změnit. Naším úkolem je najít body změny a následně určit charakter změn. Jinými slovy chceme rozdělit data do segmentů vykazujících jistou stabilitu. Problém můžeme pojmut jako *úlohu testování hypotéz*. Nulová hypotéza odpovídá nezměněnému modelu, kdežto alternativní hypotéza určuje charakter změn. Dále budeme předpokládat možnost pouze jedné změny v průběhu pozorování.

V obecném případě se zajímáme o jakoukoli změnu v rozdělení. Pokud označíme distribuční funkce pozorování Y_1, \dots, Y_n jako F_1, \dots, F_n , potom testujeme *nulovou hypotézu*

$$H_0: F_1 = \dots = F_n \quad (1.1)$$

proti *alternativě*, že se model v nějakém bodě k změní

$$H_1: \text{existuje } 1 < k \leq n \text{ takové, že} \\ F_1 = \dots = F_{k-1} \neq F_k = \dots = F_n, \quad (1.2)$$

kde k je neznámé.

Test hypotézy (1.1) proti alternativě (1.2) je skutečně velmi obecný, často můžeme předpokládat specifitější situaci např., že Y_1, \dots, Y_n jsou nezávislé náhodné veličiny se společnou hustotou $f = f(y, \theta)$ vzhledem k nějaké σ -konečné míře ν . Parametr θ je neznámý a změna modelu může nastat pouze v tomto parametru. Označme θ_i , $i = 1, \dots, n$, hodnoty parametru θ v čase i . Testový problém nyní přejde na úlohu

$$H_0: \theta_1 = \dots = \theta_n \quad \text{proti} \quad H_1: \theta_1 = \dots = \theta_{k-1} \neq \theta_k = \dots = \theta_n,$$

kde k je neznámé. Testová statistika vychází z podílu hustot a ze statistik

$$\Lambda_{k,n} = \frac{f_{1,k}}{f_0}, \quad \text{popřípadě} \quad \tilde{\Lambda}_{k,n} = \log \frac{f_{1,k}}{f_0},$$

kde $f_{1,k}$ značí hustotu za alternativní hypotézy, kdy ke změně došlo v čase k a f_0 je hustota za nulové hypotézy. Neznámé hodnoty θ jsou nahrazeny příslušnými maximálně věrohodnými odhady. Výsledná testová statistika je pak

$$\Lambda_n = \max_{1 < k \leq n} \Lambda_{k,n}, \quad \text{případně} \quad \tilde{\Lambda}_n = \max_{1 < k \leq n} \tilde{\Lambda}_{k,n}.$$

Protože tato práce je zaměřena na sekvenční přístup k problému změny modelu, nebudeme se již retrospektivnímu přístupu dále věnovat. Přehled metod užívaných pro tento způsob testování můžeme nalézt například v [4].

1.2 Sekvenční testování změny modelu

Oproti retrospektivnímu přístupu, kde máme již od počátku pevně daný soubor pozorování, přicházejí nám nyní data jedno po druhém. Pozorujeme tedy potenciálně nekonečnou posloupnost Y_1, Y_2, Y_3, \dots . Na počátku data splňují určitý model, avšak v nějakém neznámém bodě k^* se začnou od tohoto modelu odchylovat. Naším úkolem je indikovat nastalou změnu co možná nejdříve. Musíme se však snažit vyhnout tzv. *falešným alarmům*, tj. situacím, kdy naše procedura indikuje změnu, aniž by ve skutečnosti nastala.

Problém budeme opět uvažovat jako úlohu testování hypotéz. Označíme-li distribuční funkce pozorování Y_i , $i = 1, 2, \dots$ jako F_i , $i = 1, 2, \dots$ potom testujeme nulovou hypotézu

$$H_0: F_i = F_0, \quad 1 \leq i < \infty$$

oproti alternativě, že se model v nějakém bodě k^* změní

H_1 : existuje $k^* > 1$ takové, že

$$F_i = F_0, \quad 1 \leq i < k^*, \quad F_i = F_*, \quad k^* \leq i < \infty, \quad F_0 \neq F^*,$$

kde čas změny k^* je neznámý stejně jako distribuční funkce před a po změně.

Testovací procedura je založena na tzv. *času zastavení*, což je čas, kdy zamítneme nulovou hypotézu a přestáváme dále pozorovat. Čas zastavení τ definujeme jako

$$\tau = \inf\{k \geq 1 : \Gamma(k) \geq c\},$$

se standardní úmluvou, že $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Testové statistiky $\Gamma(k) = \Gamma(k, Y_1, \dots, Y_k)$, $k = 1, 2, \dots$ jsou často nazývány *detektory* a jsou založeny na všech dostupných pozorováních až do času k . Pomocí *kritické hodnoty* c můžeme ovlivňovat pravděpodobnosti zamítnutí. Hlavním úkolem je tedy vhodná volba detektoru a nalezení metody, jak určit kritickou hodnotu c .

Procedura by měla splňovat dva požadavky. Za platnosti nulové hypotézy bychom se chtěli vyhnout zastavení pozorování, kdežto za platnosti alternativy chceme pozorování zastavit co možná nejdříve po změně modelu. Existují dvě hlavní metody jak mohou být tyto požadavky vyváženy a kritické hodnoty určeny.

1.2.1 Metoda založená na ARL

Tato metoda je založena na funkci průměrné délky $ARL(\vartheta)$, kde ϑ charakterizuje změnu. Specifikujeme spodní mez pro průměrný počet pozorování za nulové hypotézy ($ARL(0)$) a na základě ní určíme kritickou hodnotu. Jsme také schopni odhadnout

střední *zpoždění odhalení změny*, tj. střední počet pozorování mezi skutečnou změnou a časem zastavení. Problémem však je, že pokud chceme mít střední čas detekování skutečné změny konečný, potom bude také střední čas do falešného alarmu konečný, neboť $ARL(\vartheta) < \infty$ implikuje $ARL(0) < \infty$. Proto se falešným alarmům můžeme vyhnout jen stěží, což může v některých aplikacích tento postup značně znevýhodňovat.

Pro ilustraci tohoto postupu uvedeme dva nejpoužívanější detektory, a to v situaci, kdy testujeme jednoduchou hypotézu proti jednoduché alternativě. Nulová hypotéza je reprezentována hustotou f_0 , alternativa hustotou f_1 , kde obě hustoty jsou plně známy.

(i) **Shewhartova procedura** s časem zastavení definovaným jako

$$\tau = \inf \left\{ n : \ln \frac{f_1(Y_n)}{f_0(Y_n)} \geq c \right\}.$$

(ii) **CUSUM procedura** s časem zastavení definovaným jako

$$\tau = \inf \{ n : \tilde{S}_n - \min_{0 \leq j \leq n} \tilde{S}_j \geq c, \}, \text{ kde } \tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_1(Y_i)}{f_0(Y_i)}; \quad \tilde{S}_0 = 0.$$

Bližší informace o tomto typu testování se dají najít např. v knize [8] nebo ve skriptech [6].

1.2.2 Metoda založená na omezení pravděpodobnosti chyb

Nyní se zaměříme na druhou možnou metodu, na níž je založena celá tato práce. Zde omezuje pravděpodobnost falešného alarmu, tj. chyby I. druhu nějakým malým číslem $\alpha \in (0, 1)$ a poté minimalizujeme pravděpodobnost chyby II. druhu. Tyto požadavky můžeme souhrnně vyjádřit jako

$$P(\tau < \infty | H_0) \leq \alpha, \tag{1.3}$$

$$P(\tau < \infty | H_1) = 1. \tag{1.4}$$

S těmito požadavky tedy detekujeme skutečnou změnu s pravděpodobností 1, kdežto pokud se model nezmění, zamítáme nulovou hypotézu pouze s chybou α . Ve srovnání s předchozí metodou je tedy pravděpodobnost falešného alarmu menší, což znamená, že je tato procedura méně citlivá k odlehlým pozorováním. V důsledku toho je však i méně citlivá ke skutečným změnám, takže je zde zpoždění detekce větší než u předchozího typu.

Budeme opět předpokládat, že data mají distribuční funkci závisující na nějakém parametru θ , tj. $F = F(\cdot, \theta)$, přičemž hodnotu tohoto parametru v čase i označíme jako θ_i a změna modelu může nastat pouze v něm.

V celé této práci budeme předpokládat, že máme k dispozici tzv. *tréninková data*, kde žádná změna nenastala. Někdy také říkáme, že to jsou data z *historického období*. Délku těchto dat označíme m . Stabilita parametru θ je popsána takzvanou *podmínkou nekontaminovanosti*

$$\theta_1 = \dots = \theta_m.$$

Problém změny modelu přejde tedy na úlohu testování nulové hypotézy

$$H_0 : \theta_i = \theta_0, \quad 1 \leq i < \infty, \tag{1.5}$$

proti alternativě, že se model v nějakém bodě $m + k^*$ změní

H_1 : existuje $k^* \geq 1$ takové, že

$$\theta_i = \theta_0, \quad 1 \leq i < m + k^*, \quad \theta_i = \theta_*, \quad m + k^* \leq i < \infty, \quad \theta_0 \neq \theta_*.$$

Hodnoty θ_0, θ_* a k^* jsou neznámé. Pro odhadnutí θ_0 použijeme tréninková data. Hodnota $k^* = 1$ znamená změnu ihned po konci tréninkového období.

Čas zastavení nyní také závisí na délce historického období, což zdůrazníme zápisem $\tau = \tau(m)$. Proto také požadavky (1.3) a (1.4) závisejí na m , budeme je tedy uvažovat ve tvaru

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\tau(m) < \infty | H_0) \leq \alpha, \quad (1.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\tau(m) < \infty | H_1) = 1. \quad (1.7)$$

Čas zastavení definujeme jako

$$\tau(m) = \inf\{k : |Q(m, k)|/g(m, k) \geq c_m(\alpha)\} \quad (1.8)$$

s obvyklou úmluvou, že $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Členy užívané v (1.8) jsou:

$Q(m, k)$ – testová statistika vyhodnocená v čase $m + k$ s využitím všech dostupných pozorování, tj. $Q(m, k) = Q(m, k, Y_1, \dots, Y_{m+k})$. Většinou se jedná o absolutní hodnotu nějaké kumulativní sumy (CUSUM), která konverguje v pravděpodobnosti do nekonečna při $k \rightarrow \infty$. Z tohoto důvodu musí být standardizována.

$g(m, k)$ – vhodná funkce rostoucí v k , a to takovým způsobem, že poměr $|Q(m, k)|/g(m, k)$ je omezený v pravděpodobnosti při nulové hypotéze, avšak jde do nekonečna za platnosti alternativy. Tato funkce se nazývá *hraniční funkce*.

$c_m(\alpha)$ – kritická hodnota určena tak, aby byly splněny požadavky (1.6) a (1.7). Většinou musí být získána ze simulací. Tyto simulace mohou být provedeny pro pevné m , nebo mohou být založeny na limitním rozdělení statistiky $Q(m, k)$ za platnosti nulové hypotézy při $m \rightarrow \infty$. Takovým hodnotám pak říkáme *asymptotické kritické hodnoty* a značíme je $c(\alpha)$.

Test hypotézy (1.5) s rozhodovacím pravidlem založeným na (1.8) můžeme tedy shrnout:

- Zamítáme nulovou hypotézu a zastavujeme pozorování, jakmile pro nějaké k poměr $|Q(m, k)|/g(m, k)$ překročí kritickou hodnotu $c_m(\alpha)$.
- Jinak pokračujeme v pozorování.

Z průběhu testování je zřejmé, že nemůžeme nikdy nulovou hypotézu přijmout, jak je běžné v jiných sekvenčních testech (případně ji nezamítnout, jak známe z klasické statistiky), což je zřejmě dáno charakterem testu. Není to však na závadu, neboť data jsou často sbírána zcela automaticky, a tudíž s minimálními náklady. Jako příklad mohou posloužit meteorologické či seismické stanice.

Kapitola 2

Změna rozptylu

2.1 Předpoklady

Dosud publikované články se zaměřovaly na zkoumání změny v parametru polohy nebo regrese. My budeme zkoumat možné změny v měřítku. Předpokládáme, že naše pozorování vyhovují modelu:

$$Y_i = \mu + \sigma_i e_i, \quad 1 \leq i < \infty, \quad (2.1)$$

kde $\{Y_i, 1 \leq i < \infty\}$ jsou pozorovaná data, μ je neznámý parametr polohy, $\{e_i, 1 \leq i < \infty\}$ jsou náhodné chyby a $\{\sigma_i, 1 \leq i < \infty\}$ konstanty určující rozptyl veličin $\{Y_i, 1 \leq i < \infty\}$. Naším úkolem je sekvenčně monitorovat změnu v rozptylu pozorování, tj. změnu v σ_i .

Pro náhodné chyby předpokládáme:

- (A) $\{e_i, 1 \leq i < \infty\}$ jsou nezávislé stejně rozdělené,
- (B) $E e_i = 0, \quad 1 \leq i < \infty,$
- (C) $\text{var } e_i = 1, \quad 1 \leq i < \infty,$
- (D) $\text{var } e_i^2 = \eta^2 < \infty, \quad 1 \leq i < \infty,$
- (E) $E |e_i|^{4+\delta} < \infty$ pro nějaké $\delta > 0, \quad 1 \leq i < \infty.$

Dále předpokládáme stabilitu v historickém období délky m , tj. platnost

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma_0^2,$$

kde σ_0^2 je neznámé.

Chceme testovat nulovou hypotézu, že nedochází ke změně v měřítku

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma_0^2, \quad 1 \leq i < \infty \quad (2.2)$$

proti alternativě, že se model v nějakém bodě $m + k^*$ změní

$$H_1 : \text{existuje } k^* \geq 1 \text{ takové, že} \quad (2.3)$$
$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2, \quad 1 \leq i < m + k^*, \quad \sigma_i^2 = \sigma_*^2, \quad m + k^* \leq i < \infty, \quad \sigma_0^2 \neq \sigma_*^2.$$

Hodnoty k^* a σ_*^2 jsou stejně jako σ_0^2 neznámé.

Odvodíme dvě testovací procedury, přičemž obě vycházejí z (1.8).

2.2 Procedura I

2.2.1 Testová statistika I

Detektor označíme $Q_I(m, k)$ a definujeme ho jako

$$Q_I(m, k) = \frac{1}{\hat{\eta}_m} \left\{ \sum_{i=m+1}^{m+k} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 \right\},$$

kde $\bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$ je průměrné pozorování v historickém období a

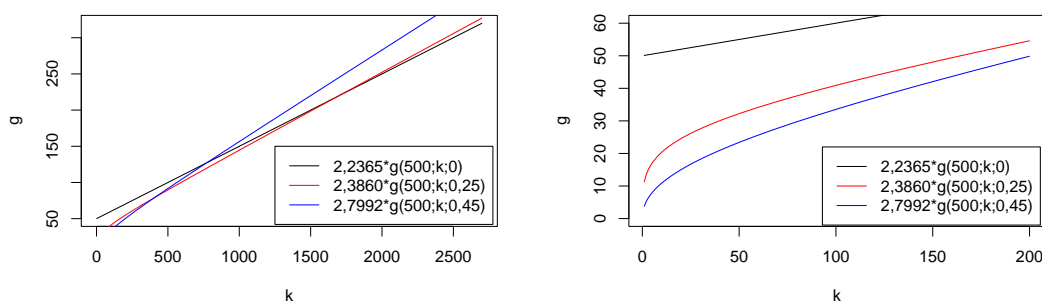
$$\hat{\eta}_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^4 - \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 \right]^2$$

je za platnosti nulové hypotézy odhadem $\text{var}(Y_i - \mathbb{E}Y_i)^2 = \eta^2 \sigma_0^4$ pro $1 \leq i < \infty$.

Hraniční funkce $g(m, k)$ bude ještě záviset na konstantě γ , proto budeme psát explicitně $g(m, k, \gamma)$. Funkci definujeme jako

$$g(m, k, \gamma) = \sqrt{m} \left(\frac{m+k}{m} \right) \left(\frac{k}{m+k} \right)^\gamma, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Tato funkce byla poprvé použita v [5] a od té doby je již prověřena řadou aplikací. Řada článků věnovaných sekvenčnímu testování změny modelu používá právě tuto hraniční funkci. Výhodou je také její jednoduchý tvar. Navíc parametr γ nám umožňuje nastavit proceduru dle očekávaného bodu změny. Jak uvidíme později, můžeme tento parametr volit v rozsahu $[0, 1/2)$.



Obrázek 2.1: Grafy funkcí $g(500, k, \gamma)$ pro $\gamma = 0, 0,25$ a $0,45$ násobené příslušnou asymptotickou kritickou hodnotou.

Pro tři různé hodnoty γ ($\gamma = 0, 0,25$ a $0,45$) je tato funkce nakreslena na obrázku 2.1, kde bylo použito $m = 500$. Funkce je vždy ještě násobena příslušnou asymptotickou kritickou hodnotou. Pro malé k (viz graf vpravo) nabývá funkce g větších hodnot pro γ malé (např. 0). Naopak pro větší hodnoty k (graf vlevo) je situace obrácená a g nabývá větších hodnot pro γ blízké $1/2$. Proto, pokud očekáváme změnu krátce po konci tréninkového období, je vhodné volit γ blízké $1/2$, naopak při očekávání pozdní změny volíme $\gamma = 0$.

2.2.2 Asymptotické chování testové statistiky I

Asymptotické chování testové statistiky za platnosti nulové hypotézy, respektive za platnosti alternativy, je popsáno následujícími dvěma větami.

Věta 1. *Nechť Y_1, Y_2, \dots splňují model (2.1), nechť předpoklady (A) – (E) jsou splněny a nechť $\gamma \in [0, 1/2)$. Potom, za platnosti nulové hypotézy (2.2), platí*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma} \leq c \right)$$

pro všechny $c > 0$, kde $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ je Wienerův proces.

Věta 2. *Nechť Y_1, Y_2, \dots splňují model (2.1), nechť předpoklady (A) – (E) jsou splněny a nechť $\gamma \in [0, 1/2)$. Potom, za platnosti alternativní hypotézy (2.3), platí*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)} \xrightarrow{P} \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Důkazy obou vět jsou uvedeny v sekci 2.4.1.

Věta 1 říká, že za platnosti nulové hypotézy je limitní rozdělení (limitní vzhledem k délce historického období) testové statistiky

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)}$$

funkcionálem Wienerova procesu. Ten také určuje možný rozsah parametru γ , neboť pro $\gamma \geq 1/2$ by náhodný proces $W(t)/t^\gamma$ konvergoval do nekonečna při $t \rightarrow 0+$ s pravděpodobností 1. Limitní rozdělení může být použito k aproximaci kritických hodnot $c_m(\alpha, \gamma)$, tj hodnot, pro které platí

$$P \left(\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)} \geq c_m(\alpha, \gamma) \right) = \alpha.$$

Na základě věty 1 tedy tyto hodnoty aproximujeme pomocí $c(\alpha, \gamma)$, které splňují

$$P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma} \geq c(\alpha, \gamma) \right) = \alpha.$$

Avšak přesný tvar rozdělení tohoto funkcionálu je znám pouze pro $\gamma = 0$. Pro $\gamma > 0$ musíme použít simulací, proto jsou další podrobnosti uvedeny v kapitole 3 věnované simulacím (str. 29).

