Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Diplomová práce

Problem posing a problem solving v matematické soutěži

(Problem Posing and Problem Solving in a Mathematical Competition)

Eva Patáková

Obor: Matematika – Chemie

Vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Praha 2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité prameny a literaturu, ze které jsem čerpala.

V Praze dne 28. 3. 2009

Eva Patáková

Děkuji RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce, za jeho podporu a mnoho cenných rad a připomínek.

Klíčová slova

Problem posing; problem solving; matematická soutěž; typy úloh v matematických soutěžích (otevřené / uzavřené, charakteristika podle obtížnosti a účelu); Matematická olympiáda; Pythagoriáda; Matematický klokan; Turnaj měst; Matematický korespondenční seminář; tvorba úloh do matematického korespondenčního semináře; příběh s úlohami; didaktická analýza; řešitelské strategie; bodování; sebereflexe.

Abstrakt

Organizace matematických soutěží je důležitá pro rozvoj dovedností žáků talentovaných v matematice i pro motivaci talentovaných i méně talentovaných žáků.

Matematických soutěží je velké množství a jejich průběh, cíle i cílové skupiny žáků se od sebe liší. V této práci bylo mým cílem: Zmapovat oblast problem posing a problem solving v matematické soutěži po stránce teoretické; vytvořit přehled matematických soutěží konaných v ČR se zaměřením na problem posing a problem solving; navrhnout a odzkoušet sadu úloh pro konkrétní matematickou soutěž; vytvořit sebereflexi činnosti jako materiál pro jiné autory úloh do podobné soutěže; a zanalyzovat žákovská řešení.

Čtenář se v práci může detailně seznámit s matematickým korespondenčním seminářem Pikomat. Formou sebereflexe je zde popsána veškerá činnost potřebná pro organizaci semináře. Největší pozornost je věnována tvorbě úloh a ostatních textů do semináře (problem posing) a položkové analýze žákovských řešení všech vytvořených úloh (problem solving). Tato analýza zkoumá jednak dovednosti žáků při řešení úloh, jednak slouží k další zpětné vazbě o vhodnosti či nevhodnosti použitých úloh.

Keywords

Problem Posing; Problem Solving; Mathematical Competition; Types of Problems in Mathematical Competitions (Multiple-Choice Questions and Open Questions, Characteristics of Difficulty and Purpose); Mathematical Olympiad; Mathematical Kangaroo; Tournament of Towns; Mathematical Correspondence Seminar; Mathematical Correspondence Seminar Problem Posing; Story with Questions; Didactic Analysis; Solving Strategies; Awarding Points; Self-Reflection.

Abstract

Mathematical competitions are important for the development of knowledge of students who are gifted in Mathematics as well as for the motivation of all students.

There are a lot of mathematical competitions and their ways of organization, aims and target groups differ from each other. The aims of my work were: To map theoretically the field of problem posing and problem solving in mathematical competitions; to create a summary of mathematical competitions held in the Czech Republic with an emphasis on problem posing and problem solving; to design and test a set of problems for one concrete mathematical competition; to create a self-reflection of my activities as a material for other authors of problems for a similar competition; and to analyze students‘ solutions.

Readers can get acquainted with the Mathematical Correspondence Seminar “Pikomat” in detail in this diploma work. In my self-reflection, all the activities needed to organize a seminar are described. Most attention is given to posing problems and other texts for a seminar as well as to an item analysis of students’ solutions of all created problems (problem solving). This analysis examines the abilites of students to solve the problems and serves as feedback about the suitability of the problems used.

Obsah

1. Úvod

Jako téma diplomové práce jsem zvolila „Problem posing a problem solving v matematické soutěži". Důvody jsem měla dva.

Za prvé mi toto téma je a vždy bylo velmi blízké. Z pedagogického pohledu mě pak zajímala práce s talentovanými žáky v matematice. Tomuto tématu se věnuji již od druhého ročníku vysoké školy, kdy jsem získala třetí místo na konferenci studentské odborné činnosti (SVOČ) v kategorii Nediplomní práce z didaktiky matematiky s prací na téma Posloupnosti vyšších řádů. Tam se věnuji tématu posloupností vyšších řádů z hlediska matematického a z hlediska jejich aplikace jako rozšiřujícího učiva do matematického semináře pro matematicky nadané gymnaziální studenty.

Matematických soutěží jsem se sama v hojné míře úspěšně účastnila jako žákyně základní školy i jako studentka gymnázia, takže mám i hodně zkušeností z pozice řešitele problémů v matematické soutěži.

Jako pomocná vědecká síla na Katedře matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty UK jsem pomáhala s opravováním a organizační stránkou některých soutěží, proto mám zkušenosti i z hlediska organizátora soutěže.

Druhý důvod je ten, že existuje velmi málo publikací na téma tvorba úloh do matematických soutěží. V českém jazyce jsem kromě publikací svého vedoucího diplomové práce J. Zhoufa nenarazila téměř na žádné.

Ve většině dostupných publikací na téma problem posing se autoři zabývají tvorbou úloh z jiného pohledu. Jedná se většinou o návrhy způsobů práce s žáky prostřednictvím žákovské tvorby úloh na určitá témata. (Ta jednak zvyšuje matematické dovednosti žáků, jednak je diagnosticky cenným nástrojem odhalujícím hloubku porozumění žáka dané problematice.) V těchto publikacích se většina autorů věnuje celé žákovské populaci, nikoli konkrétně talentovaným žákům. Problematice práce autora úloh pro matematicky nadané žáky – např. tedy autora problémů matematických soutěží – se věnuje velmi malé množství publikací.

Pokud se chci ve své práci věnovat tvorbě úloh, tedy problem posing, nemůžu se obejít bez teorie řešení problémů a její následné aplikace do analýz žákovských prací, tedy oblastí patřících pod problem solving (zjednodušeně řečeno řešení problémů).

Problem posing a problem solving nemohou existovat odděleně, jsou to dvě velmi se prolínající oblasti. A dohadovat se, která z nich je základem a která vyrůstá na podhoubí té druhé, by bylo jako dohadovat se, zda bylo dřív vejce, nebo slepice. Čili i přístupy k řazení jednotlivých kapitol se nabízí dva. Mohla jsem začít od problem solving, protože málokdo, kdo sám neumí problémy řešit, může vytvořit adekvátní problém na adekvátní úrovni pro někoho jiného. Mně se však víc líbí řazení opačné v logickém sledu – nejprve někdo vytvoří problém, teprve potom ho druhý může řešit, proto kapitolu o problem posing vřadím před kapitolu o problem solving.

Téma Problem posing a problem solving v matematické soutěži je mi tedy velmi blízké proto, že propojuje oblasti, které mě zajímají a baví, i proto, že s problematikou nadaných žáků i problematikou matematických soutěží mám již praktické zkušenosti. Při psaní této diplomové práce jsem se s tématem seznámila více i z hlediska teoretického. Kromě toho se tématu věnuji i z hlediska praktického – prostřednictvím aktivní práce v matematické soutěži a následného rozboru získaných zkušeností a dat.

2. Cíle, oblasti a metody práce

Při psaní své diplomové práce jsem si vytyčila několik cílů:

- Shrnout základní informace o problem posing a problem solving dostupné v literatuře.
- Vytvořit přehled matematických soutěží pořádaných v ČR, a to nikoli z hlediska žáka, ale z hlediska soutěžních úloh samotných a z hlediska požadavků soutěže na autora soutěžních úloh.
- Navrhnout a odzkoušet sadu úloh pro matematickou soutěž (problem posing).
- Shrnout zkušenosti s tvorbou úloh včetně zpětné vazby plynoucí z reálného užití těchto úloh ve formě sebereflexe.
- Zanalyzovat žákovská řešení mnou navržených úloh (problem solving žáků), čímž se ještě posílí zpětná vazba o vhodnosti či nevhodnosti navržených problémů (kvalitativní i kvantitativní analýza žákovských prací).

Jako prostředek k naplnění cílů jsem zvolila práci na matematické soutěži Pikomat. S touto soutěží mám bohaté zkušenosti jako řešitel. Pikomat či příbuzné konkurenční[1] semináře jsem řešila od primy do kvarty osmiletého gymnázia, tedy všechny ročníky, kdy to bylo možné. A s touto soutěží jsem se setkala i během studia na vysoké škole jako opravovatelka úloh. Tyto zkušenosti se mi během zpracovávání tématu sice hodily, nejsou však hlavním důvodem, proč jsem si vybrala právě tuto soutěž. Hlavní důvod tkví v podmínkách práce. Organizaci Pikomatu mi totiž bylo umožněno na jeden rok plně převzít – a to jak z hlediska organizačního, tak z hlediska pedagogické práce v něm. Měla jsem možnost tedy téměř bez omezení zadávat libovolné úlohy, téměř bez omezení své

[1] Slovo konkurenční je mírně sporné. Jak o tom budu hovořit ve své práci v kapitole o matematických seminářích, existuje velké množství korespondenčních seminářů pro matematicky nadané žáky. Vzájemně si konkurují v tom smyslu, že v dnešní době internetu a jiných komunikačních technologií si žák či student může vybírat, který ze seminářů mu nejlépe vyhovuje. Semináře si ale nekonkurují v komerčním slova smyslu. Jednak se většinou jedná o činnost neziskovou, jednak mají všechny stejný cíl – najít talentovaného žáka a přispět k jeho co nejlepšímu rozvoji.

návrhy až do odeslání úloh žákům měnit a sama všechna řešení opravovat. (Což samozřejmě není možné u soutěží centrálně řízených obvykle velkou skupinou lidí.)

Sepsáním této práce chci seznámit čtenáře s tvorbou úloh do matematické soutěže (problem posing) z hlediska teoretického i praktického. Chci čtenáři předat své zkušenosti s tvorbou matematických problémů tak, aby byly použitelné pro autora úloh z matematiky pro nadané žáky – ať už do matematické soutěže nebo jen k rozvoji matematických dovedností žáků. Čtenář se dozví i základní informace o řešení matematických problémů (problem solving), a to jak z teoretického, tak z praktického hlediska.

Jako metody k dosažení cíle používám:

- práci s didaktickou literaturou na dané téma (česky psanou i zahraniční),
- práci s matematickou literaturou,
- analýzu struktury úloh jednotlivých soutěží,
- položkovou analýzu žákovských řešení,
- statistické zpracování žákovských řešení.

V kapitole „Problem posing a problem solving“ se budu věnovat teorii těchto dvou prolínajících se oblastí, budu zdůrazňovat jejich propojení, neboť jedno bez druhého opravdu nemůže existovat. Použitá metoda je práce s odbornou literaturou – převážně zahraniční, protože v českém jazyce je publikací na toto téma málo. Získané znalosti se budu snažit interpretovat v kontextu mé diplomové práce.

V kapitole „Přehled matematických soutěží pořádaných v ČR se zřetelem k problem posing a problem solving“ budu analyzovat strukturu úloh jednotlivých soutěží. Hodně se budu na úlohy zaměřovat z hlediska analýzy nároků na autora úloh do soutěže. Cílem této kapitoly tedy nebude přehled soutěží zaměřený na organizaci a práci ze zorného úhlu žáka či studenta ani podrobný faktografický přehled o organizaci těchto soutěží, i když informacím na tato témata se v práci nemohu vyhnout – minimálně s ohledem na čtenáře, který všechny soutěže nemusí znát. Těžiště práce ale nebude v těchto organizačních informacích, ale v typech úloh, možnostech jejich tvorby a řešení.

Kapitola „Korespondenční seminář Pikomat“ bude věnována prostému popisu této soutěže, a to z hlediska činnosti účastníka i činnosti organizátora.

Kapitola „Zadání a řešení 21. série Pikomatu" bude věnována materiálům, které jsem připravila pro ročník soutěže, který jsem sama vedla. Tyto materiály dostávali v obsahově nezměněné podobě i účastníci soutěže. (Jiné bylo pouze grafické členění – pro žáky bylo více zhuštěno.)

Své poznatky a zkušenosti jako organizátora soutěže a autora materiálů pro žáky shrnu v kapitole „Reflexe a sebereflexe mé činnosti". Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s prací organizátora soutěže, upozornit jej na jednotlivá úskalí a popsat obtíže, se kterými jsem se při práci setkala, a poskytnout rady, jak těmto obtížím předejít nebo jak je řešit.

Potvrzením vhodnosti mnou vytvořených materiálů mi samozřejmě budou řešitelské práce účastníků soutěže. Tyto práce podrobně rozeberu metodou položkové analýzy v kapitole „Didaktické analýzy žákovských řešení 21. ročníku Pikomatu", na závěr se pokusím shrnout nejzajímavější fakta o průběhu tohoto ročníku soutěže.

Téměř před dokončením diplomové práce začal další ročník soutěže Pikomat. Zde jsem též pracovala jako organizátorka i jako tvůrce problémů. V první sérii soutěže jsem zadala v mírně obměněné podobě úlohy, které jsem vyhodnotila jako méně vhodně či nevhodně zadané. U nich zhodnotím, zda jsem správně odhalila příčinu nevhodnosti úlohy původní a zda žákovské výsledky již odpovídají mým odhadům. Závěry budou shrnuty na konci jako „Apendix".

Doufám, že si čtenář z mé práce kromě již zmíněných poznatků odnese i pozitivní vztah ke korespondenčním seminářům a matematickým soutěžím obecně a že ho má práce motivuje k jejich propagaci.

3. Problem posing a problem solving

Problém posing a problem solving jsou jedny z ústředních témat vzdělávání v matematice. Řešením matematických problémů (problem solving) se žáci učí matematicky přemýšlet. Problémy ale neexistují samy o sobě, nezávisle na lidech. Každý problém, ať je zadán jakýmkoli způsobem (slovně, písemně v učebnici, časopise, v zadání soutěže či jakkoli jinak), musel někdo vytvořit a zformulovat (problem posing). Někdy se tyto dvě kategorie prolínají – žákovi je zadáno, aby vytvořil problém (tedy „vyřešil problém 'vytvořit problém' “). O tom všem je tato kapitola.

3.1. Problem posing

3.1.1. Co je problem posing

Problem posing přeloženo do českého jazyka znamená tvorbu problémů. (V dalším textu budu – není-li uvedeno jinak – pojmem „problém“ rozumět „matematický problém“. Rozdíl mezi pojmem „úloha v matematické soutěži“ a „problém v matematické soutěži“ je tak malý, že jej budu zanedbávat.)

Abychom se mohli podrobněji věnovat tvorbě problémů, bylo by potřeba upřesnit, co to problém je. Henderson a Pingry (1953) jej definují jako otázku, která je navržena za účelem řešení a vytvoření odpovědi. Jako druhý koncept vysvětlení pojmu problém uvádějí opět otázku, která se ale nějak vztahuje k jedinci, který této otázce čelí. Ve vzdělávacím kontextu je důležitější druhá koncepce, protože co je matematickým problémem pro žáka prvního stupně základní školy, nebývá již problémem např. pro studenta gymnázia. V matematice se problém skládá z tvrzení (jednoho nebo více, mohou být psané, sdělené ústně, grafické, symbolické...), známých a neznámých proměnných, souboru podmínek specifikujících vztahy mezi neznámými, zadanými daty a úkolem (Gonzales 1994).

Problem posing zastřešuje celou skupinu nových problémů, které se týkají vytváření problému nebo přetváření problému již formulovaného (English 1997, Silver and Cai 1996). Je poměrně obtížné najít publikaci týkající se problem posing z hlediska pedagoga či autora úloh matematické soutěže. Většina pro mě dostupných publikací se této problematice věnuje z hlediska využití problem posing jako efektivního postupu práce

3. Problem posing a problem solving

Problém posing a problem solving jsou jedny z ústředních témat vzdělávání v matematice. Řešením matematických problémů (problem solving) se žáci učí matematicky přemýšlet. Problémy ale neexistují samy o sobě, nezávisle na lidech. Každý problém, ať je zadán jakýmkoli způsobem (slovně, písemně v učebnici, časopise, v zadání soutěže či jakkoli jinak), musel někdo vytvořit a zformulovat (problem posing). Někdy se tyto dvě kategorie prolínají – žákovi je zadáno, aby vytvořil problém (tedy „vyřešil problém 'vytvořit problém' “). O tom všem je tato kapitola.

3.1. Problem posing

3.1.1. Co je problem posing

Problem posing přeloženo do českého jazyka znamená tvorbu problémů. (V dalším textu budu – není-li uvedeno jinak – pojmem „problém" rozumět „matematický problém". Rozdíl mezi pojmem „úloha v matematické soutěži" a „problém v matematické soutěži" je tak malý, že jej budu zanedbávat.)

Abychom se mohli podrobněji věnovat tvorbě problémů, bylo by potřeba upřesnit, co to problém je. Henderson a Pingry (1953) jej definují jako otázku, která je navržena za účelem řešení a vytvoření odpovědi. Jako druhý koncept vysvětlení pojmu problém uvádějí opět otázku, která se ale nějak vztahuje k jedinci, který této otázce čelí. Ve vzdělávacím kontextu je důležitější druhá koncepce, protože co je matematickým problémem pro žáka prvního stupně základní školy, nebývá již problémem např. pro studenta gymnázia. V matematice se problém skládá z tvrzení (jednoho nebo více, mohou být psané, sdělené ústně, grafické, symbolické...), známých a neznámých proměnných, souboru podmínek specifikujících vztahy mezi neznámými, zadanými daty a úkolem (Gonzales 1994).

Problem posing zastřešuje celou skupinu nových problémů, které se týkají vytváření problému nebo přetváření problému již formulovaného (English 1997, Silver and Cai 1996). Je poměrně obtížné najít publikaci týkající se problem posing z hlediska pedagoga či autora úloh matematické soutěže. Většina pro mě dostupných publikací se této problematice věnuje z hlediska využití problem posing jako efektivního postupu práce s žáky – situaci, kdy žáci tvoří své vlastní problémy a úlohy. Proces vytváření zajímavého matematického problému je totiž intelektuálně náročnější než prosté vyřešení tohoto vytvořeného problému (Mestre 2002). Mají-li žáci vytvořit svůj problém, rozvíjí nejen své matematické schopnosti a myšlení, ale i schopnost přesně verbalizovat své myšlenky (tedy komunikativní kompetenci v RVP).

3.1.2. Členění problem posing

Existuje mnoho různých situací a kontextů, kdy je potřeba vytvořit problém. Různí autoři člení tyto situace podle různých hledisek. Např. podle Stoyanové (2000) může být tvorba problémů:

- zcela volná (tedy na libovolné téma)
- polostrukturovaná (např. vytvořit problém podobný problému již danému)
- zcela strukturovaná (přeformulovat problém, který je plně dán, nebo ho obměňovat pouze přidáváním či ubíráním podmínek)

Pedagogové se v praxi setkávají se všemi třemi typy tvorby problémů, autoři úloh do matematických soutěží převážně s tvorbou volnou a tvorbou polostrukturovanou. Volně tvoří většinu úloh většiny soutěží. S polostrukturovanou tvorbou se však setkávají rovněž poměrně často – např. při tvorbě návodných úloh školního kola Matematické olympiády nebo při tvorbě některých úloh do vyšších kol téže soutěže, kde mají žáci prokázat, co se v předchozích kolech naučili. Zcela strukturovaná tvorba problémů připadá v úvahu tam, kde zadavatel pracuje již s problémem hotovým, pouze jej mírně upraví např. přiměřeně k věku žáků, účelu soutěže apod.

Opět Stoyanová (2000) uvádí ještě další členění problem posing situací, toto členění se však více vztahuje k situaci, kdy mají tvořit úlohy žáci. Jedná se o pět kategorií. První z nich se kryje s kategorií volné tvorby uvedené v předchozím dělení, zbylé čtyři jsou podle mého názoru podrobněji rozčleněná kategorie polostrukturované tvorby. Tyto kategorie tvoří:

- Tvorba problému na volné téma.
- Tvorba problému příslušejícího k předem stanovené odpovědi.
- Problém, který obsahuje určitou informaci.
- Tvorba otázek vztahujících se k dané problémové situaci.

- Problém, jehož řešením je zadaný výpočet.

Obě tato členění jsou samozřejmě obecnější a vztahují se na tvorbu problému, situace nebo kontextu nejen v matematice (např. oblíbená slohová cvičení v hodinách jazyků „Napiš vyprávění, které končí větou: …“).

Jak si žáci poradí s tvorbou matematického problému, jehož řešením je zadaný výpočet, se zabývá více autorů, z českého prostředí jmenujme např. M. Tichou (2006). Ta využívá zmíněnou kategorii k diagnostice formálního porozumění žáků pojmu zlomek jako součást širšího výzkumu na toto téma. (Jedna z jejích úloh je: „Sestav takovou slovní úlohu, aby k jejímu vyřešení stačilo vypočítat $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$.“ Zajímavý na její práci je i fakt, že obdobnou úlohu zkouší na rozmanitých věkových kategoriích – od žáků základní školy až po vysokoškoláky.)

V kontextu autora matematických soutěží je vhodnější první členění Stoyanové na tvorbu volnou, strukturovanou a polostrukturovanou, neboť podle druhého zmíněného členění by většina jejich práce spadala do kategorie Tvorba problémů na volné téma.

Existuje ještě několik dalších typů dělení problem posing situací. Jako příklad dělení, které se váže více k práci žáků, jimž učitel zadal problém „vymyslet problém“, než k práci autora úloh do matematické soutěže, můžeme uvést ještě dělení P. Lina (2004). Jeho kategoriemi jsou:

- Vymyslet problém, jehož řešením je zadaný numerický výpočet.
- Vymyslet problém vztahující se k danému obrázku.
- Formulovat problém vztahující se k matematickému pojmu.

3.1.3. Umění tvořit problémy

Umění tvořit netradiční problémy, kde není řešení patrné na první pohled, je klíčovou dovedností autora úloh (nejen) matematických soutěží. Ale i dobrý učitel musí umět připravovat problémy pro své žáky. Učitel má situaci ve třídě v rukou, zná třídu a jen na něm je rozhodnutí, který problém budou žáci řešit. Může svým žákům vytvořit problémy přímo pro ně vhodné. Není správné, když se křečovitě drží učebnice či jiných problémů již někým připravených pro obecného žáka. K tomu by měla vést i univerzitní příprava budoucích učitelů – měli by být připravováni nejen k tomu, aby sami problémy dobře řešili, ale aby dokázali jít i do další úrovně – tedy umět sám vhodný problém vytvořit

(Gonzales 1994). J. Zhouf (2004) k tomuto tématu říká: „Učitelova kompetence tvořit úlohy za různým účelem a na různé úrovni obtížnosti je jednou z nejdůležitějších kompetencí, kterou je nutno systematicky rozvíjet. V průběhu své praxe bude učitel nejednou postaven před úkol vytvořit úlohy do písemné zkoušky, do přijímací zkoušky, případně do nějaké matematické soutěže. Konečně bude-li chtít ve větší míře uplatnit konstruktivistické přístupy, bude muset tvořit (gradované) série úloh vedoucích ke konstrukci určitého matematického poznatku."

Existuje vědecky rozpracovaná metoda, jak se učit tvořit problémy (Gonzales 1998):

1. Začít studiem již hotových problémů. Pracovat s nimi, ale pomaleji než obvykle. Před vlastním řešením si slovně vyjádřit, o čem problém je, co je dané, z jakých vychází předpokladů, zda je informací dostatek, zda se dají tyto informace interpretovat i jiným způsobem, zda problém vůbec dává smysl... Vhodné by bylo i vyřešit problém s detailním rozpracováním vlastních myšlenkových strategií – např. čtyřstupňovým rozborem podle Polyi (1973): porozumění problému, vytvoření plánu řešení, uskutečnění plánu řešení, zhodnocení.

2. Vrátit se k některému již vyřešenému problému a vytvořit příbuzné problémy. To je možné různými způsoby (viz předchozí členění typů problem posing). Vytvořený problém by ale neměl být výrazně snazší než původní problém, ani jeho napodobenina s jinými hodnotami a poupraveným kontextem. Podstata opravdového matematického problému je, že jeho řešitel musí hledat strategie řešení a ne vidět na první pohled rutinní postup, který je pro danou situaci zcela dostačující.

3. Vyjít z textu, který není problémem – neobsahuje otázku. (Např. prostý text o dětech, které mají různé částky peněz, nebo článek novin doplněný grafem.) K tomuto textu vytvořit problém nebo sérii problémů.

4. Samostatně vyhledávat situace, které mohou být přetransformovány na matematický problém.

5. Začít sami tvořit problémy na volné téma.

Vytvořené problémy mohou mít různou úroveň. Posouzení kvality vytvořeného problému je velmi subjektivní. K alespoň částečně objektivnímu zhodnocení vytvořeného problému můžeme použít např. následující kritéria (Gonzales 1994):

- Problém je jasně formulovaný.

- Použité formulace jsou adekvátní věku žáků, pro které má být problém použit.
- Obtížnost úlohy je adekvátní věku žáků.
- Problém je realistický, nebo se dokonce váže k běžnému životu žáka.
- Problém je tvořivý.
- Problém je zajímavý.
- K řešení problému je možné využít více různých strategií.
- Problém vyzývá ke kladení dalších otázek (např. Co kdyby…?).
- Problém dává studentovi prostor k přemýšlení.
- Problém ozřejmuje některý základní matematický pojem.
- Problém vyžaduje užití matematických schopností.
- V řešení je důležitější strategie než pouhý výsledek.
- Problém má potenciál rozvíjet matematické argumentování žáka.
- Problém umožňuje žákům procvičovat slovní vyjadřování svých myšlenek.
- Během řešení problému se žáci cvičí v používání tabulek, grafů diagramů a symbolů.
- Během řešení problému musí žáci přepínat mezi různými způsoby reprezentace dat.

3.1.4. Prolínání problem posing a problem solving

Problem posing a problem solving se často prolínají. Pokud dostaneme problém, který je definován špatně nebo záměrně otevřeně, stojíme vlastně před úkolem si problém dotvořit a dodefinovat, než se pustíme do řešení. Problém je plně definován, pokud jsou jasně definovány výchozí objekty, operátory a cíle. Podle toho, jak úplně či neúplně jsou definovány výchozí stav a cíl, můžeme kategorizovat čtyři typy zadání problému (Reitman 1965):

1. Výchozí stav ani cíl nejsou jasně dány.
2. Výchozí stav není jasně dán, cílový ano.
3. Výchozí stav je jasně dán, cílový ne.
4. Výchozí i cílový stav jsou jasně dané.

(Reitmanova klasifikace se plně nekryje s klasifikacemi již zmíněnými. Autor se zabývá klasifikací problémů z hlediska otevřených úloh, můžeme tam tedy najít kategorie, které se částečně kryjí s problem solving.)

Do první kategorie (není definován ani výchozí stav, ani cíl) můžeme zařadit veškerou tvorbu problémů na volné nebo téměř volné téma. Leung (1997) uvádí např. příklady: „Vymysli matematickou úlohu, která bude pro tvého kamaráda obtížná." Nebo: „Sestav test na libovolné téma."

Ve druhé kategorii máme přesně zadán cílový stav, nikoli však počáteční. Pokud máme zadán jen výsledek a máme k němu dotvořit problém, jedná se o činnost velmi kreativní. Vytvořené problémy mohou být na základě věku, matematické úrovně a osobnosti žáka výrazně odlišné. Leung uvádí příklad, kdy měli studenti vymyslet problém, jehož řešením by bylo: „Rychlost A je 37 m/min, rychlost B je 28 m/min." Samozřejmě se vyskytly klasické a očekávané úlohy typu: „Dráha je dlouhá 1 036 m. A ji projede za 28 minut, B za 37 minut. Jaké jsou rychlosti A a B?" Někdo na jiné matematické úrovni ale může změnit podstatu problému a zabrousit do zcela jiné oblasti matematiky: „Vlaky A a B jedou určitými rychlostmi. Najdi tyto rychlosti, jestliže jejich součet je 65 m/min a rozdíl 9 m/min."

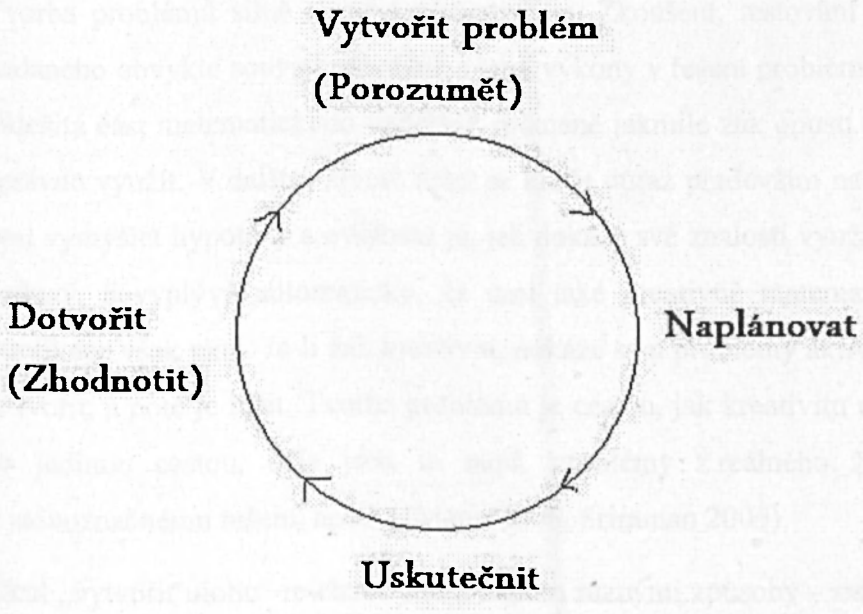
Popis třetí kategorie říká, že máme zadán výchozí stav a nemáme zadán cíl. V této kategorii se blížíme ke kategoriím předchozích třídění typu „známe výpočet, ale ne kontext", „známe obrázek, ale ne kontext" apod. Výchozí stav je tedy zadán, ale ne detailně. Jsou dány výchozí podmínky, není k nim ale přidán kontext, nejedná se tedy o řešení problému, ale opět o jeho tvorbu. Výchozí situace může být zadána i poměrně obecně (např. obrázek několika spojených čtverců). Škála problémů vytvořených žáky je zde opět velmi pestrá (např. spočítat čtverce, zápalky, ze kterých by byl útvar složen, počty cest „odněkud někam" nebo opět úplně jiný kontext – doplnit útvar, aby byl symetrický, apod.).

Někdy může být problém zadán tak, aby automaticky naváděl na problém, který měl autor na mysli. (Např.: „Čaj je balen v plechovkách po ½ kg. Máme 28 plechovek. ___________ – Jako odpověď na tento úkol se samozřejmě většina dětí zeptá: „Kolik kg náš čaj váží?") Takto přesně strukturovaná zadání nevyžadují od žáka téměř žádnou aktivitu.

V této kategorii můžeme rozvíjet i mezipředmětové vztahy. Žáci mohou vytvářet úlohy komplexního charakteru, které se výchozí situací zabývají nejen z matematického hlediska.

Vytvořit problém, máme-li zadán počáteční i cílový stav (čtvrtá kategorie), znamená vlastně přetvořit již stávající problém. Žáci mají reprezentovat problém jinou formou, vytvořit k problému jiný kontext, položit otázku jiným způsobem, … Problém mohou úplně změnit, zkombinovat jej s jiným problémem nebo vytvořit podobně znějící problém a porovnávat jej s problémem původním (Leung 1997).

Problem posing má s problem solving hodně společného. Někteří autoři (např. Leung 1997) uvádí, že problem posing je vlastně část problem solving a že se o něm nedá hovořit odděleně od problem solving. Problem posing odpovídá pouze s malými úpravami i Polyovo členění etap problem solving (bude zmíněno v kapitole „Problem solving"). Polyův čtyřfázový model problem solving (přibližně řečeno řešení problému) je: Porozumět, Naplánovat, Uskutečnit, Zhodnotit (Polya 1973). Tento model lze mírně upravit a překreslit. V této úpravě je velmi dobře vidět souvislost problem posing a problem solving – viz obr. 1 (Leung 1997).



Obr. 1: Model problem posing a problem solving[2]

---

[2] Přeloženo z Leung 1997

3.1.5. Problem posing a žáci

Učitel může žákům zadat úkol, aby vytvořili problém. Tento způsob práce je velice doporučovaný. Vytváření problému vede k hlubšímu porozumění dané problematice. Žáci uvidí danou problematiku z jiného pohledu, méně závislou na kontextu (Pirie 2002). Navíc máme-li řešit problém (např. provést důkaz tvrzení), vycházíme z něčeho, co je předem dané, co platí. To však není pravda v oblasti tvorby problémů. I proto má využití problem posing v práci se studenty velký význam (Seo 1997).

Zadání úlohy typu „vytvoř problém" můžeme použít i k diagnostice žákovského porozumění dané tematice. (Můžeme analyzovat, jak obtížný problém žák vytvořil, a také, jestli je problém adekvátní kontextu, ve kterém jsme jej zadali. Zvláště u zadání „vytvořit problém, který je možné řešit daným výpočtem" se hodně dozvíme o tom, zda žák operacím v daném výpočtu opravdu rozumí.)

Metodu problem posing využívají i v alternativních školách – žáci si sami hledají témata a formulují problémy, kterými se chtějí ve škole zabývat. To odpovídá základním myšlenkám alternativních škol – žáci mají podíl na rozhodování o svém vlastním vzdělávání (Borba 1994).

Tvorba problémů silně souvisí s kreativitou. Zkoušení, testování a prohlášení žáka za nadaného obvykle souvisí převážně s jeho výkony v řešení problémů. To je sice rozhodně důležitá část matematického vzdělání, nicméně jakmile žák opustí školu, nemusí je umět správně využít. V dalším životě žáka se klade důraz především na jeho kreativitu, jak si umí vymýšlet hypotézy a ověřovat je, jak dokáže své znalosti využívat. Z faktu, že je žák nadaný, nevyplývá automaticky, že umí také kreativně matematicky myslet. Opačná implikace však platí. Je-li žák kreativní, dokáže sám problémy aktivně vyhledávat, tedy si je tvořit, a poté je řešit. Tvorba problémů je cestou, jak kreativitu u žáků rozvíjet (i když ne jedinou cestou, dále jsou to např. problémy z reálného života, které nevedou k jednoznačnému řešení, apod.) (Mann 2006, Sriraman 2005).

Úkol „vytvořit úlohu" můžeme zadat žákům různými způsoby – od toho nejvolnějšího až po nejstrukturovanější, kontext může být zadaný různými způsoby interpreatace (viz „Členění problem posing"). Nenásilnou cestou je i zadat problém k řešení a jako následující aktivitu nechat žáka dodělat vlastní podúlohu. Je možné využívat i formu skupinové práce.

Další ze strategií užívaných učiteli je strategie „Co když ne-?". Podstatou této strategie je, že si student sám změní podmínky úlohy, změní předpoklady. Nový problém vyřeší a poté porovná, jak se změna problému odrazila v řešení problému. Základem je nový nápad, na konci procesu by měl žák vidět nové vztahy a propojení (Seo 1997).

