

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Monika Jakubcová

Míry efience portfolia vzhledem k stochastické dominanci

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: MPMSE - pravděpodobnost, matematická statistika
a ekonometrie

Studijní plán: Ekonometrie

2008

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, PhD. za čas, ktorý mi venoval pri vedení tejto práce, za poskytnutie dát a prístupu k potrebnému softwaru.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 8.8.2008

Monika Jakubcová

Obsah

1	Úvod	5
2	Stochastická dominancia druhého rádu	7
2.1	Stochastická dominancia	7
2.2	CVaR - podmienený Value at Risk	9
3	Eficiencia portfólia vzhľadom k SSD	12
3.1	Eficiencia portfólia	12
3.2	Kritériá efície portfólia vzhľadom k SSD	13
3.2.1	Postovo kritérium	14
3.2.2	Kuosmanenovo kritérium	15
3.2.3	Kopovo kritérium	17
4	Miery neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD	20
4.1	Základné vlastnosti mier neeficiencie	20
4.1.1	Miera neeficiencie ξ	21
4.1.2	Miera neeficiencie θ^N	26
4.1.3	Miera neeficiencie D^*	28
4.1.4	Porovnanie vlastností mier neeficiencie	30
4.2	Vzťahy medzi mierami neeficiencie	31
4.2.1	Porovnanie mier neeficiencie ξ a θ^N	31
4.2.2	Porovnanie mier neeficiencie θ^N a D^*	33
4.2.3	Porovnanie mier neeficiencie ξ a D^*	35
5	Aplikácia: Miery neeficiencie tržného portfólia	37
5.1	Dáta	37
5.2	Nastavenie parametrov	38
5.3	Výsledky	39
6	Záver	48
	Literatúra	49

Název práce: Míry efience portfolia vzhledem k stochastické dominanci

Autor: Monika Jakubcová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.

e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme míry efience portfolia vzhledem k stochastické dominanci. Při výběru optimálního portfolia z hlediska maximálního očekávaného užitku je investorův postoj k riziku modelován tvarem užitkové funkce. Jestliže informace o postoji k riziku není známa nebo uvažujeme obecného investora, lze využít přístup stochastické dominance, při němž hodnotíme portfolio pouze jako eficientní, nebo neeficientní. Vycházíme z prací Posta, Kuosmanena a Kopy, kteří sestavili kritéria efience portfolia pro nenasyčené investory averzní vůči riziku. Na základě těchto kritérií definujeme míry neefience portfolia vzhledem k stochastické dominanci druhého řádu (SSD). Zkoumáme vlastnosti měr SSD neefience, které umožňují porovnávat SSD neeficientní portfolia mezi sebou. Dokazujeme vzájemné vztahy definovaných měr neefience. Na konkrétním příkladě dat z Americké burzy cenných papírů testujeme SSD eficientci US tržního portfolia.

Klíčová slova: stochastická dominace druhého řádu, efience portfolia, míry efience, podmíněný Value at Risk

Title: Stochastic dominance portfolio efficiency measures

Author: Monika Jakubcová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.

Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the stochastic dominance portfolio efficiency measures. The investor's risk attitude is given by the type of an utility function. If this information is unknown or a general investor is assumed, it is possible to use the stochastic dominance principle, in which the portfolio is only classified as efficient or inefficient. We build on the works of Post, Kuosmanen and Kopa, who formulated the criteria of portfolio efficiency for nonsatiate and risk averse investors. On the basis of these criteria, we define the second-order stochastic dominance (SSD) portfolio efficiency measures. We examine the properties of SSD inefficiency measures, which allow to compare SSD inefficient portfolios. We prove mutual relationships for the defined SSD inefficiency measures. Eventually, we test the SSD efficiency of a US market portfolio on real-world US Stock Exchange data.

Keywords: second order stochastic dominance, portfolio efficiency, efficiency measures, conditional Value at Risk

Kapitola 1

Úvod

V súčasnosti existuje celý rad prístupov ako môžeme riešiť problém výberu portfólia tak, aby bolo v istom zmysle „optimálne“. Základnú myšlienku, maximalizovať očakávaný zisk z portfólia, obohatil Markowitz [12] tým, že zohľadnil aj možné riziko reprezentované rozptylom. Žiaľ, tieto optimálne portfóliá zodpovedajú len prípadu, keď je úžitková funkcia investora kvadratická. Z toho dôvodu už Markowitz [13] zaviedol namiesto rozptylu výnosov tzv. semivarianciu, ktorá na rozdiel od rozptylu nepenalizuje pozitívnu odchýlku, t.j. keď je výnos vyšší ako stredná hodnota výnosu. V tejto práci sa budeme venovať ďalšiemu možnému prístupu hodnotenia portfólia, ktorý je založený na teórii stochastickej dominancie (SD).

Teória stochastickej dominancie sa v súčasnosti používa v rôznych oblastiach ekonómie, finančnej matematiky a štatistiky. SD predstavuje čiastočné usporiadanie v priestore náhodných veličín. Toto usporiadanie je definované pomocou očakávaného úžitku. Umožňuje nám vybrať portfólio z množiny všetkých portfólií, ktoré môžeme zostaviť z dostupných aktív tak, aby bolo optimálne (v zmysle maximalizácie očakávaného úžitku) aspoň pre jedného investora s úžitkovou funkciou, ktorá patrí do istej triedy úžitkových funkcií.

História SD siaha do roku 1932, keď sa Karamata [6] venoval podobnej tématike a dokázal vetu pre rozdelenia s rovnakou strednou hodnotou, ktorá je veľmi podobná stochastickej dominancii druhého rádu. Významný rozvoj teórie SD a hlavne využitia poznatkov tejto teórie v ekonómii a vo financiách nastal v rokoch 1969 - 1970, keď boli publikované práce Hadar a Russell [3], Hanoch a Levy [4], Rothschild a Stiglitz [19] a Whitmore [22]. Uvedené práce boli impulzom pre rozvoj teórie SD. V súčasnosti sa SD venuje čoraz viac pozornosti v kontexte efektivity portfólia.

Z teoretického hľadiska je veľkou výhodou SD jej neparametrický prístup. To znamená, že kritériá SD, popísané nižšie v práci, nevyžadujú úplné parametrické vyjadrenie preferencií investora. Budeme vychádzať z toho, že poznáme štatistické rozdelenie možných alternatív, ktoré má investor k dispozícii a zo znalosti triedy úžitkových funkcií, do ktorej patrí úžitková funkcia investora. Potom môžeme rozhodnúť, či je dané portfólio optimálne pre aspoň jedného investora.

Rád SD závisí na tom, s akou triedou úžitkových funkcií pracujeme. Stochastická dominancia prvého rádu (FSD) pracuje s neklesajúcimi úžitkovými funkciami. Ide o investorov, ktorí sú tzv. nenasýtení, t.j. preferujú väčšie bohatstvo pred menším. Táto trieda úžitkových funkcií zahŕňa všetky kardinálne úžitkové funkcie, a teda FSD má najširšie využitie. Jej nevýhodou je ignorovanie iných predpokladov na tvar úžitkovej funkcie, z ktorých najčastejší je predpoklad konkavity zodpovedajúci rizikovej averzii investora. Tento predpoklad sa ukázal ako opodstatnený v mnohých finančných prácach, a preto okrem predpokladu nenasýtenosti je v tejto práci predpokladaná i averzia investora k riziku, čo vedie k užšej triede úžitkových funkcií, ktoré sú neklesajúce a konkávne. Pre túto triedu úžitkových funkcií bola vyvinutá stochastická dominancia druhého rádu (SSD). Boli odvodené tri kritériá SSD eficientie portfólia, ktoré sú v práci podrobne popísané a na základe nich sú definované miery neeficientie portfólia vzhľadom k SSD, s ktorými budeme ďalej pracovať. Ďalším zúžením triedy úžitkových funkcií dostaneme SD vyššieho rádu, viď. napr. Whitmore [22] alebo Levy [11].

V súčasnosti už poznáme mnoho záverov teórie SD. Ako prvé boli vyvinuté kritériá SD pre párové porovnanie Levy [10]. Prvé testy SSD eficientie daného portfólia vzhľadom k nekonečnej množine všetkých možných portfólií zložených z danej množiny aktív boli navrhnuté Postom [16] a Kuosmanenom [9]. Ďalší test navrhol Kopa [7]. Autori pracovali s rôznymi definíciami eficientného portfólia pre SSD. Post má pod pojmom SSD eficientné portfólio na mysli také portfólio, že neexistuje iné portfólio s väčším očakávaným úžitkom pre všetky rýdzo konkávne úžitkové funkcie. Ďalší autori Ogryczak a Ruszczyński [14], Kuosmanen [9] a Kopa [7] definovali eficientné portfólio trochu odlišne. Za eficientné portfólio pokladajú také, že žiadne iné portfólio nemá väčší alebo rovný očakávaný úžitok pre všetky konkávne úžitkové funkcie a ostre väčší pre aspoň jednu konkávnu úžitkovú funkciu. Okrem toho existujú i kritériá pre FSD eficientiu viď. Kuosmanen [9] a Kopa [7], ale v tejto práci sa zameriame na miery eficientie portfólia pre SSD.

V kapitole 2 definujeme SD a mieru rizika, ktorú budeme používať v jednom z kritérií, a to podmienený Value at Risk (CVaR). V rámci tejto kapitoly tiež popíšeme ich základné vlastnosti a vzťahy medzi nimi. V kapitole 3 zavedieme pojem SSD eficientné portfólio vzhľadom k množine všetkých možných portfólií zložených z dostupných aktív. Ďalej zhrnieme tri kritériá eficientie portfólia pre SSD. Na začiatku kapitoly 4 sa zaoberáme testovaním SSD eficientie daného portfólia. Ďalej zavedieme tri miery neeficientie, teda miery, ktoré vyjadrujú „vzdialenosť“ portfólia od množiny SSD eficientných portfólií. Overíme základné vlastnosti definovaných mier, a to hlavne konzistenciu s SSD a konvexitu na určitej množine portfólií. Prvá vlastnosť zaručí, že SSD dominované portfólio, teda horšie v zmysle SSD, má väčšiu mieru neeficientie ako portfólio, ktoré ho SSD dominuje. To nám umožní venovať sa hlavnej úlohe tejto práce, a to dokázať vzájomné vzťahy zavedených mier, prípadne preukázať, že medzi skúmanými mierami žiadne relácie neexistujú. Konečne v kapitole 5 na konkrétnom príklade dát z Americkej burzy cenných papierov testujeme SSD eficientiu US tržného portfólia.

Kapitola 2

Stochastická dominancia druhého rádu

V tejto kapitole zavedieme SD náhodných veličín. V podkapitole 2.1 popíšeme základné vlastnosti SD. V podkapitole 2.2 zavedieme mieru rizika CVaR. Je to veličina, ktorá vyjadruje postoj investora k riziku. Ďalej zhrnieme základné vlastnosti CVaR v kontexte SD.

2.1 Stochastická dominancia

Zavedme dve množiny úžitkových funkcií U_1 a U_2 . Nech U_1 označuje množinu všetkých úžitkových funkcií (t.j. množinu všetkých spojitých, neklesajúcich funkcií). Ďalej $U_2 \subset U_1$ označuje množinu všetkých konkávných úžitkových funkcií.

V celej práci budeme uvažovať sprava spojitú distribučnú funkciu náhodných veličín.

Definícia 2.1.

Nech X_1 a X_2 sú dve náhodné veličiny s distribučnými funkciami $F_1(x)$ a $F_2(x)$.

(i) Hovoríme, že X_1 dominuje X_2 vzhľadom k stochastickej dominancii prvého rádu (FSD), značíme $X_1 \succeq_{FSD} X_2$, ak

$$\mathbb{E}_{F_1} u(x) - \mathbb{E}_{F_2} u(x) \geq 0 \quad (2.1)$$

pre každú úžitkovú funkciu $u \in U_1$, pre ktorú $\mathbb{E}_{F_1} u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2} u(x)$ existujú.

(ii) Hovoríme, že X_1 dominuje X_2 vzhľadom k stochastickej dominancii druhého rádu (SSD), značíme $X_1 \succeq_{SSD} X_2$, ak

$$\mathbb{E}_{F_1} u(x) - \mathbb{E}_{F_2} u(x) \geq 0 \quad (2.2)$$

pre každú úžitkovú funkciu $u \in U_2$, pre ktorú $\mathbb{E}_{F_1} u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2} u(x)$ existujú.

Definícia 2.1 (ii) stochastickej dominancie druhého rádu hovorí, že každý nenasýtený investor averzný k riziku preferuje investičnú príležitosť X_1 pred X_2 , pretože X_1 mu prináša väčší očakávaný úžitok. Usporiadanie investičných príležitostí dané FSD (SSD) je čiastočné.

Aby sme predišli prípadu, keď náhodná veličina dominuje samú seba (t.j. $X_1 \succeq_{FSD} X_1$ alebo $X_1 \succeq_{SSD} X_1$) definujeme striktnú dominanciu.

Definícia 2.2. (Striktná dominancia)

Nech X_1 a X_2 sú dve náhodné veličiny.

$$X_1 \succ_{FSD} X_2 \Leftrightarrow (X_1 \succeq_{FSD} X_2) \cap (X_2 \not\prec_{FSD} X_1)$$

$$X_1 \succ_{SSD} X_2 \Leftrightarrow (X_1 \succeq_{SSD} X_2) \cap (X_2 \not\prec_{SSD} X_1).$$

To znamená, že X_1 striktno dominuje X_2 vzhľadom k FSD (SSD), značíme $X_1 \succ_{FSD} X_2$ ($X_1 \succ_{SSD} X_2$), ak $X_1 \succeq_{FSD} X_2$ ($X_1 \succeq_{SSD} X_2$) a existuje aspoň jedna úžitková funkcia $u \in U_1$ ($u \in U_2$), pre ktorú platí ostrá nerovnosť očakávaných úžitkov:

$$\mathbb{E}_{F_1} u(x) - \mathbb{E}_{F_2} u(x) > 0.$$

Podobne je definovaná stochastická dominancia vyššieho rádu, viď. napr. Whitmore [22] alebo Levy [11]. V praxi sa využívajú najmä FSD a SSD, pretože majú dobrú ekonomickú interpretáciu. U FSD ide o investorov sneklesajúcou úžitkovou funkciou a v prípade SSD sú investori navyše averzní k riziku. Pri stochastickej dominancii tretieho rádu je trieda úžitkových funkcií ďalej obmedzená tým, že majú neklesajúcu druhú deriváciu.

Overenie SD z definícií 2.1 a 2.2 je veľmi pracné, vo veľa prípadoch skoro nemožné, preto sú užitočné nasledujúce nutné a postačujúce podmienky pre SD.

Označme

$$F_i^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^t F_i(x) dx \quad i = 1, 2.$$

Lemma 2.1.

Nech $F_1(x)$ a $F_2(x)$ sú dve distribučné funkcie náhodných veličín X_1 a X_2 . Potom:

- (i) $X_1 \succeq_{FSD} X_2 \Leftrightarrow F_1(x) \leq F_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (ii) $X_1 \succeq_{SSD} X_2 \Leftrightarrow F_1^{(2)}(t) \leq F_2^{(2)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- (iii) $X_1 \succ_{FSD} X_2 \Leftrightarrow F_1(x) \leq F_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, kde pre aspoň jedno x je splnená ostrá nerovnosť
- (iv) $X_1 \succ_{SSD} X_2 \Leftrightarrow F_1^{(2)}(t) \leq F_2^{(2)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, kde pre aspoň jedno t je splnená ostrá nerovnosť.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Hanoch a Levy [4]. □

Uvažujme reálnu náhodnú veličinu X . Kvantilová funkcia $F_X^{(-1)}$ náhodnej veličiny X je definovaná ako zľava spojitá inverzná funkcia k distribučnej funkcii F_X :

$$F_X^{(-1)}(v) = \min\{u : F_X(u) \geq v\}. \quad (2.3)$$

Lemma 2.2.

$$X_1 \succeq_{FSD} X_2 \Leftrightarrow F_1^{(-1)}(p) \leq F_2^{(-1)}(p) \quad \forall p \in (0, 1].$$

Dôkaz. Tvrdenie plynie priamo z lemmatu 2.1. \square

Uvažujme náhodnú veličinu X , ktorá spĺňa podmienku $\mathbb{E}|X| < \infty$. Pre túto náhodnú veličinu je kvantilová funkcia druhého rádu $F_X^{(-2)}$ definovaná nasledovne:

$$F_X^{(-2)}(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^p F_X^{(-1)}(t) dt & 0 < p \leq 1 \\ 0 & p = 0 \\ +\infty & \text{inak.} \end{cases}$$

Veta 2.1.