Věta 2 zaručuje, že skutečná změna bude detekována s pravděpodobností jdoucí k 1 při $m \rightarrow \infty$.

2.3 Procedura II

2.3.1 Testová statistika II

Oproti detektoru Q_I , kde jsme využívali odhad rozptylu ze stabilního historického období, použijeme nyní veškerou informaci dostupnou v čase $m + k$, tj. detektor Q_{II}

bude využívat rekurzivní odhad rozptylu. Q_{II} je definován vztahem

$$Q_{II}(m, k) = \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{\hat{\eta}_{m,i}} \left\{ (Y_i - \bar{Y}_{i-1})^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^2 \right\},$$

kde

$$\hat{\eta}_{m,i}^2 = \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^4 - \left[\frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^2 \right]^2, \quad i = m+1, m+2, \dots$$

Hraniční funkci budeme uvažovat ve tvaru

$$g(m, k) = m^{1/2} h(k/m), \quad (2.5)$$

přičemž o funkci h předpokládáme:

- (i) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^\gamma}{h(t)} = 0$ pro nějaké $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$,
- (ii) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(t \log \log t)^{1/2}}{h(t)} < \infty$,
- (iii) $h(t)$ je spojitá a kladná na $(0, \infty)$.

Tyto předpoklady splňuje například funkce $h_a(t) = [(t+1)(a^2 + \log(t+1))]^{1/2}$, která představuje velmi vhodnou volbu, jak bude uvedeno níže.

2.3.2 Asymptotické chování testové statistiky II

Následující dvě věty popisují chování testové statistiky založené na Q_{II} za platnosti nulové hypotézy, resp. za platnosti alternativy.

Věta 3. *Nechť Y_1, Y_2, \dots splňují model (2.1), necht' předpoklady (A) – (E) jsou splněny a necht' funkce h splňuje (i)–(iii). Potom, za platnosti nulové hypotézy (2.2), platí*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_{II}(m, k)|}{m^{1/2} h(k/m)} \leq 1 \right) = P \left(\sup_{0 \leq t < \infty} \frac{|W(t)|}{h(t)} \leq 1 \right),$$

kde $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ je Wienerův proces.

Věta 4. *Nechť Y_1, Y_2, \dots splňují model (2.1), necht' předpoklady (A) – (E) jsou splněny a necht' funkce h splňuje (i)–(iii) a navíc pro ni platí*

$$\frac{m + k^*}{m^{1/2} h\left(\frac{m+k^*}{m}\right)} \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Potom, za platnosti alternativní hypotézy (2.3), platí

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_{II}(m, k)|}{m^{1/2} h(k/m)} \xrightarrow{P} \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Důkazy jsou uvedeny v sekci 2.4.2.

Věta 3 nám opět umožňuje limitně aproximovat rozdělení testové statistiky pomocí funkcionálu Wienerova procesu. Bohužel je známo velmi málo explicitních vyjádření rozdělení

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \frac{|W(t)|}{h(t)},$$

a to i pro vhodně zvolené funkce h . Avšak jak je uvedeno v [2], pro funkci $h_a(t) = [(t+1)(a^2 + \log(t+1))]^{1/2}$ platí

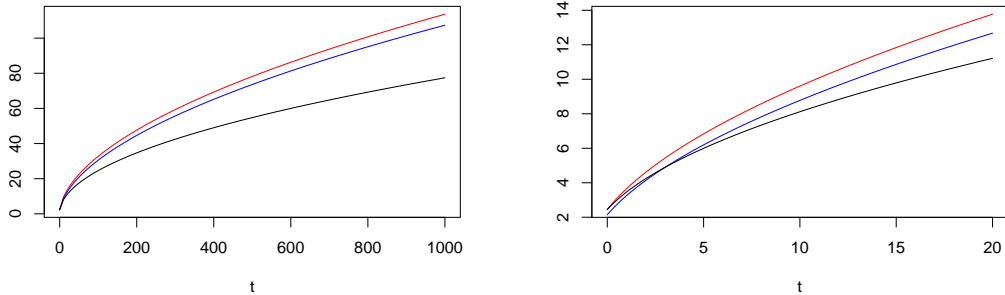
$$P \left(\sup_{0 \leq t < \infty} \frac{|W(t)|}{h_a(t)} \leq 1 \right) = 1 - \exp(-a^2/2).$$

V praxi můžeme tedy použít funkci $h_a(t)$ s parametrem a určeným tak, aby platilo

$$\exp(-a^2/2) = \alpha, \quad (2.6)$$

kde α je pravděpodobnost falešného alarmu. Na obrázku 2.2 jsou zobrazeny grafy funkcí $h_a(t)$, kde a se spočítalo dle vzorce (2.6) tak, aby odpovídalo 5% i 10% hladině.

Věta 4 opět za platnosti alternativní hypotézy zaručuje odhalení změny s pravděpodobnostmi jdoucí k 1.



Obrázek 2.2: Funkce $h_a(t)$ pro a odpovídající 5% je zobrazena červeně, pro 10% je modře. Černě je zobrazena funkce $(a_5^2(t+1))^{1/2}$, kde a_5 odpovídá 5%.

2.4 Důkazy vět

2.4.1 Důkaz vět 1 a 2

Důkaz věty 1 bude rozložen do několika lemmat. Pokud nebude uvedeno jinak, jsou všechny konvergence myšleny pro $m \rightarrow \infty$.

V následujícím lemmatu ukážeme konzistenci odhadu $\hat{\eta}_m^2$.

Lemma 1. *Pokud jsou splněny předpoklady věty 1, platí*

$$\hat{\eta}_m^2 \xrightarrow{P} \eta^2 \sigma_0^4.$$

Důkaz. Vzhledem k podmínce stability v historickém období můžeme psát $Y_i = \mu + \sigma_0 e_i$, $1 \leq i \leq m$ a tedy i $\bar{Y}_m = \mu + \sigma_0 \bar{e}_m$. Proto

$$\hat{\eta}_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^4 - \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 \right]^2 = \frac{\sigma_0^4}{m} \sum_{i=1}^m (e_i - \bar{e}_m)^4 - \sigma_0^4 \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (e_i - \bar{e}_m)^2 \right]^2.$$

Budeme vyšetřovat oba členy zvlášť (bez konstanty σ_0^4). Pro první máme

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (e_i - \bar{e}_m)^4 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i^4 - 4\bar{e}_m \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i^3 + 6\bar{e}_m^2 \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 - 4\bar{e}_m^3 \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i + \bar{e}_m^4 \xrightarrow{P} \mathbb{E} e_1^4,$$

neboť ze zákona velkých čísel (věta IV) víme, že $\bar{e}_m \xrightarrow{P} \mathbb{E} e_1 = 0$, tudíž stejná konvergence platí i pro mocniny \bar{e}_m . Protože navíc platí $\mathbb{E} e_1^4 < \infty$, je $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i^l \in \text{OP}(1)$, $l = 1, 2, 3$.

Podobně pro druhý člen máme ze stejných důvodů

$$\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (e_i - \bar{e}_m)^2 \right]^2 = \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 - 2\bar{e}_m \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i + \bar{e}_m^2 \right]^2 \xrightarrow{P} [\mathbb{E} e_1^2]^2.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\hat{\eta}_m^2 \xrightarrow{P} \sigma_0^4 [\mathbb{E} e_1^4 - (\mathbb{E} e_1^2)^2] = \sigma_0^4 \text{var} e_1^2 = \sigma_0^4 \eta^2,$$

což jsme měli dokázat. □

Následující lemma ukazuje vztah našeho detektoru k chybovým členům modelu.

Lemma 2. *Pokud jsou splněny předpoklady věty 1, platí*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \left[\sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i^2 - \sigma_0^2 \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 \right] \right|}{\sqrt{m} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \xrightarrow{P} 0$$

Důkaz. Nejprve se budeme snažit zjednodušit čitatele. Vzhledem ke stabilitě v historickém období a platnosti nulové hypotézy dostáváme

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=m+1}^{m+k} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \left[\sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i^2 - \sigma_0^2 \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 \right] \right\} = \\ & = \left\{ \sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} (e_i - \bar{e}_m)^2 - \frac{k}{m} \sigma_0^2 \sum_{i=1}^m (e_i - \bar{e}_m)^2 - \left[\sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i^2 - \sigma_0^2 \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 \right] \right\} = \\ & = \sigma_0^2 \left\{ \sum_{i=m+1}^{m+k} (e_i^2 - 2e_i \bar{e}_m + \bar{e}_m^2) - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (e_i^2 - 2e_i \bar{e}_m + \bar{e}_m^2) - \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i^2 + \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 \right\} = \\ & = 2\sigma_0^2 \bar{e}_m \left\{ \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i - \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \right\}. \end{aligned}$$

Z Marcinkiewiczova-Zykmundova zákona velkých čísel (věta V) víme, že platí

$$\frac{1}{m^{1/2+\delta}} \sum_{i=1}^m e_i \xrightarrow{s.j.} 0,$$

pro nějaké $\delta > 0$, tudíž jistě

$$\sum_{i=1}^m e_i = o_P(m^{1/2+\delta}).$$

Protože platí

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|\bar{e}_m \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i - \bar{e}_m \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{g(m, k, \gamma)} \leq \\ & \leq \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|\bar{e}_m \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i|}{g(m, k, \gamma)} + \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|\bar{e}_m \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{g(m, k, \gamma)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

můžeme vyšetřovat konvergenci obou členů odděleně. Navíc ještě rozdělíme hodnoty k , přes které bereme supremum, na $k \leq m$ a $k \geq m$.

Začneme s $k \leq m$. Hraniční funkci můžeme odhadnout jako

$$g(m, k, \gamma) = \sqrt{m} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma = m^{-1/2} (m+k)^{1-\gamma} k^\gamma > m^{1/2-\gamma} k^\gamma$$

Pro první supremum v (2.7) máme

$$\begin{aligned} & o_P(m^{1/2+\delta}) o_P(m^{1/2+\delta}) \max_{1 \leq k \leq m} \frac{\frac{k}{m}}{m g(m, k, \gamma)} = o_P(m^{1+2\delta}) \max_{1 \leq k \leq m} \frac{\frac{k}{m}}{m^{3/2-\gamma} k^\gamma} = \\ & = \frac{o_P(m^{1+2\delta})}{m^{3/2-\gamma}} \xrightarrow{P} 0, \end{aligned}$$

kde jsme položili $2\delta := 1/2 - \gamma$. Protože $\gamma \in [0, 1/2)$, víme, že $\delta \in (0, 1/4]$. To opravňuje použití takto definovaného δ v Marcinkiewiczově-Zykmundově zákoně velkých čísel. Nyní se zaměříme na druhý člen (2.7). S využitím Hájkovy-Rényiovy nerovnosti (věta VI) máme

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{1 \leq k \leq m} \frac{|\sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{g(m, k, \gamma)} \geq A \right) \leq P \left(\max_{1 \leq k \leq m} \frac{|\sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{m^{1/2-\gamma} k^\gamma} \geq A \right) = \\ & = P \left(\max_{1 \leq k \leq m} \frac{|\sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{k^\gamma} \geq A m^{1/2-\gamma} \right) \leq \left(A m^{1/2-\gamma} \right)^{-2} \sum_{i=m+1}^{m+m} \frac{\mathbb{E} e_i^2}{i^{2\gamma}} = \\ & = A^{-2} m^{2\gamma-1} \sum_{i=m+1}^{2m} \frac{1}{i^{2\gamma}} = A^{-2} m^{2\gamma-1} O(m^{1-2\gamma}) \sim A^{-2}, \end{aligned}$$

kde \sim značí asymptotické chování, tj. $a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = O(b_n)$ & $b_n = O(a_n)$. Protože A můžeme volit libovolně veliké, je tato část omezena v pravděpodobnosti. V předchozím odvození jsme využili

$$\sum_{i=m+1}^{2m} i^{-2\gamma} \sim \int_{z=m+1}^{2m} z^{-2\gamma} dz = \left[\frac{z^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} \right]_{m+1}^{2m} = O(m^{1-2\gamma}).$$

Protože $\bar{e}_m = o_P(1)$ platí

$$\max_{1 \leq k \leq m} \frac{|\bar{e}_m \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{g(m, k, \gamma)} \xrightarrow{P} 0.$$

Nyní uvažujeme $k \geq m$.

Hraniční funkci můžeme odhadnout jako

$$g(m, k, \gamma) = \sqrt{m} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma = m^{-1/2} (m+k)^{1-\gamma} k^\gamma > m^{-1/2} k.$$

První člen (2.7) přejde na

$$o_P(m^{1+2\delta}) \sup_{k \geq m} \frac{\frac{k}{m}}{m g(m, k, \gamma)} = o_P(m^{1+2\delta}) \sup_{k \geq m} \frac{\frac{k}{m}}{m^{1/2} k} = \frac{o_P(m^{1+2\delta})}{m^{3/2}} \xrightarrow{P} 0,$$

neboť $1 + 2\delta = 3/2 - \gamma \leq 3/2$.

Pro druhý člen opět využijeme Hájkovu-Rényiovu nerovnost

$$\begin{aligned} P \left(\max_{m \leq k \leq n} \frac{|\sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{g(m, k, \gamma)} \geq A \right) &\leq P \left(\max_{m \leq k \leq n} \frac{|\sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{m^{-1/2} k} \geq A \right) \leq \\ &\leq \left(A m^{-1/2} \right)^{-2} \sum_{i=m+1}^{m+n} \frac{1}{i^2} = A^{-2} m O(m^{-1}) \sim A^{-2}, \end{aligned}$$

a to stejnoměrně v n . Pro odhad $\sum_{i=m+1}^{m+n} i^{-2}$ se postupovalo obdobně jako v předchozím případě. Protože platí $\bar{e}_m = o_P(1)$, dostáváme

$$\sup_{k \geq m} \frac{|\bar{e}_m \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i|}{g(m, k, \gamma)} \xrightarrow{P} 0.$$

Ukázali jsme tedy, že obě suprema na pravé straně (2.7) konvergují k 0 dle pravděpodobnosti při $m \rightarrow \infty$, čímž je lemma dokázáno. \square

V tomto lemmatu ukážeme možnost aproximace chybových členů pomocí funkcionálu Wienerova procesu.

Lemma 3. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1. Potom pro každé m existují dva nezávislé Wienerovy procesy $\{W_{1,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ a $\{W_{2,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ takové, že platí*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i - \eta (W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m)) \right|}{\sqrt{m} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \xrightarrow{P} 0,$$

kde $\varepsilon_i = e_i^2 - E e_i^2 = e_i^2 - 1$ a $\eta^2 = \text{var } \varepsilon_i = \text{var } e_i^2$.

Důkaz. Protože e_i , $1 \leq i < \infty$, jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, platí to jistě i pro ε_i , $1 \leq i < \infty$. Z definice ε_i je zřejmé, že platí

$$E \varepsilon_i = 0, \quad \text{var } \varepsilon_i = \text{var } e_i^2 = \eta^2.$$

Protože předpokládáme, že $E |e_i|^{4+\delta} < \infty$ pro nějaké $\delta > 0$, pak existuje $\nu > 2$ takové, že $E |\varepsilon_i|^\nu < \infty$.

Z nezávislosti ε_i vyplývá, že pro libovolné m jsou sumy $\sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ a $\sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i$ nezávislé pro všechny $1 \leq k < \infty$.

Z Komlós-Major-Tusnádyovy aproximace (důsledek II, věta III) víme, že pro každé m existují dva nezávislé Wienerovy procesy $\{W_{1,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ a $\{W_{2,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ takové, že

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \eta W_{1,m}(k) \right|}{k^{1/\nu}} = O_p(1) \quad (m \rightarrow \infty), \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i - \eta W_{2,m}(m) = o_p(m^{1/\nu}). \quad (2.9)$$

Tedy

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i - \eta (W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m)) \right|}{\sqrt{m} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} = \\ & = O_p(1) \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{k^{1/\nu} + \frac{k}{m} m^{1/\nu}}{m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma}. \end{aligned}$$

Pro $k \leq m$, máme $0 \leq k/m \leq 1$ a protože $\gamma < 1/2$ a $\nu > 2$, dostáváme

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq m} \frac{k^{1/\nu} + \frac{k}{m} m^{1/\nu}}{m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} = \max_{1 \leq k \leq m} \frac{m^\gamma \left(1 + \frac{k}{m}\right)^\gamma \left(k^{1/\nu} + \frac{k}{m} m^{1/\nu}\right)}{m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) k^\gamma} \leq \\ & \leq \max_{1 \leq k \leq m} \frac{m^\gamma 2^\gamma \left(k^{1/\nu} + \frac{k}{m} m^{1/\nu}\right)}{m^{1/2} k^\gamma}, \end{aligned}$$

kde jsme odhadli $\left(1 + \frac{k}{m}\right)$ shora v čitateli a zdola ve jmenovateli.

Po další úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq m} 2^\gamma \left(m^{\gamma-1/2} k^{1/\nu-\gamma} + m^{1/\nu-1/2} \left(\frac{k}{m}\right)^{1-\gamma} \right) \leq 2^\gamma \left(m^{\gamma-1/2} \max_{1 \leq k \leq m} k^{1/\nu-\gamma} + m^{1/\nu-1/2} \right) = \\ & = 2^\gamma \left(O(m^{1/\nu-1/2}) + O(m^{1/\nu-1/2}) \right) = o(1), \end{aligned}$$

neboť poslední maximum může být v závislosti na hodnotě exponentu $1/\nu - \gamma$ odhadnuto buď 1 (pro záporný exponent), či $m^{1/\nu-\gamma}$ pro kladný.

Pro $k \geq m$ je $0 \leq m/k \leq 1$ a podobnými úpravami dokážeme, že

$$\begin{aligned}
\sup_{m \leq k < \infty} \frac{k^{1/\nu} + \frac{k}{m} m^{1/\nu}}{m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} &= \sup_{m \leq k < \infty} \frac{\left(\frac{m+k}{k}\right)^\gamma \left(k^{1/\nu} + \frac{k}{m} m^{1/\nu}\right)}{m^{1/2} \frac{k}{m} \left(1 + \frac{m}{k}\right)} = \\
&= \sup_{m \leq k < \infty} \frac{2^\gamma m^{1/2} \left(k^{1/\nu} + \frac{k}{m} m^{1/\nu}\right)}{k} \leq \sup_{m \leq k < \infty} 2^\gamma \left(m^{1/2} k^{1/\nu-1} + m^{1/\nu-1/2}\right) = \\
&= 2^\gamma O(m^{1/\nu-1/2}) = o(1).
\end{aligned}$$

Spojením obou předchozích výsledků je lemma dokázáno. \square

V následujícím lemmatu vyšetříme konvergenci funkcionálu Wienerova procesu z lemmatu předchozího.