Jak je již zmíněno výše, někdy se smíchají prvky problem posing s prvky problem solving, tedy řešení daného problému. Pirie (2002) ve svém článku uvádí motivaci na problem posing: „Pokud by někdo vytrhl z vaší učebnice stránku s příklady, ale vy jste stále měli zadní stranu učebnice s výsledky, dovedli byste říci, jaká byla kvadratická rovnice v zadání?" Tento příklad je ale podle mě diskutabilní jako úkol na problem posing, spíš bych řekla, že se jedná o velmi vhodný úkol na problem solving žáků, protože má téměř jednoznačné řešení (až na vynásobení konstantou, které může učitel podle úrovně žáků i vyžadovat jako diskusi počtu řešení).

Úkoly na tvorbu úloh pro žáky mají mnoho variant a mohou se spojit i s jinými předměty a problémy. Můžeme např. chtít po studentech vytvořit problém v cizím jazyce (Pirie 2002) nebo v rámci mezipředmětových vztahů nebo přímo v rámci projektového vyučování nechat žáky tvořit otázky k nějaké komplexní situaci.

Žáci jsou problem posing situacím vystavováni poměrně zřídka. Ani univerzitní studenti nebývají často stavěni do situace, aby si vytvářeli vlastní problémy – proběhly výzkumy na technických školách, kde studenti budou mít v profesním životě silnou potřebu si problémy vyhledávat sami. Tyto výzkumy však neukázaly významný rozdíl mezi studenty prvního ročníku a studenty pokročilého kurzu matematického dokazování (Grundmeier 2002).

3.2. *Problem solving*

3.2.1. Co je problem solving

Problem solving přeloženo do českého jazyka znamená řešení problémů. Řešení problémů je hledáním cesty. Neexistuje žádný univerzální návod, co dělat, když máme začít řešit problém. Je to praktická, nikoli mechanická činnost. Proto i způsob, jak se řešení problémů naučit, je – stejně, jako když se chceme naučit plavat nebo hrát na piano – nápodoba a trénování. Neboli jinými slovy – nenaučíme se řešit problémy, pokud jich sami mnoho nevyřešíme. A pokud neumíme problémy sami dobře řešit, nemůžeme většinou kvalitní problémy ani vytvářet – to je jedna z mnoha souvislostí mezi problem posing a problem solving.

Zamysleme se nyní znovu nad tím, co vlastně problém je. Obecný – tedy nejen matematický – problém vychází z potřeby (Polya 1964). Potřebujeme se najíst – musíme vyřešit problém, kde jídlo sehnat. Potřebujeme zjistit obvod daného útvaru – musíme vyřešit problém, jak jej spočítat. Když v situaci okamžitě víme, jak reagovat, svoji potřebu dokážeme uspokojit bezmyšlenkovitě – pak daná situace nebyla problémem. Pokud však pro nás zjevné řešení neexistuje, situace problémem je. V předchozí větě zdůrazním slova „pro nás". Tím se dostáváme již k jinému aspektu problému – tedy stejná situace může být pro někoho problémem, zatímco pro jiného nikoli. Např. není pro mě problém sehnat jídlo, když jsem ve městě a mám peníze. Zatímco pro někoho bez peněz to problém je. Stejně tak i v matematice – stejná slovní úloha je pro některého žáka problém, pro jiného ne – záleží např. na věku, ročníku školní docházky, talentu, zkušenostech s obdobnými úlohami, momentálním stavu apod.

3.2.2. Polyův čtyřfázový model řešení problému

Polya (1964) řešení problému definuje následovně: „Řešit problém znamená vědomě hledat postup, který vede k dosažení jasně definovaného, nikoli však zjevně dostupného cíle."

Polya (1965) rozpracovává teorii o řešení problémů: „Hledání řešení problému znamená nalézání souvislostí mezi dříve nepropojenými předměty nebo myšlenkami (co máme, co chceme, data, neznámé, hypotézy a řešení)."

Velmi známý je Polyův čtyřfázový model řešení problému, který jsem již zmiňovala v kapitole o problem posing. Tento model lze vyjádřit čtyřmi hesly: Porozumět, Naplánovat, Uskutečnit, Zhodnotit.

1. Porozumění problému znamená uvědomit si, o čem vlastně problém je, co máme zadané, k čemu se chceme dostat.
2. Vytvoření plánu řešení znamená zvolit vhodnou strategii, kterou je možné problém řešit.
3. Uskutečnění plánu řešení znamená v kontextu matematického problému např. provést nezbytné výpočty.

4. Zhodnocení je další fáze řešení problému! Vyřešíme-li problém, je nezbytné se zamyslet, zda je naše řešení reálné, popř. pokud je to možné, provést zkoušku. Nesouhlasí-li náš výsledek s realitou, musíme začít znovu od prvního kroku (Polya 1973).

Poslední krok – zhodnocení – je podle mých zkušeností velmi opomíjenou částí ve vyučování matematice. Nezřídka si učitelé stěžují, že žák se vůbec nepozastavil např. nad svým výsledkem: „V silu bylo 1,83 g obilí." Zkoušku (nejen u rovnice) vnímají často pouze jako formalitu a neuvědomují si, že mají v ruce poměrně mocný nástroj, jak si zajistit správnost výsledku. Tímto problémem se zabývám i v didaktické analýze úlohy 5 první série – 81 % řešitelů této úlohy poslalo řešení, které odporuje zadání úlohy.

3.2.3. Členění přístupů ke strategiím řešení problémů

Existuje mnoho možností, jak členit přístupy k řešení problému. Některým autorům některé přístupy chybí, různí autoři nazývají stejné přístupy různě... V této diplomové práci využiji přehled strategií řešení problémů podle encyklopedie Wikipedia (s vynecháním přístupů, které se podle mého názoru do matematiky příliš nehodí, jako např. morfologická analýza)[3]:

1. Rozdělení problému na dílčí části – problém strukturujeme do kroků, ty řešíme jeden po druhém.
2. Strategie stoupání – vytváříme si dílčí jednodušší problémy, které postupně zesložiťujeme až do vyřešení původního problému. Někdy se může dokonce zdát, že nás řešení těchto dotvořených problémů odvádí od řešení původního, nicméně z těchto úloh čerpáme zkušenosti a poznatky k vyřešení původního problému. Zde odkazuji na kapitolu o matematických soutěžích, kde se zmiňuji o návodných úlohách. Návodné úlohy jsou z hlediska problem posing polostrukturovaná tvorba, z hlediska problem solving pomáhá autor řešiteli řešit daný problém právě strategií stoupání, avšak pouze v případě, že řešitel si nedovede vhodné dílčí podúlohy vymyslet sám.

---

[3] Kapitolu jsem zpracovala podle stránky v anglickém jazyce. Jedná se o můj vlastní překlad, proto některé použité termíny nemusejí odpovídat české odborné terminologii.

3. Analýza prostředků a závěrů – tato strategie je vědečtěji propracovaným spojením předchozích dvou. Systematicky stanovíme počáteční a cílový stav, přesně rozvrhneme průběžné cíle, které nám pomohou vyřešit původní problém.
4. Metoda pokusu a omylu – nahodile zkoušíme různé postupy, které nás napadnou, zkoušíme odhadnout výsledek. S přibývajícími zkušenostmi pak i odhady bývají méně náhodné.
5. Brainstorming – tedy organizované sbírání i zdánlivě nesmyslných nápadů, poté jejich realistické zpracování.
6. Analogie – vyjdeme od problému, který řešit umíme a je novému problému podobný. Snažíme se najít řešení mající s řešením známého problému společné znaky.
7. Generalizace – snažíme se problém zobecnit a z této obecné situace vyjít.
8. Indukce – tato metoda se uplatňuje zvláště u hledání obecného řešení. Nejprve si problém vyřešíme pro několik konkrétních případů, snažíme se v postupech řešení nebo ve výsledcích objevit něco společného a poté dokázat, že je tato zákonitost obecná.
9. Variace problému – problém mírně pozměníme (např. ubereme jednu z počátečních podmínek) a zkoumáme, zda by nám získané závěry nepomohly i u řešení problému původního.
10. Konkretizace – vyjdeme z obecně známého postupu nebo faktu, ten konkretizujeme na problém, který řešíme.
11. Přeskupení prvků – svoje výchozí data rozebereme k jednotlivostem a poté se je snažíme přeskupit tak, aby nám to pomohlo v řešení.
12. Zpětná práce – předpokládáme, že máme problém vyřešen, a propracováváme se k tomu, co již známe. (Tento postup je velmi častý např. v důkazových nebo konstrukčních úlohách.)
13. Nakreslení problému – vytváříme si přehledná schémata, tabulky, grafy apod.
14. Dedukce – řešíme problém na základě matematické logiky.
15. Pokus o důkaz neexistence řešení problému – snažíme se dokázat, že problém nemá řešení. V místě, kde narazíme na spor, nebo jen v místě, kde již nejsme schopni pokračovat, může být dobrý výchozí bod pro řešení původního problému.

16. Obrácení předpokladů – zkoušíme si problém vyřešit, kdyby všechny podmínky byly opačné. Zkoušíme, zda by nám získaná znalost nepomohla v řešení původního problému.

17. Práce s literaturou – pokoušíme se najít, zda problém již někdo nevyřešil, nebo zda bychom nenašli alespoň něco, co by nám při řešení pomohlo (vyřešený analogický problém, návodný problém atd.)

Všimněme si zde opět souvislosti mezi problem posing a problem solving. U mnohých z výše uvedených postupů si vytváříme nějakým způsobem dílčí, jednodušší či příbuzné problémy. Tyto problémy musí být vhodně volené a vhodně vymyšlené, aby nám při řešení k něčemu byly. A to už je problem posing.

4. Přehled matematických soutěží pořádaných v ČR se zřetelem k problem posing a problem solving[4]

Matematická soutěž je velmi bohatý materiál, kde můžeme zkoumat problem posing a problem solving. Problémy, které jsou v matematické soutěži řešeny, musí nejprve někdo vymyslit (problem posing). Přitom si je sám řeší, výslednou podobu těchto problémů řeší účastníci soutěže (problem solving).

V práci se zabývám matematickými soutěžemi, které probíhají v České republice s velkým počtem účastníků, tedy na alespoň regionální úrovni.

4.1. Charakteristika problémů do matematické soutěže

V této kapitole popisuji základní rysy problémů do rozsáhlejších matematických soutěží, tedy již ne problémy z obecné stránky.

4.1.1. Otevřené problémy

Otevřené problémy jsou takové problémy, kde řešitel sám formuluje odpověď na otázku. Otevřené úlohy jsou základem většiny matematických soutěží – ze soutěží, kterými se dále budu zabývat, se otevřené úlohy nevyskytují pouze v Matematickém klokanovi. V těchto soutěžích jsou téměř vždy úlohy otevřené široce, tzn. vypracování těchto úloh je delší než jedno slovo nebo jedna věta, je obtížné nebo spíše nemožné předvídat všechny varianty odpovědí řešitelů.

---

[4] Kapitola byla zpracována na základě poznámek z předmětu Metody řešení úloh III zimního semestru 2007/2008 vedeného J. Zhoufem, na základě v textu uvedených internetových stránek soutěží a v neposlední řadě na základě vlastních zkušeností, neboť jako studentka jsem všemi soutěžemi s výjimkou Turnaje měst a korespondenčního semináře na střední škole úspěšně prošla.

Tvorba problémů do matematické soutěže je specifická v tom, že problémy mají být *originální* – nemají se používat úlohy, které je možné najít v nějaké učebnici nebo jiné matematické literatuře – to zvýhodňuje žáky, kteří doma knihu mají a úlohu již řešili.

Problém má být přiměřeně *obtížný* – jak moc, to záleží na typu soutěže, obecně bývá ale obtížnější než klasické problémy v učebnicích. Jeho řešení má vyžadovat propojení různých poznatků z matematiky, objevování nových souvislostí, nápad, ...

Problém však *nemá být* čistě *trikový* – tedy založený na jediném nápadu, na který řešitel přijde nebo nepřijde v podstatě náhodně. Takový problém opět zvýhodňuje jedince, kteří se s daným trikem již setkali.

Problém může vyžadovat složitější *numerické výpočty*, obvykle ale ne v takové míře, aby tento výpočet byl složitější než vymyšlení strategie řešení. Problém má být směrován tak, aby strategie řešení byla důležitější než správný výsledek.

Řešení problémů (tedy problem solving) provádějí žáci – řešitelé soutěže. Velmi důležitá je strategie, kterou řešitel použil. Strategie bývá ceněna více než výsledek, proto jsou řešitelé vyzýváni k důslednému zápisu svých myšlenek a výpočtů. U některých soutěží je důležitá i rychlost výpočtu, u některých ne.

Řešení problémů zadaných v soutěžích žáky obohacuje, protože se setkají s netypickými problémy, které během běžných vyučovacích hodin obvykle nebývají řešeny.

4.1.2. Uzavřené problémy

Uzavřené problémy jsou takové problémy, kde existuje konečné množství variant odpovědí, které může řešitel podat. Uzavřených úloh existuje mnoho typů (výběr jediné správné odpovědi z nabídky, výběr více správných odpovědí z nabídky, přiřazování, seřazování, ...). V této práci se však budu zabývat jedinou variantou uzavřených úloh, která se v matematických soutěžích hojně rozšířených v ČR vyskytuje, a to je výběr právě jedné správné odpovědi z nabídky. (Soutěží využívající tuto formu je Matematický klokan, kde soutěžící označují vždy jen jednu z variant A, B, C, D, E.)

Stejně jako u tvorby otevřených soutěžních úloh je zde požadavek na *originalitu* a *přiměřenou obtížnost.*

O pravidlech specifických pro tvorbu uzavřených úloh se dočteme v jakékoli publikaci vztahující se k didaktickým testům, zvláště v kapitolách o konstrukci testových položek (např. Hrabal, Lustigová, Valentová 1994).

Z nich jako nejdůležitější uvedu pravidlo, že *distraktory* (tedy nesprávné varianty řešení) musí být pro žáka, který netuší správnou odpověď, *stejně atraktivní.* (Tedy v ideálním případě většina žáků zvolí správnou odpověď a odpovědi ostatních žáků jsou rovnoměrně rozděleny mezi všechny zbylé odpovědi.)

Pro autora problému testového charakteru tedy vyvstává další problém přesně na pomezí problem posing a problem solving. Když problém vytvoří a sám si jej správně vyřeší, musí se vžít do role žáka a vymýšlet co nejpravděpodobnější chybné postupy, jak „lze" úlohu řešit, a uvádět jako distraktory výsledky těchto postupů; nebo vymýšlet takové chybné odpovědi, které se na první pohled a bez hlubší úvahy jeví jako správné.

Obvykle autor nepředkládá *chybné odpovědi,* které vzniknou očekávanou numerickou chybou, ale chybné odpovědi vzniklé *chybou v úvaze.* Tak je alespoň částečně kompenzován fakt, že postup při řešení úlohy není součástí hodnocení.

Protože řešitel nemá možnost své řešení nijak obhájit a opravovatel vidí jen variantu, kterou řešitel zatrhl, musí dát autor problému velký pozor na to, aby úloha byla *jednoznačně pochopitelná* a měla *jednoznačné řešení.*

4.2. Matematická olympiáda

Tato soutěž je snad nejznámější z matematických soutěží, v České republice má dlouholetou tradici. (ČR byla jedna z prvních zemí, která začala Matematickou olympiádu organizovat.)

4.2.1. Základní informace

Informační zdroje[5]

http://www.math.muni.cz/~rvmo

Ročenky Matematické olympiády

Hlavní cíle soutěže

Podstatou Matematické olympiády je vyhledávat a podchycovat matematické talenty. Dalšími cíli jsou rozvíjet matematiku obecně, vytvářet materiály a problémy použitelné

[5] V oddíle Informační zdroje vždy uvádím přehled nejdůležitějších zdrojů informací o příslušné soutěži.

i v běžných hodinách matematiky, motivovat žáky k další práci, učit žáky lásce k matematice, ...

Struktura

Soutěž je organizována na celorepublikové úrovni (termíny okresních a regionálních kol jsou pro celou republiku stejné, zadání úloh rovněž).

Soutěž je rozdělena na ročníky – pro pátý až devátý ročník ZŠ a odpovídající ročníky víceletých gymnázií existují kategorie Z5 až Z9, pro první ročníky středních škol kategorie C, pro druhé ročníky kategorie B a pro třetí a čtvrté ročníky dohromady kategorie A. Obvyklé je, že se žák účastní příslušné kategorie svého ročníku, pravidla ale umožňují (a opravdu se výjimečně i stává), aby žák soutěžil v libovolné vyšší kategorii.

Pro všechny kategorie existuje domácí kolo (6 úloh), dále jsou to pro kategorie Z6 až Z8 okresní kolo, pro kategorii Z9 okresní kolo a krajské kolo, pro kategorie B, C školní kolo a krajské kolo, pro kategorii A kola školní, krajské a celorepublikové. Nejlepší řešitelé celorepublikového kola kategorie A postupují do Mezinárodní matematické olympiády, tou se však v této práci zabývat nebudu, protože přesahuje rámec České republiky.

Rozvržení počtu úloh a času, který na jejich řešení účastníci mají, ukazuje následující tabulka:

Kategorie	Ročník	Domácí kolo	Okresní kolo	Školní kolo	Krajské kolo	Celorepublikové kolo
Z5	5. ZŠ	6 úloh, řeší doma	3 úlohy, 1 hodina	–	–	–
Z6	6. ZŠ	6 úloh, řeší doma	3 úlohy, 2 hodiny	–	–	–
Z7	7. ZŠ	6 úloh, řeší doma	3 úlohy, 2 hodiny	–	–	–
Z8	8. ZŠ	6 úloh, řeší doma	3 úlohy, 2 hodiny	–	–	–
Z9	9. ZŠ	6 úloh, řeší doma	4 úlohy, 4 hodiny	–	4 úlohy, 4 hodiny	–

C	1. SŠ	6 úloh, řeší doma	–	3 úlohy, 4 hodiny	4 úlohy, 4 hodiny	–
B	2. SŠ	6 úloh, řeší doma	–	3 úlohy, 4 hodiny	4 úlohy, 4 hodiny	–
A	3. SŠ a 4. SŠ	6 úloh, řeší doma	–	3 úlohy, 4 hodiny	4 úlohy, 4 hodiny	6 úloh, 9 hodin

Organizace

Zájemce o účast v soutěži musí nejprve vyřešit úlohy domácího kola – zpravidla jich je 6. Jeho učitel řešení opraví (oznámkuje 1 – 3) a s řešitelem řešení úlohy projde. Do dalšího kola postupuje řešitel s minimálně čtyřmi úlohami ohodnocenými 1 nebo 2. Tyto úlohy dále putují k osobě pověřené pro daný region, která ohodnocení úloh zkontroluje. Je tedy zjevné, že se řešitel nemusí zabývat všemi úlohami. V jeho vlastním zájmu však je, aby si úlohy vyřešil všechny nebo si alespoň řešení zjistil, neboť v dalších kolech může získané znalosti a dovednosti využít (viz kapitola „Problem posing v Matematické olympiádě“). Učitel může žákům pomáhat návodnými úlohami, které jsou součástí autorského řešení.

Žáci, kteří postoupili ze školního kola, dále samostatně řeší (podle ročníku buď na okresní, nebo na školní úrovni) určený počet úloh v určeném čase. Pověřený učitel je opraví, v okresním kole jsou vyhlášeni vítězové. Pokud existuje v příslušném ročníku třetí kolo, postupují do něj nejlepší řešitelé kola druhého.

4.2.2. Problem posing v Matematické olympiádě

Problémy do Matematické olympiády může tvořit kdokoli. Vytvořený problém pošle příslušné kontaktní osobě pro danou kategorii a ta sama vybere několik nejlepších; z nich potom vybírá problémy, které se v soutěži opravdu využijí, komise.

Problémy v Matematické olympiádě jsou velmi náročné. To vychází z účelu soutěže – nalézat a rozvíjet opravdové matematické talenty. V domácím kole mají řešitelé na řešení problému téměř neomezené množství času, v dalších kolech (s výjimkou páté třídy) minimálně 40 minut času na jeden problém, tedy úlohy mohou být i rozsáhlejší či obsahovat delší výpočty. Úlohy musí být tak rozsáhlé, aby je řešitel za daný čas stihl, neměly by však být takové, aby za použití šťastné strategie mohly být vyřešeny téměř bez jakéhokoli výpočtu. (I když někdy by toto mohl být cíl zadavatele, v Matematické olympiádě to však bývá velmi zřídka.)

Matematická olympiáda má i další zajímavost z hlediska problem posing. Jak jsem již uvedla, úlohy by měly být originální. Přesto se v této soutěži vyskytuje i jiná úroveň tvorby úloh podle Stoyanové (2000) než volná tvorba, a to tvorba polostrukturovaná. Dokonce ve dvou variantách. První situací, kdy autoři úloh tvoří polostrukturovaně, je tvorba návodných úloh. Tyto úlohy jsou součástí autorského řešení domácího kola. Učitelé jimi mohou pomáhat žákům, kteří si se soutěžní úlohou domácího kola nedovedou poradit, ale chtěli by úlohu vyřešit. Je uznávaným názorem v didaktice matematiky, že myšlenka, kterou žák objeví sám, je mnohem cennější, než když mu někdo správný postup pouze prozradí. A návodné úlohy jsou navrhovány tak, aby jejich řešením žák po menších krocích vymýšlel nápady, které vedou k řešení „velké“ úlohy soutěžní. Tedy návodné úlohy jsou kratší a snazší než úloha soutěžní, jejich řešení nevyžaduje propojení tolika myšlenek a operací, ale je postaveno na stejném principu jako řešení soutěžní úlohy nebo alespoň její části.

Druhou situací polostrukturované tvorby problémů do Matematické olympiády je sama tvorba problémů druhých a dalších kol. Jak jsem již zmínila, cílem matematické olympiády je nejen vyhledávání talentů, ale i jejich rozvoj. Proto jsou do vyšších kol soutěže někdy zařazovány problémy, jejichž podstata tkví v podobné myšlence jako podstata některého problému z domácího kola. Samozřejmě se nejedná o zcela obdobnou úlohu, ale jistý stejný vhled do úlohy tady je. Řešitel tedy prokazuje, zda si něco z předchozích kol odnesl. A autor vytváří úlohu s podobným myšlenkovým motivem jako má úloha již použitá, tedy opět se věnuje polostrukturovaně tvorbě problému.

Mohli bychom diskutovat, jestli i úlohy do školního kola a úlohy kol vyšších, které nenavazují na kolo domácí, jsou sestavovány volně, nebo polostrukturovaně. Já se přikláním k názoru, že tuto tvorbu ještě můžeme nazývat jako volnou. Projevy polostruktované tvorby se zde ale nacházejí. Jedním z nich je ohlídání přiměřené náročnosti (a to z obou stran – úlohy nesmí být ani příliš těžké, ani zbytečně snadné). Druhým je ohlídání tematické pestrosti příslušného kola. Zároveň se nemohou zadávat úlohy z oblastí matematiky, která není pro příslušný ročník povinná. (Např. nelze zadávat úlohy na využití diferenciálního počtu, který v dobíhajících osnovách byl jako rozšiřující učivo, v RVP se nevyskytuje.) Tedy např. existuje nepsaný zvyk, že v úlohách pro kategorii C se mohou vyskytnout témata jen z aritmetiky, algebry, planimetrie, stereometrie a jednoduché kombinatoriky. Omezení konkrétními tématy přímo pro autora, který úlohu pošle do konkurzu, je však malé.

4.2.3. Problem solving v Matematické olympiádě

Žáci řeší poměrně obtížné úlohy. Nedílnou součástí je podrobně popsaný postup řešení, bez něhož by ani správný výsledek nemohl být uznán. Naopak za úlohu řešenou správným postupem, kde řešitel udělal malou – např. numerickou – chybu, získá téměř maximální bodové ohodnocení. (Tím je soutěž obtížnější pro opravovatele než např. Pythagoriáda. Také je mnohem obtížnější vyloučit subjektivní přístup opravovatelů. Obvykle se to řeší tak, že jednu úlohu v jednom kole v okrese nebo kraji opravuje jeden pedagog, řešení žáků postupujících do dalšího kola jsou dále ještě jednou procházeny okresním nebo krajským koordinátorem soutěže.)

Žáci prokazují znalosti postupů a terminologie příslušných oblastí matematiky a dovednosti je účelně propojovat a dávat jim nové interpretace.

Řešitelé smí používat Matematicko-fyzikální tabulky a kalkulátory bez grafického displeje.

Protože žáci nebo studenti řeší poměrně obtížné úlohy vyžadující více myšlenkových operací a výpočtů, nebývá cesta ke správnému vyřešení úlohy jednoznačná, a je proto velmi zajímavé sledovat různé strategie, které řešitelé použili.

4.3. Pythagoriáda

Tato soutěž má v ČR rovněž dlouholetou tradici, i když není tak známá jako Matematická olympiáda. Jedním z důvodů menší známosti je, že je méně prestižní než Matematická olympiáda a účastnit se jí mohou pouze žáci šestých a sedmých ročníků základních škol nebo odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

4.3.1. Základní informace

Informační zdroje

http://www.glouny.cz/matematika/pythagoriada/p_03_04_6rocnik.htm

http://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagori%C3%A1da

Hlavní cíle soutěže

Soutěž sice rovněž vyhledává matematicky nadané žáky, ale nadané jiným způsobem – úspěšný žák v této soutěži musí umět počítat poměrně rychle a bez chyb hravé, ne příliš obtížné úlohy. Druhý cíl soutěže je dát zažít pocit úspěchu v matematice i dětem, které nejsou v Matematické olympiádě úspěšní, a motivovat je tím k většímu zájmu o matematiku. Úlohy mohou učitelé používat i během běžných hodin matematiky.

Struktura

Soutěž je opět zadávána centrálně, tedy všechna školní i okresní kola se píší ve stejný den a zadávány jsou stejné úlohy. Okresní kolo je v této soutěži nejvyšší, krajské kolo neexistuje.

Organizace

Soutěž má školní a okresní kolo. V obou žáci řeší 15 úloh během jedné hodiny. Do okresního kola postupují ti žáci, kteří získali ve školním kole alespoň 12 bodů. Existují dvě kategorie – pro žáky šestých tříd ZŠ a pro žáky sedmých tříd ZŠ (obojí samozřejmě i pro studenty odpovídajících ročníků víceletých gymnázií).

4.3.2. Problem posing v Pythagoriádě

Jak jsem již zmínila, úlohy mají naprosto jiný účel než úlohy Matematické olympiády. Zatímco v matematické olympiádě jsou úlohy, kde je na první pohled vidět výsledek, velmi neobvyklé, v pythagoriádě jsou naopak přípustné, i žádoucí.

V řešení, které žák odevzdává, je sice postup nutnou součástí řešení, daleko víc ale záleží na správnosti výsledku. (Za každou úlohu řešitel buď dostane, nebo nedostane 1 bod.)

Autor tedy musí vymýšlet úlohy hravé, aby splnil motivační cíl. Úlohy nesmí být příliš jednoduché, musí od řešitele vyžadovat přemýšlení. Na druhou stranu ale zase nesmí obsahovat příliš složité numerické výpočty, a to jednak proto, že řešitel má na úlohy poměrně málo času, a jednak proto, že při hodnocení se hledí na původ chyby velmi málo. (Účelem soutěže je nejen rychlé, ale i správné počítání.)

Z hlediska autora úloh v této soutěži nacházíme převážně tvorbu volnou, samozřejmě s omezeními, aby byly úlohy adekvátní věku řešitelů a času, který na úlohy mají; a také přiměřenou tematickou pestrostí. (Tj. aby se vyskytovaly úlohy z různých oblastí matematiky.) Čistě polostrukturovanou tvorbu v soutěži nenacházíme, neboť okresní kolo nemá na školní kolo vazbu jako v olympiádě a návodné úlohy jako v olympiádě neexistují. (Zde by neměly žádný smysl, neboť úlohy jsou poměrně jednoduché, k jejich řešení obvykle postačí jeden nápad, spíše by tyto úlohy mohly být návodné k úlohám složitějším.)

4.3.3. Problem solving v Pythagoriádě

Úlohy jsou poměrně snadné, pro některé účastníky je však překážkou poměrně krátký čas na řešení úloh (průměrně 4 minuty na úlohu). U velkého počtu úloh je možné použít strategii vhledu i strategii numerického počítání, v rámci těchto dvou kategorií ale obvykle nebývají příliš razantní rozdíly v použitých strategiích. (I když i zde jsou výjimky a úlohy, které jsou řešitelné naprosto různými způsoby.)

4.4. Matematický klokan

Tato soutěž má kořeny v Austrálii, kde je známá jako „Olympiáda", v ČR se koná od roku 1995. Tato soutěž je podle mého odhadu nejmasověji rozšířenou soutěží v ČR – na některých školách se jí dokonce žáci účastní povinně.

4.4.1. Základní informace

Informační zdroje

http://userweb.pedf.cuni.cz/kmdm/aktivity/m_souteze/klokan.htm

http://matematickyklokan.net/

http://www.glouny.cz/klokan/index.htm

knihy Klokan od nakladatelství Prodos

Hlavní cíle soutěže

Žáci řeší netradiční matematické úlohy, na které je dáno vždy 5 variant odpovědí. Soutěž opět vyhledává matematické talenty a opět motivuje i méně talentované žáky k matematice, protože jim jednak dá zažít pocit úspěchu (většina řešitelů vyřeší alespoň některé úlohy), jednak jim ukáže matematiku z jiné stránky. Většina žáků totiž alespoň u některé úlohy zažije pocit objevu. Díky úlohám tří typů obtížnosti soutěž rozvíjí matematické dovednosti talentovaných i méně talentovaných žáků.

Struktura

Zadání úloh je stejné pro celou Evropu, každá země si podle svých podmínek může změnit maximálně 5 úloh z evropsky odsouhlaseného souboru. Soutěž se koná v celé Evropě ve stejný den a přibližně ve stejný čas.

Organizace

Soutěž má jediné kolo. Pořádá se sice na školní úrovni, ale výsledky se posílají do center ve vyšších správních celcích, některé okresy si dělají tabulky nejlepších řešitelů; vždy existují tabulky nejlepších řešitelů pro celou republiku.

Existuje šest kategorií podle věku žáka. Každá kategorie je společná pro dva ročníky základní nebo střední školy. (Cvrček není celoevropskou kategorií, je to spíše přípravná kategorie.) Jména příslušných kategorií a počty úloh v kategorii uvádí následující tabulka:

Ročník	Kategorie	Počet úloh	Cas na řešení úloh
2. a 3. ZŠ	Cvrček	12	45 min
4. a 5. ZŠ	Klokánek	24	60 min
6. a 7. ZŠ	Benjamin	24	60 min
8. a 9. ZŠ	Kadet	24	60 min
1. a 2. SŠ	Junior	24	75 min
3. a 4. SŠ	Student	24	75 min

Žáci řeší ve stanoveném čase stanovený počet úloh (viz dále). Úlohy jsou uzavřené s volbou odpovědi – variant je vždy 5 a mezi nimi právě jedna správná. Z těchto úloh je třetina hodnocena třemi body, třetina čtyřmi body a třetina pěti body. Za chybnou odpověď se jeden bod odčítá. Za vynechanou úlohu se bod neodčítá. Na začátku dostane účastník přiděleno tolik bodů, kolik úloh má řešit. Tedy v případě, že by na všechny úlohy odpověděl chybně, získal by 0 bodů.

4.4.2. Problem posing v Matematickém klokanovi

Problémy do Matematického klokana může opět navrhnout kdokoli. Svůj problém předá příslušnému republikovému koordinátorovi a ten tento problém, pokud je zajímavý, pošle do evropského konkurzu.

Problémy v Matematickém klokanovi jsou hravé, ale ne ve smyslu klasické hravosti spojené s příběhy, hlavolamy, předmětnými manipulacemi apod. Řada žáků je však jako hravé vnímá, protože jsou to úlohy krátké, rychlé, mnohdy doplněné obrázky a k řešení mají nápovědu pěti variant odpovědí.

K vyřešení úloh často stačí jediný dobrý nápad, v některých je onen nápad podpořen sice krátkým, ale občas i namáhavým výpočtem. Přesto numerické počítání je v Matematickém klokanovi pouze nutným doplňkem, v žádném případě však jeho základem. Důležité ale je, aby řešení problému nebylo viditelné na první pohled a aby vyžadovalo nápad. Texty úloh bývají krátké a zajímavé – velmi často se vztahují ke klokanům nebo k aktuálnímu letopočtu. Úlohy bývají dosti motivující.

Pro tvorbu úloh do Matematického klokana platí všechny zásady uvedené v kapitole „Uzavřené úlohy“.

Při tvorbě uzavřených úloh s výběrem odpovědi se ještě více zdůrazňuje propojení problem posing a problem solving. Aby bylo dodrženo pravidlo, že všechny odpovědi musí být pro řešitele, který správnou odpověď nezná, stejně atraktivní, musí si autor nejen úlohu sám vyřešit, ale musí se vžít do role žáka či studenta příslušné věkové kategorie a vymýšlet různé chybné úvahy, kterými se řešitel mohl nechat svést, a různé lákavé varianty, které na první pohled vypadají správně, a přitom správné nejsou. Zdůrazňuji však, že soutěž sice předpokládá správné numerické počítání jako nezbytné pozadí, bez kterého by se řešitel ke správnému výsledku nedobral, nejdůležitější je ale přemýšlení. Proto jsou chybné varianty řešení navrhovány tak, aby postihovaly předpokládané chyby v úvaze žáka, nikoli, aby byly připravené podle očekávaných numerických chyb a dávaly tím naroveň žáka, který vymyslí správný postup řešení, ale udělá drobnou numerickou chybu, s žákem, který úlohu řešil zcela chybně.

V Matematickém klokanovi je ze všech zmíněných soutěží nejvíce důležitá jednoznačnost. Pokud autor (omylem nebo i záměrně) zadá úlohu nejednoznačně v otevřené úloze, opravovatel ze zápisu žákova postupu zjistí, jak úlohu pochopil žák, a zpětně tak může na nejednoznačnost v zadání přijít. U uzavřených úloh ale vidí jen výsledek a o postupu žáka neví nic. Autor musí proto zvýšeně dbát na jednoznačnost, a to na jednoznačnost řešení úlohy i na jednoznačnost vyznění textu úlohy.

Dále se na úlohy vztahuje – jako u všech soutěží – hledisko přiměřené obtížnosti.

S přihlédnutím ke všem výše zmíněným omezením je již tvorba autora úloh do Matematického klokana volná, jiné prvky strukturované ani polostrukturované tvorby se v této soutěži nenachází. (Samozřejmě v soutěžním kole Matematického klokana musí být i pestrost z hlediska témat matematiky. O tu se ale nestará autor, ale evropská komise, která úlohy vybírá. Autor tedy píše úlohu na libovolné téma, komise pak vybere vyváženou sérii úloh.)

4.4.3. Problem solving v Matematickém klokanovi

Jak bylo již zmíněno, v této soutěži jde hlavně o výsledek. Tedy samozřejmě jde o správný postup, kterým řešitel ke správnému výsledku dojde, ale postup není součástí záznamového archu a nikdo jej nehodnotí. To, že jsou odpovědi zadané a jiná odpověď být správná nemůže, na druhé straně alespoň napovídá řešiteli, pokud udělal numerickou chybu, protože – pokud jde opravdu o obyčejnou numerickou chybu – svoje řešení mezi možnostmi obvykle nenajde. Jde tedy opět hlavně o správnost úvahy.