Pre každú náhodnú veličinu, ktorá spĺňa podmienku $\mathbb{E}|X| < \infty$ platí:

- (i) $F_X^{(-2)}(p) = \sup_{\nu} \{\nu p - \mathbb{E} \max(\nu - X, 0)\}$
(ii) $X_1 \succeq_{SSD} X_2 \Leftrightarrow \frac{F_1^{(-2)}(p)}{p} \geq \frac{F_2^{(-2)}(p)}{p} \quad \forall p \in [0, 1].$

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Ogryczak a Ruszczyński [14]. \square

2.2 CVaR - podmienený Value at Risk

Nech X je reálna náhodná veličina, ktorá predstavuje výnos z portfólia. Potom náhodná veličina $Y = -X$ reprezentuje stratu z tohoto portfólia. Ďalej zvolme hladinu spoľahlivosti $\alpha \in (0, 1)$. Najčastejšie sa volí $\alpha = 0,95$ alebo $\alpha = 0,99$. Predpokladáme, že $\mathbb{E}|X| < \infty$. Potom je Value at Risk ($\text{VaR}_\alpha(Y)$) maximálna možná strata z portfólia pri zvolenej hladine spoľahlivosti α . $\text{VaR}_\alpha(Y)$ môžeme tiež interpretovať tak, že náhodná strata väčšia ako $\text{VaR}_\alpha(Y)$ nastane s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$ a strata menšia ako $\text{VaR}_\alpha(Y)$ nastane s pravdepodobnosťou α . Ide teda o α -kvantil náhodnej veličiny Y s distribučnou funkciou F_Y :

$$\text{VaR}_\alpha(Y) = F_Y^{(-1)}(\alpha) = \min\{u : F_Y(u) \geq \alpha\}. \quad (2.4)$$

Práve zavedená miera rizika VaR má viaceré nedostatky, medzi ktoré patrí najmä to, že VaR nedáva žiadnu informáciu o tom aká veľká môže byť strata prekračujúca VaR, pretože nerozlišuje medzi rôznymi rozdeleniami α -chvostov strát. Teda môže nastať prípad, keď je hodnota VaR pomerne malá, ale rozdelenie strát má ťažké chvosty a s malou pravdepodobnosťou, t.j. menšou ako $1 - \alpha$ môže dôjsť k obrovským stratám. Ďalšou nevýhodou VaR je, že nie je konvexná. To znamená, že môže nastať situácia, že VaR lineárnej kombinácie dvoch náhodných veličín je väčšia ako príslušná lineárna kombinácia VaR každej z nich.

Preto zavedieme nasledujúcu mieru rizika, ktorá už nemá tieto nedostatky. Podmienený Value at Risk ($\text{CVaR}_\alpha(Y)$) určuje priemernú stratu z 100(1 - α)% najhorších možných strát portfólia. Rockafellar a Uryasev [17] definovali CVaR nasledujúcim spôsobom.

Definícia 2.3.

Uvažujme náhodnú veličinu Y s distribučnou funkciou G a hladinu spoľahlivosti $\alpha \in (0, 1)$. Podmieneň Value at Risk náhodnej straty Y na danej hladine spoľahlivosti α je stredná hodnota rozdelenia α -chvostu Y , kde rozdelenie α -chvostu Y definujeme ako

$$G_\alpha(y, VaR_\alpha(Y)) = \begin{cases} \frac{G(Y) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{pre } y \geq VaR_\alpha(Y) \\ 0 & \text{pre } y < VaR_\alpha(Y). \end{cases}$$

Rockafellar a Uryasev [18] tiež ukázali, že CVaR má nasledujúcu vlastnosť:

$$CVaR_\alpha(Y) = \mathbb{E}(Y|Y \geq VaR_\alpha(Y)). \quad (2.5)$$

Alternatívnu možnosť zavedenia miery rizika CVaR dáva nasledujúca veta uvedená v Pflug [15].

Veta 2.2.

Podmieneň Value at Risk $CVaR_\alpha$ na hladine spoľahlivosti α získame ako riešenie optimalizačnej úlohy

$$CVaR_\alpha(Y) = \min_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[Y - a]^+ \right\}. \quad (2.6)$$

Výraz $[x]^+$ značí kladnú časť čísla x , t.j. $[x]^+ = \max\{x, 0\}$.

Práve zavedená miera rizika CVaR je konvexná v nasledujúcom zmysle:

Lemma 2.3.

Nech $\gamma \in [0, 1]$, potom

$$CVaR_\alpha(\gamma Y_1 + (1 - \gamma)Y_2) \leq \gamma CVaR_\alpha(Y_1) + (1 - \gamma)CVaR_\alpha(Y_2), \quad (2.7)$$

kde Y_1 a Y_2 sú ľubovoľné náhodné veličiny.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Rockafellar a Uryasev [18]. □

Nasledujúci vzťah medzi CVaR a SSD je dôsledkom vety 2.1.

Lemma 2.4.

Nech $Y_i = -X_i$ a $\mathbb{E}|Y_i| < \infty$ pre $i = 1, 2$. Potom platí:

$$X_1 \succeq_{SSD} X_2 \quad \Leftrightarrow \quad CVaR_\alpha(Y_1) \leq CVaR_\alpha(Y_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (2.8)$$

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kopa [7]. □

Ak predpokladáme, že je náhodná strata z portfólia reprezentovaná diskretnou náhodnou veličinou Y , ktorá nadobúda hodnoty y^t , $t = 1, \dots, T$ s rovnakou pravdepodobnosťou, ide o tzv. scenárový prístup. V tomto prípade môžeme $\text{CVaR}_\alpha(Y)$ počítať podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\text{CVaR}_\alpha(Y) = \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{y^t > \text{VaR}_\alpha(Y)} y^t. \quad (2.9)$$

Pri praktických výpočtoch je užitočné vyjadrenie $\text{CVaR}_\alpha(Y)$ ako funkciu α . Nech $y^{[k]}$ je k -ty najmenší prvok medzi y^1, y^2, \dots, y^T , t.j. platí $y^{[1]} \leq y^{[2]} \leq \dots \leq y^{[T]}$.

Lemma 2.5.

Ak $\alpha \in [\frac{k}{T}, \frac{k+1}{T}]$ a $\alpha \neq 1$ potom platí

$$\text{CVaR}_\alpha(Y) = y^{[k+1]} + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=k+1}^T (y^{[i]} - y^{[k+1]}) \quad (2.10)$$

pre $k = 0, 1, \dots, T-1$ a $\text{CVaR}_1(Y) = y^{[T]}$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kopa [7] alebo Rockafellar a Uryasev [18]. □

Spojením lemmatu 2.4 a lemmatu 2.5 získame nutnú a postačujúcu podmienku stochastickej dominancie druhého rádu (viď. Kopa [7]).

Veta 2.3.

Nech $Y_1 = -X_1$ a $Y_2 = -X_2$ sú diskretné náhodné veličiny, ktoré nadobúdajú hodnoty y_1^t a y_2^t , $t = 1, \dots, T$, s rovnakou pravdepodobnosťou. Potom

$$X_1 \succeq_{SSD} X_2 \Leftrightarrow \text{CVaR}_\alpha(Y_1) \leq \text{CVaR}_\alpha(Y_2) \quad \forall \alpha \in \{0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots, \frac{T-1}{T}\}.$$

Kapitola 3

Eficiencia portfólia vzhľadom k SSD

V tejto kapitole definujeme SSD efficientné portfólio. Na tomto mieste je nutné poznamenať, že autori, ktorí sa venovali tejto problematike pracovali s rôznymi definíciami eficientnosti portfólia vzhľadom k SSD. Prvá definícia, s ktorou pracoval Post, pokladá za SSD efficientné portfólio také, že neexistuje iné portfólio s väčším očakávaným úžitkom pre všetky rýdzo konkávne úžitkové funkcie. Kuosmanen a Kopa definovali SSD efficientné portfólio trochu odlišne. Pod pojmom SSD efficientné portfólio majú na mysli také portfólio, že žiadne iné portfólio nemá väčší alebo rovný očakávaný úžitok pre všetky konkávne úžitkové funkcie a ostre väčší pre aspoň jednu konkávnu úžitkovú funkciu. Ďalej v tejto kapitole uvedieme tri kritériá eficientnosti portfólia pre SSD. Kritériá majú formu úloh lineárneho programovania a na základe nich vieme rozhodnúť, či je testované portfólio SSD efficientné alebo nie.

3.1 Eficiencia portfólia

Uvažujme vektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)'$, ktorý reprezentuje výnosy z N dostupných aktív. Nech vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)'$ označuje váhy portfólia, t.j. λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ predstavuje podiel majetku investora investovaného do i -teho aktíva. Množinu všetkých možných portfólií môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{1}'\boldsymbol{\lambda} = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Obmedzenie $\mathbf{1}'\boldsymbol{\lambda} = 1$ znamená, že investor investuje celý svoj majetok. Požiadavkom $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$ sú zakázané tzv. krátke pozície, kedy investor môže predať aktívum, ktoré momentálne nevlastní. Ďalej označme testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)'$. Výnos portfólia $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ je náhodná veličina, ktorú môžeme vyjadriť ako:

$$\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^N r_i \lambda_i.$$

Definícia 3.1.

Hovoríme, že dané portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je SSD neeficientné, ak existuje portfólio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ tak, že $\mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau})$ pre každú úžitkovú funkciu $u \in U_2$ a existuje aspoň jedna $u \in U_2$, pre ktorú platí $\mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}) > \mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau})$. V opačnom prípade je portfólio $\boldsymbol{\tau}$ SSD eficientné.

Podľa práve uvedenej definície je portfólio SSD eficientné práve vtedy, keď nie je striktne dominované žiadnym iným portfóliom. Túto definíciu použili vo svojich prácach Ruszczynski a Vanderbei [20], Kuosmanen [9], Kopa [7], Kopa a Chovanec [8].

Z inej definície vychádza vo svojej práci Post [16].

Definícia 3.2.

Hovoríme, že dané portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je striktne SSD neeficientné, ak existuje portfólio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ tak, že $\mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}) > \mathbb{E}u(\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau})$ pre každú úžitkovú funkciu $u \in U_2^s$, kde $U_2^s \subset U_2$ je množina rýdzo konkávných úžitkových funkcií. V opačnom prípade je portfólio $\boldsymbol{\tau}$ striktne SSD eficientné.

Postova definícia 3.2 je slabšia ako definícia 3.1, pretože používa rýdzo konkávne úžitkové funkcie. Ak je portfólio striktne SSD neeficientné, potom je aj SSD neeficientné, ale ak je portfólio striktne SSD eficientné, potom ešte nemusí byť nutne aj SSD eficientné. Post [16] argumentoval, že definície 3.1 a 3.2 sú z empirického hľadiska zhodné.

Z definície 3.2 vychádzajú Postove kritériá striktnej efektivity vzhľadom k SSD, ktoré sú nutnou podmienkou pre SSD efektivitu portfólia. V ďalšej časti tejto kapitoly uvedieme tri kritériá efektivity vzhľadom k SSD.

3.2 Kritériá efektivity portfólia vzhľadom k SSD

Predpokladajme ďalej, že náhodný vektor \mathbf{r} má T rovnako pravdepodobných scenárov. Výnosy z aktív za platnosti rôznych scenárov sú dané maticou:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x}^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t)$ je t -ty riadok matice X , ktorý značí výnos pri t -tom scenári. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že stĺpce matice X sú lineárne nezávislé.

Symbolom $(X\boldsymbol{\tau})^{[t]}$ budeme označovať výnosy portfólia $\boldsymbol{\tau}$ za platnosti T rovnako pravdepodobných scenárov, pričom zložky riadkového vektora $X\boldsymbol{\tau} = ((X\boldsymbol{\tau})^{[1]}, \dots, (X\boldsymbol{\tau})^{[T]})$ sú zoradené vzostupne, t.j. $(X\boldsymbol{\tau})^{[1]} \leq \dots \leq (X\boldsymbol{\tau})^{[T]}$. Na základe, takto usporiadaného vektora môžeme zaviesť empirickú distribučnú funkciu (EDF) výnosu portfólia $\boldsymbol{\tau}$ nasledovne:

$$F(x) = \frac{1}{T} \max\{t \in \{1, \dots, T\} : x \geq (X\boldsymbol{\tau})^{[t]}\}.$$

Táto funkcia je po častiach konštantná a neklesajúca. Na overenie nutných a postačujúcich podmienok pre SSD z lemmatu 2.1, budeme v týchto podmienkach používať nasledujúcu vetu.

Veta 3.1.

Nech $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1$ a $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2$ sú náhodné veličiny, ktoré nadobúdajú hodnoty $\mathbf{x}^t\boldsymbol{\tau}_1$ a $\mathbf{x}^t\boldsymbol{\tau}_2$, $t = 1, \dots, T$ s rovnakými pravdepodobnosťami $\frac{1}{T}$. Potom platí:

(i)

$$\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\tau}_1)^{[j]} \geq \sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\tau}_2)^{[j]} \quad t = 1, \dots, T$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\tau}_1)^{[j]} \geq \sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\tau}_2)^{[j]} \quad t = 1, \dots, T \quad a \\ & \sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\tau}_1)^{[j]} > \sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\tau}_2)^{[j]} \quad \text{pre aspoň jedno } t, \end{aligned}$$

kde symbol $(X\boldsymbol{\tau}_1)^{[j]}$ označuje vzostupne zoradené výnosy portfólia $\boldsymbol{\tau}_1$, t.j. $(X\boldsymbol{\tau}_1)^{[1]} \leq \dots \leq (X\boldsymbol{\tau}_1)^{[T]}$. Analogicky pre portfólio $\boldsymbol{\tau}_2$ platí $(X\boldsymbol{\tau}_2)^{[1]} \leq \dots \leq (X\boldsymbol{\tau}_2)^{[T]}$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený napríklad v Levy [10]. □

Teraz uvedieme kritériá efície portfólia pre SSD.

3.2.1 Postovo kritérium

Prvé kritériá efície daného portfólia pre SSD navrhol Post [16], ktorý vychádzal z definície 3.2.

Usporiadame vzostupne zložky vektora výnosov $X\boldsymbol{\tau}$ a v rovnakom poradí zoradíme aj riadky matice X . To znamená, že riadky novej matice X sú usporiadané tak, aby platilo $\mathbf{x}^i\boldsymbol{\tau} = (X\boldsymbol{\tau})^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, T$. Symboly x_n^t , $n = 1, 2, \dots, N$, $t = 1, 2, \dots, T$ označujú prvky takto usporiadanej matice X .

Nutná a postačujúca podmienka striktnej SSD efície portfólia využíva nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$\xi(\boldsymbol{\tau}) = \min_{\theta, \beta} \theta \tag{3.1}$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \beta_t (\mathbf{x}^t\boldsymbol{\tau}) - x_n^t / T + \theta & \geq 0 & n = 1, 2, \dots, N \\ \beta_t - \beta_{t+1} & \geq 0 & t = 1, 2, \dots, T-1 \\ \beta_t & \geq 0 & t = 1, 2, \dots, T-1 \\ \beta_T & = 1. \end{aligned}$$

Môže nastať prípad, že $\mathbf{x}^t \boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}^{t+1} \boldsymbol{\tau}$, pre nejaké $t \in \{1, 2, \dots, T-2\}$, potom zmeníme obmedzenie $\beta_t - \beta_{t+1} \geq 0$ na dvojicu obmedzení $\beta_t - \beta_{t+2} \geq 0$ a $\beta_{t-1} - \beta_{t+1} \geq 0$ ak $t \in \{2, \dots, T-2\}$. Ďalej, ak $\mathbf{x}^{T-1} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\tau}$, potom nahradíme obmedzenia $\beta_{T-1} - \beta_T \geq 0$ a $\beta_T = 1$ dvojicou obmedzení $\beta_{T-1} \geq 1$ a $\beta_T \geq 1$.

