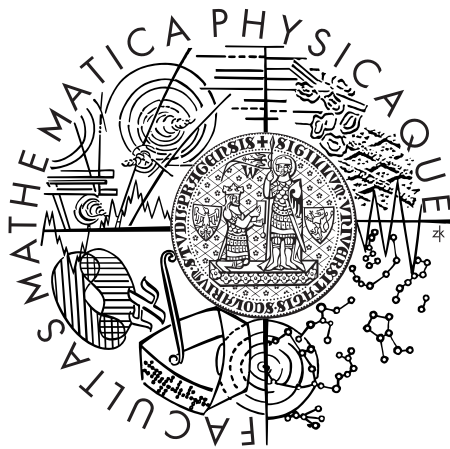


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Tadeáš Horký

## Testy náhodnosti autoregresních parametrů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky  
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.  
Studijní program: Matematika  
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie  
Studijní plán: Ekonometrie

## **Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval především vedoucí své diplomové práce Doc. RNDr. Zuzaně Práškové, CSc. za cenné rady, návrhy a připomínky, jež významně přispěly k vylepšení konečné podoby textu.

Poděkování patří také mým rodičům, kteří mi umožnili plně se koncentrovat na studium a byli mi po celou jeho dobu oporou.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 19. dubna 2005

Tadeáš Horký

# Obsah

<b>Abstrakt/Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu 1</b>	<b>4</b>
1.1 Odhad metodou nejmenších čtverců . . . . .	5
1.2 Odhad metodou maximální věrohodnosti . . . . .	6
<b>2 Skórový test</b>	<b>9</b>
2.1 Odvození statistiky $NQ_n$ dle práce Nichollse a Quinna . . . . .	10
2.2 Komentář k odvození statistiky $\hat{\tau}_n$ . . . . .	15
<b>3 Pořadový test</b>	<b>16</b>
3.1 Lokálně nejsilnější pořadové testy . . . . .	16
3.2 Testová statistika $T_n(\phi, h)$ . . . . .	18
3.3 Asymptotické chování pořadového testu . . . . .	18
3.4 Konkrétní volby funkcí $\phi$ a $h$ . . . . .	19
<b>4 Lokálně nejlepší invariantní test</b>	<b>22</b>
4.1 Odvození LBI testu $Z_n(\beta)$ . . . . .	22
4.2 Asymptotické chování LBI testu $Z_n(l_s\hat{\beta}_n)$ . . . . .	26
<b>5 LBI test pro zobecněný model s ARCH(1) chybami</b>	<b>28</b>
5.1 Zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami . . . . .	29
5.2 Odvození LBI testu $S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$ . . . . .	30
5.3 Asymptotické chování LBI testu $S_n$ . . . . .	33
<b>6 Numerická studie</b>	<b>37</b>
6.1 Nastavení numerické studie . . . . .	38
6.2 Gaussovský RCA(1) model . . . . .	38
6.3 RCA(1) model s rovnoměrným $\beta_t$ a normálním $\epsilon_t$ . . . . .	41
6.4 Gaussovský RCA(1) model s ARCH(1) chybami . . . . .	44

6.5	RCA(1)-ARCH(1) model se Studentovými inovacemi . . . . .	46
6.6	Gaussovský RCA(1) model se skokovitě rostoucím rozptylem chyb . . . . .	51
6.7	Gaussovský RCA(1) model s lineárně klesajícím rozptylem chyb	55
6.8	Gaussovský RCA(1) model s kovariancí . . . . .	58
6.9	Shrnutí poznatků ze simulační studie . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Aplikace testů na index PX50</b>	<b>63</b>
	<b>Závěr</b>	<b>68</b>
	<b>Literatura</b>	<b>70</b>
	<b>Příloha</b>	<b>72</b>

**Název práce:** Testy náhodnosti autoregresních parametrů

**Autor:** Tadeáš Horký

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedoucí diplomové práce:** Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

**E-mail vedoucího:** praskova@karlin.mff.cuni.cz

**Abstrakt:** V této práci se zabýváme autoregresním modelem s náhodnými koeficienty řádu 1 (zkráceně RCA(1) model). V takovém modelu je relevantní testovat, zda může být předpoklad náhodnosti autoregresního parametru vypuštěn a jedná se vlastně o jednodušší AR(1) model. Popisujeme zde následující testy náhodnosti autoregresního parametru modelu RCA(1): skórový test, třídu pořadových testů a lokálně nejlepší invariantní (LBI) test, pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami pak další variantu LBI testu. Účinnost vyjmenovaných testů porovnáváme na rozsáhlé numerické studii, přičemž u třídy pořadových testů studujeme, která volba z velké množiny uvažovaných kombinací skórové funkce a funkce regresních koeficientů je nejoptimálnější. Do simulací zahrnujeme jak modely s homogenními chybami, tak modely s heterogenními chybami a chybami typu ARCH.

**Klíčová slova:** Autoregresní model s náhodnými koeficienty; Testy náhodnosti autoregresních parametrů; Skórový test; Pořadový test; Lokálně nejlepší invariantní test.

**Title:** Testing the randomness of autoregressive coefficients

**Author:** Tadeáš Horký

**Department:** Dept. of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

**Supervisor's e-mail address:** praskova@karlin.mff.cuni.cz

**Abstract:** In this thesis we consider random coefficient autoregressive (RCA) model of order 1. In such model, it is pertinent to examine whether the assumption of randomness of the autoregression coefficient can be released and model becomes the usual AR(1) model. We concern the following methods testing the randomness of autoregressive coefficient in RCA(1) model: test based on scores, class of rank tests, locally best invariant (LBI) test and another LBI test derived from RCA(1) model with ARCH(1) errors. The main task of this diploma work is to present simulation results of an extensive numerical study, which contains models with both homoscedastic and heteroscedastic errors, ARCH(1) errors as well. We consider a large set of score generating and regression coefficient functions in the class of rank tests looking for the pair with best overall performance. Tests efficiency is compared and summarized in concluding remarks.

**Keywords:** Random coefficient autoregressive model; Testing the randomness of autoregressive coefficients; Score test; Rank test; Locally best invariant test.

# Úvod

Autoregresní modely se hojně využívají při analýze časových řad, neboť mnohé reálné časové řady vykazují ve svém chování silnou závislost současné hodnoty na minulých pozorováních. Zpočátku byla věnována největší pozornost modelům s nenáhodnými autoregresními parametry. Postupem času se ale ukázalo, že tyto modely nedokážou dostatečně dobře postihnout některé časové řady z oborů jako je strojírenství, biologie, finance nebo ekonomie. Jako vhodnější aparát pro vysvětlení dat z těchto oblastí se jeví obecnější modely, totiž autoregresní modely s náhodnými koeficienty, kterými se mezi prvními zabýval například Anděl [1]. V anglicky psaných textech je nalezneme pod označením *random coefficient autoregressive model* či pod kratším názvem *RCA model*, který budeme v textu někdy používat i my.

Studiem RCA modelů se zabývalo mnoho autorů. Velká pozornost byla přitom věnována testům náhodnosti autoregresních parametrů, neboť chceme-li v praxi určitou časovou řadu modelovat pomocí RCA modelu, měli bychom si předtím statisticky ověřit, zda není předpoklad náhodnosti autoregresních parametrů zbytečný. Pokud by tomu tak bylo, vystačili bychom si s jednodušším AR modelem s pevnými koeficienty, jehož je RCA model přirozeným zobecněním. Dobrý úvod do této problematiky nabízí práce Nicholls, Quinn [9].

Autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu  $p$  (zkráceně RCA( $p$ ) model) definujeme následovně

$$X_t = \sum_{i=1}^p \beta_{it} X_{t-i} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

kde je ale na rozdíl od modelu AR( $p$ ) vektor  $(\beta_{1t}, \dots, \beta_{pt})$  autoregresních koeficientů náhodný. Vedle stochasticity je třeba v definici požadovat splnění několika dalších předpokladů. Korektní definici se všemi předpoklady uvádíme v první kapitole speciálně pro autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu 1, kterým se budeme v práci podrobně zabývat. Ve stejné kapitole

se ve dvou odstavcích věnujeme odhadům parametrů RCA(1) modelu, konkrétně odhadu metodou nejmenších čtverců a odhadu metodou maximální věrohodnosti. Zejména první jmenovaný odhad budeme v textu často citovat.

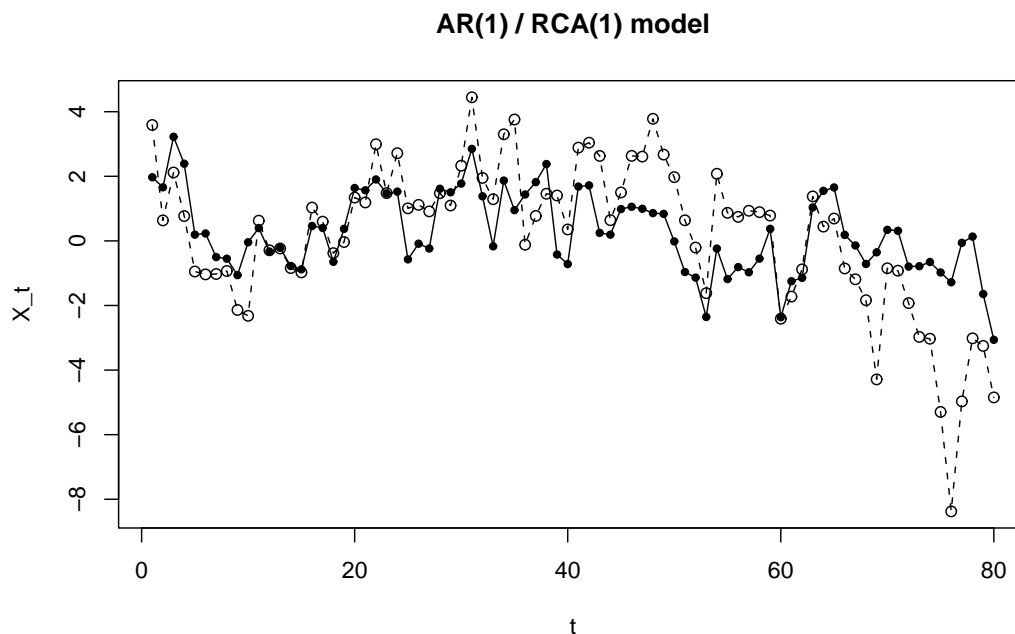
Pro ilustraci rozdílu mezi klasickým autoregresním modelem AR(1) s pevným autoregresním koeficientem  $\beta$  a modelem stejného řadu s náhodným autoregresním koeficientem  $\beta_t$  uvádíme níže obrázek 1. Plná čára a plné body představují trajektorii časové řady generované z AR(1) modelu s normálně rozdělenými homogenními chybami  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  a pevným autoregresním parametrem  $\beta$  velikosti 0.7. Přerušovaná čára a prázdné body patří RCA(1) modelu s homogenními chybami rovněž v podobě bílého šumu  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , avšak náhodným, normálně rozděleným autoregresním parametrem  $\beta_t$  s rozptylem velikosti 0.4 a střední hodnotou  $\beta = 0.7$ . V obou modelech je vygenerovaná chybová posloupnost  $\{\epsilon_t\}$  stejná, můžeme proto dobře posoudit, jak hodně vliv náhodných efektů autoregresního parametru  $\beta_t$  oba modely odlišuje.

Pro autoregresní modely existuje v odborné literatuře řada testů náhodnosti autoregresních parametrů. Naším úkolem je některé z těchto testů, odvozených právě pro model řádu 1, v práci popsat a také později srovnat jejich účinnost na rozsáhlé numerické studii, neboť pokud je nám známo, tak podobné srovnání dosud nikdo neprovedl. V druhé kapitole si představíme test, který je založen na skórech. Vlastní přínos bude spočívat v ověření správnosti tvaru testové statistiky s použitím teorie posloupností martingalových diferencí. Třídě pořadových testů náhodnosti autoregresního parametru modelu RCA(1) si přiblížíme ve třetí kapitole. Obsahem dalších dvou kapitol budou dvě varianty lokálně nejlepšího invariantního testu, kde první z nich je odvozena pro stejný model jako předchozí testy, druhá však pro jeho zobecnění - RCA(1) model s ARCH(1) chybami. Definici ARCH procesu i význam této zkratky si připomeneme v úvodu této kapitoly.

Jak už bylo zmíněno výše, nedílnou a významnou částí této práce je numerická studie, kterou nalezneme v šesté kapitole. Na základě této poměrně obsáhlé simulační studie, která zahrnuje jak RCA(1) modely s homogenními chybami, tak modely s heterogenními chybami a chybami typu ARCH, porovnáme účinnost popsaných testů, v neposlední řadě pak jejich schopnost vyrovnat se s porušením předpokladu normality modelu. Ve třídě pořadových testů rovněž studujeme, která volba z velké množiny uvažovaných kombinací skórové funkce a funkce regresních koeficientů se jeví komplexně jako nejoptimálnější. Získané poznatky, shrnuté v samostatném odstavci, si ověříme

při aplikaci testů na reálná data - časovou řadu denních hodnot indexu PX50 publikovaného Burzou cenných papírů Praha. Poslední kapitolu tvoří Závěr, za kterým najdeme nejen rozsáhlou tabulkovou přílohu účinností jednotlivých testů pro modely z numerické studie, ale také popis obsahu přiloženého kompaktního disku.

Tato práce byla vysázena českou verzí programu  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  pod operačním systémem Microsoft Windows XP.



Obrázek 1: Porovnání AR(1) modelu (plná čára) s odpovídajícím RCA(1) modelem (přerušovaná čára)



# Kapitola 1

## Autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu 1

Autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu 1 (zkráceně RCA(1) model) definujeme vztahem

$$X_t = \beta_t X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

kde předpokládáme

- (A)  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou  $E(\epsilon_t) = 0$  a rozptylem  $var(\epsilon_t) = E(\epsilon_t^2) = \sigma_\epsilon^2 > 0$
- (B)  $\{\beta_t; t = 1, 2, \dots\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou  $E(\beta_t) = \beta$  a rozptylem  $var(\beta_t) = \sigma_\beta^2 \geq 0$
- (C) posloupnosti  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  a  $\{\beta_t; t = 1, 2, \dots\}$  jsou nezávislé na  $X_0$ , kde  $EX_0 = 0$  a  $var(X_0) = \sigma_{x_0}^2$
- (D) posloupnosti  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  a  $\{\beta_t; t = 1, 2, \dots\}$  jsou vzájemně nezávislé.

Náhodná posloupnost  $\{X_t; t = 1, 2, \dots\}$  je stacionární a ergodická podle kvadratického středu, jestliže platí (viz Anděl [1]) současně

$$(E) \quad \beta^2 + \sigma_\beta^2 < 1 \quad \text{a} \quad \sigma_{x_0}^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \beta^2 - \sigma_\beta^2}.$$

V dalším odstavci této kapitoly se budeme věnovat odhadu vektoru  $(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2)'$  parametrů modelu RCA(1). Tyto výsledky využijeme později. Všechny výše zmíněné předpoklady považujeme nadále za splněné a nebudeme je více vypisovat.

## 1.1 Odhad metodou nejmenších čtverců

Nejdříve si přepíšeme vztah (1.1) do užitečnějšího tvaru za pomoci posloupnosti nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin  $\{B_t; t = 1, 2, \dots\}$  se střední hodnotou  $E(B_t) = 0$  a rozptylem  $E(B_t^2) = \sigma_\beta^2$ , totiž do tvaru

$$X_t = \beta X_{t-1} + \epsilon_t = (\beta + B_t)X_{t-1} + \epsilon_t = \beta X_{t-1} + (B_t X_{t-1} + \epsilon_t)$$

a výraz  $(B_t X_{t-1} + \epsilon_t)$  označíme jako  $u_t$ . Můžeme tedy psát

$$X_t = \beta X_{t-1} + u_t. \quad (1.2)$$

V našem případě je třeba klasický odhad metodou nejmenších čtverců modifikovat, a to tak, že odhad rozdělíme do dvou kroků. V prvním kroku odhadneme koeficient  $\beta$  v autoregresním modelu (1.2), kde  $u_t$  je reziduální složka. Označme  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebru generovanou množinou  $\{X_t, \dots, X_1\}$ . Pak platí

$$E(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1} E(B_t) + E(\epsilon_t) = 0, \quad (1.3)$$

$$E(u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}^2 E(B_t^2) + 2X_{t-1} E(B_t \epsilon_t) + E(\epsilon_t^2) = \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2. \quad (1.4)$$

V poslední uvedené rovnosti vystupují oba parametry, které je třeba ještě odhadnout. Jako druhý krok odhadu se z tohoto důvodu nabízí aplikovat klasickou metodu nejmenších čtverců na regresní model

$$\hat{u}_t^2 = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2 + \delta_t,$$

kde  $\hat{u}_t$  je odhadnuté reziduum, spočtené z modelu (1.2) v prvním kroku,  $\sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2$  jsou regresní koeficienty a  $\delta_t$  reziduální složka.

Tímto postupem dostáváme pro známé  $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$  odhady jednotlivých parametrů

$${}_{ls}\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}, \quad (1.5)$$

$${}_{ls}\hat{\sigma}_{\beta n}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 (X_{t-1}^2 - \overline{X^2})}{\sum_{t=1}^n (X_{t-1}^2 - \overline{X^2})^2}, \quad (1.6)$$

$${}_{ls}\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 \right) - {}_{ls}\hat{\sigma}_{\beta n}^2 \overline{X^2}, \quad (1.7)$$

kde  $\overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2$ .

Za platnosti předpokladů **(A)**-**(E)** platí, že odhad  ${}_{ls}\hat{\beta}_n$  je silně konzistentním odhadem koeficientu  $\beta$ , nebo-li  ${}_{ls}\hat{\beta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \beta$  (věta 3.1, Nicholls, Quinn [9]).

## 1.2 Odhad metodou maximální věrohodnosti

Před odvozením tohoto odhadu musíme přidat další předpoklad, a to

(F) posloupnosti  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$ ,  $\{B_t; t = 1, 2, \dots\}$  jsou sdruženě normálně rozdělené.

Za platnosti tohoto předpokladu je rozdělení náhodné veličiny  $X_t$ , podmíněné  $\sigma$ -algebrou  $\mathcal{F}_{t-1}$ , lineární kombinací normálně rozdělených nezávislých náhodných veličin, a proto je také normální. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že podmíněná střední hodnota a podmíněný rozptyl  $X_t$  vychází

$$\begin{aligned} E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E(X_t|X_{t-1}) = \beta X_{t-1} + E(u_t|X_{t-1}) = \beta X_{t-1}, \\ \text{var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E(u_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = E(u_t^2|X_{t-1}) = \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2. \end{aligned}$$

Vyjádříme si podmíněnou hustotu náhodné veličiny  $X_1$

$$f(x_1|x_0) = \{2\pi(\sigma_\beta^2 x_0^2 + \sigma_\epsilon^2)\}^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x_1 - \beta x_0)^2}{2(\sigma_\beta^2 x_0^2 + \sigma_\epsilon^2)}\right\},$$

náhodné veličiny  $X_t$  ( $t \geq 2$ )

$$\begin{aligned} f(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1) &= f(x_t|x_{t-1}) = \\ &= \{2\pi(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2)\}^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{2(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2)}\right\} \end{aligned}$$

a podmíněnou hustotu náhodného vektoru  $(X_1, \dots, X_n)'$

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_1|x_0) &= f(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) f(x_{n-1}, \dots, x_1|x_0) = \dots = \\ &= f(x_n|x_{n-1}) f(x_{n-1}|x_{n-2}) \dots f(x_1|x_0) = \\ &= \prod_{t=1}^n \{2\pi(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2)\}^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{2(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2)}\right\}. \end{aligned}$$

Logaritmická věrohodnostní funkce má tedy za podmínky znalosti  $x_0$  tvar

$$\begin{aligned} \ell_n(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2|x_0) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Maximálně věrohodný odhad vektoru parametrů  $(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2)'$  modelu RCA(1) bychom získali maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce na daném parametrickém prostoru. Namísto maximalizace funkce  $\ell_n(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2)$  bude pohodlnější minimalizovat její lineární transformaci, funkci

$$\tilde{\ell}_n(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2 | x_0) = -\frac{2}{n} \ell_n(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2 | x_0) - \ln(2\pi) = \quad (1.8)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2}. \quad (1.9)$$

Funkce  $\tilde{\ell}_n(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2)$  je nelineární v proměnných, a proto nelze odvodit explicitní tvar maximálně věrohodných odhadů  ${}_{ml}\hat{\beta}_n$ ,  ${}_{ml}\hat{\sigma}_{\beta n}^2$  a  ${}_{ml}\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2$  parametrů  $\beta$ ,  $\sigma_\beta^2$  a  $\sigma_\epsilon^2$ , které minimalizují funkci  $\tilde{\ell}_n(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2)$ . Jednoduchou úpravou si však můžeme situaci poněkud ulehčit. Definujeme-li  $r = \sigma_\beta^2 / \sigma_\epsilon^2$ , můžeme ekvivalentně minimalizovat funkci

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_n(\beta, r, \sigma_\epsilon^2 | x_0) &= \tilde{\ell}_n(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2 | x_0) = \\ &= \ln(\sigma_\epsilon^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(rx_{t-1}^2 + 1) + \frac{1}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{rx_{t-1}^2 + 1}. \end{aligned}$$

Maximálně věrohodný odhad vektorového parametru  $(\beta, r, \sigma_\epsilon^2)$  získáme vyřešením systému věrohodnostních rovnic

$$\frac{\partial \bar{\ell}_n(\beta, r, \sigma_\epsilon^2)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\ell}_n(\beta, r, \sigma_\epsilon^2)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\ell}_n(\beta, r, \sigma_\epsilon^2)}{\partial \sigma_\epsilon^2} = 0.$$

Přímým výpočtem dostáváme následující výsledky

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\ell}_n}{\partial \beta} = 0 &\iff \hat{\beta}_n(r) = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{X_t X_{t-1}}{r X_{t-1}^2 + 1}}{\sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}^2}{r X_{t-1}^2 + 1}}, \\ \frac{\partial \bar{\ell}_n}{\partial \sigma_\epsilon^2} = 0 &\iff \hat{\sigma}_{\epsilon n}^2(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{\beta}_n(r) X_{t-1})^2}{r X_{t-1}^2 + 1}. \end{aligned}$$

Získané odhady  $\hat{\beta}_n(r)$  a  $\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2(r)$  dosadíme zpět za  $\beta$  a  $\sigma_\epsilon^2$  do funkce  $\bar{\ell}_n(\beta, r, \sigma_\epsilon^2)$ . Problém se takto redukuje na výpočet  $\hat{r}_n$ , kde  $\hat{r}_n$  minimalizuje funkci

$$\ell_n^\Delta(r) = \bar{\ell}_n(\hat{\beta}_n(r), r, \hat{\sigma}_{\epsilon n}^2(r)) = \ln\{\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2(r)\} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(rx_{t-1}^2 + 1).$$

Odhad  $\hat{r}_n$  opět nelze explicitně vyjádřit. Je proto třeba přistoupit k iterativní proceduře. Jako počáteční řešení nějaké iterativní metody je vhodné zvolit

například odhady získané metodou nejmenších čtverců v předchozí sekci. Pokud známe  $\hat{r}_n$ , výsledné ML-odhady obdržíme jako

$${}_{ml}\hat{\beta}_n = \hat{\beta}_n(\hat{r}_n), \quad {}_{ml}\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2 = \hat{\sigma}_{\epsilon n}^2(\hat{r}_n), \quad {}_{ml}\hat{\sigma}_{\beta n}^2 = {}_{ml}\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2 \hat{r}_n.$$

Zavedme značení  $\theta_0 = (\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2)$  a  ${}_{ml}\theta = ({}_{ml}\hat{\beta}_n, {}_{ml}\hat{\sigma}_{\beta n}^2, {}_{ml}\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2)$ . Za platnosti předpokladů **(A)**-**(F)** platí, že odhad  ${}_{ml}\theta$  je silně konzistentním odhadem skutečného vektoru parametrů  $\theta_0$ , nebo-li  ${}_{ml}\theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \theta_0$  (věty 4.1, 4.2 a 4.3, Nicholls, Quinn [9]).

## Kapitola 2

### Skórový test

Ramanathan a Rajarshi [11] zmiňují v úvodu svého článku test náhodnosti autoregresního parametru modelu RCA(1). Jedná se o test nulové hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  proti alternativě  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$  a jejich statistika má tvar

$$NQ_n = \frac{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)}{\left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^2 \right] \right\}^{1/2}}, \quad (2.1)$$

kde  $r_t$  jsou odhadnutá rezidua modelu RCA(1) ve tvaru (1.1),  $\hat{\beta}_n = {}_{ls}\hat{\beta}_n$  je odhad metodou nejmenších čtverců dle (1.5) a  $S^2$  odhad parametru  $\sigma_\epsilon^2$

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}, \quad r_t = \hat{\epsilon}_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}, \quad \hat{\sigma}_{\epsilon n}^2 = S^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2. \quad (2.2)$$

Testovou statistiku  $NQ_n$  však uvedli bez důkazu a ani nijak nekomentovali její limitní rozdělení. Odvolávají se na práci autorů Nicholls a Quinn [9], konkrétně na kapitulu *Skórový test* (str. 99), kde je odvozen za platnosti předpokladů **(A)**-**(F)** test náhodnosti autoregresních parametrů modelu RCA obecně řádu  $p$ . Z testové statistiky  $\hat{\tau}_n$  (2.3) Nichollse a Quinna ale není triviálně vidět, že by pro  $p = 1$  odpovídala statistice  $NQ_n$ . V dalším odstavci proto ověříme správnost statistiky  $NQ_n$  Ramanathana a Rajarshiho a popíšeme její asymptotické chování. Je vhodné poznamenat, že nedojdeme k výrazu (2.1), nýbrž k jeho druhé mocnině, tedy  $(NQ_n)^2$ . Rovněž není bez zajímavosti, že testová statistika  $(NQ_n)^2$  formálně souhlasí se skórovým testem heteroskedasticity v lineárním regresním modelu, který odvodili ve své práci Breusch a Pagan [3]. Tento test však není předmětem naší práce a nebudeme se jeho odvozením zabývat.

## 2.1 Odvození statistiky $NQ_n$ dle práce Nichollse a Quinna

Nicholls a Quinn odvodili za našich předpokladů test náhodnosti autoregresních parametrů pro autoregresní model s náhodnými koeficienty obecně řádu  $p$ . Jejich testová statistika  $\hat{\tau}_n$  (str. 102, [9]) má pro  $p = 1$  tvar

$$\hat{\tau}_n = \frac{nW_n^{-1}g_n^2}{2\nu_n(S^2)^2}, \quad (2.3)$$

kde

$$\begin{aligned} \overline{X^2} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2, & \nu_n &= \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2, \\ W_n &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( X_{t-1}^2 - \overline{X^2} \right)^2 = \frac{1}{n} \left[ \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^2 \right], \\ g_n &= \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2 X_{t-1}^2 \right) - S^2 \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2 \left( X_{t-1}^2 - \overline{X^2} \right). \end{aligned}$$

Dosazením do  $\hat{\tau}_n$  a postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_n &= \frac{n \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2 X_{t-1}^2 \right) - S^2 \overline{X^2} \right]^2}{\frac{2}{n} (S^2)^2 \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( X_{t-1}^2 - \overline{X^2} \right)^2} = \\ &= \frac{n \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2 \left( X_{t-1}^2 - \overline{X^2} \right) \right]^2}{\frac{1}{n^2} (S^2)^2 \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2 \left[ \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^2 \right]} = \\ &= \frac{\left[ \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \left( r_t^2 - S^2 \right) \right]^2}{\frac{1}{n} (S^2)^2 \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2 \left[ \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^2 \right]} = \\ &= \frac{\left[ \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right) \right]^2}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2 \left[ \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^2 \right]} = \\ &= \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2} \frac{\left[ \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right) \right]^2}{2 \left[ \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^2 \right]} = \\ &= \zeta_n (NQ_n)^2. \end{aligned}$$

Nyní se budeme podrobněji zabývat náhodnou veličinou

$$\zeta_n = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2} \quad (2.4)$$

a vyšetříme její asymptotické chování. Nejprve si upravme jmenovatel do vhodnějšího tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2 &= \frac{1}{n(S^2)^2} \sum_{t=1}^n (r_t^2 - S^2)^2 = \\ &= \frac{1}{n(S^2)^2} \sum_{t=1}^n r_t^2 (r_t^2 - S^2) = \frac{\sum_{t=1}^n r_t^4}{n(S^2)^2} - 1. \end{aligned}$$

Zlomek v poslední rovnosti připomíná jakýsi výběrový ekvivalent špičatosti. Připomeňme definici špičatosti pro obecnou náhodnou veličinu  $Z$ , splňující  $EZ^4 < \infty$ . Pak je špičatost definována jako  $E(Z - EZ)^4 / [E(Z - EZ)^2]^2$ . Pro náhodnou veličinu s normálním rozdělením má tato charakteristika hodnotu 3. Tento poznatek je pro nás určité vodítko a inspirace, jakým směrem se budeme ubírat, abychom ukázali, že  $\hat{\tau}_n$  a  $(NQ_n)^2$  mají stejné limitní rozdělení.

Chceme-li studovat asymptotické chování náhodné veličiny  $\zeta_n$ , musíme předpokládat trochu více než doposud. Zde jsme čerpali z práce Janečková [6] (lemma 1.3). Požadujeme navíc splnění podmínky

$$(\mathbf{G}) \quad E|\epsilon_t|^4 \leq K < \infty \quad \text{a} \quad E|\beta_t|^4 < 1 \quad \forall t.$$

Za platnosti tohoto předpokladu lze snadno užitím Minkowského nerovnosti

$$\left( E \left| \sum_{t=1}^n M_t \right|^q \right)^{1/q} \leq \sum_{t=1}^n (E|M_t|^q)^{1/q} \quad \text{pro} \quad q \leq 1, M_t \in L_q$$

ukázat, že také  $E|X_t|^4 \leq C < \infty$ , kde  $C$  je kladná konstanta. Poznamenejme, že podmínka  $E|\beta_t|^4 < 1$  implikuje předpoklad  $(\mathbf{E})$ , což plyne přímo z nerovnosti  $(E|\beta_t|^2)^{1/2} \leq (E|\beta_t|^4)^{1/4}$ . Dále využijeme poznatku, že náhodné posloupnosti

$$\{u_t, \mathcal{F}_t\}, \{X_{t-1}u_t, \mathcal{F}_t\}, \{X_{t-1}B_t\epsilon_t, \mathcal{F}_t\} \text{ a } \{X_{t-1}^2(B_t^2 - \sigma_\beta^2), \mathcal{F}_t\} \quad (2.5)$$

jsou  $L_2$ -stejněměrně omezené posloupnosti martingalových diferencí s filtrací  $\mathcal{F}_t$ . Připomeňme, že jsme náhodnou veličinu  $u_t = B_t X_{t-1} + \epsilon_t$  definovali v předchozí kapitole v (1.2). Dle definice posloupnosti martingalových diferencí je třeba ověřit měřitelnost posloupnosti  $\sigma$ -algeber  $\{\mathcal{F}_t, t = 1, 2, \dots\}$



a u všech posloupností vyjmenovaných v (2.5) integrovatelnost a podmínku kladenou na podmíněné střední hodnoty. Splnění prvních dvou požadavků je zřejmé. Zbývá ověřit podmínku charakterizující martingalové diference. Ze vzájemné nezávislosti  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$  a jejich nezávislosti na  $X_{t-1}$  ale ihned plyne, že i tato podmínka není porušena, tedy platí

$$\begin{aligned} E(u_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E(X_{t-1}u_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E(X_{t-1}B_t\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \\ &= E(X_{t-1}^2(B_t^2 - \sigma_\beta^2)|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \quad \text{s.j.} \quad \forall t. \end{aligned}$$

$L_2$ -stejněměrná omezenost je u posloupností  $\{u_t, \mathcal{F}_t\}$  a  $\{X_{t-1}u_t, \mathcal{F}_t\}$  přímým důsledkem Minkowského nerovnosti, u  $\{X_{t-1}B_t\epsilon_t, \mathcal{F}_t\}$  a  $\{X_{t-1}^2(B_t^2 - \sigma_\beta^2), \mathcal{F}_t\}$  plyne ihned z nezávislosti.

**Věta 2.1** (Silný zákon velkých čísel pro martingalové diference)

*Nechť  $\{Y_t, \mathcal{G}_t\}_1^\infty$  je posloupnost martingalových diferencí s filtrací  $\mathcal{G}_t$ , splňující podmínku*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{E|Y_t|^q}{a_t^q} < \infty \quad (2.6)$$

pro nějaké  $1 \leq q \leq 2$  a posloupnost kladných konstant  $a_t \nearrow \infty$ . Pak platí

$$\frac{1}{a_n} \sum_{t=1}^n Y_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0 \quad (2.7)$$

(viz Davidson [4], věta 20.11).

Tuto větu aplikujeme na posloupnosti martingalových diferencí (2.5), volíme  $a_t = t$  a  $q = 2$ . Podmínka (2.6) je splněna díky  $L_2$ -stejněměrné omezenosti uvažovaných posloupností. Konkrétně dostáváme

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}u_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}B_t\epsilon_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2(B_t^2 - \sigma_\beta^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0. \quad (2.9)$$

Za našich předpokladů se dá za pomoci složitější teorie ukázat, že také

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_{t-1}^2 - EX_{t-1}^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0, \quad (2.10)$$

jak je uvedeno v důkazu věty 1.1 v práci Janečková [6].