Pozorovat řešitelské strategie by bylo velice zajímavé, bohužel, nejsou součástí záznamového archu a více o nich bychom se mohli dozvědět pouze analýzou vlastních zkušeností ze soutěže nebo rozhovorem s řešitelem. Z obecného pohledu bych navrhovala rozlišení řešitelských strategií v Matematickém klokanovi do čtyř skupin:

1. Strategie založená na správném řešení – řešitel správným postupem úlohu správně vyřeší. Tato strategie je samozřejmě nejcennější. (Jistěže existují i dvojchyby, které ke zdánlivě správnému řešení vedou také, to se však povede velice zřídka, takže je do klasifikace řešení nezahrnuji.)

2. Strategie založená na čistém tipování – žák si může tipnout, protože se mu nějaká odpověď líbí, protože již „dlouho nebylo áčko“ nebo z jakéhokoli jiného důvodu nepodpořeného matematickou úvahou.

3. Strategie založená na matematicky zdůvodněném tipování – řešitel některé distraktory vyloučí vylučovací metodou, čímž se mu zúží výběr. Ze zbylých výsledek odhadne – tedy netipuje úplně, dovede si zdůvodnit, proč si myslí, že by zvolená odpověď byla lepší. Poslední krok ale nemá podpořený žádnou matematicky čistou úvahou.

4. Výběr jediné možné odpovědi – řešitel sice nedovede dokázat, proč jeho výsledek správný je, ale dovede přesně říct, proč zbylé výsledky správné nejsou. (Tedy v soutěži s otevřenými úlohami by u této úlohy na plný počet bodů nedosáhl, při

řešení ale předvedl přesnou matematickou úvahu a ukázal matematické myšlení, i když trochu jiného směru, než vyžaduje např. Matematická olympiáda. Kdyby autor úlohy zvolil sobě bližší nebo podobnější distraktory, řešení touto strategií by bylo znemožněno nebo alespoň ztíženo.) Řešitel může postupovat klasickou vylučovací metodou vylučováním odpovědí jedné za druhou, nebo vyloučením všech chybných odpovědí najednou. Jako příklad uvedu vlastní zkušenost, kdy jsem oslnila správnou odpovědí u problému kategorie Student, se kterým měl potíže i můj učitel matematiky. Já jej však také nevyřešila matematicky „čistým“ způsobem. U trojúhelníku, jehož obsah jsme měli určit, jsem si hledala co nejvíc vlastností, a povedlo se mi jeho obsah shora omezit dvěma. Tím jsem měla vyhráno, protože tato informace vyloučila všechny čtyři ostatní odpovědi. Metoda výběru jediné možné odpovědi je podle mého názoru z hlediska didaktiky matematiky velmi cenná – spolu se strategií založenou na správném řešení ukazuje řešitel vhled do problému. Znovu zdůrazňuji, že řešitel správnost svého výsledku dokázat neumí, ale pro každou z chybných odpovědí dovede dokázat, že řešením úlohy být nemůže. Je to tedy jakási analogie důkazu sporem, je však provedena v diskrétním prostředí jedné správné odpovědi a čtyř distraktorů – v jiném prostředí by nefungovala.

4.5. Turnaj měst

Tato soutěž je – jak již název napovídá – soutěží, kde proti sobě stojí řešitelé z jednotlivých měst. V době psaní mojí diplomové práce byla do soutěže zapojena města čtyři – Bílovec, Olomouc, Praha a Přerov.

4.5.1. Základní informace

Informační zdroje

http://www.kag.upol.cz/turnajmest/struktura.html

Hlavní cíle soutěže

V řešení úloh, které mají obtížnost podle mého názoru obdobnou jako úlohy Matematické olympiády, soutěží týmy za svoje město. Tedy soutěž opět pracuje s vysoce talentovanými žáky, rozvíjí jejich dovednosti, motivuje je k práci v matematice. Navíc i „boj za své město" působí motivačně. V přípravných i soutěžních úlohách se žáci mohou mnohé naučit.

Struktura

V soutěži proti sobě stojí města, hlavní organizátoři soutěže tedy musí samozřejmě být pro všechna města společní a řešitelé musí řešit stejné úlohy.

Organizace

V Turnaji měst soutěží dvě věkové kategorie – Junior (1. a 2. ročník středních škol) a Senior (3. a 4. ročník středních škol). V rámci jednoho města řeší účastníci problémy vždy ve stejném čase na stejném místě. Obě kategorie mají 5 úloh v přípravné části, kde soutěžící mohou načerpat nové podněty, a 7 soutěžních úloh. Z každé části se jim započítávají tři nejlepší výsledky. Žáci z nižšího ročníku v kategorii jsou při bodování zvýhodněni. Úlohy jsou podle obtížnosti ohodnoceny různým počtem bodů. V řešení se hodnotí hlavně postup.

Soutěž má dvě etapy – podzimní a jarní.

Do výsledného zhodnocení města se počítá bodový průměr nejlepších pěti, deseti, patnácti nebo dvaceti účastníků (podle velikosti města – čím větší město, tím víc účastníků). Vítězí město s největším bodovým průměrem.

4.5.2. Problem posing v Turnaji měst

Při tvorbě problémů do této soutěže je důležité přijít s novými problémy vyšší obtížnosti – jejich znaky jsou podobné jako u úloh Matematické olympiády. I zde je potřeba provázanosti úloh – tentokrát mezi přípravným a soutěžním kolem.

4.5.3. Problem solving v Turnaji měst

Řešitelé odevzdávají vyřešené problémy s podrobně komentovaným postupem, který je zde opět důležitější než výsledek. Úspěch v této soutěži vyžaduje obdobné matematické kompetence jako úspěch při řešení Matematické olympiády.

Tato soutěž však rozvíjí i jiné kompetence z šesti klíčových kompetencí podle Rámcového vzdělávacího programu pro ZŠ, a to např. vědomí příslušnosti k týmu a odpovědnosti za skupinu, tedy kompetence sociální a personální a občanské.

4.6. Korespondenční semináře na střední škole

Dopouštím se mírné nelogičnosti tím, že se věnuji nejprve korespondenčním seminářům na střední škole a teprve poté seminářům na škole základní. Je pravda, že semináře na střední škole navazují na semináře ze školy základní a nasbírání zkušeností ze základoškolských seminářů je pro řešitele výhodou, navíc tyto semináře pracují na obdobných principech. Toto zdánlivě nelogické uspořádání jsem zvolila proto, abych mohla od seminářů pro základní školu plynule přejít k Pikomatu, na kterém jsem dělala výzkumnou část své práce a na kterém jsou založeny další kapitoly.

4.6.1. Základní informace

Korespondenční semináře pro střední školu navazují na korespondenční semináře pro školu základní. Těchto seminářů je několik, obecně lze říci, že zatímco matematické semináře pro základní školu jsou dělány tak, aby vyhledávaly talenty a zároveň poskytly šanci i slabším žákům a aby je pro matematiku více motivovaly, semináře pro střední školu jsou více odborně zaměřeny a vyžadují řešitele s hlubším zájmem o matematiku. (I když zúčastnit se samozřejmě může každý středoškolák.)

Informační zdroje

http://bart.math.muni.cz/~brkos/

http://mks.mff.cuni.cz/info.php

http://mam.mff.cuni.cz/index.php3?stranka=archiv&menu=1&pg=12&tn=&cis=1&roc=XIV

Hlavní cíle soutěže

Soutěž vyhledává a rozvíjí matematické talenty. Tyto soutěže jsou navíc velmi často pořádány vysokými školami matematického nebo fyzikálního směru (např. seminář Prase pod Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy nebo Brkos pod Přírodovědeckou fakultou a Fakultou informatiky Masarykovy univerzity). Tyto školy si tak vytipují vhodné budoucí studenty a pomocí zajímavé práce v semináři a týdenních soustředěních, které tyto semináře obvykle pořádají, je motivují pro studium na jejich škole. Účast a případný úspěch v semináři může znamenat i zvýhodnění u přijímacích zkoušek na pořádající fakultu. V některých seminářích (např. M&M) jsou problémy koncipovány tak, aby žáky středních škol připravily a průběžně motivovaly k vědecké práci.

Struktura

Korespondenční semináře nemají žádnou centrální organizační strukturu. Úlohy, počet sérií, termíny i konkrétní pravidla jsou plně v kompetenci organizátora soutěže.

Organizace

Organizace těchto seminářů je obdobná – organizátoři rozešlou problémy, studenti se rozhodnou, zda se do semináře zapojí. Tito studenti pak vyřeší, co nejvíce problémů zvládnou, a ve stanoveném termínu je odešlou. Organizátoři řešení opraví, obodují a pošlou zpět řešiteli, sestaví výsledkovou listinu, rozešlou zadání problémů pro další kolo. Stejně organizována jsou pak všechna kola, pouze s tím rozdílem, že problémy jsou posílány již jen těm studentům, kteří řešili první kolo. Nakonec jsou vyhlášeny celkové výsledky. (Tedy organizace je hodně podobná organizaci korespondenčních seminářů pro základní školu.) Bodově zvýhodněni jsou mladší řešitelé a v některých seminářích (např. Prase) i řešitelé, kteří se zúčastnili všech sérií. U středoškolských seminářů se téměř bez výjimky koná alespoň jedno týdenní soustředění pro nejlepší řešitele, na kterém se řešitelé seznámí s organizátory a společně se věnují matematickým i nematematickým aktivitám.

Některé semináře jsou čistě matematické (např. Prase), některé mají silný přesah do fyziky (např. M&M).

4.6.2. Problem posing v korespondenčních seminářích

Tvorba problémů pro korespondenční semináře na středních školách má jisté společné znaky s tvorbou problémů pro Matematickou olympiádu, a to vysokou obtížnost úloh a přísný požadavek na originalitu. Řešitelé řeší totiž problémy doma, proto kdyby bylo možné najít obdobnou úlohu v literatuře, řešitel by vše mohl jen opsat. Úlohy musí být tvořeny tak, aby byly obtížné, jejich řešení vyžadovalo nápad a měly přesah i do vědecké práce (tedy např. v M&M řešení složitých problémů z reálného života).

Úlohy připravuje tým autorů – obvykle pedagogů a studentů vysoké školy. Tvorba problémů pro tyto semináře často leží na rozhraní tvorby volné a tvorby polostrukturované – jednotlivé série (Prase, Brkos) mají svá témata (např. Polynomy) a na tato témata mohou již autoři tvořit problémy libovolně – pouze s omezením úrovně adekvátní matematicky nadaným studentům střední školy.

Tvorba úloh do středoškolských korespondenčních seminářů tedy může být podle semináře buď úplně volná (omezená jen přiměřenou úrovní), polostrukturovaná nebo jejich kombinace.

4.6.3. Problem solving v korespondenčních seminářích

Řešitelé se mají částečně přibližovat vědecké práci. Na řešení problémů mohou pracovat dlouhodobě, žádoucí je i práce s odbornou literaturou a využití dostupné výpočetní techniky. Řešení problémů středoškolského korespondenčního semináře je náročné – jak na talent a „matematickou trénovanost“ studenta, tak na jeho čas. Student řeší obtížné příklady (obtížnost je mnohdy i vyšší než u příkladů z Matematické olympiády) a své postupy řešení podrobně rozepisuje. Řešení těchto problémů studenta velice obohacuje.

4.7. Korespondenční semináře na základní škole

V této kapitole se korespondenčním seminářům věnuji přehledovým stylem; korespondenční seminář Pikomat, na kterém je založena výzkumná část mojí diplomové práce, bude podrobně rozveden v následující kapitole.

4.7.1. Základní informace

Korespondenčních seminářů pro základní školu existuje velké množství. Stejně jako u korespondenčních seminářů pro střední školy jsou korespondenční semináře pro školy základní mnohdy organizovány školami, které mají o matematicky nadané žáky zájem – zde se jedná zjevně o školy střední. Tyto školy organizují semináře v týmu pedagogů a studentů – tím vlastně zadávají svým studentům problém „vytvořit problém“, tedy zadávají jim úkoly na problem posing. (O vysokém přínosu této práce studentů pro jejich matematický a tvořivostní rozvoj jsem již psala v kapitole o problem posing.) Některé korespondenční semináře jsou organizovány školami vysokými (např. Pikomat MFF UK). Cílem organizátorů těchto soutěží může být rovněž seznámit žáky se svou školou a motivovat je ke studiu na ní; toto však většinou není tak významným cílem jako u seminářů středoškolských. Hlavním cílem (který samozřejmě je u seminářů pro střední školu také) je pracovat s matematicky nadanými žáky a motivovat žáky pro matematiku.

Informační zdroje

Těchto seminářů je velké množství. Není mým úmyslem vyhledat a popsat všechny tyto semináře – čtenář je velice snadno může najít tak, že do internetového vyhledávače zadá frázi „korespondenční seminář" a zároveň heslo „matematika". Dobrým informačním zdrojem jsou rovněž ročenky, které některé ze seminářů vydávají. Zde uvedu jen několik příkladů internetových adres seminářů, které jsem využila pro hledání společných a rozdílných znaků korespondenčních seminářů.

http://www.pikomat.unas.cz/

http://ckgym-ckos.ic.cz/sp.html

http://pikomat.mff.cuni.cz/

http://kokos.gmk.cz/index.php?fil=uvod

http://fos.ujep.cz/kmat/KoS/Junior.htm

Hlavní cíle soutěže

Korespondenční semináře mají dva hlavní cíle. Jedním je samozřejmě vyhledávání a rozvoj matematicky nadaných žáků motivovaných ke studiu matematiky. Druhým cílem je práce s méně nadanými či méně motivovanými žáky. (Jejich vstupní motivace však musí být minimálně taková, aby se do semináře dobrovolně přihlásili.) Seminář si klade za cíl rozvíjet i tyto žáky a zvyšovat jejich motivaci hravou, zábavnou či atraktivní formou zadání úloh. Úlohy jsou velmi dobře použitelné i pro práci v běžné hodině matematiky.

Struktura

Žádná centrální struktura organizace korespondenčních seminářů neexistuje, úlohy, počet sérií, termíny i konkrétní pravidla jsou plně v kompetenci organizátora soutěže. Přestože soutěž je korespondenční a může se jí zúčastnit žák odkudkoli z republiky, obvykle se účastní semináře žáci podle regionální příslušnosti, a to pravděpodobně z důvodu, že o něm mají nejvíce informací. (Pro žáky základní školy nebývá běžné, že by si sami na internetu vyhledávali soutěž, do které by se chtěli zapojit. A organizátoři „svoji" soutěž ve svém regionu obvykle propagují.)

Organizace

Přestože existuje velké množství korespondenčních seminářů pro základní školu, je struktura práce v semináři obvykle podobná. Organizátor rozešle zadání první série. Žáci, kteří se rozhodnou účastnit se semináře, vyřeší, co nejvíce úloh zvládnou, a svá řešení pošlou organizátorům. Ti úlohy opraví, okomentují, obodují, vrátí řešitelům, sestaví výsledkovou listinu a pošlou nová zadání a tak dále až do konce soutěže. Bodově zvýhodněni jsou mladší žáci. Některé semináře organizují pro řešitele průběžná soustředění (např. Pikosoboty Pikomatu MFF UK, na něž může přijít kterýkoli řešitel), některé organizují závěrečné soustředění např. ve formě tábora, kde se věnují organizátoři spolu s řešiteli zábavným matematickým i nematematickým aktivitám (tyto tábory bývají obvykle pouze pro nejlepší řešitele).

4.7.2. Problem posing v korespondenčních seminářích

Problémy v seminářích bývají vázány doprovodným příběhem, ani to však není pravidlem. Autoři úloh jsou vázáni požadovanou úrovní úlohy a pokud je příběh, tak i kontextem. Seminář by měl obsahovat pestré, nejlépe hravé úlohy, a to jak velmi obtížné (vyhledávání nadaných žáků a jejich rozvíjení), tak úlohy poměrně snadné (motivace méně talentovaných).

V korespondenčních seminářích pro základní školy se tedy stejně, jako je tomu u korespondenčních seminářů pro střední školy, setkáváme s tvorbou úloh volnou i tvorbou polostrukturovanou. Polostruktura spočívá ve svázání příběhem u některých seminářů, nebo v podobném tematickém členění sérií, jak tomu často bývá u seminářů pro střední školy. Někdy se můžeme setkat i s tvorbou plně stukturovanou, a to při úpravě hotových úloh a jejich zasazení do vhodného kontextu.

4.7.3. Problem solving v korespondenčních seminářích

Žáci posílají vyřešené úlohy i s podrobně komentovaným postupem řešení. U některých řešitelů se jedná o nesmělé a nedokonalé pokusy vyjádřit své myšlenky, někteří řešitelé jsou schopni zapsat postup velmi podrobně a přehledně, včetně diskuse podmínek úlohy. (Této problematice se budu podrobně věnovat v kapitole 7, kde budu analyzovat práce žáků účastnících se 21. ročníku Pikomatu.)

5. Korespondenční seminář Pikomat

Korespondenční seminář Pikomat je jeden ze seminářů s nejdelší tradicí. Název vznikl zkratkou z PIonýrský KOrespondenční MATematický seminář. Jedná se o tradiční název. Jak vznikaly a osamostatňovaly se nové semináře zaštiťované jinými školami a žádný se nechtěl vzdát tradičního názvu, existuje nyní několik různých seminářů (minimálně 3) se stejným názvem. Všechny jsou založené na stejném principu, ale jedná se o samostatné semináře. Existují i semináře, jejichž název je pouze variovaná podoba Pikomatu – např. π-komat. V dalším textu však pod názvem Pikomat budu rozumět vždy jen Pikomat pořádaný pod záštitou SPŠ ST Panská a Pedagogické fakulty UK (viz internetové stránky www.pikomat.unas.cz), jehož 21. ročník jsem vedla a založila na něm výzkumnou část své práce.

Jedná se o seminář pro šestý až devátý ročník základních škol a odpovídající ročníky víceletých gymnázií. (Tento dovětek budu v dalším textu vynechávat, ale vždy se jedná o žáky základní školy i gymnazisty.) Přednostně je směrován k žákům osmých a devátých ročníků, pro řešení problémů mohou být nezbytné okruhy probírané v matematice obvykle do osmého ročníku včetně. Handicap mladších žáků je vyrovnáván bodovým zvýhodněním – přepočet je dán následující tabulkou (v prvním řádku tabulky je skutečně získaný počet bodů v sérii, v prvním sloupci ročník, v příslušném čtverečku uvnitř tabulky upravený bodový stav, podle něhož se sestavuje výsledková listina) :

r.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	3	5	7	10	12	15	17	20	22	25	27	30	32	33	34	35	37	38	39	40	42	44	45	46	47	48	49	49	50	50
7	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	33	34	35	37	38	40	41	43	44	45	47	48	49	50
8	2	3	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	23	25	27	28	30	32	33	35	37	38	40	42	43	45	47	48	50
9	1	2	3	4	5	6	8	10	11	13	14	16	18	19	21	22	24	25	27	28	30	32	33	35	37	40	43	45	48	50

5.1. Činnost žáků v soutěži

Žák nejprve dostane zadání první série Pikomatu a zároveň s ním průvodní dopis popisující pravidla soutěže. Do daného termínu musí odeslat svá řešení úloh. Nemusí řešit všechny problémy. Svá řešení jednotlivých problémů píše na samostatné papíry, pečlivě popisuje postup řešení. Společně s řešením první série pošle účastnický poplatek – ve

21. ročníku to bylo 20 Kč[6]. Pak čeká, až mu poštou přijdou jeho řešení opravená a okomentovaná; obdrží i výsledkovou listinu, kde může porovnat svou úspěšnost s ostatními účastníky soutěže. Ve stejné dopisní obálce mu přijde i zadání nové série. (Celkem jsou tři série, každá má šest úloh.) Po poslední sérii jsou oceněni nejlepší tři řešitelé (popř. více, kdyby nastala rovnost bodů).

5.2. Činnost organizátorů v soutěži

Organizátor soutěže vytvoří průvodní dopis, třikrát šest problémů adekvátní úrovně a přiměřeně rozvrstvených témat (úlohy z aritmetiky, geometrie, logiky i jiné), které jsou svázané příběhem. Rozkopíruje je a rozešle klasickou poštou do všech základních škol a víceletých gymnázií v Praze a okolí. Vybere od účastníků poplatky a předá je SPŠ ST v Panské. Organizátor dále opravuje a komentuje úlohy, kopíruje nová zadání, sestavuje autorská řešení a výsledkovou listinu a vše posílá řešitelům.

---

[6] Poplatek 20 Kč je spíše symbolický, skutečné náklady na jednoho soutěžícího jsou o hodně vyšší – organizátor sice pracuje bez nároku na odměnu, ale peníze jsou potřeba na první rozesílání dopisů, kopírování textů, posílání opravených řešení a nových zadání zpět řešitelům a knižní odměnu pro nejlepší tři řešitele.

6. Zadání 21. ročníku Pikomatu

Zkušenosti s tvorbou těchto textů shrnu v kapitole „Reflexe a sebereflexe mé činnosti“. Texty uvádím přesně v podobě, jak byly rozesílány řešitelům, pouze byly vytištěné v jednoduchém řádkování. Jako další texty byla pro žáky připravena autorská řešení; ta uvádím průběžně u jednotlivých úloh v kapitole „Didaktické analýzy žákovských řešení 21. ročníku Pikomatu“.

6.1. První série

Bylo nebylo... Za devatero horami, desatero řekami a jedenáctero hlubokými údolími žil v domečku s doškovou střechou Honza. Honzovi kluci z vesnice přezdívali Hloupý Honza, protože kdysi na následující úlohu odpověděl, že neví, co to je a^2.

Úloha 1:

Je možné, aby byl výraz $a^2 + b^2 - c^2$ dělitelný pěti, jestliže ani jedno z přirozených čísel a, b, c není dělitelné číslem 5?

Od té doby ale Honza pilně studoval a v době, kdy se odehrál náš příběh, už náš Honza vůbec hloupý nebyl a v mocninách se vyznal jedna radost. Den, kdy náš příběh začíná, se zdál být úplně obyčejný. Honza ráno vstal a dopoledne pracoval na zahradě.

Úloha 2:

Zahrada měla tvar pravidelného n-úhelníku. Velikost jeho vnitřních úhlů je celé číslo. Které mnohoúhelníky přicházejí v úvahu?

Potom si sedl k obědu a luštil v novinách „Koňský povoz“, které si brával každé ráno na stanici hromadné dopravy, následující sudoku:

		5			7	3	6	
	3					E	D	4
	C		4	6		9	2	A
				5		2	1	
		3		7		6		
	9	4		1			B	
	5	6		3	1			
3							9	
	4	7	9			5		

Úloha 3:

Jaká čísla se skrývají v sudoku pod písmenky A, B, C, D, E? (Pravidla jsou klasická – v každém řádku, sloupci i čtverečku musí být každá číslice 1 – 9 obsažena právě jednou.)

Protože mu dopsala tužka, musel luštění nechat, tak si alespoň četl nejnovější zprávy.

Ze světa:

Rusko:

Baba Jaga zabezpečila Chaloupku na muří nožce kódovaným zámkem, kód ve tvaru zlomku začarovala do následující úlohy:

Úloha 4:

Najděte zlomek mezi $\frac{96}{35}$ a $\frac{97}{36}$ s co nejmenším jmenovatelem.

Teď není schopná zámek odemknout. V rozhovoru pro tisk uvedla, že nadále bude důvěřovat pouze starým a osvědčeným metodám a do další modernizace se pouštět v žádném případě nebude. Stan, kde přechodně přebývá nyní, si nechává hlídat osvědčenými dvěma čtyřhlavými draky, jedovatým hadem a svalnatou blechou. Prosí laskavé čtenáře, kteří by kód zámku rozluštili, nechť jí napíší na adresu „stan u Bajkalského jezera 7, Rusko". Odměna v podobě jedovatého pavouka zaručena.

Belgie:

Gargamel byl se záchvatem žlučníku převezen do nemocnice v Bruselu. V důsledku toho se v zemi přemnožili Šmoulové.

Z domova:

Sídelní město je potaženo černým suknem. Strašný drak Osmihlavec narozený v Šedivých skalách se usadil v Černých skalách za městem a požaduje vydání krásné princezny Zlatovlásky.

Úloha 5:

Drak Osmihlavec má – což vás nejspíš už napadlo – osm hlav. Některé hlavy jsou príma, ale některé jsou strašně ukecané a lžou, jako když tiskne. (Pravdomluvné hlavy budeme označovat dále d jako důvěryhodné, hlavy, které vždycky lžou, nd jako nedůvěryhodné.) Poznáte z následujících vyjádření, které hlavy jsou důvěryhodné a které ne?

1. hlava „Z hlav 3 a 7 je jedna d a druhá nd.“
2. hlava „Hlavy 4 i 5 jsou obě nd.“
3. hlava „Z hlav 1 a 2 je jedna d, druhá nd.“
4. hlava „Hlavy 1 a 7 jsou buď obě d, nebo obě nd.“
5. hlava „Hlavy 1 a 8 jsou obě d.“
6. hlava „Hlavy 3 a 8 jsou obě d.“
7. hlava „Hlavy 5 a 6 jsou buď obě d, nebo obě nd.“
8. hlava „Hlavy 2 a 4 jsou obě nd.“

Náš Honza se rozhodl okamžitě. Vydá se na předalekou cestu a princeznu zachrání! (Jak, to sice ještě neví, ale za předpokladu, že úloha „zachránit princeznu“ řešení má, po cestě na něj určitě přijde.) A hned v příštím díle vyrazí.

Úloha 6:

Černé skály jsou od Honzova domečku vzdálené 12 km. Náš Honza není žádný sportovec, na chození je líný, takže po rovině ujde 24 km za den, do kopce 20 km za den a z kopce 30 km za den. Za jak dlouho by došel do Černých skal a zase zpátky, kdyby se nezatěžoval takovými zbytečnostmi jako klábosení s kouzelnou babičkou (o ní se dočtete příště), spaní ani vysvobozování princezny?

6.2. *Druhá série*

Minule jsme zanechali našeho hrdinu na začátku jeho velké dobrodružné výpravy. Nyní už je Honza půl dne na cestě za krásnou princeznou Zlatovláskou. Když opouštěl svůj domeček, kocoura Mňoukala nechal doma s jediným úkolem: chytit myš Antoinettu, která se jim usadila přímo v kuchyni.

Úloha 1:

Kuchyně má tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou větší než 60°. Delší základna lichoběžníku má délku a metrů, kratší základna c metrů, výška v metrů. Honza postavil Mňoukala do kuchyně. Mňoukal byl nesmírně líný kocour, který raději několik hodin počítal, než by – jen to ne – udělal o jediný rychlý krok navíc! Takže si sedl nad plán myších děr, o kterých věděl, že jsou v každém rohu kuchyně jedna, a začal počítat, aby našel místo, ze kterého je ke každé díře stejně daleko. Najděte, kde přesně je místo, ze kterého má Mňoukal ke každé myší díře stejně daleko. V jaké je to vzdálenosti od středu delší základny lichoběžníku?

Myš Antoinetta byla zvědavá, co tam Mňoukal tak dlouho dělá, přišla za ním, sedla si k němu a s výpočtem mu pomohla. Pak tam spolu seděli celou dobu, než se Honza vrátil ze své hrdinské výpravy, a dávali si různé hádanky a příklady. Bylo jich moc, už si skoro žádné nepamatuji, jen jedna úloha mi utkvěla v paměti, protože měla krátké a jednoduché zadání.

Úloha 2:

Je dán trojúhelník ABC ($|AB| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 7$ cm). Přímka CD je rovnoběžná s přímkou AB. Doplňte bod E tak, aby $|AE| = |CE| = 6$ cm (E leží v polorovině opačné k polorovině ACB). Přímka o je osa úsečky CE. Na ose o ve vzdálenosti 5 cm od C leží bod P (P leží v polorovině opačné k polorovině CEA). Bodem P veďte rovnoběžku p s přímkou CD. Zjistěte, v jaké vzdálenosti od A protíná přímka AB přímku p.

Honza šel a šel, až potkal kouzelnou babičku. Jak už to v pohádkách bývá, Honza babičku slušně pozdravil a babička mu slíbila, že mu pomůže, když jí splní tři přání. Nebo to mělo být jinak? No, to už je jedno, každopádně zadala Honzovi tři úlohy. Pokud je správně spočítá, dostane kouzelný meč, kterým může zabít draka.

Úloha 3:

Dokaž, že jestliže $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, pak $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0,\ c \neq -d,\ bd \neq ac)$.

Úloha 4:

Kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici dvě figurky – bílou a černou – tak, aby při hře dáma bílá mohla brát černou? (Pozn. Dáma se hraje pouze na černých políčkách.)

Úloha 5:

Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozmístit dvě figurky – bílou a černou – tak, aby se mohly při hře dáma brát navzájem? (Opět hrajeme pouze na černých políčkách šachovnice.)

Honza úlohy sice vyřešil správně, ale mezitím nabídl babičce buchtu. Babičku rozladilo, že je maková a ne její oblíbená s tvarohem, tak Honzovi přidala ještě jednu úlohu:

Úloha 6:

Najdi množinu 6 bodů v rovině tak, že každý z nich leží ve vzdálenosti 1 cm od právě tří dalších bodů této množiny.

Honza vyřešil zdárně i tento zapeklitý problém, od babičky získal krásný meč a vydal se již přímou cestou k jeskyni draka Osmihlavce.

6.3. Třetí série

Zatímco se náš hrdina potýkal s úlohami kouzelné babičky, v Dračí sluji si drak Osmihlavec chystal různé druhy koření, které použije na dochucení princezny. Mimochodem, znáte recept na princeznu s bylinkovou omáčkou? (Někteří rýpalové tvrdí, že princezna s čerstvými hříbky chutná líp, ale věřte mi, nad bylinkovou omáčku není.) To vezmete tolik vody, kolik chcete omáčky, 7 bobkových listů, 6 středně velkých pepřů, půl kávové lžičky pálivé papriky, 5 ořechů i se skořápkami, půl kilogramu jakýchkoli bylinek (klidně i jedovatých, to se vstřebá), to vše zamícháte, povaříte, přidáte jednu středně velkou princeznu a svačinka je hotová.

Úloha 1:

Drak má 7 ořechů, které úplně stejně vypadají. Ví ale, že dva z nich jsou kouzelné (zapomněla je u něj Popelka). Jenomže krásné šaty jsou v omáčce k ničemu, to musíte uznat... Pravý oříšek má hmotnost 10 g, kouzelný 9,5 g. Jaký nejmenší počet vážení na rovnoramenných vahách bez závaží potřebuje drak, aby s jistotou vyřadil kouzelné oříšky?

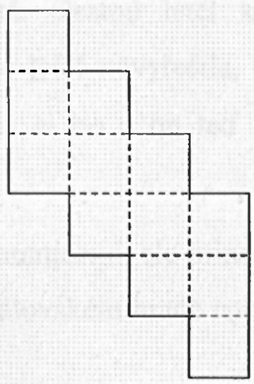
Než princeznu přivedli, krátil si drak čas mimo jiné řešením následujících úloh:

Úloha 2:

Které z čísel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008$ a 2008^{1004} je větší a proč?

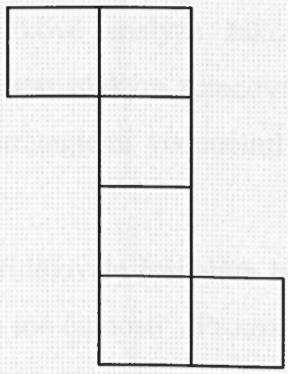
Úloha 3:

Jak je možné rozřezat plášť krychle tak, aby vznikl útvar na obrázku?



Úloha 4:

Na obrázku je síť krychle s hranou délky 1. Určete nejdelší úsečku, která se dá umístit do sítě, a vypočtěte její délku. Na povrchu krychle tuto lomenou čáru znázorněte.



Úloha 5:

Kolik přirozených čísel menších než 1 000 není dělitelných ani 5, ani 7?

A už vedou překrásnou Zlatovlásku k Dračí sluji. Princeznin doprovod musel zůstat na kraji lesa, do sluje už musela Zlatovláska sama. Osmihlavec se rozhodl splnit princezně poslední přání. A princezna si přála dvojici celých čísel, pro která platí $2x^2 - 5y^2 = 29$. Jistě už víte, že tak se vlastně princezna zachránila sama.

Úloha 6:

Dokažte, že neexistují celá čísla x a y, pro která platí $2x^2 - 5y^2 = 29$.

Drak počítal, přemítal, ze všech osmi hlav se mu kouřilo, jedna se mu dokonce přehřála, nedůvěryhodné hlavy zapomněly lhát, ale žádné takové číslo nemohl vymyslet. Když po dvou dnech, osmi hodinách, čtyřech minutách, dvaceti sekundách a dvaadvaceti milisekundách zkoušel dvojici čísel 999 568 364 912 003 637 593 826 a 999 568 364 912 003 637 593 937, pochopil, že takové číslo asi hned tak nenajde, tak rozmrzele odletěl do Číny, kde mají princeznu Čchi, která je prý také nádherná. Cestou letěl kolem Bajkalského jezera, kde seděla rozmrzelá Baba Jaga (úlohu stále ještě nevyřešila, takže pořád campuje u jezera). Když viděla letět Osmihlavce, chytla si ho a on teď musí čtyřiadvacet hodin denně hlídat zadní východ z jejího stanu.

V tu chvíli se dostal ke Dračí sluji Honza. Drak už byl dávno za hranicemi, ale princezna, jak Honzu uviděla, okamžitě se do něj zamilovala, a tak se na královském hradě nakonec slavila svatba.

7. Didaktické analýzy žákovských řešení 21. ročníku Pikomatu

V této kapitole se věnuji položkové analýze žákovských řešení úloh 21. ročníku Pikomatu. Zabývám se drobným statistickým zpracováním úspěšnosti v konkrétní úloze, bodováním úlohy, zajímavými strategiemi vedoucími ke správnému řešení úlohy nebo k zajímavým chybám.

O tom, jakým způsobem jsem přidělovala řešitelům bodová hodnocení, píšu podrobněji v kapitole „Reflexe a sebereflexe mé činnosti". Protože se jedná o široce otevřené úlohy, nemohla jsem použít standardizované postupy jako u didaktických testů. (S jedinou metodologií, jak hodnotit široce otevřené úlohy tak, aby byl téměř vyloučen subjektivní přístup, jsem se setkala ve výzkumech PISA a TIMSS (Palečková a kol. 1999). Jedná se o postup, kdy se každé žákovské odpovědi přiřadí dvoučíslicový kód. První číslice udává míru správnosti odpovědi a druhá číslice v kombinaci s první určuje, o jaký druh odpovědi se jedná. Tedy autor úlohy musí napsat kódovací klíč, kde počítá se všemi variantami chybných odpovědí. Tato metodika ale podle mého názoru pro velmi široce otevřené úlohy pro matematickou soutěž vhodná není, už pro obrovskou obtížnost vytvoření kódovacího klíče k takovéto úloze.)

Úlohy ze semináře bylo možné bez problému opravovat i bez standardizovaného postupu, protože vzhledem k počtu účastníků jsem mohla úlohy opravovat sama, proto subjektivně nastavená laťka nebyla překážkou, protože pro všechny řešitele série byla nastavena stejně.