Veta 3.2.

Portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je striktne SSD efficientné práve vtedy, keď $\xi(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Post [16]. □

Môžeme skonštruovať príklad, kde je portfólio striktne SSD efficientné, ale nie je SSD efficientné. Tento príklad je uvedený nižšie v kapitole 4 príklad 4.3. Podmienka $\xi(\boldsymbol{\tau}) = 0$ je len nutná, ale nie je postačujúca podmienka pre SSD eficientiu.

Úloha (3.1) nie je výpočetne veľmi náročná, má $T + 1$ premenných a $N + 2T - 1$ obmedzení. Nevýhodou tohto testu je, že nevie určiť portfólio, ktoré by dominovalo testované portfólio $\boldsymbol{\tau}$ vzhľadom k SSD, a teda nevie nájsť ani efficientné SSD dominujúce portfólio.

Ak je hodnota testovej štatistiky $\xi(\boldsymbol{\tau})$ rovná nule, potom existuje, vďaka minimaxovej vete Sion [21], investor s úžitkovou funkciou $u \in U_2^S$ tak, že pre tohoto investora je testované portfólio optimálne, t.j. maximalizuje jeho očakávaný úžitok.

3.2.2 Kuosmanenovo kritérium

Teraz sa budeme zaoberať SSD eficientiou v zmysle definície 3.1. Kuosmanen [9] navrhol nasledujúce kritérium pre SSD (najprv uvedieme nutnú podmienku). Nech

$$\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = \max_{W, \boldsymbol{\lambda}} \left(\sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{x}^t \boldsymbol{\tau}) \right) / T \quad (3.2)$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^i \boldsymbol{\lambda} &\geq \sum_{j=1}^T w_{ij} \mathbf{x}^j \boldsymbol{\tau} \quad i = 1, 2, \dots, T \\ W &\in \Xi \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda, \end{aligned}$$

kde

$$\Xi \equiv \left\{ [w_{ij}]_{T \times T} : 0 \leq w_{ij} \leq 1, \sum_{i=1}^T w_{ij} = \sum_{j=1}^T w_{ij} = 1, \forall i, j = 1, 2, \dots, T \right\}$$

značí množinu dvojite stochastických matíc.

Veta 3.3.

$\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0$ je nutná podmienka pre SSD eficientiu portfólia $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kuosmanen [9]. □

Testovú štatistiku $\theta^N(\boldsymbol{\tau})$ môžeme interpretovať ako mieru neeficencie vzhľadom k SSD. Táto miera určuje maximálny možný nárast očakávaného výnosu, ktorý môžeme získať ak si vyberieme namiesto testovaného portfólia $\boldsymbol{\tau}$ iné portfólio, ktoré SSD dominuje portfólio $\boldsymbol{\tau}$. Takže ak je táto miera neeficencie rovná nule, potom je maximálny nárast očakávaného výnosu získaný nahradením $\boldsymbol{\tau}$ za SSD dominujúce portfólio rovný nule, takže neexistuje SSD dominujúce portfólio s väčším očakávaným výnosom ako je očakávaný výnos z testovaného portfólia $\boldsymbol{\tau}$. Táto podmienka však nie je nutná a postačujúca, pretože môže existovať striktne SSD dominujúce portfólio s rovnakým výnosom ako $\boldsymbol{\tau}$.

Pre optimálne riešenie $\boldsymbol{\lambda}^*$ úlohy (3.2) platí $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$. Táto skutočnosť vyplýva z nasledujúceho tvrdenia, ktoré dokázali Hardy, Littlewood a Polya [5].

Veta 3.4.

Nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:

(i)

$$\sum_{i=1}^t (X\boldsymbol{\lambda})^{[i]} \geq \sum_{i=1}^t (X\boldsymbol{\tau})^{[i]}, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

(ii) *existuje dvojite stochastická matica $W \in \Xi$ tak, že*

$$\mathbf{x}^i \boldsymbol{\lambda} \geq \sum_{j=1}^T w_{ij} \mathbf{x}^j \boldsymbol{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots, T.$$

Z tvrdenia (i) tejto vety vyplýva, že $\boldsymbol{\lambda}$ SSD dominuje portfólio $\boldsymbol{\tau}$. Preto každé prípustné riešenie $\boldsymbol{\lambda}$ úlohy (3.2) podľa vety 3.1 SSD dominuje testované portfólio $\boldsymbol{\tau}$.

K odvodeniu nutnej a postačujúcej podmienky eficiecie portfólia vzhľadom k SSD uvažujme:

$$\theta^S(\boldsymbol{\tau}) = \min_{W, \boldsymbol{\lambda}, S^+, S^-} \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^T (s_{ij}^+ + s_{ij}^-) \quad (3.3)$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^i \boldsymbol{\lambda} &= \sum_{j=1}^T w_{ij} \mathbf{x}^j \boldsymbol{\tau} & i = 1, 2, \dots, T \\ s_{ij}^+ - s_{ij}^- &= w_{ij} - \frac{1}{2} & i, j = 1, 2, \dots, T \\ s_{ij}^+, s_{ij}^- &\geq 0 & i, j = 1, 2, \dots, T \\ W &\in \Xi \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda, \end{aligned}$$

kde $S^+ = \{s_{ij}^+\}_{i,j=1}^T$, $S^- = \{s_{ij}^-\}_{i,j=1}^T$ a $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^T$.

Hodnoty vo vektore výnosov $X\boldsymbol{\tau}$ sa môžu opakovať. Označme ε_k počet hodnôt, ktoré sa vo vektore $X\boldsymbol{\tau}$ opakujú práve k -krát. (napr. $\varepsilon_3 = 1$, ak $\mathbf{x}^j \boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}^i \boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}^t \boldsymbol{\tau}$ a žiadna iná hodnota sa vo vektore nevyskytuje práve 3-krát). Kuosmanen [9] uvádza teoretické

minimum a teoretické maximum, ktoré môže testová štatistika $\theta^S(\boldsymbol{\tau})$ nadobúdať. Minimum získame voľbou $W_{ij} = 1/T$ pre všetky $i, j = 1, 2, \dots, T$ a maximum závisí na počte opakujúcich sa hodnôt vo vektore výnosov $X\boldsymbol{\tau}$. Platí:

$$\theta^S(\boldsymbol{\tau}) \in \left[\frac{1}{2}T^2 - T, \frac{1}{2}T^2 - \sum_{k=1}^T k\varepsilon_k \right].$$

Veta 3.5.

Nutná a postačujúca podmienka SSD eficientie portfólia $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je

$$\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \wedge \quad \theta^S(\boldsymbol{\tau}) = \frac{T^2}{2} - \sum_{k=1}^T k\varepsilon_k.$$

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kuosmanen [9]. □

Úloha (3.2) má $T^2 + N$ premenných a $T^2 + 3T + N + 1$ obmedzení a úloha (3.3) má $3T^2 + N$ premenných a $4T^2 + 3T + N + 1$ obmedzení. S rastúcim počtom scenárov počet premenných a obmedzení kvadraticky rastie. V porovnaní s Postovým kritériom (3.1) sú úlohy (3.2) a (3.3) výrazne väčšie. Výhodou Kuosmanenovho kritéria oproti Postovmu je, že ide o nutnú a postačujúcu podmienku pre SSD eficientiu a ku každému SSD neeficientnému portfóliu nájde portfólio, ktoré ho SSD dominuje. Problém je však v tom, že ak Kuosmanenovo kritérium nájde nekonečne veľa portfólií, ktoré SSD dominujú portfólio $\boldsymbol{\tau}$ nemusia byť všetky SSD eficientné, a tak sa môže stať, že software, ktorý typicky nájde len jedno riešenie, vyberie SSD neeficientné portfólio, vid'. Kopa a Chovanec [8]. V prípade, že úloha (3.3) má jediné riešenie, potom je nájdené dominujúce portfólio SSD eficientné.

3.2.3 Kopovo kritérium

Ďalšie kritérium eficientie portfólia pre SSD navrhol vo svojej práci Kopa [7]. Toto kritérium je založené na kvantilovom prístupe a využíva vzťah medzi mierou rizika CVaR a stochastickou dominanciou druhého rádu. Začneme nutnou podmienkou.

Veta 3.6.

Nech $\alpha_k = \frac{k}{T}$, $k = 0, 1, \dots, T - 1$. Nech

$$d^* = \max_{\lambda_n} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{n=1}^N \lambda_n [CVaR_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) - CVaR_{\alpha_k}(-r_n)] \quad (3.4)$$

za podmienok

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n [CVaR_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) - CVaR_{\alpha_k}(-r_n)] \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, T - 1$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda.$$

Ak $d^ > 0$, potom je $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ SSD neeficientné portfólio. Pre optimálne riešenie úlohy (3.4) $\boldsymbol{\lambda}^*$ platí $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succ_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kopa [7]. □

Ide o úlohu lineárneho programovania s N premennými a $N + T + 1$ obmedzeniami, teda o pomerne malú úlohu. Ďalšou výhodou tohto kritéria je, že k SSD neeficientnému portfóliu nájde dominujúce portfólio. Veta 3.6 je však len nutnou podmienkou eficientie portfólia pre SSD a môže sa stať, že $\boldsymbol{\tau}$ je neeficientné aj keď úloha (3.4) nemá žiadne prípustné riešenie alebo ak $d^* = 0$. Ak $d^* = 0$, potom môžu nastať dva prípady:

- Úloha (3.4) má jediné riešenie $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\tau}$. Ak nastane tento prípad, potom je $\boldsymbol{\tau}$ SSD eficientné portfólio.
- Úloha (3.4) má optimálne riešenie $\boldsymbol{\lambda}^* \neq \boldsymbol{\tau}$. V tomto prípade je $\boldsymbol{\tau}$ SSD neeficientné portfólio a platí $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$.

Prípad, keď $d^* = 0$, $\boldsymbol{\lambda}^* \neq \boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\tau}$ je SSD eficientné portfólio nemôže nastať, pretože by sme dospeli k sporu s lineárnou nezávislosťou riadkov matice X .

Ak úloha (3.4) nemá žiadne prípustné riešenie, potom môžeme použiť nasledujúcu nutnú a postačujúcu podmienku eficientie portfólia pre SSD.

Veta 3.7.

Nech $\alpha_k = \frac{k}{T}$, $k = 0, 1, \dots, T - 1$. *Nech*

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k} \sum_{k=0}^{T-1} D_k \quad (3.5)$$

za podmienok

$$\begin{aligned} CVaR_{\alpha_k}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - b_k - \frac{1}{1-\alpha_k} \mathbb{E}[-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} - b_k]^+ &\geq D_k, \quad k = 0, 1, \dots, T - 1 \\ D_k &\geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, T - 1 \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda. \end{aligned}$$

Ak $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$, *potom je* $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ *SSD neeficientné portfólio. Optimálne riešenie úlohy (3.5) $\boldsymbol{\lambda}^*$ je SSD eficientné portfólio a platí* $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$. *Inak* $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$ *a* $\boldsymbol{\tau}$ *je SSD eficientné portfólio.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kopa [7]. □

Úlohu (3.5) môžeme prepísať ako úlohu lineárneho programovania s $T(T + 2) + N$ premennými a $2T(T + 1) + N + 1$ podmienkami nasledovne:

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k, w_k^t} \sum_{k=1}^T D_k \quad (3.6)$$

za podmienok

$$\begin{aligned}
 \text{CVaR}_{\frac{k-1}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - b_k - \frac{1}{(1-\frac{k-1}{T})T} \sum_{t=1}^T w_k^t &\geq D_k, & k = 1, \dots, T \\
 w_k^t &\geq -\mathbf{x}^t \boldsymbol{\lambda} - b_k, & t, k = 1, \dots, T \\
 w_k^t &\geq 0, & t, k = 1, \dots, T \\
 D_k &\geq 0, & k = 1, \dots, T \\
 \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda.
 \end{aligned}$$

Táto nutná a postačujúca podmienka rieši menšiu úlohu lineárneho programovania ako je to v prípade Kuosmanenovho kritéria a navyiac určí SSD efektívne portfólio, ktoré SSD dominuje testované portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$.

Testovú štatistiku $D^*(\boldsymbol{\tau})$ môžeme interpretovať ako „vzdialenosť“ medzi testovaným portfóliom $\boldsymbol{\tau}$ a jeho dominujúcim efektívnym portfóliom. Táto „vzdialenosť“ je vyjadrená pomocou rozdielu CVaR testovaného portfólia $\boldsymbol{\tau}$ a CVaR dominujúceho efektívneho portfólia $\boldsymbol{\lambda}$ v T bodoch. Ak je tento rozdiel rovný nule, potom je portfólio $\boldsymbol{\tau}$ SSD efektívne.

Kapitola 4

Miery neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD

V tejto kapitole sa budeme zaoberať tromi mierami SSD neeficiencie portfólia, ktoré sú odvodené z kritérií eficientnosti portfólia vzhľadom k SSD, uvedených v predchádzajúcej kapitole. Na tomto mieste je nutné poznamenať, že terminológia sa u autorov, ktorí sa touto problematikou zaoberali rozchádza. Napríklad Post ju zaviedol vo svojich skorších prácach ako mieru eficientnosti. Keďže je táto miera pre neeficientné portfólio kladná a pre eficientné portfólio je rovná nule prikloníme sa v tejto práci k terminológii, ktorú používajú iní autori, napr. Kuosmanen [9] alebo Kopa [7] a budeme ju nazývať miera neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD.

V prvej časti overíme základné vlastnosti týchto mier, a to konkrétne konzistenciu s SSD a konvexitu na určitej množine portfólií, o ktorej budeme predpokladať, že je konvexná. K zaujímavému výsledku dospeli Dybving a Ross [2], ktorí ukázali, že množina SSD eficientných portfólií nie je konvexná. V podkapitole 4.2 sa pokúsime nájsť vzťahy medzi týmito mierami neeficiencie.

Táto kapitola obsahuje niekoľko malých príkladov, ktorých zdrojové kódy v programe GAMS sú k dispozícii na priloženom DVD.

4.1 Základné vlastnosti mier neeficiencie

Budeme uvažovať tri miery neeficiencie portfólia τ . Aby sme mohli porovnať mieru neeficiencie vzhľadom k SSD dvoch portfólií potrebujeme zaručiť, aby bola táto miera konzistentná s SSD. Nasledujúcu definíciu konzistencie miery neeficiencie s SSD zaviedol vo svojej práci Kopa [7].

Definícia 4.1.

Nech μ je miera neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD. Hovoríme, že μ je konzistentná

s SSD práve vtedy, keď

$$\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2 \quad \Rightarrow \quad \mu(\boldsymbol{\tau}_1) \leq \mu(\boldsymbol{\tau}_2),$$

pre všetky portfóliá $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in \Lambda$.

Vlastnosť konzistencie zaručí, že ak je dané portfólio horšie ako iné portfólio pre každého investora averzného alebo neutrálneho voči riziku, potom má väčšiu mieru neeficiencie.

Ďalej budeme používať rovnaké označenie ako v predchádzajúcej kapitole.