Ze stacionarity posloupnosti  $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$  plyne, že  $\text{var}(X_t) = \sigma_x^2$  je konstantní. Přímým výpočtem lze ověřit, že  $EX_t = 0$ . Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= EX_t^2 = E(\beta_t X_{t-1} + \epsilon_t)^2 = E(\beta_t^2 X_{t-1}^2 + 2\beta_t X_{t-1} \epsilon_t + \epsilon_t^2) = \\ &= E(\beta_t^2)E(X_{t-1}^2) + E(\epsilon_t^2) = \sigma_x^2(\sigma_\beta^2 + \beta^2) + \sigma_\epsilon^2\end{aligned}$$

a po jednoduché úpravě konečně

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - (\sigma_\beta^2 + \beta^2)} > 0.$$

Sloučením (2.10) a poslední rovnosti máme

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - (\sigma_\beta^2 + \beta^2)}. \quad (2.11)$$

Nyní můžeme všechny právě získané poznatky aplikovat při zkoumání asymptotického chování  $S^2$  a  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^4$ . Platí

$$\begin{aligned}r_t &= X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1} = (\beta + B_t)X_{t-1} + \epsilon_t - \hat{\beta}_n X_{t-1} = \\ &= (\beta - \hat{\beta}_n)X_{t-1} + B_t X_{t-1} + \epsilon_t = (\beta - \hat{\beta}_n)X_{t-1} + u_t, \\ S^2 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2 = \\ &= (\beta - \hat{\beta}_n)^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 + (\beta - \hat{\beta}_n) \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_t^2.\end{aligned}$$

Zopakujme, že  $\hat{\beta}_n = {}_{ls}\hat{\beta}_n$ . O odhadu  ${}_{ls}\hat{\beta}_n$  již víme, že je silně konzistentním odhadem parametru  $\beta$ . Za platnosti předpokladů **(A)**-**(G)** pak také platí, že  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  má asymptoticky normální rozdělení s nulovou střední hodnotou (Nicholls, Quinn [9], věta 3.1). Dle silné konzistence odhadu  $\hat{\beta}_n$ , poznatků o posloupnostech martingalových diferencí (2.8) a znalosti limitního vztahu (2.11) platí, že

$$(\beta - \hat{\beta}_n)^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 + (\beta - \hat{\beta}_n) \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0.$$

Závěru o martingalových diferencích i limitního vztahu (2.11) využijeme i při dalších úpravách. Rozepišme si  $u_t^2$  v sumě

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_t^2 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n B_t^2 X_{t-1}^2 + \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n B_t X_{t-1} \epsilon_t + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 (B_t^2 - \sigma_\beta^2) + \sigma_\beta^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \\ &\quad + \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n B_t X_{t-1} \epsilon_t + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2. \end{aligned}$$

Ze vztahu (2.9) plyne, že členy  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 (B_t^2 - \sigma_\beta^2)$  a  $\frac{2}{n} \sum_{t=1}^n B_t X_{t-1} \epsilon_t$  konvergují skoro jistě k 0. Dle zákona velkých čísel (viz Anděl [2], věta B.4) pro nezávislé náhodné veličiny, které mají stejné rozdělení s konečnou střední hodnotou, platí limitní vztah

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \sigma_\epsilon^2.$$

Asymptotické chování členu  $\sigma_\beta^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2$  plyne opět ze vztahu (2.11). Sloučením všech výše zmíněných poznatků se konečně dostáváme k výsledku

$$S^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \frac{\sigma_\beta^2 \sigma_\epsilon^2}{1 - (\sigma_\beta^2 + \beta^2)} + \sigma_\epsilon^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2 (1 - \beta^2)}{1 - (\sigma_\beta^2 + \beta^2)}. \quad (2.12)$$

Podobně si rozepíšeme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^4 &= (\beta - \hat{\beta}_n)^4 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 + 4(\beta - \hat{\beta}_n)^3 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^3 \epsilon_t + \\ &\quad + 6(\beta - \hat{\beta}_n)^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \epsilon_t^2 + 4(\beta - \hat{\beta}_n) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} \epsilon_t^3 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^4. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že všechny sumy na pravé straně rovnosti jsou omezené a platí  $(\beta - \hat{\beta}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0$ , stačí se dále zabývat jen členem  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^4$ . Platí ovšem

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^4 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} E\epsilon_1^4 = 3\sigma_\epsilon^4, \quad (2.13)$$

kde jsme opět aplikovali stejný zákon velkých čísel a uvědomili si, že pro  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$  platí  $E\epsilon_t^4 = 3\sigma_\epsilon^4$ . Ze vztahů (2.12) a (2.13) za platnosti nulové

hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  po dosazení do (2.4) dostáváme

$$\zeta_n = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{r_t^2}{S^2} - 1 \right)^2} = \frac{2}{\frac{\sum_{t=1}^n r_t^4}{n(S^2)^2} - 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \frac{2}{\frac{3\sigma_\epsilon^4}{(\sigma_\epsilon^2)^2} - 1} = 1,$$

neboť algebraické operace jsou spojité vzhledem ke konvergenci skoro jistě, jak je uvedeno ve Štěpán [12] (str. 181). Statistika  $\hat{\tau}_n$  má asymptoticky  $\chi_1^2$ -rozdělení, jak se píše v Nicholls, Quinn [9], věta 6.2. Jelikož platí vztah

$$\hat{\tau}_n - (NQ_n)^2 = \hat{\tau}_n \left( 1 - \frac{1}{\zeta_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

mají obě statistiky stejné limitní pravděpodobnostní rozdělení  $\chi_1^2$ .

## 2.2 Komentář k odvození statistiky $\hat{\tau}_n$

Nicholls a Quinn postupovali při odvozování  $\hat{\tau}_n$  (2.3) následujícím způsobem. Nejprve zformulovali test založený na věrohodnostním poměru. Označme si ho  $\tau_n$ . Je známo, že pro testy založené na věrohodnostním poměru je obtížné vyšetřit asymptotické vlastnosti, když skutečný parametr leží na hranici parametrického prostoru. Tak je tomu i v našem případě, neboť testujeme hypotézu  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  proti alternativě  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$ . Z tohoto důvodu Nicholls a Quinn pro vyšetření asymptotických vlastností statistiky  $\tau_n$  definovali vhodnější veličinu  $\tilde{\tau}_n$ , ve které vystupuje parciální derivace logaritmické věrohodnostní funkce  $\frac{\partial \tilde{\ell}_n(\theta_0)}{\partial \theta}$ . Připomeňme, že jsme  $\tilde{\ell}_n(\theta_0)$  definovali vztahem (1.9). Následně postupně ukázali, že rozdíl statistik  $\tau_n - \tilde{\tau}_n$  konverguje podle pravděpodobnosti k nule a že za platnosti nulové hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  platí

- statistika  $\tilde{\tau}_n$  a tedy i statistika  $\tau_n$  mají asymptoticky  $\chi_1^2$ -rozdělení
- statistika  $\frac{\tilde{\tau}_n}{\nu}$ , kde  $\nu = \frac{1}{2} E\left(\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_\epsilon^2} - 1\right)^2$ , má také asymptoticky  $\chi_1^2$ -rozdělení
- veličinu  $\tilde{\tau}_n$  lze vyjádřit pomocí vektoru skóru  $\frac{\partial \tilde{\ell}_n(\hat{\beta}_n, 0, \hat{\sigma}_{\epsilon n}^2)}{\partial \theta}$ .

Posledním krokem bylo ekvivalentní vyjádření  $\tilde{\tau}_n$  právě pomocí skóru. Poté už nic nebránilo tomu nahradit skórovou variantu veličiny  $\frac{\tilde{\tau}_n}{\nu}$  jejím výběrovým ekvivalentem - statistikou  $\hat{\tau}_n$  - a dokázat opět asymptotické  $\chi_1^2$ -rozdělení.

# Kapitola 3

## Pořadový test

Ramanathan a Rajarshi [11] se věnovali skórovému testu  $NQ_n$  pouze okrajově, tématem jejich práce byl odlišný přístup k testování náhodnosti autoregresních parametrů modelu RCA(1). Navrhli třídu neparametrických testů vycházející z teorie lokálně nejsilnějších pořadových testů. Tato třída pořadových testů je odvozena za platnosti předpokladů **(A)**-**(E)**. Nepředpokládá tedy sdružené normální rozdělení posloupností  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  a  $\{B_t; t = 1, 2, \dots\}$  na rozdíl od skórového testu  $(NQ_n)^2$ , u kterého z tohoto důvodu nemůžeme očekávat, že bude robustní, pokud je předpoklad normality porušen. Rozdělení posloupností  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  a  $\{B_t; t = 1, 2, \dots\}$  může být v případě pořadového testu dokonce rozdílné. Struktura této kapitoly bude následující. Nejprve si ve zkratce připomeneme, v čem spočívá teorie lokálně nejsilnějších pořadových testů - zde čerpáme z Anděl [2], kapitola 11.6.2 *Lokálně nejsilnější pořadové testy* - a naznačíme, jak Ramanathan a Rajarshi pomocí této teorie odvodili třídu neparametrických testů náhodnosti autoregresních parametrů modelu RCA(1). V tomto případě jsme částečně čerpali z dřívější práce Ramanathan, Rajarshi [10], nepojednávající o autoregresním, nýbrž regresním modelu. Poté popíšeme výsledný tvar zmiňované třídy. V dalším odstavci vyslovíme tvrzení o asymptotickém chování takových testů v závislosti na volbě skórové funkce. Na závěr uvedeme námi uvažované konkrétní volby skórové funkce v numerické studii a spočtená limitní rozdělení z této volby vyplývající.

### 3.1 Lokálně nejsilnější pořadové testy

Nejdříve musíme definovat pár pojmů. Řekneme, že vektor  $(M_1, \dots, M_n)'$  splňuje hypotézu náhodnosti, jsou-li náhodné veličiny  $M_1, \dots, M_n$  nezávislé a mají spojitě rozdělení. Nechť jsou  $M_{(1)}, \dots, M_{(n)}$  pořádkové statistiky vy-

tvořené z náhodného výběru o rozsahu  $n$ , pocházejícího z rozdělení s hustotou  $f(m, 0)$ , kde  $f(m, 0)$  náleží do systému hustot  $\{f(m, \varpi), \varpi \in \Omega\}$ . Definujeme pořádkové skóry vztahem

$$a_n(t, f) = E \left\{ \frac{\partial \log(f(M_{(t)}, \varpi))}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=0} \right\}, \quad t = 1, \dots, n,$$

a označíme sdruženou hustotu

$$f_{\Delta}(m_1, \dots, m_n) = \prod_{t=1}^n f(m_t, \Delta h_t),$$

kde  $h_1, \dots, h_n$  jsou daná čísla (označujeme je regresní koeficienty). Za platnosti určitých předpokladů, které zde nebudeme pro stručnost uvádět (lze je ale dohledat v Anděl [2], str.264), je test s kritickým oborem

$$\sum_{t=1}^n h_t a_n(R_t, f) \geq l, \quad (3.1)$$

kde  $R_t$  je pořadím veličiny  $M_t$  mezi  $M_1, \dots, M_n$ , lokálně nejsilnějším pořadovým testem hypotézy náhodnosti  $f_0(m_1, \dots, m_n) = \prod_{t=1}^n f(m_t, 0)$  proti alternativě  $K = \{f_{\Delta}(m_1, \dots, m_n), \Delta > 0\}$  na hladině významnosti

$$\alpha = P \left( \sum_{t=1}^n h_t a_n(R_t, f) \geq l \right).$$

Nyní si nastíníme, jak Ramanathan a Rajarshi tuto teorii aplikovali při testování náhodnosti autoregresních parametrů. Pro odvození testu předpokládali, že náhodné posloupnosti  $\{\epsilon_t\}$  a  $\{B_t\}$  mají logistické rozdělení s parametry  $(0, \sigma_{\epsilon})$ , respektive  $(0, \sigma_{\beta})$ . Připomeňme, že hustota logistického rozdělení s parametry  $(0, \sigma_{\epsilon})$  je určena funkčním předpisem

$$f(x) = \frac{(1/\sigma_{\epsilon}) \exp(-x/\sigma_{\epsilon})}{\{1 + \exp(-x/\sigma_{\epsilon})\}^2}.$$

Položme  $M_t = u_t^2$  a  $\varpi = \sigma_{\beta}^2/\sigma_{\epsilon}^2$ , kde  $u_t$  jsme definovali již dříve vztahem (1.2)

$$u_t = X_t - \beta X_{t-1} = (\beta_t - \beta) X_{t-1} + \epsilon_t = B_t X_{t-1} + \epsilon_t.$$

Pak za platnosti hypotézy  $H_0 : \sigma_{\beta}^2 = 0$  ekvivalentní s podmínkou  $\varpi = 0$  splňuje vektor  $(M_1, \dots, M_n)' = (u_1^2, \dots, u_n^2)'$  hypotézu náhodnosti. Skutečně je tomu tak, neboť v situaci  $\sigma_{\beta}^2 = 0$  je náhodná veličina  $u_t^2$  identická s  $\epsilon_t^2$ ,

což je zřejmé například ze vztahu  $u_t = B_t X_{t-1} + \epsilon_t$ , a přitom máme z podmínky **(A)** zaručenou nezávislost náhodných veličin  $\epsilon_t^2$ .

Vidíme, že naše volba  $M_t$  a  $\varpi$  odpovídá výše uvedené teorii lokálně nejsilnějších pořadových testů. Spočte se tedy lokálně nejsilnější pořadový test dle vztahu (3.1), založený na pořadí náhodných veličin  $u_t^2$ . Náhodné veličiny  $u_t$  jsou však nepozorovatelné, a proto se nahradí odhadnutými rezidui  $r_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$ . Regresní koeficienty se volí  $h_t = X_{t-1}^2$ . Takto se získá po delším výpočtu a následném zjednodušení testové statistiky třída pořadových testů náhodnosti autoregresních parametrů modelu RCA(1), jejíž konkrétní tvar následuje v dalším odstavci.

### 3.2 Testová statistika $T_n(\phi, h)$

Nechť  $h$  je borelovsky měřitelná funkce a  $h_t = h(X_{t-1}^2)$  jsou regresní koeficienty. Definujme

$$\bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_t, \quad H_t = \frac{h_t - \bar{h}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (h_t - \bar{h})^2}}.$$

Nechť dále  $R_t$  je pořadí  $r_t^2$  mezi  $r_1^2, \dots, r_n^2$  a  $\phi$  je vhodně zvolená skórová funkce. Pak statistika testující nulovou hypotézu  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  proti alternativě  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$  má tvar

$$T_n(\phi, h) = \sum_{t=1}^n H_t \phi\left(\frac{R_t}{n+1}\right). \quad (3.2)$$

Konkrétní volbou skórové funkce  $\phi$  a funkce  $h$  dostáváme jednotlivé testy náležící do třídy pořadových testů náhodnosti autoregresních parametrů.

### 3.3 Asymptotické chování pořadového testu

Za platnosti nulové hypotézy  $H_0$ , tedy v situaci, kdy

$$X_t = \beta X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

je autoregresní model řádu 1, lze ukázat, že statistika  $T_n(\phi, h)$  konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem závislejícím na volbě skórové funkce  $\phi$ , nikoliv však na volbě funkce  $h$ . Za platnosti alternativy  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$  platí, že  $T_n(\phi, h)$  konverguje v distribuci opět k normálnímu rozdělení se shodným rozptylem, ale s nenulovou střední

hodnotou. Zformulujme nyní obě tvrzení korektně se všemi předpoklady.

**Věta 3.1** (Asymptotická normalita za hypotézy  $H_0$ )

Za platnosti nulové hypotézy a předpokladů

(i) náhodná veličina  $\epsilon_1$  má stejnoměrně spojitou hustotu  $f_\epsilon > 0$

a distribuční funkci  $F_\epsilon$  symetrickou kolem počátku

(ii)  $E(h_1^2) < \infty$ ,  $E(\epsilon_1^2) < \infty$

(iii)  $|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)| = O_P(1)$

(iv)  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}(h_t - E(h_1)) = o_P(1)$

(v)  $\phi$  je zleva spojitá funkce s omezenou variací na intervalu  $(0, 1)$

platí limitní vztah

$$T_n(\phi, h) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2), \text{ kde} \quad (3.3)$$

$$\sigma_\phi^2 = \int_0^1 \int_0^1 \{\min(x, y) - xy\} d\phi(x) d\phi(y) \quad (3.4)$$

(viz Ramanathan a Rajarshi [11], věta 2.2, str. 117).

**Věta 3.2** (Asymptotická normalita za alternativy  $H_1$ )

Za platnosti alternativní hypotézy, předpokladů (i)-(v) a několika dalších poměrně složitých předpokladů se dá ukázat, že ve speciálním případě, kdy  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \frac{\Delta}{\sqrt{n}})$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $t = 1, \dots, n$  platí limitní vztah

$$T_n(\phi, h) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\psi(\Delta), \sigma_\phi^2),$$

kde  $\psi(\Delta)$  závisí na  $\Delta$  a také na volbě funkce  $\phi$  (viz Ramanathan a Rajarshi [11], věta 3.1, str. 118).

Pro zajímavost uvádíme, že Ramanathan a Rajarshi spočetli asymptotickou relativní eficienci (v Pitmanově smyslu) konkrétního pořadového testu  $T_n(x^2, x)$  vzhledem ke skórovému testu  $NQ_n$ . V případě gaussovského modelu vychází tato charakteristika přibližně 0.775. Mají-li náhodné posloupnosti  $\{\epsilon_t\}$  a  $\{B_t\}$  logistické rozdělení, vychází přibližně hodnota 1.74.

### 3.4 Konkrétní volby funkcí $\phi$ a $h$

Chceme-li prakticky využít pořadový test  $T_n(\phi, h)$ , potřebujeme znát kritickou hodnotu  $l$  ze vztahu (3.1). Tento problém je ekvivalentní s tím, dokážeme-



li spočíst integrál (3.4). Podařilo se nám odvodit rovnost, která výpočet rozptylu  $\sigma_\phi^2$  limitního rozdělení značně zjednodušuje. Tento dílčí výsledek zformulujeme do následujícího lemmatu a také dokážeme.

**Lemma 3.3** (Výpočet  $\sigma_\phi^2$ )

*Nechť  $\phi$  je spojitá a diferencovatelná funkce s omezenou variací na intervalu  $(0, 1)$ . Pak platí rovnost*

$$\sigma_\phi^2 = \int_0^1 \int_0^1 \{\min(x, y) - xy\} d\phi(x) d\phi(y) = \int_0^1 \phi^2(x) dx - \left( \int_0^1 \phi(x) dx \right)^2.$$

*Důkaz.* Označme si

$$g(x) = \phi'(x) \quad \text{a} \quad G(x) = \int_0^x \phi(u) du$$

a počítejme přímo

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \{\min(x, y) - xy\} d\phi(x) d\phi(y) = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \{\min(x, y) - xy\} g(x) g(y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \left\{ (1-y) \int_0^y x g(x) dx + y \int_y^1 (1-x) g(x) dx \right\} g(y) dy. \end{aligned}$$

Pomocí metody per partes spočteme vnitřní integrály

$$\begin{aligned} (1-y) \int_0^y x g(x) dx &= (1-y) \left( [x\phi(x)]_0^y - \int_0^y \phi(x) dx \right) = \\ &= y\phi(y) - y^2\phi(y) - \int_0^y \phi(x) dx + y \int_0^y \phi(x) dx, \\ y \int_y^1 (1-x) g(x) dx &= y \left( [\phi(x)]_y^1 - [x\phi(x)]_y^1 + \int_y^1 \phi(x) dx \right) = \\ &= y\phi(1) - y\phi(y) - y\phi(1) + y^2\phi(y) + y \int_y^1 \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Výsledky dosadíme do rozepsaného tvaru pro  $\sigma_\phi^2$  a pokračujeme výpočtem vnějšího integrálu

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^2 &= \int_0^1 \left\{ y \int_0^y \phi(x) dx - \int_0^y \phi(x) dx \right\} g(y) dy = \\ &= \int_0^1 \phi(x) dx \int_0^1 y g(y) dy - \int_0^1 G(y) g(y) dy = \end{aligned}$$

Skórová funkce $\phi$	rozptyl $\sigma_\phi^2$
$x^{-1/2}$	0.055555
$x$	0.083333
$x^2$	0.088889
$x^4$	0.071111
$\exp(x)$	0.242036
$\exp(x^2)$	0.225104
$\ln(x+1)$	0.039094
$\Phi^{-1}(x)$	1.000000
$\text{tg}(x)$	0.178412
$\sin(x\pi/2)$	0.094715

Tabulka 3.1: Rozptyl limitního rozdělení  $T_n(\phi, h)$  pro různé volby  $\phi$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \phi(x) dx \left\{ \left[ y\phi(y) \right]_0^1 - \int_0^1 \phi(y) dy \right\} - \int_0^1 G(y)g(y) dy = \\
&= \phi(1)G(1) - \left( \int_0^1 \phi(x) dx \right)^2 - \left\{ \left[ G(y)\phi(y) \right]_0^1 - \int_0^1 \phi^2(y) dy \right\} = \\
&= \int_0^1 \phi^2(x) dx - \left( \int_0^1 \phi(x) dx \right)^2. \quad \square
\end{aligned}$$

V numerické studii účinnosti testů náhodnosti autoregresních parametrů, která je součástí této práce, jsme uvažovali nejrůznější volby skórové funkce  $\phi$  a funkce  $h$ , vystupující v předpisu regresních koeficientů  $h_t = h(X_{t-1}^2)$ . Do množiny  $\mathcal{S}_\phi$  uvažovaných skórových funkcí, které zřejmě splňují předpoklady lemmatu **3.3**, jsme zahrnuli funkce  $\sqrt{x}$ ,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^4$ ,  $\exp(x)$ ,  $\exp(x^2)$ ,  $\ln(x+1)$ ,  $\Phi^{-1}(x)$ ,  $\text{tg}(x)$  a  $\sin(x\pi/2)$ , kde  $\Phi^{-1}(x)$  je kvantilová funkce standardního normálního rozdělení  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Množina  $\mathcal{S}_h$  pak obsahuje funkce  $\sqrt{x}$ ,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^4$  a  $\ln(x+1)$ . Zkoumali jsme účinnost pořadového testu  $T_n(\phi, h)$  pro všechny dvojice funkcí  $(\phi, h)$ , kde  $\phi \in \mathcal{S}_\phi$  a  $h \in \mathcal{S}_h$ . Této studii se však budeme podrobně věnovat později. Víme, že testová statistika  $T_n(\phi, h)$  konverguje za platnosti nulové hypotézy v distribuci k normálnímu rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma_\phi^2$  (3.4), závisícím na volbě skórové funkce  $\phi$ , nikoliv však na volbě funkce  $h$ . V tabulce 3.1 uvádíme pro uvažované skórové funkce odpovídající konkrétní hodnoty rozptylů limitního rozdělení  $T_n(\phi, h)$ . Integrály jsme spočetli s pomocí vhodné procedury statistického programu **R**, verze 1.9.0. Z lemmatu **3.3** je ale vidět, že není těžké  $\sigma_\phi^2$  spočítat ručně. Konkrétní příklad takového výpočtu zde pro stručnost neprezentujeme.

# Kapitola 4

## Lokálně nejlepší invariantní test

Lokálně nejlepší invariantní test (v anglicky psaných textech nalezneme tento test pod označením *Locally Best Invariant test*, zkráceně LBI test) odvodil pro autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu 1 ve své práci Lee [7]. Nezabýval se ale klasickým RCA(1) modelem, nýbrž jeho zobecněním, které spočívá v tom, že náhodné veličiny  $\beta_t$  a  $\epsilon_s$  nemusí být vzájemně nezávislé ve stejném čase, tedy pro  $t = s$ . Uvažoval nenulovou kovarianci ve speciálním tvaru

$$\text{cov}(B_t, \epsilon_t) = \gamma\sigma_\beta, \text{ kde } |\gamma| < \sigma_\epsilon, \quad \sigma_\beta = \sqrt{\sigma_\beta^2}, \quad \sigma_\epsilon = \sqrt{\sigma_\epsilon^2}.$$

Bohužel musíme konstatovat, že jsme v článku našli poměrně velké množství chyb. Jedna z nich je tak závažná, že odvození testu není pro zobecněný RCA(1) model s kovariancí ve výše uvedeném tvaru korektní. Z tohoto důvodu odvodíme lokálně nejlepší invariantní test pro klasický RCA(1) model definovaný vztahem (1.1) za platnosti předpokladů **(A)**-**(D)**. Následně zformulujeme tvrzení o asymptotickém chování získané testové statistiky.

### 4.1 Odvození LBI testu $Z_n(\beta)$

Lokálně nejlepší invariantní test spočteme pro stacionární gaussovský model, tedy stejně jako v případě odvozování skórového testu (2.1) navíc předpokládáme platnost podmínky **(E)** a **(F)**.

Nejdříve si vyjádříme hustotu náhodného vektoru  $(X_1, \dots, X_n)'$  podmíněnou náhodným jevem  $X_0 \equiv 0$ . Zde můžeme využít výsledků podkapitoly **1.3**, kde jsme hledali maximálně věrohodný odhad koeficientů modelu RCA(1).

Hustota náhodného vektoru  $(X_1, \dots, X_n)'$  podmíněná  $X_0 \equiv 0$  má tedy tvar

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n | x_0 = 0) &= (2\pi\sigma_\epsilon^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \\ &\times \prod_{t=2}^n \{2\pi(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2)\}^{-1/2} \\ &\times \exp\left\{-\sum_{t=2}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{2(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2)}\right\}. \end{aligned}$$

Maximálně invariantní testovou statistiku, jejíž rozdělení je nezávislé na parametru  $\sigma_\epsilon^2$ , získáme užitím transformace  $Y_t = X_t/X_1$ ,  $t = 2, \dots, n$ . Označme si  $x = x_1$  a položme pro přehlednost  $\sigma_\epsilon^2 = 1$  (bez újmy na obecnosti, neboť náhodná veličina  $Y_t$  nezávisí na tomto parametru). Musíme také dodefinovat  $Y_1 \equiv 1$ . Hustota transformovaného náhodného vektoru  $(X, Y_2, \dots, Y_n)'$  podmíněná náhodným jevem  $X_0 \equiv 0$  (podmínku  $x_0 = 0$  nebudeme pro kratší zápis dále explicitně vypisovat) pak vychází po jednoduché úpravě

$$\begin{aligned} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \prod_{t=2}^n (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + 1)^{-1/2} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ x^2 + \sum_{t=2}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2 x^2}{(\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + 1)} \right]\right\}. \end{aligned}$$

Pro lepší orientaci v dalších výpočtech vnoříme člen  $\exp(-x^2/2)$  do společné sumy a také změňíme dolní index součinu na  $t = 1$ . Můžeme tak učinit, dodefinujeme-li ještě  $Y_0 \equiv 0$ . Pak píšeme

$$\begin{aligned} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \prod_{t=1}^n (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + 1)^{-1/2} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2 x^2}{(\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + 1)}\right\}. \end{aligned}$$

Lokálně nejlepší invariantní test založený na  $Y_2, \dots, Y_n$  je definován vztahem

$$\begin{aligned} LBI_1(Y_2, \dots, Y_n) &= \begin{cases} 1 & LBI_{n1} > c_1, \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases} \\ LBI_{n1} &= \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} \left( \int g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) dx \right) \Big|_{\sigma_\beta^2=0}}{\int g(x, y_2, \dots, y_n; 0) dx}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde  $c_1$  je konstanta. Dolní mez integrálu je  $-\infty$  a horní  $+\infty$ , pro kompaktní zápis ale meze nevypisujeme a vypisovat nebudeme. Spočíst integrál  $\int g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) dx$  přímo je ale problematické. Záměnou pořadí integrace a derivace v čitateli  $LBI_{n1}$  se však této komplikaci vyhneme. V článku McCabe, Tremayne [8] (lemma 1) lze nalézt důkaz tvrzení, že platí rovnost

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} \left[ \int g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) dx \right] = \int \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) \right] dx.$$

Nyní už nám nic nebrání v odvození  $LBI_{n1}$ . Pro přehlednost si nejdříve vyjádříme samostatně derivaci součinu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} \prod_{t=1}^n (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + 1) \Big|_{\sigma_\beta^2=0} = \\ & = \sum_{t=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + 1)^{-3/2} y_{t-1}^2 x^2 \prod_{j=1, j \neq t}^n (\sigma_\beta^2 y_{j-1}^2 x^2 + 1)^{-1/2} \right\} \Big|_{\sigma_\beta^2=0} = \\ & = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 x^2. \end{aligned}$$

Tohoto poznatku využijeme při derivování  $g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) \Big|_{\sigma_\beta^2=0} = \\ & = -\frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \left( \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 x^2 \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta y_{t-1})^2 \right\} \\ & \quad + \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \left( \sum_{t=1}^n (y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2 x^4 \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta y_{t-1})^2 \right\}. \end{aligned}$$

Označíme-li  $\sigma_z^{-2} = \sum_{t=1}^n (y_t - \beta y_{t-1})^2$ , můžeme psát

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) \Big|_{\sigma_\beta^2=0} = \\ & = \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n+1} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_z^2} \right\} \left[ x^2 \left( \sum_{t=1}^n (y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2 \right) - \left( \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Tento výraz nyní potřebujeme zintegrovat přes  $x$ . Předpokládejme na chvíli, že přirozené číslo  $n = 2m$  je sudé. Výraz  $\int |x|^{2m+1} \exp \left\{ -x^2/(2\sigma_z^2) \right\} dx$  pak

nápadně připomíná lichý absolutní centrální moment řádu  $(2m+1)$  normálně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou. Uvědomíme-li si, že

$$\begin{aligned} E|X|^{2m+1} &= \frac{1}{(2\pi\sigma_z^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2m+1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}\right\} dx = \\ &= \sigma_z^{2m+1} 2^m m! (2/\pi)^{1/2} \quad \text{pro } X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2), \end{aligned}$$

můžeme přistoupit k integrování

$$\begin{aligned} &\int \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) \Big|_{\sigma_\beta^2=0} \right] dx = \\ &= -\frac{1}{2} (2\pi)^{-m} (2\pi\sigma_z^2)^{1/2} \\ &\quad \times \left[ \left( \sum_{t=1}^{2m} y_{t-1}^2 \right) E|X|^{2m+1} - \left( \sum_{t=1}^{2m} (y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2 \right) E|X|^{2m+3} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} (2\pi)^{-m} (2\pi\sigma_z^2)^{1/2} \left[ \left( \sum_{t=1}^{2m} y_{t-1}^2 \right) \left( \sigma_z^{2m+1} 2^m m! (2/\pi)^{1/2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{t=1}^{2m} (y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2 \right) \left( \sigma_z^{2m+3} 2^{m+1} (m+1)! (2/\pi)^{1/2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Podobně můžeme integrovat i ve jmenovateli  $LBI_{n1}$  (4.1)

$$\begin{aligned} &\int g(x, y_2, \dots, y_n; 0) dx = \\ &= (2\pi)^{-m} (2\pi\sigma_z^2)^{1/2} \frac{1}{(2\pi\sigma_z^2)^{1/2}} \int |x|^{2m-1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}\right\} dx = \\ &= (2\pi)^{-m} (2\pi\sigma_z^2)^{1/2} \left( \sigma_z^{2m-1} 2^{m-1} (m-1)! (2/\pi)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Nyní už nic nebrání tomu dosadit dva poslední výrazy do předpisu pro  $LBI_{n1}$ . Po vykrácení, zpětné substituci  $y_t = x_t/x_1$  a dosazení za  $\sigma_z^2$  dostáváme

$$\begin{aligned} LBI_{n1} &= \frac{1}{2} \left[ 4\sigma_z^4 m(m+1) \left( \sum_{t=1}^{2m} (y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2 \right) - 2\sigma_z^2 m \left( \sum_{t=1}^{2m} y_{t-1}^2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_z^4 n(n+2) \left( \sum_{t=1}^n (y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2 \right) - \sigma_z^2 n \left( \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{n(n+2) \sum_{t=1}^n (x_t - \beta x_{t-1})^2 x_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n (x_t - \beta x_{t-1})^2 \right)^2} - \frac{n \sum_{t=1}^n x_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n (x_t - \beta x_{t-1})^2 \right)} \right]. \end{aligned}$$

Lokálně nejlepší invariantní test hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  proti alternativě  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$  založený na  $X_1, \dots, X_n$  má tedy pro RCA(1) model tvar

$$LBI_1(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & Z_n(\beta) > 2c_1, \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases}$$

$$Z_n(\beta) = \left[ \frac{n(n+2) \sum_{t=1}^n (X_t - \beta X_{t-1})^2 X_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n (X_t - \beta X_{t-1})^2 \right)^2} - \frac{n \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n (X_t - \beta X_{t-1})^2 \right)} \right]. \quad (4.2)$$

Poznamenejme, že pro liché  $n$  se provede odvození analogicky s tím rozdílem, že se opírá o znalost sudého absolutního centrálního momentu normálně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou. Testová statistika je pro liché  $n$  určena následovně

$$Z_n^*(\beta) = \left[ \frac{n(n+2) \sum_{t=1}^n (X_t - \beta X_{t-1})^2 X_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n (X_t - \beta X_{t-1})^2 \right)^2} - \frac{\frac{n(n+1)}{n-1} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n (X_t - \beta X_{t-1})^2 \right)} \right].$$

Statistiky  $Z_n(\beta)$  a  $Z_n^*(\beta)$  se liší jen minimálně, a protože mají obě zřejmě stejné limitní rozdělení, stačí, budeme-li se nadále zabývat pouze statistikou  $Z_n(\beta)$ .