7.1. Úvodní poznámky

- *Řešitel* znamená řešitel nebo řešitelka.
- Mezi *Strategie vedoucí ke správnému řešení* započítám i strategie řešitelů, které jsou správné, ale řešitel nedosáhl plného počtu bodů za úlohu kvůli chybě, která není hrubá (nedotažení řešení do konce, špatné čtení textu úlohy nevedoucí k radikálnímu zjednodušení výpočtu, numerická chyba, ...).
- Pokud není u řádku ve *Strategiích vedoucích ke správnému řešení* napsáno jinak, řešitel dostal za vyřešení úlohy 5 bodů.

- Mezi *Nesprávná řešení* zahrnuji jakákoli řešení, která nejsou hodnocena 5 body. (Tedy řešení s drobnou chybou mohou být zmíněna ve *Strategiích vedoucích ke správnému řešení* i mezi *Nesprávnými řešeními*.)
- Řádek psaný *kurzívou* v oddílu *Bodování* vyjadřuje bodový stav, kterého nikdo nedosáhl. Typ řešení uvedený v takovýchto řádcích je pouze můj odhad, jaké řešení odpovídající tomuto bodovému stavu se objevit mohlo.
- *Bodování* jsem sestavovala před opravováním úlohy, toto bodování se ale občas změnilo, pokud mě řešitelé něčím překvapili.
- *Jména* řešitelů jsou smyšlená, pohlaví zůstává zachováno. (V rámci soutěže však byla ve výsledkových listinách, které dostávali všichni řešitelé, pravá jména včetně příjmení.)

7.2. První série

7.2.1. Úloha 1

Počet řešitelů celé série: 34

Počet řešitelů úlohy: 25

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 22

Zadání

Je možné, aby byl výraz $a^2 + b^2 - c^2$ dělitelný pěti, jestliže ani jedno z přirozených čísel a, b, c není dělitelné číslem 5?

Řešení

Ani jedno z čísel a, b, c, není dělitelné pěti, tedy každé z nich dává po dělení pěti zbytek 1, 2, 3, nebo 4. Každé z čísel a, b, c si můžu vyjádřit jako $5k$ + *zbytek*, kde k je přirozené číslo (tedy na část dělitelnou pěti plus *zbytek* – (*zbytek* budu značit z)). Druhá mocnina každého z čísel je $(5k+z)^2 = 25k^2 + 10kz + z^2$. Číslo $25k^2 + 10kz$ je dělitelné pěti vždy a nachází se v součtu, proto s ním dál nemusím počítat, zbytek po dělení pěti je určen členem z^2. Protože z je 1, 2, 3, nebo 4, z^2 je 1, 4, 9, nebo 16. Číslo 9 dá po dělení pěti zbytek 4, číslo 16 dá po dělení pěti zbytek 1. Proto a^2 (stejně tak i b^2 a c^2) mají po dělení pěti zbytek 1, nebo 4. Pak zbytek po dělení čísla $a^2 + b^2$ pěti může být roven $1+1=2$, nebo $1+4=4+1=5$ (což odpovídá zbytku 0), nebo $4+4=8$ (což odpovídá zbytku 3).

Mohou nastat pouze tyto možnosti:

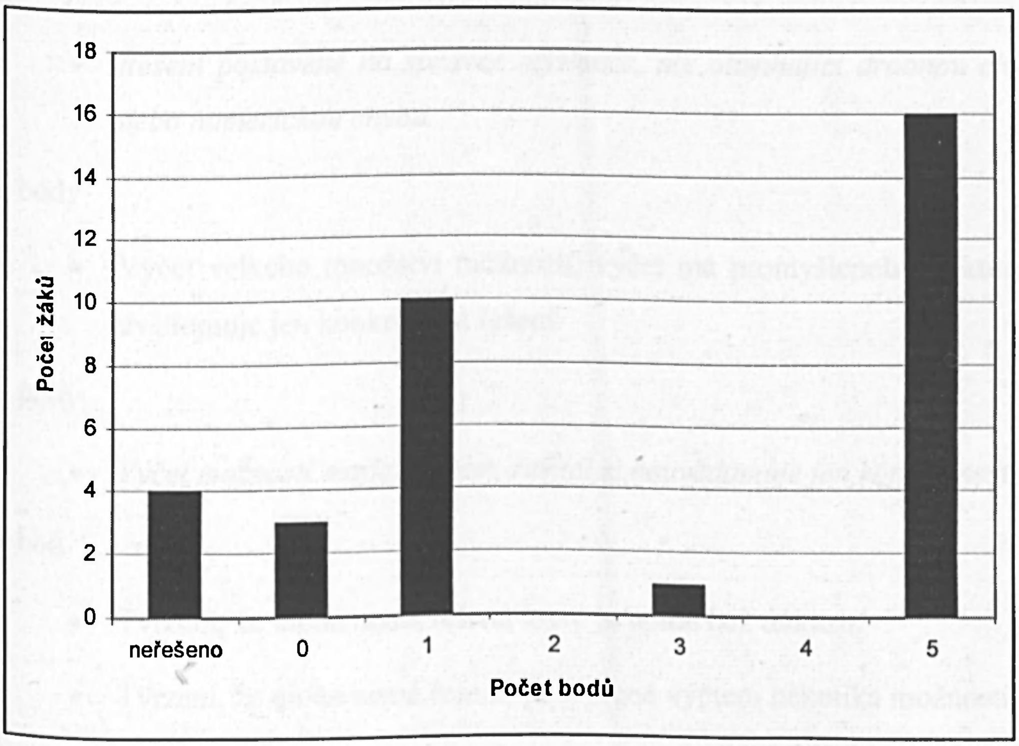
zbytek po vydělení $a^2 + b^2$ pěti	zbytek po vydělení c^2 pěti	celkový zbytek
2	1	1
2	4	$-2 \sim 3$*
$5 \sim 0$	1	4
$5 \sim 0$	4	1
$8 \sim 3$	1	2
$8 \sim 3$	4	4

*Zbytek -2 je nahrazen zbytkem 3; stejně tak dále.

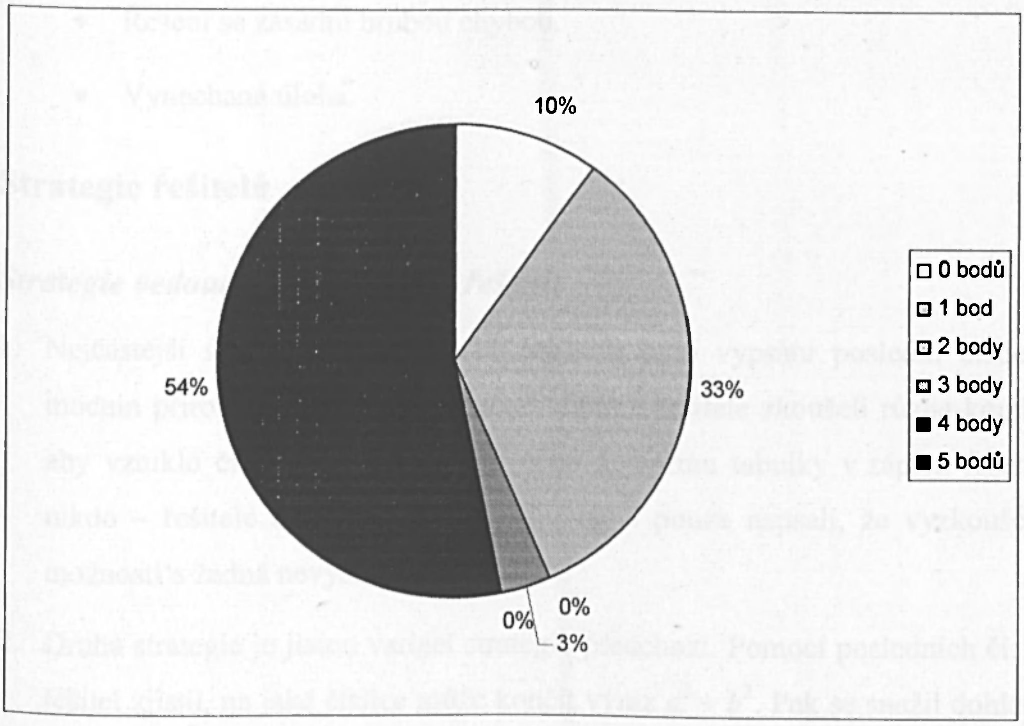
Celkový zbytek nikdy není 0, celý výraz tedy nikdy být dělitelný pěti nemůže.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 1: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 1 první série



Graf 2: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 1 první série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- *Řešení postavené na správné myšlence, ale obsahující drobnou chybu v úvaze nebo numerickou chybu.*

3 body

- Výčet velkého množství možností, výčet má promyšlenou strukturu, řešitel si uvědomuje jen konkrétnost řešení.

2 body

- *Výčet možností mající systém, řešitel si neuvědomuje jen konkrétnost řešení.*

1 bod

- Tvrzení, že úloha nemá řešení, které je úplně bez důkazu.
- Tvrzení, že úloha nemá řešení, podepřené výčtem několika možností.

0 bodů

- Řešení se zásadní hrubou chybou.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

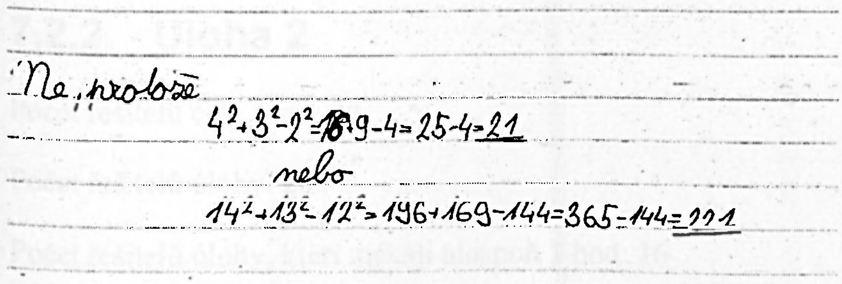
Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Nejčastější správnou strategií (11 řešitelů) bylo vypsání poslední číslice druhých mocnin přirozených čísel – 1, 4, 6, 9. Potom řešitelé zkoušeli různé kombinace tak, aby vzniklo číslo končící číslicí 0 nebo 5. Formu tabulky v zápisu řešení nepoužil nikdo – řešitelé buď součty rozepsali, nebo pouze napsali, že vyzkoušeli všechny možnosti a žádná nevyšla.
2. Druhá strategie je jistou variací strategie předchozí. Pomocí posledních číslic si jeden řešitel zjistil, na jaké číslice může končit výraz $a^2 + b^2$. Pak se snažil dohledat číslo c. Aby čísla splňovala zadané podmínky, musela by poslední číslice čísla c^2 být 2, 3, nebo 0. Takové přirozené číslo, které není dělitelné pěti, ale neexistuje.
3. Třetí strategie, která vedla k zisku plného počtu bodů, vycházela z nejednotnosti komunikace v matematice. Čtyři řešitelé počítali nulu mezi přirozená čísla. V tomto případě existuje nekonečně mnoho řešení úlohy – např. $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$. Protože se úloha ptá pouze na existenci, napsali jednu, popř. i několik možných trojic čísel, pro které jsou podmínky splněny (všechna řešení se nepokusil najít nikdo).

   Úlohu jsem musela uznat za správně vyřešenou – jedná se o problém terminologie, řešení není chybné. Tímto přístupem si řešitelé situaci velmi zjednodušili. Pro problem posing tedy vyplývá známý fakt, že je potřeba si ohlídat jednoznačnost zadání úlohy.

Nesprávná řešení:

1. Nejčastějším nesprávným řešením (7 řešitelů) bylo pouhé vypsání několika trojic čísel. Z těchto několika konkrétních příkladů řešitelé „odvodili", že úloha řešení nemá – viz obr. 2 *(1 bod)*



Obr. 2: Řešení Bětušky

2. Zajímavá hrubá chyba byla záměna a^2 za $a \cdot 2$. *(0 bodů)*

3. Několikrát se vyskytl výrok, že najít taková čísla je nemožné, aniž by ho řešitel jakkoli vysvětlil. *(1 bod)*

4. Objevil se i dále nerozvedený názor, že úloha má nekonečně mnoho řešení. *(0 bodů)*

5. Poměrně zajímavé nesprávné řešení byl výčet mnoha možností. Řešitel zkoušel různé trojice čísel, od „jednobodových" řešitelů se odlišoval třemi zásadními věcmi:

Vyzkoušel velké množství trojic („jednobodoví řešitelé" obvykle maximálně 5).

Zkoumal různé typy trojic - nejen „malá" přirozená čísla, ale i větší čísla (kolem 20), nejen trojice přirozených čísel blízko u sebe.

Plně si uvědomoval, že nevypsal všechny možnosti. Otázkou je, zda si uvědomoval, že tímto úlohu dokázat nelze. *(3 body)*

Poznámky

- Úloha je provázána s úlohou 6 třetí série 21. ročníku soutěže. Tato úloha je velmi obdobná, zadala jsem ji, abych mohla pozorovat vývoj u žáků, kteří v první sérii úlohu neřešili, nebo ji řešili nesprávně.
- Úloha byla pro žáky poměrně snadná, většina žáků, kteří ji řešili, ji řešili s porozuměním, nikoli aplikací nacvičených algoritmů.
- Očekávanou strategii – rozepsání čísel na část dělitelnou pěti a zbytek (viz autorské řešení) – nepoužil žádný řešitel. Myslím si, že je to proto, že žákům je bližší zkoumat konkrétní čísla, ze kterých vyvodí obecný závěr, než se rovnou pouštět do obecných úvah.

7.2.2. Úloha 2

Počet řešitelů celé série: 34

Počet řešitelů úlohy: 28

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 16

Zadání

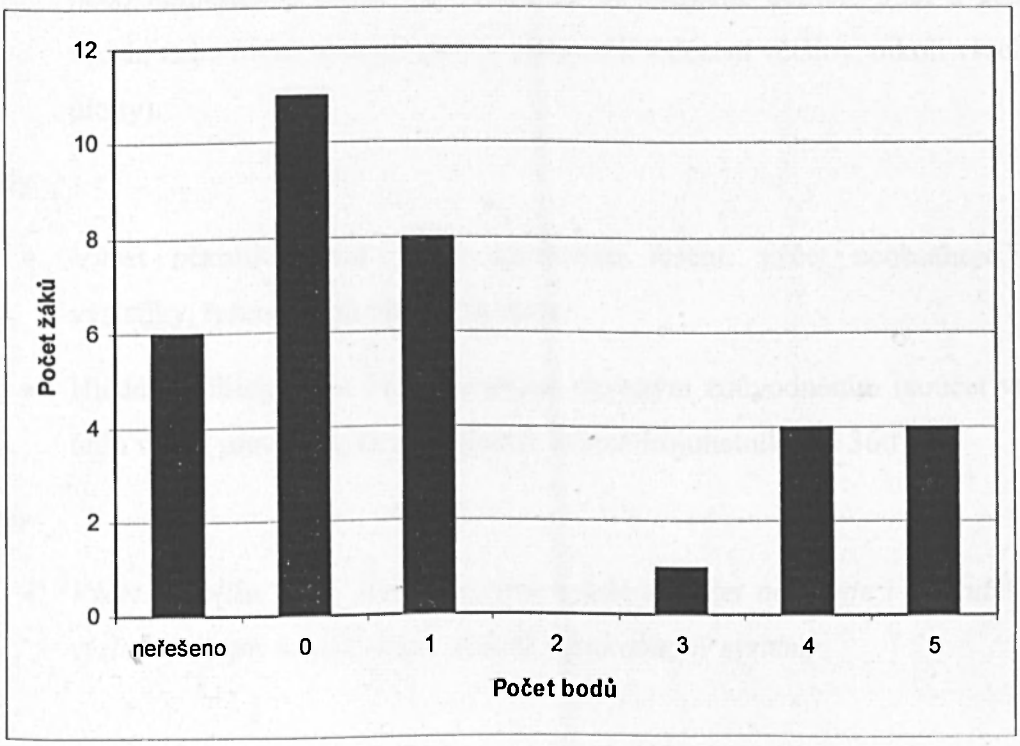
Zahrada měla tvar pravidelného n-úhelníku. Velikost jeho vnitřních úhlů (ve stupních) je celé číslo. Které mnohoúhelníky přicházejí v úvahu?

Řešení

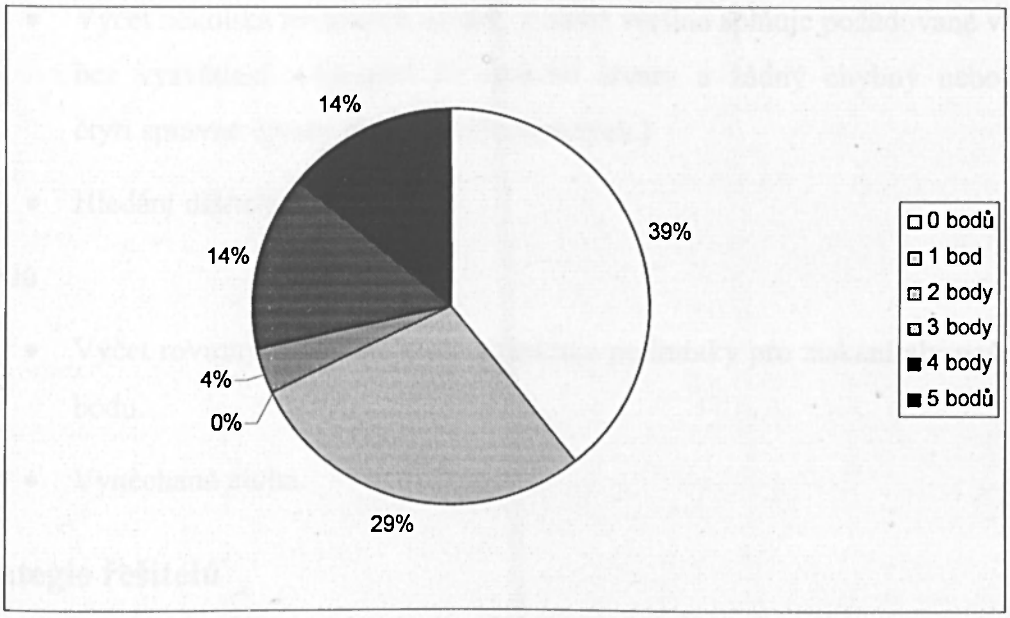
Libovolný n-úhelník lze rozdělit na $n-2$ trojúhelníků, proto součet vnitřních úhlů n-úhelníku je $(n-2)\cdot 180$ stupňů. Na jeden úhel tedy připadá $\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 180 - \frac{360}{n}$ stupňů. Aby to bylo celé číslo, musí být n přirozené číslo, které je dělitelem číslem 360. Číslo n tedy může být 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, nebo 360.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 3: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 2 první série



Graf 4: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 2 první série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Řešení postavené na správné myšlence, ale obsahující drobnou chybu v úvaze nebo numerickou chybu (tj. odvození, že hledáme dělitele 360, a nenalezení všech; nebo méně obecný systém vedoucí k nalezení většiny, nikoli všech řešení úlohy).

3 body

- Výčet několika (min. šesti) správných řešení, výčet neobsahuje chybné výsledky, řešení nemá obecný systém.
- Hledání dělitelů čísla 360 podepřené chybným zdůvodněním (součet vnitřních úhlů všech pravidelných *n*-úhelníků, kromě trojúhelníku, je 360°.)

2 body

- *Výčet několika (min. šesti) správných řešení, výčet obsahuje i nehrubě chybné výsledky (např. kosočtverec), řešení nemá obecný systém.*

1 bod

- Výčet několika rovinných útvarů, z nichž většina splňuje požadované vlastnosti, bez vysvětlení. (Alespoň tři správné útvary a žádný chybný nebo alespoň čtyři správné útvary plus několik chybných.)
- Hledání dělitelů čísla 180.

0 bodů

- Výčet rovinných útvarů, který nesplňuje podmínky pro získání alespoň jednoho bodu.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Stejná strategie jako v autorském řešení – vztah pro velikost vnitřního úhlu pravidelného n-úhelníku někteří řešitelé znali.
2. Řešitel si rozdělil pravidelný n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků. (Strany tvoří strany n-úhelníku a spojnice vrcholů a středu kružnice n-úhelníku opsané.)

   Součet vnitřních úhlů n-úhelníku je součet všech vnitřních úhlů těchto trojúhelníků, což je $180n$ stupňů, musíme však odečíst velikosti úhlů při hlavních vrcholech rovnoramenných trojúhelníků – ty dají dohromady 360°. Na jeden úhel připadá $\frac{180n-360}{n}$ stupňů.

   Dále řešitel postupoval stejně jako v autorském řešení.

   Tuto strategii velmi oceňuji – řešitel si sám odvodil vztah pro velikost úhlu v pravidelném n-úhelníku, a to jiným způsobem, než je pro výklad tohoto vztahu ve školách typický.

Nesprávná řešení:

1. Mnohokrát se vyskytla chyba, že součet velikostí vnitřních úhlů libovolného n-úhelníku je 180°, nebo 360°. Jednou se vyskytla i varianta, že řešitel si uvědomil, že

součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° a čtyřúhelníku 360°. Dále ale myslel, že součet vnitřních úhlů pro všechny ostatní n-úhelníky je 360°. *(1 – 3 body)*

2. Několik řešitelů pouze vypsalo několik n-úhelníků s danou vlastností. Většinou prostě vypsali n-úhelníky, které je napadly. Pouze jeden řešitel prováděl „poctivý“ výpočet vnitřních úhlů pro všechny pravidelné mnohoúhelníky od trojúhelníku až po dvacetiúhelník, výpočty byly správné, nedotažené do obecnosti, chybělo tedy vyhledání všech takových n-úhelníků. *(0 – 3 body)*
3. Mezi řešeními předchozího typu se vyskytly i příklady nesprávné znalosti terminologie – někteří žáci mezi pravidelné n-úhelníky počítali i kosočtverec, kosodélník, rovnoramenný trojúhelník, jeden řešitel dokonce i krychli. *(0 – 3 body)*

Poznámky

- Úloha je pro žáky poměrně obtížná. Nejtěžší bylo objevit, že hledáme dělitele 360, a správně to zdůvodnit. Algebraická část úlohy problémy nedělala žádné.
- Mnozí žáci měli úlohu zdánlivě správně nebo alespoň téměř správně vyřešenou, řešení ale bylo naprosto chybné, protože ke správnému vztahu se dostali na základě nesprávné úvahy, že každý pravidelný n-úhelník má součet vnitřních úhlů 360°.
- Bylo vidět, že mnozí žáci k problematice přistoupili pouze formálně. Na úlohu mechanicky aplikovali vztah, který nebyl správný. Někteří z nich sice sami došli k jistému rozporu, který si ale vůbec neuvědomili.

7.2.3. Úloha 3

Počet řešitelů celé série: 34

Počet řešitelů úlohy: 29

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 27

Zadání

Jaká čísla se skrývají v sudoku pod písmenky A, B, C, D, E? (Pravidla jsou klasická – v každém řádku, sloupci i čtverečku musí být každá číslice 1 – 9 obsažena právě jednou.)

		5			7	3	6	
	3					E	D	4
	C		4	6		9	2	A
				5		2	1	
		3		7		6		
	9	4		1			B	
	5	6		3	1			
3							9	
	4	7	9			5		

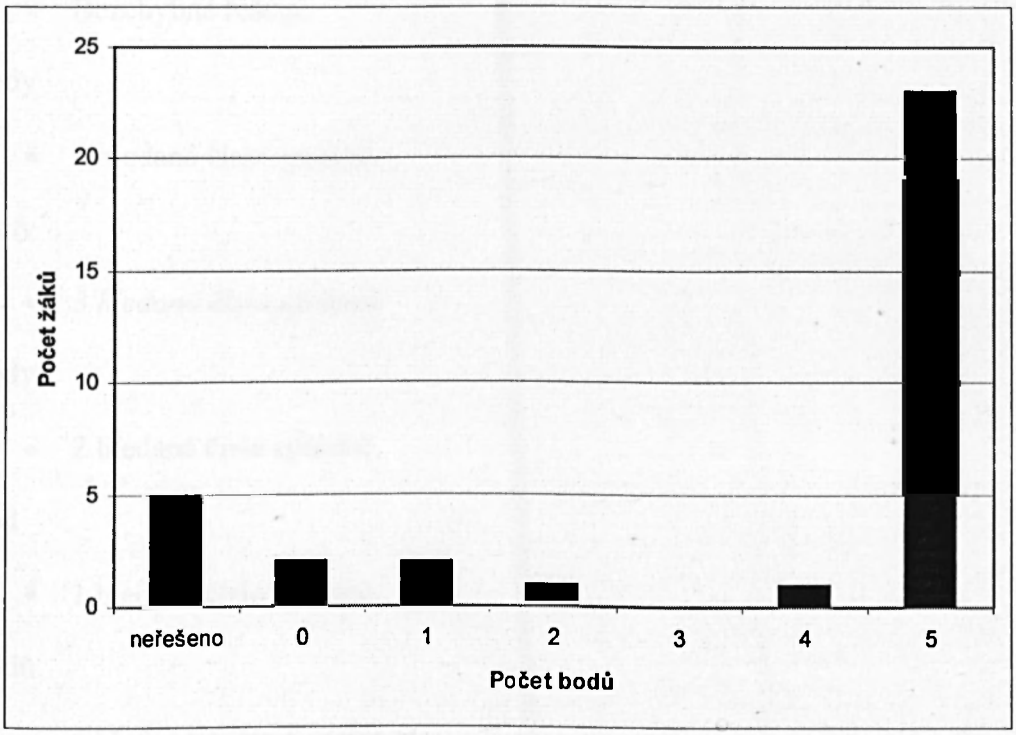
Řešení

Hledaná čísla jsou A = 5, B = 5, C = 7, D = 7, E = 8. Sudoku uvádím úplně vyřešené, ale celá tabulka nebyla pro řešení nezbytná.

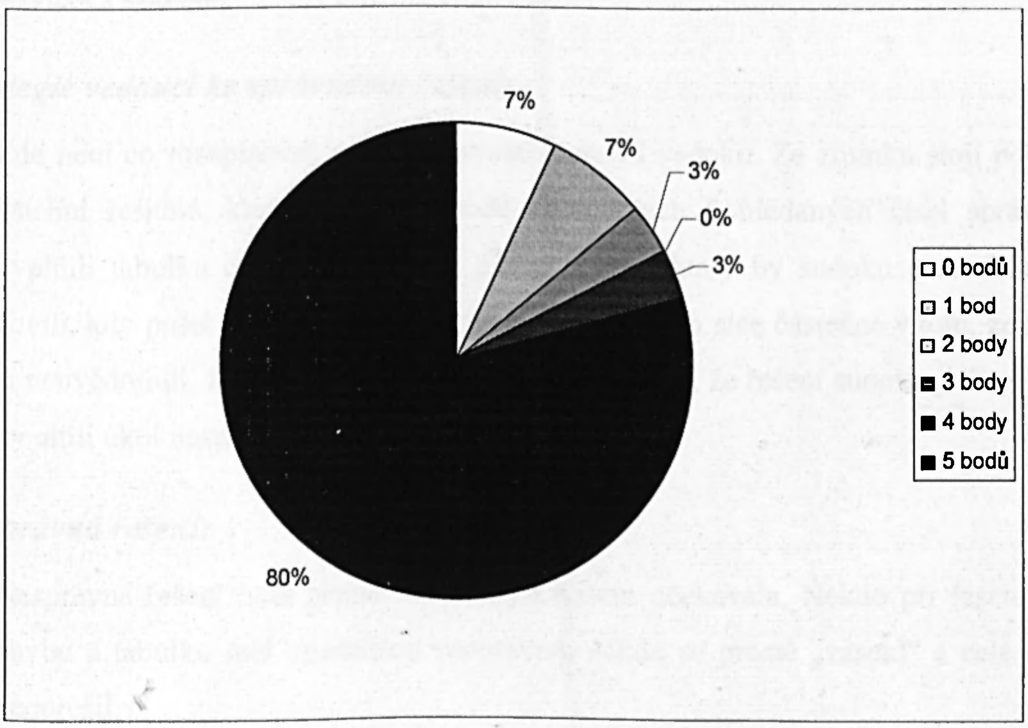
4	2	5	8	9	7	3	6	1
6	3	9	1	2	5	8	7	4
8	7	1	4	6	3	9	2	5
7	6	8	3	5	4	2	1	9
5	1	3	2	7	9	6	4	8
2	9	4	6	1	8	7	5	3
9	5	6	7	3	1	4	8	2
3	8	2	5	4	6	1	9	7
1	4	7	9	8	2	5	3	6

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 5: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 3 první série



Graf 6: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 3 první série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- 4 hledaná čísla správně.

3 body

- *3 hledaná čísla správně.*

2 body

- 2 hledaná čísla správně.

1 bod

- 1 hledané číslo správně.

0 bodů

- 0 hledaných čísel správně.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Zde není co rozepisovat – řešitelé prostě vyřešili sudoku. Za zmínku stojí pouze, že všichni řešitelé, kteří dosáhli 5 bodů (tedy všech 5 hledaných čísel správných), vyplnili tabulku celou. Nenašel se žádný řešitel, který by sudoku přestal luštit ve chvíli, kdy našel všechna hledaná čísla. Příčinu vidím sice částečně v tom, že řešitelé si neuvědomili, že můžou skončit, hlavně však v tom, že řešení sudoku je baví a sami by cítili úkol nesplněný, kdyby tabulku nedovyplnili.

Nesprávná řešení:

1. Nesprávná řešení byla přesně taková, jaká jsem očekávala. Někdo při řešení udělal chybu a tabulku měl vyplněnou nesprávně, někdo se prostě „zasekl" a celé sudoku nedořešil.

Poznámky

- Čísla pod písmeny A až E byla volena záměrně odstupňovaně - některá velmi lehká, jiná taková, aby se na ně dalo přijít až ke konci vyplňování. Tak jsem chtěla rozdělit škálu, kam až kdo došel, a zároveň dát šanci na body těm, kdo sudoku nedoluští celé.
- Záměrně jsem volila čísla tak, aby čísla A až E nebyla navzájem různá. To ale řešitele v nejmenším nepřekvapilo.
- Je zřejmé, že sudoku je „módní" záležitostí. Přesto mě tak vysoká úspěšnost překvapila (sudoku mělo střední obtížnost).

7.2.4. Úloha 4

Počet řešitelů celé série: 34

Počet řešitelů úlohy: 28

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 18

Zadání

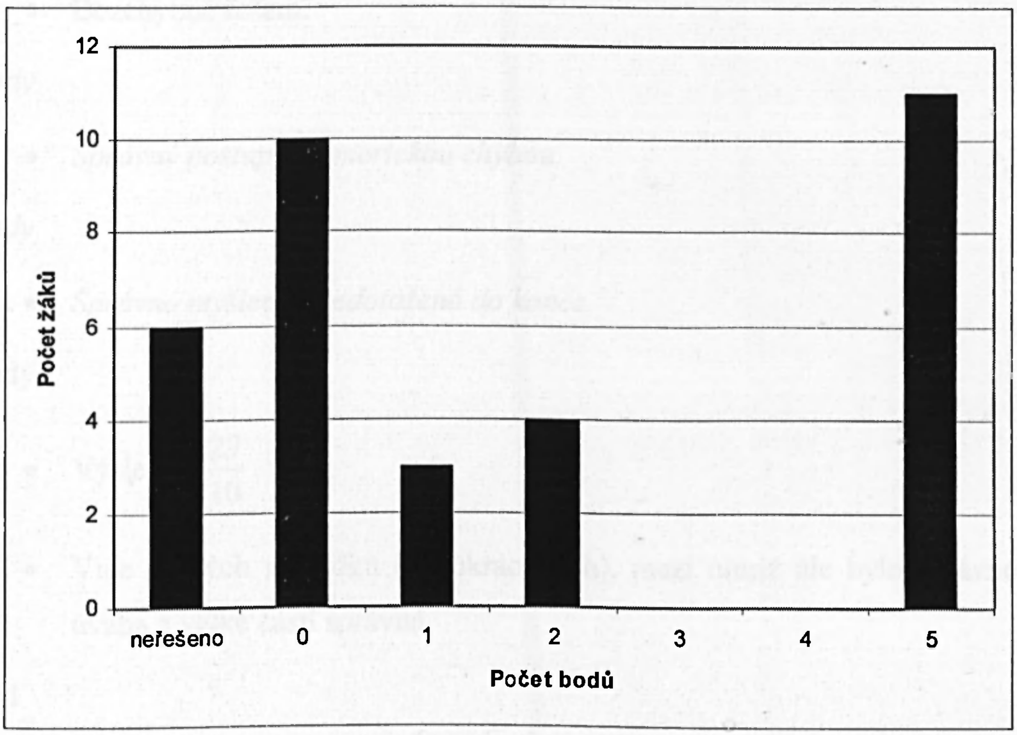
Najděte zlomek mezi $\frac{96}{35}$ a $\frac{97}{36}$ s co nejmenším jmenovatelem.

Řešení

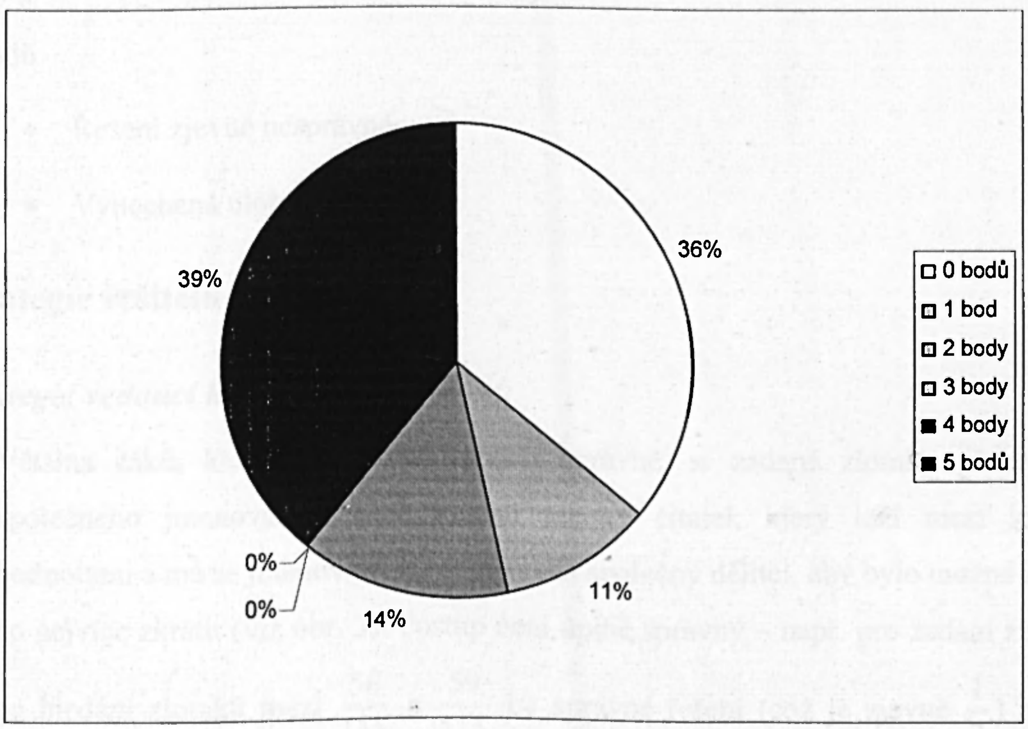
Zlomek $\frac{96}{35}$ je přibližně roven 2,74; zlomek $\frac{97}{36}$ je přibližně roven 2,69. Nabízí se, že zlomek s celkem malým jmenovatelem mezi nimi bude zlomek $\frac{27}{10}$. Postupně odzkoušíme, zda nějaký zlomek s jmenovatelem menším než 10 neleží také v tomto intervalu. Např. pro devítiny: Hledáme zlomek $\frac{a}{9}$, pro který platí $\frac{97}{36} < \frac{a}{9} < \frac{96}{35}$. Odtud by bylo $2{,}69 < \frac{a}{9} < 2{,}7$, tedy $24{,}21 < a < 24{,}3$, přičemž a je celé číslo. Takové a zjevně neexistuje. Postupně stejným způsobem prozkoušíme osminy – opět žádné číslo nevyjde, sedminy – vyjde $\frac{19}{7}$, šestiny, pětiny... Pro žádný jmenovatel menší než 7 už řešení nevyjde, hledaný zlomek je tedy $\frac{19}{7}$.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 7: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 4 první série



Graf 8: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 4 první série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- *Správný postup s numerickou chybou.*

3 body

- *Správná myšlenka nedotažená do konce.*

2 body

- Výsledek $\frac{27}{10}$.
- Více různých výsledků (nedokrácených), mezi nimiž ale bylo správné řešení, úvaha z velké části správná.