Lemma 4. *Nechť $\{W_{1,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ a $\{W_{2,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ jsou nezávislé Wienerovy procesy a nechť $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ také označuje Wienerův proces. Pak platí*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m)|}{\sqrt{m} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \xrightarrow{D} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [5], avšak pro kontinuitu výkladu ho uvádíme i zde. V důkazu se využívají vlastnosti Wienerova procesu, které se dají nalézt například v [9], kapitola 7. Rozdělení procesů $\{W_{1,m}(t)\}$ a $\{W_{2,m}(t)\}$ nezávisí na m , a tak můžeme psát

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m)|}{g(m, k, \gamma)} \stackrel{D}{=} \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|W_1(k) - \frac{k}{m} W_2(m)|}{g(m, k, \gamma)},$$

kde $\{W_1(t), 0 \leq t < \infty\}$ a $\{W_2(t), 0 \leq t < \infty\}$ jsou dva nezávislé Wienerovy procesy.

Supremum bude vyšetřováno rozdílným způsobem pro $k \leq mT$ a $k > mT$, kde T je kladná konstanta.

Pro $k \leq mT$ můžeme využít spojitost procesu $(W_1(t) - tW_2(1))/t^\gamma$ na libovolném intervalu $[0, T]$ a transformací argumentů dostaneme

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{|W_1(k) - \frac{k}{m} W_2(m)|}{\sqrt{m} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \stackrel{D}{=} \max_{1 \leq k \leq mT} \frac{|W_1\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{k}{m} W_2(1)|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \xrightarrow{s.j.} \sup_{0 < t \leq T} \frac{W_1(t) - tW_2(1)}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma}$$

při $m \rightarrow \infty$.

Pro $k > mT$ budeme procesy $|W_1(k)|/g(m, k, \gamma)$ a $\frac{k}{m}|W_2(m)|/g(m, k, \gamma)$ vyšetřovat odděleně. Pro první máme po transformaci argumentu Wienerova procesu

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \frac{|W_1(k)|}{m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \stackrel{D}{=} \sup_{mT \leq k < \infty} \frac{|W_1\left(\frac{k}{m}\right)|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \leq \sup_{T \leq t < \infty} \frac{|W_1(t)|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma}.$$

Zákon iterovaného logaritmu (věta VIII) dává pro libovolné $A > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left(\sup_{T \leq t < \infty} \frac{|W_1(t)|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} > A \right) = 0.$$

Pro druhý proces máme opět

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \frac{\left| \frac{k}{m} W_2(m) \right|}{m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \stackrel{D}{=} \sup_{mT \leq k < \infty} \frac{\left| \frac{k}{m} W_2(1) \right|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma}$$

a při T jdoucím do nekonečna platí

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \left| \frac{\frac{k}{m} W_2(1)}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} - W_2(1) \right| \leq \sup_{T \leq t < \infty} \left| \frac{t W_2(1)}{\left(1 + t\right) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - W_2(1) \right| \rightarrow 0 \text{ s.j.,}$$

neboť jistě

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \left| \frac{\frac{k}{m}}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} - 1 \right| \leq \sup_{T \leq t < \infty} \left| \frac{t}{\left(1 + t\right) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Pokud opět oba procesy spojíme, dostaneme pro libovolné $A > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} P \left(\left| \sup_{mT \leq k < \infty} \frac{\left| W_1\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{k}{m} W_2(1) \right|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} - W_2(1) \right| > A \right) = 0$$

a ze zákona iterovaného logaritmu máme

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left(\left| \sup_{T \leq t < \infty} \frac{\left| W_1(t) - t W_2(1) \right|}{\left(1 + t\right) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - W_2(1) \right| > A \right) = 0.$$

Celkově tedy můžeme psát

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m) \right|}{g(m, k)} \stackrel{D}{\rightarrow} \sup_{0 \leq t < \infty} \frac{\left| W_1(t) - t W_2(1) \right|}{\left(1 + t\right) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma}.$$

Výpočtem autokovarianční funkce ověříme platnost následujícího vztahu

$$\{W_1(t) - t W_2(1), 0 \leq t < \infty\} \stackrel{D}{=} \left\{ (1+t) W \left(\frac{t}{1+t} \right), 0 \leq t < \infty \right\},$$

kde $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ je Wienerův proces. V důsledku nezávislosti procesů máme

$$\text{cov} [W_1(t) - t W_2(1), W_1(s) - s W_2(1)] = \min(s, t) + st$$

a kovariance procesu na pravé straně je rovna

$$(1+t)(1+s) \min \left(\frac{s}{1+s}, \frac{t}{1+t} \right) = \min(s, t) + st.$$

Užitím předchozího výsledku dostáváme

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \frac{\left| W_1(t) - t W_2(1) \right|}{\left(1 + t\right) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \stackrel{D}{=} \sup_{0 \leq t < \infty} \frac{\left| W \left(\frac{t}{1+t} \right) \right|}{\left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \stackrel{D}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma},$$

což dokončuje důkaz tohoto lemmatu. □

S předchozími výsledky nyní můžeme snadno dokázat větu 1.

Důkaz věty 1. Můžeme psát

$$\begin{aligned}
\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)} &= \frac{1}{\hat{\eta}_m} \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 \right|}{g(m, k, \gamma)} \stackrel{1}{=} \\
&\stackrel{1}{=} \frac{1}{\hat{\eta}_m} \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i^2 - \sigma_0^2 \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 \right|}{g(m, k, \gamma)} + o_P(1) = \\
&= \frac{\sigma_0^2}{\hat{\eta}_m} \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} (e_i^2 - 1) - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (e_i^2 - 1) \right|}{g(m, k, \gamma)} + o_P(1) = \\
&= \frac{\sigma_0^2}{\hat{\eta}_m} \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \right|}{g(m, k, \gamma)} + o_P(1) \stackrel{2}{=} \\
&\stackrel{2}{=} \frac{\sigma_0^2 \eta}{\hat{\eta}_m} \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m) \right|}{g(m, k, \gamma)} + o_P(1) \\
&\stackrel{D}{\rightarrow} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}.
\end{aligned}$$

Rovnost 1 vyplývá z lemmatu 2, rovnost 2 z lemmatu 3 a poslední konvergence je důsledkem lemmat 4 a 1, dle něhož víme, že $\hat{\eta}_m^2 \xrightarrow{P} \eta^2 \sigma_0^4$. Tímto je dokázána věta 1. \square

Nyní uvedeme důkaz věty 2.

Důkaz věty 2. Položíme $\tilde{k} = k^* + \max(m, k^*)$. Rozdělíme pozorování na části vyskytující se před, respektive po změně modelu.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}-1} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{\tilde{k}-1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 = \\
&= \sum_{i=m+1}^{m+k^*-1} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{k^*-1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 + \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{\tilde{k}-k^*}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 = \\
&= A_{1,m} + A_{2,m},
\end{aligned}$$

kde $A_{1,m}$ značí část před změnou rozptylu, tj.

$$A_{1,m} = \sum_{i=m+1}^{m+k^*-1} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{k^*-1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2.$$

Dle věty 1 víme, že $A_{1,m}$ je po vydělení $g(m, k^* - 1, \gamma)$ omezeno v pravděpodobnosti. Budeme tedy vyšetřovat $A_{2,m}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 - \frac{\tilde{k}-k^*}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 = \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} (\sigma_* e_i - \sigma_0 \bar{e}_m)^2 - \sigma_0^2 \frac{\tilde{k}-k^*}{m} \sum_{i=1}^m (e_i - \bar{e}_m)^2 = \\
&= \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \sigma_*^2 e_i^2 - \sigma_0^2 \frac{\tilde{k}-k^*}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 - 2\sigma_0 \bar{e}_m \left[\sigma_* \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} e_i - \sigma_0 \frac{\tilde{k}-k^*}{m} \sum_{i=1}^m e_i \right].
\end{aligned}$$

Třetí člen je jakožto lineární kombinace e_i dělený funkcí $g(m, \tilde{k} - 1, \gamma)$ opět omezen v pravděpodobnosti. Úpravou prvních dvou členů dostaneme

$$\begin{aligned} & \sigma_*^2 \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} e_i^2 - \sigma_0^2 \frac{\tilde{k} - k^*}{m} \sum_{i=1}^m e_i^2 = \\ & = \sigma_*^2 \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} (e_i^2 - 1) - \sigma_0^2 \frac{\tilde{k} - k^*}{m} \sum_{i=1}^m (e_i^2 - 1) + \sigma_*^2(\tilde{k} - k^*) - \sigma_0^2(\tilde{k} - k^*). \end{aligned}$$

Protože je $\sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} (e_i^2 - 1) = O_P\left((m + \tilde{k} - 1)^{1/2}\right)$ (zákon velkých čísel - věta IV), jsou opět první dva členy dělené $g(m, \tilde{k} - 1, \gamma)$ omezeny v pravděpodobnosti. Zbylé dva členy upravíme na $(\tilde{k} - k^*)(\sigma_*^2 - \sigma_0^2)$, a protože

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{k} - k^*}{g(m, \tilde{k}, \gamma)} &= \frac{\max(m, k^*)}{\sqrt{m} \left(1 + \frac{\tilde{k}}{m}\right) \left(\frac{\tilde{k}}{m+k}\right)^\gamma} \sim \frac{\max(m, k^*)}{\sqrt{m} \left(\frac{m+\tilde{k}}{m}\right)} \sim \frac{m}{\sqrt{m} m + k^* + \max(m, k^*)} \sim \\ &\sim \frac{m}{\sqrt{m}} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

a $\sigma_0^2 \neq \sigma_*^2$, je věta dokázána. □

2.4.2 Důkaz vět 3 a 4

Důkaz věty 3 opět rozdělíme do několika lemmat. Pokud nebude uvedeno jinak, jsou všechny konvergence myšleny pro $m \rightarrow \infty$.

Lemma 5. *Pokud jsou splněny předpoklady věty 3, platí při $m \rightarrow \infty$*

$$\hat{\eta}_{m,i}^2 \rightarrow \eta^2 \sigma_0^4 \text{ s.j., pro všechny } i = m + 1, m + 2, \dots$$

Důkaz. Nejprve připomeneme definici

$$\hat{\eta}_{m,i}^2 = \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^4 - \left[\frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^2 \right]^2.$$

Pro zjednodušení zápisu budeme uvažovat $\hat{\eta}_{m,i+1}^2$

$$\hat{\eta}_{m,i+1}^2 = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (Y_j - \bar{Y}_i)^4 - \left[\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (Y_j - \bar{Y}_i)^2 \right]^2,$$

což vzhledem ke stabilitě modelu za platnosti nulové hypotézy můžeme přepsat jako

$$\sigma_0^4 \left\{ \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (e_j - \bar{e}_i)^4 - \left[\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (e_j - \bar{e}_i)^2 \right]^2 \right\}.$$

Tento výraz je až na záměnu i a m a příslušných indexů totožný s výrazem uvedeným v lemmatu 1, o kterém bylo dokázáno, že při $m \rightarrow \infty$ konverguje k $\eta^2 \sigma_0^4$ v pravděpodobnosti. V důkaze byl však použit silný zákon velkých čísel, a tedy byla dokázána i konvergence s.j. Uvažujeme vždy $i = m + 1, m + 2, \dots$, a proto $m \rightarrow \infty$ implikuje $i \rightarrow \infty$. Tedy dle lemmatu 1 je toto lemma dokázáno. □

Lemma 6. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 3. Označme $V(m, k) = \sum_{i=m+1}^{m+k} (\varepsilon_i - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j)$, kde $\varepsilon_i = e_i^2 - \mathbb{E} e_i^2 = e_i^2 - 1$ je definováno jako dříve. Pak platí*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[(Y_i - \bar{Y}_{i-1})^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^2 \right] - \sigma_0^2 V(m, k) \right|}{m^{1/2} h(k/m)} \xrightarrow{P} 0.$$

Důkaz. Nejprve se budeme snažit zjednodušit čitatele. Vzhledem k platnosti nulové hypotézy dostáváme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[(Y_i - \bar{Y}_{i-1})^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^2 \right] = \\ &= \sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[(e_i - \bar{e}_{i-1})^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (e_j - \bar{e}_{i-1})^2 \right] = \\ &= \sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[\left(e_i^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} e_j^2 \right) - 2\bar{e}_{i-1} \left(e_i - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} e_j \right) \right] = \\ &= \sigma_0^2 V(m, k) - 2\sigma_0^2 \sum_{i=m+1}^{m+k} \bar{e}_{i-1} (e_i - \bar{e}_{i-1}). \end{aligned}$$

Proto stačí vyšetřovat

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \bar{e}_{i-1} (e_i - \bar{e}_{i-1}) \right|}{m^{1/2} h(k/m)}.$$

Čitatele rozdělíme na dvě části: $\sum_{i=m+1}^{m+k} \bar{e}_{i-1}^2$ a $\sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1}$ a budeme se nyní zabývat první částí.

Ze zákona iterovaného logaritmu (věta VII) víme, že existuje $D > 0$ takové, že

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{j=1}^i e_j|}{\sqrt{i \log \log i}} \leq D \text{ s.j.,}$$

tedy

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \bar{e}_{i-1}^2 \frac{i-1}{\log \log i - 1} \leq D^2 \text{ s.j.,}$$

a proto

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^{m+k} \bar{e}_{i-1}^2 &= \sum_{i=m+1}^{m+k} O\left(\frac{\log \log (i-1)}{i-1}\right) = O\left(\log \log (m+k) \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i-1}\right) \sim \\ &\sim \log \log (m+k) \log \left(1 + \frac{k}{m}\right) \text{ s.j., při } m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pro $1 \leq k \leq 3m$ aproximujeme funkci h dle vlastnosti (i), tedy víme, že platí $h(k/m) > c_1(k/m)^\gamma$ pro nějaké $c_1 > 0$.

Proto

$$\max_{1 \leq k \leq 3m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \bar{e}_{i-1}^2 \right|}{m^{1/2} h(k/m)} \sim \max_{1 \leq k \leq 3m} \frac{\log \log (m+k) \log \left(1 + \frac{k}{m}\right)}{m^{1/2} (k/m)^\gamma} \rightarrow 0 \text{ s.j.}$$

Pro $k \geq 3m$ použijeme vlastnost (ii). Tedy

$$m^{1/2}h(k/m) \sim m^{1/2} [(k/m) \log \log(k/m)]^{1/2} = k^{1/2} [\log \log(k/m)]^{1/2} \geq c_2 k^{1/2} \sim k^{1/2},$$

a proto

$$\sup_{3m \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \bar{e}_{i-1}^2 \right|}{m^{1/2}h(k/m)} \sim \sup_{3m \leq k < \infty} \frac{\log \log(m+k) \log\left(1 + \frac{k}{m}\right)}{k^{1/2}} \rightarrow 0 \text{ s.j. .}$$

Pro druhou část použijeme Hájkovu-Rényiovu nerovnost (věta VI). Zřejmě platí $\mathbb{E}[e_i \bar{e}_{i-1} | e_1, \dots, e_{i-1}] = 0$, a proto je $\sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1}$ martingal.

Hraniční funkci budeme opět aproximovat v závislosti na velikosti k . Pro $1 \leq k \leq 3m$ tedy dostáváme

$$\begin{aligned} P \left(\max_{1 \leq k \leq 3m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1} \right|}{m^{1/2}(k/m)^\gamma} \geq A \right) &= P \left(\max_{1 \leq k \leq 3m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1} \right|}{k^\gamma} \geq Am^{1/2-\gamma} \right) \leq \\ &\leq (Am^{1/2-\gamma})^{-2} \sum_{i=m+1}^{4m} \frac{\mathbb{E}(e_i \bar{e}_{i-1})^2}{i^{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Díky nezávislosti náhodných chyb máme $\mathbb{E}(e_i \bar{e}_{i-1})^2 = \mathbb{E} e_i^2 \mathbb{E} \bar{e}_{i-1}^2 = \text{var } \bar{e}_{i-1} = \frac{1}{i-1}$. Opět použijeme aproximaci částečného součtu řady

$$\sum_{i=m+1}^{4m} \frac{1}{i^{2\gamma}} \frac{1}{i-1} \sim \sum_{i=m+1}^{4m} \frac{1}{i^{1+2\gamma}} \sim \int_{z=m}^{4m} \frac{1}{z^{1+2\gamma}} dz \sim \frac{1}{m^{2\gamma}} - \frac{1}{(4m)^{2\gamma}} \sim \frac{1}{m^{2\gamma}}$$

a tedy celkově

$$P \left(\max_{1 \leq k \leq 3m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1} \right|}{m^{1/2}h(k/m)} \geq A \right) \sim A^{-2} m^{-1+2\gamma-2\gamma} \rightarrow 0.$$

Nyní uvažujme situaci $k \geq 3m$.

$$\begin{aligned} P \left(\max_{3m \leq k \leq n} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1} \right|}{k^{1/2}} \geq A \right) &\leq A^{-2} \sum_{i=m+1}^{m+n} \frac{\mathbb{E}(e_i \bar{e}_{i-1})^2}{i} \leq \\ &\leq A^{-2} \sum_{i=m+1}^{m+n} \frac{1}{i(i-1)} \sim \sum_{i=m+1}^{m+n} \frac{1}{i^2} \sim \frac{1}{m} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Protože předchozí limita nezávisí na n , můžeme psát

$$P \left(\sup_{3m \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1} \right|}{m^{1/2}h(k/m)} \geq A \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\max_{3m \leq k \leq n} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} e_i \bar{e}_{i-1} \right|}{m^{1/2}h(k/m)} \geq A \right) \rightarrow 0,$$

což byla poslední část nutná k důkazu tohoto lemmatu. □

Lemma 7. *Pokud jsou splněny předpoklady věty 3, pak pro každé m existují dva nezávislé Wienerovy procesy $\{W_{1,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ a $\{W_{2,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ takové, že platí*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| V(k, m) - \eta \left\{ W_{1,m}(k) - \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} W_{1,m}(i-m) - \log(1 + (k/m)) W_{2,m}(m) \right\} \right|}{m^{1/2} h(k/m)} \xrightarrow{P} 0.$$

Důkaz. Budeme postupovat analogicky jako v [5].

$V(m, k)$ můžeme přepsat jako

$$V(k, m) = \sum_{i=m+1}^{m+k} \left(\varepsilon_i - \frac{1}{i-1} \sum_{j=m+1}^{i-1} \varepsilon_j \right) - \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \quad (2.11)$$

a dále víme, že pro každé m jsou

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j \text{ a } \left\{ \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i, 1 \leq k < \infty \right\} \text{ nezávislé.}$$

Protože předpokládáme, že $E|e_i|^{4+\delta} < \infty$ pro nějaké $\delta > 0$, pak existuje $\nu > 2$ takové, že $E|\varepsilon_i|^\nu < \infty$.

Z Komlós-Major-Tusnádyovy aproximace (důsledek II, věta III), víme, že pro každé m existují dva nezávislé Wienerovy procesy $\{W_{1,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ a $\{W_{2,m}(t), 0 \leq t < \infty\}$ takové, že

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \eta W_{1,m}(k) \right|}{k^{1/\nu}} = O_P(1) \quad (m \rightarrow \infty), \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i - \eta W_{2,m}(m) = o_P(m^{1/\nu}). \quad (2.13)$$

Hraniční funkci $m^{1/2} h(k/m)$ budeme v závislosti na hodnotě k aproximovat stejně jako v předchozím lemmatu.