4.1.1 Miera neeficiencie ξ

Prvá miera neeficiencie, ktorú budeme skúmať je miera ξ daná úlohou (3.1). Nech symboly $(X\boldsymbol{\tau})^{[t]}$, $t = 1, \dots, T$ označujú výnosy portfólia $\boldsymbol{\tau}$ pri T rôznych scenároch zoradené vzostupne, t.j. $(X\boldsymbol{\tau})^{[1]} \leq \dots \leq (X\boldsymbol{\tau})^{[T]}$ a riadky matice X sú zoradené pred riešením úlohy v tom istom poradí ako zložky vektora $X\boldsymbol{\tau}$. Teda riadky matice X sú usporiadané tak, aby platilo $\mathbf{x}^i\boldsymbol{\tau} = (X\boldsymbol{\tau})^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, T$. Potom duálnu úlohu k úlohe (3.1) odvodil Post [16] a má nasledujúci tvar:

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = \max_{\boldsymbol{\lambda}, \rho_1, \dots, \rho_{T-1}} (\mathbf{x}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{x}^T\boldsymbol{\tau})/T + \rho_{T-1} \quad (4.1)$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \rho_1 + (\mathbf{x}^1\boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}^1\boldsymbol{\lambda})/T &\leq 0 \\ \rho_t - \rho_{t-1} + (\mathbf{x}^t\boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}^t\boldsymbol{\lambda})/T &\leq 0, \quad t = 2, \dots, T-1 \\ \rho_t &\geq 0, \quad t = 1, \dots, T-1 \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda. \end{aligned}$$

Duálna testová štatistika $\psi(\boldsymbol{\tau})$ vyjadruje maximálny možný nárast očakávaného výnosu, t.j. $\sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{x}^t\boldsymbol{\tau})/T$ ak nahradíme testované portfólio $\boldsymbol{\tau}$ iným prípustným portfóliom $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$.

Táto úloha má $T + N - 1$ premenných a $2T + N - 1$ obmedzení. Ako vedľajší produkt testu (4.1) dostaneme optimálne riešenia ρ_t^* a $\boldsymbol{\lambda}^*$. Premenné λ_n , $n = 1, \dots, N$ reprezentujú duálne premenné pre primárne obmedzenia $\sum_{t=1}^T \beta_t (\mathbf{x}^t\boldsymbol{\tau} - x_n^t)/T + \theta \geq 0$, $n = 1, \dots, N$. Podľa podmienok komplementarity sú tieto obmedzenia splnené ako rovnosť pre aktíva, ktoré tvoria portfólio $\boldsymbol{\lambda}^*$, ktoré maximalizuje hodnotu testovej štatistiky ψ , t.j. maximalizuje možný nárast očakávaného výnosu, ktorý získame ak si namiesto testovaného portfólia $\boldsymbol{\tau}$ vyberieme portfólio $\boldsymbol{\lambda}^*$. Tu však na rozdiel od výsledného portfólia, ktoré je optimálnym riešením Kuosmanenovho kritéria (3.2) a Kópovho kritéria (3.6), nemusí byť splnená podmienka, že $\boldsymbol{\lambda}^*$ SSD dominuje testované portfólio $\boldsymbol{\tau}$. Nasledujúci ilustračný príklad potvrdzuje túto skutočnosť.

Príklad 4.1.

Uvažujme tri akcie, tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (0.6, 0.1, 0.3)'$. Vektor výnosov z testovaného portfólia je $X\boldsymbol{\tau} = (-1.6, 3.4, 3.1)$. Zložky vektora usporiadame podľa veľkosti vzostupne a rovnaké poradie priradíme aj riadkom matice X . Riešime úlohu (4.1) v programe GAMS a získame hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\tau}) = 1.7$ a výsledné portfólio $\boldsymbol{\lambda}^* = (0, 1, 0)'$. Vektor výnosov z výsledného portfólia $\boldsymbol{\lambda}^*$ je $X\boldsymbol{\lambda}^* = (5, 7, -2)$. Podmienka SSD dominance z vety 3.1 teda nie je splnená, pretože:

$$-2 < -1.6,$$

$$3 > 1.5,$$

$$10 > 4.9,$$

a preto neplatí, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^* \succeq_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$. Toto je spôsobené tým, že pri riešení úlohy (4.1) sa usporiadajú zložky vektora výnosov vzostupne a do rovnakého poradia sa usporiadajú aj riadky matice X . Takže úloha (4.1) je riešená vzhľadom k tomuto konkrétnemu usporiadaniu riadkov matice X .

Optimálne riešenie úlohy (4.1) je $\boldsymbol{\lambda}^*$ a $\rho_t^* = \sum_{j=1}^t (\boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\tau})/T$ pre $t = 1, \dots, T-1$. Nahliadnutím na úlohu (4.1) vidíme, že toto riešenie vznikne rekurzívne, lebo pre testovú štatistiku platí:

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\tau}) \quad (4.2)$$

za podmienok

$$\sum_{j=1}^t (\boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\tau})/t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T-1 \\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda.$$

Podmienky úlohy (4.2) nezaručia, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succeq_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$. Pretože pre maticu X platí $(X\boldsymbol{\tau})^{[j]} = \boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\tau}$, $j = 1, \dots, T$, ale nemusí platiť $(X\boldsymbol{\lambda})^{[j]} = \boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\lambda}$, $j = 1, \dots, T$. Takže čísla $\boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\lambda}$, $j = 1, \dots, T$ nemusia byť usporiadané vzostupne. Preto podmienky

$$\sum_{j=1}^t (\boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\tau})/t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T-1 \quad (4.3)$$

nie sú ekvivalentné podmienkam

$$\sum_{j=1}^t ((X\boldsymbol{\lambda})^{[j]} - (X\boldsymbol{\tau})^{[j]})/t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad (4.4)$$

a teda nemusí platiť, že $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$.

Ďalej sme zistili, že očakávaný výnos z výsledného portfólia, ktoré je riešením úlohy (4.1) resp. (4.2), nemusí byť nutne najväčší možný očakávaný výnos, aký môžeme dosiahnúť nejakou voľbou zo všetkých možných portfólií $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$. Ide len o najväčší možný výnos z tých portfólií $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, ktoré sú prípustnými riešeniami úlohy (4.2). Nasledujúci príklad ilustruje, že Postov duálny test nenájde nutne portfólio s najväčším možným očakávaným výnosom.

Príklad 4.2.

Uvažujme tri akcie, štyri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (0.4, 0.2, 0.4)'$. Vektor výnosov z testovaného portfólia je $X\boldsymbol{\tau} = (0.8, 3.6, 4.6, 2.4)$. Očakávaný výnos z tohoto portfólia je 2.85. Zložky vektora usporiadame podľa veľkosti vzostupne a rovnaké poradie priradíme aj riadkom matice X . Riešime úlohu (4.1) v programe GAMS a získame jednak hodnotu testovej štatistiky $\psi_1(\boldsymbol{\tau}) = 0.05$ a výsledné portfólio $\boldsymbol{\lambda}_1^* = (0, 0.4, 0.6)'$. Vektor výnosov z výsledného portfólia $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ je $X\boldsymbol{\lambda}_1^* = (4.2, 4.2, 4.2, -1)$. Očakávaný výnos z tohto portfólia je 2.9, čo je o 0.05 viac ako očakávaný výnos z testovaného portfólia. Vektor výnosov z výsledného portfólia $\boldsymbol{\lambda}_2^* = (0, 0, 1)'$ je $X\boldsymbol{\lambda}_2^* = (3, 7, 5, -3)$. Očakávaný výnos z tohto portfólia je 3, čo je viac ako očakávaný výnos z portfólia $\boldsymbol{\lambda}_1^*$. Takže skutočne Postov duálny test nedá portfólio, ktoré by malo najväčší možný očakávaný výnos.

Úlohy (3.1) a (4.1) majú neprázdne množiny prípustných riešení, pretože $\boldsymbol{\tau}$ je vždy prípustné riešenie. Keďže $\rho_t^* = \sum_{j=1}^t (\mathbf{x}^j \boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{x}^j \boldsymbol{\tau}) / T$ pre $t = 1, \dots, T-1$ je optimálnym riešením úlohy (4.1) má podľa vety o dualite vždy optimálne riešenie i úloha (3.1) a hodnoty účelových funkcií v optimálnych riešeniach sú si rovné, t.j. $\xi(\boldsymbol{\tau}) = \psi(\boldsymbol{\tau})$. Existencia optimálneho riešenia je zaručená kompaktnosťou množiny Λ .

Nasledujúca veta je preto ekvivalentná vete 3.2.

Veta 4.1.

Portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je striktne SSD neeficientné práve vtedy, keď $\psi(\boldsymbol{\tau}) > 0$. Alternatívne, portfólio je striktne SSD eficientné práve vtedy, keď $\psi(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Post [16]. □

Na rozdiel od optimálneho riešenia Kopovho kritéria (3.6) nemusí platiť, že optimálne riešenie $\boldsymbol{\lambda}^*$ úlohy (4.1) je SSD eficientné. Výsledné portfólio v nasledujúcom príklade je zároveň príkladom portfólia, ktoré je striktne SSD eficientné, ale nie je SSD eficientné.

Príklad 4.3.

Uvažujme tri akcie, tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 11 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (0.6, 0.1, 0.3)'$. Zložky vektora usporiadame podľa veľkosti vzostupne a rovnaké poradie priradíme aj riadkom matice X . Riešime úlohu (4.1) v programe GAMS a získame hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\tau}) = 0.1\bar{3}$ a výsledné portfólio $\boldsymbol{\lambda}^* = (0.6\bar{7}\bar{3}, 0, 0.3\bar{2}\bar{6})'$. Riešime úlohu (4.1) a získame hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\lambda}^*) = 0$, takže je splnená nutná a postačujúca podmienka striktnej SSD efektivity portfólia $\boldsymbol{\lambda}^*$. Nutnú a postačujúcu podmienku SSD efektivity portfólia $\boldsymbol{\lambda}^*$ overíme riešením Kopovho kritéria (3.6). Dostaneme hodnotu testovej štatistiky $D^*(\boldsymbol{\lambda}^*) = 0.7$ a SSD dominujúce, efektívne portfólio $\boldsymbol{\lambda}_2^* = (0.\bar{6}\bar{3}, 0, 0.\bar{3}\bar{6})'$. Takže portfólio $\boldsymbol{\lambda}^*$ nie je SSD efektívne.

Označme $\Lambda^*(\boldsymbol{\tau}) \subset \Lambda$ množinu všetkých optimálnych riešení $\boldsymbol{\lambda}^*$ úlohy (4.1).

V dôkaze nasledujúcej vety je uvedený príklad, ktorý ukazuje, že miera neeficiencie ξ nie je konzistentná s SSD.

Veta 4.2.

Miera neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD ξ daná úlohou (3.1) nie je konzistentná s SSD.

Dôkaz. Využijeme rovnosť $\xi(\boldsymbol{\tau}) = \psi(\boldsymbol{\tau})$. Chceme ukázať, že existuje portfólio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ také, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ a pritom $\psi(\boldsymbol{\lambda}) > \psi(\boldsymbol{\tau})$. Protipríklad konzistencie miery neeficiencie ψ dáva nasledujúca úloha, ktorú sme opäť riešili v programe GAMS. Uvažujme štyri akcie a štyri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

ďalej uvažujme testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (0.2, 0, 0.1, 0.7)'$. Vektor výnosov z testovaného portfólia je $X\boldsymbol{\tau} = (1.9, 2.6, -1.6, 2.3)$. Zložky vektora usporiadame podľa veľkosti vzostupne a rovnaké poradie priradíme aj riadkom matice X . Riešime úlohu (4.1) a získame hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\tau}) = 0.095$. Teraz riešime tú istú úlohu (4.1) pre testované portfólio $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.1, 0.5, 0.2)'$. Vektor výnosov z testovaného portfólia je $X\boldsymbol{\lambda} = (2.1, 0.1, 0.4, 2.6)$. Zložky vektora usporiadame podľa veľkosti vzostupne a rovnaké poradie priradíme aj riadkom matice X . Riešime úlohu (4.1) a získame hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\lambda}) = 0.2$.

Vydíme, že platí podmienka SSD dominance z vety 3.1, t.j.

$$0.1 > -1.6,$$

$$0.5 > 0.3,$$

$$2.6 = 2.6,$$

$$5.2 = 5.2,$$

preto platí, že $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$. Takže podľa definície konzistencie miery neeficiencie s SSD 4.1 by malo platiť, že $\psi(\boldsymbol{\lambda}) \leq \psi(\boldsymbol{\tau})$, čo v našom prípade nie je splnené, pretože $\psi(\boldsymbol{\lambda}) = 0.2 > \psi(\boldsymbol{\tau}) = 0.095$. Takže miera neeficiencie vzhľadom k SSD ξ daná úlohou (3.1) nie je konzistentná s SSD. \square

Označme $I(\boldsymbol{\tau})$ množinu všetkých portfólií, ktorých výnosy sú SSD dominované výnosmi z portfólia $\boldsymbol{\tau}$, t.j.

$$I(\boldsymbol{\tau}) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda : \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau} \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}\}.$$

Budeme predpokladať, inšpirovaní Kopa [7], že množina $I(\boldsymbol{\tau})$ je konvexná, t.j. ak $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in I(\boldsymbol{\tau})$, potom

$$\gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1 - \gamma)\boldsymbol{\tau}_2 \in I(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \gamma \in [0, 1].$$

Veta 4.3.

Miera neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD ξ daná úlohou (3.1) nie je konvexná na množine $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$.

Dôkaz. Miera neeficiencie by bola konvexná na množine $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$, ak by pre každé dve portfóliá $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ platila nerovnosť:

$$\xi(\gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1 - \gamma)\boldsymbol{\tau}_2) \leq \gamma\xi(\boldsymbol{\tau}_1) + (1 - \gamma)\xi(\boldsymbol{\tau}_2),$$

pre každé $\gamma \in [0, 1]$.

Uvažujme štyri akcie, tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

a portfólio $\boldsymbol{\tau}_1 = (0, 1, 0, 0)'$. Najprv sa presvedčíme, že množina $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ je konvexná. Prvky množiny $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ sú SSD dominované portfóliom $\boldsymbol{\tau}$, t.j. musia vyhovovať podmienkam vety 3.1 (i). Takže portfóliá $\boldsymbol{\lambda} \in I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ musia spĺňať nasledujúcu sústavu lineárnych nerovnic:

$$\begin{aligned} 0\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 + 1\lambda_4 &\leq 2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 &\leq 5 \\ 7\lambda_1 + 9\lambda_2 + 10\lambda_3 + 10\lambda_4 &\leq 9 \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Prvé dve obmedzenia nie sú aktívne, takže zostane $N + 2$ aktívnych obmedzení. Tieto lineárne nerovnosti definujú $N + 2$ polopriestorov a ich prienik je konvexná polyedrická množina.

Teraz chceme ukázať, že miera neeficiencie ξ nie je konvexná na množine $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$.

Najprv testujeme portfólio $\boldsymbol{\tau}_1 = (1, 0, 0, 0)'$. Riešime úlohu (4.1) v programe GAMS a získame hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\tau}_1) = 1$, okrem toho $X\boldsymbol{\tau} \succeq_{SSD} X\boldsymbol{\tau}_1$, a teda $\boldsymbol{\tau}_1 \in I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$. Potom testujeme portfólio $\boldsymbol{\tau}_2 = (0, 1, 0, 0)'$ a získame hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\tau}_2) = 0$. Zvolíme hodnotu $\gamma = \frac{1}{2}$, takže zostáva otestovať portfólio $\boldsymbol{\tau}_3 = \gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1 - \gamma)\boldsymbol{\tau}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)'$. Je zrejmé, že $\boldsymbol{\tau}_3 \in I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$. Hodnota testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\tau}_3) = \frac{2}{3}$. Platí:

$$\psi(\gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1 - \gamma)\boldsymbol{\tau}_2) > \gamma\psi(\boldsymbol{\tau}_1) + (1 - \gamma)\psi(\boldsymbol{\tau}_2),$$

pretože

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$

□

4.1.2 Miera neeficiencie θ^N

Ďalšia miera neeficiencie, ktorej vlastnosti overíme je miera θ^N daná úlohou (3.2). Označme $\Delta^*(\boldsymbol{\tau}) \subset \Lambda$ množinu všetkých optimálnych riešení $\boldsymbol{\lambda}^*$ úlohy (3.2). Všetky portfóliá $\boldsymbol{\lambda}^* \in \Delta^*(\boldsymbol{\tau})$ SSD dominujú testované portfólio $\boldsymbol{\tau}$. Ak má množina $\Delta^*(\boldsymbol{\tau})$ nekonečný počet prvkov, potom nemusia byť všetky portfóliá z množiny $\Delta^*(\boldsymbol{\tau})$ SSD efektívne, vid'. Kopa a Chovanec [8].