1 bod

- Číslo vybrané od oka, postup obsahuje správné prvky, z větší části je ale nesprávný.

0 bodů

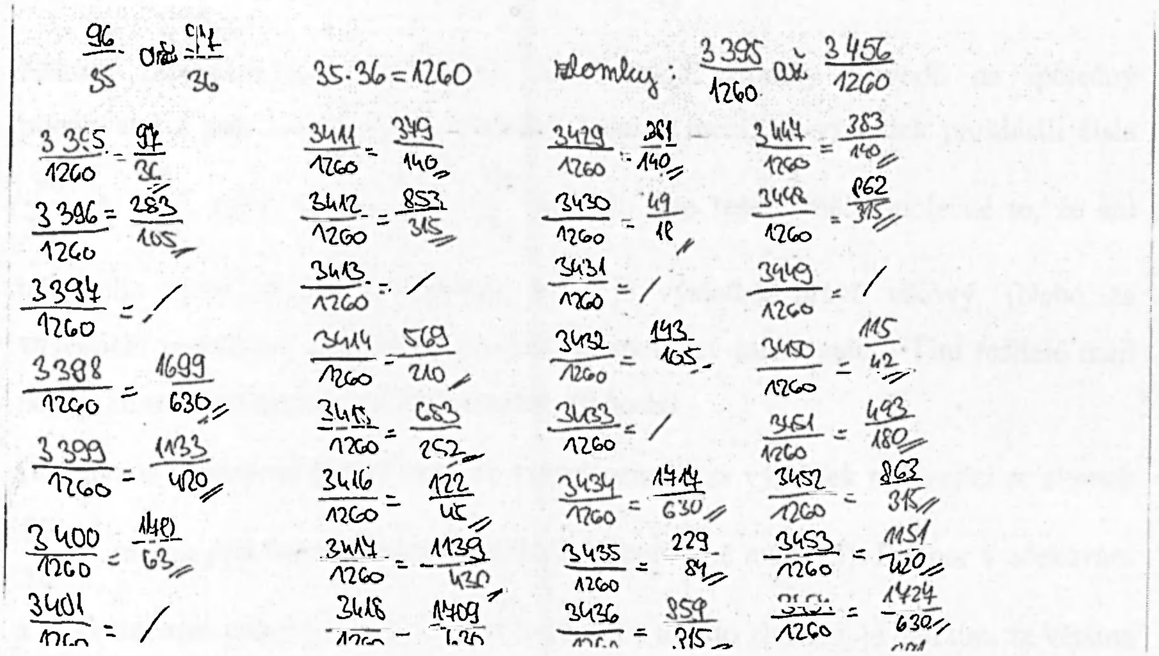
- Řešení zjevně nesprávné.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Většina žáků, kteří tuto úlohu vyřešili správně, si zadané zlomky převedla na společného jmenovatele. Poté hledali takový čitatel, který leží mezi krajními hodnotami a má se jmenovatelem co největší společný dělitel, aby bylo možné zlomek co nejvíce zkrátit (viz obr. 3). Postup není úplně správný – např. pro zadání změněné na hledání zlomku mezi $\frac{56}{115}$ a $\frac{59}{115}$ by správné řešení (což je zjevně $\frac{1}{2}$) nenašli. Řešení sice ukazuje na nepřesné chápání intervalů zlomků, podle mého názoru je ale

tato chyba přiměřená věku řešitelů, proto jsem do řešení napsala výhradu, ale řešení uznávala, jako by bylo správné.



Obr. 3: Výřez z řešení Dany

2. Někteří řešitelé použili stejnou strategii jako v autorském řešení.
3. Jedna ze strategií se pouze mírně lišila od strategie autorského řešení – řešitel hledal zlomek mezi 2,69 a 2,74, nezkoušel jmenovatele sestupně, ale vzestupně – „jedniny“, poloviny, třetiny…

Nesprávná řešení:

1. Několikrát se opakovalo, že autor si řešení „tipl“ – našel zlomek, který ležel mezi zadanými krajními hodnotami a má podobný jmenovatel. (Např. „Hledaný zlomek je $\frac{96}{36}$, protože $\frac{96}{35} < \frac{96}{36} < \frac{97}{36}$.“ Toto řešení ukazuje, že řešitel má jisté – spíše formální – znalosti o práci se zlomky. Potěšitelné je, že zkoušel porovnávat zlomky nikoli pomocí kalkulačky, ale podle vlastností čísel, méně potěšitelné již je, že jeho nerovnost zjevně není správná. Tím, že nalezením jednoho zlomku považoval úlohu za vyřešenou, ukazuje, že jeho pochopení operací se zlomky není správné. Buď si vůbec neuvědomuje hustost racionálních čísel (že mezi dvěma krajními hodnotami existuje více než jeden zlomek) nebo ho nenapadlo, že mezi dvěma zlomky může být

zlomek, který má menší jmenovatel než krajní hodnoty. Řešení tohoto typu se vyskytlo několik (další „oblíbený“ výsledek byl $\frac{94}{35}$). *(1 bod)*

2. Někteří žáci absolutně nepochopili úlohu (např. zlomky převedli na společný jmenovatel a pak označili jako výsledek jednu z mezí, za výsledek prohlásili čísla $\frac{96}{35,1}$ a $\frac{97}{36,1}$, nebo číslo $\frac{97}{36}+1=\frac{98}{36}$ apod.). Tato řešení měla společné to, že ani u jednoho autor přesně nevysvětlil, proč je výsledek právě takový. (Nebo za vysvětlení považoval právě to převedení na společný jmenovatel.) Tito řešitelé mají pojem zlomek evidentně zažitý formálně. *(0 bodů)*

3. Očekávané nesprávné řešení bylo, že řešitel označil za výsledek nabízející se zlomek $\frac{27}{10}$. K mému překvapení těchto řešitelů bylo poměrně málo (3). Rozpor v očekávání a ve skutečném počtu řešitelů, kteří se zastavili u tohoto zlomku, je dán tím, že většina řešitelů převáděla zlomky na společný jmenovatel – tam už se $\frac{27}{10}$ nenabízí. *(2 body)*

4. Dalším dokladem formalismu v chápání pojmu zlomek u některých řešitelů bylo prohlášení aritmetického průměru krajních hodnot, nebo rozdílu krajních hodnot za výsledek.

   Aritmetický průměr byl výsledek, který jsem očekávala – hledáme něco mezi, aritmetický průměr obvykle vycházívá „hezké číslo“, překvapivě jej však uvedl pouze jediný řešitel.

   Rozdíl krajních hodnot jako výsledek je ale doklad toho, že se žák na úlohu díval s vysokým stupněm neporozumění (nejspíš „strategie“: zadali mi dva zlomky, jeden větší a druhý menší, součet je nesmysl, tak je odečtu...) *(0 bodů)*

Poznámky

- Naprostá většina řešitelů si zadané zlomky převedla na společný jmenovatel (ať už dále použila jakoukoli strategii).

  Je vidět, že v tomto věku mají žáci operaci převádění zlomků na společný jmenovatel zautomatizovanou. Provádějí ji bez chyb, a zjevně když dostanou zadánu úlohu o zlomcích, je převedení na společný jmenovatel první, co udělají.

- V zadání je mírný chyták, první zadaný zlomek je větší než druhý. To však pro většinu nebyl problém – na společném jmenovateli nebo na desetinném čísle je vidět na první pohled, které číslo je větší; jejich prohození tedy žáky většinou nezaskočilo. Problém měli ti řešitelé, kteří chtěli výsledek najít od oka jako číslo mezi krajními hodnotami (viz např. již zmíněná nerovnost $\frac{96}{35} < \frac{96}{36} < \frac{97}{36}$).

7.2.5. Úloha 5

Počet řešitelů celé série: 34

Počet řešitelů úlohy: 32

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 31

Zadání

Drak Osmihlavec má – což vás nejspíš už napadlo – osm hlav. Některé hlavy jsou prima, ale některé jsou strašně ukecané a lžou, jako když tiskne. (Pravdomluvné hlavy budeme označovat dále d jako důvěryhodné, hlavy, které vždycky lžou, nd jako nedůvěryhodné.) Poznáte z následujících vyjádření, které hlavy jsou důvěryhodné a které ne?

1. hlava	„Z hlav 3 a 7 je jedna d a druhá nd."
2. hlava	„Hlavy 4 i 5 jsou obě nd."
3. hlava	„Z hlav 1 a 2 je jedna d, druhá nd."
4. hlava	„Hlavy 1 a 7 jsou buď obě d, nebo obě nd."
5. hlava	„Hlavy 1 a 8 jsou obě d."
6. hlava	„Hlavy 3 a 8 jsou obě d."
7. hlava	„Hlavy 5 a 6 jsou buď obě d, nebo obě nd."
8. hlava	„Hlavy 2 a 4 jsou obě nd."

Řešení

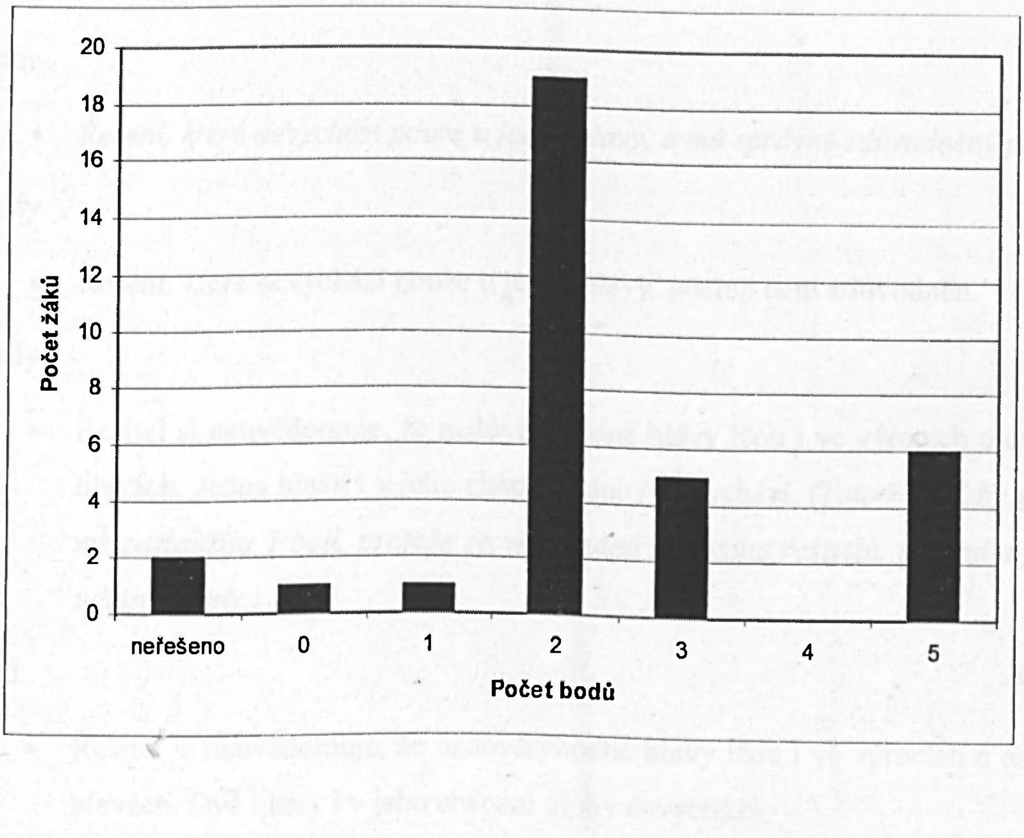
Začněme od první hlavy. Pokud první hlava mluví pravdu (a je tedy 1d), jsou dvě možnosti: Buď je hlava 3d a hlava 7nd, nebo 3nd a 7d. Pokud hlava 1 lže (a je tedy 1nd), jsou buď 3d i 7d, nebo 3nd i 7nd. Podle výroků hlav 3 a 7 a pak i dalších získáme následující možnosti:

1d, 3d, 7nd	→ 1nd, 2d – nelze, spor u hlavy 1
	→ 1d, 2nd, 5d, 6d – 7 by říkala pravdu, ale je nd - spor
	→ 1d, 2nd, 5nd, 6nd → 4d – hlava 4 by ale neříkala pravdu – spor
1d, 3nd, 7d	→ 1nd, 2nd – nelze, spor u hlavy 1
	→ 1d, 2d, 5d, 6d – nelze, 5 by musela být d i nd zároveň – spor
	→ 1d, 2d, 5nd, 6nd → 4nd – ale výrok hlavy 4 by byl pravda – spor
1nd, 3d, 7d	→ 1d, 2nd – spor u hlavy 1
	→ 1nd, 2d, 5d, 6d → spor s tvrzením hlavy 2
	→ 1nd, 2d, 5nd, 6nd → 4nd, 8nd → všechna tvrzení vychází, je tedy **1nd, 2d, 3d, 4nd, 5nd, 6nd, 7d, 8nd**
1nd, 3nd, 7nd	→ 1d, 2d → spor u hlavy 1
	→ 1nd, 2nd, 5d, 6nd → 4d, 8d – hlava 8 by ale neříkala pravdu
	→ 1nd, 2nd, 5nd, 6d → 4d – hlava 6 neříká pravdu

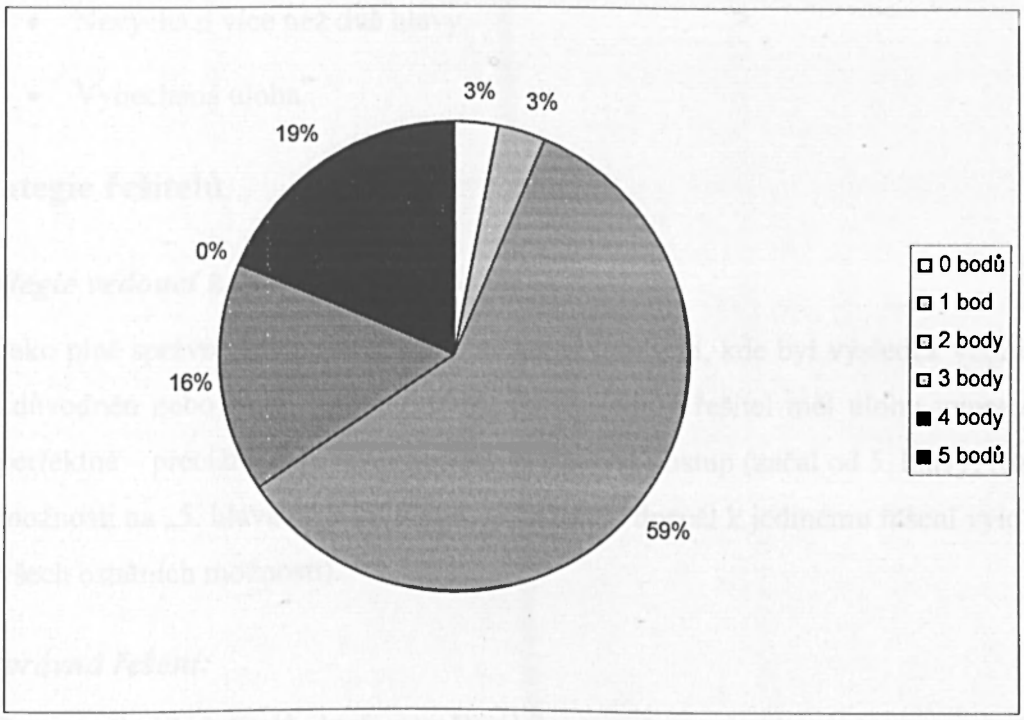
Úloha má jediné řešení, tedy že pravdu mluví hlavy 2, 3 a 7, ostatní lžou.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 9: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 5 první série



Graf 10: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 5 první série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- *Řešení, které nevychází pouze u jedné hlavy, a má správně zdůvodněný postup.*

3 body

- Řešení, které nevychází pouze u jedné hlavy, postup není zdůvodněn.

2 body

- Řešitel si neuvědomuje, že nedůvěryhodné hlavy lžou i ve výrocích o ostatních hlavách. Jedna hlava i v jeho chápání úlohy nevychází. *(Toto řešení by si podle mě zasloužilo 1 bod, protože se však jedná o většinu řešitelů, rozhodla jsem se udělit 2 body.)*

1 bod

- Řešitel si neuvědomuje, že nedůvěryhodné hlavy lžou i ve výrocích o ostatních hlavách. Dvě hlavy i v jeho chápání úlohy nevychází.

0 bodů

- Nevychází více než dvě hlavy.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Jako plně správné řešení jsem zde uznávala i ta řešení, kde byl výsledek velmi špatně zdůvodněn nebo nezdůvodněn vůbec. Pouze jediný řešitel měl úlohu vypracovanou perfektně – precizně zapsaný a logicky vystavěný postup (začal od 5. hlavy, rozdělil si možnosti na „5. hlava d“ a „5. hlava nd“ a odtud dospěl k jedinému řešení vyloučením všech ostatních možností).

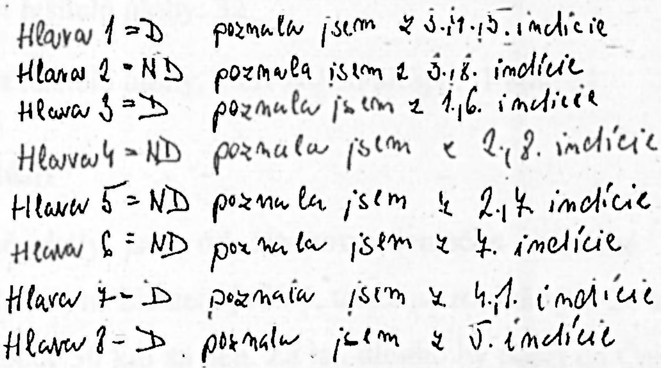
Nesprávná řešení:

1. Pouze několik řešitelů, kteří neměli úlohu vyřešenou zcela správně, pochopilo, že nedůvěryhodné hlavy lžou vždycky, tedy že nelze brát všechna tvrzení v úloze jako pravdivá. Tito řešitelé udělali někde cestou chybu – z absence postupu předpokládám, že tito žáci řešili úlohu zkusmou metodou. Neprovedli po sobě zkoušku, proto v jejich řešení výrok jedné hlavy neodpovídal skutečnosti. *(3 body)*

2. Pouze dva řešitelé udělali chybu, kterou jsem očekávala, tedy špatně znegovali velký kvantifikátor (negace výroku „2 a 4 jsou obě nd“ je podle nich „2 a 4 jsou obě d“). Jinak řešili úlohu bez větších chyb. (Tato chyba se však vyskytovala tak zřídka pouze proto, že většina řešitelů špatně pracovala se zadáním a s negacemi vůbec nepracovala – viz níže.) *(3 body)*

3. Většina řešitelů úlohy (19) si neuvědomila, že nedůvěryhodné hlavy lžou i ve výrocích o ostatních hlavách (viz obr. 4). Úloha se jim tedy zjednodušila na pouhé spojení osmi požadavků tak, aby všechny vycházely. Tím pádem úloha získává úplně jinou kvalitu i v tom, že máme tedy více podmínek, než je třeba k zadefinování daného stavu. Podmínky jsou v takovém vzájemném stavu, že je nelze najednou splnit všechny. Tedy řešitelé měli dojít ke sporu a prohlásit, že úloha nemá řešení. (Což bych poté uznala za 4 body.) K tomuto výsledku však nedošel nikdo! Tento stav mi připadá alarmující. Špatné pochopení úlohy sice

ukazuje na nedostatek přemýšlení nad textem a jistou šablonovitost myšlení, za závažnou skutečnost ale beru absenci kritického zhodnocení vlastního výsledku. Na spor by sice měli přijít již v průběhu řešení úlohy, ale mohli na něj přijít i zkouškou. Ani jednoho z 19 řešitelů nenapadlo si zkoušku udělat! V této úloze přitom byla velmi snadná a velmi potřebná. Potvrzuje se, že žáci berou zkoušku spíše jako „nutné zlo“ při řešení rovnic a nedochází jim, že zkouška není zbytečná mechanická práce, ale výborný pomocník, který se může hodit i jinde než při řešení rovnic. To, že si žáci neumí úlohu zkontrolovat jiným způsobem než kontrolou výpočtu, mi připadá velmi špatné. *(2 body)*


Hlava 1 = D poznala jsem z 3.,11.,15. indicie
Hlava 2 = ND poznala jsem z 3.,8. indicie
Hlava 3 = D poznala jsem z 1.,6. indicie
Hlava 4 = ND poznala jsem z 2.,8. indicie
Hlava 5 = ND poznala jsem z 2.,4. indicie
Hlava 6 = ND poznala jsem z 4. indicie
Hlava 7 = D poznala jsem z 4.,1. indicie
Hlava 8 = D poznala jsem z 5. indicie

Obr. 4: Časté chybné řešení (Uršula)

Nejčastější z takto chybných řešení bylo: 1d, 2nd, 3d, 4nd, 5nd, 6nd, 7nd, 8d *(9 řešitelů)*. Celkem se vyskytlo pět různých variant řešení se stejnou chybou.

Poznámky

- Většina řešitelů úlohy udělala stejnou chybu.
- Velmi nemile mě překvapila absence kritického zhodnocení vlastního výsledku u většiny řešitelů. Řešitelé si nevšimli sporu v průběhu řešení, žádný z nich nedělal zkoušku.
- Zajímavé je bodové hodnocení úlohy. Úloha patřila k velmi obtížným, jen 6 řešitelů mělo víc bodů než 3, přesto však vynechanost této úlohy je minimální. Jinými slovy – o úlohu se pokusil skoro každý, přitom ji ale většina měla špatně vyřešenou.

- Úloha byla velmi nepříjemná na opravování – existovalo celkem 11 různých variant, které žáci považovali za správné řešení. Jako opravovatel jsem musela u každé zvlášť provést zkoušku, protože jsem potřebovala vědět, „kolikabodová“ chyba v řešení je. (To nejde poznat na první pohled, i řešení úplně jiné než správné může nevycházet jen u jediné hlavy, a naopak řešení podobné správnému může být postaveno na chybné myšlence, tedy dvou- a méněbodové.) Navíc se u všech chybných řešení snažím psát komentář, ze kterého má být vidět, ve kterém konkrétním místě udělal žák chybu. K většině řešení byl tento komentář poměrně dlouhý.

7.2.6. Úloha 6

Počet řešitelů celé série: 34

Počet řešitelů úlohy: 32

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 21

Zadání

Černé skály jsou od Honzova domečku vzdálené 12 km. Náš Honza není žádný sportovec, na chození je líný, takže po rovině ujde 24 km za den, do kopce 20 km za den a z kopce 30 km za den. Za jak dlouho by došel do Černých skal a zase zpátky, kdyby se nezatěžoval takovými zbytečnostmi jako klábosení s kouzelnou babičkou (o ní se dočtete příště), spaní ani vysvobozování princezny?

Řešení

Co je na jednu stranu do kopce, je na druhou stranu z kopce. Tedy dráhu y jde Honza do skal do kopce, ze skal z kopce, a dráhu z naopak – tam z kopce, zpátky do kopce. Je vidět, že v celkovém součtu obou cest ujde Honza do kopce dráhu $y + z$ a z kopce také dráhu $y + z$. Označme si dále, že Honza ujde po rovině při jedné cestě dráhu x. (Zjevně při cestě zpět ujde po rovině také dráhu x.) Čas potřebný k ujití celé cesty tam i zpátky je tedy (s použitím vztahu mezi rychlostí, dráhou a časem):

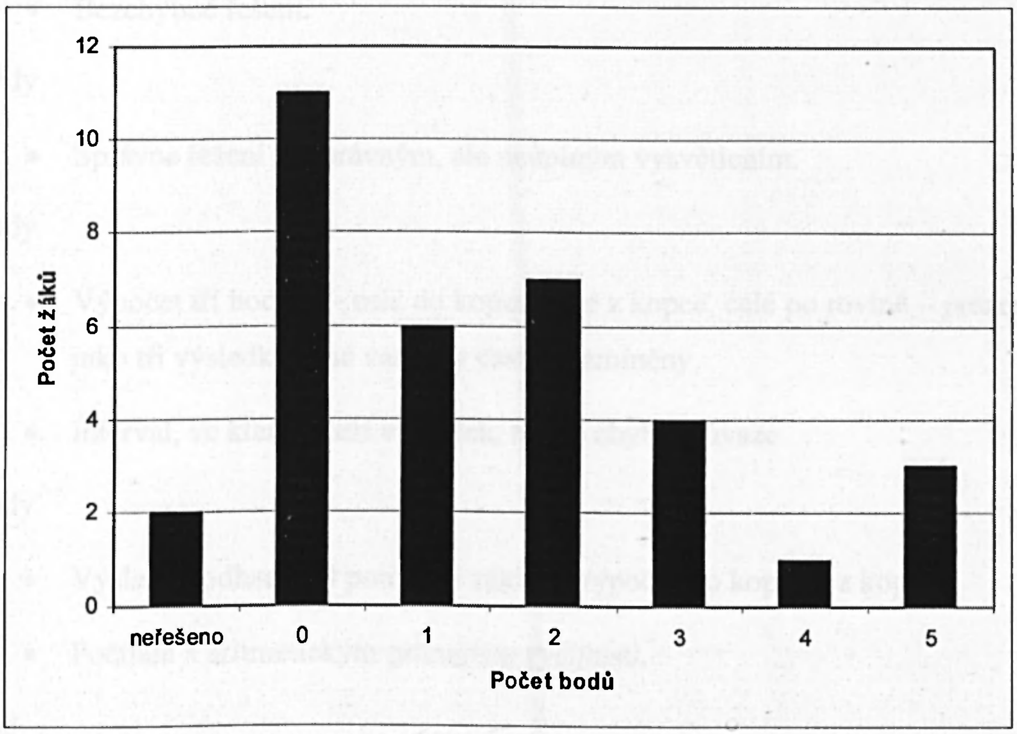
$$t = 2\cdot\frac{x}{24} + \frac{y+z}{20} + \frac{y+z}{30} = 2\cdot\frac{x}{24} + \frac{3y+3z+2y+2z}{60} = \frac{x}{12} + \frac{5(y+z)}{60} = \frac{x}{12} + \frac{y+z}{12} =$$

$$= \frac{x+y+z}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

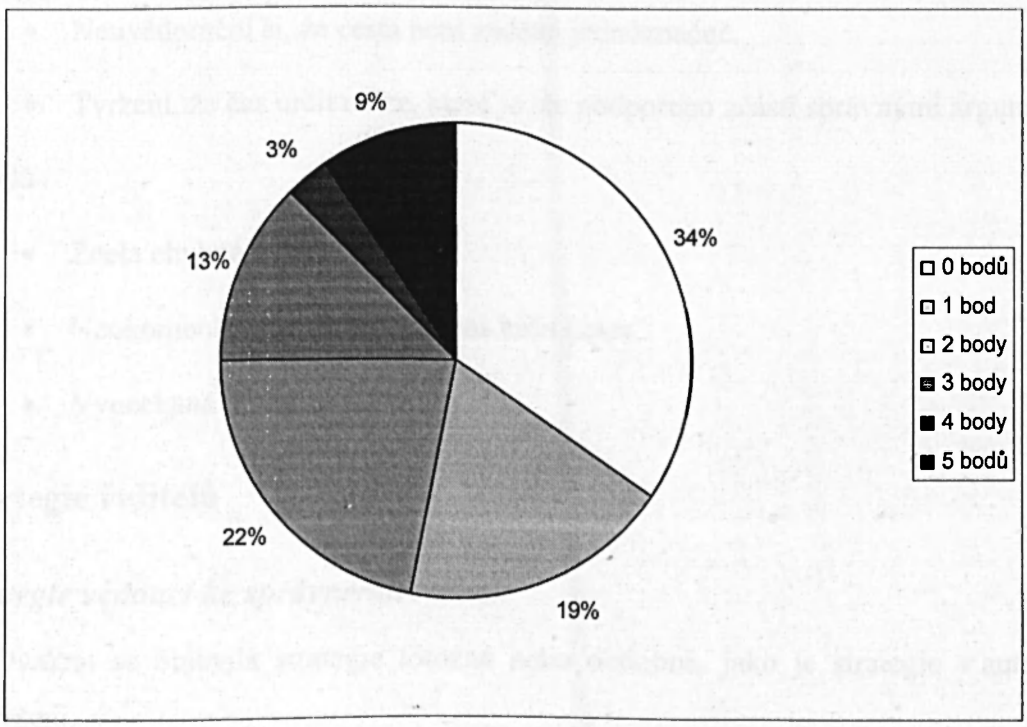
Honza by tedy ušel cestu tam i zpět za jeden den.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 11: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 6 první série



Graf 12: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 6 první série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Správné řešení se správným, ale neúplným vysvětlením.

3 body

- Výpočet tří hodnot – celé do kopce, celé z kopce, celé po rovině – prezentováno jako tři výsledky, jiné varianty cesty nezmíněny.
- Interval, ve kterém leží výsledek, mírná chyba v úvaze.

2 body

- Výsledek odhadnutý pouze na základě výpočtu do kopce a z kopce.
- Počítání s aritmetickým průměrem rychlostí.

1 bod

- Výraznější chyby, počítání rychlostí a časů, které vlastně nepotřebujeme.
- Neuvědomění si, že cesta není zadaná jednoznačně.
- Tvrzení, že čas určit nelze, které je ale podpořeno zčásti správnými argumenty.

0 bodů

- Zcela chybná úvaha.
- Neokomentované tvrzení, že čas určit nelze.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Dvakrát se objevila strategie totožná nebo obdobná, jako je strategie v autorském řešení.
2. Jeden řešitel si spočítal, že cesta po rovině trvá jeden den a cesta pouze do/z kopce také 1 den. Z toho vyvodil, že průměrná rychlost do/z kopce je stejná jako průměrná

rychlost po rovině. Tedy ať vypadá cesta jakkoli, stejně ji vždy půjde 1 den. Řešitel sice úlohu svým způsobem obešel, jeho postup vyšel proto, že čísla jsou tak zadaná, aby průměrná rychlost stejná vyšla. Jeho řešení si ale plně zasloužilo 5 bodů, protože bylo založeno na správné úvaze a výborně okomentováno. Potěšilo mě, že si řešitel uvědomil, že průměrná rychlost cesty do kopce a z kopce není aritmetickým průměrem rychlostí.

3. Jeden řešitel spočítal podle něj nejnáročnější variantu (celé bez chůze po rovině) a nejsnazší variantu (celé po rovině), vyšly mu stejně (1 den), proto prohlásil 1 den za výsledek. Autor má dobré chápání matematických pojmů a souvislostí, v řešení mu ale chybělo zdůvodnění, proč je cesta do a z kopce nejnáročnější a po rovině nejsnazší. (To odpovídá reálným zkušenostem, ale Honza z úlohy by mohl např. rád a rychle chodit do kopce.) *(4 body)*

Nesprávná řešení:

1. Objevily se očekávané varianty nesprávného řešení – řešitelé si situaci různě zjednodušovali – např. že třetina cesty je do kopce, třetina z kopce a třetina po rovině, různě – více či méně účelně sčítali dráhy, dělili rychlosti, počítali časy po rovině a do kopce, někteří se snažili počítat s trojčlenkou... *(0 – 3 body)*
2. Časté bylo, že si řešitelé vypočítali čas do kopce, čas z kopce a čas po rovině, dál ale myšlenku nedotáhli. *(0 – 3 body)*
3. U některých žáků byl patrný formalismus a bezmyšlenkovité užívání vzorců – např. čas Honzy je $\frac{24}{24}+\frac{30}{24}+\frac{20}{24}=\ldots=3$ dny a 2 hodiny. *(0 bodů)*
4. Řešitelé počítající s aritmetickým průměrem rychlostí se vyskytli 3. (Předpokládala jsem, že jich bude víc.) *(2 body)*
5. Jeden řešitel si přidal předpoklad na základě reálného života, že do skal to je do kopce a ze skal z kopce. Cenné na jeho řešení ale je, že si sám uvědomoval neobecnost svého řešení a svůj předpoklad opravdu uvedl slovy „Předpokládám, že...“. *(3 body)*

Poznámky

- Úloha byla náročná, obávala jsem se, že mladší žáci nebudou z fyziky znát vztah pro výpočet času z dráhy a rychlosti, to však nebyla pravda.

7.3. Druhá série

7.3.1. Úloha 1

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 8

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 7

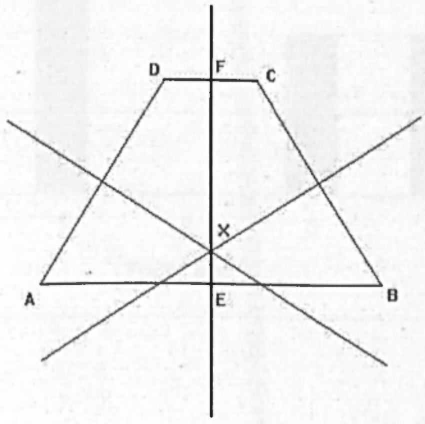
Zadání

Kuchyně má tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou větší než 60°. Delší základna lichoběžníku má délku a metrů, kratší základna c metrů, výška v metrů. Honza postavil Mňoukala do kuchyně. Mňoukal byl nesmírně líný kocour, který raději několik hodin počítal, než by – jen to ne – udělal o jediný rychlý krok navíc! Takže si sedl nad plán myších děr, o kterých věděl, že jsou v každém rohu kuchyně jedna, a začal počítat, aby našel místo, ze kterého je ke každé díře stejně daleko. Najděte, kde přesně je místo, ze kterého má Mňoukal ke každé myší díře stejně daleko. V jaké je to vzdálenosti od středu delší základny lichoběžníku?