S použitím (2.12) máme

$$\max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \eta W_{1,m}(k) \right|}{m^{1/2} (k/m)^\gamma} = O_P(1) \max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{k^{1/\nu}}{m^{1/2} (k/m)^\gamma},$$

a protože

$$\max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{k^{1/\nu}}{m^{1/2} (k/m)^\gamma} = \begin{cases} m^{\gamma-1/2} \max_{1 \leq k \leq 4m} k^{1/\nu-\gamma} = o(1) & \text{pro } 1/\nu \leq \gamma \\ m^{1/\nu-1/2} \max_{1 \leq k \leq 4m} \left(\frac{k}{m}\right)^{1/\nu-\gamma} = o(1) & \text{pro } 1/\nu > \gamma \end{cases} \quad (2.14)$$

dostáváme

$$\max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \eta W_{1,m}(k) \right|}{m^{1/2} (k/m)^\gamma} = o_P(1).$$

Podobně

$$\begin{aligned} \sup_{4m < k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \varepsilon_i - \eta W_{1,m}(k) \right|}{(k \log \log(k/m))^{1/2}} &= O_P(1) \sup_{4m < k < \infty} \frac{k^{1/\nu-1/2}}{\log \log(k/m)} = \\ &= O_P(1) \sup_{4m < k < \infty} k^{1/\nu-1/2} = O_P(1) m^{1/\nu-1/2} = o_P(1). \end{aligned}$$

Tímto je ukázána konvergence prvního členu první sumy v (2.11).

Nyní se zaměříme na druhý člen téže sumy. Zřejmě

$$\sum_{j=m+1}^{i-1} \varepsilon_j = \sum_{j=m+1}^{m+(i-1-m)} \varepsilon_j,$$

a proto

$$\sup_{m+1 \leq i-1 < \infty} \frac{\left| \sum_{j=m+1}^{m+(i-1-m)} \varepsilon_j - \eta W_{1,m}(i-1-m) \right|}{(i-1-m)^{1/\nu}} = O_P(1),$$

tedy

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i-1} \sum_{j=m+1}^{i-1} \varepsilon_j - \eta \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} W_{1,m}(i-m) &= O_P(1) \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} (i-m)^{1/\nu} = \\ &= O_P(1) k^{1/\nu} \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} = O_P(1) k^{1/\nu} \log(1+k/m), \end{aligned}$$

kde jsme opět využili aproximace částečného součtu harmonické řady. Použitím tohoto výsledku dostáváme

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i-1} \sum_{j=m+1}^{i-1} \varepsilon_j - \eta \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} W_{1,m}(i-m) \right|}{m^{1/2}(k/m)^\gamma} &= \\ = O_P(1) \max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{k^{1/\nu} \log(1+k/m)}{m^{1/2}(k/m)^\gamma} &= O_P(1) \max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{k^{1/\nu}}{m^{1/2}(k/m)^\gamma} = o_P(1), \end{aligned}$$

jak je ukázáno v (2.14). Také máme

$$\begin{aligned} \sup_{4m < k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i-1} \sum_{j=m+1}^{i-1} \varepsilon_j - \eta \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} W_{1,m}(i-m) \right|}{(k \log \log(k/m))^{1/2}} &= \\ = O_P(1) \sup_{4m < k < \infty} k^{1/\nu-1/2} \log(1+k/m) (\log \log(k/m))^{-1/2} &= o_P(1) \end{aligned}$$

Podobně s využitím (2.13) lze dokázat i konvergenci druhé sumy (2.11), neboli platnost

$$\max_{1 \leq k \leq 4m} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^m \varepsilon_j - \eta \log(1+k/m) W_{2,m}(m) \right|}{m^{1/2}(k/m)^\gamma} = o_P(1),$$

a také

$$\sup_{4m < k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^m \varepsilon_j - \eta \log(1+k/m) W_{2,m}(m) \right|}{(k \log \log(k/m))^{1/2}} = o_P(1),$$

což dokončuje důkaz tohoto lemmatu. \square

Lemma 8. *Pokud jsou splněny předpoklady věty 3, pak platí*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| W_{1,m}(k) - \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} W_{1,m}(i-m) - \log(1 + (k/m)) W_{2,m}(m) \right|}{m^{1/2} h(k/m)} \xrightarrow{D} \sup_{0 < t < \infty} \frac{|\Gamma(t)|}{h(t)},$$

kde

$$\Gamma(t) = W(t+1) - W(1) - \int_1^{t+1} \frac{1}{s} W(s) ds$$

a $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ značí Wienerův proces.

Důkaz. Je uveden v [5]. □

Lemma 9. *Při zachování označení z předchozího lemmatu platí*

$$\{\Gamma(t), 0 \leq t < \infty\} \stackrel{D}{=} \{W(t), 0 \leq t < \infty\}.$$

Důkaz. Jak je poznamenáno v [5], dá se ukázat, že $E\Gamma(t) = 0$ a také $E\Gamma(s)\Gamma(t) = \min(s, t)$. Tedy proces $\{\Gamma(t), 0 \leq t < \infty\}$ je Wienerův. □

Nyní s využitím předchozích lemmat snadno dokážeme větu 3.

Důkaz věty 3.

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{\eta_{m,i}} \left[(Y_i - \bar{Y}_{i-1})^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^2 \right] \right|}{m^{1/2} h(k/m)} \stackrel{1}{=} \\ & \stackrel{1}{=} \frac{1}{\eta \sigma_0^2} \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[(Y_i - \bar{Y}_{i-1})^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} (Y_j - \bar{Y}_{i-1})^2 \right] \right|}{m^{1/2} h(k/m)} + o_P(1) \stackrel{2}{=} \\ & \stackrel{2}{=} \frac{1}{\eta \sigma_0^2} \sigma_0^2 \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \left(\varepsilon_i - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j \right) \right|}{m^{1/2} h(k/m)} + o_P(1) \stackrel{3}{=} \\ & \stackrel{3}{=} \frac{1}{\eta \sigma_0^2} \sigma_0^2 \eta \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| W_{1,m}(k) - \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{i} W_{1,m}(i-m) - \log(1 + (k/m)) W_{2,m}(m) \right|}{m^{1/2} h(k/m)} + o_P(1) \\ & \xrightarrow{D} \sup_{0 < t < \infty} \frac{|\Gamma(t)|}{h(t)} \stackrel{D}{=} \sup_{0 < t < \infty} \frac{|W(t)|}{h(t)}. \end{aligned}$$

Rovnost 1 vyplývá z lemmatu 5, rovnost 2 z lemmatu 6, rovnost 3 z lemmatu 7 a poslední řádek se odkazuje na lemmata 8 a 9. □

Nyní uvedeme důkaz věty 4.

Důkaz věty 4. Nejprve dokážeme, že $\hat{\eta}_{m,i+1}^2$ je i za alternativní hypotézy omezeno. Vzhledem k tomu, že $\bar{Y}_i \rightarrow 0$ s.j. při $i \rightarrow \infty$, nám stačí uvažovat výraz

$$\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (e_j \sigma_j)^4 - \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i e_j^2 \sigma_j^2 \right)^2. \quad (2.15)$$

Spočítáme střední hodnotu, kde využijeme $E e_i^4 = \eta^2 + 1$, což vyplývá z $\text{var } e_i^2 = \eta^2$ a $E e_i^2 = 1$.

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (e_j \sigma_j)^4 - \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i e_j^2 \sigma_j^2 \right)^2 \right] &= \frac{\eta^2 + 1}{i} \sum_{j=1}^i \sigma_j^4 - \frac{\eta^2 + 1}{i^2} \sum_{j=1}^i \sigma_j^4 - \frac{1}{i^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^i \sigma_j^2 \sigma_l^2 = \\ &= \frac{\eta^2}{i} \sum_{j=1}^i \sigma_j^4 \left(1 - \frac{1}{i} \right) + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \sigma_j^4 - \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \sigma_j^2 \right)^2 < \eta^2 \sigma_*^4 + \sigma_*^4 - \sigma_0^4, \end{aligned}$$

pokud platí $\sigma_*^2 \geq \sigma_0^2$ a podobně pro druhý možný vztah rozptylů. Tedy dle silného zákona velkých čísel (ve tvaru pro veličiny s nestejnými rozptyly) je výraz (2.15) omezený s.j.

Dále budeme postupovat analogicky jako v důkazu věty 2. Položíme $\tilde{k} = k^* + m$. Dle (2.10) víme, že platí

$$\sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}-1} \bar{e}_{i-1}^2 \sim \log \log (m + \tilde{k}) \log \left(1 + \frac{\tilde{k}}{m} \right) \text{ s.j., při } m \rightarrow \infty,$$

a proto vzhledem k vlastnosti (ii) funkce h stačí uvažovat čitatele statistiky ve tvaru

$$\sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}-1} \left[e_i^2 \sigma_i^2 - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} e_j^2 \sigma_j^2 \right].$$

Dle věty 3 víme, že část před změnou modelu je po vydělení funkcí $g(m, \tilde{k} - 1)$ omezena v pravděpodobnosti. Proto budeme vyšetřovat pouze část po změně modelu, tj.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \left[e_i^2 \sigma_*^2 - \frac{1}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{m+k^*-1} e_j^2 \sigma_0^2 + \sum_{j=m+k^*}^{i-1} e_j^2 \sigma_*^2 \right) \right] = \\ &= \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \left[\sigma_*^2 (e_i^2 - 1) - \frac{1}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{m+k^*-1} \sigma_0^2 (e_j^2 - 1) + \sum_{j=m+k^*}^{i-1} \sigma_*^2 (e_j^2 - 1) \right) \right] + \\ &\quad + \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \left[\sigma_*^2 - \frac{1}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{m+k^*-1} \sigma_0^2 + \sum_{j=m+k^*}^{i-1} \sigma_*^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Náhodný člen dělený $g(m, \tilde{k} - 1)$ je zřejmě opět omezen v pravděpodobnosti, proto budeme upravovat deterministický člen.

$$\sigma_*^2 \left[\tilde{k} - k^* - \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \frac{i-1-m-k^*+1}{i-1} \right] - \sigma_0^2 (m+k^*-1) \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \frac{1}{i-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_*^2(m + k^* - 1) \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \frac{1}{i-1} - \sigma_0^2(m + k^* - 1) \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \frac{1}{i-1} = \\
&= (\sigma_*^2 - \sigma_0^2)(m + k^* - 1) \sum_{i=m+k^*}^{m+\tilde{k}-1} \frac{1}{i-1} \sim (\sigma_*^2 - \sigma_0^2)(m + k^* - 1) \log \frac{m + \tilde{k} - 1}{m + k^*} \sim \\
&\quad \sim (\sigma_*^2 - \sigma_0^2)(m + k^*).
\end{aligned}$$

Protože předpokládáme, že

$$\frac{m + k^*}{m^{1/2}h\left(\frac{m+k^*}{m}\right)} \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty$$

a $\sigma_0^2 \neq \sigma_*^2$ je důkaz věty dokončen.

□

Kapitola 3

Simulace k proceduře I

Nejprve uvedeme několik poznatků týkajících se obou testovacích procedur. Monitorování změn modelu založených na statistikách

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)} \quad \text{resp.} \quad \sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_{II}(m, k)|}{m^{1/2}h(k/m)}$$

bylo odvozeno s využitím asymptotiky, tj. při délce tréninkového období m jdoucího do nekonečna. Při reálném použití je však toto období vždy omezené. Proto v této a následující kapitole uvedeme výsledky simulační studie, kterou jsme provedli pro ohodnocení výkonnosti procedur při použití konečného tréninkového období.

V simulacích jsme použili tyto hodnoty klíčových parametrů:

- délka tréninkového období $m = 100, 500, 1000$,
- rozdělení chyb za nulové hypotézy: $N(0, 1)$, Laplaceovo rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem,
- hladina testu $\alpha = 0,05, 0,1$,
- konstanta hraniční funkce $\gamma = 0, 0,25, 0,45, 0,49$ (pro proceduru I).

Různé délky historického období umožní porovnat kvalitu testovací procedury, stejně tak budeme moci srovnat její účinnost pro normálně rozdělené veličiny s rozdělením s těžšími chvosty.

3.1 Nulová hypotéza

Nejprve se budeme zabývat chováním procedury za platnosti nulové hypotézy, to znamená za situace, kdy v modelu nedochází k žádné změně.

Popis simulací:

1. Pro každou kombinaci parametrů bylo nagenеровáno $20m$ veličin splňujících model a byly spočítány poměry $|Q_I(m, k)|/g(m, k, \gamma)$.
2. V časech rovných r násobku délky historického období m , kde r nabývalo hodnot $1/4, 1, 5, 9, 19$, se sledovalo, zda tento poměr překročil kritickou hodnotu (viz níže).

3. Kroky 1 a 2 byly 10 000 krát zopakovány.

Jako kritické hodnoty byly použity asymptotické kritické hodnoty $c(\alpha, \gamma)$. Jejich hodnoty jsou určeny na základě limitního rozdělení testové statistiky odvozeného ve větě 1, neboli, jak již bylo uvedeno, toho, že platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma} \leq c \right)$$

pro všechny $c > 0$, kde $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ je Wienerův proces. Proto k určení $c(\alpha, \gamma)$ můžeme použít vztah

$$P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma} \geq c(\alpha, \gamma) \right) = \alpha.$$

Bohužel je tato pravděpodobnost známa přesně pouze pro $\gamma = 0$. Z tohoto důvodu se musejí použít nasimulované kritické hodnoty. Ty jsou uvedeny např. v [5], odkud také přejímáme (mírně upravenou) tabulku 3.1. Uvádíme větší rozsah hodnot, než potřebujeme pro naše simulace.

$\gamma \setminus \alpha$	0,1	0,05	0,025	0,01
0,00	1,9497	2,2365	2,4948	2,7912
0,15	2,0273	2,2996	2,5475	2,8516
0,25	2,1060	2,3860	2,6396	2,9445
0,35	2,2433	2,5050	2,7394	3,0475
0,45	2,5437	2,7992	3,0144	3,3015
0,49	2,8259	3,0722	3,2944	3,5705

Tabulka 3.1: Simulované asymptotické kritické hodnoty $c(\alpha, \gamma)$. Převzato z [5].

Tyto hodnoty byly získány následujícím způsobem:

1. Funkcionál $\frac{|W(t)|}{t^\gamma}$ byl nagenеровán na 10 000 bodech intervalu $[0, 1]$.
2. Supremum bylo aproximováno maximem přes tyto body.
3. Kroky 1 a 2 byly 50 000 krát zopakovány a kritické hodnoty se určily jako příslušné kvantily maxima (zaokrouhlené na 4 desetinná místa).

Nyní se vrátíme zpět k námi provedené simulaci. Délku maximálního monitorovacího období $19m$ jsme pokládali za dostatečně dlouhou, aby se v ní projevilo překročení kritické hodnoty. Různé délky monitorování slouží k lepší ilustraci, ve kterém úseku monitorování nejčastěji dochází k zastavení.

V tabulce 3.2 jsou shrnuty empirické velikosti monitorovací procedury na 5% hladině, tj. je uvedeno procento procesů zastavených vždy do příslušného r násobku délky historického období m .

Nejprve okomentujeme výsledky dosažené s *normálním rozdělením*. Pro $\gamma = 0$ je hladina překročena pouze pro nejkratší tréninkové období $m = 100$. Nárůst podílu zamítnutých procesů je vcelku pozvolný. Podobná je i situace pro $\gamma = 0,25$, i když zde je již překročení hladiny pro $m = 100$ více než dvojnásobné. Oproti tomu pro $\gamma = 0,45$ či $\gamma = 0,49$ dostáváme již odlišné výsledky, a to i pro $m = 1000$. Dosažená hladina se

		$N(0, 1)$					Laplace				
γ	$m \setminus r$	1/4	1	5	9	19	1/4	1	5	9	19
0	100	0,08	1,76	6,97	7,94	8,97	1,14	5,94	13,36	15,06	16,26
	500	0,02	0,66	3,36	4,30	5,03	0,10	1,86	5,72	6,98	7,68
	1000	0,01	0,48	3,22	4,06	4,87	0,06	1,18	4,73	5,66	6,41
0,25	100	1,88	5,38	9,76	10,38	10,88	4,74	9,91	15,52	16,55	17,30
	500	0,48	2,18	5,01	5,58	6,06	1,93	4,74	8,35	9,14	9,64
	1000	0,26	1,76	4,10	4,62	5,00	1,04	2,90	5,96	6,48	6,84
0,45	100	7,26	10,10	12,50	12,77	12,94	9,95	14,82	18,03	18,76	19,22
	500	5,32	6,82	7,91	8,08	8,20	8,83	10,94	12,40	12,78	12,92
	1000	5,02	6,18	7,26	7,44	7,60	8,36	9,86	11,22	11,52	11,72
0,49	100	8,12	10,01	11,48	11,78	12,06	10,55	14,02	16,36	16,88	17,10
	500	7,03	7,92	8,50	8,66	8,67	10,16	11,68	12,90	13,06	13,20
	1000	6,40	7,38	8,02	8,08	8,11	9,48	10,47	11,20	11,24	11,42

Tabulka 3.2: Empirické velikosti pro 5% hladinu, tj. procenta zastavených procesů do času $m.r$.