Test  $LBI_1(X_1, \dots, X_n)$  však stále nemůžeme prakticky použít, neboť v praxi samozřejmě neznáme hodnotu koeficientu  $\beta$ , na kterém statistika  $Z_n(\beta)$  závisí. Stejně tak neznáme konstantu  $2c_1$ , podle které test zamítá, respektive nezamítá nulovou hypotézu. Koeficient  $\beta$  proto nahradíme jeho odhadem, opět použijeme odhad metodou nejmenších čtverců  ${}_{ls}\hat{\beta}_n$  z (1.5). K určení konstanty  $2c_1$  potřebujeme znát pravděpodobnostní rozdělení statistiky  $Z_n({}_{ls}\hat{\beta}_n)$ , to je však nemožné přesně spočítat. V dalším odstavci proto zformulujeme větu o asymptotickém chování testové statistiky lokálně nejlepšího invariantního testu za platnosti nulové hypotézy i za alternativy.

## 4.2 Asymptotické chování LBI testu $Z_n({}_{ls}\hat{\beta}_n)$

Tvrzení o limitním rozdělení lokálně nejlepšího invariantního testu  $Z_n({}_{ls}\hat{\beta}_n)$  odvozeného pro RCA(1) model platí i v situaci, kdy model není gaussovský. Můžeme tedy vypustit předpoklad **(F)**.

**Věta 4.1** (Asymptotická normalita LBI testu)

Nechť platí  $E(B_t^4) < \infty$  a  $E(\epsilon_t^4) < \infty \forall t$ . Pak za platnosti nulové hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  platí limitní vztah

$$n^{-1/2} Z_n(\hat{\beta}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\hat{\rho}_n^2 \hat{\kappa}_n^2}{(\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2)^4}\right),$$

kde

$$\begin{aligned} {}_{ls}\hat{\beta}_n &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}, & r_t &= X_t - {}_{ls}\hat{\beta}_n X_{t-1}, \\ \overline{X^2} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2, & \hat{\rho}_n^2 &= \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 \right) - (\overline{X^2})^2, \\ \hat{\sigma}_{\epsilon n}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2, & \hat{\kappa}_n^2 &= \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^4 \right) - (\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2)^2, \end{aligned}$$

$\hat{\rho}_n^2$  je zřejmě odhadem rozptylu náhodné veličiny  $X_1^2$  a  $\hat{\kappa}_n^2$  odhadem rozptylu náhodné veličiny  $\epsilon_1^2$ . Za platnosti alternativy  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$  platí

$$\left[ \frac{n \hat{\rho}_n^2 \hat{\kappa}_n^2}{(\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2)^4} \right]^{-1/2} Z_n(\hat{\beta}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty$$

(viz Lee [7], věty 3.1, 3.2).

Poznamenejme na závěr této kapitoly, že tvrzení platí obecně pro jakýkoliv odhad  $\hat{\beta}_n$  koeficientu  $\beta$ , který splňuje podmínku  $|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)| = O_P(1)$  za platnosti hypotézy  $H_0$  i alternativy  $H_1$ .



## Kapitola 5

# LBI test pro zobecněný model s ARCH(1) chybami

V této kapitole odvodíme lokálně nejlepší invariantní test pro zobecněný autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu 1. Zobecnění bude spočívat v tom, že reziduální složka  $\epsilon_t$  v RCA(1) modelu definovaném vztahem (1.1) bude ARCH proces. Odvozením LBI testu pro tento model se ve své práci zabývali Ha, Lee [5]. Všechny testy, o kterých jsme doposud pojednávali, předpokládali homogenní chyby. Reziduální složka  $\epsilon_t$  byla vždy posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou  $E(\epsilon_t) = 0$  a konstantním rozptylem  $var(\epsilon_t) = E(\epsilon_t^2) = \sigma_\epsilon^2 > 0$ . To však nemusí vždy platit. Rozptyl chyb v modelu může být ve skutečnosti závislý na čase, chyby mohou být dokonce navzájem závislé. Tento případ pokrývá právě ARCH proces. Testujeme-li náhodnost koeficientu  $\beta$  v takto zobecněném RCA(1) modelu, je proto zřejmě třeba umět popsat, jak ovlivňuje korelační struktura reziduální složky  $\{\epsilon_t\}$  rozdělení testové statistiky. Platí-li nulová hypotéza  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$ , redukuje se zobecněný RCA(1) model s ARCH chybami na autoregresní model řádu 1 s ARCH chybami. AR-ARCH model je hojně aplikován v praxi především z toho důvodu, že se ARCH proces hodí pro modelování ekonomických dat s velkou volatilitou. Struktura této kapitoly bude kopírovat předchozí kapitolu, kde jsme rovněž odvozovali lokálně nejlepší invariantní test. Jedná se o zcela analogický postup, který přesto provádíme, neboť Ha, Lee [5] uvedli ve větě 2.1, pro stručnost bez prezentace odvození, pouze finální tvar LBI statistiky  $S_n$  pro RCA(1) model s ARCH(1) chybami a odkázali se na článek Lee [7], ve kterém jsme ale zjistili vážné nedostatky. Z tohoto důvodu ověříme opět sami správnost testové statistiky. Předtím ale musíme uvést definici zobecněného RCA(1) modelu s ARCH(1) chybami, se kterým budeme při odvozování testu pracovat.

## 5.1 Zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami

Nejdříve si připomeňme definici ARCH(1) procesu, který bude představovat reziduální složku uvažovaného zobecnění RCA(1) modelu. Pro úplnost zde uvádíme, že zkratka ARCH pochází z anglického *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity model*. Jedná se tedy o autoregresní model s podmíněnou heteroskedasticitou, který definujeme následovně.

Stochastický proces  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  je ARCH(1) proces, jestliže

$$\epsilon_t = \eta_{t-1}\xi_t, \quad (5.1)$$

kde

(i)  $\{\xi_t; t = 1, 2, \dots\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem

$$(ii) \eta_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_t^2}, 0 \leq \alpha_1 < 1, \alpha_0 > 0$$

(podmínka  $\alpha_1 < 1$  je podmínkou stacionarity ARCH(1) procesu)

(iii) náhodná veličina  $\xi_t$  je nezávislá na  $\{\eta_s : s \leq t - 1\}$

(iv)  $\epsilon_0$  je náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a rozptylem

$$var(\epsilon_0) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

Uvědomíme-li si především, že konstantní rozptyl procesu je důsledkem stacionarity, plynou bezprostředně z podmínek kladených na ARCH(1) proces  $\{\epsilon_t\}$  tyto vztahy

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= E(\eta_{t-1}\xi_t) = E(\eta_{t-1})E(\xi_t) = 0, \\ var(\epsilon_t) &= \sigma_\epsilon^2 = E(\eta_{t-1}^2\xi_t^2) = E(\eta_{t-1}^2)E(\xi_t^2) = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1E(\epsilon_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

a po jednoduché úpravě

$$var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}. \quad (5.2)$$

Zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami

$$X_t = \beta_t X_{t-1} + \epsilon_t = (\beta + B_t)X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

musí splňovat následující podmínky

- (A')  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  je takový ARCH(1) proces definovaný vztahem (5.1), který splňuje navíc podmínku  $E(\xi_t^4) < \infty$
- (B)  $\{\beta_t; t = 1, 2, \dots\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou  $E(\beta_t) = \beta$  a rozptylem  $var(\beta_t) = \sigma_\beta^2 \geq 0$
- (C') posloupnosti  $\{\xi_t; t = 1, 2, \dots\}$  a  $\{\beta_t; t = 1, 2, \dots\}$  jsou nezávislé na  $\epsilon_0$  a  $X_0$ ;  $\epsilon_0$  a  $X_0$  jsou navzájem nezávislé a platí  $EX_0 = 0$  a  $var(X_0) = \sigma_{x_0}^2$
- (D') posloupnosti  $\{\xi_t; t = 1, 2, \dots\}$  a  $\{\beta_t; t = 1, 2, \dots\}$  jsou vzájemně nezávislé.

Podmínka stacionarity zůstává pro tento zobecněný model díky stacionaritě ARCH(1) procesu  $\{\epsilon_t\}$  nezměněna ve tvaru

$$(E) \quad \beta^2 + \sigma_\beta^2 < 1 \quad \text{a} \quad \sigma_{x_0}^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \beta^2 - \sigma_\beta^2}.$$

Lokálně nejlepší invariantní test odvodíme opět pro gaussovský model. Předpokládejme tedy navíc

- (F') posloupnosti  $\{\xi_t; t = 1, 2, \dots\}$ ,  $\{B_t; t = 1, 2, \dots\}$  jsou sdruženě normálně rozdělené.

## 5.2 Odvození LBI testu $S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$

Pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami vychází podmíněná střední hodnota a podmíněný rozptyl  $X_t$  po jednoduchém výpočtu

$$\begin{aligned} E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= X_{t-1}E(\beta_t) + E(\epsilon_t) = \beta X_{t-1}, \\ var(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= E([\beta X_{t-1} + B_t X_{t-1} + \epsilon_t - \beta X_{t-1}]^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \\ &= X_{t-1}^2 E(B_t^2) + \eta_{t-1}^2 E(\xi_t^2) = \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2 + \eta_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Odtud ihned vidíme, jaký tvar bude mít hustota vektoru  $(X_1, \dots, X_n)'$  podmíněná náhodným jevem  $X_0 \equiv 0$  a  $\epsilon_0 \equiv 0$ . Platí

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n | x_0 = \epsilon_0 = 0) &= (2\pi\eta_0^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\eta_0^2}\right) \\ &\times \prod_{t=2}^n \left\{ 2\pi(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \eta_{t-1}^2) \right\}^{-1/2} \exp\left\{-\sum_{t=2}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{2(\sigma_\beta^2 x_{t-1}^2 + \eta_{t-1}^2)}\right\}. \end{aligned}$$

Nyní stejně jako v předchozí kapitole použijeme transformaci  $Y_t = X_t/X_1$ ,  $t = 2, \dots, n$ , označíme si  $x = x_1$  a dodefinujeme  $Y_1 \equiv 1$ . Pak má hustota

transformovaného náhodného vektoru  $(X, Y_2, \dots, Y_n)'$  podmíněná náhodným jevem  $X_0 \equiv 0$  a  $\epsilon_0 \equiv 0$  (podmínku  $x_0 = \epsilon_0 = 0$  nebudeme dále explicitně vypisovat) tvar

$$g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \prod_{t=2}^n (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + \eta_{t-1}^2)^{-1/2} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{\eta_0^2} + \sum_{t=2}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2 x^2}{(\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + \eta_{t-1}^2)} \right] \right\}.$$

Opět použijeme vhodnější notaci, kdy po dodefinování  $Y_0 \equiv 0$  můžeme psát

$$g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \prod_{t=1}^n (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + \eta_{t-1}^2)^{-1/2} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2 x^2}{(\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + \eta_{t-1}^2)} \right\}.$$

Lokálně nejlepší invariantní test založený na  $Y_2, \dots, Y_n$  je definován následovně

$$LBI_2(Y_2, \dots, Y_n) = \begin{cases} 1 & LBI_{n2} > c_2, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $c_2$  je konstanta a  $LBI_{n2}$  je stejně jako v (4.1) určeno vztahem

$$LBI_{n2} = \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} \left( \int g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) dx \right) \Big|_{\sigma_\beta^2=0}}{\int g(x, y_2, \dots, y_n; 0) dx}.$$

Dolní mez integrálu je  $-\infty$  a horní  $+\infty$ , pro kompaktní zápis ale meze nevypisujeme a vypisovat nebudeme. Ve výrazu  $\frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} \left( \int g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) dx \right) \Big|_{\sigma_\beta^2=0}$  můžeme zaměnit pořadí integrace a derivace, jak je uvedeno v McCabe, Tremayne [8] (lemma 1). Pro přehlednost si nejdříve vyjádříme samostatně derivaci členu

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} \prod_{t=1}^n (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + \eta_{t-1}^2)^{-1/2} \Big|_{\sigma_\beta^2=0} = \\ = \sum_{t=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} (\sigma_\beta^2 y_{t-1}^2 x^2 + \eta_{t-1}^2)^{-3/2} y_{t-1}^2 x^2 \prod_{j=1, j \neq t}^n (\sigma_\beta^2 y_{j-1}^2 x^2 + \eta_{j-1}^2)^{-1/2} \right\} \Big|_{\sigma_\beta^2=0} = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left\{ \frac{y_{t-1}^2 x^2}{\eta_{t-1}^3} \prod_{j \neq t} \frac{1}{\eta_{j-1}} \right\} = -\frac{1}{2} \left( \prod_{j=1}^n \frac{1}{\eta_{j-1}} \right) \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 x^2}{\eta_{t-1}^2}.$$

Tento dílčí výsledek využijeme při derivování v čitateli  $LBI_{n2}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) \Big|_{\sigma_\beta^2=0} = \\
& = \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \left( \frac{1}{\prod_{t=1}^n \eta_{t-1}} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2}{\eta_{t-1}^2} \right\} \\
& \quad \times \left[ -x^2 \left( \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^2} \right) + x^4 \left( \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^4} \right) \right] = \\
& = \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |x|^{n-1} \left( \frac{1}{\prod_{t=1}^n \eta_{t-1}} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_s^2} \right\} \\
& \quad \times \left[ -x^2 \left( \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^2} \right) + x^4 \left( \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^4} \right) \right]
\end{aligned}$$

po označení  $\sigma_s^{-2} = \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2}{\eta_{t-1}^2}$ .

Pro  $n = 2m$  opět využijeme znalosti lichého absolutního centrálního momentu normálně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a integrujeme dle proměnné  $x$ . Dostáváme

$$\begin{aligned}
& \int \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^2} g(x, y_2, \dots, y_n; \sigma_\beta^2) \Big|_{\sigma_\beta^2=0} \right] dx = \\
& = -\frac{1}{2} (2\pi)^{-m} \left( \frac{1}{\prod_{t=1}^n \eta_{t-1}} \right) (2\pi\sigma_s^2)^{1/2} \left[ \left( \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^2} \right) (\sigma_s^{2m+1} 2^m m! (2/\pi)^{1/2}) \right. \\
& \quad \left. - \left( \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta y_{t-1})^2 y_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^4} \right) (\sigma_s^{2m+3} 2^{m+1} (m+1)! (2/\pi)^{1/2}) \right]
\end{aligned}$$

a podobně ve jmenovateli  $LBI_{n2}$

$$\begin{aligned}
& \int g(x, y_2, \dots, y_n; 0) dx = \\
& = (2\pi)^{-m} \left( \frac{1}{\prod_{t=1}^n \eta_{t-1}} \right) (2\pi\sigma_s^2)^{1/2} \frac{1}{(2\pi\sigma_s^2)^{1/2}} \int |x|^{2m-1} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_s^2} \right\} dx = \\
& = (2\pi)^{-m} \left( \frac{1}{\prod_{t=1}^n \eta_{t-1}} \right) (2\pi\sigma_s^2)^{1/2} (\sigma_s^{2m-1} 2^{m-1} (m-1)! (2/\pi)^{1/2}).
\end{aligned}$$

Po dosazení do  $LBI_{n2}$ , zpětné substituci  $y_t = x_t/x_1$  a několika jednoduchých úpravách máme

$$LBI_{n2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{n(n+2) \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2 x_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^4}}{\left( \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{\eta_{t-1}^2} \right)^2} - \frac{n \sum_{t=1}^n \frac{x_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^2}}{\left( \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \beta x_{t-1})^2}{\eta_{t-1}^2} \right)} \right].$$

Výsledkem je lokálně nejlepší invariantní test hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  proti alternativě  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$  založený na  $X_1, \dots, X_n$  pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami ve tvaru

$$LBI_2(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1) > 2c_2, \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases}$$

$$S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1) = \left[ \frac{n(n+2) \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \beta X_{t-1})^2 X_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^4}}{\left( \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \beta X_{t-1})^2}{\eta_{t-1}^2} \right)^2} - \frac{n \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^2}}{\left( \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \beta X_{t-1})^2}{\eta_{t-1}^2} \right)} \right]. \quad (5.3)$$

Stejně jako v předchozí kapitole se i v případě LBI testu pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami testové statistiky  $S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$  pro  $n$  sudé a  $S_n^*(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$  pro  $n$  liché liší jen minimálně a mají stejné limitní rozdělení. Přesný tvar statistiky  $S_n^*(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$  zde proto nebudeme uvádět. Lze ho dohledat v Ha, Lee [5] (str. 68).

Chceme-li test  $LBI_2(X_1, \dots, X_n)$  prakticky použít, musíme vektor koeficientů  $(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$  v testové statistice  $S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$  nahradit nějakým jeho odhadem. V dalším odstavci budeme studovat asymptotické chování statistiky  $S_n(\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_{0n}, \hat{\alpha}_{1n})$ . Mimo jiné zjistíme, že na rozdíl od limitního rozdělení statistiky  $Z_n(\hat{\beta}_n)$ , popsané vztahem (4.2), limitní rozdělení statistiky testu  $LBI_2(X_1, \dots, X_n)$  závisí na zvolených odhadech jednotlivých koeficientů.

### 5.3 Asymptotické chování LBI testu $S_n$

Připomeňme si, že jsme již dříve vztahem (1.2) definovali  $u_t = X_t - \beta X_{t-1}$ . V tomto odstavci budeme používat značení

$$\tilde{X}_t = \frac{X_t}{\eta_t}, \quad \tilde{u}_t = \frac{X_t - \beta X_{t-1}}{\eta_{t-1}}.$$

Ve světle tohoto značení můžeme přepsat statistiku  $S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$  následovně

$$S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1) = \left[ \frac{n(n+2) \sum_{t=1}^n \tilde{u}_t^2 \tilde{X}_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n \tilde{u}_t^2 \right)^2} - \frac{n \sum_{t=1}^n \tilde{X}_{t-1}^2}{\left( \sum_{t=1}^n \tilde{u}_t^2 \right)} \right].$$

### Věta 5.1

Nechť je statistika  $S_n(\beta, \alpha_0, \alpha_1)$  definovaná vztahem (5.3) a jsou splněny následující požadavky

- (i)  $E(X_t^6) < \infty \quad \forall t$
- (ii)  $|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)| = O_P(1)$
- (iii)  $|\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{0n} - \alpha_0)| = O_P(1)$
- (iv)  $|\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{1n} - \alpha_1)| = O_P(1)$ .

Pak za platnosti nulové hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  platí pro  $n \rightarrow \infty$  vztah

$$n^{-1/2} S_n(\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_{0n}, \hat{\alpha}_{1n}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (\tilde{u}_t^2 - 1)(\tilde{X}_{t-1}^2 - E(\tilde{X}_t^2)) + C + o_P(1),$$

kde

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)C_1 + \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{0n} - \alpha_0)C_2 + \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{1n} - \alpha_1)C_3, \\ C_1 &= E(\tilde{X}_t^2)E\left(\frac{1}{\eta_t^2}\right) - E\left(\frac{\tilde{X}_t^2}{\eta_t^2}\right), \\ C_2 &= E(\tilde{X}_t^2)E\left(\frac{\epsilon_t^2}{\eta_t^2}\right) - E\left(\frac{\tilde{X}_t^2 \epsilon_t^2}{\eta_t^2}\right), \\ C_3 &= 2\alpha_1 \left\{ E\left(\frac{\tilde{X}_t^2 X_{t-1} \epsilon_t}{\eta_t^2}\right) - E(\tilde{X}_t^2)E\left(\frac{X_{t-1} \epsilon_t}{\eta_t^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

(viz Ha, Lee [5], věta 3.1).

Tato věta nám říká, že pro vhodně zvolené odhady parametrů  $\beta$ ,  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$  platí při  $n \rightarrow \infty$  vztah

$$n^{-1/2} S_n(\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_{0n}, \hat{\alpha}_{1n}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (\tilde{u}_t^2 - 1)(\tilde{X}_{t-1}^2 - E(\tilde{X}_t^2)) + o_P(1),$$

neboť člen  $C$  konverguje podle pravděpodobnosti k 0 za platnosti nulové hypotézy. Pokud tyto odhady splňují kritéria věty i za platnosti alternativy  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$ , diverguje v tomto případě (viz Ha, Lee [5], str.69)

$$n^{-1/2} S_n(\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_{0n}, \hat{\alpha}_{1n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty.$$

Teoreticky bychom mohli následující tvrzení o asymptotické normalitě LBI testu zformulovat pro libovolné odhady parametrů splňující předpoklady

věty **5.1**. Z této věty ale také vyplývá, že volba odhadů parametrů, jak autoregresního koeficientu  $\beta$ , tak parametrů  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$  procesu ARCH, ovlivňuje asymptotickou varianci limitního rozdělení testové statistiky  $S_n(\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_{0n}, \hat{\alpha}_{1n})$ . Proto volíme takové odhady, jejichž asymptotický tvar (rozvoj) umíme přesně popsat, protože na přesnosti určení limitního rozdělení kriticky závisí kvalita testu. Limitní rozdělení testové statistiky  $S_n(\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_{0n}, \hat{\alpha}_{1n})$  má zřejmě opět nulovou střední hodnotu, proto je pro nás rozhodující přesnost vyjádření asymptotického rozptylu. Z právě uvedených důvodů vyslovíme tvrzení o asymptotické normalitě LBI testu za platnosti nulové hypotézy pro tuto konkrétní volbu odhadů. Koeficient  $\beta$  odhadneme metodou nejmenších čtverců. Dostáváme již několikrát zmiňovaný odhad

$${}_{ls}\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

Parametry  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$  odhadneme metodou maximální věrohodnosti. Připomeňme, že předpokládáme gaussovský model. Maximálně věrohodné odhady  ${}_{ml}\hat{\alpha}_{0n}$ ,  ${}_{ml}\hat{\alpha}_{1n}$  získáme maximalizací funkce

$$\ell_n(\alpha_0, \alpha_1) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{r_t^2}{\ln(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)},$$

kde  $r_t = x_t - {}_{ls}\hat{\beta}_n x_{t-1}$ . Funkce  $\ell_n(\alpha_0, \alpha_1)$  je logaritmickou věrohodnostní funkcí zobecněného RCA(1) modelu s ARCH(1) chybami za platnosti nulové hypotézy. Postup odvození  $\ell_n(\alpha_0, \alpha_1)$  je zcela analogicky k odvození, které jsme podrobně ukázali v první kapitole. Nyní můžeme konečně vyslovit danou větu.

**Věta 5.2** (Asymptotická normalita LBI testu za  $H_0$ )

*Nechť platí předpoklady věty 5.1. Pak pro gaussovský zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami a odhady  ${}_{ls}\hat{\beta}_n$ ,  ${}_{ml}\hat{\alpha}_{0n}$  a  ${}_{ml}\hat{\alpha}_{1n}$  za platnosti nulové hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  platí*

$$n^{-1/2} S_n({}_{ls}\hat{\beta}_n, {}_{ml}\hat{\alpha}_{0n}, {}_{ml}\hat{\alpha}_{1n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V),$$

kde

$$V = 2 \left\{ \tilde{C}_2^2 E \left( \frac{\epsilon_t^4}{\eta_t^4} \right) + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 E \left( \frac{\epsilon_t^2}{\eta_t^4} \right) + \tilde{C}_1^2 E \left( \frac{1}{\eta_t^4} \right) \right\} \\ + 4\tilde{C}_1 \left\{ E \left( \frac{\tilde{X}_t^2}{\eta_t^2} \right) - E \left( \frac{1}{\eta_t^2} \right) E \left( \tilde{X}_t^2 \right) \right\} +$$



$$\begin{aligned}
& + 4\tilde{C}_2 \left\{ E \left( \frac{\tilde{X}_t^2 \epsilon_t^2}{\eta_t^2} \right) - E \left( \frac{\epsilon_t^2}{\eta_t^2} \right) E \left( \tilde{X}_t^2 \right) \right\} \\
& + \tilde{C}_3^2 E(\eta_t^2 X_t^2) + 2 \left\{ E(\tilde{X}_t^2) - (E\tilde{X}_t)^2 \right\}, \\
\tilde{C}_1 &= \frac{C_1}{C_4} E \left( \frac{\epsilon_t^4}{\eta_t^4} \right) - \frac{C_2}{C_4} E \left( \frac{\epsilon_t^2}{\eta_t^4} \right), \\
\tilde{C}_2 &= -\frac{C_1}{C_4} E \left( \frac{\epsilon_t^2}{\eta_t^4} \right) + \frac{C_2}{C_4} E \left( \frac{1}{\eta_t^4} \right), \\
\tilde{C}_3 &= C_3 \{E(X_t^2)\}^{-1}, \\
C_4 &= E \left( \frac{1}{\eta_t^4} \right) E \left( \frac{\epsilon_t^4}{\eta_t^4} \right) - \left\{ E \left( \frac{\epsilon_t^2}{\eta_t^4} \right) \right\}^2
\end{aligned}$$

(viz Ha, Lee [5], věta 3.2).

Právě vyslovená věta platí i bez předpokladu gaussovského modelu s jediným rozdílem, a to v předpisu pro rozptyl  $V$  limitního rozdělení. Ten je v tomto případě ještě mnohem komplikovanější, a proto jsme zde složitější variantu věty neuváděli. Lze ji dohledat v Ha, Lee [5] na straně 72.

Odvodili jsme lokálně nejlepší invariantní test pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami, zvolili vhodné odhady parametrů modelu, zformulovali větu o asymptotické normalitě testu za nulové hypotézy a známe tvar rozptylu tohoto limitního rozdělení. Pro praktické užití testu nám však ještě zbývá překonat jednu překážku, a totiž odhadnout rozptyl  $V$ . Nahradíme-li členy  $V$  jejich momentovými odhady, dostaneme zřejmě konzistentní odhad  $\tilde{V}$ , splňující podmínku  $|\sqrt{n}(\tilde{V} - V)| = O_P(1)$ . Pro výslednou testovou statistiku platí limitní vztah

$$\tilde{S}_n = n^{-1/2} \tilde{V}^{-1/2} S_n(l_s \hat{\beta}_n, ml \hat{\alpha}_{0n}, ml \hat{\alpha}_{1n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$$

a jejímu praktickému užití již nic nebrání.

# Kapitola 6

## Numerická studie

V předchozích kapitolách jsme postupně popsali následující testy náhodnosti autoregresních parametrů: skórový test  $(NQ_n)^2$ , třídu pořadových testů  $T_n(\phi, h)$  a lokálně nejlepší invariantní testy  $Z_n(l_s, \hat{\beta}_n)$  a  $\tilde{S}_n$ . První tři testy byly odvozeny pro autoregresní model s náhodnými koeficienty řádu 1 definovaný vztahem (1.1), poslední uvedený pak pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami, kde ARCH proces  $\{\epsilon_t\}$  je určen vztahem (5.1). Testují nulovou hypotézu  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  ekvivalentní s tím, že  $\beta_t = \beta$  je nenáhodný parametr s pravděpodobností 1, proti alternativě  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$ , kdy  $\{\beta_t\}$  je náhodná posloupnost se střední hodnotou  $\beta$  a kladným rozptylem  $\sigma_\beta^2$ . Jedná se tedy o testy náhodnosti autoregresního parametru  $\beta_t$ . V literatuře, ze které jsme čerpali, byla v některých případech zahrnuta i numerická studie účinnosti testu, ale nebylo to pravidlem. Naším cílem je proto v této kapitole popsat numerickou studii, kterou jsme provedli a na základě jejích výsledků porovnat empirickou účinnost jednotlivých testů. V rámci srovnávací studie se budeme zabývat jak modely s homogenními chybami, tak různými modifikacemi modelů při heterogenních chybách, mezi něž patří také model s chybami typu ARCH(1). V jednotlivých odstavcích této kapitoly si vždy popíšeme model, ze kterého jsme generovali náhodný výběr  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ , ozřejmíme nastavení parametrů simulace, uvedeme její výsledky a připojíme odpovídající komentář. V závěru pak shrneme v samostatném odstavci obecné poznatky získané z celé studie.

Všechny simulace a výpočty byly prováděny statistickým programem **R**, verze 1.9.0, pod operačním systémem Microsoft Windows XP na počítači s procesorem AMD Athlon XP 2200+, 1.83GHz, 512 MB RAM.

## 6.1 Nastavení numerické studie

Simulační studii provádíme pro následující nastavení. Generujeme náhodný výběr  $(X_1, \dots, X_n)$  o velikosti  $n = 100, 200, 300, 400, 500$  (ve skutečnosti generujeme  $n^* = 200, 300, 400, 500, 600$  pozorování, kde ale prvních 100 pozorování zapomínáme, abychom eliminovali inicializační efekty) z daného modelu. Pro tento výběr spočteme jednotlivé testové statistiky a testujeme nulovou hypotézu na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . Označme si  $\tilde{T}_n^2(\phi, h) = T_n^2(\phi, h)/\sigma_\phi^2$ . Na základě zformulovaných tvrzení o asymptotickém chování mají kritické obory jednotlivých testů tvar

$$(NQ_n)^2 > \chi_1^2(1 - \alpha), \quad \frac{T_n^2(\phi, h)}{\sigma_\phi^2} > \chi_1^2(1 - \alpha),$$

$$\tilde{Z}_n^2 = \left( \frac{n\hat{\rho}_n^2 \hat{\kappa}_n^2}{(\hat{\sigma}_{en}^2)^4} \right)^{-1} Z_n^2(l_s, \hat{\beta}_n) > \chi_1^2(1 - \alpha), \quad \tilde{S}_n^2 > \chi_1^2(1 - \alpha),$$

kde  $\chi_1^2(1 - \alpha)$  je  $(1 - \alpha)$ -kvantil  $\chi^2$ -rozdělení o jednom stupni volnosti. Kvantil má pro  $\alpha = 0.05$  hodnotu  $\chi_1^2(0.95) = 3.84145$ . V případě skórového testu je tvar kritického oboru zřejmý, u ostatních testů jsme využili platnosti vztahu

$$P(|Z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P(Z^2 > \chi_1^2(1 - \alpha)) = \alpha \quad \text{pro } Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

kde  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  je  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -kvantil normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Tento postup, tedy generování náhodného výběru dané velikosti, spočtení testové statistiky a následné zamítnutí, respektive nezamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ , opakujeme 600-krát. O účinnosti testů pak usuzujeme na základě relativní četnosti zamítnutí nulové hypotézy vzhledem k počtu opakování testu. V případě, že generujeme data z modelu s rozptylem  $\sigma_\beta^2 = 0$ , se jedná vlastně o dosaženou empirickou velikost kritického oboru, o empirickou hodnotu  $\alpha$ . Je-li parametr modelu  $\sigma_\beta^2 > 0$ , mluvíme o empirické síle testu.

## 6.2 Gaussovský RCA(1) model

Gaussovský RCA(1) model jsme předpokládali jak při odvozování skórového testu  $(NQ_n)^2$ , tak při odvozování lokálně nejlepšího invariantního testu  $\tilde{Z}_n^2$ . Jedná se o RCA(1) model (1.1) s normálně rozdělenými náhodnými posloupnostmi, kde  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ . Generujeme náhodné výběry z tohoto modelu pro takové konkrétní vektory parametrů  $(\beta, \sigma_\beta^2, \sigma_\epsilon^2)$ , na kterých se dá dobře sledovat chování jednotlivých testů. Volíme proto střední hodnotu  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  a rozptyl  $\sigma_\beta^2 = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$  u náhodné

$n = 500$	$\sigma_\beta^2 = 0$					$\sigma_\beta^2 = 0.2$				
	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$
$\phi$										
$\sqrt{x}$	0.050	0.053	0.057	0.043	0.052	0.833	0.793	0.485	0.145	0.830
$x$	0.060	0.060	0.055	0.043	0.060	0.907	0.858	0.600	0.257	0.907
$x^2$	0.052	0.055	0.053	0.047	0.058	0.947	0.918	0.677	0.425	0.952
$x^4$	0.057	0.055	0.050	0.038	0.052	0.975	0.960	0.748	0.470	0.977
$\exp(x)$	0.055	0.058	0.055	0.047	0.057	0.930	0.897	0.647	0.368	0.937
$\exp(x^2)$	0.052	0.052	0.050	0.040	0.053	0.967	0.942	0.717	0.462	0.967
$\ln(y)$	0.057	0.058	0.052	0.050	0.058	0.872	0.830	0.542	0.190	0.865
$\Phi^{-1}(x)$	0.045	0.052	0.050	0.043	0.048	0.938	0.905	0.670	0.405	0.942
$\text{tg}(x)$	0.057	0.057	0.053	0.047	0.057	0.945	0.913	0.665	0.403	0.943
$\sin(x\pi/2)$	0.057	0.058	0.055	0.052	0.058	0.795	0.742	0.403	0.102	0.782

Tabulka 6.1: Srovnání účinnosti pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při RCA(1) modelu s  $\beta_t \sim \mathcal{N}(0.5, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $(y = x + 1)$

posloupnosti  $\{\beta_t\}$  a rozptyl  $\sigma_\epsilon^2 = 1, 5$  u chybové posloupnosti  $\{\epsilon_t\}$ . Všechny dvojice parametrů  $\beta$  a  $\sigma_\beta^2$  splňují podmínku stacionarity  $\beta^2 + \sigma_\beta^2 < 1$  modelu RCA(1). U třídy pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  provádíme simulaci pro všechny kombinace skórové funkce  $\phi \in \mathcal{S}_\phi$  a funkce  $h \in \mathcal{S}_h$ . Pro ilustraci uvádíme v tabulce 6.1 účinnost testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  pro různou volbu funkcí  $\phi$  a  $h$  při dvou nastaveních parametrů:  $(\beta = 0.5, \sigma_\beta^2 = 0, \sigma_\epsilon^2 = 1)$  a  $(\beta = 0.5, \sigma_\beta^2 = 0.2, \sigma_\epsilon^2 = 1)$  a velikosti výběru  $n = 500$ . V této tabulce tak můžeme dobře srovnat chování pořadových testů za platnosti nulové hypotézy s jejich chováním za platnosti alternativy. Jako rozumná volba se ukazuje například skórová funkce  $\phi = \Phi^{-1}(x)$  a funkce  $h = \sqrt{x}$ . Pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$  vykazuje malou relativní četnost 0.045 zamítnutí výběru v případě simulace s rozptylem  $\sigma_\beta^2 = 0$  autoregresního parametru  $\beta_t$ , tedy za platnosti nulové hypotézy, a naopak velkou sílu testu 0.938 v případě simulace z modelu s kladným rozptylem  $\sigma_\beta^2 = 0.2$ , tedy za platnosti alternativy. Z tohoto důvodu uvádíme výsledky simulace z gaussovského RCA(1) modelu právě pro tuto volbu z třídy pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$ .