Řešení

Označme si vrcholy lichoběžníkové kuchyně A, B, C a D. Chceme najít bod (označme jej X), jehož vzdálenost od všech těchto bodů je stejná. Aby $|AX| = |BX|$, musí bod X ležet na ose úsečky AB (což je zároveň osa úsečky CD). Teď už máme zaručeno, že $|AX| = |BX|$ a $|CX| = |DX|$, stačí už tedy pouze zpracovat podmínku, že $|AX| = |CX|$.

Označme si E střed úsečky AB, F střed úsečky CD (viz obrázek).



Bod X tedy leží „někde" uvnitř úsečky EF. Potřebujeme zajistit, aby $|AX|=|CX|$. Délku $|AX|$ můžeme vypočítat z pravoúhlého trojúhelníku AEX, $|CX|$ z pravoúhlého trojúhelníku CFX. $|EX|$ označíme kv, kde k je číslo mezi 0 a 1. Potom $|FX|=(1-k)v$. Potom platí rovnosti:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+(kv)^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+[(1-k)v]^2}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+(kv)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+[(1-k)v]^2$$

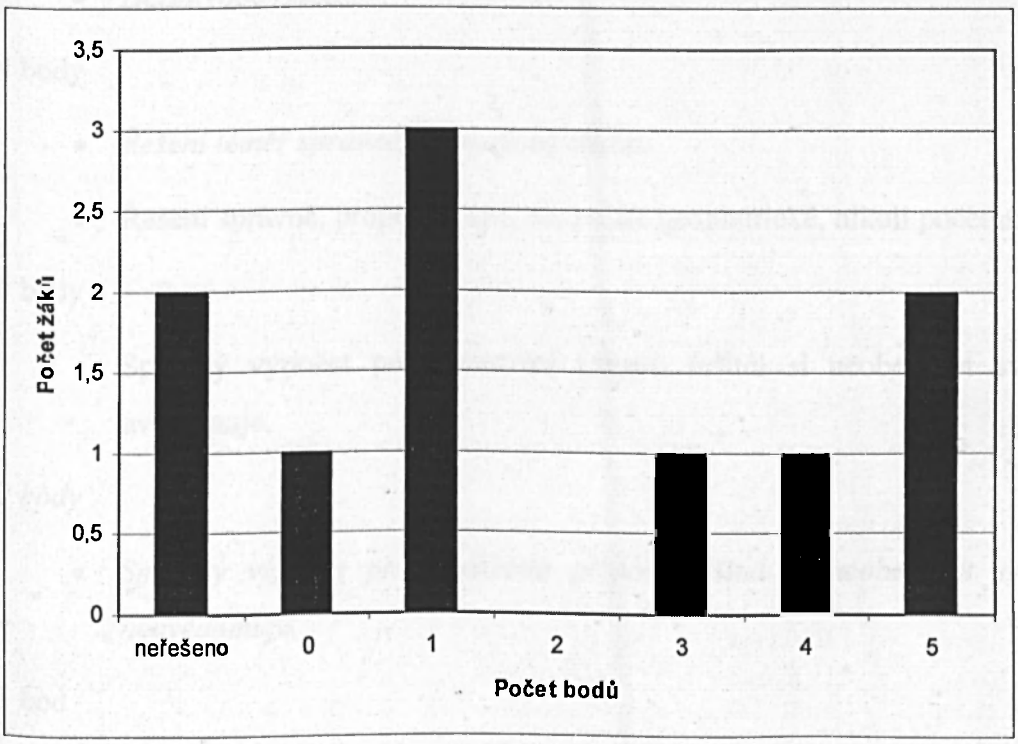
$$k=\frac{4v^2+c^2-a^2}{8v^2}$$

$$kv=\frac{4v^2+c^2-a^2}{8v}$$

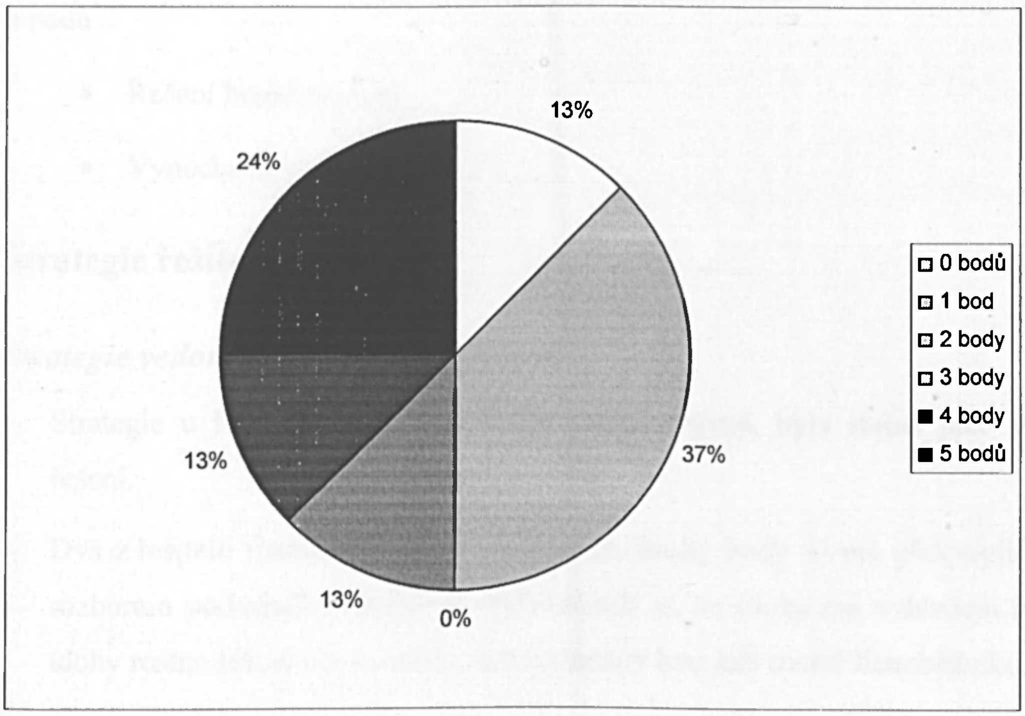
Polohu bodu X můžeme např. vyjádřit tak, že leží uvnitř úsečky EF ve vzdálenosti $\frac{4v^2+c^2-a^2}{8v}$ od bodu E.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 13: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 1 druhé série



Graf 14: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 1 druhé série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- *Řešení téměř správné. Numerická chyba.*
- Řešení správné, propracované, ale pouze geometrické, nikoli početní.

3 body

- Správný výpočet pro konkrétní případ, řešitel si neobecnost svého řešení uvědomuje.

2 body

- *Správný výpočet pro konkrétní případ, řešitel si neobecnost svého řešení neuvědomuje.*

1 bod

- Řešení postavené na chybné myšlence, které však místy obsahuje správné úvahy.

- Narýsované řešení bez komentáře.

0 bodů

- Řešení hrubě chybné.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Strategie u řešitelů, kteří měli úlohu zcela správně, byla stejná jako v autorském řešení.
2. Dva z řešitelů (jeden měl za úlohu 5 bodů, druhý body 4) mě překvapili výborným rozborem podmínek řešitelnosti. (Uvědomili si, že úloha má vzhledem ke kontextu úlohy reálné řešení pouze tehdy, když hledaný bod leží uvnitř lichoběžníku.)
3. Jeden řešitel řešil úlohu pouze geometricky. K úloze však podal vyčerpávající komentář. *(4 body)*

Nesprávná řešení:

1. Žák neuměl úlohu spočítat obecně, proto si zvolil vlastní rozměry a výpočet správně provedl pro ně. Neobecnost svého řešení si uvědomuje: „V našem případě by měl kocour k dírám 5 m, to je 2,9 m od středu delší podstavy lichoběžníku. Jestliže by rozměry lichoběžníku byly jiné, vyšel by nám i jiný výsledek, ale postupovali bychom stejně.“ (Což je přesně způsob, jakým se prováděla „obecná řešení“ před objevem algebraické symboliky.) Pozitivní na jeho řešení je provázanost s reálným kontextem úlohy – svoje rozměry si zadal v centimetrech, situaci si narýsoval, ale odpověď má v metrech, což by mohlo reálným rozměrům kuchyně odpovídat. *(3 body)*
2. Řešitelé, kteří získali 1 bod, uvažovali chybně – např. „ořezávali“ lichoběžník na čtverec apod. Objevilo se i řešení správně narýsované, ale bez jakéhokoli výpočtu či komentáře. *(1 bod)*

Poznámky

- Řešitelé se rozštěpili na dvě skupiny: První, která dokázala pracovat s algebraickými výrazy – ti měli řešení všichni zcela správně. Ostatní se do algebraického řešení nepustili vůbec. Chyběla tedy skupina žáků, která by byla někde na půli cesty – práci s algebraickými výrazy by se nevyhnula, ale úpravu výrazů by nezvládla.

- Poznámka pod čarou v práci Cecílie (dostala 4 body): „Pozn.: Uvažuji 'v reálu'. Kdyby byla kuchyně velmi dlouhá a úzká (velké strany *a* a *c*, malá výška *v*), střed kružnice by vyšel mimo kuchyni. Takové kuchyně ale v realitě neexistují. (Kocour ale nemusel ani tuto úlohu dopočítávat, stačilo by chytit myš Antoinettu, když mu pomáhala. Nemusel by tak udělat ani jediný krok :-).)“

7.3.2. Úloha 2

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 9

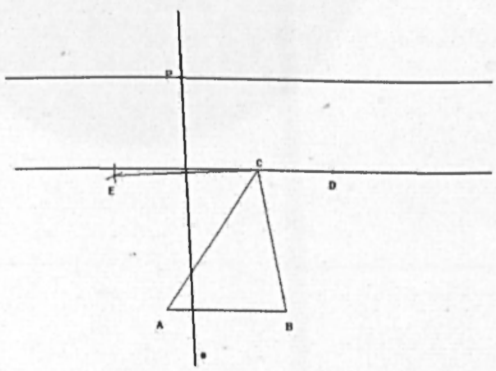
Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 9

Zadání

Je dán trojúhelník ABC ($|AB| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 7$ cm). Přímka CD je rovnoběžná s přímkou AB. Doplňte bod E tak, aby $|AE| = |CE| = 6$ cm (E leží v polorovině opačné k polorovině ACB). Přímka o je osa úsečky CE. Na ose o ve vzdálenosti 5 cm od C leží bod P (P leží v polorovině opačné k polorovině CEA). Bodem P veďte rovnoběžku p s přímkou CD. Zjistěte, v jaké vzdálenosti od A protíná přímka AB přímku p.

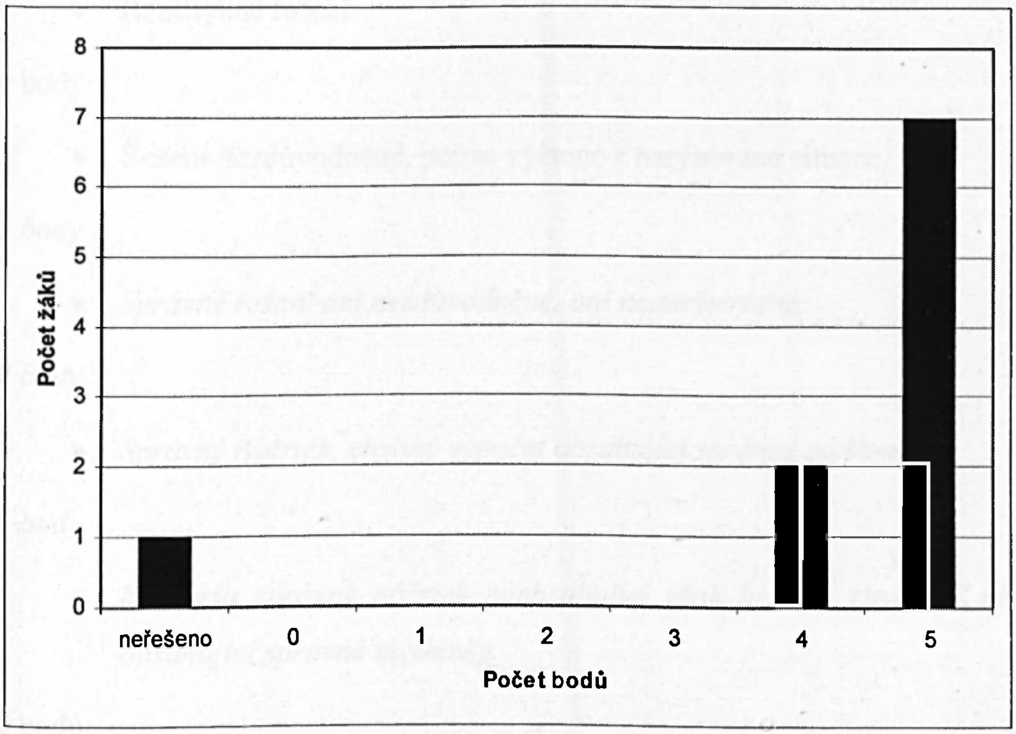
Řešení

Při pozorném čtení textu (popř. nakreslení náčrtku) zjistíme, že dané přímky jsou rovnoběžné, tudíž se neprotínají nikde. Na otázku tedy můžeme odpovědět buď, že řešení neexistuje, nebo že hledaná vzdálenost je nekonečná (viz obrázek).

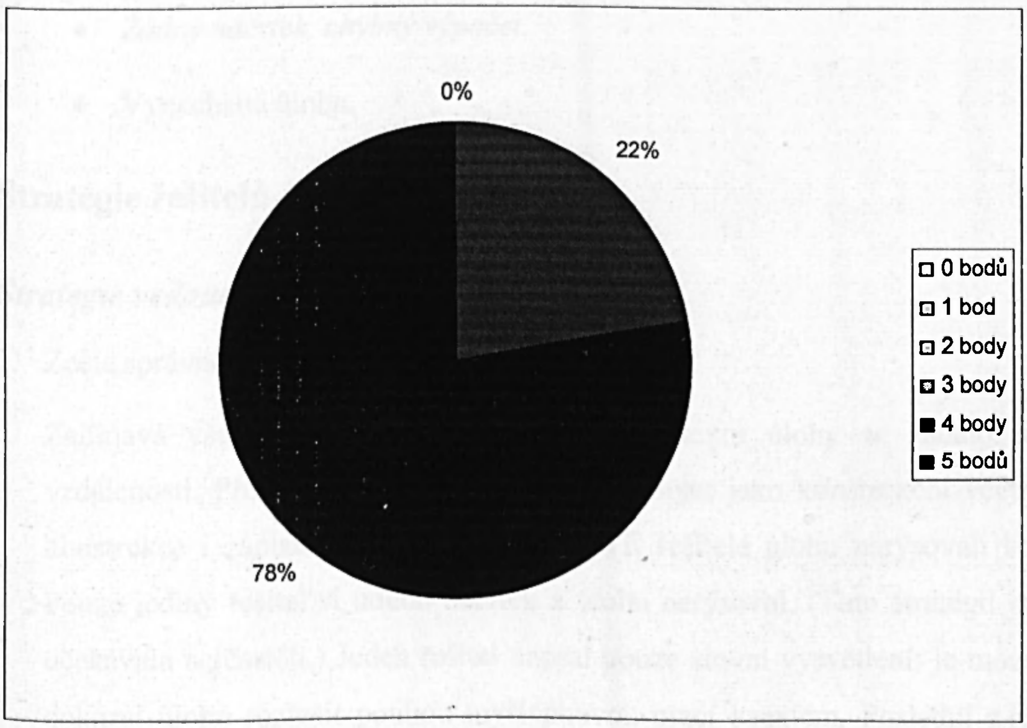


Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 15: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 2 druhé série



Graf 16: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 2 druhé série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Řešení nezdůvodněné, pouze vyčtené z narýsované situace.

3 body

- *Správné řešení ani nezdůvodněné, ani nenarýsované.*

2 body

- *Správný náčrtek, chybný výpočet obsahující správné myšlenky.*

1 bod

- *Ne zcela správný náčrtek neobsahující však hrubou chybu. K němu výpočet obsahující správné myšlenky.*

0 bodů

- *Hrubě chybný náčrtek.*
- *Žádný náčrtek, chybný výpočet.*
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Zcela správně mělo úlohu 7 řešitelů z deseti.

   Zajímavá však byla rozmanitost strategií. V textu úlohy se žádalo jen zjištění vzdálenosti. Přesto jeden řešitel vypracoval úlohu jako konstrukční včetně náčrtku, konstrukce i zápisu postupu konstrukce. Tři řešitelé úlohu narýsovali bez náčrtku. Pouze jediný řešitel si udělal náčrtek a úlohu nerýsoval. (Tuto strategii jsem přitom očekávala nejčastěji.) Jeden řešitel napsal pouze slovní vysvětlení; je možné, že tedy dokázal úlohu rozřešit pouhou myšlenkovou prací s textem. Poslední z řešitelů sice napsal pouhý komentář, v něm ale podotkl, že si pro sebe situaci nakreslil. Všichni tito řešitelé výsledek správně okomentovali, řešení nevyčetli pouze z toho, že v rysu se jim přímky neprotínají.

Nesprávná řešení:

1. Nesprávného řešení se u této úlohy vyskytoval pouze jediný typ – že řešitelé pouze odpozorovali z rysu, že přímky společný bod nemají. Jiné zdůvodnění nepřidali. Předpokládám ale, že jim jsou polohové vztahy přímek jasné, pouze je nedovedli patřičně okomentovat.

   Setkáváme se zde i s pojetím přesnosti důkazu – žáci s pěti body chápou, že řešení musí podepřít jinak než rýsováním. Žáci se čtyřmi body si buď neuvědomují, že rys nelze použít jako důkaz rovnoběžnosti, nebo mají pocit, že když se přímky neprotnou na papíře a zrakem posoudí, že se k sobě neblíží, je již dokázáno, že se neprotnou vůbec. *(4 body)*

Poznámky

- Úloha byla pro řešitele velmi lehká.
- Řešitelé neměli problémy s matematickou terminologií – pojmy jako polorovina apod. jim nedělaly problém.
- Řešitele nepřekvapilo, že úloha nemusí mít řešení, ani když text neexistenci „číselného výsledku" zdánlivě nepřipouští.
- Úlohu jsem zařadila proto, že jsem chtěla vědět, zda se žáci dokážou „prokousat" dlouhým a zdánlivě složitým zadáním. Zároveň jsem zařazením úlohy sledovala i motivační cíl – ukázat řešitelům, že ne všechny úlohy, které na první pohled vypadají složitě, opravdu složité jsou.
- Úlohu jsem měla možnost odzkoušet i v rámci Klinického semestru v IX. B základní školy nedaleko centra Prahy. Bohužel jsem se s učitelem špatně domluvila a on úlohu zadal tak, že ji musí žáci povinně narýsovat. Výsledek sice mohl být zkreslený – myslela jsem, že žákům narýsování velmi pomůže. (Že rovnoběžnost uvidí a pak už jim bude zbývat pouze ji zpětně dokázat.) Jak se ale ukázalo, ani správně narýsovaná situace většině žáků nepomohla.

  Je zjevné, že do matematického korespondenčního semináře (a zvláště do druhé a vyšší série) vstupují převážně žáci, kteří mají alespoň trochu matematické myšlení a také znalosti matematické terminologie. Na základní škole byl totiž výsledek naprosto opačný než výsledek řešitelů Pikomatu. Pouze dva žáci úlohu vyřešili správně i se zdůvodněním odpovědi. Ještě dva žáci měli zcela správný rys bez nápovědy učitele nebo mojí, ale rovnoběžnost je vůbec nenapadla. V této třídě jsem nezkoumala strategii, pouze konečné výsledky, na které jsem odpovídala ano nebo ne. A tito dva žáci se správnými rysy mi navrhovali několik různých výsledků obsahujících odmocniny. Zjevně je neexistence konečného čísla, na které se úloha ptá, ani nenapadla. Jako velký problém u většiny třídy se ukázala matematická terminologie – problém dělal nejen pojem „polorovina“, ale i pojem „osa úsečky“.

- Všímala jsem si ještě způsobu, jak žáci vyjádřili rovnoběžnost. (Tedy zda někdo odpoví, že hledaná vzdálenost je nekonečná.) Z řešitelů však takto vyspělý pojem nekonečna neměl nikdo, všichni jako odpověď uváděli, že se dané přímky neprotnou. (Tedy vlastně že úloha nemá řešení.)

7.3.3. Úloha 3

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 10

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 9

Zadání

Dokaž, že jestliže $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, pak $\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0,\ c \neq -d,\ bd \neq ac)$.

Řešení

Rozbor úlohy:

Úpravami „pravé rovnosti“ se pokusíme dostat k „levé“:

$$\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

$$ab\cdot(c+d)^2=(a+b)^2\cdot cd$$

$$abc^2+2abcd+abd^2=a^2cd+2abcd+b^2cd$$

$$ad\cdot(bd-ac)=bc\cdot(bd-ac)$$

$bd \neq ac$ (víme z podmínek, proto můžeme krátit)

$ad = bc$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (opět s využitím podmínek, že b a d jsou nenulová čísla)

Důkaz vedeme opačným směrem, tedy:

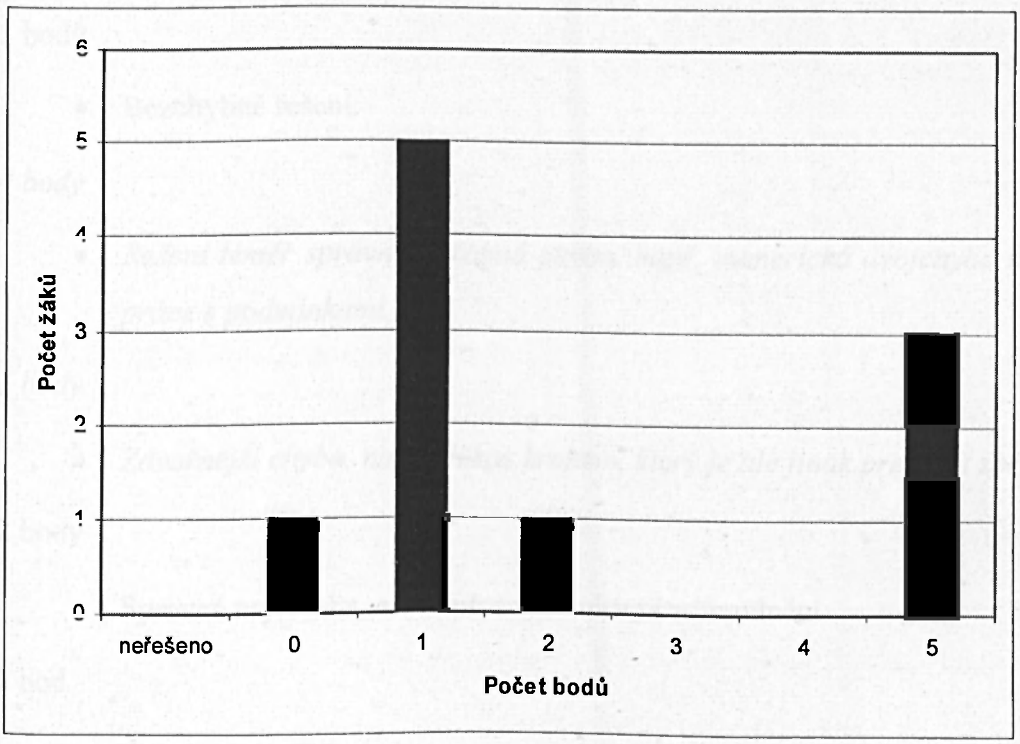
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad \cdot (bd - ac) = bc \cdot (bd - ad) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow abc^2 + 2abcd + abd^2 = a^2cd + 2abcd + b^2cd \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ab \cdot (c+d)^2 = (a+b)^2 \cdot cd \Rightarrow \frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

Jiný způsob:

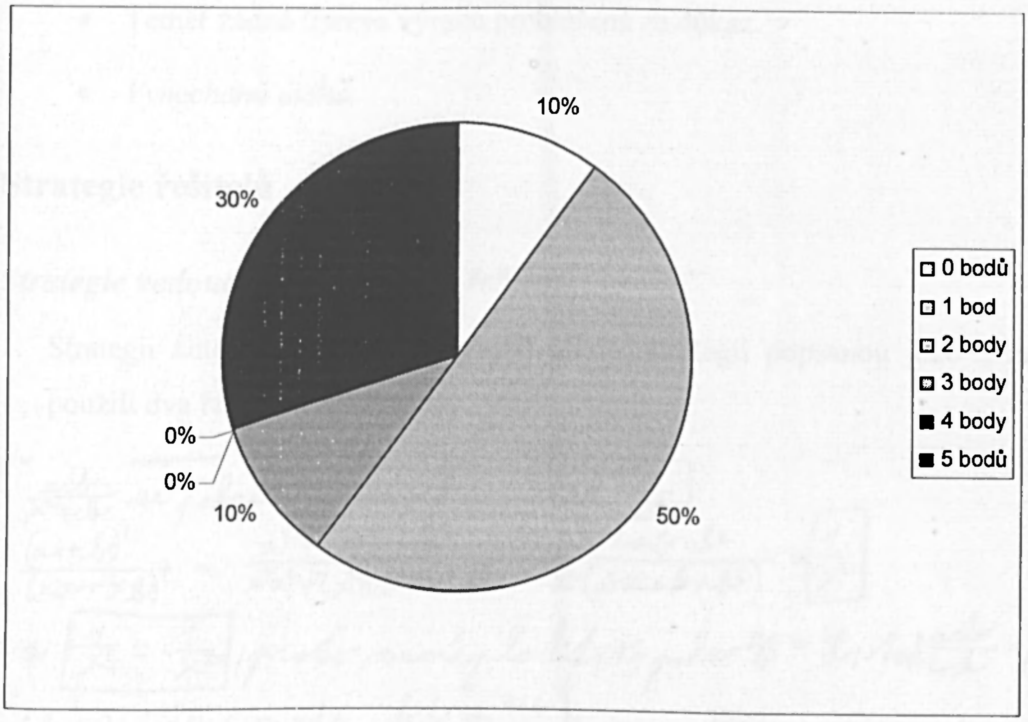
Z vlastností zlomků si uvědomíme, že $a = kc$, $b = kd$, kde k je nenulové reálné číslo. Tyto vztahy pak dosadíme do „pravé rovnosti“ a dále upravujeme.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 17: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 3 druhé série



Graf 18: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 3 druhé série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- *Řešení téměř správné. Drobná chyba, např. numerická dvojchyba nebo špatná práce s podmínkami.*

3 body

- *Závažnější chyba, např. důkaz kruhem, který je ale jinak precizně zpracován.*

2 body

- Správná myšlenka, ale nepřesné intuitivní zdůvodnění.

1 bod

- Důkaz s vážnější chybou.
- „Důkaz" neexistence ukázáním několika konkrétních případů.

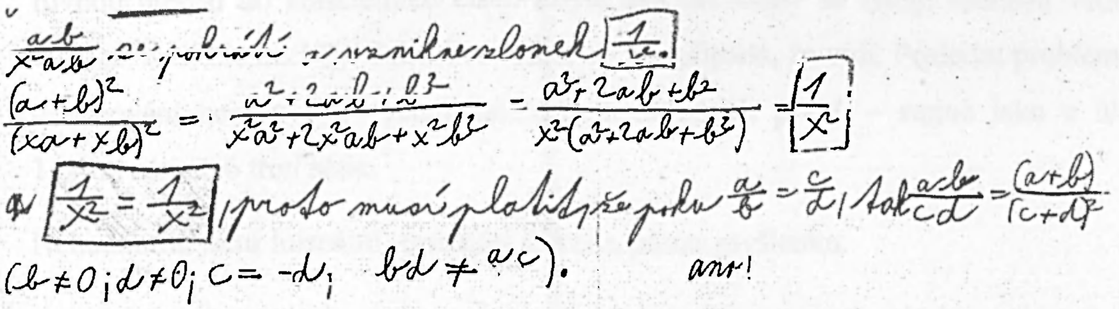
0 bodů

- Téměř žádná úprava výrazu prohlášená za důkaz.
- *Vynechaná úloha.*

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Strategii autorského řešení nepoužil nikdo, strategii popsanou jako „Jiný způsob" použili dva řešitelé (viz obr. 5).



Obr. 5: Část řešení Anny

2. Strategie dalšího řešitele se správným důkazem je trochu jiná:

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2} = \frac{ab\cdot(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a})}{cd\cdot(\frac{c}{d}+2+\frac{d}{c})} = \frac{ab\cdot(\frac{c}{d}+2+\frac{d}{c})}{cd\cdot(\frac{c}{d}+2+\frac{d}{c})} = \frac{ab}{cd}\ldots$$

Nesprávná řešení:

1. Po ukázce na konkrétním případu podá řešitel sice obecné, ale intuitivní a nepřesné zdůvodnění: „Proč? Protože je to pořád jeden a ten samý zlomek. Je to vlastně jako kdyby se jeden zlomek násobil tím samým zlomkem, akorát je ten jeden rozšířený." *(2 body)*
2. Čtyři řešitelé se snažili podat důkaz neexistence ukázáním několika konkrétních případů. *(1 bod)*
3. Jeden z řešitelů se snažil o obecný důkaz, najednou se mu však objevil bez jakéhokoli zdůvodnění vztah, který potřeboval. *(1 bod)*

4. Zcela nesprávné řešení: „$\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}, \frac{ab}{cd}=\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2}$“. Tento výraz již řešitel považoval za důkaz, pouze přidal krátký komentář, že „to je přímo vidět“. *(0 bodů)*

Poznámky

- Úloha byla pro žáky lákavá – odhaduji, že jsou zvyklí pracovat se zlomky, a výrok ze zadání na první pohled vypadá, že platit bude. V žákovských řešeních se ale objevují tři problémy. Problémy s prací s proměnnými výrazy – žáci mnohdy nejsou schopni udělat složitější úpravy než rozepsat druhou mocninu podle vzorečku, případně rovnou utečou do konkrétních čísel. Zbylé dva problémy se týkají řádného vedení důkazu. Řešitelé nechtějí dokazovat něco, co jim připadá, že vidí. Poslední problém je dokazování neexistence výčtem několika konkrétních prvků – stejně jako u úloh 1 první série a 6 třetí série.
- Nehodnotila jsem formální správnost důkazu, pouze myšlenku.

7.3.4. Úloha 4, Úloha 5

Tyto úlohy jsem se rozhodla analyzovat společně, protože byly obdobné a velmi obdobné byly i strategie řešitelů.

	Úloha 4	Úloha 5
Počet řešitelů celé série:	10	
Počet řešitelů úlohy:	9	9
Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod:	9	9

Zadání Úlohy 4

Kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici dvě figurky – bílou a černou – tak, aby při hře dáma bílá mohla brát černou? (Pozn. Dáma se hraje pouze na černých políčkách.)

Řešení Úlohy 4

V textu není jasně zadáno, zda je bílá nahoře nebo dole, měli bychom tedy počítat s oběma možnostmi. Do obrázku šachovnice jsem umístila čísla následujícím způsobem: Představila jsem si, že na příslušném políčku, do kterého jsem chtěla vpisovat číslo, stojí bílá figurka. A počítala jsem, kolik možností vyhovujících zadání je pro postavení černé figurky.

			●		●		
				2			

	1		2		2		1
1		2		2		1	
	2		4		4		2
2		4		4		2	
	2		4		4		2
2		4		4		2	
	1		2		2		1
1		2		2		1	

Celkový počet možností je součet čísel v tabulce. Celkem je tedy **72 možností.**

Zadání Úlohy 5

Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozmístit dvě figurky – bílou a černou – tak, aby se při hře dáma mohly brát navzájem? (Opět hrajeme pouze na černých políčkách šachovnice.)