		$N(0, 1)$					Laplace				
γ	$m \setminus r$	1/4	1	5	9	19	1/4	1	5	9	19
0	100	0,21	3,76	11,93	13,52	14,91	1,91	8,38	17,90	20,10	21,49
	500	0,02	1,95	7,38	8,81	10,18	0,36	3,47	9,55	11,26	12,31
	1000	0,02	1,43	7,48	9,03	10,46	0,10	2,37	8,13	9,62	10,70
0,25	100	3,42	8,64	14,56	15,71	16,43	6,70	13,61	20,39	21,60	22,64
	500	1,07	4,50	9,09	10,02	10,51	3,37	7,60	12,91	14,13	14,60
	1000	0,77	4,11	8,54	9,39	9,78	2,20	5,91	10,70	11,62	12,40
0,45	100	9,78	13,48	16,77	17,14	17,35	12,10	17,87	21,60	22,23	22,82
	500	7,68	10,26	12,23	12,35	12,64	11,41	14,28	16,30	16,73	17,18
	1000	7,73	10,06	11,81	12,08	12,43	10,96	13,55	16,20	16,61	16,86
0,49	100	10,29	13,19	15,08	15,50	15,71	12,46	16,33	19,22	19,72	20,03
	500	9,74	11,19	12,13	12,26	12,42	12,43	14,70	16,21	16,48	16,57
	1000	9,21	10,74	11,87	11,98	12,09	12,04	13,55	14,50	14,70	14,74

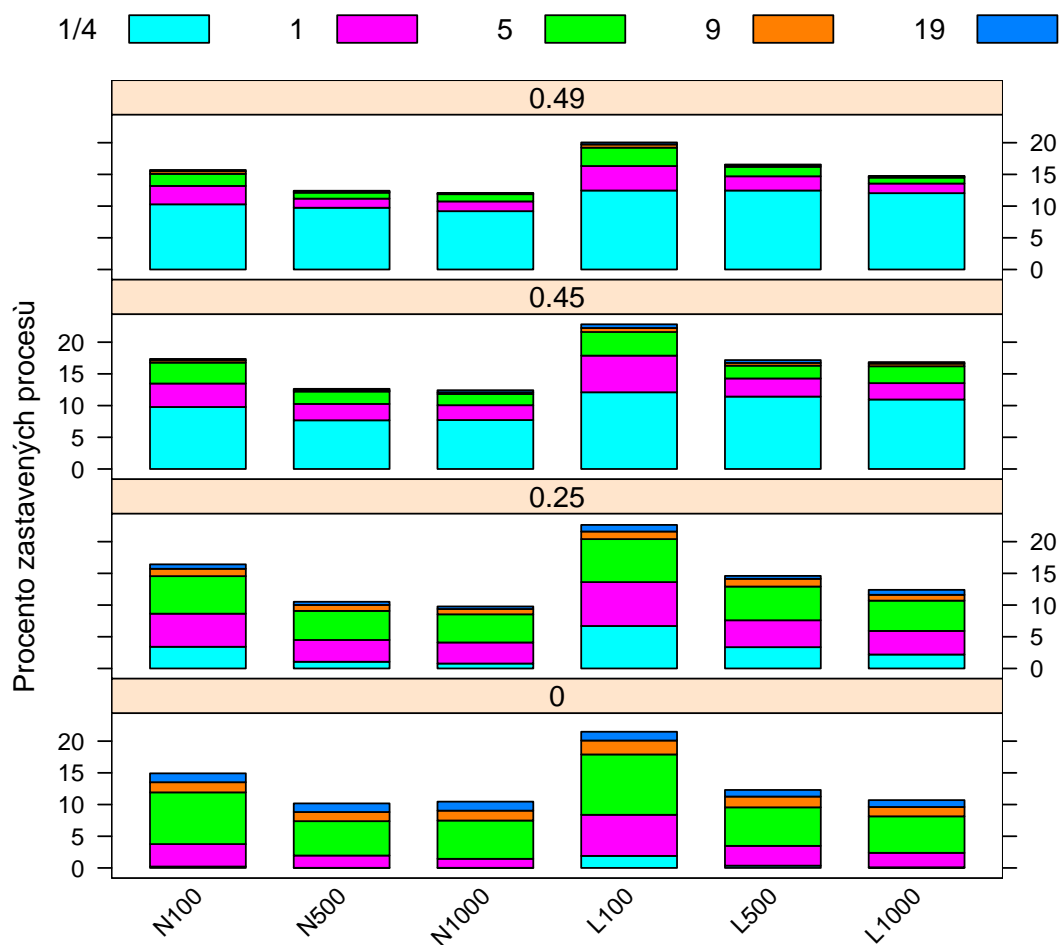
Tabulka 3.3: Empirické velikosti pro 10% hladinu, tj. procenta zastavených procesů do času $m.r$.

pohybuje kolem 8%. To je způsobeno pomalou konvergencí rozdělení naší monitorovací statistiky

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_I(m, k)|}{g(m, k, \gamma)} \quad \text{k} \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}$$

pro γ blízké 1/2. Použité tréninkové období je tedy příliš krátké. Bylo však vyzkoušeno, že ani $m = 2500$ nepřináší výraznější zlepšení. Navíc je předpoklad takto dlouhého stabilního období již příliš omezující. Pro tyto hodnoty γ dochází k valné většině zastavení na počátku monitorovacího období, což vyplývá z tvaru hraniční funkce $g(m, k, \gamma)$ (viz obrázek 2.1).

Pro *Laplaceovo rozdělení* je situace ještě výraznější. Pro γ blízké 1/2 překračuje dosažená hladina hladinu povolenou více než dvojnásobně. Je tedy zřejmé, že asymptot-



Obrázek 3.1: Empirické velikosti pro 10% hladinu, rozdělené dle doby monitorování (N100 označuje normální chyby a historické období délky 100)

tické kritické hodnoty jsou v tomto případě příliš nízké. Z tohoto důvodu je třeba získat kritické hodnoty vycházející z dané délky historického období. Než se budeme věnovat tomuto tématu uvedeme ještě výsledky týkající se 10% hladiny (tabulka 3.3). Ty se v hlavních rysech shodují s výsledky na 5% hladině. To především znamená:

- Pro normální rozdělení jsou dosažené hladiny blíže hladině požadované než pro rozdělení Laplaceovo.
- Procedury používající $\gamma = 0$ nebo 0,25 dávají příznivé výsledky, kdežto pro γ blízké 1/2 je požadovaná hladina překročena. Relativní překročení zde není tak výrazné jako u 5% hladiny.
- S rostoucí délkou historického období klesá dosažená hladina testu (blíží se hladině požadované).

Na obrázku 3.1 jsou znázorněny empirické velikosti pro 10% hladinu pro obě rozdělení chyb. V grafu jsou jasně vidět výsledky shrnuté v předcházejících bodech

$\gamma \backslash m$	$N(0, 1)$				Laplace			
	100	500	1000	∞	100	500	1000	∞
0	2,63	2,28	2,23	2,24	3,40	2,44	2,35	2,24
0,25	2,89	2,45	2,40	2,39	3,81	2,75	2,53	2,39
0,45	3,55	3,08	3,03	2,80	4,87	3,70	3,45	2,80
0,49	3,91	3,46	3,39	3,07	5,24	4,16	3,93	3,07

Tabulka 3.4: Kritické hodnoty pro 5% hladinu. Ve sloupcích s m jsou uvedeny $c_m(\alpha, \gamma)$, sloupec označený ∞ obsahuje $c(\alpha, \gamma)$.

$\gamma \backslash m$	$N(0, 1)$				Laplace			
	100	500	1000	∞	100	500	1000	∞
0	2,17	1,95	1,94	1,95	2,67	2,06	1,97	1,95
0,25	2,41	2,15	2,11	2,11	3,06	2,33	2,19	2,11
0,45	2,98	2,69	2,68	2,54	3,83	3,05	2,89	2,54
0,49	3,24	2,98	2,94	2,83	4,06	3,35	3,19	2,83

Tabulka 3.5: Kritické hodnoty pro 10% hladinu. Ve sloupcích s m jsou uvedeny $c_m(\alpha, \gamma)$, sloupec označený ∞ obsahuje $c(\alpha, \gamma)$.

a dále i průběh nárůstu falešných alarmů popsany dříve (pozdolný nárůst pro γ malé a nejčastější zastavení na počátku monitorování pro γ blízké 1/2).

Nyní se budeme věnovat již zmiňovaným kritickým hodnotám $c_m(\alpha, \gamma)$ vycházejících z dané délky historického období. Ty byly získány ze stejných simulací jako předchozí empirické hladiny, a to jako příslušné kvantily maxima naší testové statistiky. Výsledky jsou shrnuty v tabulce 3.4 pro 5% hladinu, respektive v tabulce 3.5 pro hladinu 10%.

Je vidět, že pro normální rozdělení a γ malé jsou asymptotické kritické hodnoty dobrým přiblížením již pro $m = 500$. Pro γ blízké 1/2 jsou však i pro $m = 1000$ příliš malé, odkud také vyplývá překročení předepsané hladiny pro tyto procedury. Pro Laplaceovo rozdělení je rozdíl opět výraznější. Zde již i pro γ malé jsou asymptotické hodnoty příliš nízké, přičemž s rostoucím γ se rozdíl ještě zvětšuje. K porovnání dvou předepsaných hladin můžeme říci, že rozdíl u 10% kritických hodnot je menší než u 5%.

3.2 Alternativní hypotéza

Nyní se zaměříme na situaci za platnosti alternativní hypotézy, tj. na situaci, kdy se model změní. K dříve uvažovaným různým hodnotám parametrů m , γ , α přibudou ještě čas změny k^* a rozptyl po změně σ_*^2 . Pro tyto parametry jsme volili hodnoty:

- $k^* = 5, 500, m/2, m, 2m$ a
- $\sigma_*^2 = 0,5, 1,5, 2, 4, 9$.

Různé volby k^* umožní porovnat brzkou změnu ($k^* < m$), změnu nastalou přibližně po stejné době jako trvalo tréninkové období ($k^* \sim m$) a pozdní změnu ($k^* > m$), kde čas

změny je relativní vzhledem k délce historického období m . Případně můžeme uvažovat i velmi brzkou změnu ($k^* = 5$) nezávislou na m .

Podobně velikost změny sahá od velmi malých hodnot až po hodnoty, kdy je model již naprosto odlišný. Do možných změn jsme zahrnuli i hodnotu rozptylu rovnou $1/2$, což by odpovídalo situaci, kdy se rozptyl veličin po změně zmenší. Tato možnost nás většinou v praxi příliš nezajímá, ale pro ilustraci testovací procedury může být zajímavá.

Alternativní hypotéza je tedy ve tvaru

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2, 1 \leq i < m + k^*, \quad \sigma_i^2 = \sigma_*^2, m + k^* \leq i < \infty, \quad (3.1)$$

s výše uvedenými hodnotami k^*, σ_*^2, m a rozptylem za nulové hypotézy $\sigma_0^2 = 1$.

Popis simulací:

1. Pro každou kombinaci parametrů bylo nagenеровáno vždy 5 000 veličin splňujících model. To znamená, že např. pro $m = 100$ byla délka monitorovacího období 4 900.
2. Sledovalo se, kdy poměr $|Q_I(m, k)|/g(m, k, \gamma)$ překročí kritickou hodnotu. Tento čas zastavení byl uchován. Pokud k překročení nedošlo, uložila se příslušná délka monitorovacího období.
3. Kroky 1 a 2 byly 2 500 krát zopakovány.

3.2.1 Normální rozdělení

Nyní se zaměříme na normálně rozdělené chyby. Protože při použití asymptotických hodnot není u tohoto rozdělení překročení předepsané hladiny tak zásadní, uvedeme nejprve výsledek s použitím těchto kritických hodnot.

V tabulce 3.6 jsou uvedeny charakteristiky časů zastavení τ zkonstruované jak na 5% tak i na 10% hladině. Zpoždění detekování změny tedy dostaneme jako rozdíl $\tau - k^*$. V horní části tabulky uvažujeme pozdní změnu ($k^* = 2m$), kdežto ve spodní části změnu velice brzkou ($k^* = 5$). S časem změny souvisí i volba konstanty γ (0 pro pozdní změnu a 0,45 pro změnu brzkou). O tomto tématu pojednáme dále v textu. Po blocích narůstá tréninkové období, kdežto v jednotlivých sloupcích jsou data pro různou velikost změny.

Jak lze očekávat, můžeme pozorovat zlepšování rychlosti detekce změny s narůstající velikostí změny rozptylu. Avšak od určité velikosti změny již není zlepšení tak výrazné (rozdíl charakteristik pro $\sigma_*^2 = 4$ a $\sigma_*^2 = 9$ není veliký).

U některých řad nedošlo k detekování změny vůbec (maximum času zastavení je rovno příslušné délce monitorovacího období $5\,000 - m$). To se týká zejména nejkratšího tréninkového období a nepřilíš velikých změn velikosti. V těchto případech je také vidět značná nesymetrie rozdělení časů zastavení, zřejmá z velkého odstupu průměru od mediánu. To je právě způsobeno již zmiňovaným častým nezastavením testovací procedury. Nesymetrie rozdělení však není způsobena pouze přítomností několika velmi velkých (odlehklých) hodnot, nýbrž jak ukazuje poloha mediánu vůči kvartilům, rozdělení je celkově sešikmeno. Také si můžeme povšimnout, že u nejkratšího historického období je pokles zpoždění detekce způsobený větší velikostí změny nejstrmější. Procedury

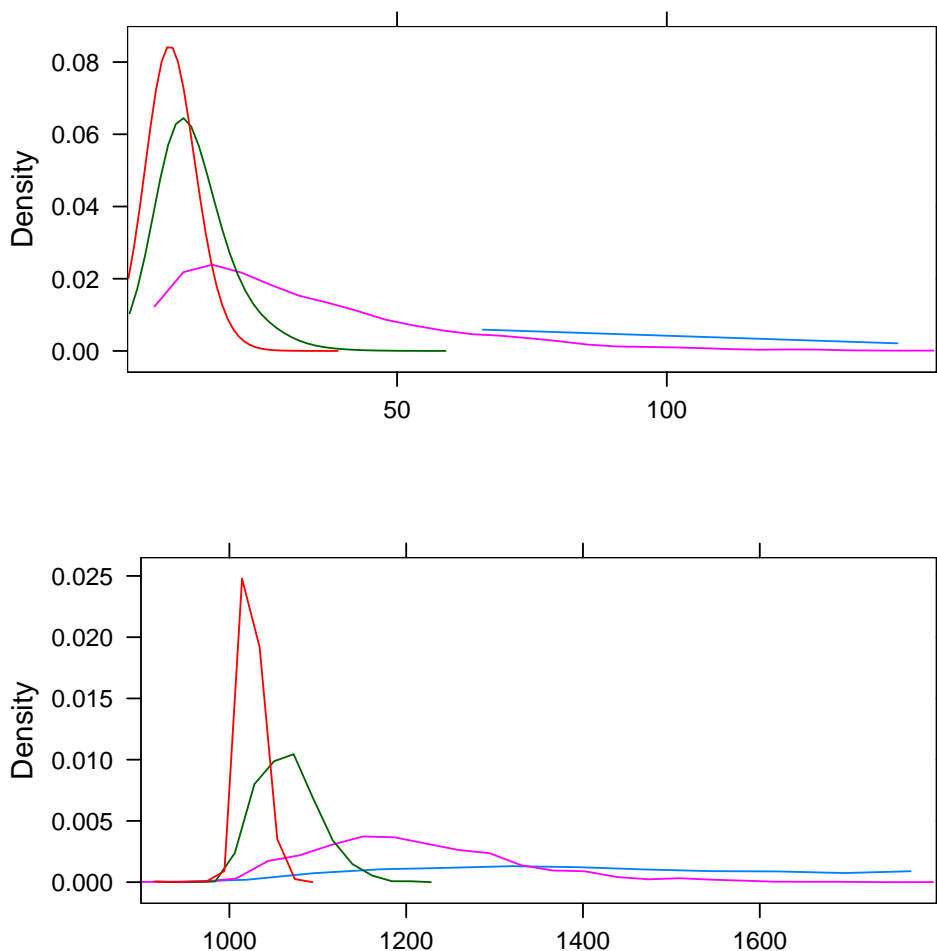
		5 %					10 %				
$\sqrt{\sigma_*^2}$		0,5	1,5	2	4	9	0,5	1,5	2	4	9
$m = 100$	Min.	6	22	10	10	7	6	19	7	5	7
	1st Qu.	485	344	264	220	207	386	304	249	216	205
$k^* = 200$	Median	704	557	319	234	212	538	460	296	228	210
	Mean	1069	1275	360	232	209	713	1003	323	224	204
	3rd Qu.	1169	1224	405	249	218	806	852	367	244	216
	Max.	4900	4900	4900	381	266	4900	4900	4900	367	249
$m = 500$	Min.	244	140	193	253	169	166	95	73	179	95
	1st Qu.	1419	1337	1151	1049	1018	1319	1260	1119	1039	1015
$k^* = 1000$	Median	1602	1536	1233	1071	1028	1488	1441	1196	1062	1024
	Mean	1616	1629	1244	1069	1022	1481	1501	1191	1046	1008
	3rd Qu.	1800	1824	1333	1097	1038	1662	1694	1286	1086	1034
	Max.	2935	4500	2029	1231	1092	2620	4079	1790	1196	1077
$m = 1000$	Min.	297	480	313	424	541	239	327	269	332	351
	1st Qu.	2543	2458	2218	2068	2026	2419	2353	2172	2055	2021
$k^* = 2000$	Median	2761	2708	2323	2101	2037	2626	2590	2274	2086	2032
	Mean	2760	2748	2327	2093	2034	2590	2601	2259	2059	2007
	3rd Qu.	2982	3010	2438	2134	2049	2832	2857	2385	2118	2044
	Max.	3879	4000	3116	2298	2102	3654	4000	2958	2261	2099
$m = 100$	Min.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1st Qu.	102	25	13	8	6	71	20	12	7	6
$k^* = 5$	Median	190	72	27	10	8	124	55	23	10	7
	Mean	912	859	47	12	8	518	641	38	11	8
	3rd Qu.	501	330	50	15	9	254	197	43	14	9
	Max.	4900	4900	4900	69	25	4900	4900	4900	69	25
$m = 500$	Min.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1st Qu.	73	36	15	8	6	59	29	14	8	6
$k^* = 5$	Median	93	73	27	11	8	77	60	24	11	7
	Mean	98	106	34	12	8	81	88	30	12	8
	3rd Qu.	118	134	45	15	10	99	114	41	15	9
	Max.	295	1569	209	45	24	257	1309	179	45	24
$m = 1000$	Min.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1st Qu.	75	36	16	8	6	61	28	15	8	6
$k^* = 5$	Median	93	76	29	12	8	77	64	26	11	8
	Mean	96	98	35	13	8	80	83	31	12	8
	3rd Qu.	115	135	48	16	10	96	116	42	15	9
	Max.	302	643	206	55	27	284	539	195	54	27

Tabulka 3.6: Vliv velikosti změny (a délky tréninkového období) na čas zastavení τ . Pro $k^* = 2m$ je použito $\gamma = 0$, pro $k^* = 5$ je $\gamma = 0,45$.

s delším tréninkovým obdobím ($m = 500, 1000$) jsou schopny detekovat i menší změny (zdvojnásobení rozptylu) s rozumným zpožděním.

Na obrázku 3.2 jsou znázorněny hustoty časů zastavení pro různé alternativy velikosti změny. S narůstající velikostí je patrný přesun masы hustoty blíže ke skutečnému bodu změny. Také je vidět zmiňovaná nesymetrie rozdělení.

Výše popsané výsledky platí jak pro pozdní změnu, tak i pro změnu brzkou. Procedury používající 10% kritické hodnoty dávají samozřejmě lepší výsledky (mají kratší



Obrázek 3.2: Odhad hustot časů zastavení pro různé velikosti změny. Tréninkové období délky 500. Horní obrázek je pro $k^* = 5$, spodní pro $k^* = 1000$. Červeně je nakreslena hustota pro $\sigma_*^2 = 9$, zeleně pro 4, fialově pro 2 a modře pro 1,5.

zpoždění detekce), avšak tento rozdíl s narůstající velikostí změny klesá.