V rozsáhlé tabulkové příloze naleznete v tabulce 8.1 výsledky numerické studie pro skórový test  $(NQ_n)^2$ , v tabulce 8.2 pro lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{Z}_n^2$ , v tabulce 8.3 pro LBI test  $\tilde{S}_n^2$ , odvozený pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami, a v tabulce 8.4 pro pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$ . Zde si srovnání jednotlivých testů přiblížíme pomocí tabulky 6.2, ve které jsou přehledně najednou uvedeny výsledky všech čtyř testů pro výběr velikosti  $n = 400$ . Je patrné, že testy jsou téměř invariantní vůči rozptylu  $\sigma_\epsilon^2$  reziduální složky modelu. Nejvíce markantní je tato invariance u pořadového

$n = 400$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.045	0.167	0.382	0.837	1.000	0.055	0.160	0.413	0.853	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.050	0.170	0.392	0.837	1.000	0.052	0.165	0.430	0.850	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.480	0.263	0.222	0.248	0.248	0.468	0.262	0.202	0.233	0.217
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.055	0.102	0.213	0.697	0.997	0.068	0.112	0.253	0.708	0.998
0.3	$(NQ_n)^2$	0.033	0.167	0.462	0.893	1.000	0.045	0.192	0.485	0.877	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.033	0.170	0.470	0.895	1.000	0.050	0.197	0.490	0.877	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.245	0.115	0.172	0.365	0.623	0.260	0.147	0.157	0.335	0.657
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.063	0.085	0.307	0.755	1.000	0.040	0.128	0.328	0.762	1.000
0.5	$(NQ_n)^2$	0.047	0.248	0.638	0.963	1.000	0.042	0.242	0.583	0.932	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.043	0.260	0.637	0.960	1.000	0.048	0.243	0.585	0.930	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.103	0.163	0.358	0.762	0.922	0.133	0.132	0.343	0.738	0.950
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.045	0.162	0.432	0.875	1.000	0.047	0.143	0.413	0.877	1.000
0.7	$(NQ_n)^2$	0.045	0.393	0.835	0.995	1.000	0.048	0.405	0.803	0.988	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.043	0.392	0.830	0.995	1.000	0.057	0.387	0.797	0.988	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.045	0.320	0.752	0.977	0.958	0.052	0.320	0.708	0.980	0.973
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.028	0.292	0.692	0.985	1.000	0.038	0.255	0.688	0.983	1.000

Tabulka 6.2: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1) model s  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$  a volbu  $\phi = \Phi^{-1}(x)$ ,  $h = \sqrt{x}$  u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$

testu, kde průměrná absolutní odchylka mezi odpovídajícími si hodnotami v tabulce pro  $\sigma_\epsilon^2 = 1$  a  $\sigma_\epsilon^2 = 5$  činí jen 0.0132. Je tomu tak proto, že pořadový test  $T_n(\phi, h)$  je založen na pořadí  $R_t$  čtverců odhadnutých reziduí  $r_t = \hat{\epsilon}_t = X_t - \beta_n X_{t-1}$ . Pořadí  $r_t^2$  mezi  $r_1^2, \dots, r_n^2$  je však stejné jako pořadí  $r_t^2/\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2$  mezi  $r_1^2/\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2, \dots, r_n^2/\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2$ , kde  $\hat{\sigma}_{\epsilon n}^2$  je odhad  $\sigma_\epsilon^2$  za platnosti hypotézy  $H_0$ . U skórového testu má tato odchylka hodnotu 0.01455, u LBI testu  $\tilde{Z}_n^2$  pak 0.01515 a u LBI testu  $\tilde{S}_n^2$  0.0201, což je trochu větší číslo v porovnání s ostatními testy. Rovněž je zřejmé, že LBI test  $\tilde{S}_n^2$  dává pro gaussovský RCA(1) model špatné výsledky. To jsme však mohli očekávat, neboť je odvozený pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami a reziduální složky těchto dvou modelů jsou odlišného charakteru. Test  $\tilde{S}_n^2$  dává relativně (stále horší než ostatní testy) dobré výsledky až pro  $n \geq 400$ ,  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$  a  $\beta \geq 0.5$ . Ostatní tři testy naproti tomu mají velkou účinnost pro jakékoliv  $\beta$ , další komentář bude proto patřit právě jim. Můžeme si povšimnout, že za platnosti hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  má s větším  $\beta$  relativní četnost zamítnutí  $H_0$  kolísavý charakter, nedá se mluvit o klesající ani stoupající tendenci. Naproti tomu za platnosti alternativy výrazně roste relativní četnost zamítnutí  $H_0$  při kterékoliv z hod-

not  $\sigma_\beta^2 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$  a rostoucím  $\beta$ . Jak jsme očekávali, síla testu roste jak s větším rozptylem  $\sigma_\beta^2$ , tak s rostoucím počtem pozorování  $n$ . Všechny tři testy vykazují pro  $n \geq 300$  a  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$  sílu testu větší než 0.7 nezávisle na hodnotě parametru  $\beta$ . Také je patrné, že testy  $(NQ_n)^2$  a  $\tilde{Z}_n^2$  mají velice podobnou účinnost, pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$  za nimi pro menší hodnoty rozptylu  $\sigma_\beta^2 \leq 0.2$  mírně zaostává. Můžeme tedy konstatovat, že především skórový test  $(NQ_n)^2$  a LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  dávají pro data generovaná z gaussovského RCA(1) modelu velmi dobré výsledky pro  $n \geq 300$ , a to i při relativně malém rozptylem  $\sigma_\beta^2 = 0.2$  autoregresního parametru  $\beta_t$ .

### 6.3 RCA(1) model s rovnoměrným $\beta_t$ a normálním $\epsilon_t$

Zde provádíme simulační studii pro RCA(1) model, který má opět normálně rozdělenou reziduální složku  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ , ale autoregresní koeficient  $\beta_t$  má na rozdíl od gaussovského RCA(1) modelu spojitě rovnoměrné rozdělení. Model zahrnujeme do numerické studie mimo jiné z toho důvodu, že na něm můžeme studovat, jak se testy vyrovnají s porušením předpokladu normality. Připomeňme si, že náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $(-c, c)$ , kde  $c$  je kladná konstanta, má nulovou střední hodnotu a rozptyl  $c^2/3$ . Chceme, aby byla vypovídací hodnota modelu co nejvyšší a abychom mohli eventuálně porovnávat také s výsledky simulace pro gaussovský RCA(1) model. Z tohoto důvodu volíme taková nastavení parametrů rovnoměrného rozdělení náhodné veličiny  $\beta_t$ , aby střední hodnota  $E(\beta_t)$  a rozptyl  $var(\beta_t)$  zůstaly stejné jako u předchozího modelu. Zavádíme značení  $\beta_t \sim \mathcal{R}(\beta, \sigma_\beta^2)$ , které vyjadřuje, že náhodná veličina  $\beta_t$  je spojitě rovnoměrně

$\beta$	$\sigma_\beta^2$				
	0	0.05	0.1	0.2	0.5
0.1	(0.100, 0.100)	(0.013, 0.187)	(-0.073, 0.273)	(-0.246, 0.446)	(-0.766, 0.966)
0.3	(0.300, 0.300)	(0.213, 0.387)	(0.127, 0.473)	(-0.046, 0.646)	(-0.566, 1.166)
0.5	(0.500, 0.500)	(0.413, 0.587)	(0.327, 0.673)	(0.154, 0.846)	(-0.366, 1.366)
0.7	(0.700, 0.700)	(0.613, 0.787)	(0.527, 0.873)	(0.354, 1.046)	(-0.166, 1.566)

Tabulka 6.3: Intervaly (min, max) rovnoměrného rozdělení  $\beta_t \sim \mathcal{R}(\beta, \sigma_\beta^2)$

$n = 500$	$\sigma_\beta^2 = 0$					$\sigma_\beta^2 = 0.1$				
	$\phi$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$
$\sqrt{x}$	0.045	0.040	0.043	0.042	0.040	0.463	0.440	0.290	0.107	0.448
$x$	0.048	0.042	0.043	0.032	0.048	0.532	0.507	0.348	0.168	0.535
$x^2$	0.053	0.048	0.035	0.027	0.050	0.592	0.590	0.423	0.243	0.590
$x^4$	0.045	0.042	0.037	0.025	0.045	0.647	0.648	0.468	0.270	0.642
$\exp(x)$	0.050	0.047	0.042	0.032	0.047	0.570	0.555	0.393	0.217	0.565
$\exp(x^2)$	0.048	0.047	0.032	0.023	0.048	0.623	0.615	0.455	0.263	0.620
$\ln(y)$	0.045	0.045	0.052	0.033	0.040	0.508	0.473	0.317	0.138	0.497
$\Phi^{-1}(x)$	0.042	0.038	0.042	0.043	0.045	0.563	0.550	0.383	0.217	0.562
$\text{tg}(x)$	0.048	0.045	0.040	0.030	0.047	0.587	0.580	0.418	0.238	0.582
$\sin(x\pi/2)$	0.043	0.043	0.043	0.043	0.040	0.423	0.407	0.263	0.088	0.417

Tabulka 6.4: Srovnání účinnosti pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při RCA(1) modelu s  $\beta_t \sim \mathcal{R}(0.5, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , ( $y = x + 1$ )

rozdělená na intervalu  $(\min, \max)$  definovaném následovně

$$\min = \beta - \sqrt{3\sigma_\beta^2}, \quad \max = \beta + \sqrt{3\sigma_\beta^2}.$$

Pak zřejmě platí  $E(\beta_t) = \beta$  a  $\text{var}(\beta_t) = \sigma_\beta^2$ . Hodnoty parametrů  $\min$  a  $\max$  uvádíme v tabulce 6.3. Rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(c, c)$  nulové délky je ekvivalentní s tím, že náhodná veličina nabývá hodnotu  $c$  s pravděpodobností 1. Nastavení parametrů simulace tedy zůstává stejné jako u předchozího modelu. RCA(1) model s rovnoměrným  $\beta_t$  a normálním  $\epsilon_t$  je proto opět stacionární pro všechny kombinace vstupních parametrů modelu. U třídy pořadových testů se jako nejlepší volba jeví skórová funkce  $\phi = x^4$  a opět funkce  $h = \sqrt{x}$ , jak je vidět z tabulky 6.4. Účinnost testu  $\tilde{T}_n^2(x^4, \sqrt{x})$  se blíží nastavené chybě prvního druhu  $\alpha = 0.05$  za platnosti nulové hypotézy a přitom za platnosti alternativy  $\sigma_\beta^2 = 0.1$  test vykazuje největší empirickou sílu. Kompletní výsledky numerické studie pro pořadový test  $\tilde{T}_n^2(x^4, \sqrt{x})$  jsou k nalezení v příloze v tabulce 8.8. Poznamenejme, že jen nepatrně horší kandidát na skórovou funkci byla funkce  $\exp(x^2)$ , u funkce  $h$  pak  $\ln(x + 1)$ . Příloha obsahuje také kompletní výsledky simulace z RCA(1) modelu s rovnoměrným  $\beta_t$  a normálním  $\epsilon_t$  pro skórový test  $(NQ_n)^2$  (tabulka 8.5), lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{Z}_n^2$  (tabulka 8.6) a pro LBI test  $\tilde{S}_n^2$  (tabulka 8.7).

Srovnání jednotlivých testů ilustruje tabulka 6.5, ve které jsou pod sebou přehledně uvedeny účinnosti všech čtyř testů pro výběr o velikosti  $n = 400$ . Testy jsou téměř invariantní vůči hodnotě rozptylu  $\sigma_\epsilon^2$ . LBI test  $\tilde{S}_n^2$ , odvozený pro model s ARCH(1) chybami, dává stejně jako u gaussovského RCA(1)

$n = 400$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.037	0.157	0.425	0.888	1.000	0.033	0.148	0.418	0.862	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.033	0.167	0.447	0.897	1.000	0.040	0.162	0.443	0.873	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.475	0.233	0.195	0.240	0.258	0.452	0.255	0.213	0.205	0.248
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.043	0.123	0.338	0.873	1.000	0.055	0.112	0.357	0.852	1.000
0.3	$(NQ_n)^2$	0.037	0.195	0.478	0.928	1.000	0.047	0.175	0.517	0.888	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.040	0.208	0.510	0.933	1.000	0.042	0.193	0.537	0.907	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.225	0.120	0.165	0.358	0.735	0.222	0.113	0.152	0.368	0.748
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.037	0.152	0.427	0.908	1.000	0.043	0.143	0.463	0.885	1.000
0.5	$(NQ_n)^2$	0.040	0.227	0.575	0.975	1.000	0.045	0.215	0.612	0.955	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.038	0.245	0.592	0.972	1.000	0.050	0.240	0.632	0.962	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.102	0.135	0.327	0.768	0.973	0.123	0.127	0.353	0.757	0.983
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.048	0.180	0.550	0.970	1.000	0.053	0.203	0.557	0.960	1.000
0.7	$(NQ_n)^2$	0.042	0.400	0.845	0.998	1.000	0.048	0.428	0.837	0.997	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.037	0.417	0.853	0.998	1.000	0.053	0.438	0.865	0.998	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.052	0.293	0.747	0.990	0.975	0.062	0.333	0.737	0.990	0.978
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.032	0.377	0.838	0.997	1.000	0.052	0.375	0.838	0.998	1.000

Tabulka 6.5: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1) model s  $\beta_t \sim \mathcal{R}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$  a volbu  $\phi = x^4$ ,  $h = \sqrt{x}$  u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$

modelu špatné výsledky, a to především pro malé hodnoty  $\sigma_\beta^2$  a  $\beta$ . Test má pro malé hodnoty  $\beta$  obrovskou empirickou chybu prvního druhu, například pro  $\beta = 0.1$  zamítá téměř 50 % výběrů za platnosti nulové hypotézy. Dává relativně (neboť jsou horší ve srovnání s ostatními třemi testy) dobré výsledky pro  $n \geq 400$ ,  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$  a hlavně až pro  $\beta \geq 0.5$ . Očekávali jsme, že pro tuto variantu RCA(1) modelu bude nejúčinnější pořadový test, který by se měl dobře vyrovnat i s jiným rozdělením náhodných veličin  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$  než normálním. Skutečnost je taková, že nejlepší výsledky vykazuje LBI test  $\tilde{Z}_n^2$ , následovaný v těsném závěsu skórovým testem  $(NQ_n)^2$  a pořadovým testem  $\tilde{T}_n^2(x^4, \sqrt{x})$  v tomto pořadí. Rozdíly v účinnostech těchto tří testů jsou však jen nepatrné. Všechny mají empirickou chybu prvního druhu velice blízkou hodnotě  $\alpha = 0.05$  nezávisle na velikosti koeficientu  $\beta$ , což je potěšující. Uzavřeme tento odstavec shrnutím, že testy  $\tilde{Z}_n^2$ ,  $(NQ_n)^2$  a  $\tilde{T}_n^2(x^4, \sqrt{x})$  mají poměrně velkou sílu pro  $n \geq 300$  už při relativně malém rozptylu  $\sigma_\beta^2 = 0.2$  autoregresního parametru  $\beta_t$ . V této situaci LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  zamítá vždy více jak 75.3 % generovaných výběrů, skórový test 73.3 % a pořadový test 74.0 %.



## 6.4 Gaussovský RCA(1) model s ARCH(1) chybami

S gaussovským RCA(1) modelem s ARCH(1) chybami jsme pracovali v páté kapitole, kde jsme odvozovali lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{S}_n^2$ . Připomeňme si, jak jsme tento model definovali. Náhodná posloupnost  $\{\beta_t\}$  má opět normální rozdělení se střední hodnotou  $\beta$  a rozptylem  $\sigma_\beta^2$ , ale reziduální složka  $\{\epsilon_t\}$  se řídí ARCH(1) procesem (s parametry  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$ ) daným předpisem (5.1), kde v případě gaussovského modelu platí  $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Generujeme výběry z tohoto modelu pro následující hodnoty jednotlivých parametrů. Volíme  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  a rozptyl  $\sigma_\beta^2 = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$  u náhodné posloupnosti  $\{\beta_t\}$ ,  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $\alpha_1 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  u chybového ARCH(1) procesu  $\{\epsilon_t\}$ . Poznamenejme, že tyto hodnoty parametrů  $\alpha_0, \alpha_1$

	$\alpha_0 = 0.2$			
	$\alpha_1$			
	0.1	0.2	0.3	0.4
$\sigma_\epsilon^2$	0.222	0.250	0.286	0.333

Tabulka 6.6: Hodnoty rozptylu  $\sigma_\epsilon^2$  pro jednotlivá nastavení  $\alpha_0, \alpha_1$

odpovídají určitým hodnotám rozptylu  $\sigma_\epsilon^2$  dle rovnosti (5.2). Pro ilustraci uvádíme konkrétní čísla v tabulce 6.6. Hodnoty všech parametrů jsou nastaveny tak, aby byl jak ARCH(1) proces  $\{\epsilon_t\}$ , tak celý RCA(1) model  $\{X_t\}$  stacionární. Parametr  $\alpha_1$  je navíc volen s ohledem na předpoklad  $E(X_t^6) < \infty$  věty 5.2, která pojednává o asymptotické normalitě LBI testu  $\tilde{S}_n$  za platnosti nulové hypotézy. Tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou  $\alpha_1 < 0.405$ , jak je uvedeno v Ha, Lee [5] (str. 74). Opět vyvstává otázka, která volba skórové funkce  $\phi$  a funkce  $h$  třídy pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  je pro tento model nejvhodnější. Pořadový test, stejně jako skórový test  $(NQ_n)^2$  a lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{Z}_n^2$ , dávají špatné výsledky pro RCA(1) model s ARCH(1) chybami, jak uvidíme z tabulek, které budou následovat. To je důvod, proč se žádná volba uvažovaných funkcí  $\phi$  a  $h$  nejeví jako rozumná. Tento fakt potvrzuje tabulka 6.7, ve které nalezneme účinnosti testů z třídy  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  pro nastavení parametrů modelu  $n = 500$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $\alpha_1 = 0.1$  a  $\sigma_\beta^2 = 0$  odpovídající hypotéze  $H_0$ , respektive  $\sigma_\beta^2 = 0.1$  suplující alternativní hypotézu  $H_1$ . Volíme opět skórovou funkci  $\phi = \Phi^{-1}(x)$  a funkci  $h = \sqrt{x}$  jen z toho důvodu, že jsme tak učinili i u předchozího modelu. V pří-

$n = 500$	$\sigma_\beta^2 = 0$					$\sigma_\beta^2 = 0.1$				
	$\phi$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$
$\sqrt{x}$	0.160	0.165	0.108	0.065	0.163	0.628	0.575	0.355	0.118	0.628
$x$	0.202	0.197	0.143	0.083	0.203	0.708	0.672	0.435	0.187	0.708
$x^2$	0.230	0.240	0.163	0.115	0.248	0.788	0.747	0.485	0.287	0.807
$x^4$	0.282	0.282	0.198	0.148	0.290	0.843	0.825	0.562	0.317	0.853
$\exp(x)$	0.218	0.228	0.153	0.095	0.223	0.767	0.723	0.468	0.245	0.778
$\exp(x^2)$	0.252	0.262	0.183	0.138	0.265	0.835	0.800	0.543	0.317	0.835
$\ln(y)$	0.173	0.185	0.122	0.067	0.185	0.667	0.632	0.395	0.155	0.682
$\Phi^{-1}(x)$	0.223	0.230	0.167	0.112	0.228	0.765	0.745	0.495	0.258	0.775
$\text{tg}(x)$	0.228	0.235	0.162	0.112	0.235	0.785	0.737	0.483	0.270	0.798
$\sin(x\pi/2)$	0.145	0.157	0.105	0.045	0.158	0.558	0.520	0.303	0.080	0.565

Tabulka 6.7: Srovnání účinnosti pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při RCA(1) modelu s  $\beta_t \sim \mathcal{N}(0.5, \sigma_\beta^2)$  a  $\{\epsilon_t\}$  ARCH(1) procesem s parametry  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ , ( $y = x + 1$ )

loze nalezneme v tabulce 8.9 relativní četnosti zamítnutí nulové hypotézy pro skórový test  $(NQ_n)^2$ , v tabulce 8.10 pro lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{Z}_n^2$ , v tabulce 8.11 pro LBI test  $\tilde{S}_n^2$ , odvozený pro RCA(1) model s ARCH(1) chybami, a v tabulce 8.12 pro pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$ .

Chování jednotlivých testů můžeme dobře porovnat na názorné tabulce 6.8, ve které jsou pro přehlednost najednou uvedeny výsledky testů pro výběr o velikosti  $n = 400$ . Jak jsme očekávali, LBI test  $\tilde{S}_n^2$ , odvozený právě pro gaussovský RCA(1) model s ARCH(1) chybami, dává dobré výsledky. Naproti tomu ostatní tři testy reagují na chyby modelované ARCH procesem velkou četností zamítnutí výběru i při  $\sigma_\beta^2 = 0$ . Navzdory špatným výsledkům těchto testů provedeme jejich malou analýzu a pak se vrátíme k testu  $\tilde{S}_n^2$ . Jejich špatné výsledky můžeme ilustrovat faktem, že například pro  $\alpha_1 = 0.1$  a  $n = 300$  zamítají všechny tři testy většinou více jak třetinu výběrů za platnosti nulové hypotézy  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$ . Testy  $(NQ_n)^2$ ,  $\tilde{Z}_n^2$  a  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$  vykazují výrazně stoupající tendenci četnosti zamítání pro rostoucí velikost výběru  $n$  nebo rostoucí  $\alpha_1$  nezávisle na hodnotě  $\sigma_\beta^2$ , tedy jak za platnosti nulové hypotézy, tak za platnosti alternativy. Například pro  $n = 300$  a  $\alpha_1 = 0.3$  zamítají všechny tři testy ve většině případů více jak 90 % výběrů při libovolných hodnotách parametrů  $\beta$  a  $\sigma_\beta^2$ . Zajímavé je, že ukotvíme-li všechny parametry kromě  $\beta$ , četnost zamítnutí klesá (kolísá; stoupá) při  $\sigma_\beta^2 \leq 0.05$  ( $\sigma_\beta^2 = 0.1$ ;  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$ ) a rostoucím  $\beta$ .

Ve zbytku odstavce věnujme pozornost LBI testu  $\tilde{S}_n^2$ . Poslední poznatek o ostatních třech testech platí i pro tento test. Je však pozitivní, že pro ros-

toucí velikost výběru relativní četnost zamítnutí klesá za platnosti nulové hypotézy a naopak stoupá, platí-li dostatečně ( $\sigma_\beta^2 \geq 0.1$ ) vzdálená alternativní hypotéza. Lepší výsledky testu pro velké výběry jsou zřejmě zapříčiněny faktem, že test podstatně závisí na asymptotických výsledcích. Potřebujeme znát odhady  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$  a odhad rozptylu  $V$ , složený z mnoha momentových odhadů, abychom mohli spočítat hodnotu testové statistiky. Povšimněme si také, že účinnost testu je menší pro malé hodnoty parametru  $\beta \leq 0.3$ . Skutečně, podíváme-li se na řádek tabulky s hodnotou  $\beta = 0.1$ , zjišťujeme, že četnost zamítnutí  $H_0$  kolísá okolo stejné hodnoty nezávisle na hodnotě  $\sigma_\beta^2$ , tedy nezávisle na platnosti nulové hypotézy či libovolně vzdálené alternativy. Naopak je potěšující, že za platnosti  $H_0$  a  $\beta \geq 0.3$  je účinnost testu, vlastně empirická chyba prvního druhu, velice blízká hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ , na které numerickou simulaci provádíme. Zmiňme poslední zajímavý poznatek, že pro rostoucí  $\alpha_1$  a ukotvené  $\sigma_\beta^2 \leq 0.05$  síla testu velice mírně roste, naopak pro  $\sigma_\beta^2 \geq 0.1$  velice mírně klesá. Jedná se ale o minimální rozdíly, proto můžeme hovořit o invarianci testu vůči hodnotě parametru  $\alpha_1$ . Analýzu uzavřeme konstatováním, že lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{S}_n^2$  dává pro gaussovský RCA(1) model s ARCH(1) chybami velmi dobré výsledky pro dostatečně vzdálenou alternativní hypotézu  $\sigma_\beta^2 \geq 0.4$ ,  $\beta \geq 0.5$  a velikost výběru  $n \geq 400$ .

## 6.5 RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými inovacemi $\xi_t$

Z analýzy účinnosti testů pro gaussovský RCA(1) model s ARCH(1) chybami, jejichž inovační posloupnost tvoří normálně rozdělené náhodné veličiny  $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , víme, že se tři ze čtyř uvažovaných testů nedokážou se strukturou tohoto modelu vyrovnat a dávají velmi špatné výsledky. Důvod je zřejmý. Tyto testy byly odvozeny pro jiný (jednodušší) model, zatímco lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{S}_n^2$  gaussovský RCA(1)-ARCH(1) model předpokládá, a proto (při dostatečně velké hodnotě parametru  $\beta \geq 0.5$ ) pro něj jako jediný dává relativně velmi dobré výsledky. Z poznámky za větou 5.2 víme, že je limitní rozdělení tohoto LBI testu za platnosti  $H_0$  normální s nulovou střední hodnotou nezávisle na tom, zda je či není model gaussovský. Rozptyl limitního rozdělení testové statistiky  $\tilde{S}_n^2$  má však bez předpokladu normality složitější předpis než ve větě uvedený rozptyl  $V$ , který při praktickém výpočtu statistiky v numerické studii používáme. Je proto namístě studovat, jak se LBI test  $\tilde{S}_n^2$  vyrovná s porušením předpokladu normality modelu. Budeme

$n = 400$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.447	0.655	0.780	0.935	1.000	0.853	0.905	0.962	0.987	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.445	0.658	0.775	0.930	1.000	0.862	0.905	0.957	0.987	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.177	0.198	0.177	0.225	0.260	0.168	0.178	0.197	0.195	0.217
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.283	0.432	0.610	0.872	1.000	0.695	0.798	0.877	0.947	1.000
0.3	$(NQ_n)^2$	0.358	0.612	0.765	0.965	1.000	0.772	0.868	0.917	0.990	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.353	0.618	0.768	0.963	1.000	0.775	0.873	0.923	0.990	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.068	0.070	0.130	0.335	0.597	0.035	0.090	0.133	0.320	0.583
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.205	0.390	0.623	0.913	1.000	0.597	0.745	0.865	0.965	1.000
0.5	$(NQ_n)^2$	0.282	0.575	0.822	0.985	1.000	0.673	0.825	0.927	0.993	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.283	0.572	0.807	0.982	1.000	0.665	0.805	0.918	0.992	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.040	0.137	0.335	0.693	0.920	0.043	0.142	0.298	0.657	0.898
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.175	0.415	0.690	0.953	1.000	0.502	0.658	0.847	0.970	1.000
0.7	$(NQ_n)^2$	0.162	0.618	0.903	1.000	1.000	0.417	0.783	0.945	0.998	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.158	0.615	0.905	1.000	1.000	0.390	0.760	0.937	0.998	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.040	0.317	0.735	0.968	0.977	0.050	0.320	0.713	0.960	0.972
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.103	0.470	0.808	0.993	1.000	0.245	0.615	0.910	0.992	1.000
$n = 400$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.958	0.985	0.993	0.998	1.000	0.998	1.000	0.997	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.958	0.980	0.990	0.997	1.000	0.998	1.000	0.997	1.000	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.160	0.147	0.142	0.200	0.238	0.160	0.143	0.202	0.193	0.180
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.908	0.953	0.970	0.988	1.000	0.993	0.997	0.993	1.000	1.000
0.3	$(NQ_n)^2$	0.957	0.963	0.980	0.993	1.000	0.988	0.993	0.993	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.957	0.957	0.978	0.993	1.000	0.985	0.993	0.993	0.998	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.047	0.072	0.108	0.263	0.562	0.053	0.083	0.155	0.297	0.508
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.898	0.905	0.943	0.985	1.000	0.970	0.978	0.988	1.000	1.000
0.5	$(NQ_n)^2$	0.873	0.940	0.978	0.997	1.000	0.952	0.985	0.995	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.863	0.935	0.975	0.997	1.000	0.938	0.978	0.992	0.998	0.998
	$\tilde{S}_n^2$	0.055	0.140	0.325	0.648	0.873	0.060	0.177	0.350	0.655	0.868
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.775	0.862	0.942	0.998	1.000	0.890	0.960	0.983	0.995	1.000
0.7	$(NQ_n)^2$	0.705	0.893	0.982	1.000	1.000	0.842	0.962	0.988	0.998	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.670	0.870	0.978	0.998	1.000	0.793	0.940	0.980	0.998	0.997
	$\tilde{S}_n^2$	0.047	0.338	0.705	0.945	0.965	0.037	0.387	0.703	0.937	0.943
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.505	0.800	0.952	0.998	1.000	0.688	0.887	0.982	0.998	1.000

Tabulka 6.8: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1) model s  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a ARCH(1) chybami  $\epsilon_t$ , kde  $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , při volbě  $\phi = \Phi^{-1}(x)$ ,  $h = \sqrt{x}$  u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$

analyzovat chování testů na RCA(1)-ARCH(1) modelu, ve kterém je porušen předpoklad normality posloupnosti inovací  $\{\xi_t\}$ . V praxi finanční data často normalitu nevykazují a naopak se dají lépe vysvětlit modely ARCH, kde hustota rozdělení inovací má těžší chvosty. Mezi taková rozdělení patří Studentovo  $t$  rozdělení (s rozumným počtem stupňů volnosti). Generujeme proto výběry z RCA(1)-ARCH(1) modelu, který se od gaussovského RCA(1)-ARCH(1) modelu odlišuje tím, že inovace ARCH(1) chyb mají standardizované Studentovo rozdělení  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$ . Standardizaci provádíme z toho důvodu, že v definici (5.1) ARCH(1) procesu předpokládáme, že inovace  $\xi_t$  mají nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl. Náhodná veličina se Studentovým  $t_4$  rozdělením má ale rozptyl velikosti 2.

Nastavení parametrů simulace zůstává nezměněno. Uvažujeme normálně rozdělený autoregresní koeficient  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$ , kde volíme střední hodnotu  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  a rozptyl  $\sigma_\beta^2 = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ . Model tedy splňuje podmínku stacionarity při všech kombinacích  $\beta$  a  $\sigma_\beta^2$ . Hodnoty  $\alpha_0 = 0.2, \alpha_1 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  u chybového ARCH(1) procesu  $\{\epsilon_t\}$  se též nemění. Předtím než uvedeme výsledky vlastní simulace, se musíme rozhodnout, jakou variantu testu z třídy pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  zvolíme. V tabulce 6.9 nalezneme účinnosti testů při dvou nastaveních parametrů. Pro obě části tabulky je společná hodnota parametrů  $\beta = 0.5, \alpha_0 = 0.2, \alpha_1 = 0.1$  a velikost

$n = 500$	$\sigma_\beta^2 = 0$					$\sigma_\beta^2 = 0.1$				
	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$
$\sqrt{x}$	0.502	0.460	0.193	0.070	0.507	0.873	0.798	0.417	0.122	0.875
$x$	0.583	0.543	0.305	0.145	0.583	0.925	0.862	0.555	0.262	0.932
$x^2$	0.657	0.627	0.455	0.305	0.670	0.948	0.913	0.662	0.453	0.957
$x^4$	0.708	0.687	0.515	0.385	0.708	0.953	0.907	0.703	0.498	0.957
$\exp(x)$	0.628	0.610	0.408	0.235	0.637	0.938	0.905	0.632	0.388	0.945
$\exp(x^2)$	0.697	0.672	0.493	0.352	0.697	0.957	0.917	0.693	0.472	0.958
$\ln(y)$	0.545	0.503	0.255	0.098	0.547	0.907	0.827	0.495	0.197	0.900
$\Phi^{-1}(x)$	0.617	0.592	0.383	0.243	0.622	0.935	0.883	0.610	0.377	0.933
$\text{tg}(x)$	0.645	0.627	0.428	0.283	0.657	0.943	0.910	0.645	0.425	0.952
$\sin(x\pi/2)$	0.463	0.408	0.155	0.042	0.470	0.855	0.763	0.350	0.077	0.853

Tabulka 6.9: Srovnání účinnosti pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  pro RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$  inovacemi,  $\beta_t \sim \mathcal{N}(0.5, \sigma_\beta^2)$ , parametry ARCH(1) procesu  $\alpha_0 = 0.2, \alpha_1 = 0.1, (y = x + 1)$

výběru  $n = 500$ . Rozptyl  $\sigma_\beta^2 = 0$ , respektive  $\sigma_\beta^2 = 0.1$ , pak představuje platnost nulové, respektive alternativní hypotézy. V případě gaussovského RCA(1)-ARCH(1) modelu jsme volili dvojici funkcí  $\phi = \Phi^{-1}(x)$  a  $h = \sqrt{x}$  s komentářem, že tak činíme jen kvůli totožné volbě u základního gaussovského RCA(1) modelu. Test  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  totiž dával pro model s ARCH chybami vesměs špatné výsledky a nemělo smysl hledat optimální volbu funkcí  $\phi$  a  $h$ . Zde máme očividně stejný problém. Všechny pořadové testy velice výrazně nadzamítají platnou nulovou hypotézu. Jako kritérium volby varianty pořadového testu by nám mohl pro změnu posloužit rozdíl odpovídajících si relativních četností zamítnutí nulové hypotézy na základě výběru z modelu s  $\sigma_\beta^2 = 0$  a z modelu s  $\sigma_\beta^2 = 0.1$ . Největší rozdíl činí 0.392 v případě skórové funkce  $\phi = \sin(x\pi/2)$  a funkce  $h = \sqrt{x}$ . Empirická chyba prvního druhu je bohužel i u této varianty pořadového testu obrovská 0.463. Podobně velké hodnoty této rozdílové charakteristiky mají pořadové testy  $\tilde{T}_n^2(\sqrt{x}, \sqrt{x})$ ,  $\tilde{T}_n^2(\sqrt{x}, \ln(x+1))$  a  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), \ln(x+1))$ . Kompletní výsledky numerické studie pro RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými inovacemi jsou k nahlédnutí v příloze v tabulkách 8.13, 8.14, 8.15 a 8.16. Z třídy pořadových testů najdeme v tabulce účinnosti pro volbu  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), \sqrt{x})$ .