Príklad 4.4.

Uvažujme tri akcie, tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (1, 0, 0)'$. Optimálnym riešením úlohy (3.2) sú portfóliá $\boldsymbol{\lambda}_1^* = (0, 1, 0)'$, $\boldsymbol{\lambda}_2^* = (0, 0, 1)'$ a všetky portfóliá tvaru $\boldsymbol{\lambda}^* = \gamma\boldsymbol{\lambda}_1^* + (1 - \gamma)\boldsymbol{\lambda}_2^*$, $\gamma \in [0, 1]$. Z týchto portfólií je SSD efektívne len portfólio $\boldsymbol{\lambda}_1^* = (0, 1, 0)'$.

Nasledujúce pomocné lemma, hovorí o vlastnosti optimálneho riešenia úlohy (3.2).

Lemma 4.1.

Nech $\boldsymbol{\lambda}_1^* \in \Delta^*(\boldsymbol{\tau}_1)$ a $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succ_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}_2$. Potom $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ je prípustné riešenie úlohy (3.2) pre portfólio $\boldsymbol{\tau}_2$ a pre optimálne riešenie $\boldsymbol{\lambda}_2^* \in \Delta^*(\boldsymbol{\tau}_2)$ platí:

$$\sum_{t=1}^T \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\lambda}_2^* \geq \sum_{t=1}^T \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\lambda}_1^*.$$

Dôkaz. Najprv ukážeme, že je λ_1^* prípustné riešenie úlohy (3.2) pre portfólio τ_2 . Z vety 3.1 vieme, že pre $r'\tau_1 \succ_{SSD} r'\tau_2$ platí:

$$\sum_{j=1}^t ((X\tau_1)^{[j]} - (X\tau_2)^{[j]})/t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad \text{a}$$

$$\sum_{j=1}^t ((X\tau_1)^{[j]} - (X\tau_2)^{[j]})/t > 0, \quad \text{pre aspoň jedno } t.$$

Keďže $\lambda_1^* \in \Delta^*(\tau_1)$, a teda podľa vety 3.4 portfólio λ_1^* SSD dominuje portfólio τ_1 , platí $r'\lambda_1^* \succeq_{SSD} r'\tau_1 \succ_{SSD} r'\tau_2$, takže λ_1^* je prípustné riešenie úlohy (3.2) pre portfólio τ_2 .

Druhú časť lemmatu dokážeme sporom. Nech

$$\sum_{t=1}^T x^t \lambda_2^* < \sum_{t=1}^T x^t \lambda_1^*.$$

Tu nastáva spor s tým, že portfólio λ_2^* je optimálnym riešením úlohy (3.2) pre portfólio τ_2 , pretože λ_1^* i λ_2^* sú prípustnými riešeniami tejto úlohy a očakávaný výnos z portfólia λ_1^* je väčší ako očakávaný výnos z portfólia λ_2^* . \square

Veta 4.4.

Miera neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD θ^N daná úlohou (3.2) je konzistentná s SSD. Takže platí:

$$r'\tau_1 \succ_{SSD} r'\tau_2 \Rightarrow \theta^N(\tau_1) \leq \theta^N(\tau_2).$$

Dôkaz. Z lemmatu 4.1 vieme, že pre $r'\tau_1 \succ_{SSD} r'\tau_2$ a optimálne riešenia $\lambda_1^* \in \Delta^*(\tau_1)$ a $\lambda_2^* \in \Delta^*(\tau_2)$ platí:

$$\sum_{t=1}^T x^t \lambda_2^* \geq \sum_{t=1}^T x^t \lambda_1^*.$$

Ďalej z vety 3.1 vieme, že pre $r'\tau_1 \succ_{SSD} r'\tau_2$ platí:

$$\sum_{t=1}^T x^t \tau_1 \geq \sum_{t=1}^T x^t \tau_2.$$

Z týchto nerovností, už vyplýva tvrdenie vety, pretože:

$$\begin{aligned} \theta^N(\tau_1) &= \frac{1}{T} (\sum_{t=1}^T x^t \lambda_1^* - \sum_{t=1}^T x^t \tau_1) \leq \\ &\leq \frac{1}{T} (\sum_{t=1}^T x^t \lambda_2^* - \sum_{t=1}^T x^t \tau_2) = \theta^N(\tau_2). \end{aligned}$$

\square

Pripomeňme, že označujeme $I(\boldsymbol{\tau})$ množinu všetkých portfólií, ktorých výnosy sú SSD dominované výnosom z portfólia $\boldsymbol{\tau}$, t.j.

$$I(\boldsymbol{\tau}) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda : \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau} \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}\}.$$

Ďalej predpokladáme, že množina $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ je konvexná.

V dôkaze nasledujúcej vety je uvedený príklad, ktorý ukazuje, že miera neeficiencie θ^N nie je konvexná na množine $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$.

Veta 4.5.

Miera neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD θ^N daná úlohou (3.2) nie je konvexná na množine $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$.

Dôkaz. Miera neeficiencie by bola konvexná na množine $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$, ak by pre každé dve portfóliá $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ platila nerovnosť:

$$\theta^N(\gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1 - \gamma)\boldsymbol{\tau}_2) \leq \gamma\theta^N(\boldsymbol{\tau}_1) + (1 - \gamma)\theta^N(\boldsymbol{\tau}_2),$$

pre každé $\gamma \in [0, 1]$. Uvažujme rovnakú maticu X aj portfólio $\boldsymbol{\tau}$ ako v dôkaze vety 4.3. Už vieme, že množina $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ je konvexná. Postupujeme analogicky ako v dôkaze vety 4.3.

Najprv testujeme portfólio $\boldsymbol{\tau}_1 = (1, 0, 0, 0)'$. Riešime úlohu (3.2) v programe GAMS a získame hodnotu testovej štatistiky $\theta^N(\boldsymbol{\tau}_1) = 1$, okrem toho $X\boldsymbol{\tau} \succeq_{SSD} X\boldsymbol{\tau}_1$, a teda $\boldsymbol{\tau}_1 \in I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$. Potom testujeme portfólio $\boldsymbol{\tau}_2 = (0, 1, 0, 0)'$ a získame hodnotu testovej štatistiky $\theta^N(\boldsymbol{\tau}_2) = 0$. Zvolíme hodnotu $\gamma = \frac{1}{2}$, takže zostáva otestovať portfólio $\boldsymbol{\tau}_3 = \gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1 - \gamma)\boldsymbol{\tau}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)'$. Je zrejmé, že $\boldsymbol{\tau}_3 \in I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$. Hodnota testovej štatistiky $\theta^N(\boldsymbol{\tau}_3) = \frac{2}{3}$. Platí:

$$\theta^N(\gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1 - \gamma)\boldsymbol{\tau}_2) > \gamma\theta^N(\boldsymbol{\tau}_1) + (1 - \gamma)\theta^N(\boldsymbol{\tau}_2),$$

pretože

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$

□

4.1.3 Miera neeficiencie D^*

A konečne posledná miera neeficiencie, ktorou sa budeme zaoberať je D^* daná úlohou (3.5) alebo (3.6). Vlastnosti tejto miery dokázal Kopa [7].

Veta 4.6.

(i) Miera neeficiencie portfólia vzhľadom k SSD D^* daná úlohou (3.5) alebo (3.6) je konzistentná s SSD.

(ii) Ak $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2$ a obe portfóliá $\boldsymbol{\tau}_1$ a $\boldsymbol{\tau}_2$ sú SSD neeficientné, potom

$$D^*(\boldsymbol{\tau}_2) = D^*(\boldsymbol{\tau}_1) + \sum_{k=1}^T [CVaR_{\frac{k-1}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2) - CVaR_{\frac{k-1}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1)].$$

(iii) Ak $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2$, potom

$$D^*(\boldsymbol{\tau}_2) \geq D^*(\boldsymbol{\tau}_1) + \sum_{k=1}^T [CVaR_{\frac{k-1}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2) - CVaR_{\frac{k-1}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1)].$$

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kopa [7]. □

Pretože SSD predstavuje čiastočné usporiadanie v priestore reálnych náhodných veličín môže existovať dvojica portfólií $\boldsymbol{\tau}_1$ a $\boldsymbol{\tau}_2$ tak, že platí $D^*(\boldsymbol{\tau}_2) \geq D^*(\boldsymbol{\tau}_1)$ a $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \not\prec_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2$. Ďalšia dôležitá vlastnosť miery neeficiencie D^* portfólia je konvexita tejto miery.

Veta 4.7.

Nech $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ a $\boldsymbol{\tau}_3 \in \Lambda$ a $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ je konvexná množina.

(i) Ak $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2$, potom

$$D^*(\gamma\boldsymbol{\tau}_1 + (1-\gamma)\boldsymbol{\tau}_2) \leq \gamma D^*(\boldsymbol{\tau}_1) + (1-\gamma)D^*(\boldsymbol{\tau}_2)$$

pre každé $\gamma \in [0, 1]$.

(ii) Ak $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_2$ a $\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_3$, potom

$$\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}_1 \succeq_{SSD} \mathbf{r}'(\gamma\boldsymbol{\tau}_2 + (1-\gamma)\boldsymbol{\tau}_3)$$

a

$$D^*(\gamma\boldsymbol{\tau}_2 + (1-\gamma)\boldsymbol{\tau}_3) \leq \gamma D^*(\boldsymbol{\tau}_2) + (1-\gamma)D^*(\boldsymbol{\tau}_3)$$

pre každé $\gamma \in [0, 1]$.

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v Kopa [7]. □

Miera neeficiencie D^* je konvexná na množine $I(\boldsymbol{\tau}) \cup \boldsymbol{\tau}$ pre $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$. Táto vlastnosť je dôsledkom konvexity miery rizika CVaR.

Nasledujúci príklad je prevzatý z Kopa [7] a doplnený o hodnotu miery neeficiencie D^* portfólia, ktoré je konvexnou kombináciou SSD efektívnych portfólií, ale nie je SSD efektívne.

Príklad 4.5.

Uvažujme tri akcie a tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme testované portfóliá $\lambda_1 = (1, 0, 0)'$, $\lambda_2 = (0, 1, 0)'$ a $\lambda_3 = (0, 0, 1)'$. Ľahko môžeme overiť, že sú všetky SSD efektívne. Tvrdíme, že existuje portfólio, ktoré je konvexnou kombináciou SSD efektívnych portfólií, ale nie je SSD efektívne. Nech teda napríklad $\tau_1 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)'$, potom $X\tau_1 = (-0.5, 0.5, 4.5)$. Toto portfólio nie je SSD efektívne, pretože je SSD dominované napríklad portfóliom λ_3 , t.j. platí:

$$0 > -0.5,$$

$$0 = 0,$$

$$5 > 4.5.$$

Podľa vety 3.1 vieme, že $r'\lambda_3 \succ_{SSD} r'\tau_1$. Ďalej sme vyriešením úlohy (3.6) získali hodnotu miery neeficiencie $D^*(\tau_1) = 0.67$. Z tohto dôvodu množina SSD efektívnych portfólií nie je konvexná.

4.1.4 Porovnanie vlastností mier neeficiencie

V rôznych situáciách v praxi môžeme využiť výhody vyššie uvedených mier neeficiencie vzhľadom k SSD.

V prípade, že máme veľký počet scenárov a potrebujeme rýchlo vylúčiť, že testované portfólio je SSD efektívne použijeme mieru neeficiencie ξ . Jej výhodou je, že hodnotu ξ získame riešením pomerne malej úlohy lineárneho programovania a v prípade výsledku $\xi(\tau) > 0$ môžeme okamžite povedať, že testované portfólio je SSD neefektívne, pretože $\xi(\tau) = 0$ je nutná podmienka SSD efektívneho portfólia. Naopak nevýhodou riešenia úlohy (4.1) je, že výsledné portfólio nemusí SSD dominovať testované portfólio. Ďalšia nevýhoda miery neeficiencie ξ je, že nie je konzistentná s SSD.

Hlavnou výhodou miery neeficiencie θ^N je, že je konzistentná s SSD a maximalizuje rozdiel očakávaných výnosov testovaného portfólia vzhľadom k množine SSD dominujúcich portfólií. Rovnosť $\theta^N(\tau) = 0$ je nutná, ale nie postačujúca podmienka SSD efektívneho portfólia. Nevýhodou riešenia úlohy (3.2) je, že ide o pomerne veľkú úlohu lineárneho programovania a optimálne riešenie λ^* nemusí byť nutne SSD efektívne.

Miera neeficiencie D^* má tú výhodu, že je konzistentná s SSD a $D^*(\tau) = 0$ je nutná a postačujúca podmienka SSD efektívneho portfólia. Veľkou výhodou riešenia úlohy (3.6) je, že optimálne riešenie λ^* je SSD efektívne. Preto riešenie tejto úlohy preferujeme v prípadoch, keď nás zaujíma ako rozložiť investovaný kapitál tak, aby sme mali SSD efektívne portfólio.

Ďalšie výhody a nevýhody jednotlivých mier neeficiencie vzhľadom v SSD sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 4.1.

Veľkosť úlohy LP	úloha (3.1) - ξ	úloha (3.2) - θ^N	úloha (3.6) - D^*
Počet premenných	$T + 1$	$T^2 + N$	$T^2 + 2T + N$
Počet obmedzení	$2T + N - 1$	$T^2 + 3T + N + 1$	$2T^2 + 2T + N + 1$
Riešenie úlohy LP	úloha (3.1) - ξ	úloha (3.2) - θ^N	úloha (3.6) - D^*
Optimálne riešenie λ^* (SSD)	nie nutne SSD dominuje τ	vždy SSD dominuje τ	vždy SSD dominuje τ
Optimálne riešenie λ^* (eficiencia)	nie nutne SSD efficientné	nie nutne SSD efficientné	vždy SSD efficientné
Podmienka SSD eficiecie	$\xi(\tau) = 0$ nutná	$\theta^N(\tau) = 0$ nutná	$D^*(\tau) = 0$ nutná a postačujúca
Vlastnosti miery	úloha (3.1) - ξ	úloha (3.2) - θ^N	úloha (3.6) - D^*
Konzistencia s SSD	NIE	ÁNO	ÁNO
Konvexnosť na $I(\tau) \cup \tau$	NIE	NIE	ÁNO

4.2 Vzťahy medzi mierami neeficiencie

V tejto časti porovnáme miery neeficiencie ξ , θ^N a D^* . Pretože $\xi(\tau) = \psi(\tau)$, môžeme pracovať s ψ miesto ξ . Označme riešenie Postovho kritéria, t.j. duálnej úlohy (4.1), symbolom λ_1^* , riešenie Kuosmanenovho kritéria, t.j. úlohy (3.2), symbolom λ_2^* a riešenie Kopovho kritéria, t.j. úlohy (3.6), symbolom λ_3^* .

4.2.1 Porovnanie mier neeficiencie ξ a θ^N

Vieme, že výsledné portfólio λ_1^* nemusí nutne SSD dominovať testované portfólio τ a vieme, že výsledné portfólio λ_2^* SSD dominuje testované portfólio τ . Z formulácie úloh (4.1) a (3.2) je zrejmé, že v oboch ulohách hodnota testovej štatistiky vyjadruje rozdiel očakávaných výnosov. Rozdiel je v tom, že Kuosmanenovo kritérium vyžaduje aby výsledné portfólio λ_2^* SSD dominovalo testované portfólio v zmysle vety 3.1. Takže Kuosmanenovo kritérium má z tohto pohľadu prísnejšie obmedzenia ako Postova duálna úloha a obe maximalizujú rozdiel očakávaných výnosov. Z toho vyplýva, že množina prípustných riešení v Postovom kritériu je nadmnožinou prípustných riešení v Kuosmanenovom kritériu.