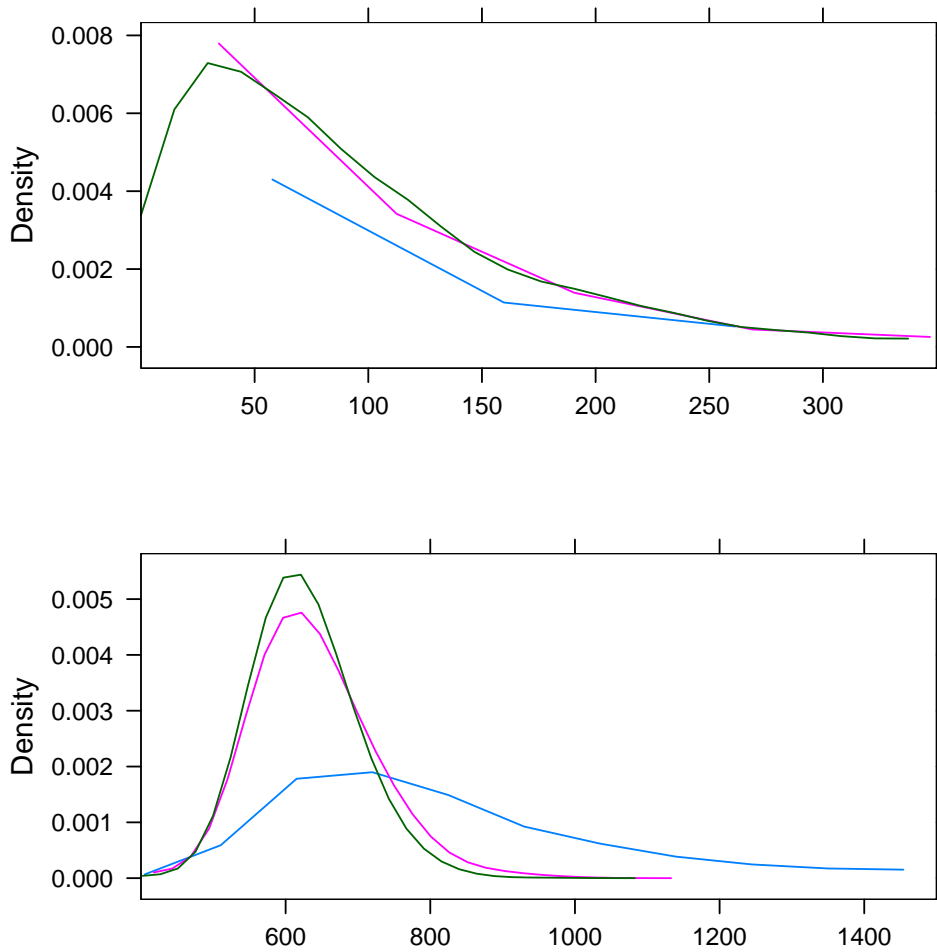
Nyní se budeme věnovat vlivu délky tréninkového období na rychlost odhalení změny. V tabulce 3.7 opět uvádíme výsledky jak pro 5% hladinu, tak i pro 10%. Ve sloupcích postupně narůstá délka tréninkového období, v blocích velikost změny, kde oproti tabulce 3.6 již neuvádíme extrémní hodnoty. V horní polovině uvažujeme brzkou změnu, a proto používáme γ blízké 1/2. V dolní polovině uvažujeme změnu po 500 pozorováních, která je vzhledem k jednotlivým hodnotám m jak brzká, tak i pozdní, proto odpovídající γ volíme 0,25.

Zvýšení délky tréninkového období ze 100 na 500 se projeví výrazným snížením zpoždění odhalení změny, a to zejména, pokud je změna rozptylu malá. K tomuto snížení dochází i přesto, že výkonnost testu pro $m = 100$ je nadhodnocena, neboť dosahuje vyšší pravděpodobnosti falešného alarmu než je povoleno. Další prodloužení tréninkového období na 1000 již takto velký vliv nemá, pouze při malé změně dochází k omezení extrémních hodnot času zastavení, což se projeví i snížením průměrné hodnoty.

		5 %			10 %			
\m		100	500	1000	100	500	1000	
$\sigma_*^2 = 1,5$	Min.	1	1	1	1	1	1	
	1st Qu.	25	36	36	20	29	28	
	$k^* = 5$	Median	72	73	76	55	60	64
		Mean	859	106	98	641	88	83
		3rd Qu.	330	134	135	197	114	116
		Max.	4900	1569	643	4900	1309	539
$\sigma_*^2 = 2$	Min.	1	1	1	1	1	1	
	1st Qu.	13	15	16	12	14	15	
	$k^* = 5$	Median	27	27	29	23	24	26
		Mean	47	34	35	38	30	31
		3rd Qu.	50	45	48	43	41	42
		Max.	4900	209	206	4900	179	195
$\sigma_*^2 = 4$	Min.	1	1	1	1	1	1	
	1st Qu.	8	8	8	7	8	8	
	$k^* = 5$	Median	10	11	12	10	11	11
		Mean	12	12	13	11	12	12
		3rd Qu.	15	15	16	14	15	15
		Max.	69	45	55	69	45	54
$\sigma_*^2 = 1,5$	Min.	1	43	134	1	1	56	
	1st Qu.	768	708	703	676	665	668	
	$k^* = 500$	Median	1233	846	804	1034	783	761
		Mean	2035	897	832	1716	819	779
		3rd Qu.	3396	1029	936	2231	944	875
		Max.	4900	4096	1979	4900	3825	1880
$\sigma_*^2 = 2$	Min.	1	1	246	1	1	48	
	1st Qu.	610	590	595	576	574	578	
	$k^* = 500$	Median	738	639	638	691	620	619
		Mean	815	645	642	712	615	620
		3rd Qu.	928	700	680	849	676	660
		Max.	4900	1066	953	4900	986	933
$\sigma_*^2 = 4$	Min.	1	13	14	1	2	14	
	1st Qu.	535	530	530	526	525	525	
	$k^* = 500$	Median	563	545	542	554	539	537
		Mean	537	542	542	508	531	534
		3rd Qu.	599	562	556	587	556	550
		Max.	827	638	631	799	628	625

Tabulka 3.7: Vliv délky tréninkového období na čas zastavení τ .
Pro $k^* = 5$ je použito $\gamma = 0,45$, pro $k^* = 500$ je $\gamma = 0,25$.

Na obrázku 3.3 jsou znázorněny hustoty časů zastavení pro různé délky tréninkového období při dvou různých okamžicích změny. Byla volena malá velikost



Obrázek 3.3: Odhad hustot časů zastavení pro různé délky tréninkového období. Horní obrázek je pro $k^* = 5$ a $\sigma_*^2 = 1,5$, spodní pro $k^* = 500$ a $\sigma_*^2 = 2$. Zeleně je nakreslena hustota pro $m = 1000$, fialově pro 500 a modře pro 100.

změny ($\sigma_*^2 = 1,5$ resp. $\sigma_*^2 = 2$), neboť u nich je rozdíl mezi tréninkovými období nejvýraznější. V grafu je patrný vcelku podobný průběh hustot pro $m = 500$ a $m = 1000$, který se odlišuje od hustoty pro $m = 100$, což odpovídá předchozímu popisu.

V tabulce 3.8 jsou uvedeny hodnoty τ/k^* , kde skutečný čas změny je $k^* = 2m$, tedy poměr k^*/m je konstantní pro všechny m . Je vidět jak poměr τ/k^* s rostoucím m klesá, pro malou hodnotu změny velmi výrazně. Opět je větší pokles mezi $m = 100$ a $m = 500$, než mezi $m = 500$ a $m = 1000$. Můžeme si povšimnout i nárůstu v řádcích s minimem, což znamená, že při delším historickém období nedochází k tak brzkým falešným alarmům. Při zkoumání absolutního zpoždění je však situace trochu jiná, jak vypovídá tabulka 3.9.

Ta opět ukazuje vliv délky tréninkového období při různých skutečných bodech změny a velikostech změny. Výsledky odpovídají 10% hladině. Oproti předcházejícím tabulkám jsou zde uvedeny přímo zpoždění detekce změny. Při velmi brzké změně

		5%			10%		
\m		100	500	1000	100	500	1000
$\sigma_*^2 = 1,5$	Min.	0,11	0,14	0,24	0,10	0,10	0,16
	1st Qu.	1,72	1,34	1,23	1,52	1,26	1,18
	Median	2,79	1,54	1,35	2,30	1,44	1,29
	Mean	6,38	1,63	1,37	5,01	1,50	1,30
	3rd Qu.	6,12	1,82	1,50	4,26	1,69	1,43
	Max.	24,50	4,50	2,00	24,50	4,08	2,00
$\sigma_*^2 = 2$	Min.	0,05	0,19	0,16	0,04	0,07	0,13
	1st Qu.	1,32	1,15	1,11	1,25	1,12	1,09
	Median	1,59	1,23	1,16	1,48	1,20	1,14
	Mean	1,80	1,24	1,16	1,61	1,19	1,13
	3rd Qu.	2,02	1,33	1,22	1,83	1,29	1,19
	Max.	24,50	2,03	1,56	24,50	1,79	1,48
$\sigma_*^2 = 4$	Min.	0,05	0,25	0,21	0,03	0,18	0,17
	1st Qu.	1,10	1,05	1,03	1,08	1,04	1,03
	Median	1,17	1,07	1,05	1,14	1,06	1,04
	Mean	1,16	1,07	1,05	1,12	1,05	1,03
	3rd Qu.	1,25	1,10	1,07	1,22	1,09	1,06
	Max.	1,91	1,23	1,15	1,83	1,20	1,13

Tabulka 3.8: Vliv délky tréninkového období na poměr τ/k^* , kde $k^* = 2m$ a bylo použito $\gamma = 0$.

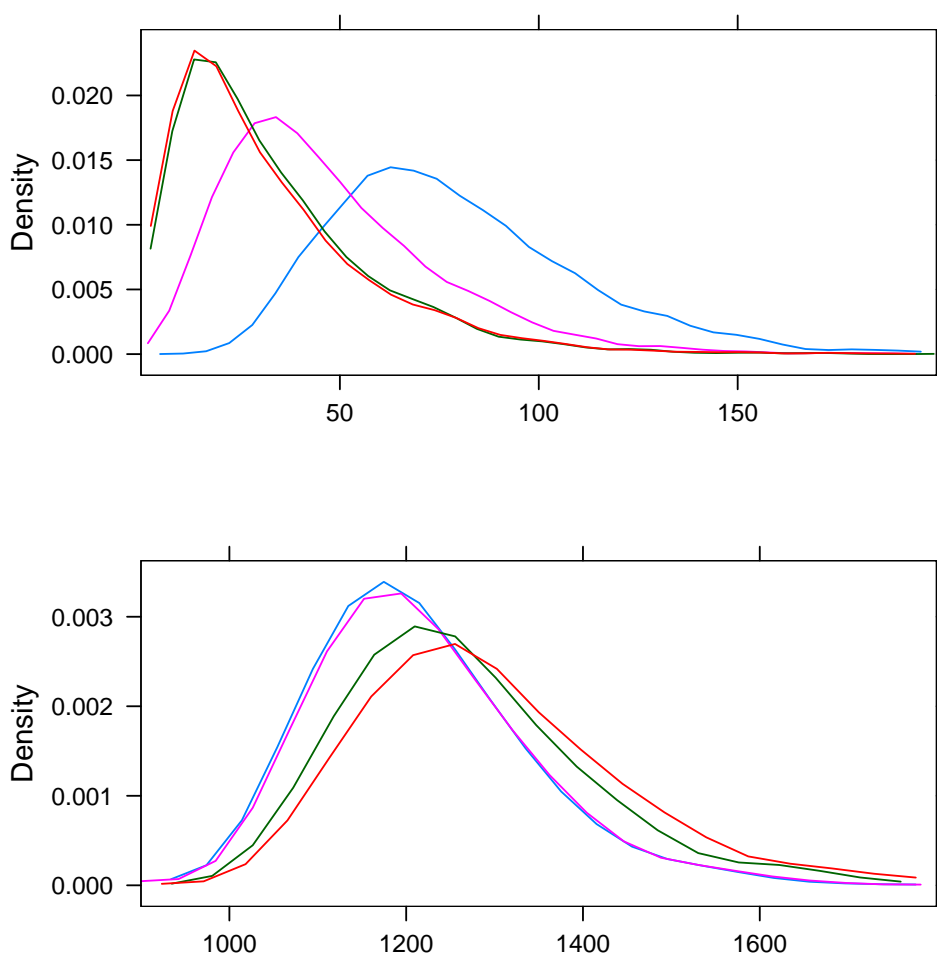
($k^* = 5$) jsou mediány zpoždění pro všechny délky historického období srovnatelné, přičemž pro nejkratší období je medián zpoždění dokonce nejmenší. U průměrů se však výrazně projevuje zlepšení výkonnosti procedury při delším tréninkovém období, zejména, pokud je velikost změny velmi malá. Pro $k^* = 500$ je toto zlepšení jasně

		medián			průměr		
$m \setminus \sigma_*^2$		1,5	2	4	1,5	2	4
$k^* = 5$	100	50	18	5	636	33	6
	500	55	19	6	83	25	7
	1000	59	21	6	78	26	7
$k^* = 500$	100	534	191	54	1216	212	8
	500	283	120	39	319	115	31
	1000	261	119	37	279	120	34
$k^* = 2m$	100	260	96	28	803	123	24
	500	441	196	62	501	191	46
	1000	590	274	86	601	259	59

Tabulka 3.9: Medián a průměr zpoždění detekce změny. Pro $k^* = 5$ je použito $\gamma = 0,45$, pro $k^* = 500$ je $\gamma = 0,25$ a pro $k^* = 2m$ je $\gamma = 0$.

patrné i u mediánů, a to i pro větší změny. Celkově je zpoždění výrazněji delší než u brzké změny. Toto je typické chování procedur založených na kumulativních součtech. S tím souvisí i poslední blok tabulky, kde je čas změny konstantním násobkem délky historického období, tj. nabývá hodnoty $k^* = 200$ pro $m = 100$ až $k^* = 2000$ pro $m = 1000$. Přestože delší tréninkové období způsobuje rychlejší detekci, je tento přínos přebit výrazněji pozdějším okamžikem změny.

V tabulce 3.10 je ilustrován vliv γ v souvislosti s časem změny k^* . Pokud uvažujeme velmi brzkou změnu ($k^* = 5$), dostáváme nejlepší výsledky pro $\gamma = 0,45$ či $\gamma = 0,49$, což je v souladu s naším očekáváním. Při malé změně a krátkém historickém období je vůbec nejvhodnější použít $\gamma = 0,45$. Pro relativně brzkou změnu nastalou v $m/2$ je vhodná opět $0,45$, avšak již také $0,25$, která pro malé změny dokonce odhaluje porušení modelu rychleji. Pokud uvažujeme $k^* \sim m$ dostáváme nejlepší výsledky pro $0,25$, jen



Obrázek 3.4: Odhad hustot časů zastavení pro různé velikosti konstanty γ při $m = 500$ a $\sigma_*^2 = 2$. Horní obrázek je pro $k^* = 5$, spodní pro $k^* = 1000$. Červeně je nakreslena hustota pro $\gamma = 0,49$, zeleně pro $0,45$, fialově pro $0,25$ a modře pro $\gamma = 0$.

		5%				10%			
\(\gamma\)		0	0,25	0,45	0,49	0	0,25	0,45	0,49
$k^* = 5$	1st Qu.	25	12	8	8	22	11	8	7
	Median	31	17	11	11	28	15	11	10
	Mean	32	18	12	12	29	17	12	11
	3rd Qu.	39	22	15	15	35	21	15	14
	Max.	87	61	45	45	83	54	45	45
$k^* = 250$	1st Qu.	276	271	268	269	272	267	265	266
	Median	287	280	278	280	282	277	275	277
	Mean	289	281	267	265	284	276	258	256
	3rd Qu.	299	292	291	292	294	288	288	289
	Max.	358	353	353	353	353	345	345	348
$k^* = 500$	1st Qu.	534	529	529	531	528	524	523	525
	Median	549	544	545	548	542	539	540	543
	Mean	550	541	518	513	542	529	495	491
	3rd Qu.	566	561	562	565	558	554	556	560
	Max.	645	636	641	648	626	623	626	640
$k^* = 1000$	1st Qu.	1049	1047	1049	1054	1039	1037	1039	1045
	Median	1071	1069	1074	1081	1062	1059	1065	1072
	Mean	1069	1054	1012	1008	1046	1022	966	970
	3rd Qu.	1097	1094	1101	1109	1086	1084	1092	1099
	Max.	1231	1227	1236	1242	1196	1196	1199	1236
$k^* = 5$	1st Qu.	66	42	25	26	53	32	20	20
	Median	124	89	72	81	94	67	55	64
	Mean	650	663	859	1051	455	470	641	838
	3rd Qu.	317	281	330	556	210	176	197	301
	Max.	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900
$k^* = 50$	1st Qu.	130	114	109	120	110	97	92	102
	Median	226	208	237	298	182	170	186	224
	Mean	898	954	1244	1497	662	718	1001	1236
	3rd Qu.	539	553	1084	4030	377	379	571	1057
	Max.	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900
$k^* = 100$	1st Qu.	200	190	187	201	177	165	162	177
	Median	337	332	401	498	274	268	317	385
	Mean	1062	1139	1485	1768	804	867	1206	1481
	3rd Qu.	793	902	2177	4900	548	582	1009	2228
	Max.	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900
$k^* = 200$	1st Qu.	344	338	354	387	304	298	306	332
	Median	557	571	708	879	460	468	564	687
	Mean	1275	1378	1730	1982	1003	1080	1443	1712
	3rd Qu.	1224	1459	3878	4900	852	928	1693	3838
	Max.	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900
$k^* = 500$	1st Qu.	756	768	832	910	674	676	724	807
	Median	1156	1233	1554	1991	990	1034	1254	1536
	Mean	1944	2035	2372	2629	1609	1716	2058	2350
	3rd Qu.	2758	3396	4900	4900	1909	2231	4058	4900
	Max.	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900	4900

Tabulka 3.10: Normálně rozdělené chyby. Vliv γ na čas zastavení τ . Horní polovina tabulky je pro $m = 500$, $\sigma_*^2 = 4$, dolní pro $m = 100$, $\sigma_*^2 = 1,5$.

o málo horší výsledky jsou pro $\gamma = 0$. Pro $k^* = 2m$ je situace mezi těmito hodnotami obrácená. Pro $k^* = 500$ a $m = 100$ je již převaha $\gamma = 0$ jasně patrná. Opět není patrný žádný kvalitativní rozdíl mezi procedurami používajícími 5% a 10% kritické hodnoty.

Na obrázku 3.4 jsou znázorněny hustoty časů zastavení pro různé velikosti konstanty γ . Byla volena střední délka tréninkového období $m = 500$ a menší velikost změny $\sigma_*^2 = 2$, vše na 10% hladině. Horní graf znázorňuje brzkou změnu. Můžeme zde vidět vlastnosti procedury popsané dříve, tj. nejlepší (a takřka srovnatelné) výsledky dávají procedury s γ rovným 0,45 nebo 0,49. Nejhorší naopak s $\gamma = 0$. Spodní graf znázorňuje pozdní změnu, kdy nejlepších výsledků dosahují naopak procedury s γ rovným 0 či 0,25.

3.2.2 Porovnání kritických hodnot

Nyní se budeme věnovat porovnání procedur používajících asymptotických kritických hodnot $c(\alpha, \gamma)$, respektive kritických hodnot pro dané m $c_m(\alpha, \gamma)$. Tyto hodnoty získané ze simulací jsou uvedeny v tabulkách 3.4 a 3.5 pro 5% resp. 10% hladinu testu. Budeme opět sledovat pouze normální rozdělení.

Časy zastavení τ uvedené v tabulce 3.11 přesně odpovídají vztahům mezi kritickými hodnotami. Pro γ malé se dosažené výsledky výrazně liší pouze pro nejkratší tréninkové období. Pro γ blízké 1/2 se již liší pro libovolnou délku historického období, stejně jako se odlišovaly příslušné kritické hodnoty. Protože pro dané m jsou kritické hodnoty $c_m(\alpha, \gamma)$ větší než asymptotické kritické hodnoty $c(\alpha, \gamma)$, dosahují procedury je používající horších výsledků. Naproti tomu však mohou zaručit dodržení dané hladiny.