Není nic překvapující na tom, že skórový test  $(NQ_n)^2$ , LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  a pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), \sqrt{x})$  dávají také pro tento modifikovaný RCA(1)-ARCH(1) model špatné výsledky. Jejich relativní četnosti zamítnutí rostou i za platnosti  $H_0$  jak s větší velikostí výběrů, tak s větším parametrem  $\alpha_1$  ARCH(1) procesu. Jediný pozitivní poznatek snad můžeme shledat v tom, že empirická chyba prvního druhu těchto testů mírně klesá s větším  $\beta$ . Tendence nadzamítat je však u testů nepřehlédnutelná, skórový test například pro  $n = 300$ ,  $\alpha_1 = 0.1$  a  $\sigma_\beta^2 = 0$  (platí nulová hypotéza) zamítá nejméně 47.7% generovaných výběrů (konkrétně při  $\beta = 0.7$ ). Je tedy zřejmé, že jsou tyto testy pro modely s ARCH chybami nepoužitelné. Podívejme se, jak se porušení předpokladu normality projevilo na chování LBI testu  $\tilde{S}_n^2$ . Empirická chyba prvního druhu kolísá při výběrech z RCA(1)-ARCH(1) modelu se standardizovanými Studentovými inovacemi na hladině 0.150 pro  $\beta \geq 0.3$  oproti optimálním hodnotám 0.05 u gaussovského modelu. Je zajímavé, že pro  $n \geq 300$  najdeme nejmenší empirické chyby většinou právě u modelu s nastavením  $\beta = 0.3$  a ne při větších hodnotách. Jak jsme očekávali,  $\tilde{S}_n^2$  si vede celkově trochu hůře než v případě gaussovského modelu, což je patrné jak z vyšší empirické chyby prvního druhu za platnosti nulové hypotézy, tak z nižší empirické síly za platnosti alternativy. Test se opět špatně vyrovnává s malou velikostí střední hodnoty  $\beta \leq 0.3$  autoregresního parametru  $\beta_t$ , kdy více méně nerozlišuje platnost nulové hypotézy či alternativy a vykazuje v obou případech podobné účinnosti.

$n = 400$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.773	0.870	0.915	0.937	0.997	0.763	0.828	0.932	0.972	0.997
	$\tilde{Z}_n^2$	0.577	0.710	0.762	0.845	0.988	0.553	0.658	0.803	0.898	0.988
	$\tilde{S}_n^2$	0.255	0.220	0.220	0.240	0.228	0.287	0.230	0.245	0.220	0.217
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.533	0.695	0.850	0.902	1.000	0.512	0.677	0.853	0.958	1.000
0.3	$(NQ_n)^2$	0.712	0.833	0.798	0.953	1.000	0.697	0.832	0.898	0.977	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.495	0.663	0.623	0.870	0.993	0.497	0.655	0.773	0.905	0.990
	$\tilde{S}_n^2$	0.148	0.170	0.215	0.300	0.520	0.180	0.180	0.200	0.303	0.528
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.493	0.692	0.713	0.938	1.000	0.490	0.687	0.845	0.963	1.000
0.5	$(NQ_n)^2$	0.675	0.848	0.860	0.970	0.995	0.683	0.818	0.907	0.972	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.455	0.670	0.695	0.912	0.992	0.422	0.652	0.777	0.942	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.165	0.185	0.362	0.627	0.885	0.155	0.200	0.357	0.602	0.852
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.385	0.668	0.773	0.938	1.000	0.387	0.658	0.842	0.973	1.000
0.7	$(NQ_n)^2$	0.587	0.828	0.927	0.995	1.000	0.580	0.833	0.958	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.363	0.652	0.813	0.977	1.000	0.347	0.665	0.867	0.987	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.188	0.362	0.653	0.922	0.950	0.162	0.365	0.678	0.938	0.943
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.268	0.690	0.863	0.992	1.000	0.243	0.728	0.928	0.993	1.000
$n = 400$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.885	0.915	0.958	0.980	1.000	0.940	0.968	0.973	0.992	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.723	0.777	0.870	0.910	0.992	0.833	0.888	0.897	0.950	0.992
	$\tilde{S}_n^2$	0.245	0.233	0.210	0.222	0.235	0.192	0.212	0.180	0.223	0.188
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.750	0.838	0.900	0.970	0.998	0.905	0.922	0.950	0.987	0.998
0.3	$(NQ_n)^2$	0.830	0.943	0.953	0.990	0.998	0.940	0.962	0.988	0.992	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.682	0.800	0.835	0.933	0.990	0.822	0.883	0.917	0.935	0.992
	$\tilde{S}_n^2$	0.150	0.153	0.190	0.282	0.470	0.137	0.150	0.183	0.282	0.462
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.693	0.845	0.912	0.983	0.998	0.850	0.923	0.958	0.982	1.000
0.5	$(NQ_n)^2$	0.848	0.893	0.962	0.993	1.000	0.923	0.963	0.978	0.998	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.667	0.760	0.855	0.962	0.997	0.783	0.857	0.908	0.963	0.993
	$\tilde{S}_n^2$	0.170	0.213	0.332	0.605	0.827	0.147	0.212	0.317	0.555	0.792
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.605	0.792	0.907	0.990	1.000	0.745	0.893	0.955	0.988	1.000
0.7	$(NQ_n)^2$	0.743	0.903	0.972	0.998	1.000	0.837	0.950	0.983	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.537	0.773	0.893	0.985	1.000	0.655	0.842	0.915	0.985	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.133	0.385	0.637	0.902	0.945	0.130	0.375	0.643	0.890	0.933
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.382	0.813	0.947	1.000	1.000	0.555	0.867	0.977	0.995	1.000

Tabulka 6.10: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$  inovacemi, při volbě  $\phi = \sin(x\pi/2)$ ,  $h = \sqrt{x}$  u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$

Srovnajme si účinnosti testů (velikost výběru  $n = 400$ ) pro RCA(1)-ARCH(1) model s normálně rozdělenými inovacemi  $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  - tabulka 6.8 - a pro model se standardizovanými Studentovými inovacemi  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$  - tabulka 6.10. Jak jsme se již zmínili, skórový test  $(NQ_n)^2$ , LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  a pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), \sqrt{x})$  vykazují i pro modifikovaný model se Studentovými inovacemi špatné výsledky. Není ale bez zajímavosti, že jejich relativní četnosti zamítnutí nulové hypotézy jsou výrazně vyšší než tytéž četnosti pro gaussovský model při  $\alpha_1 = 0.1$ . Naopak pro všechny ostatní uvažované velikosti parametru  $\alpha_1$  jsou v tabulce 6.10 mírně slabší účinnosti než na odpovídajících pozicích tabulky 6.8. Z porovnání s testy  $(NQ_n)^2$  a  $\tilde{Z}_n^2$  ještě relativně lépe vychází pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), \sqrt{x})$ , který má například při  $\alpha_1 = 0.2$  a  $\beta = 0.7$  empirickou chybu prvního druhu 0.243, což není tak daleko od hodnoty 0.162 testu  $\tilde{S}_n^2$ . Pro větší  $\alpha_1 \geq 0.3$  ale i pořadový test výrazně nadzamítá. U LBI testu  $\tilde{S}_n^2$  si můžeme povšimnout, že účinnost klesá s rostoucí hodnotou parametru  $\alpha_1$ . Uzavřeme analýzu tohoto modelu tvrzením, že se porušení předpokladu normality modelu ve formě standardizovaných Studentových inovací u  $\tilde{S}_n^2$  projevilo negativně vyšší empirickou chybou prvního druhu a též nižší empirickou silou testu.

## 6.6 Gaussovský RCA(1) model se skokovitě rostoucím rozptylem chyb

Zde budeme studovat, jak se uvažované testy vyrovnají s RCA(1) modelem s heterogenními chybami, tedy se situací, kdy chybová posloupnost  $\{\epsilon_t\}$  nemá rozptyl konstantní v čase. Budeme generovat jen výběry o velikosti  $n = 500$  (z důvodů, které osvětlíme za chvíli) z RCA(1) modelu s heteroskedasticitou, kde  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\epsilon t}^2)$ . Hodnoty nekonstantní posloupnosti rozptylů  $\{\sigma_{\epsilon t}^2\}$  budou skokovitě růst tak, jak je uvedeno v tabulce 6.11. Popíšme si princip nastavení rozptylu náhodné veličiny  $\epsilon_t$  například pro krok 1/20. Rozptyl  $\sigma_{\epsilon t}^2$  bude mít konstantní hodnotu 0.850 v časovém intervalu  $t \in (1, 80)$ , pak vzroste na 0.900 a na této hodnotě setrvá

krok	čas $t$			
	(1, 80)	(81, 180)	(181, 300)	(301, 500)
1/20	0.850	0.900	1.000	1.150
1/9	0.667	0.778	1.000	1.333
1/5	0.400	0.600	1.000	1.600

Tabulka 6.11: Hodnoty skokovitě rostoucího rozptylu  $\sigma_{\epsilon t}^2$  dle velikosti kroku



$n = 500$	$\sigma_\beta^2 = 0$					$\sigma_\beta^2 = 0.2$				
	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$
$\sqrt{x}$	0.367	0.312	0.183	0.058	0.380	0.985	0.933	0.623	0.187	0.987
$x$	0.422	0.363	0.200	0.070	0.432	0.995	0.977	0.722	0.320	0.997
$x^2$	0.480	0.398	0.218	0.093	0.495	0.997	0.992	0.773	0.477	0.998
$x^4$	0.500	0.427	0.223	0.102	0.505	0.998	0.995	0.815	0.528	0.998
$\exp(x)$	0.453	0.373	0.210	0.080	0.463	0.995	0.990	0.753	0.425	0.997
$\exp(x^2)$	0.492	0.407	0.222	0.095	0.515	0.998	0.993	0.800	0.513	0.998
$\ln(y)$	0.395	0.343	0.197	0.068	0.398	0.992	0.962	0.673	0.247	0.995
$\Phi^{-1}(x)$	0.425	0.355	0.197	0.080	0.440	0.998	0.988	0.768	0.433	0.997
$\text{tg}(x)$	0.463	0.388	0.215	0.088	0.475	0.998	0.992	0.770	0.460	0.997
$\sin(x\pi/2)$	0.343	0.288	0.172	0.048	0.352	0.973	0.910	0.558	0.137	0.977

Tabulka 6.12: Srovnání účinnosti pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při RCA(1) modelu s  $\beta_t \sim \mathcal{N}(0.5, \sigma_\beta^2)$  a kroku  $1/5$  u  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\epsilon t}^2)$ , ( $y = x + 1$ )

do času  $t = 130$ , pak vzroste o dvojnásobek kroku na hodnotu 1.000, poslední zlom nastane v čase 300, kdy rozptyl stoupne dokonce o trojnásobek kroku na 1.150 a na této hodnotě zůstane až do času  $t = 500$ . Všimněme si, že v časovém intervalu  $t \in (181, 300)$  je hodnota rozptylu 1. Konstantní rozptyl  $\sigma_\epsilon^2 = 1$  jsme uvažovali v případě gaussovského RCA(1) modelu s homogenními chybami, a proto nám výsledky z této dřívější studie poslouží při srovnání chování testů pro simulaci z modelu s homogenními chybami a modelu s heterogenními chybami. Nastavení ostatních parametrů zůstává stejné jako u simulace gaussovského RCA(1) modelu s homoskedasticitou, i tento model je proto opět stacionární. Volíme střední hodnotu  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  a rozptyl  $\sigma_\beta^2 = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$  u náhodné posloupnosti  $\{\beta_t\}$ .

Janečková [6] se zabývala právě RCA(1) modelem s heteroskedasticitou a odvodila pro něj potřebnou teorii. Předpokládala, že  $\{\epsilon_t; t = 1, 2, \dots\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou  $E(\epsilon_t) = 0$  a rozptylem  $0 < \text{var}(\epsilon_t) = \sigma_{\epsilon t}^2 < \infty$  a ukázala, že za platnosti předpokladů definice (1.1) modelu RCA(1), předpokladu **(G)** a podmínky

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma_{\epsilon t}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_\epsilon^2 > 0 \quad (6.1)$$

konverguje odhad metodou nejmenších čtverců  ${}_{ls}\hat{\beta}_n$  ke skutečné hodnotě koeficientu  $\beta$  skoro jistě. Ve světle podmínky (6.1) jsme nastavili hodnoty posloupnosti rozptylů  $\{\sigma_{\epsilon t}^2\}$ . Koncový časový interval  $t \in (301, 500)$  je proto nejdelší a představuje konvergenci posloupnosti  $\{\sigma_{\epsilon t}^2\}$  k poslední nabyté hod-

$n = 500$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	krok= 0					krok= 1/20				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.047	0.195	0.478	0.903	1.000	0.052	0.230	0.562	0.927	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.048	0.197	0.473	0.903	1.000	0.047	0.233	0.575	0.923	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.512	0.235	0.190	0.237	0.280	0.448	0.227	0.145	0.213	0.268
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.050	0.112	0.302	0.797	1.000	0.055	0.097	0.238	0.568	0.970
0.3	$(NQ_n)^2$	0.037	0.227	0.538	0.952	1.000	0.063	0.258	0.623	0.935	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.033	0.223	0.553	0.957	1.000	0.063	0.267	0.615	0.940	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.253	0.105	0.195	0.415	0.722	0.182	0.128	0.177	0.425	0.735
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.057	0.112	0.385	0.865	1.000	0.057	0.145	0.290	0.650	0.978
0.5	$(NQ_n)^2$	0.043	0.318	0.710	0.972	1.000	0.072	0.325	0.732	0.982	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.040	0.325	0.712	0.972	1.000	0.065	0.330	0.723	0.982	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.103	0.178	0.398	0.833	0.962	0.100	0.178	0.408	0.833	0.955
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.045	0.195	0.523	0.938	1.000	0.055	0.158	0.373	0.762	0.987
0.7	$(NQ_n)^2$	0.025	0.478	0.888	1.000	1.000	0.055	0.535	0.903	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.033	0.475	0.887	1.000	1.000	0.058	0.543	0.897	1.000	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.038	0.395	0.825	0.993	0.972	0.058	0.422	0.798	0.990	0.968
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.033	0.343	0.787	0.997	1.000	0.055	0.235	0.582	0.917	0.975

Tabulka 6.13: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1) model s rostoucím rozptylem chyb  $\sigma_{\epsilon_t}^2$  a volbu  $\phi = \Phi^{-1}(x)$ ,  $h = \sqrt{x}$  pro krok 0, respektive  $\phi = \sin(x\pi/2)$ ,  $h = x$  pro krok 1/20

notě. Ze stejných důvodů jsme volili dostatečně velkou velikost generovaného výběru  $n = 500$ . Podívejme se na výsledky vlastní simulace. V tabulce 6.12 jsou uvedeny účinnosti třídy pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při dvou nastaveních parametrů. Pro obě části tabulky je společná hodnota parametrů  $\beta = 0.5$  a kroku 1/5. Hodnota  $\sigma_\beta^2 = 0$ , respektive  $\sigma_\beta^2 = 0.2$ , pak představuje platnost nulové hypotézy, respektive alternativy. Na první pohled není snadné určit vhodnou volbu skórové funkce  $\phi$  a funkce  $h$ . Rozhodneme se opět dle velikosti rozdílu odpovídajících si relativních četností zamítnutí výběru za platnosti hypotézy a za platnosti alternativy. Jednu z největších hodnot této charakteristiky 0.622 najdeme, zvolíme-li funkce  $\phi = \sin(x\pi/2)$  a  $h = x$ . Rozhodli jsme se právě pro tuto volbu, protože jí odpovídající pořadový test má za  $H_0$  relativně nízkou účinnost 0.288 oproti ostatním variantám s rozdílem blízkým číslu 0.622. Výsledky numerické studie pro jednotlivé testy můžeme srovnat v tabulkách 6.13 a 6.14. V levém sektoru (krok 0) tabulky 6.13 jsou pro srovnání s homogenním případem zopakovány účinnosti testů pro gaussovský RCA(1) model. Jedná se o model s  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  a volbu funkcí

$n = 500$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	krok= 1/9					krok= 1/5				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.093	0.408	0.652	0.962	1.000	0.417	0.715	0.882	0.990	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.073	0.392	0.635	0.955	1.000	0.347	0.643	0.860	0.985	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.312	0.223	0.192	0.257	0.315	0.203	0.187	0.223	0.245	0.277
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.088	0.207	0.377	0.667	0.967	0.308	0.535	0.687	0.848	0.992
0.3	$(NQ_n)^2$	0.127	0.397	0.715	0.962	1.000	0.405	0.743	0.907	0.993	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.120	0.387	0.700	0.958	1.000	0.335	0.692	0.867	0.990	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.153	0.145	0.237	0.418	0.760	0.133	0.192	0.352	0.482	0.745
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.100	0.203	0.375	0.718	0.983	0.270	0.508	0.662	0.895	0.980
0.5	$(NQ_n)^2$	0.100	0.515	0.815	0.988	1.000	0.460	0.767	0.925	0.997	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.088	0.495	0.805	0.985	1.000	0.385	0.717	0.903	0.992	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.087	0.242	0.500	0.817	0.968	0.207	0.388	0.650	0.868	0.967
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.063	0.233	0.500	0.798	0.977	0.288	0.552	0.743	0.910	0.975
0.7	$(NQ_n)^2$	0.102	0.612	0.938	1.000	1.000	0.408	0.867	0.985	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.087	0.600	0.930	0.998	1.000	0.347	0.828	0.978	1.000	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.067	0.472	0.868	0.992	0.985	0.245	0.685	0.900	0.990	0.977
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.058	0.292	0.665	0.928	0.983	0.282	0.633	0.827	0.968	0.987

Tabulka 6.14: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1) model s rostoucím rozptylem chyb  $\sigma_{\epsilon_t}^2$  a volbu funkcí  $\phi = \sin(x\pi/2)$ ,  $h = x$  u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$

$\phi = \Phi^{-1}(x)$  a  $h = \sqrt{x}$  u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$ , která se pro tento model jevila jako nejvhodnější. Pravý sektor tabulky 6.13 a tabulka 6.14 představují relativní četnosti zamítnutí výběru z gaussovského RCA(1) modelu se skokovitě rostoucími rozptily chyb pro daný krok,  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\epsilon_t}^2)$  a volbu funkcí  $\phi = \sin(x\pi/2)$  a  $h = x$  u pořadového testu. Přístupme k analýze výsledků simulace. Je na první pohled patrné, že s větším krokem stoupá četnost zamítnutí výběru, a to i za platnosti nulové hypotézy, srovnáváme-li s odpovídajícími četnostmi zamítnutí výběrů z modelu s homogenními chybami. Pořadový test  $(NQ_n)^2$  a LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  dávají pro model se skokovitě rostoucími rozptily chyb podobné, avšak ve srovnání se zbylými dvěma testy špatné výsledky. LBI test  $\tilde{S}_n^2$ , odvozený pro RCA(1) model s ARCH(1) chybami, dává špatné výsledky pro malé hodnoty parametru  $\beta$  a chová se relativně velmi dobře v případě  $\beta \geq 0.5$  a kroku 1/9 a menším. Jako nejlepší volba se jeví jednoznačně při  $\beta = 0.7$ . Pro  $\beta \leq 0.5$ , tedy tam kde zaostává  $\tilde{S}_n^2$ , se nejlépe prezentuje pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), x)$ . Dává velmi dobré relativní četnosti zamítání výběrů - malé za platnosti  $H_0$  (malá

empirická chyba prvního druhu) a velké za platnosti alternativy. Účinnost obou testů se zhorší pro velký krok  $1/5$ , kdy se empirická chyba prvního druhu u  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), x)$  pohybuje na hladině  $0.300$  a u LBI testu  $\tilde{S}_n^2$  pak okolo  $0.200$ . V této situaci jsou při  $\beta = 0.5$  možná testy srovnatelně účinné, protože  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), x)$  sice spolehlivěji zamítá výběry z modelu za platnosti alternativy, ale  $\tilde{S}_n^2$  na druhou stranu zamítá menší podíl výběrů z modelu za platnosti nulové hypotézy.

## 6.7 Gaussovský RCA(1) model s lineárně klesajícím rozptylem chyb

Gaussovský RCA(1) model s lineárně klesajícím rozptylem chyb je jen obměnou modelu se skokovitě rostoucím rozptylem chyb. Nastavení parametrů modelu zůstává nezměněno vyjma posloupnosti rozptylů chyb  $\{\epsilon_t\}$ . Tentokrát bude posloupnost rozptylů  $\{\tilde{\sigma}_{et}^2\}$  lineárně klesající v čase  $t \in 1, \dots, 400$ . V časovém intervalu  $(401, 500)$  se pak ustálí na hodnotě  $\tilde{\sigma}_{e400}^2$ . Zvolené velikosti kroku spolu s počáteční a koncovou hodnotou rozptylu ilustruje tabulka 6.15. Povšimněme si, že krok  $1/20$  ( $1/9, 1/5$ ) u modelu se skokovitě rostoucím rozptylem chyb a krok  $0.002$  ( $0.003, 0.006$ ) u modelu s lineárně klesajícím rozptylem chyb spolu určitým způsobem korespondují - o co překročila posloupnost  $\{\sigma_{et}^2\}$  nakonec rozptyl  $\sigma_\epsilon^2 = 1$  modelu s homogenními chybami, o to pod jednotkový rozptyl nakonec klesla posloupnost  $\{\tilde{\sigma}_{et}^2\}$ .

	krok		
	0.002	0.003	0.006
$t = 1$	1.450	2.000	2.800
$t = 400$	0.850	0.667	0.400

Tabulka 6.15: Rozptyl  $\tilde{\sigma}_{et}^2$

V tabulce 6.16 jsou uvedeny účinnosti třídy pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při nastavení  $\beta = 0.5$ , kroku  $0.006$  a dvou různých hodnotách parametru  $\sigma_\beta^2$ . Opět jsme o vhodné volbě funkcí rozhodli na základě rozdílu mezi relativními četnostmi zamítnutí výběrů za platnosti nulové hypotézy a platnosti alternativy. Takto jsme zvolili  $\phi = x^4$  a funkce  $h = x^2$ , kdy je rozdíl účinností  $0.503$  a empirická chyba prvního druhu  $0.370$  pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$  za  $H_0$  relativně nízká oproti ostatním variantám. Především volba funkce  $h$  byla jednoznačná. Podívejme se na výsledky vlastní simulace, jak jsou uvedeny

$n = 500$	$\sigma_\beta^2 = 0$					$\sigma_\beta^2 = 0.2$				
	$\phi$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$
$\sqrt{x}$	0.723	0.610	0.295	0.097	0.743	0.997	0.972	0.707	0.242	0.997
$x$	0.798	0.693	0.342	0.133	0.813	1.000	0.995	0.792	0.388	0.998
$x^2$	0.848	0.745	0.372	0.177	0.850	1.000	0.998	0.828	0.517	1.000
$x^4$	0.845	0.727	0.370	0.187	0.850	1.000	1.000	0.873	0.568	1.000
$\exp(x)$	0.830	0.727	0.357	0.162	0.842	1.000	0.998	0.817	0.493	1.000
$\exp(x^2)$	0.852	0.737	0.373	0.183	0.848	1.000	1.000	0.858	0.545	1.000
$\ln(y)$	0.758	0.660	0.320	0.115	0.770	0.998	0.985	0.763	0.305	0.998
$\Phi^{-1}(x)$	0.788	0.683	0.333	0.138	0.797	1.000	0.997	0.828	0.493	1.000
$\text{tg}(x)$	0.833	0.728	0.360	0.173	0.847	1.000	0.998	0.828	0.508	1.000
$\sin(x\pi/2)$	0.718	0.607	0.287	0.078	0.725	0.997	0.960	0.640	0.178	0.995

Tabulka 6.16: Srovnání účinnosti pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při RCA(1) modelu s  $\beta_t \sim \mathcal{N}(0.5, \sigma_\beta^2)$  a kroku 0.006 u  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_{\epsilon t}^2)$ , ( $y = x + 1$ )

v tabulkách 6.17 a 6.18. Levý sektor (krok 0) tabulky 6.17 obsahuje účinnosti testů pro gaussovský RCA(1) model s  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  a volbu funkcí  $\phi = \Phi^{-1}(x)$  a  $h = \sqrt{x}$  u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$ . Sektory tabulek, náležící krokům 0.002, 0.003 a 0.006, představují relativní četnosti zamítnutí výběru z gaussovského RCA(1) modelu s lineárně klesajícími rozptyly chyb, kde  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_{\epsilon t}^2)$ . Pro tento model volíme funkce  $\phi = x^4$  a  $h = x^2$  u pořadového testu. Přístupme k analýze výsledků simulace. S rostoucím krokem, ještě výrazněji než u varianty modelu se skokovitě rostoucím rozptylem, stoupá u všech čtyř testů četnost zamítnutí výběru, a to i za platnosti nulové hypotézy. Jak jsme očekávali, plynulý lineární pokles má ještě negativnější dopad na chování testů než skokovitá změna. To dokládají účinnosti testů při  $\sigma_\beta^2 = 0$ , kdy v tabulce 6.14 (RCA(1) model se skokovitě rostoucím rozptylem chyb) najdeme pro krok 1/5 u  $(NQ_n)^2$  minimální hodnotu 0.405, u  $\tilde{Z}_n^2$  0.333, u  $\tilde{S}_n^2$  0.133 a u  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), x)$  0.270, zatímco v tabulce 6.18 pro krok 0.006 už minimálně 0.708, 0.607, 0.218 a 0.360 u  $\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$ . Je zřejmé, že především skórový test  $(NQ_n)^2$  a LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  zamítají velkou část všech výběrů, ať už platí či neplatí nulová hypotéza. Pořadový test  $\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$  si ve srovnání s nimi vede relativně dobře. LBI test  $\tilde{S}_n^2$  dává nejlepší výsledky a je v praxi pro data z tohoto modelu použitelný, a to pro menší krok (0.002 nebo 0.003),  $\beta \geq 0.5$  a  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$ . Pro větší krok 0.006 má už bohužel i tento test tendenci výrazně zamítat data i z modelu s platnou nulovou hypotézou.

$n = 500$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	krok= 0					krok= 0.002				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.047	0.195	0.478	0.903	1.000	0.062	0.288	0.605	0.933	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.048	0.197	0.473	0.903	1.000	0.060	0.292	0.613	0.937	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.512	0.235	0.190	0.237	0.280	0.373	0.208	0.207	0.210	0.265
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.050	0.112	0.302	0.797	1.000	0.055	0.218	0.397	0.703	0.903
0.3	$(NQ_n)^2$	0.037	0.227	0.538	0.952	1.000	0.060	0.325	0.628	0.955	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.033	0.223	0.553	0.957	1.000	0.057	0.328	0.635	0.955	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.253	0.105	0.195	0.415	0.722	0.180	0.118	0.187	0.425	0.715
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.057	0.112	0.385	0.865	1.000	0.043	0.212	0.417	0.718	0.915
0.5	$(NQ_n)^2$	0.043	0.318	0.710	0.972	1.000	0.087	0.378	0.727	0.987	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.040	0.325	0.712	0.972	1.000	0.082	0.383	0.728	0.985	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.103	0.178	0.398	0.833	0.962	0.120	0.158	0.455	0.847	0.947
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.045	0.195	0.523	0.938	1.000	0.073	0.230	0.467	0.762	0.932
0.7	$(NQ_n)^2$	0.025	0.478	0.888	1.000	1.000	0.058	0.597	0.915	0.998	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.033	0.475	0.887	1.000	1.000	0.063	0.600	0.922	0.998	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.038	0.395	0.825	0.993	0.972	0.067	0.425	0.808	0.995	0.982
	$\tilde{T}_n^2(\phi, h)$	0.033	0.343	0.787	0.997	1.000	0.055	0.353	0.638	0.878	0.965

Tabulka 6.17: Srovnání účinnosti testů, volba  $\phi = \Phi^{-1}(x), h = \sqrt{x}$  pro krok 0, respektive  $\phi = x^4, h = x^2$  pro krok 0.002 u pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$

$n = 500$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	krok= 0.003					krok= 0.006				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.270	0.587	0.802	0.978	1.000	0.708	0.887	0.953	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.242	0.563	0.787	0.968	1.000	0.627	0.845	0.927	0.998	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.263	0.202	0.208	0.227	0.288	0.247	0.248	0.293	0.278	0.277
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$	0.185	0.392	0.572	0.753	0.902	0.407	0.593	0.713	0.837	0.922
0.3	$(NQ_n)^2$	0.238	0.613	0.840	0.988	1.000	0.713	0.908	0.962	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.195	0.592	0.818	0.982	1.000	0.620	0.848	0.940	0.997	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.132	0.180	0.263	0.508	0.708	0.218	0.302	0.397	0.587	0.718
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$	0.147	0.372	0.568	0.775	0.915	0.390	0.620	0.720	0.850	0.912
0.5	$(NQ_n)^2$	0.240	0.623	0.897	0.997	1.000	0.715	0.925	0.983	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.222	0.588	0.878	0.995	1.000	0.607	0.890	0.968	1.000	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.103	0.287	0.533	0.870	0.962	0.327	0.555	0.703	0.897	0.942
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$	0.140	0.348	0.608	0.785	0.937	0.370	0.658	0.750	0.873	0.923
0.7	$(NQ_n)^2$	0.232	0.777	0.947	1.000	1.000	0.747	0.955	0.998	1.000	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.210	0.748	0.940	1.000	1.000	0.637	0.925	0.993	1.000	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.127	0.582	0.857	0.985	0.973	0.480	0.808	0.955	0.993	0.970
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$	0.113	0.477	0.692	0.918	0.963	0.360	0.655	0.815	0.918	0.960

Tabulka 6.18: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1) model s lineárně klesajícím rozptylem chyb  $\tilde{\sigma}_{\epsilon t}^2$

## 6.8 Gaussovský RCA(1) model s kovariancí

Poslední model, o kterém pojednáváme, je gaussovský RCA(1) model se závislostí mezi náhodnými veličinami  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$ , tedy závislostí ve stejném čase. Speciální případ takové závislosti, kovarianci ve tvaru

$$\text{cov}(B_t, \epsilon_t) = \gamma\sigma_\beta, \text{ kde } |\gamma| < \sigma_\epsilon, \quad \sigma_\beta = \sqrt{\sigma_\beta^2}, \quad \sigma_\epsilon = \sqrt{\sigma_\epsilon^2}, \quad (6.2)$$

uvažoval Lee [7] a odvodil pro takto zobecněný RCA(1) model lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{Z}_n^2$ . Jak jsme již uvedli ve čtvrté kapitole, není toto odvození korektní, a proto jsme popsali odvození LBI testu  $\tilde{Z}_n^2$  jen pro RCA(1) model definovaný v (1.1). Jsme si vědomi, že gaussovský RCA(1) model

$n = 500$	$\sigma_\beta^2 = 0$					$\sigma_\beta^2 = 0.1$				
	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$	$\sqrt{x}$	$x$	$x^2$	$x^4$	$\ln(y)$
$\phi$										
$\sqrt{x}$	0.057	0.067	0.058	0.042	0.058	0.195	0.370	0.393	0.143	0.153
$x$	0.060	0.070	0.063	0.037	0.060	0.280	0.497	0.523	0.310	0.233
$x^2$	0.060	0.057	0.062	0.028	0.063	0.435	0.655	0.640	0.487	0.380
$x^4$	0.050	0.057	0.040	0.020	0.053	0.662	0.777	0.712	0.552	0.617
$\exp(x)$	0.055	0.063	0.067	0.032	0.058	0.357	0.597	0.597	0.427	0.303
$\exp(x^2)$	0.053	0.052	0.050	0.022	0.057	0.557	0.723	0.685	0.537	0.500
$\ln(y)$	0.062	0.065	0.067	0.038	0.060	0.238	0.442	0.460	0.220	0.192
$\Phi^{-1}(x)$	0.053	0.055	0.053	0.030	0.052	0.447	0.642	0.615	0.453	0.377
$\text{tg}(x)$	0.057	0.067	0.063	0.032	0.060	0.413	0.638	0.613	0.472	0.350
$\sin(x\pi/2)$	0.065	0.065	0.063	0.043	0.062	0.147	0.290	0.295	0.092	0.105

Tabulka 6.19: Srovnání účinnosti pořadových testů  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  při RCA(1) modelu s kovariancí mezi  $\beta_t \sim \mathcal{N}(0.5, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , ( $y = x + 1$ )

s kovariancí, který také zařazujeme do numerické studie, neodpovídá naší definici RCA(1) modelu a že žádný ze čtyř v práci popsaných testů nebyl odvozen pro tento model. Přesto tuto simulaci pro zajímavost provedeme (bez odvození potřebné teorie a určení postačujících předpokladů na model), abychom viděli, jak se testy, především LBI test  $\tilde{Z}_n^2$ , se závislostí vyrovnají. Nastavení parametrů studie je totožné se simulací výběrů z gaussovského RCA(1) modelu. Ve shodě se speciálním tvarem kovariance (6.2) generujeme normálně rozdělené vzájemně nezávislé náhodné vektory  $(\beta_t, \epsilon_t)'$  s vektorem středních hodnot  $(\beta, 0)'$  a varianční maticí

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\beta^2 & \tilde{\gamma}\sigma_\beta \\ \tilde{\gamma}\sigma_\beta & \sigma_\epsilon^2 \end{pmatrix},$$

kde  $\tilde{\gamma} = (\sigma_\epsilon - 0.1)$ . Kovariance mezi  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$  tak dosahuje hodnoty blízké maximální možné úrovní závislosti a my můžeme z výsledku simulace modelu usoudit, jak hodně silná závislost testy ovlivňuje. Připomeňme, že jsme v případě simulace z gaussovského RCA(1) modelu uvažovali jako rozumnou volbu z třídy pořadových testů variantu  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$ . Pro gaussovský RCA(1) model s kovariancí se dle tabulky 6.19 jako vhodní kandidáti jeví testy  $\tilde{T}_n^2(x^4, x)$ ,  $\tilde{T}_n^2(x^4, x^2)$  a  $\tilde{T}_n^2(\exp(x^2), x)$ . První má sice ze všech tří uvedených kandidátů největší empirickou chybu prvního druhu, ale na druhou stranu zamítá největší podíl výběrů za platnosti alternativy. Zároveň má s hodnotou 0.720 jednoznačně největší rozdíl relativních četností zamítnutí výběru za platnosti  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  a za platnosti alternativy  $\sigma_\beta^2 = 0.1$ , proto budeme právě jeho výsledky srovnávat s výsledky ostatních testů. Generujeme-li výběry z gaussovského RCA(1) modelu s kovariancí při  $\sigma_\beta^2 = 0$ , je z tvaru varianční matice  $\Sigma$  patrné, že kovariance mezi  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$  je nulová. To je samozřejmě přirozená situace, protože za platnosti  $H_0$  je parametr  $\beta_t = \beta$  konstanta. Je to ale také případ, kdy je gaussovský RCA(1) model s kovariancí totožný s gaussovským RCA(1) modelem, který jsme si rozebírali jako první. Víme již, že pro gaussovský RCA(1) model dává nejlepší výsledky skórový test společně s LBI testem  $\tilde{Z}_n^2$ . Můžeme se proto zde koncentrovat výhradně na chování testů za platnosti alternativy  $H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$  a také následně porovnat získané poznatky se základním RCA(1) modelem s nezávislými náhodnými veličinami  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$ .