Nasledujúci príklad ilustruje, že optimálne riešenie Postovej duálnej úlohy (4.1) nemusí byť nutne prípustným riešením Kuosmanenovej úlohy (3.2). Ďalej tento príklad dáva nerovnosť mier neeficiencie $\psi(\tau) > \theta^N(\tau)$, ktorú neskôr formálne dokážeme.

Príklad 4.6.

Uvažujme dve akcie, tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (0.9, 0.1)'$. Vektor výnosov z testovaného portfólia je $X\boldsymbol{\tau} = (0.1, 0.9, 0.2)$. Riešili sme postupne Postovo kritérium, t.j. úlohu (4.1) a Kousmanenovo kritérium, t.j. úlohu (3.2) v programe GAMS. Získali sme hodnotu testovej štatistiky $\psi(\boldsymbol{\tau}) = 0.6$ a výsledné portfólio $\boldsymbol{\lambda}_1^* = (0, 1)'$. Vektor výnosov z výsledného portfólia $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ je $X\boldsymbol{\lambda}_1^* = (1, 0, 2)$. Ďalej sme získali hodnotu testovej štatistiky $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0.5\bar{3}$ a výsledné portfólio $\boldsymbol{\lambda}_2^* = (0.1, 0.9)'$. Takže v tomto prípade platí nerovnosť $\psi(\boldsymbol{\tau}) > \theta^N(\boldsymbol{\tau})$. Očakávaný výnos z portfólia $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ je 1 a z portfólia $\boldsymbol{\lambda}_2^*$ je 0.9 $\bar{3}$. Zostáva overiť, že portfólio $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ nie je prípustným riešením Kuosmanenovej úlohy (3.2), čo je ekvivalentné tomu, že portfólio $\boldsymbol{\lambda}_1^*$ SSD nedominuje testované portfólio $\boldsymbol{\tau}$, a teda podľa vety 3.1 nespĺňa podmienku

$$\sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\lambda}_1^*)^{[j]} \geq \sum_{j=1}^t (X\boldsymbol{\tau})^{[j]} \quad t = 1, \dots, T.$$

Ako je vidieť táto podmienka skutočne nie je splnená, pretože:

$$0 < 0.1,$$

$$1 > 0.3,$$

$$3 > 1.2,$$

preto neplatí, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}_1^* \succ_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$.

Tieto pozorovania využijeme v dôkaze nasledujúcej vety.

Veta 4.8.

Pre každé portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ platí $\xi(\boldsymbol{\tau}) \geq \theta^N(\boldsymbol{\tau})$.

Dôkaz. Ak je $\boldsymbol{\tau}$ SSD efektívne portfólio, potom $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0$ a $\psi(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

Ak je $\boldsymbol{\tau}$ SSD neefektívne portfólio, potom existuje $\boldsymbol{\lambda}_2^* \in \Lambda$ tak, že je optimálnym riešením Kuosmanenovej úlohy (3.2), t.j. úlohy

$$\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = \max_{W, \boldsymbol{\lambda}} \left(\sum_{t=1}^T (\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\tau}) \right) / T$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^i \boldsymbol{\lambda} &\geq \sum_{j=1}^T w_{ij} \boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\tau} \quad i = 1, 2, \dots, T \\ W &\in \Xi \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda. \end{aligned}$$

Vieme, že platí $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_2^* \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$, a teda je splnená podmienka vety 3.1 (i). Takéto $\boldsymbol{\lambda}_2^*$ je zároveň aj prípustným riešením Postovej duálnej úlohy (4.1), pretože ak $\boldsymbol{\lambda}_2^*$ spĺňa podmienky vety 3.1, potom spĺňa aj obmedzenia v Postovej duálnej úlohe (4.1). Toto tvrdenie je zrejmé, pretože ak zmeníme usporiadanie zložiek vektora výnosov $X\boldsymbol{\lambda}_2^*$ od najmenšieho po najväčšie na iné usporiadanie môžu sa čiastočné súčty

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \mathbf{x}^i \boldsymbol{\lambda}_2^*, \quad t = 1, \dots, T$$

len zväčšiť. Keďže obidve miery maximalizujú rozdiel očakávaného výnosu, t.j. využívajú rovnakú účelovú funkciu a množina prípustných riešení pre Kuosmanenovu úlohu (3.2) je podmnožinou prípustných riešení pre Postovu úlohu (4.1), dostávame $\psi(\boldsymbol{\tau}) \geq \theta^N(\boldsymbol{\tau})$. A teda, podľa vety o dualite, $\xi(\boldsymbol{\tau}) \geq \theta^N(\boldsymbol{\tau})$. \square

4.2.2 Porovnanie mier neeficiencie θ^N a D^*

Miera neeficiencie θ^N je založená na maximalizácii rozdielu očakávaného výnosu z testovaného portfólia a portfólia, ktoré ho SSD dominuje. Naproti tomu miera neeficiencie D^* je založená na maximalizácii zníženia rizika meraného pomocou veličiny CVaR v T bodoch ak namiesto testovaného portfólia držíme portfólio, ktoré ho SSD dominuje. Nasledujúca veta dáva vzťah týchto dvoch mier neeficiencie.

Veta 4.9.

Pre každé portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ platí $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) \leq D^*(\boldsymbol{\tau})$.

Dôkaz. Ak je $\boldsymbol{\tau}$ SSD efektívne portfólio, potom $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$ a $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

Nech $\boldsymbol{\tau}$ je SSD neefektívne portfólio. Označme $\boldsymbol{\lambda}_3^*$ optimálne riešenie Kopovho kritéria, t.j. úlohy (3.6) a $\boldsymbol{\lambda}_2^*$ optimálne riešenie Kuosmanenovho kritéria, t.j. úlohy (3.2).

Kopa [7] uvádza, že úlohu (3.6) môžeme prepísať nasledujúcim spôsobom:

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{\boldsymbol{\lambda}} \sum_{k=0}^{T-1} [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda})] \quad (4.5)$$

za podmienok

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}) &\geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, T-1 \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda. \end{aligned}$$

Z vety 2.3 vieme, že

$$\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succeq_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau} \Leftrightarrow \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}) \leq \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}), \quad k = 0, 1, \dots, T-1.$$

Takže každé portfólio, ktoré SSD dominuje testované portfólio τ je prípustné riešenie úlohy (3.6). Podobne aj podmienky úlohy (3.2) zaručia, že každé portfólio, ktoré SSD dominuje portfólio τ je prípustné riešenie úlohy (3.2). Takže množiny prípustných riešení úloh (3.6) a (3.2) sú zhodné, t.j. ide o množinu portfólií, ktoré SSD dominujú τ . Z tejto množiny vyberie Kuosmanenov test to portfólio, ktoré má najväčší očakávaný výnos a Kopov test vyberie také, ktoré má najmenšie riziko merané pomocou veličiny CVaR v T bodoch.

Súčet, ktorý maximalizujeme v úlohe (4.5) môžeme pre optimálne riešenie λ_3^* rozpisovať ako:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*)] &= \text{CVaR}_0(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_0(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*) + \\ &+ \sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*)], \end{aligned}$$

kde podľa lemmatu 2.5 platí:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_0(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) &= (-X\boldsymbol{\tau})^{[1]} + \frac{1}{(1-0)^T} \sum_{i=1}^T ((-X\boldsymbol{\tau})^{[i]} - (-X\boldsymbol{\tau})^{[1]}) = \\ &= (-X\boldsymbol{\tau})^{[1]} + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (-X\boldsymbol{\tau})^{[i]} - \frac{T}{T} (-X\boldsymbol{\tau})^{[1]} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (-X\boldsymbol{\tau})^{[i]} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (-\mathbf{x}^i\boldsymbol{\tau}). \end{aligned}$$

Pre τ SSD neeficientné portfólio, môže nastať jeden z dvoch prípadov:

1. ak je optimálne riešenie úlohy (3.6) zároveň optimálnym riešením úlohy (3.2), t.j. $\lambda_3^* = \lambda_2^*$, potom platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t \boldsymbol{\lambda}_3^* - \mathbf{x}^t \boldsymbol{\tau}) &\leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t \boldsymbol{\lambda}_3^* - \mathbf{x}^t \boldsymbol{\tau}) + \\ &+ \sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*)] \\ &= \text{CVaR}_0(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_0(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*) + \\ &+ \sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*)], \end{aligned}$$

pretože $\lambda_3^* \succeq_{SSD} \tau$, a teda rozdiel $\sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*)]$ je vždy nezáporné číslo. Takže pre každé portfólio $\tau \in \Lambda$ platí $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) \leq D^*(\boldsymbol{\tau})$.

2. ak optimálne riešenie úlohy (3.6) nie je zároveň optimálnym riešením úlohy (3.2), t.j. $\lambda_3^* \neq \lambda_2^*$, potom tvrdenie dokážeme sporom. Nech platí $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) > D^*(\boldsymbol{\tau})$, t.j.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t \boldsymbol{\lambda}_2^* - \mathbf{x}^t \boldsymbol{\tau}) &> \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t \boldsymbol{\lambda}_3^* - \mathbf{x}^t \boldsymbol{\tau}) + \\ &+ \sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda}_3^*)]. \end{aligned}$$

Pretože platí, že $\lambda_2^* \succeq \tau$, je člen $\sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\tau) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\lambda_2^*)]$ nezáporný, a teda platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t \lambda_2^* - \mathbf{x}^t \tau) + \sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\tau) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\lambda_2^*)] &> \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}^t \lambda_3^* - \mathbf{x}^t \tau) + \sum_{k=1}^T [\text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\tau) - \text{CVaR}_{\frac{k}{T}}(-\mathbf{r}'\lambda_3^*)] & . \end{aligned}$$

Keďže λ_2^* je prípustné riešenie úlohy (3.6) pre τ , prišli sme k sporu s tým, že λ_3^* je optimálne riešenie úlohy (3.6) pre τ .

Takže platí

$$\theta^N(\tau) \leq D^*(\tau),$$

pre každé $\tau \in \Lambda$. □

Vidíme teda, že miera θ^N bude vychádzať najmenšia v porovnaní s mierami neeficiencie ξ aj D^* . Zostáva nájsť vzťah mier neeficiencie ξ a D^* .

4.2.3 Porovnanie mier neeficiencie ξ a D^*

Doteraz sme zistili, že platia nasledujúce nerovnosti:

$$\psi(\tau) \geq \theta^N(\tau) \quad \text{a} \quad D^*(\tau) \geq \theta^N(\tau) \quad \forall \tau \in \Lambda.$$

Vzťah mier neeficiencie ψ a D^* nie je jednoznačný. Môžeme nájsť príklad, keď miera neeficiencie D^* prevyšuje mieru neeficiencie ψ , a taktiež príklad, keď platí táto nerovnosť obrátene. Toto tvrdenie ilustrujú nasledujúce príklady, ktoré boli riešené v programe GAMS.

Príklad 4.7.

Uvažujme dve akcie, tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a testované portfólio $\tau = (0.9, 0.1)'$. Riešime postupne Kopovo kritérium, t.j. úlohu (3.6) a Postovo kritérium, t.j. duálnu úlohu (4.1). Získame hodnoty testových štatistík $D^*(\tau) = 1.11$ a $\psi(\tau) = 0.6$.

Takže v tomto prípade platí nerovnosť $\psi(\tau) < D^*(\tau)$.

Príklad 4.8.

Uvažujme dve akcie, tri scenáre vývoja nadvýnosu z týchto akcií:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a testované portfólio $\boldsymbol{\tau} = (0.9, 0.1)'$. Znovu riešime postupne Kopovo kritérium, t.j. úlohu (3.6) a Postovo kritérium, t.j. duálnu úlohu (4.1). Získame hodnoty testových štatistík $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0.5\bar{2}$ a $\psi(\boldsymbol{\tau}) = 0.6$.

Takže v tomto prípade platí opačná nerovnosť $\psi(\boldsymbol{\tau}) > D^*(\boldsymbol{\tau})$.

Kapitola 5

Aplikácia: Miery neeficiencie tržného portfólia

Našou úlohou v tejto kapitole je zistiť, či tržné portfólio U.S. akcií, získané z databázy 200708 CRSP, efektívne alokuje finančné zdroje naprieč priemyselnými odvetviami. Pri riešení tejto úlohy použijeme prístup stochastickej dominancie druhého rádu.

Najprv budeme skúmať, či je tržné portfólio v pozorovanom období SSD efektívne. V prípade, že je SSD neefektívne, nie sú finančné zdroje umiestnené v priemyselných odvetviach optimálne v zmysle SSD. Takže existuje priestor pre nenasýtených investorov averzných k riziku na získanie lepšej investičnej stratégie, ako je alokácia zdrojov do tržného portfólia. Ďalej sa v tejto kapitole budeme venovať vyčísleniu hodnôt jednotlivých mier neeficiencie zadaných v kapitole 4 a vyhodnotíme platnosť vzájomných vzťahov medzi týmito mierami. Na záver sa pozrieme ako vyzerajú výsledné portfóliá, ktoré sú riešeniami úloh (3.2) a (3.6). Porovnáme riziko vyjadrené pomocou veličiny CVaR, ktoré je spojené s týmito výslednými portfóliami a s tržným portfóliom.

5.1 Dáta

Budeme skúmať, či je tržné portfólio na Americkej burze cenných papierov SSD efektívne vzhľadom k všetkým možným portfóliám, ktoré môžeme vytvoriť naprieč dostupnými priemyselnými odvetviami. Použijeme k tomu kritériá SSD efektivity portfólia z kapitoly 3.

Pre našu analýzu použijeme mesačné nadvýnosy z 10 rôznych reprezentatívnych portfólií pre 10 priemyselných odvetví v období od 7/1926 do 8/2007 a bezrizikový úrokový mieru ako jedenáste dostupné aktívum na trhu. Nadvýnosy sú výnosy, ktoré prekračujú bezrizikový úrokový mieru. Takže nadvýnos bezrizikového aktíva je rovný nule v každom období. Vnútri jednotlivých odvetví sú váhy pevne dané. Váhy rôznych portfólií určujú akú časť kapitálu investujeme do určitého odvetvia ako celku.

Tržné portfólio vzniklo ako vážený priemer z cenných papierov NYSE, AMEX a NASDAQ. Nadvýnosy priemyselných odvetví sú založené na priemyselnej klasifikácii podľa štvormiestneho kódu SIC.

Dáta použité v tomto príklade sú voľne dostupné na internetových stránkach dátovej knižnice Kenneth French [1].

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené základné štatistiky nadvýnosov pre uvažované priemyselné odvetvia a pre U.S. tržné portfólio.

Tabuľka 5.1.

Priem. odvetvie	Stred. hod.	Smer. odchýlka	Medián	Min	Max
NoDur	0.69	4.70	0.82	-24.51	34.31
Durbl	0.82	7.62	0.72	-34.81	79.61
Manuf	0.75	6.34	1.07	-29.83	57.30
Enrgy	0.79	5.97	0.61	-26.01	33.47
HiTec	0.80	7.46	0.98	-33.86	53.33
Telcm	0.57	4.60	0.73	-21.59	28.13
Shops	0.69	5.91	0.69	-30.21	36.95
Hlth	0.79	5.79	0.75	-34.80	38.56
Utils	0.61	5.69	0.77	-32.99	43.13
Other	0.66	6.45	0.98	-30.06	58.71
Tržné portfólio	0.65	5.42	0.97	-29.04	38.27

Základné štatistiky nadvýnosov 10 priemyselných odvetví a tržného portfólia.