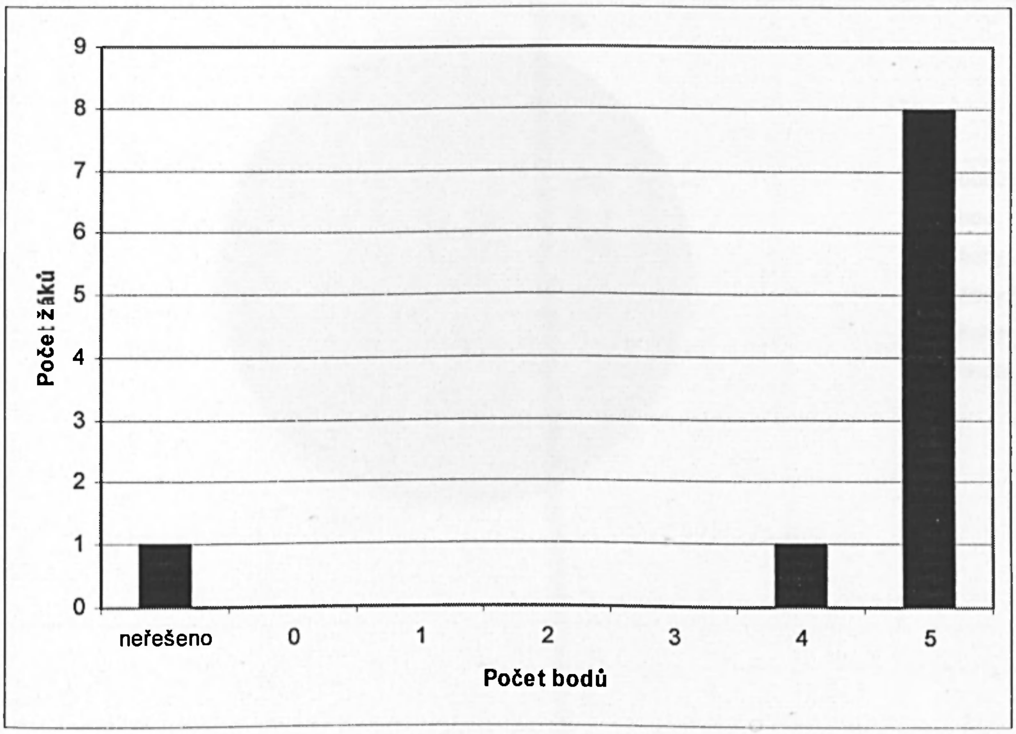
Řešení Úlohy 5

Úlohu řešíme obdobně jako úlohu předcházející, celkem existuje **50 možností.**

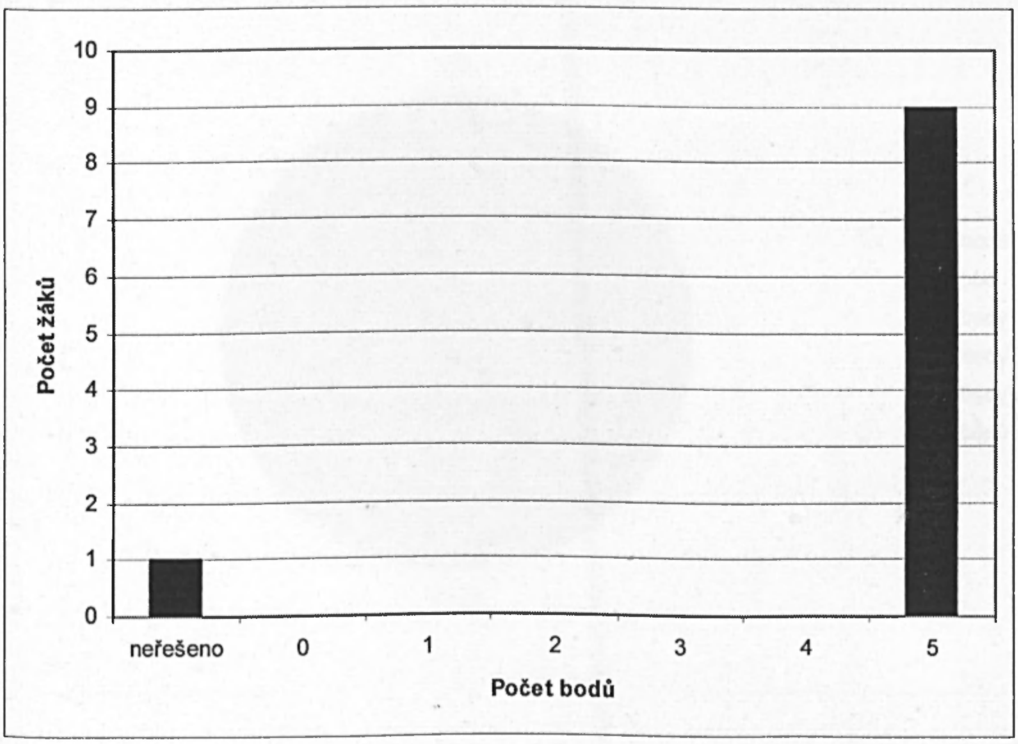
	0		0		0		0
0		2		2		1	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	1		2		2		0
0		0		0		0	

Přehled úspěšnosti řešitelů

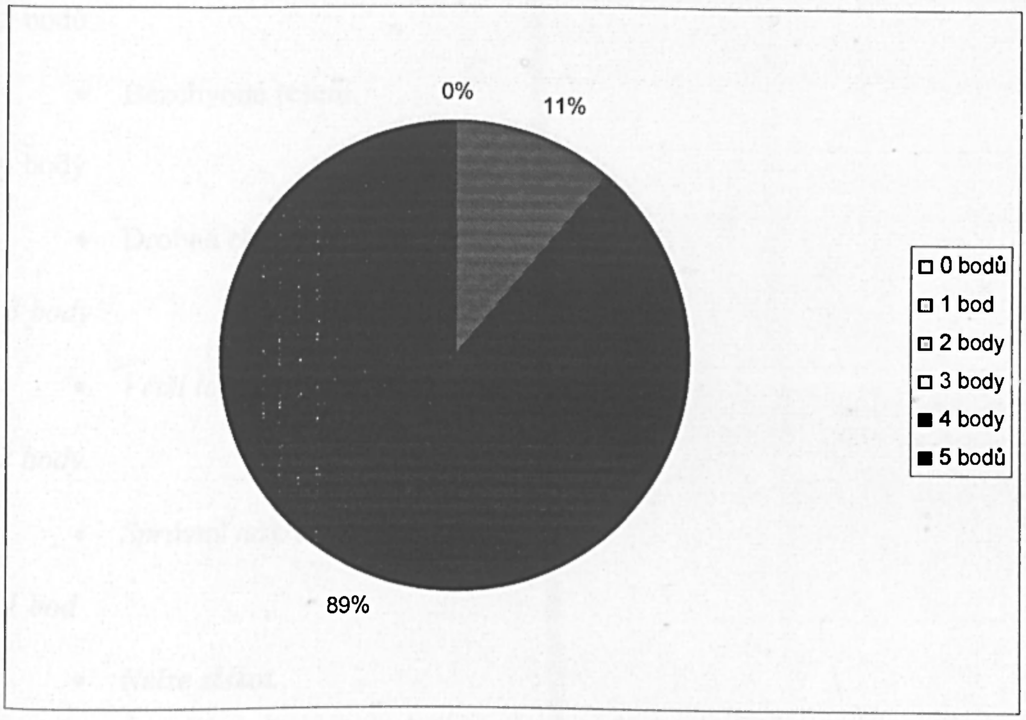
Graf 19: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 4 druhé série



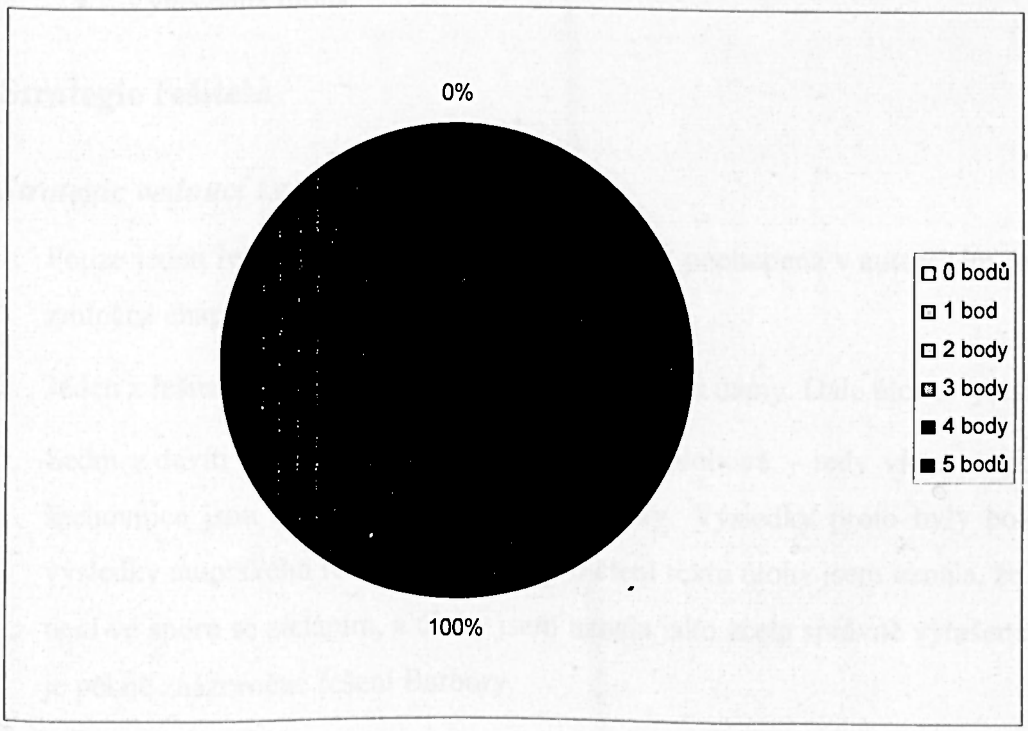
Graf 20: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 5 druhé série



Graf 21: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 5 druhé série



Graf 22: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 5 druhé série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Drobná chyba – numerická nebo logická.

3 body

- *Větší logická nebo numerická chyba.*

2 body

- *Správný nákres úlohy, chybné řešení.*

1 bod

- *Nelze získat.*

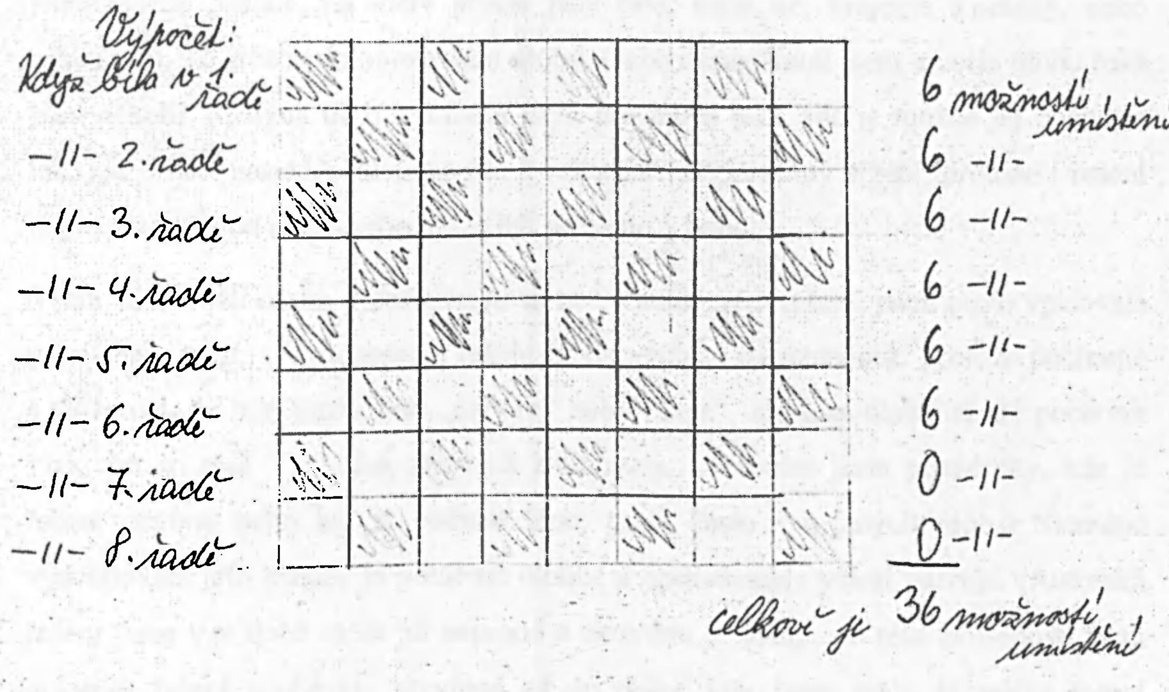
0 bodů

- *Řešení s hrubou chybou.*
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Pouze jeden řešitel pochopil úlohu tak, jak byla pochopena v autorském řešení. Další zmíněná chápání však text úlohy nevylučuje.
2. Jeden z řešitelů pochopil úlohu tak, že figurky jsou dámy. Dále úlohu vyřešil správně.
3. Sedm z devíti řešitelů úloh pochopilo úlohy polohově – tedy víme, na které straně šachovnice jsou černé a na které bílé figurky. Výsledky proto byly poloviční než výsledky autorského řešení. Po pozorném čtení textu úlohy jsem uznala, že toto řešení není ve sporu se zadáním, a úlohy jsem uznala jako zcela správně vyřešené. Na obr. 6 je pěkně znázorněné řešení Barbory.



Obr. 6: Postup řešení Barbory

4. Řešitelé nejčastěji používali obdobnou strategii jako v autorském řešení – tedy umísťovali figurku jedné barvy na různá políčka a zkoumali, kolik je k tomuto umístění možností pro umístění figurky druhé barvy. Řešení většinou nezapisovali tabulkou jako v autorském řešení, ale roztřídili si políčka podle jejich polohy, zjistili, kolik řešení existuje k umístění figurky na toto políčko, a výsledné číslo vynásobili počtem ekvivalentních políček.

Nesprávná řešení:

1. Řešitel, který se o úlohu pokusil, ale neměl ji zcela správně, se vyskytl pouze jeden. Úlohu 4 („černá může brát bílou") řešitel pochopil s malou logickou chybou, jako „černá dáma může brát bílou dámu a zároveň bílá dáma nemůže brát černou dámu". Práci s dámou jsem za chybu nebrala (viz správná řešení), za přidání si podmínky navíc, která nevyplývala z logické struktury textu, jsem 1 bod strhla. *(4 body)* Úlohu 5 vyřešil opět pro dámy – tentokrát již bez chyby. *(5 bodů)*

Poznámky

- Úlohy se v soutěži ukázaly jako poměrně nešťastně zadané, a to ze dvou důvodů. Jednak byly pro řešitele příliš snadné (měly tedy nízkou rozlišovací schopnost a tím byly nevhodné pro soutěž), jednak připouštěly různý možný výklad (máme jednoznačně zadané, na které straně jsou bílé, nebo ne; hrajeme s pěšáky, nebo s dámami). To ztěžovalo opravování úlohy. (Jako opravovatel jsem musela úlohu řešit jako několik různých úloh a musela jsem procházet text, zda je možné jej pochopit tak, jak řešitel navrhl.) Navíc vysílá k řešitelům rozporuplný signál, protože i řešení naprosto různé od autorského může být oceněno 5 body.

Všem, kteří měli úlohu vyřešenou jinak než v autorském řešení, jsem proto vpisovala poznámku, např.: „V autorském řešení úloha vychází dvojnásobek, protože počítáme s možností, že bílá může hrát „nahoře“ nebo „dole“, ale text úlohy se dá pochopit i tak, jak to máš Ty.“ (Jak jsem již zmiňovala, k řešením jsem poznámky, kde je řešení chybné nebo jak si počínat lépe, psala často i u jiných úloh.) Nicméně vysvětlování této situace je poměrně dlouhé a opravovatele velmi zdržuje. (Autorská řešení jsem v té době měla již napsané a nemohla je měnit, po této zkušenosti jsem autorská řešení nechávala otevřená až do doby, kdy jsem měla žákovská řešení opravená.)

Zmíněná nejednoznačnost zadání úlohy je velmi nepříjemná z hlediska spravedlivosti opravování, a to nejvíc u žáků, kteří úlohu pochopí jednodušším způsobem, než jakým je úloha míněna (ale neodporujícím zadání úlohy), a v tom svém řešení udělají chybu. Pak je pro opravovatele velmi obtížné stanovit „spravedlivé“ obodování. (Řešitel může mít v řešení malou chybu, ale ke svému řešení vynaložil relativně malé úsilí.)

- Úloha 5 byla nejúspěšnější úlohou celého ročníku.

7.3.5. Úloha 6

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 7

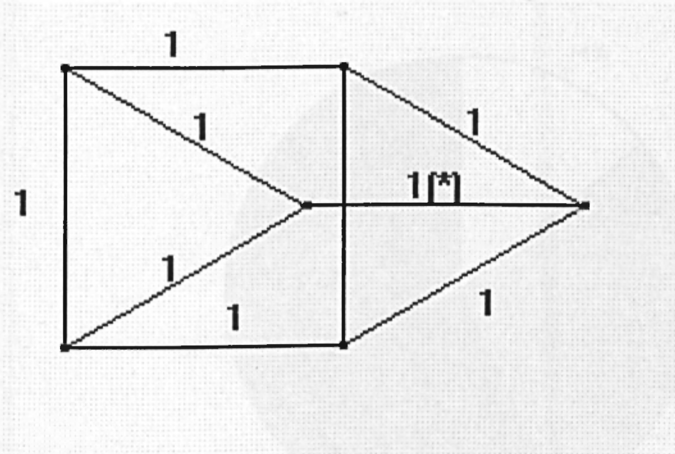
Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 7

Zadání

Najdi množinu 6 bodů v rovině tak, že každý z nich leží ve vzdálenosti 1 cm od právě tří dalších bodů této množiny.

Řešení

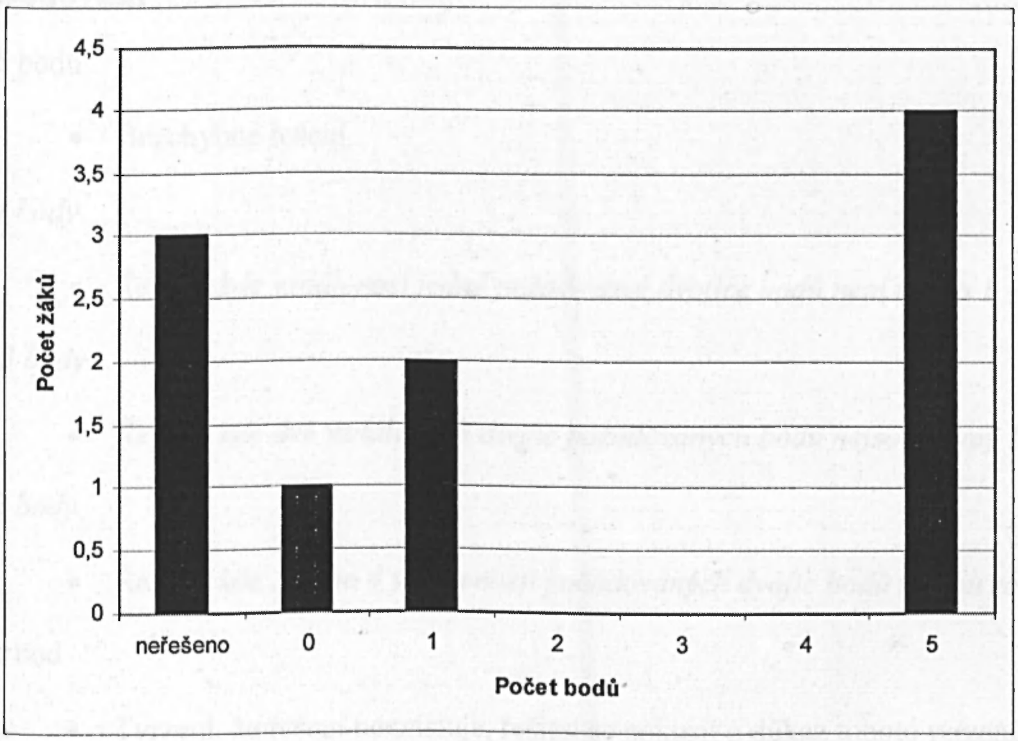
Např.:



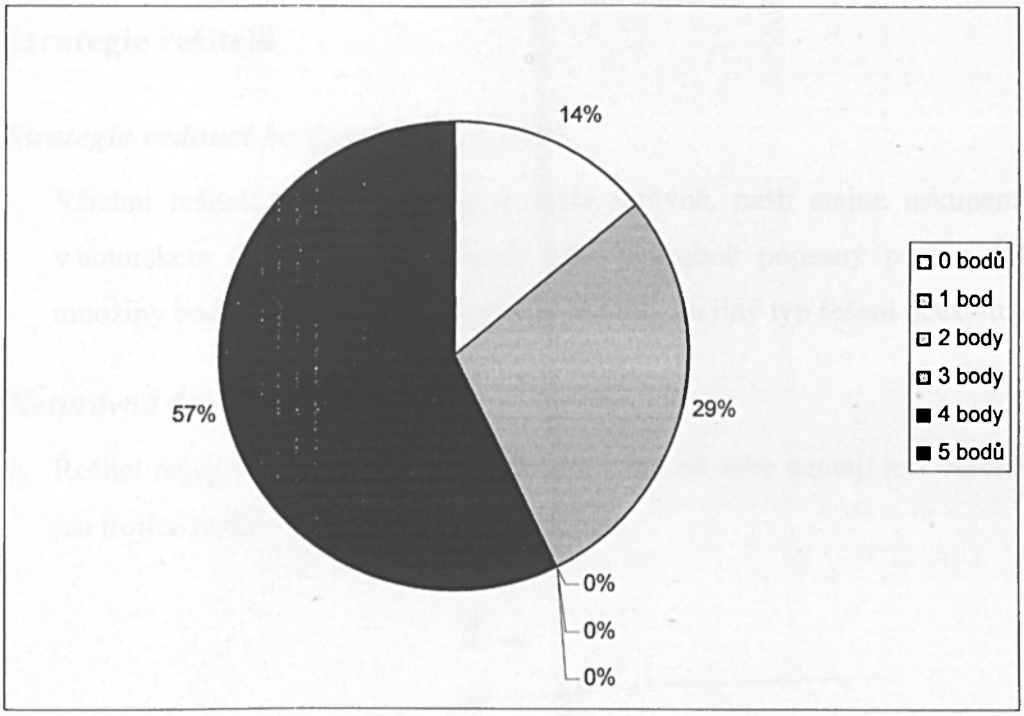
(*) Tato délka je také rovna jedné, je to strana kosočtverce se stranou délky 1.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 23: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 6 druhé série



Graf 24: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 6 druhé série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- *Řešení, kde vzdálenost jedné požadované dvojice bodů není rovna 1.*

3 body

- *Řešení, kde dvě vzdálenosti dvojic požadovaných bodů nejsou rovny 1.*

2 body

- *Řešení, kde 3 nebo 4 vzdálenosti požadovaných dvojic bodů nejsou rovny 1.*

1 bod

- Tvrzení, že řešení neexistuje, řešitel se pokusil o důkaz tohoto tvrzení.
- Více než čtyři vzdálenosti dvojic požadovaných bodů nejsou rovny 1.

0 bodů

- Nezdůvodněné tvrzení, že řešení neexistuje.

- Vynechaná úloha.

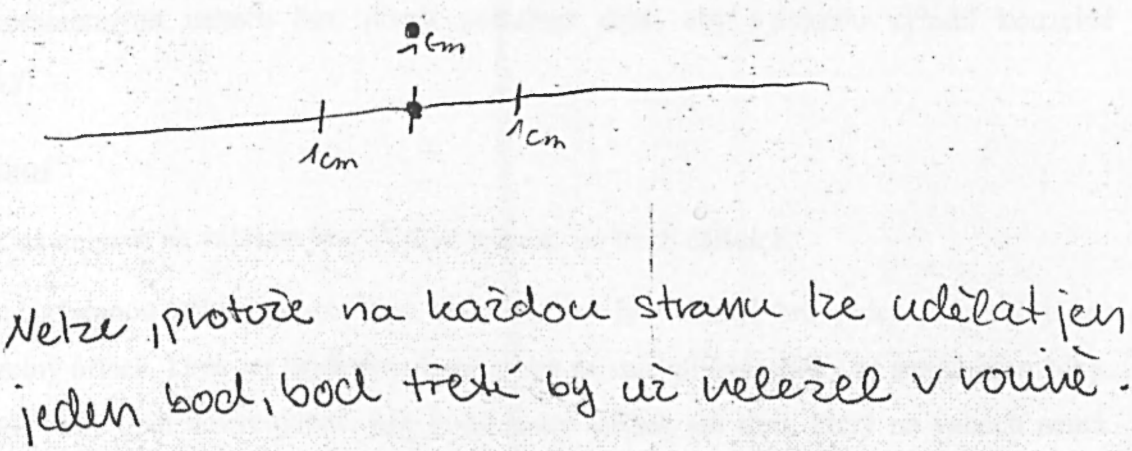
Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Všichni řešitelé, kteří měli úlohu zcela správně, našli stejné uskupení bodů jako v autorském řešení. Dva z řešitelů měli podrobně popsaný postup řešení a přes množiny bodů dané vlastnosti dokonce ukázali, že jiný typ řešení neexistuje.

Nesprávná řešení:

1. Řešitel nejspíš nepochopil, že vzdálenost 1 cm od sebe nemají mít všechny body, ale jen trojice bodů – viz obr. 7. *(1 bod)*



Obr. 7: Řešení Dany

2. Jednou se jako navrhované řešení vyskytl šestiúhelník. *(1 bod)*

3. Vyskytlo se tvrzení, že řešení neexistuje, podepřené zdůvodněním, že jej řešitel dlouho bezúspěšně zkoušel najít. *(0 bodů)*

Poznámky

- Úloha neměla žádné mezistavy. Buď řešitel správné řešení našel, nebo nenašel. Řešení pouze zčásti správné, kde by např. nevycházel jediný bod, nepředložil žádný řešitel.

7.4. Třetí série

7.4.1. Úloha 1

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 8

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 8

Zadání

Drak má 7 ořechů, které úplně stejně vypadají. Ví ale, že dva z nich jsou kouzelné (zapomněla je u něj Popelka). Jenomže krásné šaty jsou v omáčce k ničemu, to musíte uznat... Pravý oříšek má hmotnost 10 g, kouzelný 9,5 g. Jaký nejmenší počet vážení na rovnoramenných vahách bez závaží potřebuje drak, aby s jistotou vyřadil kouzelné oříšky?

Řešení

Drak dá nejprve na váhu na levé i pravé rameno po třech oříšcích.

Pokud zůstanou váhy nevychýlené, znamená to, že v každé hromádce je právě jeden kouzelný oříšek. Drak jej najde tak, že porovná na vahách dva oříšky ze stejné hromádky. Jsou-li váhy opět nevychýlené, pak je kouzelný oříšek ten třetí, který na vahách nemá. Pokud je jeden z oříšků na vahách lehčí, je to ten kouzelný. Váží tedy jednou oříšky po třech, pak hledá kouzelný oříšek v jedné skupině, nakonec ve druhé. Celkem tedy vážil třikrát.

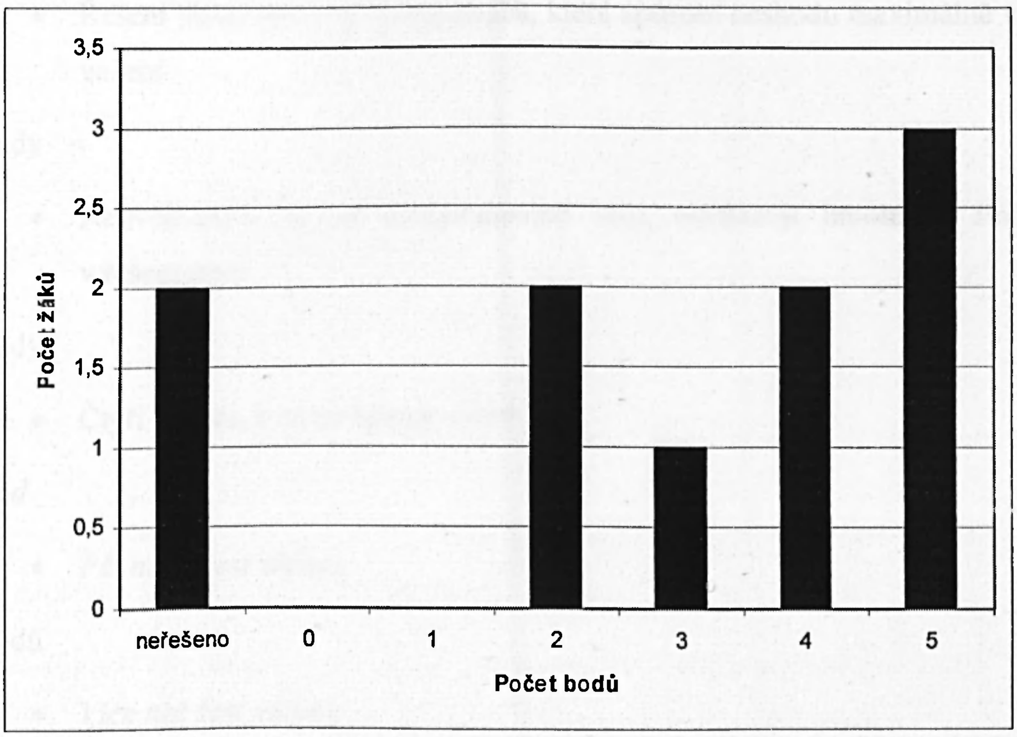
Pokud při prvním vážení hromádek se třemi oříšky je jedna hromádka těžší, může to znamenat dvě situace: Oba kouzelné oříšky jsou na lehčí hromádce, nebo je jeden oříšek na lehčí hromádce a druhý je mimo váhy. Oříšky z těžší hromádky jsou tedy pravé, rozhodnout musí o zbylých čtyřech oříšcích. Vezme tedy dva oříšky z těch čtyř, o kterých ještě nemá rozhodnuto.

Pokud je jeden z nich lehčí, je kouzelný, porovná tedy třetím vážením poslední dva oříšky, a najde tak i druhý kouzelný oříšek. Pokud jsou vybrané dva oříšky stejně těžké, buď trefil dva kouzelné oříšky, nebo trefil dva pravé oříšky a dva kouzelné leží ještě na stole. Porovná tedy například hmotnost dvojic oříšků (dvojice z vah a dvojice ze stolu) a zjistí tak, která dvojice je kouzelná.

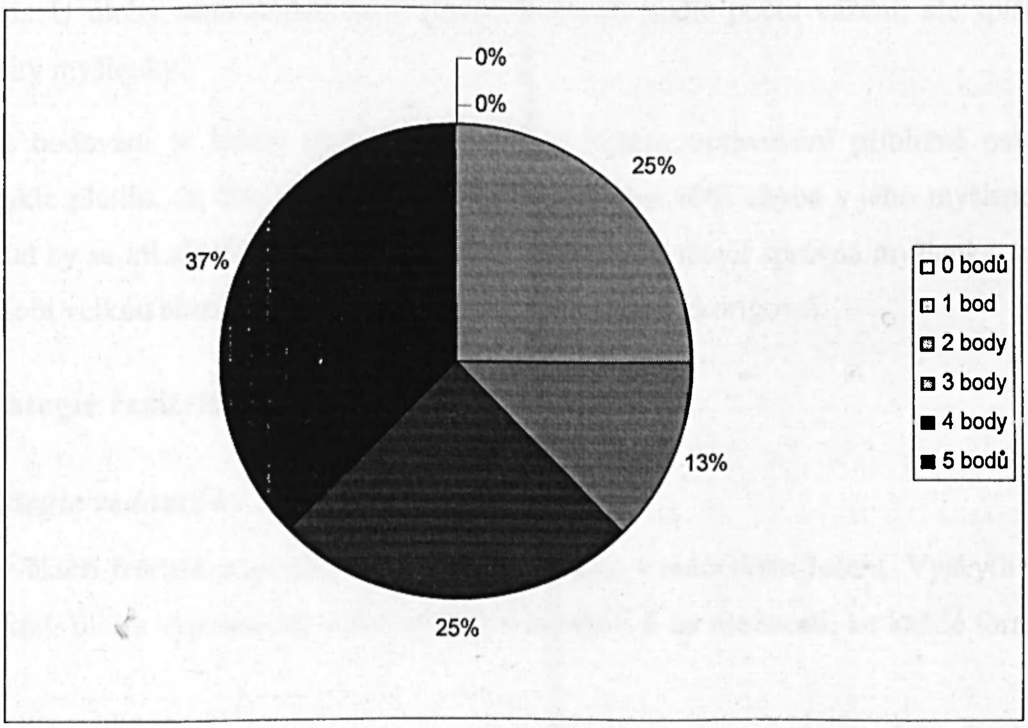
Ať tedy vážení vycházejí jakkoli, na rozhodnutí, které oříšky jsou kouzelné, stačí tři vážení.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 25: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 1 třetí série



Graf 26: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 1 třetí série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Řešení téměř správné. Malá chyba, která způsobí neshodu maximálně v jednom vážení.

3 body

- Neuvědomění si, že rovnoramenné váhy neukazují hmotnost. Jiná chyba v řešení není.

2 body

- Čtyři vážení, k tomu špatné vysvětlení.

1 bod

- *Pět nebo šest vážení.*

0 bodů

- *Více než šest vážení.*
- Vynechaná úloha.

Pozn.: U úlohy samozřejmě není vhodné bodovat podle počtu vážení, ale spíše podle kvality myšlenky.

Toto bodování je hrubý nástin, který se ale během opravování přibližně osvědčil – obvykle platilo, že čím víc vážení řešitel napsal, tím větší chyba v jeho myšlence byla. Pokud by se mi ale dostal do ruky výjimečný případ – téměř správná myšlenka, která ale způsobí velkou absolutní chybu, musela bych bodování zkorigovat.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Někteří řešitelé používali strategii stejnou jako v autorském řešení. Vyskytli se žáci, kteří úlohu vypracovali velmi krásně – rozdělili ji na možnosti, ke každé formulovali

závěr, nakonec celkový závěr. Dokonce někdo „pro lepší pochopení postupu“ situaci po vyčerpávajícím slovním popisu i nakreslil.

2. Jeden řešitel objevil zcela jinou strategii než v autorském řešení. Označil si oříšky *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Nejprve vážil *ab* proti *cd*. Misky mohou být v rovnováze nebo v nerovnováze – řešení se mu štěpí na dvě možnosti. Potom porovnal oříšky *a* a *b* – váhy opět mohou být v rovnováze nebo v nerovnováze – tedy každá z možností se mu rozštěpí opět na dvě. Celkem tedy řešil čtyři různé situace. V každé z nich dokázal nejvýše po třetím vážení kouzelné oříšky jednoznačně určit.

   Řešení je velmi pěkné, řešitel postupuje systematicky. Velmi cenné na jeho řešení vidím chápání obecnosti a symetrie, protože přesně rozlišuje (a v řešení i výslovně uvádí případy), kdy může – jak bychom řekli my jazykem vyšší matematiky – bez újmy na obecnosti ztotožňovat případy např. $a < b$ a $a > b$. Slovy řešitele: „Vždy, když je v závorce napsáno ´případně opačně´, tak to znamená, že by znaménko nerovnosti mohlo být opačně ($a < b$ místo $a > b$), což by sice změnilo, které z ořechů *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* jsou kouzelné, ale nemůže to změnit počet vážení → postup by byl úplně stejný jako u uvedených případů, jenom s jinými ořechy.“

   Dále na řešení oceňuji i to, že autor diskutuje ve zmínce i počáteční situaci vážení trojic nebo jednotlivých ořechů (zmínka, že je zkoušel a že vážení je vždy stejně nebo více.)

Nesprávná řešení:

1. Jeden řešitel vymyslel postup řešení téměř identický s postupem autorského řešení. Lišil se až v části, kdy má drak rozhodnout mezi čtyřmi oříšky. Tam je řešitel porovnává nejprve po dvojicích, tudíž by v nejhorším případě měl vážení 4. *(4 body)*

2. Řešitel předpokládal, že rovnoramenné váhy ukazují i hmotnost. Nejprve si na misky dal také po třech oříšcích, ale tím, že myslil, že zná hmotnosti, věděl hned, jestli je zbylý nezvážený oříšek kouzelný. *(3 body)*

3. Jeden z řešitelů chtěl rozhodnout, které oříšky jsou kouzelné, příliš rychle. Vycházel opět z vážení tří a tří oříšků, v jednom z případů ale neoprávněně prohlásil oříšek za kouzelný. (Opomenul, že i oříšek, který při vážení odložil jako sedmý, může být kouzelný.) Zbytek řešení byl správný. *(4 body)*

4. Nesprávný je postup řešitele, který začal vážit oříšky po jednom a pak málo zřetelným způsobem došel k počtu čtyř vážení. *(2 body)*

5. Jeden z řešitelů sám přiznal, že mu úloha není příliš jasná. Uvědomil si rozpor, že kdyby měl drak štěstí, povedlo by se mu vážení na dva pokusy, ale kdyby štěstí neměl, vyšla by mu vážení čtyři.

   Sice je hezké, že rozdělil případy, kdy drak má štěstí, a kdy štěstí nemá. (Úloha: „Kolik drak potřebuje nejméně vážení, má-li štěstí?“ by byla zajímavým námětem na podúlohu k této úloze.)

   Řešitel ale vůbec nezdůvodnil, jak pro případ drakovy smůly došel právě k číslu 4. *(2 body)*

Poznámky

- Alespoň část řešení správně měli úplně všichni, kteří úlohu řešili. Nikdo se nedopustil hrubé chyby.

7.4.2. Úloha 2

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 8

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 8

Zadání

Které z čísel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008$ a 2008^{1004} je větší a proč?