Kompletní výsledky numerické studie pro velikosti výběru  $n = 100, 200, 300, 400, 500$  naleznete v příloze v tabulkách 8.17 - skórový test  $(NQ_n)^2$ , 8.18 - LBI test  $\tilde{Z}_n^2$ , 8.19 - LBI test  $\tilde{S}_n^2$  a 8.20 - pořadový test  $\tilde{T}_n^2(x^4, x)$ . Z těchto tabulek můžeme vyčíst, že síla testů  $(NQ_n)^2$ ,  $\tilde{Z}_n^2$  a  $\tilde{T}_n^2(x^4, x)$  roste jak s větším rozptylem  $\sigma_\beta^2$ , tak s větší střední hodnotou  $\beta$  autoregresního parametru  $\beta_t$ . Již dříve jsme komentovali, že LBI test  $\tilde{S}_n^2$  dává (relativně) rozumné výsledky až pro větší velikosti výběru v porovnání s ostatními třemi testy. Je zajímavé, že pro  $\sigma_\beta^2 \leq 0.2$ , nezávisle na  $n$ , má test velkou sílu při  $\beta = 0.1$ , pak nastane velký pokles při  $\beta = 0.3$  a pozvolný růst při  $\beta = 0.5, 0.7$ . Podobně zvláštní je poznatek, že test  $\tilde{S}_n^2$  má větší účinnost při  $\sigma_\beta^2 = 0.2$  než při  $\sigma_\beta^2 = 0.5$ . Všechny čtyři testy jsou stejně jako u základního gaussovského RCA(1) modelu invariantní vůči hodnotě rozptylu  $\sigma_\epsilon^2$ . Na tabulce 6.20 s velikostí výběru  $n = 400$  si ilustrujeme porovnání testů. LBI test  $\tilde{S}_n^2$  dává jednoznačně nejslabší výsledky. V definici (1.1) modelu RCA(1) předpokládáme nezávislost náhodných posloupností  $\{\beta_t\}$  a  $\{\epsilon_t\}$ . Zde je tento předpoklad zjevně porušen a očekávaný důsledek by měla být o hodně větší četnost zamítání výběrů z modelu s kovariancí. Skutečně, porovnáme-li empirické síly testů při  $\sigma_\beta^2 > 0$



a výběrech z modelu s nezávislými náhodnými posloupnostmi  $\{\beta_t\}$  a  $\{\epsilon_t\}$  (tabulka 6.2), respektive z modelu s kovariancí mezi  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$  (tabulka 6.20), vidíme ihned, že závislost velmi výrazně, směrem vzhůru, ovlivnila četnost zamítnutí výběru. To můžeme ilustrovat například tím, že skórový test  $(NQ_n)^2$  zamítá v RCA(1) modelu s kovariancí již při malé hodnotě  $\sigma_\beta^2 \geq 0.1$ ,  $\beta \geq 0.3$  a  $n \geq 400$  vždy nejméně 77.3% výběrů, zatímco v tabulce 6.2 nalezneme pro stejné nastavení minimální hodnotu jen 46.2%. Nejlepší výsledky dává pro gaussovský RCA(1) model s kovariancí test  $(NQ_n)^2$ , o něco málo hůře si vede LBI test  $\tilde{Z}_n^2$ . Testy  $(NQ_n)^2$  a  $\tilde{Z}_n^2$  každopádně nemají téměř shodnou účinnost, jak tomu bylo u gaussovského RCA(1) modelu bez kovariance. To jen potvrzuje naše tvrzení, že článek Lee [7] není v pořádku. V opačném případě by měl zřejmě LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  dávat nejlepší výsledky.

$n = 400$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
$\beta$	test	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
0.1	$(NQ_n)^2$	0.043	0.265	0.532	0.842	0.997	0.042	0.332	0.557	0.837	0.998
	$\tilde{Z}_n^2$	0.055	0.237	0.475	0.787	0.990	0.042	0.290	0.498	0.792	0.995
	$\tilde{S}_n^2$	0.507	0.617	0.738	0.807	0.422	0.495	0.637	0.802	0.857	0.453
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x)$	0.070	0.097	0.227	0.520	0.982	0.040	0.130	0.198	0.508	0.982
0.3	$(NQ_n)^2$	0.043	0.445	0.773	0.955	1.000	0.035	0.487	0.778	0.957	1.000
	$\tilde{Z}_n^2$	0.047	0.403	0.733	0.938	0.997	0.038	0.445	0.735	0.932	1.000
	$\tilde{S}_n^2$	0.240	0.393	0.632	0.748	0.488	0.245	0.435	0.705	0.782	0.525
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x)$	0.058	0.225	0.520	0.813	0.992	0.047	0.280	0.477	0.773	0.990
0.5	$(NQ_n)^2$	0.060	0.670	0.897	0.982	1.000	0.038	0.695	0.913	0.993	0.998
	$\tilde{Z}_n^2$	0.065	0.627	0.867	0.973	1.000	0.037	0.635	0.882	0.985	0.998
	$\tilde{S}_n^2$	0.112	0.458	0.728	0.773	0.655	0.107	0.517	0.720	0.805	0.638
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x)$	0.060	0.445	0.708	0.923	0.998	0.045	0.437	0.710	0.927	0.995
0.7	$(NQ_n)^2$	0.045	0.822	0.953	0.993	1.000	0.047	0.853	0.973	0.995	0.998
	$\tilde{Z}_n^2$	0.043	0.797	0.935	0.988	1.000	0.045	0.825	0.965	0.993	0.997
	$\tilde{S}_n^2$	0.067	0.700	0.868	0.905	0.813	0.057	0.702	0.852	0.862	0.735
	$\tilde{T}_n^2(x^4, x)$	0.045	0.657	0.872	0.965	1.000	0.047	0.675	0.905	0.970	0.998

Tabulka 6.20: Srovnání účinnosti testů pro RCA(1) model s kovariancí mezi  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

## 6.9 Shrnutí poznatků ze simulační studie

U všech čtyř testů můžeme konstatovat velmi rozumnou invarianci účinnosti testu vůči velikosti rozptylu  $\sigma_\epsilon^2$  reziduální složky RCA(1) modelu. Skórový test  $(NQ_n)^2$ , lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{Z}_n^2$  a pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  mají společnou dobrou vlastnost, že jsou účinné i pro malé střední hodnoty  $\beta$  autoregresního parametru  $\beta_t$ , na rozdíl od LBI testu  $\tilde{S}_n^2$ , který se ukazuje jako použitelný až pro  $\beta \geq 0.5$ .

Test  $(NQ_n)^2$  se osvědčil, jak jsme očekávali, pro gaussovský RCA(1) model. Velmi dobré výsledky dával rovněž pro RCA(1) model s rovnoměrně rozděleným autoregresním parametrem  $\beta_t$  a normálně rozděleným  $\epsilon_t$ . Nesmíme zapomenout ani na gaussovský RCA(1) model s kovariancí mezi  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$ , kde pořadový test také dominoval, což ale není zas tolik překvapivé zjištění. Konstatovali jsme totiž, že kovariance mezi  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$  má za následek u všech testů právě mnohem vyšší tendenci zamítat výběr, jinak však výsledky testů kopírují výsledky gaussovského RCA(1) modelu s nezávislými náhodnými veličinami  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$ . Uzavřeme analýzu skórového testu  $(NQ_n)^2$  komentářem, že jeho empirická chyba prvního druhu je vyhovující vzhledem k nastavené hodnotě  $\alpha = 0.05$  a jeho empirická síla je vždy větší než 70% při  $n \geq 300$  a  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$  u všech vyjmenovaných variant RCA(1) modelu, ve kterých dával velmi dobré výsledky.

Lokálně nejlepší invariantní test  $\tilde{Z}_n^2$  měl ve většině simulovaných variant RCA(1) modelu podobnou účinnost jako  $(NQ_n)^2$ . Platí pro něj tedy v podstatě totéž co pro skórový test. Porovnáme-li ho s  $(NQ_n)^2$ , můžeme konstatovat, že vykazoval téměř stejně dobré chování v případě gaussovského RCA(1) modelu s nezávislými i závislými  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$  a byl nejlepší ze všech testů v modelu s rovnoměrně rozděleným autoregresním parametrem  $\beta_t$ .

LBI test  $\tilde{S}_n^2$  je odvozen pro gaussovský RCA(1) model s ARCH(1) chybami. Ukazuje se jako správný testovací aparát v RCA(1) modelech s heterogenními chybami. Dle očekávání byl neúčinnější v modelu, pro který byl odvozen. Rovněž dominoval v modifikovaném RCA(1)-ARCH(1) modelu se standardizovanými Studentovými inovacemi. Porušení předpokladu normality však zhoršilo chování testu jak z pohledu empirické chyby prvního druhu, tak z pohledu empirické síly testu. Jak už jsme několikrát komentovali, test  $\tilde{S}_n^2$  je založen na velkém počtu odhadů. Jedná se o odhady  $ls\hat{\beta}_n$ ,  $ml\hat{\alpha}_{0n}$ ,  $ml\hat{\alpha}_{1n}$  a odhad rozptylu  $V$  limitního rozdělení testové statistiky, složený z velkého množství momentových odhadů. Z tohoto důvodu se chová rozumně až pro větší velikosti výběru, řekněme  $n \geq 400$  a navíc, což je další specifikum tohoto testu, až pro  $\beta \geq 0.5$ .  $\tilde{S}_n^2$  byl účinný při zamítání výběrů z gaussovského RCA(1) modelu s ARCH(1) chybami teprve za platnosti dostatečně vzdálené alternativy  $\sigma_\beta^2 \geq 0.4$ . Nejlépe ze všech testů se prezentoval také u gaussovského

RCA(1) modelu se skokovitě rostoucím, respektive lineárně klesajícím rozptylem chyb, kde dával rozumné výsledky už pro  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$ . Avšak pro velký krok 1/5, respektive 0.006 se empirická chyba prvního druhu i u tohoto testu významně vzdálila od žádoucí hodnoty 0.05. Například pro výběr velikosti  $n = 400$  je nejmenší relativní četnost zamítnutí výběru za platnosti  $H_0$  u obou modelů s heterogenní chybou 21.8 %.

Pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  byl díky možnosti zvolit neoptimálnější variantu z množiny uvažovaných pořadových testů logicky flexibilnější. Komplexně se tedy mohl nejlépe adaptovat na nejrůznější zobecnění základního RCA(1) modelu. Jeho komplexnost plyne zřejmě také z toho, že test je založen na pořadí odhadnutých reziduí  $r_t = X_t - \hat{\beta}_n X_{t-1}$  a měl by být robustnější co se týče zvoleného rozdělení náhodných veličin  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$ . Test vykazoval obecně dobré výsledky, stejně jako testy  $(NQ_n)^2$  a  $\tilde{Z}_n^2$ , pro  $n \geq 300$  a  $\sigma_\beta^2 \geq 0.2$ .  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$  mírně zaostával za účinnostmi posledních dvou zmíněných testů v případě gaussovského RCA(1) modelu, pro model s rovnoměrně rozděleným autoregresním parametrem  $\beta_t$  s nimi byl test  $\tilde{T}_n^2(x^4, \sqrt{x})$  z třídy pořadových testů srovnatelný. Varianta  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), x)$  byla podobně úspěšná jako LBI test  $\tilde{S}_n^2$  při největším kroku 1/5 v modelu se skokovitě rostoucím rozptylem chyb. Při  $\beta \leq 0.5$  a krocích 1/20, 1/9 tento test dokonce předstihla. Vidíme tedy, že neexistuje univerzální volba skórové funkce  $\phi$  a funkce  $h$ , která by se osvědčila pro všechny uvažované modely. Můžeme si však povšimnout, že například funkce  $h(x) = \sqrt{x}$  figurovala ve více právě komentovaných pořadových testech.

Všechny naprogramované procedury, které jsme v rámci simulací použili, jsou přiloženy na kompaktním disku na vnitřní straně zadní desky práce spolu s odpovídajícím komentářem a návodem, jak je v programu **R** spustit. Výpis procedur v textu neuvádíme, protože by byl jeho rozsah příliš velký.

# Kapitola 7

## Aplikace testů na index PX50

Index PX50 je nejvýznamnějším a nejsledovanějším indexem Burzy cenných papírů Praha (BCPP). Byl zaveden 5. dubna 1994 a v jeho bázi je zařazeno 50 emisí, jejichž váha je úměrná jejich tržní kapitalizaci. Výchozí hodnota 5. dubna 1994 byla 1000 bodů, minima bylo dosaženo 8. října 1998 (316,0 bodu) a maxima 6. dubna 1994 (1002,4 bodu). Máme k dispozici časovou řadu hodnot indexu PX50 z období 8. listopad 1994 až 25. květen 1999 a vyzkoušíme si na těchto reálných datech aplikovat testy náhodnosti autoregresních parametrů. Symbolem  $PX_t$  budeme značit hodnotu indexu v čase  $t$ , kde čas  $t = 0$  odpovídá datu 8. listopad 1994 a datum 25. květen 1999 pak času  $t = 1112$ . Časová řada (obrázek 7.1)  $\{PX_t; t = 0, \dots, 1112\}$  ale není stacionární, zatímco její vhodná transformace

$$\Delta \log(PX_t) = \log(PX_t) - \log(PX_{t-1}) \quad \text{pro } t = 1, \dots, 1112$$

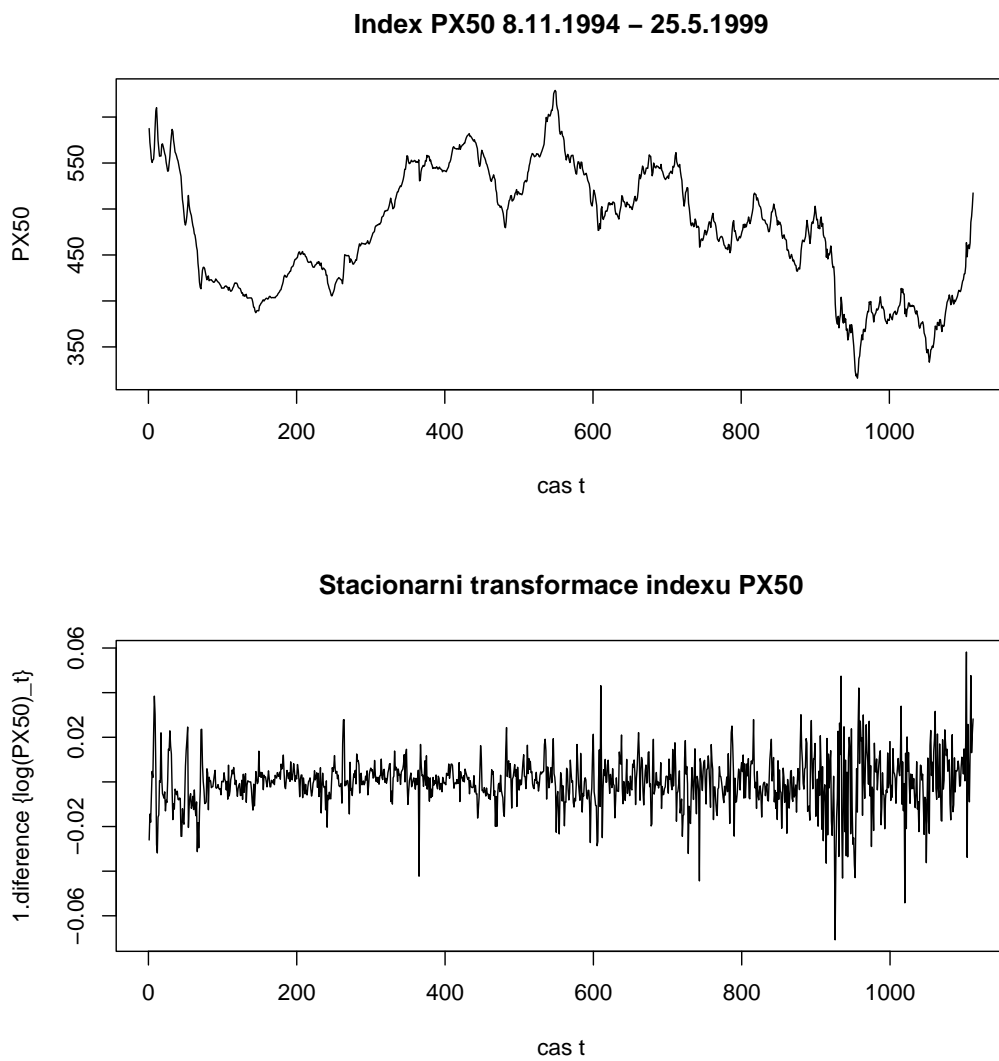
již ano. Délka uvažované stacionární řady je pak  $n = 1112$ . Na základě odhadnuté autokorelační a parciální autokorelační funkce (obrázek 7.2) můžeme usuzovat, že se dá časová řada rozdílů logaritmů indexu PX50 hrubě vysvětlit AR(1) modelem. Odhad autoregresního parametru  $\beta$  metodou nejmenších čtverců má hodnotu  ${}_{ls}\hat{\beta}_n = 0.275$ . Poznamenejme, že jsme ve statistickém programu **R** zkoušeli pomocí procedury *ar.ols* (knihovna *tseries*) využívající Akaikeho informačního kritéria vysvětlit časovou řadu  $\{\Delta \log(PX_t)\}$  co nejlepším autoregresním modelem. Výstup procedury byl model AR(13),

$\chi_1^2(0.05)$	$(NQ_n)^2$	$\tilde{Z}_n^2$	$\tilde{S}_n^2$	$\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$
3.841	235.988	78.051	4.127	89.004

Tabulka 7.1: Odpovídající kvantil a hodnoty jednotlivých testových statistik

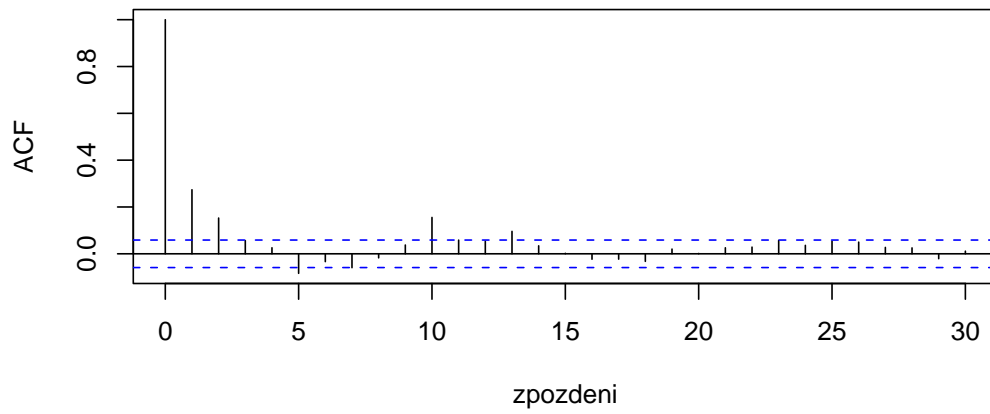
jehož nevysvětlená část variance časové řady činila 0.0001207, což je zanedbatelné zlepšení oproti AR(1) modelu s hodnotou 0.0001126 stejné charakteristiky. Pozitivní je rovněž zjištění, že průměr  $\overline{\Delta \ln(PX_t)} = -0.000114$  je blízký nule, což předpokládáme v definici RCA(1) modelu. Pomocí jiné vhodné procedury (*garch*) programu **R** jsme odhalili, že odhadnutá rezidua modelu řádu 1 (jejich korelační strukturu ilustruje obrázek 7.3) odpovídají hrubě ARCH(1) procesu, respektive ukazují na proces s ještě složitější strukturou.

Přistupme konečně ke komentáři výsledků našich čtyř testů náhodnosti autoregresního parametru RCA(1) modelu pro časovou řadu transformovaného indexu PX50. Z tabulky 7.1 je patrné, že především testová hodnota skórové statistiky  $(NQ_n)^2$  a podobně hodnota LBI testu  $\tilde{Z}_n^2$  a pořadového testu  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$  mnohonásobně překračují kritickou hodnotu limitního rozdělení. Hodnota 4.172 u LBI testu  $\tilde{Z}_n^2$  je naopak relativně blízko  $\chi_1^2$ -kvantilu 3.841. Výsledky zřejmě korespondují se závěry naší numerické simulace, kde jsme zjistili, že všechny testy s výjimkou LBI testu  $\tilde{S}_n^2$ , odvozeného pro gaussovský RCA(1) s ARCH(1) chybami, mají tendenci zamítat velký podíl výběrů z modelu s ARCH(1) chybami, ať už platí nulová hypotéza či alternativa. Tak je tomu i zde, neboť jsme předběžnou analýzou časové řady  $\{\Delta \log(PX_t)\}$  zjistili, že její rezidua ukazují na ARCH(1) proces. Všechny čtyři testy zamítají na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  nulovou hypotézu, že se časová řada  $\{\Delta \log(PX_t)\}$  řídí AR(1) procesem, ekvivalentně, že je autoregresní parametr modelu nenáhodný.

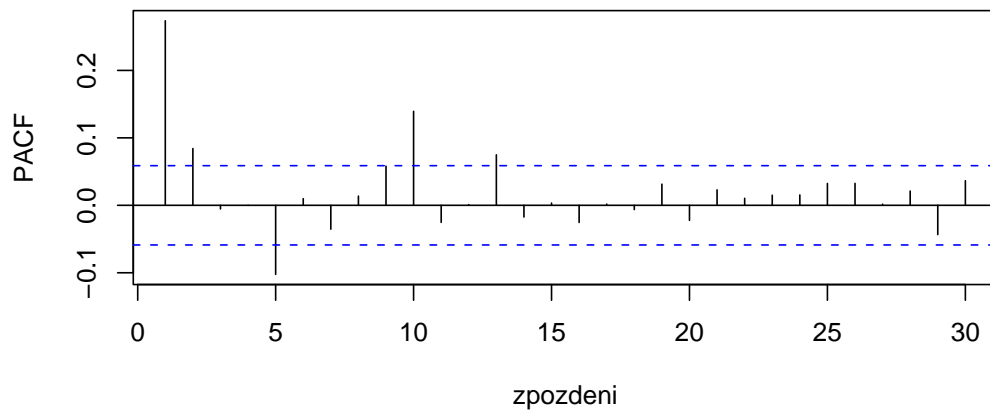


Obrázek 7.1: Časová řada indexu PX50, respektive jeho stacionární transformace  $\Delta \log(PX_t)$

### Odhadnuta autokorelacni funkce

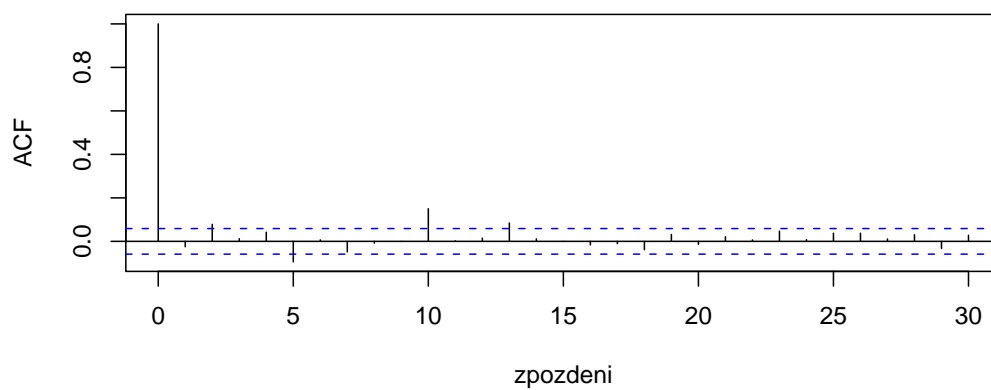


### Odhadnuta parcialni autokorelacni funkce

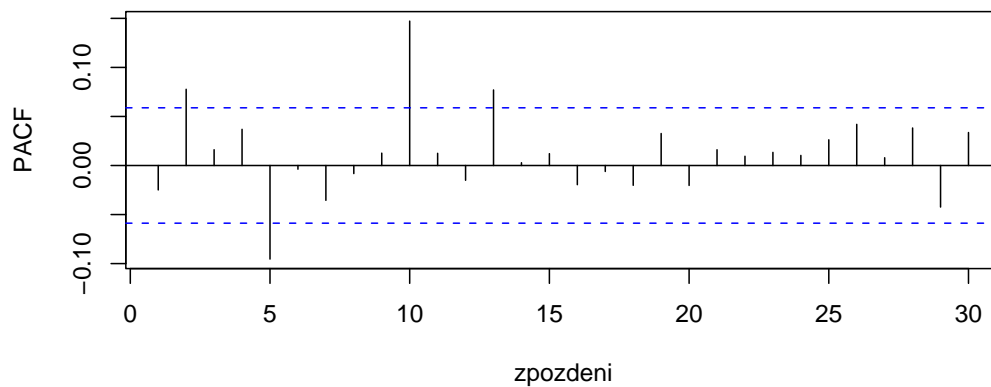


Obrázek 7.2: Odhadnutá autokorelační a parciální autokorelační funkce časové řady  $\{\Delta \log(PX_t)\}$

**Odhadnuta autokorelacni funkce rezidui AR(1) modelu**



**Odhadnuta autokorelacni funkce rezidui AR(1) modelu**



Obrázek 7.3: Odhadnutá autokorelační a parciální autokorelační funkce reziduí AR(1) modelu



# Závěr

Tato práce splnila všechny předem vytyčené cíle. Po definování autoregresního modelu s náhodnými koeficienty řádu 1 a popsání dvou typů odhadů jeho parametrů se nám ve druhé kapitole podařilo především díky využití teorie posloupností martingalových diferencí dokázat, že má testová statistika  $(NQ_n)^2$  skutečně stejné limitní rozdělení ( $\chi^2$ -rozdělení o jednom stupni volnosti) jako skórový test  $\hat{\tau}_n$ , uvedený v Nicholls, Quinn [9]. Ramanathan a Rajarshi přitom bez důkazu, s odkazem na Nichollse a Quinna, uvedli statistiku  $NQ_n$ , ne její druhou mocninu.

Ve třetí kapitole jsme prezentovali třídu pořadových testů náhodnosti autoregresního parametru modelu RCA(1). Přiblížili jsme si, jak byla testová statistika odvozena pomocí teorie lokálně nejsilnějších pořadových testů aplikované na odhadnutá rezidua RCA(1) modelu. Náš vlastní přínos bylo rovněž dokázané lemma **3.3**, které jsme prakticky mnohokrát využili při výpočtu testové statistiky  $\tilde{T}_n^2(\phi, h)$  v numerické studii.

Ve čtvrté kapitole jsme studovali lokálně nejlepší invariantní test odvozený pro RCA(1) model. Čerpali jsme z článku Lee [7], ve kterém se autor zabýval zobecněním RCA(1) modelu v podobě speciálního tvaru nenulové kovariance mezi  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$ . V odvození LBI testu pro tento model jsme však odhalili závažné nedostatky a byli jsme proto nuceni se omezit pouze na prezentaci opraveného korektního odvození testu pro základní RCA(1) model.

Tématem páté kapitoly byl LBI test odvozený pro zobecněný RCA(1) model s ARCH(1) chybami. Tento test popsali Ha, Lee [5]. Jelikož práce pochází od stejného autora Lee - ve spolupráci s Ha - a tito autoři uvedli v článku pro stručnost pouze finální tvar LBI statistiky  $S_n$  bez odvození s odkazem právě na článek Lee [7], ověřili jsme opět sami podrobně správnost testové statistiky.

V šesté kapitole jsme popsali rozsáhlou numerickou studii probraných testů. Srovnávali jsme jejich účinnosti na sedmi různých modelech, přičemž jsme uvažovali velkou množinu kombinací skórové funkce a funkce regresních koeficientů u třídy pořadových testů. Výsledky této studie, stejně jako obecné poznatky z ní získané, jsme shrnuli samostatně v odstavci *Shrnutí poznatků ze simulační studie*.

Nakonec jsme si ověřili fungování testů na reálných datech - na časové řadě denní hodnoty indexu PX50, publikované Burzou cenných papírů Praha. Z předběžné analýzy těchto dat vyplynulo, že můžeme vhodnou stacionární transformací této řady relativně dobře vysvětlit autoregresním modelem řádu 1 s chybami typu ARCH(1). Transformovaná časová řada tedy odpovídala naší teorii a bylo namístě provést test náhodnosti autoregresního parametru. Hodnoty testových statistik všech čtyř testů korespondovali s poznatky ze simulační studie.

# Literatura

- [1] Anděl J. (1976): *Autoregressive series with random parameters*. Math. Operationsforsch. Stat. **7**, 735–741.
- [2] Anděl J. (2002): *Základy matematické statistiky*. Preprint, Praha.
- [3] Breusch T.S., Pagan A.R. (1979): *A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation*. Econometrica **47**, 1287–1294.
- [4] Davidson J. (1994): *Stochastic limit theory. An introduction for econometricians*. Advanced Texts in Econometrics, Oxford, Oxford University Press.
- [5] Ha J., Lee S. (2002): *Coefficient constancy test in AR-ARCH models*. Stat. Probab. Lett. **57(1)**, 65–77.
- [6] Janečková H. (2000): *RCA(1) model with heteroscedasticity*. KPMS Preprint 13.
- [7] Lee S. (1998): *Coefficient constancy test in a random coefficient autoregressive model*. J. Stat. Plann. Inference **74(1)**, 93–101.
- [8] McCabe B.P.M., Tremayne, A.R. (1995): *Testing a time series for difference stationarity*. Ann. Stat. **23(3)**, 1015–1028.
- [9] Nicholls D.F., Quinn B.G. (1982): *Random coefficient autoregressive models: an introduction*. Lecture Notes in Statistics, 11. New York - Heidelberg - Berlin, Springer-Verlag.
- [10] Ramanathan T.V., Rajarshi M.B. (1992): *Rank tests for testing randomness of a regression coefficient in a linear regression model*. Metrika **39(2)**, 113–124.
- [11] Ramanathan T.V., Rajarshi M.B. (1994): *Rank tests for testing the randomness of autoregressive coefficients*. Stat. Probab. Lett. **21(2)**, 115–120.

- [12] Štěpán J. (1987): *Teorie pravděpodobnosti - Matematické základy*. Academia, Praha.

# Příloha

Přílohu tvoří kompaktní disk, který se nachází na vnitřní straně zadní desky diplomové práce, a rozsáhlá tabulková příloha. V následující sekci stručně popíšeme obsah kompaktního disku. Druhou část přílohy tvoří právě kompletní tabulky účinností testů pro všechny v rámci numerické studie uvažované RCA(1) modely.

## I. Obsah přílohy diplomové práce na kompaktním disku

Příložený kompaktní disk dokumentuje numerickou studii ve dvou úrovních. Jsou na něm uvedeny jak naprogramované simulační procedury, tak procedury, které nám ulehčili pozdější prezentaci výsledků v přehledných tabulkách. K jednotlivým souborům se zdrojovým kódem procedur je vždy připojen odpovídající komentář, k čemu daná procedura slouží, často pak také příklad volání takové procedury v programu **R**. Z tohoto důvodu se zde omezíme jen na stručný popis obsahu čtyř adresářů, které na kompaktním disku nalezneme.