5.2 Nastavenie parametrov

Pri výpočte jednotlivých mier neeficiencie vzhľadom k SSD sme riešili nasledujúce úlohy lineárneho programovania:

- miera neeficiencie ξ je daná úlohou (3.1)
- miera neeficiencie θ^N je daná úlohou (3.2)
- miera neeficiencie D^* je daná úlohou (3.6)

Uvažovaný časový horizont, za ktorý budeme vyhodnocovať miery neeficiencie, by mal byť dosť veľký, aby sme pravdepodobnostné rozdelenie mohli aproximovať s dostatočnou presnosťou. Na druhej strane by nemal byť počet scenárov v jednotlivých úlohách príliš veľký aby neboli úlohy veľmi časovo náročné. Zvolili sme časový horizont 10 rokov, čo predstavuje 120 scenárov. Použili sme metódu posúvania okna s uvažovanou šírkou

10 rokov a s posunom vždy o 1 rok, t.j. 12 scenárov. Testové štatistiky sme vyhodnocovali za obdobia (7/1926 – 6/1936), (7/1927 – 6/1937), ..., (7/1997 – 6/2007). Takže sme pre každú testovú štatistiku získali 72 hodnôt.

Ako bolo vyššie spomenuté uvažujeme 11 dostupných aktív.

Nasledujúca tabuľka udáva veľkosť riešených úloh lineárneho programovania v tomto konkrétnom prípade.

Tabuľka 5.2.

Veľkosť úlohy LP	úloha (3.1) - ξ	úloha (3.2) - θ^N	úloha (3.6) - D^*
Počet premenných	121	14411	14651
Počet obmedzení	250	14772	29052

Veľkosti jednotlivých úloh LP.

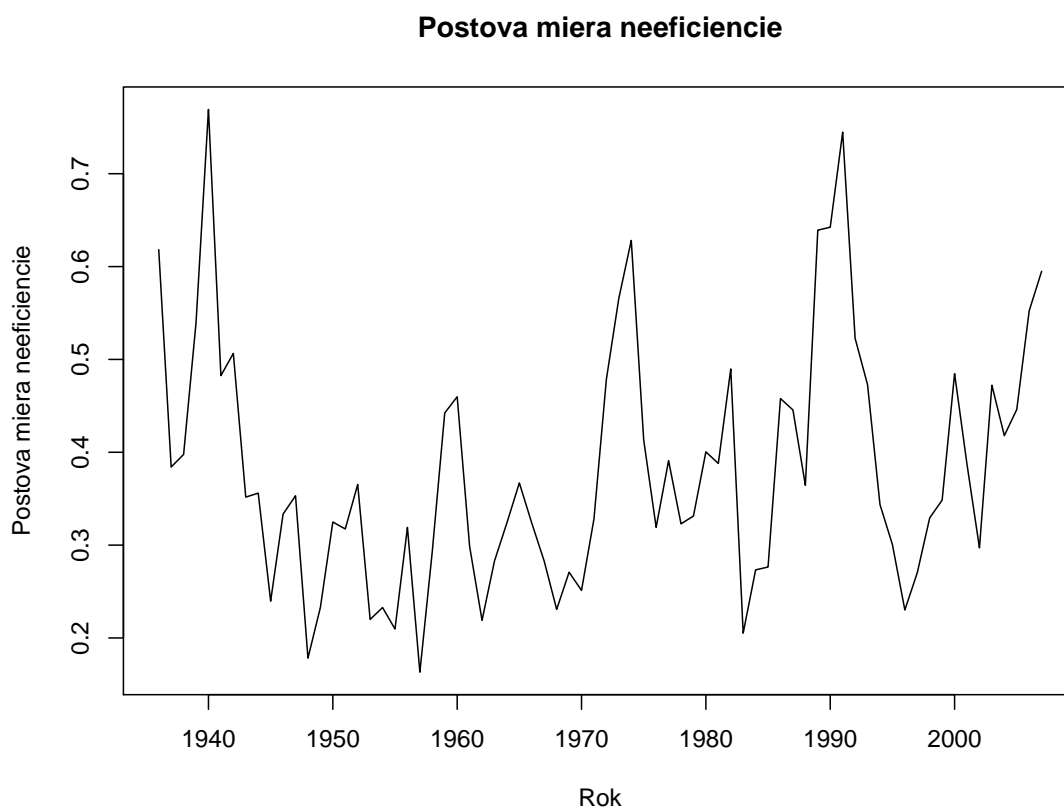
5.3 Výsledky

Výpočty sme robili v programe GAMS22.6. Použili sme balíček Cplex, ktorý umožňuje riešiť úlohy lineárneho programovania. Výpočty bežali na počítači s procesorom 1.6 GHz a 512 MB RAM. Zdrojový kód programov pre GAMS aj so súborom so vstupnými dátami sa nachádza na priloženom DVD.

Do výstupných súborov z týchto výpočtov sme zaznamenali hodnoty mier neeficencie. Na priloženom DVD sú k dispozícii v súboroch *Post_miera.xls*, *Kuosmanen_miera.xls* a *Kopa_miera.xls*. Ďalej sme pri riešení úloh (3.2) a (3.6) zaznamenali aj optimálne riešenia, t.j. portfóliá λ_2^* a λ_3^* . Na priloženom DVD sú v súboroch *Kuosmanen_lambda.xls* a *Kopa_lambda.xls*. V prípade miery ξ nemáme možnosť toto portfólio zaznamenať, pretože sme pri výpočte zvolili riešiť primárnu úlohu (3.1). Portfólio, ktoré by sme získali riešením duálnej úlohy (4.1) však nemusí nutne SSD dominovať testované portfólio, preto nemá vhodnú interpretáciu a rozhodli sme sa tento údaj nezaznamenať.

Postova miera neeficiencie - ξ

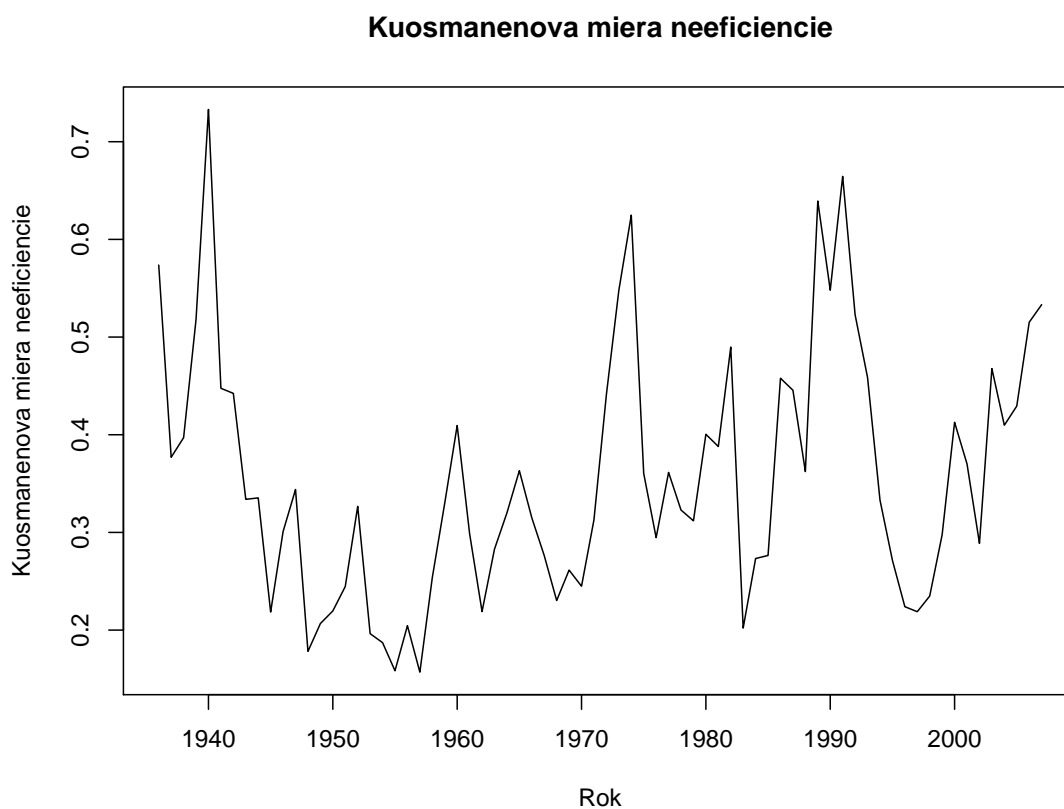
Na nasledujúcom obrázku je znázornená miera neeficiencie ξ . V každom zo 72 vyhodnocovaných období je kladná, čo znamená, že tržné portfólio nie je SSD efektívne, a teda existuje priestor pre nenasýtených investorov averzných k riziku na získanie lepšej investičnej stratégie ako je investícia do tržného portfólia. Minimálna hodnota tejto štatistiky je 0.16 za obdobie (7/1947 – 6/1957) a maximálna hodnota je 0.77 za obdobie (7/1930 – 6/1940). Ďalej vidíme, že miera neeficiencie ξ v posledných štyroch obdobiach rastie.



Obrázok 5.1: Postova miera neeficiencie vzhľadom k SSD - ξ .

Kuosmanenova miera neeficiencie - θ^N

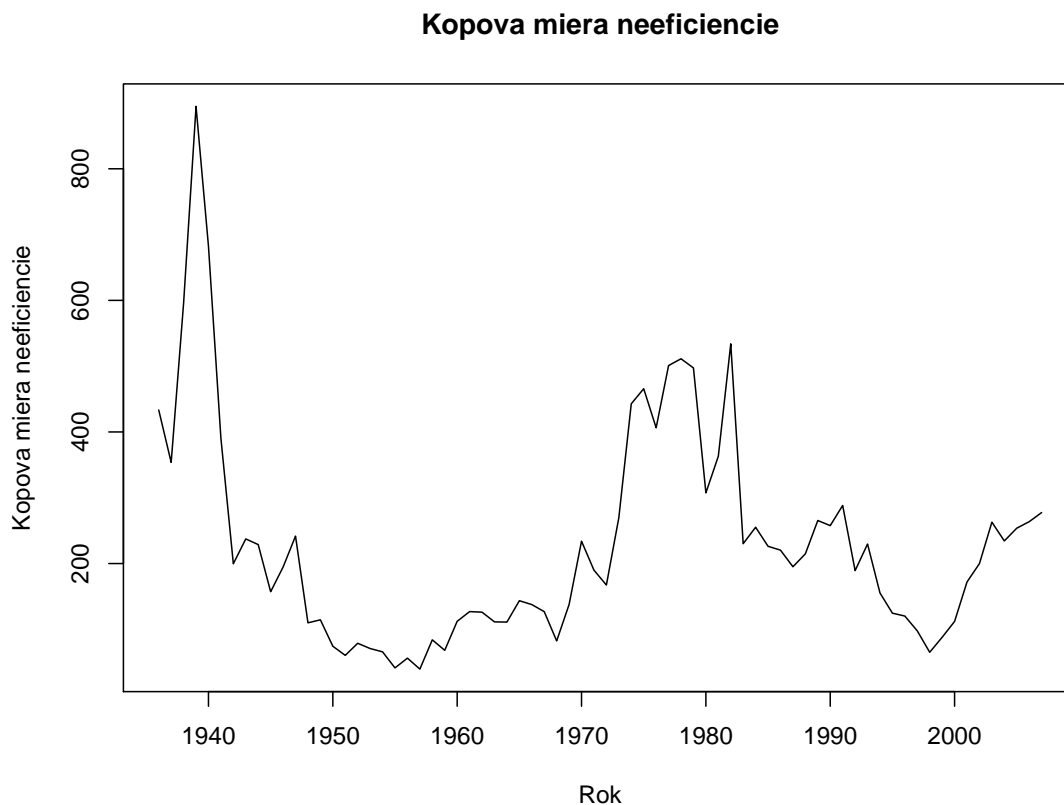
Na obrázku 5.2 je znázornená miera neeficiencie θ^N . V každom zo 72 vyhodnocovaných období je kladná, čo nás neprekvapuje, pretože už predchádzajúca miera vylúčila, že by bolo tržné portfólio v niektorom období SSD efektívne. Minimálna hodnota tejto štatistiky je 0.16 za obdobie (7/1947 – 6/1957) a maximálna hodnota je 0.73 za obdobie (7/1930 – 6/1940). Podobne ako na predchádzajúcom obrázku aj tu môžeme pozorovať, že miera neeficiencie θ^N v posledných štyroch obdobiach rastie.



Obrázok 5.2: Kuosmanenova miera neeficiencie vzhľadom k SSD - θ^N .

Kopova miera neeficiencie - D^*

Na obrázku 5.3 je znázornená miera neeficiencie D^* . Aj táto miera je v každom zo 72 vyhodnocovaných období kladná. Minimálna hodnota tejto štatistiky je 39.56 za obdobie (7/1947 – 6/1957) a maximálna hodnota je 894.83 za obdobie (7/1929 – 6/1939). Ďalej vidíme, že miera neeficiencie D^* v posledných štyroch obdobiach rastie.

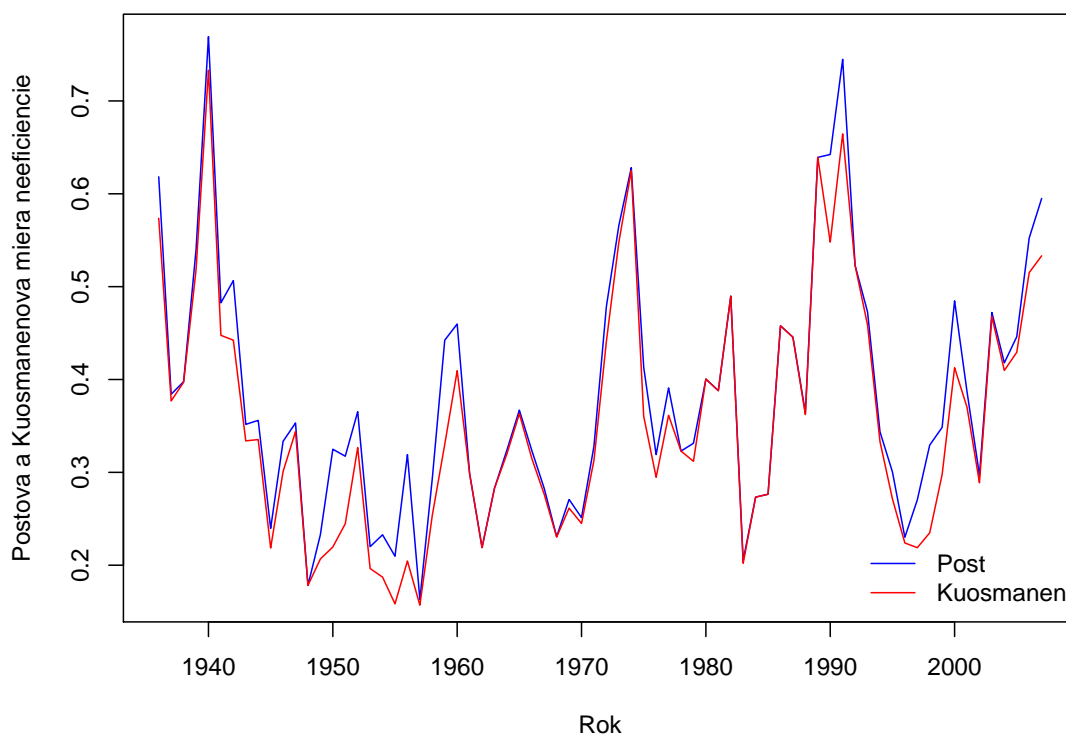


Obrázok 5.3: Kopova miera neeficiencie vzhľadom k SSD - D^* .

Porovnanie Postovej a Kousmanenovej miery neeficiencie

Na nasledujúcom obrázku je porovnanie dvoch mier neeficiencie ξ a θ^N . Podľa vety 4.8 platí vzťah $\xi(\tau) \geq \theta^N(\tau)$, pre každé $\tau \in \Lambda$. Z obrázku 5.4 vidíme, že je táto nerovnosť splnená. Minimálna hodnota rozdielu týchto dvoch mier je nulová a bola dosiahnutá napríklad za obdobie (7/1938 – 6/1948). Maximálna hodnota tohoto rozdielu je 0.11 a bola dosiahnutá za obdobie (7/1946 – 6/1956).

Postova a Kousmanenova miera neeficiencie



Obrázok 5.4: Porovnanie Postovej a Kousmanenovej miery neeficiencie vzhľadom k SSD.