V tabulce 3.12 je uvedeno stejné srovnání pro 10% kritické hodnoty. Zde je rozdíl časů zastavení menší, stejně jako byl menší rozdíl mezi kritickými hodnotami pro tuto hladinu.

3.2.3 Laplaceovo rozdělení

Nyní se zaměříme na výsledky procedur při použití dat majících Laplaceovo rozdělení.

Nebudeme uvádět výsledky procedur užívajících asymptotických kritických hodnot, protože při jejich použití empirické hladiny testu více než dvojnásobně překročily povolenou hladinu (viz tabulka 3.2), a to i pro dlouhé historické období $m = 1000$. Proto uvedeme pouze výsledky získané za použití kritických hodnot $c_m(\alpha, \gamma)$ pro danou délku tréninkového období m , neboť u nich je zaručeno dodržení požadovaných hladin.

Hlavní rysy výsledků se v zásadě shodují s těmi obdrženými pro normální rozdělení, proto nebudeme uvádět tak detailní rozbor. V tabulce 3.13 se zaměříme na srovnání obou rozdělení náhodných chyb. Aby srovnání bylo relevantní, jsou výsledky pro normální rozdělení také získány s použitím $c_m(\alpha, \gamma)$.

V horní části tabulky uvažujeme pozdní změnu, v dolní části změnu velmi brzkou, obě s použitím nejvhodnější hodnoty konstanty γ (tzn. 0 resp. 0,45 jak bylo zdůvodněno dříve). V jednotlivých sloupcích se mění velikost změny, po blocích délka historického období. Jsou uvedeny hodnoty pro 10% hladinu. Z tabulky je zřejmé zhoršení výkonu testovací procedury pro data s Laplaceovým rozdělením chyb. Pro malé hodnoty změny rozptylu a krátké historické období je toto zhoršení velmi výrazné. V některých případech

		$c(0,05;\gamma)$			$c_m(0,05;\gamma)$		
		100	500	1000	100	500	1000
	$\backslash m$						
$\gamma = 0$	Min.	10	193	313	21	106	428
	1st Qu.	264	1151	2218	281	1159	2220
$k^* = 2m$	Median	319	1233	2323	348	1237	2325
	Mean	360	1244	2327	421	1245	2317
	3rd Qu.	405	1333	2438	460	1328	2435
	Max.	4900	2029	3116	4900	1938	3064
$\gamma = 0,25$	Min.	1	33	142	1	17	43
	1st Qu.	138	593	1135	152	597	1135
$k^* = m$	Median	173	643	1199	197	646	1195
	Mean	208	647	1199	259	651	1195
	3rd Qu.	229	701	1267	269	707	1265
	Max.	4900	1104	1638	4900	1104	1621
$\gamma = 0,45$	Min.	1	1	1	1	1	1
	1st Qu.	13	15	16	19	18	19
$k^* = 5$	Median	27	27	29	40	31	34
	Mean	47	34	35	104	39	39
	3rd Qu.	50	45	48	77	52	53
	Max.	4900	209	206	4900	242	233

Tabulka 3.11: Normálně rozdělené chyby. Porovnání asymptotických kritických hodnot a hodnot pro dané m pro 5% hladinu. Jsou uvedeny časy zastavení τ .

		$c(0,1;\gamma)$			$c_m(0,1;\gamma)$		
		100	500	1000	100	500	1000
	$\backslash m$						
$\gamma = 0$	Min.	7	73	269	15	91	296
	1st Qu.	249	1119	2172	256	1122	2174
$k^* = 2m$	Median	296	1196	2274	312	1192	2276
	Mean	323	1191	2259	353	1187	2241
	3rd Qu.	367	1286	2385	398	1277	2379
	Max.	4900	1790	2958	4900	1817	2974
$\gamma = 0,25$	Min.	1	9	6	1	10	25
	1st Qu.	130	576	1110	137	578	1111
$k^* = m$	Median	160	621	1169	173	624	1167
	Mean	182	617	1161	207	620	1153
	3rd Qu.	209	677	1236	226	680	1234
	Max.	3603	1015	1605	4900	1045	1567
$\gamma = 0,45$	Min.	1	1	1	1	1	1
	1st Qu.	12	14	15	15	15	16
$k^* = 5$	Median	23	24	26	30	26	27
	Mean	38	30	31	61	33	33
	3rd Qu.	43	41	42	56	44	45
	Max.	4900	179	195	4900	239	215

Tabulka 3.12: Normálně rozdělené chyby. Porovnání asymptotických kritických hodnot a hodnot pro dané m pro 10% hladinu. Jsou uvedeny časy zastavení τ .

		Laplace					normální					
$\sqrt{\sigma_*^2}$		0.5	1.5	2	4	9	0.5	1.5	2	4	9	
$m = 100$	Min.	5	4	2	2	16	12	12	15	16	11	
	1st Qu.	4815	474	312	229	211	484	342	256	218	207	
	$k^* = 200$	Median	4900	2410	473	258	222	678	535	312	231	212
		Mean	4052	2723	1178	282	221	996	1252	353	230	208
		3rd Qu.	4900	4900	1004	304	236	1046	1180	398	248	218
Max.	4900	4900	4900	4900	427	4900	4900	4900	377	263		
$m = 500$	Min.	60	34	73	37	49	88	133	91	156	133	
	1st Qu.	1657	1442	1189	1058	1021	1327	1266	1122	1037	1014	
	$k^* = 1000$	Median	1996	1905	1355	1101	1039	1486	1452	1192	1062	1023
		Mean	2045	2242	1411	1086	1012	1489	1508	1187	1046	1008
		3rd Qu.	2370	2787	1584	1156	1059	1670	1700	1277	1086	1033
Max.	4500	4500	4500	1510	1164	2420	3784	1817	1213	1079		
$m = 1000$	Min.	177	188	186	72	164	393	278	296	267	256	
	1st Qu.	2749	2600	2280	2088	2031	2423	2368	2174	2058	2021	
	$k^* = 2000$	Median	3104	3076	2467	2140	2051	2612	2584	2276	2085	2033
		Mean	3072	3080	2474	2102	2015	2588	2598	2241	2065	1998
		3rd Qu.	3493	3751	2689	2201	2075	2817	2841	2379	2118	2045
Max.	4000	4000	4000	2487	2196	3479	4000	2974	2268	2096		
$m = 100$	Min.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1st Qu.	4900	106	29	11	8	133	33	15	8	6	
	$k^* = 5$	Median	4900	4900	87	19	10	285	95	30	11	8
		Mean	4704	2832	1081	36	12	1382	1043	61	13	8
		3rd Qu.	4900	4900	529	34	15	1860	505	56	16	9
Max.	4900	4900	4900	4900	67	4900	4900	4900	93	26		
$m = 500$	Min.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1st Qu.	217	76	27	11	7	66	31	15	8	6	
	$k^* = 5$	Median	304	216	61	18	10	87	67	26	11	8
		Mean	390	703	97	22	11	91	98	33	12	8
		3rd Qu.	438	576	115	29	14	112	124	44	15	10
Max.	4500	4500	4500	108	39	388	3744	239	47	27		
$m = 1000$	Min.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1st Qu.	179	65	28	11	7	68	35	16	8	7	
	$k^* = 5$	Median	228	171	58	17	10	84	72	27	11	8
		Mean	251	316	78	21	11	88	92	33	13	8
		3rd Qu.	304	361	105	28	14	106	125	45	15	9
Max.	1884	4000	658	102	40	265	630	215	53	25		

Tabulka 3.13: Porovnání vlivu rozdělení chyb. Pro $k^* = 2m$ je použito $\gamma = 0$, pro $k^* = 5$ je $\gamma = 0,45$.

dokonce více než čtvrtina monitorování změnu neodhalí, což se v případě normálního rozdělení nikdy nestane. Při velkých změnách a delším tréninkovém období již není rozdíl tak výrazný, přesto je stále patrný.

Popsané zhoršení je v souladu s očekáváním, neboť naše testovací procedura používá jako odhad rozptylu pozorování výběrový rozptyl. Ten, jak je známo, je vhodný pro

data nepříliš se odlišující od normálního rozdělení. Pro data s těžšími chvosty (jako je třeba právě rozdělení Laplaceovo) však neposkytuje dobrý odhad. Pro tato rozdělení by chtělo použít proceduru založenou na nějakém robustním odhadu.

3.3 Shrnutí simulací k proceduře I

V této části sumarizujeme výsledky provedených simulací.

Procedura I pro detekci změny měřítka dobře funguje pro *normální data*. Pokud máme k dispozici delší stabilní období, poskytuje velmi rychlou detekci i nepříliš velké změny. Požadovaná délka 500 pozorování se může jevit omezující, avšak uvažujeme-li například denní data, není to příliš dlouhá doba. Rychlost detekce přirozeně závisí na velikosti změny, která však po dosažení jisté velikosti již detekci výrazně neurychluje.

Pomocí parametru γ hraniční funkce můžeme ovlivnit citlivost procedury na brzkou resp. pozdní změnu. Pro brzkou změnu volíme γ blízké $1/2$ (např. $\gamma = 0,45$), pro pozdní změnu $\gamma = 0$. Procedura s $\gamma = 0,25$ dobře detekuje změny v celém průběhu monitorování, a proto je vhodná, pokud nemáme žádné apriorní očekávání okamžiku změny.

Při použití asymptotických kritických hodnot jsou prakticky dodrženy předepsané hladiny, proto není nutné určovat kritické hodnoty vycházející z dané délky historického období.

Pro *data s těžšími chvosty* nedává již monitorovací procedura tak dobré výsledky. To je způsobeno tím, že procedura používá výběrový rozptyl. Jak ukázaly simulace provedené s Laplaceovým rozdělením, monitorovací schéma při použití asymptotických hodnot výrazně překračuje povolenou hladinu. Z tohoto důvodu je nutné používat kritické hodnoty vycházející z dané délky historického období. Přesto menší změny mohou zůstat neodhaleny a pokud odhaleny jsou, je zpoždění detekce výrazné.

Kapitola 4

Simulace k proceduře II

V této kapitole se budeme věnovat chování procedury II, tj. procedury založené na

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_{II}(m, k)|}{m^{1/2}h(k/m)}.$$

Volené hodnoty parametrů jsou uvedeny v kapitole 3, proto je zde nebudeme opakovat. Opět se nejprve zaměříme na chování procedury za platnosti nulové hypotézy.

4.1 Nulová hypotéza

Simulace se prováděly analogicky jako pro proceduru I. Vzhledem k rekurzivní povaze procedury však bylo nutné omezit počet opakování na 2500. K určení kritických hodnot jsme využili asymptotického chování statistiky

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{|Q_{II}(m, k)|}{m^{1/2}h(k/m)}$$

odvozeného ve větě 3 a poznámky za touto větou. Funkci h jsme tedy volili jako

$$h_a(t) = [(t + 1)(a^2 + \log(t + 1))]^{1/2},$$

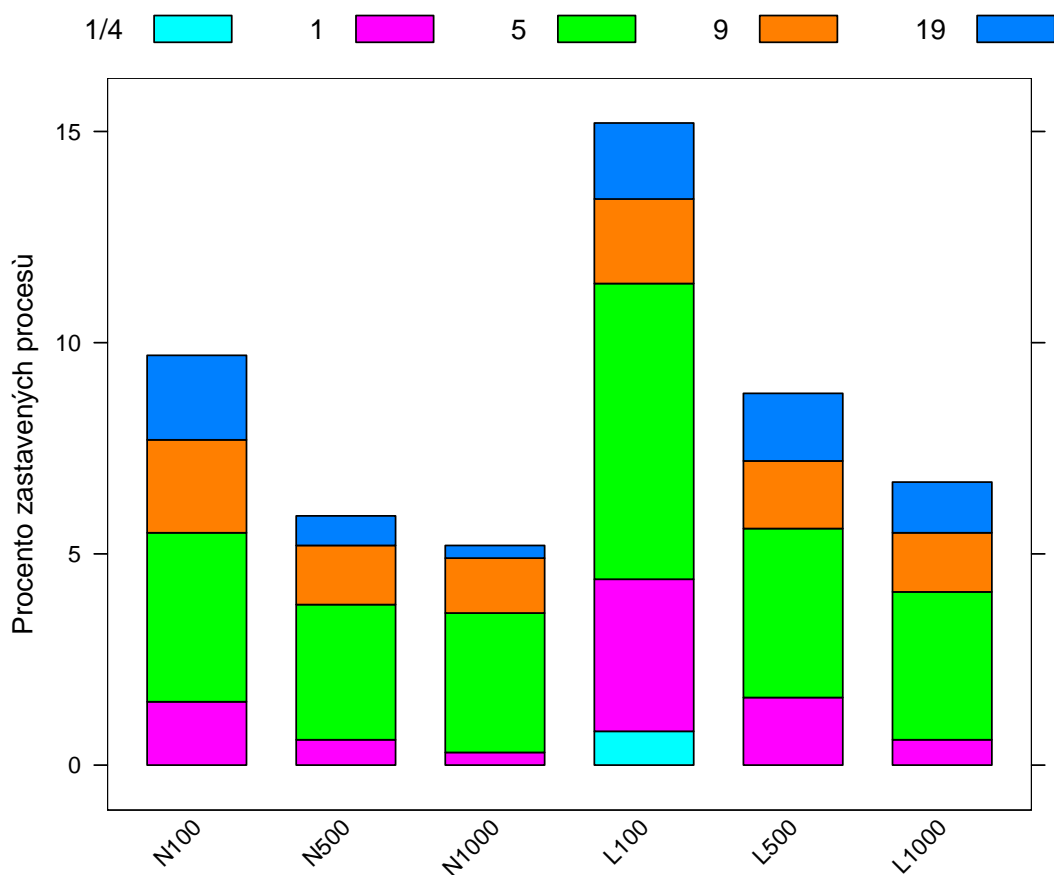
kde parametr a^2 je svázán s pravděpodobností falešného alarmu α vztahem $\exp(-a^2) = \alpha$. Pro zvolené hladiny 5 % a 10 % tedy vychází $a_5^2 \doteq 5,99$ resp. $a_{10}^2 \doteq 4,61$.

Výsledky simulací jsou shrnuty v tabulce 4.1 a grafu 4.1. Tabulka obsahuje výsledky jak pro 5%, tak i pro 10% hladinu. Tyto výsledky vykazují stejné rysy, proto se zaměříme na 10% hladinu, kde budeme moci využít i grafu. Stejně jako u procedury I je dosažená hladina pro chyby s Laplaceovým rozdělením vyšší než pro rozdělení normální. Dále s rostoucí délkou historického období klesá dosažená hladina. Procedura II je však oproti proceduře I konzervativní (s výjimkou nejkratšího historického období, avšak i zde je překročení požadované hladiny mnohem menší než u procedury I). To je v souladu s výsledky uveřejněnými v [5]. U normálního rozdělení dosažená hladina pro delší historické období pouze slabě překračuje 5%. To může být způsobeno useknutím monitorování po uplynutí 19 délek historického období.

Na grafu je opět vyznačeno, ve kterém období monitorování dochází k překročení. Pro obě rozdělení k němu nejčastěji dochází v čase monitorování mezi m a $5m$. U normálního rozdělení je přírůstek v posledním období již vcelku malý.

γ	m\r	$N(0, 1)$					Laplace				
		1/4	1	5	9	19	1/4	1	5	9	19
$\alpha = 0,05$	100	0,00	0,40	2,60	3,80	5,52	0,72	2,52	6,80	7,40	9,20
	500	0,00	0,20	2,00	2,84	3,28	0,00	0,40	2,72	3,64	4,60
	1000	0,00	0,12	1,52	2,32	2,84	0,00	0,24	2,20	2,80	3,56
$\alpha = 0,1$	100	0,00	1,52	5,48	7,76	9,72	0,84	4,40	11,44	13,40	15,20
	500	0,00	0,62	3,84	5,18	5,94	0,00	1,60	5,60	7,20	8,80
	1000	0,00	0,30	3,64	4,92	5,20	0,00	0,64	4,12	5,52	6,68

Tabulka 4.1: Empirické velikosti, tj. procenta zastavených procesů do času $m.r$ pro 5% resp. 10% hladiny.



Obrázek 4.1: Empirické velikosti pro 10% hladinu, rozdělené dle doby monitorování (N100 označuje normální chyby a historické období délky 100).

4.2 Alternativní hypotéza

Nyní budeme uvažovat situaci za platnosti alternativní hypotézy. Simulace byly opět provedeny analogicky jako pro proceduru I, pouze počet opakování byl snížen na 2000. Pro čas změny k^* se opět volily 2 pevné hodnoty (5 a 500) a 3 hodnoty závislé

na délce historického období m ($m/2, m, 2m$). Rozptyl po změně modelu σ_*^2 byl volen jako 1,5, 2, 4, 9.

		$k^* = 5$			$k^* = 500$		
σ_*^2	$\backslash m$	100	500	1000	100	500	1000
$\sigma_*^2 = 1,5$	Min.	11	45	78	29	275	313
	1st Qu.	81	151	201	637	684	720
	Median	162	206	254	732	762	807
	Mean	963	239	276	775	792	825
	3rd Qu.	515	288	326	870	876	914
	Max.	4900	1656	1103	4900	1837	1755
$\sigma_*^2 = 2$	Min.	6	21	38	28	127	367
	1st Qu.	37	71	97	564	586	602
	Median	55	91	120	607	621	639
	Mean	84	96	124	594	627	645
	3rd Qu.	85	113	146	655	663	681
	Max.	4900	369	280	931	861	870
$\sigma_*^2 = 4$	Min.	5	9	11	26	259	462
	1st Qu.	13	26	35	519	527	533
	Median	18	33	42	532	540	546
	Mean	20	34	43	517	541	548
	3rd Qu.	25	40	51	545	553	560
	Max.	90	84	89	638	634	630
$\sigma_*^2 = 9$	Min.	5	5	5	29	168	464
	1st Qu.	7	12	16	507	510	513
	Median	10	15	20	512	515	518
	Mean	10	16	20	496	515	519
	3rd Qu.	12	19	24	519	522	524
	Max.	28	40	44	567	555	559

Tabulka 4.2: Časy zastavení pro 10% hladinu a různé okamžiky změny v závislosti na velikosti změny.

Tabulka 4.2 obsahuje časy zastavení na 10% hladině pro normálně rozdělené chyby. Uvažovali jsme pouze pevné okamžiky změny. Dle očekávání se s narůstající velikostí změny zpoždění detekce zmenšuje. U malých změn a krátkého historického období k detekci někdy vůbec nedojde. Pro brzkou změnu je zpoždění kratší než pro změnu nastalou dále v monitorovacím období. To opět souvisí s faktem, že testová statistika je typem kumulativního součtu. Všechny tyto výsledky byly pozorovány i u procedury I. Oproti ní však u procedury II nemá prodloužení tréninkového období pozitivní efekt na rychlost detekce změny, pouze u malých změn dochází k omezení extrémních případů. To může být způsobeno rekurzivním charakterem procedury, kdy při delším historickém období máme v souhrnu před změnou modelu více pozorování sledující původní model (např. 1005 proti 105 při změně $k^* = 5$), a proto naše statistika reaguje na změnu s větším zpožděním. Dalším důvodem může být větší konzervativnost testu pro $m = 1000$ oproti $m = 100$ (dosažená hladina je téměř poloviční).