### **Adresář *Knihovny***

Jak už bylo v textu několikrát zmíněno, všechny simulace a výpočty byly prováděny statistickým programem **R**, verze 1.9.0 . V některých procedurách používáme knihovny, které nejsou obsaženy v základním balíčku knihoven programu **R**. Tyto knihovny je třeba doinstalovat. V adresáři *Knihovny* jsou uloženy zdrojové kódy knihoven *xtable* a *tseries* a popis, jak je nainstalovat. Neméně důležité je následně tyto knihovny nahrát do paměti. Ve stejné složce jsou instrukce, jak tento úkon provést a které další knihovny je ještě třeba načíst pro fungování všech procedur z kompaktního disku.

## Adresář *Procedury*

Tato složka obsahuje všechny naprogramované modely, simulační procedury a testy, v neposlední řadě také příklad výstupu jedné takové simulační procedury - kompletní výstup ze simulace gaussovského RCA(1) modelu pro všechna uvažovaná nastavení parametrů tohoto modelu.

Soubory procedur mají příponu **.r** a lze je načíst do programu **R** pomocí příkazu *Source code*, který se nachází v horní liště v menu položky *File*. Druhou alternativou načtení kompletně všech procedur obsažených na tomto kompaktním disku představuje načtení celého pracovního prostředí (*workspace*), které jsme uložili do kmenového adresáře disku. V tomto případě stačí v horní liště programu pouze zvolit pod položkou *File* příkaz *Load Workspace* a načíst soubor *diplomka.RData*. V textovém souboru *diplomka.RHistory* jsou uvedeny všechny příkazy, které jsme provedli, abychom toto pracovní prostředí vytvořili. Připomínáme, že i po načtení workspace je třeba stále ještě načíst knihovny potřebné pro fungování procedur (viz odstavec Adresář Knihovny).

## Adresář *RCA-t<sub>4</sub>-model*

Vzhledem k nezadržitelně narůstajícímu rozsahu práce jsme byli nuceni jeden z modelů, který jsme v rámci numerické studie generovali, do textu nezahrnout. Bylo by škoda zpracované výsledky studie účinnosti testů pro tento model nikde neuvádět, a proto jsme se rozhodli tento model přiložit aspoň na kompaktní disk. Jedná se o RCA(1) model s chybami ze Studentova rozdělení  $t_4$ . Popis modelu, tabulky účinností i shrnutí poznatků z této simulace jsou k nahlédnutí v souboru *rca1-t4-chyby.pdf*. Rovněž přikládáme zdrojový kód modelu spolu se simulační procedurou.

## Adresář *Xtable*

Poslední složka dokumentuje tvorbu tabulek prezentujících spočtené účinnosti testů. Využili jsme užitečné knihovny *xtable* programu **R**. Procedura *xtable* obsažená v této knihovně nám značným způsobem ulehčuje zpracování dat z výstupů simulačních procedur. Transformuje je do formátu tabulek programu  $\text{\LaTeX}$  a vypisuje na obrazovku (druhá varianta je uložení do zvoleného souboru). Jedná se o přece jenom jednodušší formát a je třeba tabulky následně upravit do požadovaného hezkého a vhodného tvaru. Uvádíme pro ilustraci konkrétní postup tvorby takové tabulky v souboru *jak-na-tab.txt*.

## II. Tabulková příloha

V příloze uvádíme kompletní výsledky numerické studie. Tabulky jsou za sebou řazeny v pořadí, v jakém bylo o jednotlivých simulovaných modelech v textu pojednáváno. Pro lepší orientaci zde proto výčet uvažovaných modelů opakujeme. V tomto seznamu nefigurují gaussovský RCA(1) model se skokovitě rostoucím rozptylem chyb, respektive s lineárně klesajícím rozptylem chyb, neboť byly všechny tabulky těmto modelům příslušející uvedeny v textu již dříve.

- gaussovský RCA(1) model
- RCA(1) model s rovnoměrně rozděleným autoregresním parametrem  $\beta_t$  a normálně rozděleným  $\epsilon_t$
- gaussovský RCA(1) model s ARCH(1) chybami
- RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými inovacemi  $\xi_t$
- gaussovský RCA(1) model s kovariancí mezi  $\beta_t$  a  $\epsilon_t$

$(NQ_n)^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.028	0.057	0.118	0.285	0.760	0.020	0.065	0.132	0.313	0.753
	0.3	0.027	0.068	0.153	0.325	0.797	0.032	0.062	0.127	0.333	0.795
	0.5	0.033	0.078	0.163	0.433	0.862	0.028	0.102	0.177	0.402	0.898
	0.7	0.037	0.103	0.313	0.633	0.948	0.040	0.110	0.273	0.640	0.957
200	0.1	0.038	0.093	0.220	0.552	0.955	0.035	0.093	0.253	0.568	0.960
	0.3	0.038	0.098	0.287	0.620	0.975	0.042	0.125	0.267	0.625	0.982
	0.5	0.035	0.148	0.338	0.730	0.993	0.040	0.158	0.363	0.693	0.993
	0.7	0.037	0.225	0.550	0.890	1.000	0.033	0.252	0.522	0.878	1.000
300	0.1	0.042	0.133	0.292	0.723	0.992	0.058	0.120	0.348	0.738	0.997
	0.3	0.030	0.113	0.382	0.772	0.997	0.043	0.150	0.382	0.772	0.998
	0.5	0.052	0.215	0.513	0.898	1.000	0.043	0.205	0.475	0.858	1.000
	0.7	0.042	0.315	0.745	0.977	1.000	0.040	0.330	0.707	0.970	1.000
400	0.1	0.045	0.167	0.382	0.837	1.000	0.055	0.160	0.413	0.853	1.000
	0.3	0.033	0.167	0.462	0.893	1.000	0.045	0.192	0.485	0.877	1.000
	0.5	0.047	0.248	0.638	0.963	1.000	0.042	0.242	0.583	0.932	1.000
	0.7	0.045	0.393	0.835	0.995	1.000	0.048	0.405	0.803	0.988	1.000
500	0.1	0.047	0.195	0.478	0.903	1.000	0.035	0.192	0.525	0.900	1.000
	0.3	0.037	0.227	0.538	0.952	1.000	0.060	0.205	0.585	0.933	1.000
	0.5	0.043	0.318	0.710	0.972	1.000	0.060	0.293	0.693	0.982	1.000
	0.7	0.025	0.478	0.888	1.000	1.000	0.048	0.477	0.883	1.000	1.000

Tabulka 8.1: Skórový test  $(NQ_n)^2$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{Z}_n^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.040	0.062	0.138	0.305	0.722	0.030	0.072	0.140	0.310	0.725
	0.3	0.030	0.068	0.160	0.333	0.760	0.035	0.062	0.127	0.338	0.763
	0.5	0.045	0.085	0.175	0.422	0.818	0.032	0.103	0.187	0.402	0.860
	0.7	0.042	0.103	0.297	0.607	0.917	0.045	0.115	0.260	0.617	0.917
200	0.1	0.043	0.113	0.232	0.543	0.937	0.037	0.097	0.262	0.582	0.948
	0.3	0.038	0.110	0.290	0.618	0.970	0.040	0.123	0.272	0.620	0.965
	0.5	0.035	0.155	0.345	0.727	0.990	0.032	0.167	0.353	0.697	0.993
	0.7	0.042	0.227	0.550	0.887	0.995	0.042	0.240	0.513	0.863	0.995
300	0.1	0.045	0.137	0.300	0.723	0.992	0.060	0.125	0.358	0.745	0.997
	0.3	0.030	0.108	0.388	0.782	0.997	0.045	0.168	0.387	0.760	0.998
	0.5	0.052	0.218	0.495	0.892	0.998	0.053	0.205	0.468	0.852	1.000
	0.7	0.043	0.303	0.732	0.977	1.000	0.050	0.328	0.695	0.972	1.000
400	0.1	0.050	0.170	0.392	0.837	1.000	0.052	0.165	0.430	0.850	1.000
	0.3	0.033	0.170	0.470	0.895	1.000	0.050	0.197	0.490	0.877	1.000
	0.5	0.043	0.260	0.637	0.960	1.000	0.048	0.243	0.585	0.930	1.000
	0.7	0.043	0.392	0.830	0.995	1.000	0.057	0.387	0.797	0.988	1.000
500	0.1	0.048	0.197	0.473	0.903	1.000	0.035	0.208	0.528	0.897	1.000
	0.3	0.033	0.223	0.553	0.957	1.000	0.063	0.203	0.592	0.935	1.000
	0.5	0.040	0.325	0.712	0.972	1.000	0.063	0.293	0.702	0.980	1.000
	0.7	0.033	0.475	0.887	1.000	1.000	0.053	0.470	0.870	1.000	1.000

Tabulka 8.2: LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$



$\tilde{S}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.515	0.430	0.397	0.375	0.297	0.578	0.447	0.397	0.350	0.320
	0.3	0.273	0.148	0.163	0.152	0.270	0.282	0.193	0.157	0.198	0.315
	0.5	0.132	0.100	0.135	0.278	0.485	0.127	0.115	0.137	0.232	0.508
	0.7	0.048	0.093	0.245	0.500	0.680	0.058	0.105	0.217	0.517	0.720
200	0.1	0.540	0.363	0.332	0.295	0.260	0.532	0.353	0.298	0.302	0.250
	0.3	0.247	0.120	0.123	0.218	0.358	0.275	0.162	0.125	0.222	0.427
	0.5	0.118	0.087	0.180	0.480	0.753	0.107	0.122	0.198	0.432	0.742
	0.7	0.043	0.170	0.453	0.795	0.902	0.048	0.195	0.433	0.798	0.915
300	0.1	0.505	0.317	0.273	0.253	0.290	0.492	0.318	0.252	0.218	0.243
	0.3	0.262	0.117	0.133	0.293	0.505	0.253	0.147	0.165	0.272	0.567
	0.5	0.117	0.117	0.290	0.633	0.873	0.108	0.133	0.262	0.615	0.888
	0.7	0.047	0.270	0.625	0.925	0.945	0.057	0.263	0.618	0.927	0.965
400	0.1	0.480	0.263	0.222	0.248	0.248	0.468	0.262	0.202	0.233	0.217
	0.3	0.245	0.115	0.172	0.365	0.623	0.260	0.147	0.157	0.335	0.657
	0.5	0.103	0.163	0.358	0.762	0.922	0.133	0.132	0.343	0.738	0.950
	0.7	0.045	0.320	0.752	0.977	0.958	0.052	0.320	0.708	0.980	0.973
500	0.1	0.512	0.235	0.190	0.237	0.280	0.457	0.222	0.167	0.192	0.248
	0.3	0.253	0.105	0.195	0.415	0.722	0.255	0.132	0.185	0.405	0.740
	0.5	0.103	0.178	0.398	0.833	0.962	0.140	0.163	0.408	0.842	0.978
	0.7	0.038	0.395	0.825	0.993	0.972	0.053	0.390	0.783	0.993	0.975

Tabulka 8.3: LBI test  $\tilde{S}_n^2$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{T}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.043	0.042	0.075	0.188	0.690	0.045	0.053	0.060	0.168	0.667
	0.3	0.060	0.035	0.082	0.213	0.733	0.048	0.048	0.073	0.207	0.705
	0.5	0.055	0.062	0.088	0.313	0.820	0.035	0.072	0.090	0.317	0.827
	0.7	0.050	0.090	0.218	0.525	0.922	0.052	0.082	0.195	0.548	0.923
200	0.1	0.055	0.083	0.123	0.417	0.920	0.055	0.063	0.132	0.398	0.927
	0.3	0.045	0.070	0.162	0.468	0.957	0.045	0.090	0.163	0.460	0.940
	0.5	0.043	0.097	0.233	0.597	0.993	0.037	0.093	0.195	0.580	0.977
	0.7	0.040	0.150	0.398	0.803	0.992	0.043	0.163	0.367	0.812	0.998
300	0.1	0.045	0.075	0.217	0.537	0.987	0.052	0.082	0.197	0.575	0.983
	0.3	0.037	0.128	0.248	0.658	0.993	0.042	0.082	0.238	0.635	0.995
	0.5	0.043	0.115	0.340	0.773	1.000	0.042	0.155	0.325	0.772	1.000
	0.7	0.045	0.232	0.608	0.942	1.000	0.023	0.197	0.570	0.953	1.000
400	0.1	0.055	0.102	0.213	0.697	0.997	0.068	0.112	0.253	0.708	0.998
	0.3	0.063	0.085	0.307	0.755	1.000	0.040	0.128	0.328	0.762	1.000
	0.5	0.045	0.162	0.432	0.875	1.000	0.047	0.143	0.413	0.877	1.000
	0.7	0.028	0.292	0.692	0.985	1.000	0.038	0.255	0.688	0.983	1.000
500	0.1	0.050	0.112	0.302	0.797	1.000	0.065	0.125	0.343	0.803	1.000
	0.3	0.057	0.112	0.385	0.865	1.000	0.057	0.157	0.393	0.848	1.000
	0.5	0.045	0.195	0.523	0.938	1.000	0.048	0.167	0.502	0.937	1.000
	0.7	0.033	0.343	0.787	0.997	1.000	0.047	0.340	0.775	0.993	1.000

Tabulka 8.4: Pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$(NQ_n)^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.043	0.062	0.133	0.315	0.838	0.037	0.042	0.092	0.275	0.838
	0.3	0.032	0.067	0.142	0.383	0.878	0.035	0.058	0.138	0.367	0.870
	0.5	0.035	0.092	0.183	0.447	0.903	0.030	0.070	0.205	0.440	0.910
	0.7	0.030	0.127	0.327	0.683	0.970	0.040	0.140	0.317	0.672	0.967
200	0.1	0.048	0.110	0.247	0.595	0.988	0.055	0.077	0.237	0.565	0.980
	0.3	0.050	0.113	0.273	0.648	0.993	0.037	0.108	0.270	0.618	0.990
	0.5	0.025	0.143	0.337	0.782	0.997	0.038	0.118	0.352	0.767	0.998
	0.7	0.027	0.207	0.582	0.928	1.000	0.040	0.268	0.562	0.935	1.000
300	0.1	0.040	0.143	0.357	0.762	0.998	0.052	0.107	0.317	0.733	1.000
	0.3	0.035	0.155	0.397	0.815	1.000	0.043	0.155	0.413	0.803	0.998
	0.5	0.030	0.197	0.473	0.908	1.000	0.038	0.165	0.493	0.902	1.000
	0.7	0.030	0.318	0.743	0.988	1.000	0.057	0.335	0.740	0.987	1.000
400	0.1	0.037	0.157	0.425	0.888	1.000	0.033	0.148	0.418	0.862	1.000
	0.3	0.037	0.195	0.478	0.928	1.000	0.047	0.175	0.517	0.888	1.000
	0.5	0.040	0.227	0.575	0.975	1.000	0.045	0.215	0.612	0.955	1.000
	0.7	0.042	0.400	0.845	0.998	1.000	0.048	0.428	0.837	0.997	1.000
500	0.1	0.033	0.180	0.498	0.930	1.000	0.037	0.177	0.503	0.922	1.000
	0.3	0.033	0.235	0.547	0.958	1.000	0.045	0.198	0.580	0.943	1.000
	0.5	0.035	0.270	0.678	0.985	1.000	0.042	0.260	0.695	0.982	1.000
	0.7	0.047	0.513	0.927	1.000	1.000	0.050	0.512	0.920	1.000	1.000

Tabulka 8.5: Skórový test  $(NQ_n)^2$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{R}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{Z}_n^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.053	0.085	0.153	0.355	0.852	0.045	0.063	0.137	0.342	0.862
	0.3	0.050	0.088	0.168	0.410	0.895	0.053	0.085	0.173	0.420	0.883
	0.5	0.037	0.117	0.230	0.495	0.910	0.028	0.078	0.220	0.482	0.928
	0.7	0.040	0.150	0.353	0.705	0.967	0.037	0.175	0.360	0.697	0.970
200	0.1	0.055	0.120	0.273	0.618	0.992	0.057	0.093	0.265	0.588	0.980
	0.3	0.050	0.143	0.302	0.680	0.995	0.037	0.125	0.302	0.642	0.992
	0.5	0.033	0.155	0.357	0.805	0.997	0.040	0.133	0.388	0.793	0.998
	0.7	0.030	0.220	0.608	0.938	1.000	0.043	0.292	0.595	0.938	1.000
300	0.1	0.042	0.160	0.380	0.787	1.000	0.048	0.125	0.358	0.753	1.000
	0.3	0.038	0.170	0.425	0.825	1.000	0.047	0.165	0.437	0.828	0.998
	0.5	0.028	0.213	0.492	0.913	1.000	0.047	0.190	0.520	0.907	1.000
	0.7	0.028	0.338	0.755	0.990	1.000	0.060	0.352	0.760	0.985	1.000
400	0.1	0.033	0.167	0.447	0.897	1.000	0.040	0.162	0.443	0.873	1.000
	0.3	0.040	0.208	0.510	0.933	1.000	0.042	0.193	0.537	0.907	1.000
	0.5	0.038	0.245	0.592	0.972	1.000	0.050	0.240	0.632	0.962	1.000
	0.7	0.037	0.417	0.853	0.998	1.000	0.053	0.438	0.865	0.998	1.000
500	0.1	0.037	0.192	0.522	0.943	1.000	0.040	0.190	0.528	0.930	1.000
	0.3	0.030	0.245	0.563	0.962	1.000	0.047	0.213	0.602	0.947	1.000
	0.5	0.038	0.290	0.692	0.988	1.000	0.043	0.283	0.715	0.985	1.000
	0.7	0.043	0.515	0.927	1.000	1.000	0.050	0.530	0.928	1.000	1.000

Tabulka 8.6: LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{R}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{S}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.523	0.480	0.403	0.353	0.317	0.567	0.438	0.375	0.343	0.317
	0.3	0.277	0.190	0.155	0.180	0.312	0.263	0.183	0.160	0.157	0.353
	0.5	0.098	0.098	0.150	0.252	0.540	0.102	0.082	0.135	0.233	0.533
	0.7	0.050	0.108	0.270	0.545	0.793	0.053	0.118	0.225	0.533	0.788
200	0.1	0.502	0.368	0.338	0.315	0.255	0.527	0.365	0.323	0.300	0.307
	0.3	0.248	0.123	0.125	0.237	0.453	0.250	0.163	0.130	0.203	0.480
	0.5	0.103	0.127	0.212	0.490	0.792	0.092	0.103	0.195	0.472	0.805
	0.7	0.043	0.173	0.477	0.827	0.935	0.063	0.182	0.453	0.830	0.938
300	0.1	0.497	0.290	0.267	0.265	0.267	0.483	0.332	0.223	0.252	0.255
	0.3	0.252	0.123	0.142	0.310	0.612	0.217	0.138	0.135	0.295	0.640
	0.5	0.090	0.120	0.278	0.670	0.902	0.103	0.117	0.267	0.625	0.925
	0.7	0.037	0.222	0.633	0.950	0.975	0.068	0.243	0.640	0.955	0.965
400	0.1	0.475	0.233	0.195	0.240	0.258	0.452	0.255	0.213	0.205	0.248
	0.3	0.225	0.120	0.165	0.358	0.735	0.222	0.113	0.152	0.368	0.748
	0.5	0.102	0.135	0.327	0.768	0.973	0.123	0.127	0.353	0.757	0.983
	0.7	0.052	0.293	0.747	0.990	0.975	0.062	0.333	0.737	0.990	0.978
500	0.1	0.482	0.210	0.180	0.207	0.280	0.463	0.225	0.167	0.200	0.265
	0.3	0.232	0.105	0.182	0.430	0.812	0.235	0.115	0.180	0.443	0.825
	0.5	0.092	0.153	0.408	0.858	0.988	0.100	0.148	0.430	0.833	0.993
	0.7	0.050	0.383	0.848	1.000	0.987	0.078	0.392	0.847	0.995	0.992

Tabulka 8.7: LBI test  $\tilde{S}_n^2$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{R}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{T}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.063	0.072	0.108	0.287	0.848	0.048	0.047	0.100	0.285	0.868
	0.3	0.047	0.060	0.123	0.353	0.902	0.040	0.052	0.125	0.367	0.882
	0.5	0.052	0.085	0.168	0.458	0.927	0.035	0.063	0.168	0.430	0.948
	0.7	0.047	0.110	0.333	0.707	0.988	0.057	0.145	0.303	0.685	0.975
200	0.1	0.053	0.082	0.185	0.548	0.992	0.050	0.072	0.197	0.538	0.985
	0.3	0.045	0.078	0.245	0.640	0.993	0.053	0.095	0.242	0.610	0.993
	0.5	0.048	0.128	0.313	0.777	0.998	0.055	0.125	0.348	0.768	0.998
	0.7	0.038	0.192	0.568	0.943	1.000	0.057	0.240	0.563	0.942	1.000
300	0.1	0.043	0.082	0.290	0.777	1.000	0.052	0.112	0.287	0.740	1.000
	0.3	0.047	0.135	0.338	0.783	1.000	0.030	0.147	0.318	0.798	1.000
	0.5	0.065	0.192	0.458	0.898	1.000	0.043	0.162	0.472	0.903	1.000
	0.7	0.050	0.322	0.732	0.993	1.000	0.067	0.293	0.738	0.982	1.000
400	0.1	0.043	0.123	0.338	0.873	1.000	0.055	0.112	0.357	0.852	1.000
	0.3	0.037	0.152	0.427	0.908	1.000	0.043	0.143	0.463	0.885	1.000
	0.5	0.048	0.180	0.550	0.970	1.000	0.053	0.203	0.557	0.960	1.000
	0.7	0.032	0.377	0.838	0.997	1.000	0.052	0.375	0.838	0.998	1.000
500	0.1	0.038	0.152	0.417	0.922	1.000	0.053	0.133	0.443	0.920	1.000
	0.3	0.028	0.175	0.530	0.958	1.000	0.040	0.170	0.528	0.943	1.000
	0.5	0.045	0.217	0.647	0.983	1.000	0.043	0.218	0.685	0.987	1.000
	0.7	0.045	0.460	0.908	1.000	1.000	0.058	0.457	0.903	1.000	1.000

Tabulka 8.8: Pořadový test  $\tilde{T}_n^2(x^4, \sqrt{x})$  pro  $\beta_t \sim \mathcal{R}(\beta, \sigma_\beta^2)$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$(NQ_n)^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.117	0.180	0.240	0.398	0.807	0.300	0.357	0.397	0.542	0.828
	0.3	0.080	0.205	0.275	0.457	0.808	0.247	0.333	0.357	0.550	0.842
	0.5	0.083	0.165	0.237	0.490	0.892	0.172	0.248	0.357	0.635	0.905
	0.7	0.037	0.182	0.398	0.683	0.947	0.097	0.275	0.452	0.715	0.952
200	0.1	0.243	0.365	0.490	0.732	0.978	0.553	0.623	0.717	0.843	0.990
	0.3	0.187	0.365	0.510	0.768	0.982	0.478	0.598	0.665	0.873	0.995
	0.5	0.140	0.327	0.493	0.808	0.997	0.385	0.530	0.660	0.867	0.998
	0.7	0.092	0.362	0.642	0.917	0.998	0.208	0.497	0.748	0.942	1.000
300	0.1	0.337	0.518	0.670	0.863	0.998	0.743	0.813	0.892	0.955	1.000
	0.3	0.257	0.492	0.672	0.893	0.998	0.623	0.778	0.850	0.963	1.000
	0.5	0.230	0.462	0.683	0.923	0.998	0.550	0.733	0.862	0.967	1.000
	0.7	0.133	0.500	0.823	0.992	1.000	0.338	0.657	0.885	0.990	1.000
400	0.1	0.447	0.655	0.780	0.935	1.000	0.853	0.905	0.962	0.987	1.000
	0.3	0.358	0.612	0.765	0.965	1.000	0.772	0.868	0.917	0.990	1.000
	0.5	0.282	0.575	0.822	0.985	1.000	0.673	0.825	0.927	0.993	1.000
	0.7	0.162	0.618	0.903	1.000	1.000	0.417	0.783	0.945	0.998	1.000
500	0.1	0.523	0.743	0.857	0.968	1.000	0.918	0.958	0.983	0.997	1.000
	0.3	0.415	0.672	0.875	0.988	1.000	0.855	0.930	0.978	1.000	1.000
	0.5	0.347	0.685	0.882	0.995	1.000	0.740	0.888	0.973	1.000	1.000
	0.7	0.177	0.708	0.962	1.000	1.000	0.488	0.868	0.985	1.000	1.000
$(NQ_n)^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.430	0.512	0.572	0.635	0.842	0.615	0.680	0.665	0.753	0.883
	0.3	0.422	0.442	0.515	0.627	0.855	0.555	0.592	0.667	0.708	0.880
	0.5	0.322	0.432	0.515	0.685	0.878	0.412	0.490	0.558	0.675	0.905
	0.7	0.203	0.365	0.487	0.718	0.955	0.323	0.423	0.580	0.800	0.965
200	0.1	0.763	0.817	0.863	0.920	0.993	0.907	0.947	0.925	0.963	0.990
	0.3	0.752	0.758	0.843	0.912	0.997	0.883	0.898	0.925	0.943	0.992
	0.5	0.617	0.720	0.797	0.930	0.995	0.742	0.847	0.870	0.938	0.998
	0.7	0.395	0.635	0.803	0.958	0.998	0.555	0.743	0.862	0.987	1.000
300	0.1	0.925	0.940	0.965	0.987	0.998	0.970	0.997	0.985	0.998	1.000
	0.3	0.908	0.902	0.940	0.978	1.000	0.950	0.965	0.980	0.992	1.000
	0.5	0.773	0.870	0.943	0.985	1.000	0.885	0.957	0.970	0.988	1.000
	0.7	0.560	0.798	0.937	0.993	1.000	0.738	0.883	0.970	0.997	1.000
400	0.1	0.958	0.985	0.993	0.998	1.000	0.998	1.000	0.997	1.000	1.000
	0.3	0.957	0.963	0.980	0.993	1.000	0.988	0.993	0.993	1.000	1.000
	0.5	0.873	0.940	0.978	0.997	1.000	0.952	0.985	0.995	1.000	1.000
	0.7	0.705	0.893	0.982	1.000	1.000	0.842	0.962	0.988	0.998	1.000
500	0.1	0.985	0.995	0.998	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.3	0.980	0.985	0.992	1.000	1.000	0.997	0.997	1.000	1.000	1.000
	0.5	0.938	0.968	0.988	1.000	1.000	0.983	0.995	1.000	1.000	1.000
	0.7	0.797	0.955	0.997	1.000	1.000	0.900	0.985	1.000	0.998	1.000

Tabulka 8.9: Skórový test  $(NQ_n)^2$  pro gaussovský RCA(1)-ARCH(1) model

$\tilde{Z}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.135	0.192	0.262	0.390	0.767	0.297	0.357	0.405	0.540	0.787
	0.3	0.083	0.218	0.290	0.450	0.783	0.250	0.340	0.380	0.550	0.815
	0.5	0.085	0.175	0.238	0.472	0.842	0.173	0.255	0.340	0.597	0.857
	0.7	0.033	0.182	0.378	0.653	0.900	0.095	0.267	0.432	0.672	0.902
200	0.1	0.253	0.375	0.495	0.720	0.963	0.563	0.615	0.710	0.828	0.983
	0.3	0.192	0.370	0.503	0.773	0.973	0.480	0.598	0.665	0.860	0.983
	0.5	0.150	0.330	0.500	0.785	0.987	0.368	0.518	0.650	0.852	0.993
	0.7	0.087	0.355	0.640	0.905	0.998	0.193	0.477	0.727	0.940	0.995
300	0.1	0.337	0.518	0.673	0.863	0.997	0.747	0.815	0.873	0.955	1.000
	0.3	0.260	0.493	0.675	0.893	0.998	0.617	0.778	0.853	0.953	1.000
	0.5	0.233	0.470	0.687	0.918	0.998	0.530	0.718	0.862	0.957	1.000
	0.7	0.122	0.488	0.812	0.992	1.000	0.310	0.640	0.873	0.987	0.998
400	0.1	0.445	0.658	0.775	0.930	1.000	0.862	0.905	0.957	0.987	1.000
	0.3	0.353	0.618	0.768	0.963	1.000	0.775	0.873	0.923	0.990	1.000
	0.5	0.283	0.572	0.807	0.982	1.000	0.665	0.805	0.918	0.992	1.000
	0.7	0.158	0.615	0.905	1.000	1.000	0.390	0.760	0.937	0.998	1.000
500	0.1	0.530	0.747	0.862	0.967	1.000	0.922	0.957	0.985	0.997	1.000
	0.3	0.412	0.675	0.873	0.990	1.000	0.845	0.933	0.977	1.000	1.000
	0.5	0.350	0.690	0.872	0.995	1.000	0.727	0.880	0.963	1.000	1.000
	0.7	0.173	0.705	0.952	1.000	1.000	0.463	0.860	0.980	1.000	1.000
$\tilde{Z}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.458	0.520	0.550	0.620	0.798	0.587	0.643	0.630	0.720	0.815
	0.3	0.398	0.420	0.477	0.612	0.812	0.523	0.555	0.630	0.652	0.845
	0.5	0.305	0.420	0.478	0.640	0.847	0.387	0.463	0.518	0.620	0.852
	0.7	0.190	0.328	0.462	0.678	0.917	0.273	0.373	0.527	0.748	0.912
200	0.1	0.775	0.810	0.847	0.902	0.982	0.912	0.930	0.907	0.947	0.978
	0.3	0.750	0.747	0.820	0.893	0.992	0.870	0.892	0.912	0.915	0.983
	0.5	0.590	0.697	0.775	0.912	0.990	0.697	0.817	0.820	0.915	0.990
	0.7	0.370	0.578	0.762	0.938	0.997	0.505	0.688	0.825	0.965	0.990
300	0.1	0.920	0.933	0.958	0.983	0.997	0.973	0.997	0.983	0.995	0.995
	0.3	0.898	0.903	0.935	0.972	1.000	0.948	0.963	0.972	0.983	0.998
	0.5	0.757	0.843	0.928	0.983	1.000	0.872	0.935	0.957	0.983	0.998
	0.7	0.537	0.768	0.923	0.993	1.000	0.668	0.850	0.952	0.995	0.995
400	0.1	0.958	0.980	0.990	0.997	1.000	0.998	1.000	0.997	1.000	1.000
	0.3	0.957	0.957	0.978	0.993	1.000	0.985	0.993	0.993	0.998	1.000
	0.5	0.863	0.935	0.975	0.997	1.000	0.938	0.978	0.992	0.998	0.998
	0.7	0.670	0.870	0.978	0.998	1.000	0.793	0.940	0.980	0.998	0.997
500	0.1	0.983	0.995	0.997	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.3	0.980	0.985	0.988	1.000	1.000	0.995	0.997	0.998	1.000	1.000
	0.5	0.932	0.953	0.987	1.000	1.000	0.977	0.993	0.997	1.000	0.998
	0.7	0.750	0.940	0.997	1.000	1.000	0.883	0.975	1.000	0.998	0.998

Tabulka 8.10: LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  pro gaussovský RCA(1)-ARCH(1) model

$\tilde{S}_n^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.408	0.388	0.370	0.367	0.295	0.365	0.358	0.362	0.318	0.255
	0.3	0.127	0.122	0.122	0.145	0.263	0.073	0.097	0.122	0.157	0.270
	0.5	0.077	0.113	0.127	0.245	0.452	0.047	0.078	0.107	0.253	0.473
	0.7	0.030	0.108	0.275	0.497	0.718	0.052	0.115	0.255	0.510	0.678
200	0.1	0.318	0.273	0.268	0.318	0.273	0.242	0.265	0.287	0.243	0.238
	0.3	0.077	0.067	0.112	0.222	0.390	0.058	0.070	0.117	0.202	0.375
	0.5	0.053	0.117	0.188	0.437	0.703	0.048	0.093	0.152	0.408	0.708
	0.7	0.033	0.195	0.453	0.778	0.908	0.045	0.207	0.440	0.765	0.887
300	0.1	0.220	0.228	0.220	0.253	0.243	0.192	0.222	0.217	0.228	0.223
	0.3	0.083	0.072	0.107	0.277	0.510	0.053	0.080	0.120	0.270	0.478
	0.5	0.037	0.132	0.252	0.572	0.852	0.047	0.120	0.218	0.555	0.812
	0.7	0.042	0.255	0.595	0.920	0.952	0.062	0.258	0.613	0.902	0.955
400	0.1	0.177	0.198	0.177	0.225	0.260	0.168	0.178	0.197	0.195	0.217
	0.3	0.068	0.070	0.130	0.335	0.597	0.035	0.090	0.133	0.320	0.583
	0.5	0.040	0.137	0.335	0.693	0.920	0.043	0.142	0.298	0.657	0.898
	0.7	0.040	0.317	0.735	0.968	0.977	0.050	0.320	0.713	0.960	0.972
500	0.1	0.138	0.152	0.150	0.198	0.265	0.118	0.150	0.167	0.190	0.203
	0.3	0.070	0.075	0.137	0.400	0.715	0.040	0.080	0.150	0.360	0.673
	0.5	0.030	0.160	0.382	0.798	0.950	0.062	0.138	0.348	0.750	0.933
	0.7	0.035	0.382	0.812	0.990	0.987	0.048	0.388	0.775	0.988	0.978
$\tilde{S}_n^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.283	0.313	0.280	0.263	0.265	0.288	0.308	0.302	0.262	0.270
	0.3	0.053	0.105	0.092	0.133	0.275	0.073	0.098	0.122	0.175	0.258
	0.5	0.053	0.078	0.117	0.235	0.475	0.037	0.083	0.138	0.257	0.428
	0.7	0.035	0.138	0.262	0.473	0.657	0.047	0.150	0.300	0.468	0.648
200	0.1	0.233	0.235	0.223	0.235	0.225	0.197	0.227	0.250	0.228	0.205
	0.3	0.037	0.083	0.093	0.190	0.358	0.058	0.075	0.113	0.177	0.353
	0.5	0.043	0.100	0.208	0.415	0.708	0.055	0.128	0.217	0.412	0.665
	0.7	0.035	0.228	0.480	0.772	0.873	0.035	0.243	0.458	0.728	0.873
300	0.1	0.177	0.173	0.207	0.243	0.253	0.168	0.183	0.213	0.208	0.197
	0.3	0.043	0.090	0.123	0.245	0.480	0.047	0.070	0.133	0.260	0.430
	0.5	0.040	0.117	0.257	0.547	0.800	0.048	0.135	0.292	0.542	0.790
	0.7	0.038	0.297	0.642	0.890	0.947	0.032	0.318	0.585	0.853	0.933
400	0.1	0.160	0.147	0.142	0.200	0.238	0.160	0.143	0.202	0.193	0.180
	0.3	0.047	0.072	0.108	0.263	0.562	0.053	0.083	0.155	0.297	0.508
	0.5	0.055	0.140	0.325	0.648	0.873	0.060	0.177	0.350	0.655	0.868
	0.7	0.047	0.338	0.705	0.945	0.965	0.037	0.387	0.703	0.937	0.943
500	0.1	0.128	0.135	0.140	0.205	0.213	0.110	0.135	0.165	0.193	0.178
	0.3	0.047	0.088	0.140	0.305	0.668	0.043	0.098	0.153	0.348	0.620
	0.5	0.038	0.152	0.385	0.732	0.935	0.053	0.203	0.400	0.740	0.902
	0.7	0.047	0.420	0.793	0.973	0.968	0.050	0.430	0.758	0.962	0.958