Ďalej uvedieme tabuľku, v ktorej porovnáme očakávaný výnos, rozptyl a podmienený Value at Risk na hladine spoľahlivosti 95 % ($\text{CVaR}_{0.95}$) tržného portfólia, SSD efektívneho portfólia, ktoré SSD dominuje testované portfólio τ a je optimálnym riešením úlohy (3.6), označili sme ho λ_3^* a SSD dominujúceho portfólia s maximálnym možným očakávaným výnosom, ktoré je optimálnym riešením úlohy (3.2), označili sme ho λ_2^* . Tieto hodnoty budeme porovnávať za tri obdobia, a to (7/1947–6/1957), keď miera D^* nadobúda svoju minimálnu hodnotu, (7/1929–6/1939), keď miera D^* nadobúda svoju maximálnu hodnotu a posledné vyhodnocované obdobie (7/1997–6/2007). Z tabuľky 5.3 môžeme pozorovať, že SSD efektívne portfólio λ_3^* nemá vyšší očakávaný výnos ako tržné portfólio, ale jeho rizikovosť (či už meraná ako rozptyl nadvýnosov alebo $\text{CVaR}_{0.95}$) sa výrazne zníži. Naproti tomu, očakávaný výnos z SSD dominujúceho portfólia λ_2^* je vyšší i rizikovosť meraná pomocou veličiny ($\text{CVaR}_{0.95}$) sa nepatrne zmenšila, čo musí platiť, pretože λ_2^* SSD dominuje testované portfólio τ . Ale rozptyl sa v obdobiach (7/1947–6/1957) a (7/1997–6/2007) zväčšil. Pripomeňme, že veličina ($\text{CVaR}_{0.95}$) určuje priemernú stratu z 100(1–0.95)% najväčších možných strát portfólia.

Tabuľka 5.3.

Obdobie	Očakávaný výnos	$\text{CVaR}_{0.95}$	Rozptyl
(7/1947-6/1957)			
Tržné portfólio	1.28	5.90	12.07
Portfólio λ_3^*	1.28	5.07	9.63
Portfólio λ_2^*	1.44	5.72	12.87
(7/1929-6/1939)			
Tržné portfólio	0.10	21.27	109.72
Portfólio λ_3^*	0.10	3.24	2.48
Portfólio λ_2^*	0.61	20.72	108.86
(7/1997-6/2007)			
Tržné portfólio	0.45	10.85	20.51
Portfólio λ_3^*	0.45	4.32	4.68
Portfólio λ_2^*	0.99	8.84	25.49

Očakávaný výnos, rozptyl a podmienený Value at Risk na hladine spoľahlivosti 95 % ($\text{CVaR}_{0.95}$) tržného portfólia, portfólia λ_3^* a portfólia λ_2^* .

V nasledujúcej tabuľke 5.4 sú uvedené portfóliá λ_3^* a λ_2^* pre hore uvedené obdobia (7/1947-6/1957), (7/1929-6/1939) a (7/1997-6/2007). Vidíme, že v každom z týchto troch období je portfólio λ_3^* viac diverzifikované ako portfólio λ_2^* . Napríklad v období (7/1929-6/1939), kedy je miera neeficiencie D^* najväčšia, je výsledné portfólio λ_2^* zložené z dvoch priemyselných odvetví, a to Durl - produkty dlhodobej spotreby a Telcm - telekomunikácie. Výsledné portfólio λ_3^* je zložené z tých istých dvoch priemyselných odvetví

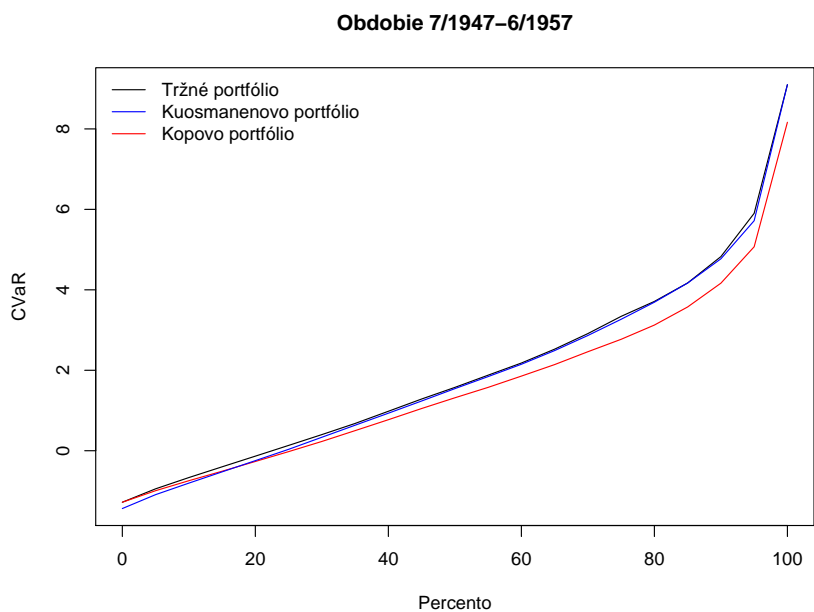
a z bezrizikového aktíva, do ktorého sa investuje až 82% finančných zdrojov.

Tabuľka 5.4.

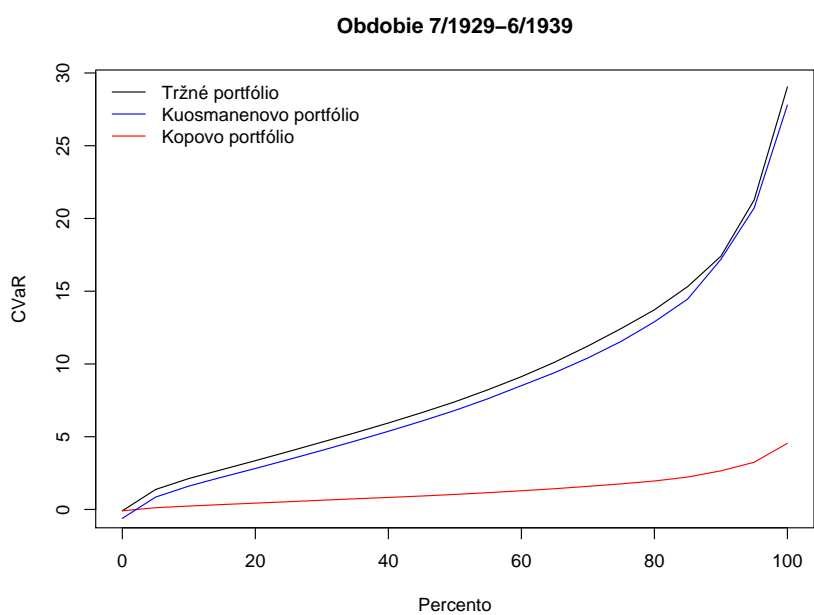
Obvetvie	(7/1947-6/1957)		(7/1929-6/1939)		(7/1997-6/2007)	
	λ_3^*	λ_2^*	λ_3^*	λ_2^*	λ_3^*	λ_2^*
Nodur	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Durbl	0.19	0.26	0.04	0.47	0.00	0.00
Manuf	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Engy	0.25	0.22	0.00	0.00	0.27	0.79
HiTec	0.18	0.28	0.00	0.00	0.00	0.00
Telcm	0.32	0.18	0.14	0.53	0.00	0.00
Shops	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00
Hlth	0.00	0.06	0.00	0.00	0.01	0.00
Utils	0.06	0.00	0.00	0.00	0.15	0.21
Other	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
RiskFree	0.00	0.00	0.82	0.00	0.47	0.00

Portfóliá λ_3^* a λ_2^* .

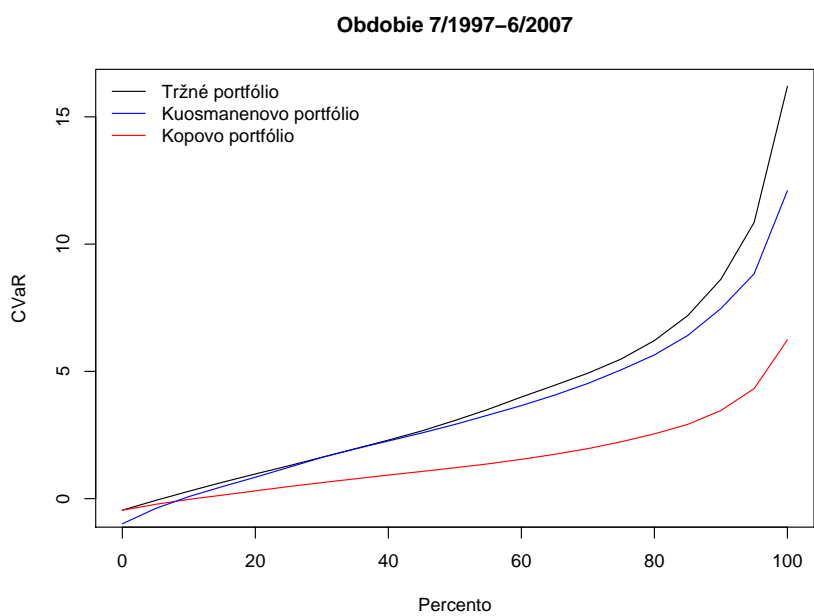
Nasledujúce obrázky 5.5, 5.6 a 5.7 znázorňujú CVaR portfólií λ_2^* , λ_3^* a tržného portfólia postupne vypočítané na hladine 0%, 5%, ..., 100% pre tri uvažované obdobia (7/1947-6/1957), (7/1929-6/1939) a (7/1997-6/2007). Ako môžeme vidieť CVaR portfólia λ_3^* je vždy výrazne menší ako CVaR tržného portfólia, hoci očakávaný výnos z portfólia λ_3^* je rovný očakávanému výnosu z tržného portfólia. Dalej môžeme pozorovať, že očakávaný výnos z portfólia λ_2^* je väčší ako očakávaný výnos z tržného portfólia, ale jeho CVaR nie je výrazne menší ako CVaR tržného portfólia. Za obdobie (7/1929-6/1939) bola hodnota testovej štatistiky D^* najväčšia, preto je rozdiel CVaR portfólia λ_3^* a CVaR tržného portfólia najvýraznejší práve v tomto období.



Obrázok 5.5: CVaR portfólií λ_2^* , λ_3^* a tržného portfólia za obdobie (7/1947-6/1957).



Obrázok 5.6: CVaR portfólií λ_2^* , λ_3^* a tržného portfólia za obdobie (7/1929-6/1939).



Obrázok 5.7: CVaR portfólií λ_2^* , λ_3^* a tržného portfólia za obdobie (7/1997-6/2007).

Kapitola 6

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali SSD efícienciou portfólia vzhľadom k množine všetkých možných portfólií zložených z dostupných aktív. Skúmali sme tri miery SSD neefíciencie založené na úlohách lineárneho programovania. Zaujímali sme sa o konzistenciu týchto mier s SSD a o ich konvexnosť na množine portfólií, ktoré sú SSD dominované testovaným portfóliom. Ďalej sme hľadali vzájomné vzťahy medzi týmito mierami.

V kapitole 2 sme definovali základné pojmy stochastickej dominancie a mieru rizika CVaR. Taktiež sme uviedli tvrdenie, ktoré dáva vzťah medzi SSD a CVaR.

V kapitole 3 sme definovali SSD efícienciu portfólia a uviedli sme tri kritériá SSD efíciencie testovaného portfólia, ktoré sú formulované do úloh lineárneho programovania.

V kapitole 4 sme na základe týchto kritérií definovali miery neefíciencie portfólia vzhľadom k SSD a skúmali sme ich vlastnosti. Zaujímala nás najmä konzistencia mier s SSD. Túto vlastnosť spĺňajú dve z mier, a to θ^N a D^* . Keďže nie je miera neefíciencie ξ konzistentná s SSD, neplatí, že pre horšie portfólio v zmysle SSD je nutne jej hodnota väčšia a nemôžeme pomocou nej porovnávať mieru SSD neefíciencie dvoch portfólií. Ďalej sme skúmali konvexnosť mier na množine portfólií, ktoré sú SSD dominované testovaným portfóliom. Ukázalo sa, že túto vlastnosť nespĺňajú miery ξ ani θ^N . V tejto kapitole sme našli aj vzájomné vzťahy medzi spomínanými mierami. Miera neefíciencie θ^N nadobúda vždy najmenšiu hodnotu z daných mier a hodnota miery ξ môže byť pod aj nad hodnotou miery D^* .

Pri skúmaní SSD efíciencie tržného portfólia U.S. akcií v kapitole 5 sme zistili, že toto portfólio nie je v žiadnom zo skúmaných období SSD efícentné a pre miery SSD neefíciencie platia vzťahy, ktoré sme odvodili v kapitole 4. Ďalej sa potvrdilo naše očakávanie o výsledných portfóliách λ_2^* a λ_3^* . Výsledkom Kuosmanenovho testu (3.2) je portfólio λ_2^* , ktoré má vyšší očakávaný výnos ako testované portfólio a menší dôraz kladie na zníženie rizikovosti výsledného portfólia. Naopak výsledné portfólio λ_3^* , ktoré je optimálnym riešením Kopovho kritéria (3.6), má výrazne menšie riziko a menší dôraz kladie na zvýšenie očakávaného zisku.

Literatúra

- [1] Dátová knižnica Kenneth R. French:
<http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french>.
- [2] Dybvig P. H., Ross S. A.: *Portfolio efficient sets*, *Econometrica* **50**, 6 (1982), 1525–1546.
- [3] Hadar J., Russell W. R.: *Rules for ordering uncertain prospects*, *American Economic Review* **59** (1969), 25–34.
- [4] Hanoch G., Levy H.: *The efficiency analysis of choices involving risk*, *Review of Economic Studies* **36** (1969), 335–346.
- [5] Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.: *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K, 1934.
- [6] Karamata J.: *Sur en inégalité relative aux fonctions convexes*, *Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade* 1, 1932, 145–148.
- [7] Kopa M.: *Utility functions in portfolio optimization*, dizertačná práca KPMS MFF UK, 2006.
- [8] Kopa M., Chovanec P.: *A Second-Order Stochastic Dominance Portfolio Efficiency Measure.*, *Kybernetika* **44**, 2 (2008), 243–258.
- [9] Kuosmanen T.: *Efficient diversification according to stochastic dominance criteria*, *Management Science* **50**, 10 (2004), 1390–1406.
- [10] Levy H.: *Stochastic dominance: Investment Decision Making under Uncertainty*, 2nd edition, Springer, 2006.
- [11] Levy H.: *Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis*, *Management Science* **38**, 4 (1992), 555–587.
- [12] Markowitz H. M.: *Portfolio Selection.*, *Journal of Finance* **7**, 1 (1952), 77–91.

- [13] Markowitz H. M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification in Investment.*, Wiley, New York, 1959.
- [14] Ogryczak W., Ruszczyński A.: *Dual stochastic dominance and related mean-risk models*, SIAM Journal on Optimization **13** (2002), 60–78.
- [15] Pflug G. Ch.: *Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk, Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*(S. Uryasev ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (2000), 272–281.
- [16] Post T.: *Empirical tests for stochastic dominance efficiency*, Journal of Finance **58** (2003), 1905–1932.
- [17] Rockafellar R. T., Uryasev S.: *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk **2** (2000), 21–41.
- [18] Rockafellar R. T., Uryasev S.: *Conditional value-at-risk*, Journal of Banking & Finance **26** (2002), 1443–1471.
- [19] Rothschild M., Stiglitz J. E.: *Increasing risk I: A definition*, Journal of Economic Theory **2** (1970), 225–243.
- [20] Ruszczyński A., Vanderbei R. J.: *Frontiers of stochastically nondominated portfolios*, Econometrica **71**, 4 (2003), 1287–1297.
- [21] Sion M.: *On general minimax theorems*, Pacific Journal of Mathematics **8** (1958), 171–176.
- [22] Whitmore G. A.: *Third-degree stochastic dominance*, American Economic Review **60** (1970), 457–459.