Výše popsané výsledky můžeme vidět i v tabulce 4.3, která obsahuje mediány zpoždění detekce změny modelu pro obě uvažované hladiny a normálně rozdělené chyby. Můžeme vidět vliv nárůstu délky tréninkového období a vliv okamžiku změny (např. $k^* = 5$ a $k^* = 2m$ při $m = 1000$). Vliv velikosti změny a uvažované hladiny je zcela zřejmý.

σ_*^2	$m \setminus k^*$	$\alpha = 0,05$					$\alpha = 0,1$				
		5	500	$m/2$	m	$2m$	5	500	$m/2$	m	$2m$
$\sigma_*^2 = 1,5$	100	242	282	231	226	230	157	232	159	165	183
	500	251	312	283	321	367	201	262	238	273	316
	1000	300	359	362	402	494	249	307	309	346	430
$\sigma_*^2 = 2$	100	64	122	70	76	87	50	107	57	61	73
	500	102	139	122	135	167	86	121	105	116	147
	1000	134	162	162	189	231	115	139	140	166	203
$\sigma_*^2 = 4$	100	16	37	19	22	27	13	32	16	18	23
	500	32	46	39	45	55	28	40	34	40	48
	1000	44	53	54	62	77	37	46	47	54	68
$\sigma_*^2 = 9$	100	6	15	7	8	10	5	12	6	6	9
	500	12	17	15	18	22	10	15	13	15	18
	1000	17	21	21	25	31	15	18	18	21	27

Tabulka 4.3: Mediány zpoždění zastavení pro 5% a 10% hladinu a normálně rozdělená data.

Nyní se budeme věnovat srovnání výkonnosti procedury pro obě uvažované rozdělení chyb. V tabulce 4.4 jsou v prvních sloupcích uvedeny charakteristiky časů zastavení pro data s Laplaceovým rozdělením, kdežto v následujících sloupcích jsou charakteristiky pro data s normálním rozdělením. Stejně jako pro proceduru I dostáváme lepší výsledky pro normálně rozdělená data, a to i přesto, že pro ně je procedura více konzervativní než pro data Laplaceova. To platí jak pro mediány časů zastavení, tak zejména pro jejich průměry. Ty jsou výrazně zvýšeny přítomností většího počtu nezastavených procesů. Pro $m = 100$ a nejmenší změnu rozptylu dokonce ve více než čtvrtině případů k odhalení změny nedojde.

		Laplace				normální				
$\backslash \sigma_*^2$		1.5	2	4	9	1.5	2	4	9	
$k^* = 5$	Min.	1	5	3	5	11	6	5	5	
	1st Qu.	97	44	17	9	81	37	13	7	
	$m = 100$	Median	308	89	27	13	162	55	18	10
		Mean	1840	500	33	15	963	84	20	10
		3rd Qu.	4900	191	41	18	515	85	25	12
Max.	4900	4900	289	65	4900	4900	90	28		
$k^* = 5$	Min.	12	14	5	5	45	21	9	5	
	1st Qu.	247	109	37	16	151	71	26	12	
	$m = 500$	Median	419	155	51	23	206	91	33	15
		Mean	749	182	53	24	239	96	34	16
		3rd Qu.	762	217	66	30	288	113	40	19
Max.	4500	4500	226	78	1656	369	84	40		
$k^* = 5$	Min.	20	9	5	5	78	38	11	5	
	1st Qu.	316	152	52	21	201	97	35	16	
	$m = 1000$	Median	459	200	66	29	254	120	42	20
		Mean	571	218	69	30	276	124	43	20
		3rd Qu.	680	266	84	37	326	146	51	24
Max.	4000	963	222	87	1103	280	89	44		
$k^* = 500$	Min.	3	10	1	8	29	28	26	29	
	1st Qu.	683	578	523	508	637	564	519	507	
	$m = 100$	Median	910	661	548	518	732	607	532	512
		Mean	1299	668	516	484	775	594	517	496
		3rd Qu.	1393	767	576	530	870	655	545	519
Max.	4900	2566	725	595	4900	931	638	567		
$k^* = 500$	Min.	54	216	158	163	275	127	259	168	
	1st Qu.	807	630	543	515	684	586	527	510	
	$m = 500$	Median	994	701	564	525	762	621	540	515
		Mean	1149	723	566	525	792	627	541	515
		3rd Qu.	1286	797	589	536	876	663	553	522
Max.	4500	1626	721	607	1837	861	634	555		
$k^* = 500$	Min.	300	199	307	361	313	367	462	464	
	1st Qu.	862	661	553	520	720	602	533	513	
	$m = 1000$	Median	1048	730	576	530	807	639	546	518
		Mean	1132	748	579	531	825	645	548	519
		3rd Qu.	1296	814	602	541	914	681	560	524
Max.	4000	1818	734	611	1755	870	630	559		

Tabulka 4.4: Porovnání vlivu rozdělení chyb. Časy zastavení na 10% hladině.

4.3 Porovnání obou procedur

		Procedura II			Procedura I			
\m		100	500	1000	100	500	1000	
$\sigma_*^2 = 1,5$	Min.	11	45	78	1	1	1	
	1st Qu.	81	151	201	20	29	28	
	$k^* = 5$	Median	162	206	254	55	60	64
		Mean	963	239	276	641	88	83
		3rd Qu.	515	288	326	197	114	116
		Max.	4900	1656	1103	4900	1309	539
$\sigma_*^2 = 2$	Min.	6	21	38	1	1	1	
	1st Qu.	37	71	97	12	14	15	
	$k^* = 5$	Median	55	91	120	23	24	26
		Mean	84	96	124	38	30	31
		3rd Qu.	85	113	146	43	41	42
		Max.	4900	369	280	4900	179	195
$\sigma_*^2 = 4$	Min.	5	9	11	1	1	1	
	1st Qu.	13	26	35	7	8	8	
	$k^* = 5$	Median	18	33	42	10	11	11
		Mean	20	34	43	11	12	12
		3rd Qu.	25	40	51	14	15	15
		Max.	90	84	89	69	45	54
$\sigma_*^2 = 1,5$	Min.	29	275	313	1	1	56	
	1st Qu.	637	684	720	676	665	668	
	$k^* = 500$	Median	732	762	807	1034	783	761
		Mean	775	792	825	1716	819	779
		3rd Qu.	870	876	914	2231	944	875
		Max.	4900	1837	1755	4900	3825	1880
$\sigma_*^2 = 2$	Min.	28	127	367	1	1	48	
	1st Qu.	564	586	602	576	574	578	
	$k^* = 500$	Median	607	621	639	691	620	619
		Mean	594	627	645	712	615	620
		3rd Qu.	655	663	681	849	676	660
		Max.	931	861	870	4900	986	933
$\sigma_*^2 = 4$	Min.	26	259	462	1	2	14	
	1st Qu.	519	527	533	526	525	525	
	$k^* = 500$	Median	532	540	546	554	539	537
		Mean	517	541	548	508	531	534
		3rd Qu.	545	553	560	587	556	550
		Max.	638	634	630	799	628	625

Tabulka 4.5: Porovnání obou procedur. Uvažujeme normálně rozdělená data a 10% hladinu. Pro proceduru I je při $k^* = 5$ použito $\gamma = 0,45$, při $k^* = 500$ je $\gamma = 0,25$.

V této části porovnáme obě odvozené procedury, nejprve za platnosti nulové hypotézy, tj. pokud v modelu nedochází ke změně. Procedura I nedodrží předepsanou hladinu, avšak při normálně rozdělených datech a delším historickém období není toto překročení veliké. V ostatních případech musíme použít simulované kritické hodnoty. Oproti tomu je procedura II konzervativní, a to i pro data s těžšími chvosty, jako jsou například Laplaceova. K porovnání mohou posloužit grafy 3.1 a 4.1.

Ke srovnání schopnosti detekce změny použijeme tabulku 4.5. Ve většině případů dává lepší výsledky procedura I, avšak pro krátké historické období a velmi pozdní změnu ($m = 100$ a $k^* = 500$) je překonána procedurou II. Zejména pro malou změnu je tento rozdíl výrazný. Pokud jsou naše očekávání ohledně změny modelu podobné této situaci, měli bychom tedy preferovat proceduru II. Jiným důvodem upřednostnění procedury II může být nutnost co nejvíce se vyhnout falešnému alarmu.

Závěr

V posledních letech vznikla řada článků věnujících se sekvenčnímu testování stability modelu. Tato práce vycházela především z článku [5] věnovanému testu změny regresního parametru, na který navazovala dizertační práce [7].

V této práci bylo studováno sekvenční testování změny rozptylu. Zamítací pravidlo bylo založeno na omezení pravděpodobností I. a II. druhu. Byly navrženy dvě testové statistiky, obě byly typem kumulativního součtu. Dále byla odvozena jejich asymptotická rozdělení. A to jak za platnosti nulové hypotézy, kdy nedochází k žádné změně modelu, tak i za alternativy, kdy změna nastala. Teoretické výsledky byly doplněny simulacemi, které pomohly vyhodnotit vhodnost navržených procedur.

První procedura vycházela z porovnání odhadu rozptylu v monitorovacím období s odhadem vycházejícím ze stabilního historického období. Pro normálně rozdělená data dává procedura velmi dobré výsledky. Pro data s těžšími chvosty je zpoždění detekce změny výraznější a navíc se nedá příliš využít odvozeného asymptotického vztahu. Tyto horší výsledky jsou způsobeny použitím výběrového rozptylu v testové statistice, který není příliš vhodný pro data výrazněji se lišící od normálních. Druhá procedura využívala rekursivních odhadů. Ve většině případů nedosahovala takových výsledků jako první procedura, avšak za jistých okolností může být preferována.

O chybách jsme předpokládali, že jsou nezávislé stejně rozdělené. Použili jsme tohoto zjednodušujícího předpokladu, přestože ho reálná data, pocházející například z ekonomie, často nesplňují. Proto by bylo dále možné zkoumat data nějakým způsobem závislá (například AR modely).

Apendix

V této části uvedeme důležitá tvrzení, která jsou použita v důkazech vět. Budeme používat standardní zkratku (iid) pro označení nezávislých stejně rozdělených veličin.

Nejprve uvedeme tvrzení, která jsou souhrnně nazývána jako Komlós-Major-Tusnádyova aproximace.

Věta I. *Nechť X_1, \dots, X_n jsou (iid) náhodné veličiny takové, že $E X_i = 0$ a $\text{var } X_i = 1$, $i = 1 \dots n$. Nechť $H(x) > 0$ ($x \geq 0$) je spojitá rostoucí funkce, taková, že*

- $x^{-2-\gamma}H(x)$ je rostoucí pro nějaké $\gamma > 0$,
- existuje funkce $K(x) > 0$ ($x \geq 0$), taková že $x^{-1} \log H(x) = x^{-1} \log K(x)(1 + o(x))$, kde $x^{-1} \log K(x)$ je klesající,
- $E H(|X_i|) < \infty$, $i = 1 \dots n$.

Pak existují (iid) náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_n se standardním normálním rozdělením takové, že pro každé $x > 0$ platí

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^k Y_i \right| > x\right) \leq \frac{C_1 n}{H(C_2 x)},$$

kde C_1 a C_2 jsou kladné konstanty závislé na rozdělení X_i .

Důkaz. Viz [3], věta 1.2. □

Zřejmě jako funkci H můžeme volit $H(x) = x^{2+\Delta}$, $\Delta > 0$. Na veličiny X_i tedy klademe požadavek existence většího než druhého momentu ($E |X_i|^{2+\Delta} < \infty$).

Důsledek II. *Nechť X_1, \dots, X_n jsou (iid) náhodné veličiny takové, že $E X_i = 0$, $\text{var } X_i = 1$ a pro nějaké $\Delta > 0$ je $E |X_i|^{2+\Delta} < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Pak existují (iid) náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_n se standardním normálním rozdělením a Wienerův proces $\{W(t), 0 \leq t \leq n\}$ takový, že pro každé $\beta > \frac{1}{2+\Delta}$ platí*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^\beta} \left| \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^k Y_i \right| = O_p(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^\beta} \left| \sum_{i=1}^k X_i - W(k) \right| = O_p(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Důkaz. Můžeme psát

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^\beta} \left| \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^k Y_i \right| \geq 2A\right) &\leq \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} P\left(\max_{2^j < k \leq 2^{j+1}} \frac{1}{k^\beta} \left| \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^k Y_i \right| \geq 2A\right) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \left\{ P\left(\left| \sum_{i=1}^{2^j} X_i - \sum_{i=1}^{2^j} Y_i \right| \max_{2^j < k \leq 2^{j+1}} \frac{1}{k^\beta} \geq A\right) + \right. \\ &\quad \left. + P\left(\max_{2^j < k \leq 2^{j+1}} \frac{1}{k^\beta} \left| \sum_{i=2^{j+1}}^k X_i - \sum_{i=2^{j+1}}^k Y_i \right| \geq A\right) \right\}. \end{aligned}$$

Předchozí pravděpodobnosti můžeme pomocí věty I shora odhadnout jako

$$P\left(\left| \sum_{i=1}^{2^j} X_i - \sum_{i=1}^{2^j} Y_i \right| \max_{2^j < k \leq 2^{j+1}} \frac{1}{k^\beta} \geq A\right) \leq P\left(\left| \sum_{i=1}^{2^j} X_i - \sum_{i=1}^{2^j} Y_i \right| \geq A2^{j\beta}\right) \leq \frac{c_1 2^j}{(A2^{j\beta})^{2+\Delta}}$$

respektive

$$\begin{aligned} P\left(\max_{2^j < k \leq 2^{j+1}} \frac{1}{k^\beta} \left| \sum_{i=2^{j+1}}^k X_i - \sum_{i=2^{j+1}}^k Y_i \right| \geq A\right) &\leq P\left(\max_{2^j < k \leq 2^{j+1}} \left| \sum_{i=2^{j+1}}^k X_i - \sum_{i=2^{j+1}}^k Y_i \right| \geq A2^{j\beta}\right) \leq \\ &\leq c_1 2^j \frac{1}{(A2^{j\beta})^{2+\Delta}}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^\beta} \left| \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^k Y_i \right| \geq 2A\right) \leq \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} 2c_1 \frac{1}{A^{2+\Delta}} 2^{j(1-(2+\Delta)\beta)} = c_2 A^{-(2+\Delta)},$$

protože pro $\beta > \frac{1}{2+\Delta}$ platí $1 - (2 + \Delta)\beta < 0$ a to stejnoměrně v n . Jelikož A lze volit libovolně veliké, je uvažovaný výraz omezen v pravděpodobnosti.

Zřejmě lze zvolit Wienerův proces tak, aby platilo $W(k) = \sum_{i=1}^k Y_i$, $k = 1, \dots, n$, čímž je důkaz dokončen. □

Věta III. *Nechť X_1, X_2, \dots jsou (iid) náhodné veličiny takové, že $E X_i = 0$, $\text{var } X_i = 1$ a pro nějaké $\Delta > 0$ je $E |X_i|^{2+\Delta} < \infty$, $i = 1, 2, \dots$. Pak existují (iid) náhodné veličiny Y_1, Y_2, \dots se standardním normálním rozdělením a Wienerův proces $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ takový, že pro každé $\beta > \frac{1}{2+\Delta}$ platí*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m X_i - \sum_{i=1}^m Y_i \right| &= o_p(m^\beta) \quad (m \rightarrow \infty) \\ \left| \sum_{i=1}^m X_i - W(m) \right| &= o_p(m^\beta) \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Důkaz. Viz [3], věta 1.5. □

Nyní uvedeme 2 tvrzení, která spadají pod tzv. zákony velkých čísel (ZVČ)

Věta IV (Kolmogorův Silný ZVČ). *Nechť X_1, X_2, \dots je posloupnost (iid) náhodných veličin s konečnou střední hodnotou. Pak platí*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{E} X_1 \text{ s.j.}$$

Důkaz. Viz [9], věta IV.2.1. □

Věta V (Marcinkiewiczův-Zygmundův ZVČ). *Nechť X_1, X_2, \dots je posloupnost (iid) náhodných veličin. Potom pro libovolné $p \in (0, 2)$ platí*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nc}{n^{1/p}} \rightarrow 0 \text{ s.j. pro nějaké } c < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E} |X_1|^p < \infty.$$

Pokud je $1 \leq p < 2$ je $c = \mathbb{E} X_1$, kdežto pro $0 < p < 1$ může být c libovolné, a tedy i nulové.

Důkaz. Viz [1], kapitola 5.2, věta 2. □

Zřejmým důsledkem této věty je i Kolmogorův silný ZVČ.

Věta VI (Hájkova-Rényiova nerovnost). *Nechť $\{U_n = \sum_{j=1}^n u_j, n \geq 1\}$ je L_2 martingal a $\{b_n, n \geq 1\}$ je kladná neklesající posloupnost. Pak pro každé $\lambda > 0$ platí*

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{U_j}{b_j} \right| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^n \frac{\mathbb{E} u_j^2}{b_j^2}.$$

Důkaz. Viz [1], kapitola 7.4, věta 8. □

Věta VII (Hartmanův-Wintnerův zákon iterovaného logaritmu). *Nechť X_1, X_2, \dots je posloupnost (iid) náhodných veličin taková, že $\mathbb{E} X_1 = 0$ a $\text{var } X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Pak platí*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (2\sigma^2 n \log \log n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i = 1 \text{ s.j.}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (2\sigma^2 n \log \log n)^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i = -1 \text{ s.j.}$$

Důkaz. Viz [9], věta VII.3.6. □

Věta VIII (zákon iterovaného logaritmu pro Wienerův proces). *Nechť $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ je Wienerův proces a $a(t) = (2t \log \log t)^{1/2}$. Pak platí*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{a(t)} = 1 \text{ s.j.}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{a(t)} = -1 \text{ s.j.}$$

Důkaz. Viz [9], věta VII.1.8. □

Literatura

- [1] H. Chow, Y. S. and Teicher. *Probability theory: independence, interchangeability, martingales. 3rd ed.* Springer, New York, 2003.
- [2] C.-S. J. Chu, M. Stinchcombe, and H. White. Monitoring structural change. *Econometrica*, 64:1045–1065, 1996.
- [3] M. Csörgő and L. Horváth. *Weighted Approximation in Probability and Statistics.* John Wiley & Sons, Chichester, 1993.
- [4] M. Csörgő and L. Horváth. *Limit Theorems in Change-Point Analysis.* John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [5] L. Horváth, M. Hušková, P. Kokoszka, and J. Steinebach. Monitoring changes in linear models. *J. Stat. Plann. Inference*, 126:225–251, 2004.
- [6] M. Hušková. *Sekvenční analýza.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1982.
- [7] A. Koubková. *Sequential Change-Point Analysis.* PhD thesis, Matematicko-fyzikální fakulta, UK, 2006.
- [8] D. Siegmund. *Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals.* Springer-Verlag, 1981.
- [9] J. Štěpán. *Teorie pravděpodobnosti: matematické základy.* Academia, Praha, 1987.