Tabulka 8.11: LBI test  $\tilde{S}_n^2$  pro gaussovský RCA(1)-ARCH(1) model

$\tilde{T}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.065	0.087	0.147	0.297	0.715	0.187	0.247	0.287	0.407	0.782
	0.3	0.060	0.130	0.180	0.317	0.745	0.153	0.220	0.248	0.417	0.800
	0.5	0.055	0.088	0.152	0.392	0.832	0.097	0.182	0.255	0.498	0.853
	0.7	0.038	0.133	0.295	0.573	0.938	0.067	0.175	0.337	0.617	0.913
200	0.1	0.135	0.237	0.342	0.607	0.948	0.388	0.475	0.577	0.737	0.970
	0.3	0.108	0.205	0.353	0.632	0.970	0.325	0.447	0.515	0.778	0.987
	0.5	0.093	0.208	0.362	0.712	0.993	0.227	0.407	0.537	0.817	0.990
	0.7	0.068	0.258	0.517	0.865	1.000	0.133	0.365	0.625	0.907	0.997
300	0.1	0.170	0.310	0.528	0.790	0.998	0.595	0.683	0.763	0.890	0.997
	0.3	0.168	0.293	0.483	0.820	0.995	0.482	0.618	0.743	0.900	0.998
	0.5	0.123	0.298	0.545	0.848	1.000	0.338	0.532	0.723	0.932	1.000
	0.7	0.070	0.395	0.683	0.955	1.000	0.212	0.530	0.815	0.980	1.000
400	0.1	0.283	0.432	0.610	0.872	1.000	0.695	0.798	0.877	0.947	1.000
	0.3	0.205	0.390	0.623	0.913	1.000	0.597	0.745	0.865	0.965	1.000
	0.5	0.175	0.415	0.690	0.953	1.000	0.502	0.658	0.847	0.970	1.000
	0.7	0.103	0.470	0.808	0.993	1.000	0.245	0.615	0.910	0.992	1.000
500	0.1	0.350	0.538	0.710	0.938	1.000	0.807	0.905	0.943	0.988	1.000
	0.3	0.258	0.493	0.715	0.953	1.000	0.712	0.848	0.927	0.987	1.000
	0.5	0.223	0.495	0.765	0.988	1.000	0.552	0.782	0.923	0.997	1.000
	0.7	0.115	0.542	0.887	1.000	1.000	0.330	0.730	0.963	1.000	1.000
$\tilde{T}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.318	0.358	0.415	0.523	0.793	0.475	0.572	0.550	0.637	0.810
	0.3	0.315	0.305	0.363	0.520	0.832	0.432	0.455	0.542	0.628	0.858
	0.5	0.225	0.298	0.397	0.582	0.838	0.290	0.393	0.460	0.593	0.892
	0.7	0.140	0.232	0.375	0.665	0.933	0.198	0.310	0.473	0.713	0.950
200	0.1	0.635	0.702	0.747	0.830	0.985	0.838	0.883	0.868	0.928	0.983
	0.3	0.597	0.635	0.720	0.847	0.993	0.770	0.830	0.842	0.903	0.990
	0.5	0.475	0.578	0.688	0.878	0.997	0.603	0.717	0.800	0.893	0.997
	0.7	0.278	0.485	0.722	0.915	0.998	0.390	0.607	0.770	0.957	0.993
300	0.1	0.832	0.862	0.917	0.962	1.000	0.955	0.965	0.977	0.987	1.000
	0.3	0.785	0.822	0.880	0.953	1.000	0.918	0.928	0.962	0.978	1.000
	0.5	0.645	0.742	0.848	0.968	1.000	0.798	0.917	0.945	0.982	1.000
	0.7	0.348	0.680	0.860	0.982	1.000	0.517	0.790	0.935	0.995	1.000
400	0.1	0.908	0.953	0.970	0.988	1.000	0.993	0.997	0.993	1.000	1.000
	0.3	0.898	0.905	0.943	0.985	1.000	0.970	0.978	0.988	1.000	1.000
	0.5	0.775	0.862	0.942	0.998	1.000	0.890	0.960	0.983	0.995	1.000
	0.7	0.505	0.800	0.952	0.998	1.000	0.688	0.887	0.982	0.998	1.000
500	0.1	0.963	0.978	0.995	0.995	1.000	0.997	1.000	0.998	1.000	1.000
	0.3	0.935	0.957	0.977	0.998	1.000	0.990	0.997	0.998	1.000	1.000
	0.5	0.850	0.913	0.968	0.998	1.000	0.945	0.985	0.997	1.000	1.000
	0.7	0.593	0.887	0.985	1.000	1.000	0.755	0.952	0.992	0.998	1.000

Tabulka 8.12: Pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\Phi^{-1}(x), \sqrt{x})$  pro gaussovský RCA(1)-ARCH(1) model

$(NQ_n)^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.298	0.367	0.422	0.480	0.790	0.278	0.353	0.495	0.582	0.843
	0.3	0.287	0.325	0.342	0.503	0.847	0.253	0.355	0.430	0.610	0.833
	0.5	0.227	0.342	0.355	0.560	0.898	0.212	0.338	0.402	0.585	0.877
	0.7	0.210	0.357	0.455	0.702	0.950	0.210	0.337	0.497	0.747	0.952
200	0.1	0.480	0.637	0.715	0.767	0.957	0.503	0.598	0.728	0.825	0.982
	0.3	0.483	0.593	0.590	0.808	0.983	0.457	0.608	0.718	0.845	0.980
	0.5	0.432	0.590	0.593	0.837	0.993	0.437	0.578	0.672	0.872	0.990
	0.7	0.375	0.600	0.715	0.928	1.000	0.365	0.595	0.790	0.938	1.000
300	0.1	0.672	0.775	0.832	0.893	0.993	0.647	0.750	0.848	0.938	0.995
	0.3	0.632	0.722	0.717	0.910	0.995	0.583	0.755	0.825	0.935	1.000
	0.5	0.575	0.747	0.752	0.938	0.995	0.585	0.733	0.837	0.957	1.000
	0.7	0.477	0.735	0.842	0.982	1.000	0.493	0.743	0.905	0.995	1.000
400	0.1	0.773	0.870	0.915	0.937	0.997	0.763	0.828	0.932	0.972	0.997
	0.3	0.712	0.833	0.798	0.953	1.000	0.697	0.832	0.898	0.977	1.000
	0.5	0.675	0.848	0.860	0.970	0.995	0.683	0.818	0.907	0.972	1.000
	0.7	0.587	0.828	0.927	0.995	1.000	0.580	0.833	0.958	1.000	1.000
500	0.1	0.837	0.905	0.940	0.972	0.997	0.835	0.885	0.967	0.985	0.998
	0.3	0.790	0.890	0.868	0.978	1.000	0.783	0.910	0.935	0.988	1.000
	0.5	0.773	0.895	0.913	0.992	1.000	0.765	0.888	0.960	0.987	0.998
	0.7	0.650	0.882	0.970	0.997	1.000	0.647	0.900	0.978	1.000	1.000
$(NQ_n)^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.427	0.463	0.545	0.628	0.863	0.482	0.553	0.587	0.710	0.880
	0.3	0.395	0.453	0.508	0.608	0.873	0.480	0.543	0.618	0.665	0.897
	0.5	0.317	0.422	0.532	0.677	0.897	0.425	0.503	0.578	0.707	0.912
	0.7	0.282	0.445	0.540	0.752	0.967	0.375	0.467	0.625	0.797	0.958
200	0.1	0.672	0.705	0.780	0.872	0.987	0.762	0.808	0.862	0.925	0.980
	0.3	0.647	0.708	0.770	0.895	0.980	0.752	0.805	0.845	0.892	0.983
	0.5	0.595	0.688	0.798	0.912	0.993	0.720	0.805	0.843	0.945	0.997
	0.7	0.480	0.688	0.827	0.942	1.000	0.588	0.740	0.860	0.975	1.000
300	0.1	0.815	0.845	0.907	0.948	1.000	0.880	0.922	0.933	0.978	0.998
	0.3	0.752	0.862	0.900	0.958	0.998	0.872	0.922	0.965	0.963	1.000
	0.5	0.740	0.828	0.923	0.985	1.000	0.857	0.918	0.937	0.987	1.000
	0.7	0.617	0.837	0.935	0.985	1.000	0.732	0.888	0.963	0.997	1.000
400	0.1	0.885	0.915	0.958	0.980	1.000	0.940	0.968	0.973	0.992	1.000
	0.3	0.830	0.943	0.953	0.990	0.998	0.940	0.962	0.988	0.992	1.000
	0.5	0.848	0.893	0.962	0.993	1.000	0.923	0.963	0.978	0.998	1.000
	0.7	0.743	0.903	0.972	0.998	1.000	0.837	0.950	0.983	1.000	1.000
500	0.1	0.923	0.963	0.977	0.992	1.000	0.977	0.988	0.983	0.995	1.000
	0.3	0.915	0.962	0.972	0.997	1.000	0.982	0.982	0.992	0.998	1.000
	0.5	0.903	0.938	0.980	0.997	1.000	0.958	0.982	0.998	1.000	1.000
	0.7	0.778	0.957	0.988	0.998	1.000	0.898	0.977	0.993	1.000	1.000

Tabulka 8.13: Skórový test  $(NQ_n)^2$  pro RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$  inovacemi



$\tilde{Z}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.212	0.242	0.308	0.403	0.728	0.178	0.252	0.382	0.468	0.773
	0.3	0.178	0.233	0.240	0.392	0.763	0.160	0.255	0.317	0.507	0.765
	0.5	0.122	0.205	0.252	0.462	0.833	0.127	0.212	0.282	0.485	0.813
	0.7	0.118	0.248	0.337	0.605	0.905	0.118	0.227	0.380	0.632	0.900
200	0.1	0.318	0.440	0.580	0.625	0.912	0.310	0.410	0.577	0.717	0.952
	0.3	0.320	0.425	0.423	0.673	0.948	0.283	0.448	0.542	0.745	0.940
	0.5	0.278	0.408	0.433	0.723	0.972	0.227	0.402	0.520	0.773	0.960
	0.7	0.217	0.425	0.553	0.862	0.993	0.178	0.433	0.608	0.888	1.000
300	0.1	0.465	0.588	0.682	0.770	0.978	0.450	0.558	0.715	0.840	0.978
	0.3	0.432	0.540	0.535	0.792	0.983	0.410	0.575	0.678	0.848	0.982
	0.5	0.355	0.570	0.583	0.852	0.990	0.320	0.538	0.688	0.890	0.993
	0.7	0.285	0.528	0.683	0.945	1.000	0.295	0.548	0.765	0.960	1.000
400	0.1	0.577	0.710	0.762	0.845	0.988	0.553	0.658	0.803	0.898	0.988
	0.3	0.495	0.663	0.623	0.870	0.993	0.497	0.655	0.773	0.905	0.990
	0.5	0.455	0.670	0.695	0.912	0.992	0.422	0.652	0.777	0.942	1.000
	0.7	0.363	0.652	0.813	0.977	1.000	0.347	0.665	0.867	0.987	1.000
500	0.1	0.660	0.782	0.820	0.895	0.993	0.633	0.753	0.840	0.940	0.992
	0.3	0.557	0.753	0.687	0.920	0.993	0.582	0.743	0.842	0.922	0.993
	0.5	0.528	0.728	0.777	0.943	0.993	0.520	0.715	0.840	0.958	0.998
	0.7	0.423	0.725	0.872	0.992	1.000	0.398	0.778	0.933	0.997	1.000
$\tilde{Z}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.288	0.368	0.413	0.505	0.788	0.345	0.437	0.453	0.562	0.795
	0.3	0.263	0.352	0.397	0.503	0.802	0.352	0.408	0.465	0.538	0.798
	0.5	0.207	0.318	0.413	0.572	0.842	0.282	0.365	0.432	0.583	0.860
	0.7	0.170	0.313	0.403	0.653	0.937	0.225	0.308	0.482	0.695	0.907
200	0.1	0.487	0.547	0.653	0.743	0.947	0.595	0.662	0.698	0.813	0.945
	0.3	0.487	0.575	0.603	0.793	0.950	0.587	0.657	0.705	0.802	0.948
	0.5	0.387	0.538	0.653	0.820	0.973	0.525	0.608	0.722	0.862	0.973
	0.7	0.302	0.500	0.672	0.877	0.995	0.385	0.557	0.737	0.928	0.990
300	0.1	0.612	0.693	0.775	0.862	0.985	0.752	0.800	0.822	0.902	0.978
	0.3	0.597	0.702	0.783	0.870	0.978	0.725	0.812	0.845	0.875	0.977
	0.5	0.542	0.663	0.807	0.922	0.992	0.677	0.787	0.847	0.942	0.992
	0.7	0.443	0.672	0.818	0.955	0.998	0.535	0.747	0.878	0.977	1.000
400	0.1	0.723	0.777	0.870	0.910	0.992	0.833	0.888	0.897	0.950	0.992
	0.3	0.682	0.800	0.835	0.933	0.990	0.822	0.883	0.917	0.935	0.992
	0.5	0.667	0.760	0.855	0.962	0.997	0.783	0.857	0.908	0.963	0.993
	0.7	0.537	0.773	0.893	0.985	1.000	0.655	0.842	0.915	0.985	1.000
500	0.1	0.792	0.850	0.917	0.947	0.992	0.880	0.918	0.927	0.965	0.997
	0.3	0.748	0.867	0.892	0.958	0.998	0.867	0.923	0.952	0.963	0.995
	0.5	0.727	0.822	0.893	0.972	0.998	0.855	0.902	0.933	0.970	0.998
	0.7	0.610	0.858	0.947	0.993	1.000	0.735	0.885	0.940	0.992	1.000

Tabulka 8.14: LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  pro RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$  inovacemi

$\tilde{S}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.408	0.345	0.323	0.343	0.288	0.393	0.378	0.318	0.282	0.240
	0.3	0.220	0.195	0.222	0.217	0.267	0.267	0.190	0.142	0.208	0.278
	0.5	0.148	0.128	0.195	0.255	0.453	0.167	0.155	0.167	0.247	0.460
	0.7	0.110	0.175	0.263	0.503	0.650	0.110	0.152	0.283	0.492	0.633
200	0.1	0.332	0.248	0.278	0.285	0.220	0.325	0.300	0.257	0.277	0.240
	0.3	0.173	0.123	0.195	0.233	0.377	0.195	0.158	0.148	0.242	0.382
	0.5	0.148	0.158	0.243	0.413	0.658	0.170	0.147	0.228	0.398	0.652
	0.7	0.150	0.242	0.418	0.708	0.850	0.130	0.250	0.433	0.760	0.847
300	0.1	0.267	0.235	0.208	0.282	0.232	0.298	0.250	0.240	0.230	0.228
	0.3	0.148	0.142	0.185	0.250	0.462	0.175	0.165	0.185	0.293	0.445
	0.5	0.148	0.175	0.287	0.527	0.813	0.137	0.175	0.318	0.490	0.780
	0.7	0.178	0.323	0.525	0.852	0.935	0.153	0.303	0.570	0.888	0.913
400	0.1	0.255	0.220	0.220	0.240	0.228	0.287	0.230	0.245	0.220	0.217
	0.3	0.148	0.170	0.215	0.300	0.520	0.180	0.180	0.200	0.303	0.528
	0.5	0.165	0.185	0.362	0.627	0.885	0.155	0.200	0.357	0.602	0.852
	0.7	0.188	0.362	0.653	0.922	0.950	0.162	0.365	0.678	0.938	0.943
500	0.1	0.218	0.205	0.205	0.263	0.245	0.272	0.222	0.217	0.207	0.233
	0.3	0.150	0.167	0.225	0.355	0.612	0.187	0.185	0.208	0.348	0.588
	0.5	0.168	0.222	0.412	0.703	0.913	0.165	0.223	0.393	0.673	0.903
	0.7	0.175	0.402	0.732	0.953	0.970	0.183	0.405	0.745	0.965	0.965
$\tilde{S}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.332	0.317	0.298	0.295	0.257	0.337	0.277	0.267	0.273	0.210
	0.3	0.152	0.147	0.155	0.167	0.263	0.178	0.117	0.172	0.172	0.252
	0.5	0.112	0.128	0.163	0.277	0.427	0.095	0.118	0.140	0.267	0.438
	0.7	0.090	0.190	0.263	0.437	0.660	0.100	0.153	0.283	0.453	0.595
200	0.1	0.265	0.260	0.230	0.243	0.203	0.238	0.227	0.247	0.228	0.192
	0.3	0.143	0.135	0.152	0.212	0.337	0.133	0.113	0.188	0.228	0.348
	0.5	0.108	0.152	0.220	0.412	0.627	0.110	0.155	0.207	0.392	0.627
	0.7	0.150	0.265	0.422	0.685	0.855	0.110	0.260	0.430	0.720	0.830
300	0.1	0.250	0.237	0.238	0.235	0.210	0.200	0.208	0.220	0.247	0.202
	0.3	0.142	0.143	0.167	0.260	0.392	0.132	0.130	0.172	0.237	0.403
	0.5	0.143	0.195	0.300	0.493	0.747	0.137	0.173	0.267	0.473	0.722
	0.7	0.143	0.330	0.567	0.843	0.913	0.115	0.325	0.543	0.835	0.905
400	0.1	0.245	0.233	0.210	0.222	0.235	0.192	0.212	0.180	0.223	0.188
	0.3	0.150	0.153	0.190	0.282	0.470	0.137	0.150	0.183	0.282	0.462
	0.5	0.170	0.213	0.332	0.605	0.827	0.147	0.212	0.317	0.555	0.792
	0.7	0.133	0.385	0.637	0.902	0.945	0.130	0.375	0.643	0.890	0.933
500	0.1	0.232	0.223	0.215	0.202	0.228	0.178	0.205	0.213	0.248	0.187
	0.3	0.150	0.163	0.207	0.302	0.522	0.143	0.153	0.222	0.312	0.500
	0.5	0.157	0.223	0.377	0.642	0.873	0.175	0.233	0.365	0.610	0.845
	0.7	0.167	0.447	0.712	0.947	0.975	0.133	0.435	0.722	0.945	0.940

Tabulka 8.15: LBI test  $\tilde{S}_n^2$  pro RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$  inovacemi

$\tilde{T}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.1$					$\alpha_1=0.2$				
100	0.1	0.158	0.202	0.268	0.310	0.708	0.132	0.192	0.288	0.437	0.693
	0.3	0.137	0.203	0.212	0.388	0.760	0.113	0.203	0.268	0.433	0.735
	0.5	0.118	0.182	0.232	0.438	0.788	0.117	0.213	0.263	0.437	0.787
	0.7	0.080	0.218	0.305	0.585	0.918	0.082	0.217	0.397	0.603	0.910
200	0.1	0.262	0.390	0.543	0.605	0.940	0.298	0.403	0.552	0.740	0.965
	0.3	0.268	0.405	0.392	0.712	0.960	0.242	0.408	0.547	0.728	0.965
	0.5	0.190	0.387	0.450	0.772	0.980	0.207	0.392	0.560	0.802	0.978
	0.7	0.145	0.423	0.608	0.870	0.993	0.137	0.413	0.673	0.882	0.993
300	0.1	0.415	0.575	0.723	0.812	0.995	0.398	0.562	0.735	0.873	0.997
	0.3	0.407	0.548	0.558	0.850	0.987	0.380	0.540	0.732	0.895	0.995
	0.5	0.287	0.540	0.647	0.880	1.000	0.285	0.542	0.737	0.923	0.998
	0.7	0.195	0.558	0.760	0.965	1.000	0.187	0.597	0.815	0.965	1.000
400	0.1	0.533	0.695	0.850	0.902	1.000	0.512	0.677	0.853	0.958	1.000
	0.3	0.493	0.692	0.713	0.938	1.000	0.490	0.687	0.845	0.963	1.000
	0.5	0.385	0.668	0.773	0.938	1.000	0.387	0.658	0.842	0.973	1.000
	0.7	0.268	0.690	0.863	0.992	1.000	0.243	0.728	0.928	0.993	1.000
500	0.1	0.652	0.808	0.908	0.967	1.000	0.647	0.793	0.920	0.987	1.000
	0.3	0.582	0.823	0.815	0.968	1.000	0.580	0.803	0.905	0.987	1.000
	0.5	0.463	0.772	0.855	0.983	1.000	0.473	0.777	0.910	0.993	1.000
	0.7	0.308	0.783	0.938	1.000	1.000	0.268	0.800	0.967	0.998	1.000
$\tilde{T}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\alpha_1=0.3$					$\alpha_1=0.4$				
100	0.1	0.243	0.287	0.362	0.428	0.752	0.322	0.367	0.452	0.518	0.785
	0.3	0.208	0.313	0.330	0.465	0.797	0.288	0.365	0.425	0.527	0.808
	0.5	0.158	0.227	0.353	0.530	0.847	0.235	0.338	0.383	0.570	0.850
	0.7	0.128	0.268	0.385	0.640	0.915	0.183	0.303	0.485	0.693	0.925
200	0.1	0.462	0.563	0.657	0.765	0.962	0.617	0.645	0.757	0.837	0.980
	0.3	0.415	0.542	0.638	0.802	0.977	0.568	0.652	0.740	0.845	0.977
	0.5	0.297	0.475	0.653	0.842	0.992	0.487	0.590	0.700	0.872	0.997
	0.7	0.222	0.508	0.703	0.913	1.000	0.298	0.562	0.788	0.942	1.000
300	0.1	0.652	0.723	0.803	0.912	0.997	0.783	0.808	0.900	0.952	0.995
	0.3	0.547	0.712	0.810	0.933	0.998	0.752	0.838	0.882	0.955	0.998
	0.5	0.463	0.677	0.832	0.950	1.000	0.645	0.783	0.872	0.963	1.000
	0.7	0.302	0.693	0.863	0.983	1.000	0.418	0.742	0.915	0.985	1.000
400	0.1	0.750	0.838	0.900	0.970	0.998	0.905	0.922	0.950	0.987	0.998
	0.3	0.693	0.845	0.912	0.983	0.998	0.850	0.923	0.958	0.982	1.000
	0.5	0.605	0.792	0.907	0.990	1.000	0.745	0.893	0.955	0.988	1.000
	0.7	0.382	0.813	0.947	1.000	1.000	0.555	0.867	0.977	0.995	1.000
500	0.1	0.848	0.913	0.948	0.990	0.998	0.963	0.963	0.975	1.000	1.000
	0.3	0.775	0.912	0.963	0.993	1.000	0.913	0.972	0.982	0.997	1.000
	0.5	0.673	0.878	0.957	0.998	1.000	0.820	0.938	0.980	0.993	1.000
	0.7	0.448	0.903	0.977	1.000	1.000	0.625	0.943	0.993	1.000	1.000

Tabulka 8.16: Pořadový test  $\tilde{T}_n^2(\sin(x\pi/2), \sqrt{x})$  pro RCA(1)-ARCH(1) model se standardizovanými Studentovými  $\xi_t \sim t_4/\sqrt{2}$  inovacemi

$(NQ_n)^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.030	0.135	0.188	0.365	0.777	0.025	0.147	0.220	0.358	0.725
	0.3	0.018	0.162	0.295	0.502	0.817	0.030	0.188	0.302	0.485	0.807
	0.5	0.033	0.265	0.418	0.658	0.865	0.028	0.268	0.432	0.668	0.890
	0.7	0.045	0.383	0.567	0.770	0.918	0.033	0.407	0.617	0.780	0.927
200	0.1	0.043	0.205	0.342	0.582	0.942	0.038	0.222	0.365	0.638	0.948
	0.3	0.040	0.265	0.528	0.788	0.973	0.032	0.312	0.522	0.743	0.972
	0.5	0.052	0.433	0.662	0.888	0.983	0.040	0.465	0.683	0.902	0.995
	0.7	0.052	0.583	0.820	0.935	0.995	0.038	0.623	0.842	0.942	0.993
300	0.1	0.060	0.247	0.455	0.748	0.987	0.030	0.260	0.453	0.765	0.992
	0.3	0.038	0.380	0.652	0.902	0.993	0.030	0.415	0.693	0.877	0.995
	0.5	0.057	0.568	0.818	0.958	0.998	0.043	0.572	0.847	0.968	1.000
	0.7	0.048	0.722	0.917	0.978	0.998	0.050	0.743	0.943	0.988	0.998
400	0.1	0.043	0.265	0.532	0.842	0.997	0.042	0.332	0.557	0.837	0.998
	0.3	0.043	0.445	0.773	0.955	1.000	0.035	0.487	0.778	0.957	1.000
	0.5	0.060	0.670	0.897	0.982	1.000	0.038	0.695	0.913	0.993	0.998
	0.7	0.045	0.822	0.953	0.993	1.000	0.047	0.853	0.973	0.995	0.998
500	0.1	0.065	0.337	0.580	0.917	1.000	0.042	0.365	0.635	0.900	1.000
	0.3	0.052	0.513	0.853	0.985	1.000	0.028	0.558	0.838	0.978	1.000
	0.5	0.055	0.768	0.935	0.995	1.000	0.047	0.772	0.953	0.998	0.998
	0.7	0.047	0.900	0.977	0.998	1.000	0.050	0.898	0.985	1.000	1.000

Tabulka 8.17: Skórový test  $(NQ_n)^2$  pro závislé  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{Z}_n^2$		$\sigma_\beta^2$					$\sigma_\beta^2$				
		0	0.05	0.1	0.2	0.5	0	0.05	0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.033	0.125	0.148	0.272	0.637	0.028	0.122	0.197	0.290	0.588
	0.3	0.030	0.152	0.257	0.433	0.712	0.032	0.155	0.273	0.412	0.717
	0.5	0.042	0.233	0.342	0.568	0.777	0.033	0.230	0.370	0.595	0.798
	0.7	0.040	0.323	0.477	0.658	0.827	0.037	0.383	0.543	0.712	0.832
200	0.1	0.040	0.173	0.285	0.492	0.898	0.035	0.193	0.300	0.537	0.880
	0.3	0.040	0.242	0.475	0.702	0.937	0.035	0.258	0.472	0.670	0.915
	0.5	0.048	0.385	0.608	0.832	0.972	0.047	0.407	0.640	0.862	0.973
	0.7	0.052	0.528	0.755	0.887	0.983	0.043	0.585	0.802	0.912	0.980
300	0.1	0.060	0.215	0.383	0.660	0.970	0.032	0.242	0.390	0.685	0.972
	0.3	0.032	0.337	0.577	0.863	0.987	0.028	0.387	0.618	0.830	0.985
	0.5	0.060	0.522	0.775	0.932	0.990	0.043	0.523	0.795	0.942	0.993
	0.7	0.045	0.682	0.883	0.970	0.997	0.047	0.720	0.922	0.980	0.997
400	0.1	0.055	0.237	0.475	0.787	0.990	0.042	0.290	0.498	0.792	0.995
	0.3	0.047	0.403	0.733	0.938	0.997	0.038	0.445	0.735	0.932	1.000
	0.5	0.065	0.627	0.867	0.973	1.000	0.037	0.635	0.882	0.985	0.998
	0.7	0.043	0.797	0.935	0.988	1.000	0.045	0.825	0.965	0.993	0.997
500	0.1	0.068	0.302	0.532	0.862	0.997	0.038	0.317	0.568	0.852	1.000
	0.3	0.052	0.463	0.810	0.967	1.000	0.032	0.533	0.797	0.962	0.998
	0.5	0.058	0.727	0.917	0.988	1.000	0.050	0.717	0.930	0.995	0.998
	0.7	0.043	0.875	0.973	0.997	1.000	0.047	0.885	0.982	0.998	1.000

Tabulka 8.18: LBI test  $\tilde{Z}_n^2$  pro závislé  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{S}_n^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.578	0.620	0.622	0.577	0.385	0.552	0.603	0.638	0.598	0.375
	0.3	0.285	0.300	0.323	0.372	0.290	0.265	0.287	0.352	0.363	0.320
	0.5	0.113	0.230	0.323	0.320	0.315	0.110	0.235	0.322	0.382	0.308
	0.7	0.063	0.302	0.395	0.470	0.420	0.043	0.322	0.445	0.460	0.373
200	0.1	0.523	0.597	0.630	0.647	0.332	0.527	0.605	0.668	0.692	0.408
	0.3	0.277	0.292	0.438	0.503	0.358	0.237	0.337	0.475	0.525	0.375
	0.5	0.122	0.327	0.470	0.552	0.473	0.108	0.328	0.450	0.567	0.458
	0.7	0.062	0.455	0.615	0.678	0.557	0.053	0.440	0.650	0.630	0.523
300	0.1	0.493	0.588	0.667	0.737	0.375	0.505	0.642	0.740	0.787	0.422
	0.3	0.242	0.335	0.508	0.660	0.418	0.215	0.392	0.612	0.657	0.468
	0.5	0.115	0.382	0.632	0.685	0.573	0.118	0.400	0.625	0.698	0.562
	0.7	0.062	0.585	0.755	0.818	0.725	0.052	0.580	0.767	0.777	0.668
400	0.1	0.507	0.617	0.738	0.807	0.422	0.495	0.637	0.802	0.857	0.453
	0.3	0.240	0.393	0.632	0.748	0.488	0.245	0.435	0.705	0.782	0.525
	0.5	0.112	0.458	0.728	0.773	0.655	0.107	0.517	0.720	0.805	0.638
	0.7	0.067	0.700	0.868	0.905	0.813	0.057	0.702	0.852	0.862	0.735
500	0.1	0.488	0.657	0.792	0.847	0.440	0.460	0.672	0.868	0.917	0.487
	0.3	0.253	0.448	0.728	0.838	0.563	0.212	0.513	0.782	0.868	0.585
	0.5	0.135	0.540	0.798	0.867	0.737	0.105	0.602	0.797	0.865	0.707
	0.7	0.067	0.768	0.908	0.938	0.880	0.057	0.780	0.905	0.920	0.793

Tabulka 8.19: LBI test  $\tilde{S}_n^2$  pro závislé  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$

$\tilde{T}_n^2$		0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5	0	0.05	$\sigma_\beta^2$ 0.1	0.2	0.5
n	$\beta$	$\sigma_\epsilon^2=1$					$\sigma_\epsilon^2=5$				
100	0.1	0.037	0.092	0.110	0.178	0.610	0.033	0.078	0.097	0.173	0.562
	0.3	0.037	0.123	0.188	0.358	0.665	0.025	0.130	0.187	0.315	0.672
	0.5	0.042	0.168	0.288	0.478	0.750	0.025	0.185	0.288	0.500	0.752
	0.7	0.050	0.287	0.417	0.607	0.822	0.033	0.293	0.457	0.625	0.825
200	0.1	0.052	0.113	0.157	0.318	0.873	0.033	0.117	0.123	0.305	0.833
	0.3	0.038	0.162	0.325	0.558	0.912	0.042	0.168	0.293	0.515	0.895
	0.5	0.055	0.272	0.463	0.713	0.950	0.043	0.267	0.467	0.732	0.943
	0.7	0.048	0.437	0.677	0.828	0.985	0.050	0.452	0.663	0.848	0.972
300	0.1	0.043	0.075	0.200	0.437	0.938	0.047	0.107	0.175	0.427	0.940
	0.3	0.047	0.218	0.402	0.647	0.962	0.050	0.205	0.395	0.672	0.967
	0.5	0.065	0.330	0.625	0.835	0.978	0.052	0.383	0.597	0.817	0.990
	0.7	0.052	0.577	0.810	0.935	1.000	0.042	0.590	0.822	0.922	0.995
400	0.1	0.070	0.097	0.227	0.520	0.982	0.040	0.130	0.198	0.508	0.982
	0.3	0.058	0.225	0.520	0.813	0.992	0.047	0.280	0.477	0.773	0.990
	0.5	0.060	0.445	0.708	0.923	0.998	0.045	0.437	0.710	0.927	0.995
	0.7	0.045	0.657	0.872	0.965	1.000	0.047	0.675	0.905	0.970	0.998
500	0.1	0.068	0.125	0.258	0.603	0.992	0.045	0.132	0.220	0.592	0.998
	0.3	0.060	0.265	0.575	0.863	0.998	0.032	0.313	0.570	0.852	0.998
	0.5	0.057	0.517	0.777	0.953	1.000	0.047	0.485	0.790	0.975	0.998
	0.7	0.042	0.763	0.923	0.983	0.998	0.042	0.762	0.945	0.987	0.998

Tabulka 8.20: Pořadový  $\tilde{T}_n^2(x^4, x)$  pro závislé  $\beta_t \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma_\beta^2)$  a  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$