Řešení

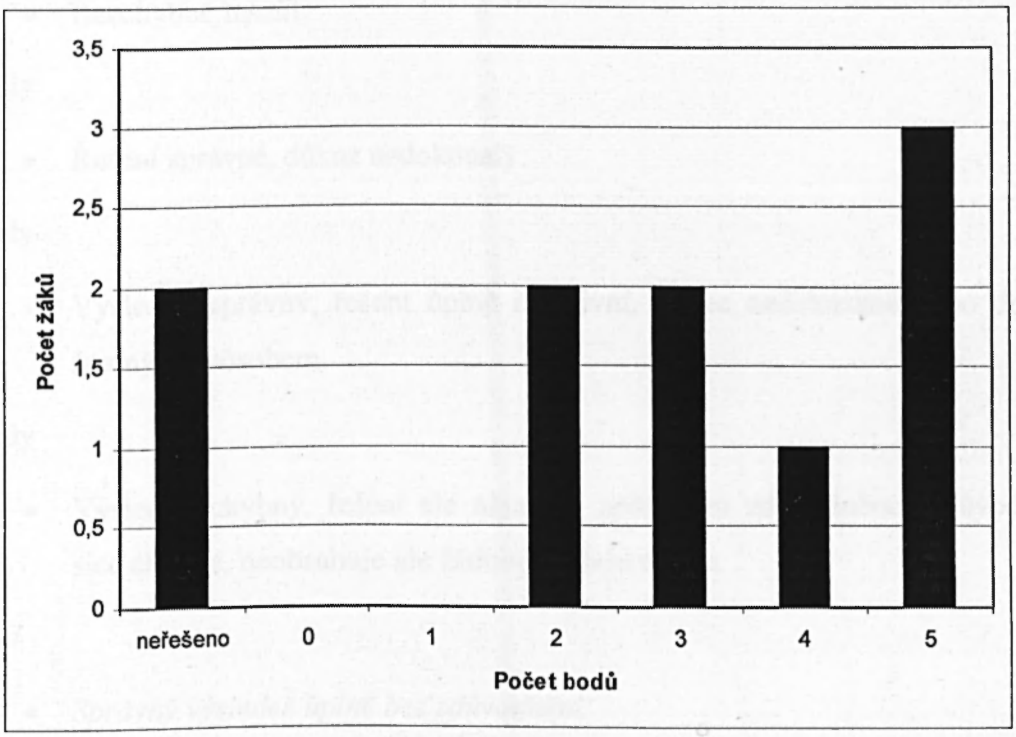
Součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008$ si můžeme rozdělit na 1004 dvojic a vhodně uzávorkovat:

$$(1 \cdot 2008) \cdot (2 \cdot 2007) \cdot (3 \cdot 2006) \cdot \ldots \cdot (1002 \cdot 1005) \cdot (1003 \cdot 1004).$$

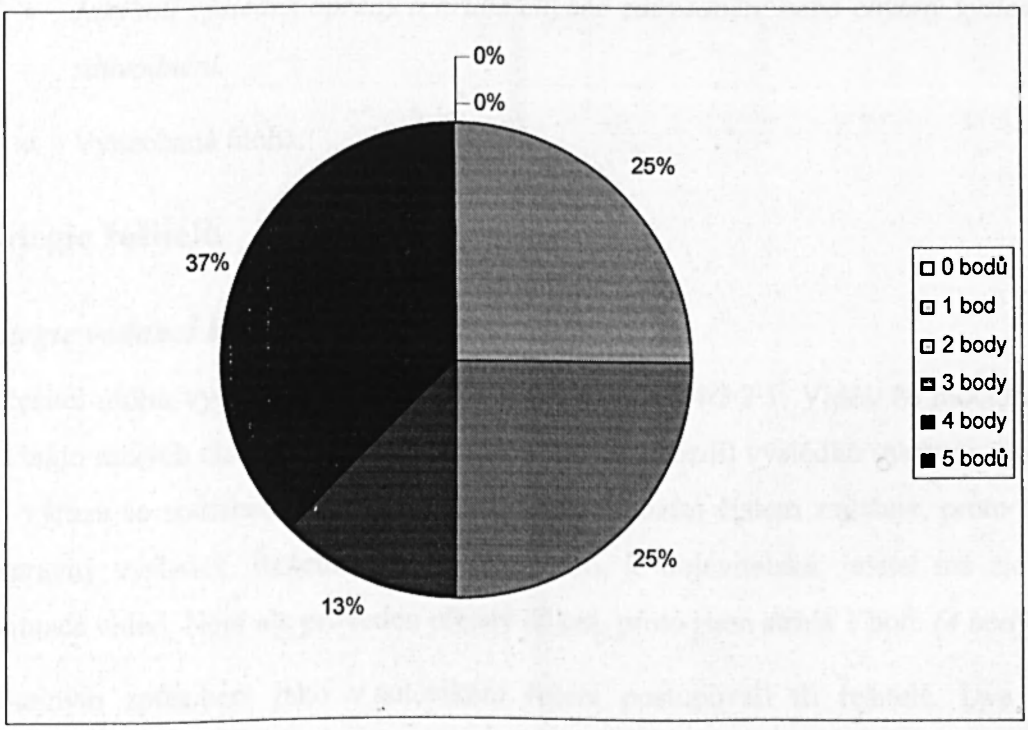
Všechny dvojice v závorkách (s výjimkou $(1 \cdot 2008) = 2008$) mají větší hodnotu součinu než 2008. Tedy máme součin 1004 čísel větších nebo rovných 2008. Číslo 2008^{1004} je součinem 1004 čísel rovných 2008. Proto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008 > 2008^{1004}$.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 27: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 2 třetí série



Graf 28: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 2 třetí série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Řešení správné, důkaz nedokonalý.

3 body

- Výsledek správný, řešení úplně intuitivní, vůbec nedokázané nebo dokázané špatným způsobem.

2 body

- Výsledek chybný, řešení ale nějakým způsobem zdůvodněno, zdůvodnění je sice chybné, neobsahuje ale žádnou hrubou chybu.

1 bod

- *Správný výsledek úplně bez zdůvodnění.*

0 bodů

- *Jakýkoli výsledek opřený o hrubě chybné zdůvodnění nebo chybný výsledek bez zdůvodnění.*
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Řešitel úlohu vyřešil pro 4^2 a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ a pro 6^3 a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Viděl, že mocnina je už u takto malých čísel menší než výraz se součiny a rozdíl výsledků výrazu s mocninou a výrazu se součinem se se zvětšujícím se výchozím číslem zvětšuje, proto odvodil správný výsledek. Řešení se mi velmi líbilo, je objevitelské, řešitel má zjevně do situace vhled. Není ale proveden přesný důkaz, proto jsem strhla 1 bod. *(4 body)*

2. Stejným způsobem jako v autorském řešení postupovali tři řešitelé. Dva z nich s perfektním zdůvodněním, jeden se zdůvodněním horším, ale bylo z něj zřejmé, že řešitel problému rozumí.

Nesprávná řešení:

1. „Je větší číslo $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2008$ než 2008^{1004}, protože v něm je mnohem více násobných činitelů.“ Nebo obdobné zdůvodnění: „Podle mýho bude toto číslo větší, protože už u čísla $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot13$ dostáváme číslo 6 227 020 800. A když si uvědomím, že to mám pak dál násobit $14\cdot15\cdot\ldots\cdot2008$…“ *(3 body)*
2. Úryvek z chybného řešení: „Myslím si to proto, že 2008^{1004} bude strašně moc velké číslo, i když $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2008$ bude taky velké, ale přeci jenom menší.“ *(2 body)*

Poznámky

- V bodování úlohy jsem byla velmi mírná, protože byla podle mého názoru nejobtížnější z celé série – to se projevilo hlavně u skóre 2 body, které bylo velmi snadné získat.
- Čtyři řešitelé úlohu zvládli dobře, pro ostatní byla zjevně velmi obtížná. Můj odhad je, že žáci, kteří nejsou vytrénovaní ze soutěží typu Matematická olympiáda, nejsou zvyklí na práci s velkými čísly.

7.4.3. Úloha 3

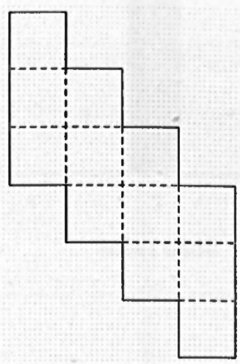
Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 8

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 8

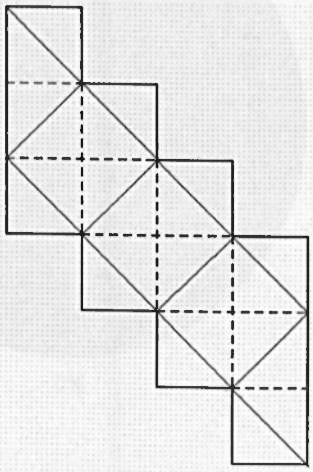
Zadání

Jak je možné rozřezat plášť krychle tak, aby vznikl útvar na obrázku?



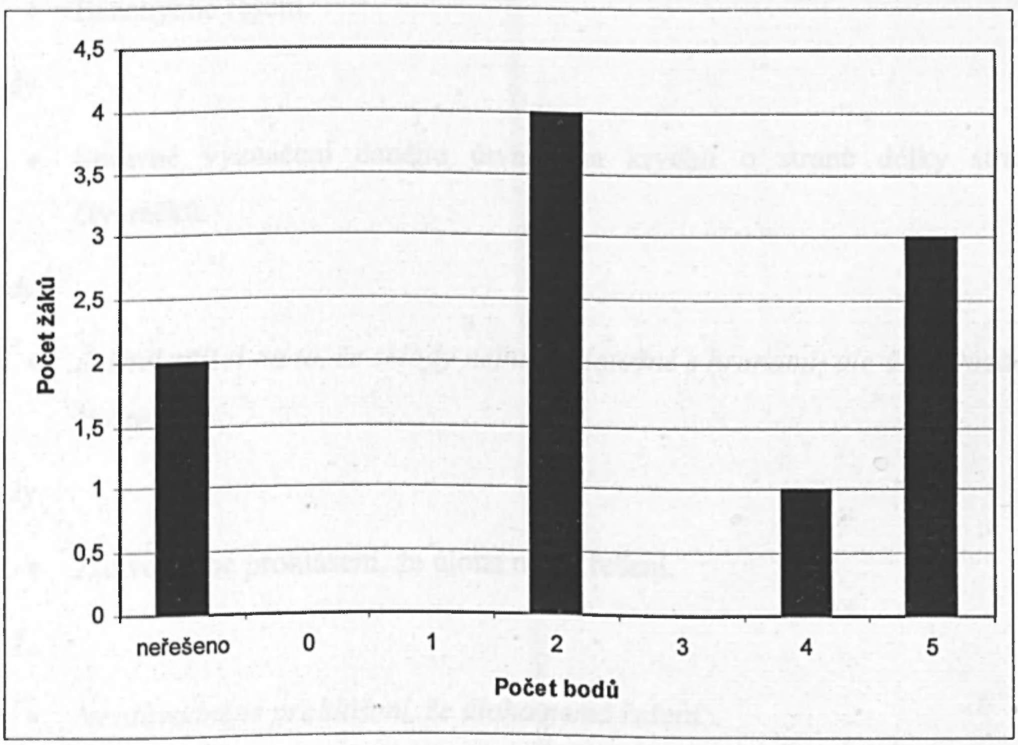
Řešení

Sklady, podle kterých bychom museli útvar zpřehýbat, abychom dostali plášť krychle, jsou na obrázku vyznačeny nepřerušovanou čarou. Každá stěna krychle se bude skládat ze dvou větších nebo čtyř menších pravoúhlých trojúhelníků, celková plocha jedné stěny krychle tedy bude 2 čtverečky.

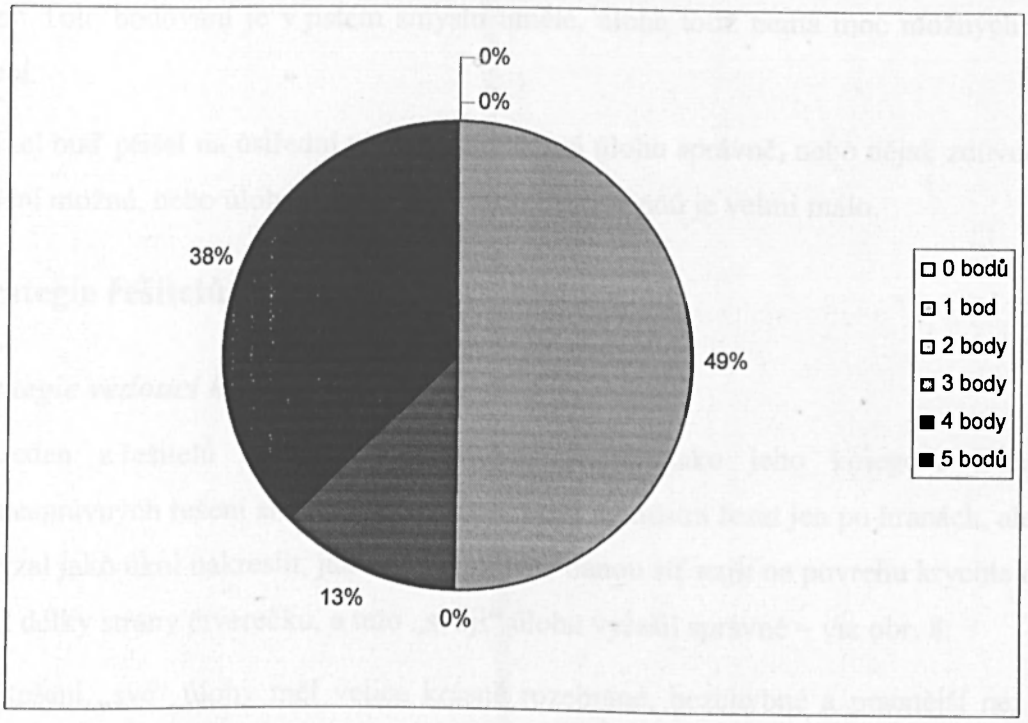


Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 29: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 3 třetí série



Graf 30: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 3 třetí série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Správné vyznačení daného útvaru na krychli o straně délky stran dvou čtverečků.

3 body

- *Řešitel přišel na to, že sklady nebudou totožné s hranami, ale úlohu nedotáhl do konce.*

2 body

- Zdůvodněné prohlášení, že úloha nemá řešení.

1 bod

- *Nezdůvodněné prohlášení, že úloha nemá řešení.*

0 bodů

- *Řešení vystavěné na hrubé chybě.*

- Vynechaná úloha.

Pozn: Toto bodování je v jistém smyslu umělé, úloha totiž nemá moc možných variant řešení.

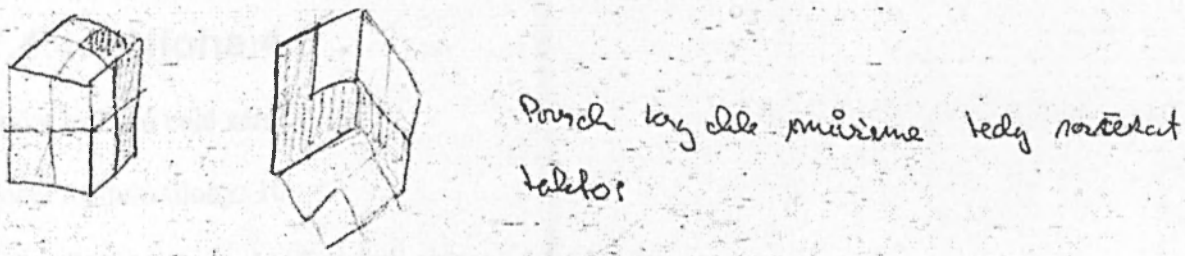
Řešitel buď přišel na ústřední myšlenku, pak má úlohu správně, nebo nějak zdůvodnil, že to není možné, nebo úlohu neřešil. Možných mezistupňů je velmi málo.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Jeden z řešitelů mě velmi překvapil. Stejně jako jeho kolegové z kategorie nesprávných řešení si neuvědomil, že krychli nemusím řezat jen po hranách, ale úlohu vzal jako úkol nakreslit, jak by bylo možné danou síť najít na povrchu krychle o hraně 2 délky strany čtverečku, a tuto „svoji" úlohu vyřešil správně – viz obr. 8.

   Řešení „své" úlohy měl velice krásně rozebrané, bezchybné a pracnější než řešení úlohy původní. *(4 body)*



Obr. 8: Řešení Cecílie

2. Pouze tři řešitelé našli správné řešení. (Velmi pěkně propracované řešení Barbory je na obr. 9.)

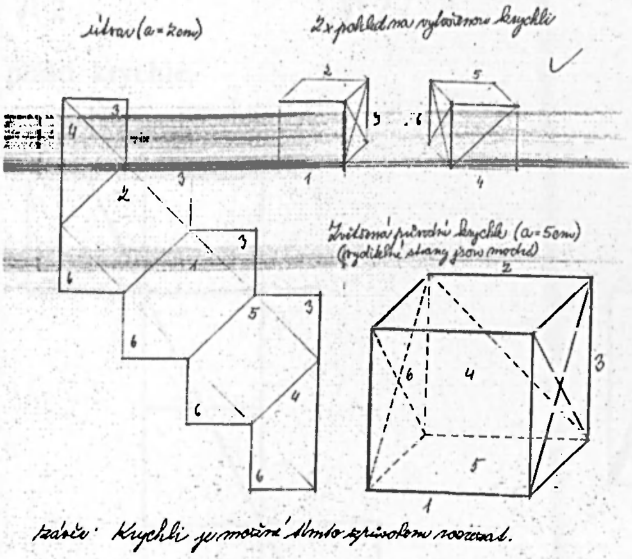
Nesprávná řešení:

1. Krychli takto rozřezat nejde, protože by na každou stěnu vycházely dva čtverečky, tedy by nemohla být čtvercová. Takto řešili úlohu 4 řešitelé. *(2 body)*

Poznámky

- U úlohy jsem předpokládala pouze dva typy řešení. Správné řešení nebo hůře či lépe zdůvodněný výrok, že daná úloha řešení nemá. Řešitel, který úlohu pochopil po svém, mě velice překvapil (viz výše).

- Ukázalo se, že „vyjet“ z nalinkovaných čtverečků, tedy dívat se na problém skrz jinou soustavu než tu, která se nabízí, je pro žáky velký problém.



Obr. 9: Řešení Barbory[7]

7.4.4. Úloha 4

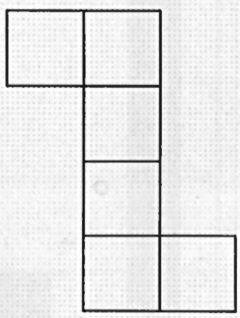
Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 10

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 10

Zadání

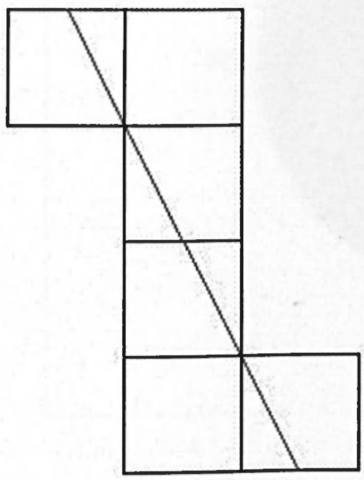
Na obrázku je síť krychle s hranou délky 1. Určete nejdelší úsečku, která se dá umístit do sítě, a vypočtěte její délku. Na plášti krychle tuto lomenou čáru znázorněte.

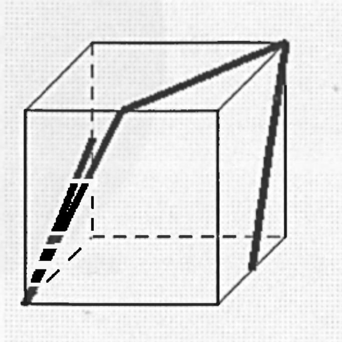


[7] Horší grafická úprava („šmouhy“) vznikly nekvalitním originálem a ofocením řešení žákyně na nekvalitní kopírce.

Řešení

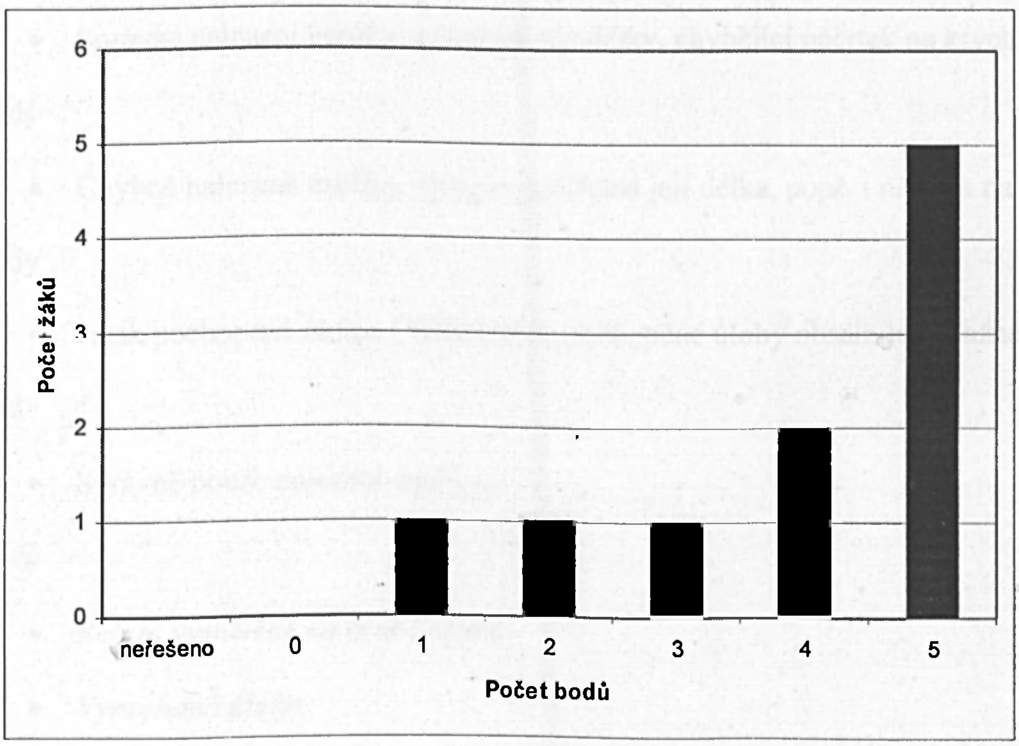
Nejdelší úsečka je nakreslena na obrázku. Její délka je $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}+\sqrt{1^2+2^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=2\sqrt{5}$. Na dalším obrázku je její zakreslení na plášti krychle.



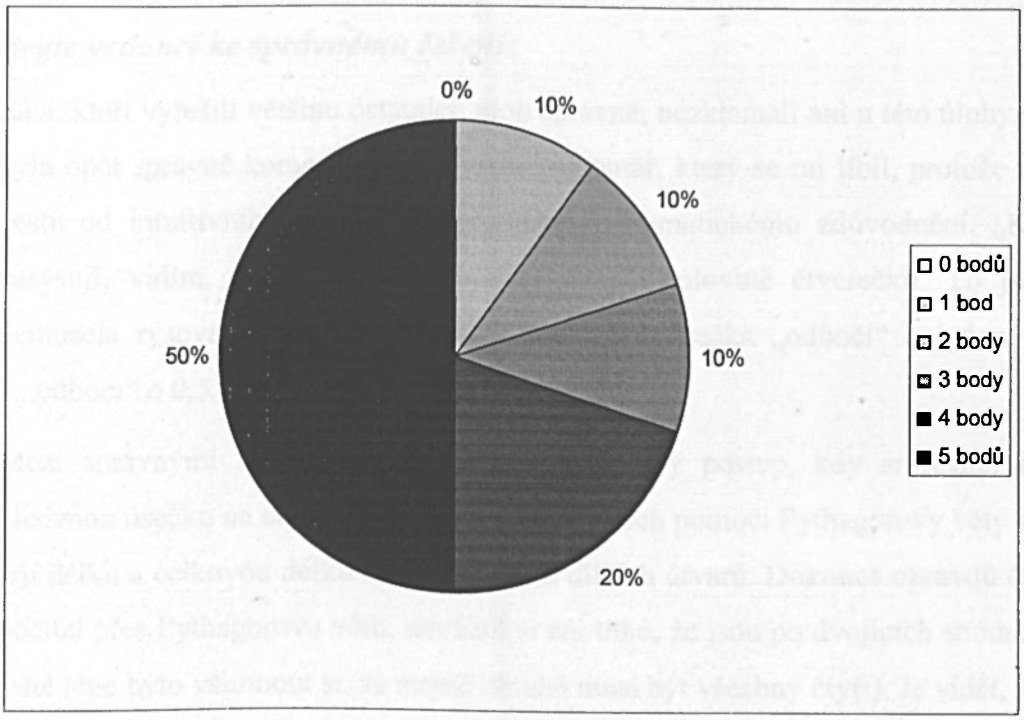


Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 31: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 4 třetí série



Graf 32: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 4 třetí série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Správné nalezení úsečky, spočítání její délky, chybějící náčrtek na krychli.

3 body

- Chybně nalezená úsečka, správně spočítaná její délka, popř. i náčrtek na krychli.

2 body

- Jinak pochopená úloha, i řešení takto pochopené úlohy obsahuje závažné chyby.

1 bod

- Správně pouze nalezení úsečky.

0 bodů

- *Řešení vystavěné na hrubé chybě.*
- *Vynechaná úloha.*

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Žáci, kteří vyřešili většinu ostatních úloh správně, nezklamali ani u této úlohy. Řešení byla opět správně komentována. Uvedu komentář, který se mi líbil, protože ukazuje cestu od intuitivního uchopení k přesnému matematickému zdůvodnění. „Když to narýsuji, vidím, že krajní body úsečky jsou v polovině čtverečku. To jsem ale nemusela rýsovat, protože když na 2 čtverečky úsečka „odbočí" o jeden, tak na 1 „odbočí" o 0,5."

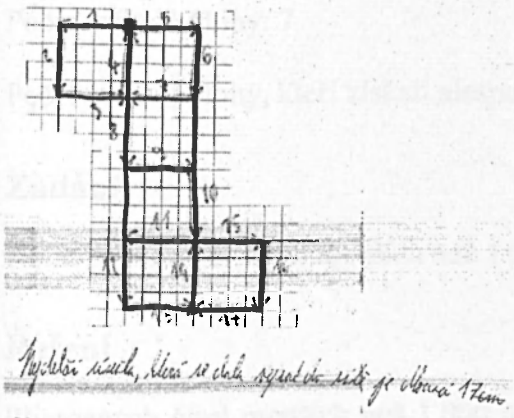
2. Mezi správnými řešeními se vyskytl i nešikovný postup, kdy si řešitel rozdělil hledanou úsečku na čtyři úsečky, pro každou z nich pomocí Pythagorovy věty spočítal její délku a celkovou délku zjistil sečtením dílčích útvarů. Dokonce opravdu čtyřikrát počítal přes Pythagorovu větu, nevšiml si ani toho, že jsou po dvojicích shodné (nebo ještě lépe bylo všimnout si, že stejně dlouhé musí být všechny čtyři). Je vidět, že tento řešitel nemá nad úlohou nadhled a řeší ji pouze aplikováním známých postupů. To koresponduje i s předchozími výsledky tohoto žáka – vždy má vzornou úpravu, řešení vypracované pečlivě, řešívá málo úloh, ale co vyřeší, obvykle bývá správně nebo téměř správně. Řešení ale obvykle nemívá do detailu dotažené, nemívá originální nápady.

3. Jiný řešitel také počítal délku „krátké úsečky", tedy jedné čtvrtiny celé úsečky. Všiml si ale, že tyto „krátké" úsečky jsou všechny čtyři stejně dlouhé, Pythagorovu větu počítal tedy pouze jednou a jeho řešení bylo stejně náročné jako autorské řešení.

Nesprávná řešení:

1. Velmi originálním řešením bylo pochopení úlohy tak, že bylo možné ji přeformulovat takto: „Na síti krychle na obrázku najděte největší lomenou čáru, která vede po hranách krychle a dá se na síti sestrojit jedním tahem." Část úlohy, že bylo potřeba situaci znázornit na krychli, řešitel přehlédl. Řešitel lomenou čáru vyznačil barevně, očísloval dílčí úsečky, za výslednou délku úsečky prohlásil 17 – viz obr. 10. Pozitivní na jeho řešení je rozlišování rozměrnosti a poměrné délky - původně napsal 17 cm, poté jednotku škrtl a správně nechal číslo bez jednotky. (V zadání byla krychle s hranou délky 1.) Neuvědomil si ale, že po složení krychle se některé z jím označených úseček budou krýt, skutečná délka tedy byla kratší. Žák má závažný

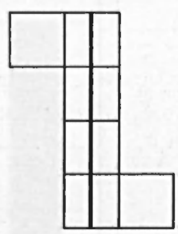
problém v terminologii – zaměňuje pojem úsečka a lomená čára. To, že tento řešitel nedokázal vystoupit ze čtvercové sítě a nenapadlo ho hledat mimo hrany, zajímavě protiřečí jeho řešení úlohy 3 této série. (Úlohu 3 totiž vyřešil správně.) Dále jeho postup ukazuje na fakt, že žáci jsou zvyklí na úlohu „hledání cesty po čtvercové síti". A pokud jim zadání připadá jasné, nedočítají jej pořádně do konce. *(2 body)*



Obr. 10: Řešení Ivana

2. Objevilo se řešení s hrubou chybou. Řešitel projevil neznalost pravidel při odmocňování ($\sqrt{0{,}5^2 + 1^2} = 1{,}5$). Opět se projevila má domněnka, o které jsem se zmínila již dříve – žáci často neumí dělat zkoušky a kriticky zhodnocovat svá řešení. Řešitel má nakreslený trojúhelník o stranách délek 0,5 cm 1 cm a 1,5 cm. Vůbec si ale nevšiml, že takový trojúhelník existovat nemůže. Úsečku na síti tedy našel, její délku ale správně nespočítal a prostorový náčrtek neudělal vůbec. *(1 bod)*

3. Kromě řešitele uvedeného v bodu 1 vystavěl úlohu na chybně nalezené úsečce i jiný řešitel. Ten úsečku umístil následujícím způsobem[8] – její délku spočítal správně a na krychli ji vyznačil také správně. Fakt, že takových úseček lze na krychli najít více než jednu, již ve svém řešení nezmínil. *(3 body)*



Poznámky

- Úloha byla pro žáky snadná, nikdo ji nevynechal. I řešitelů s pěti body bylo v porovnání s jinými úlohami série hodně (5).

---

[8] Obrázek jsem překreslila, neskenovala jsem jej proto, že řešitel jej měl narýsovaný velmi slabě tužkou na linkovaném papíře, na kopii by nebylo téměř nic vidět.

- Čtyři z řešitelů (ať už měli zbytek řešení správně či chybně) nenakreslili čáru na plášti krychle, pouze na síti krychle. Jedná se tedy nejspíš o problém terminologie.

7.4.5. Úloha 5

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 7

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 7

Zadání

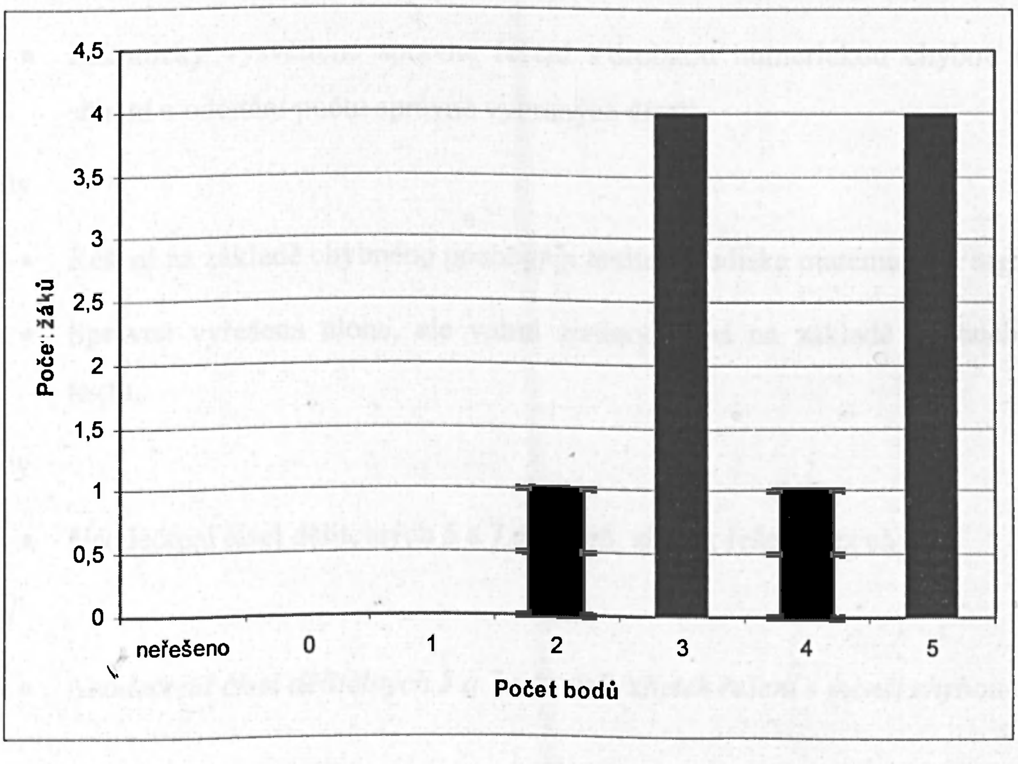
Kolik přirozených čísel menších než 1 000 není dělitelných ani 5, ani 7?

Řešení

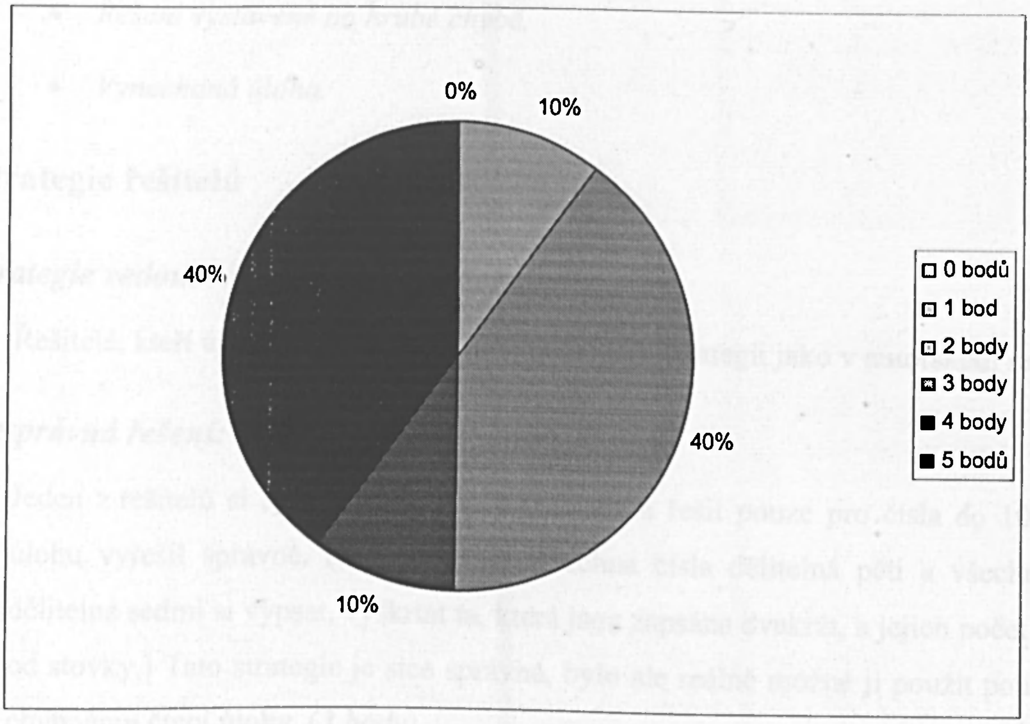
Přirozených čísel menších než 1 000 je 999. Přirozených čísel menších než 1 000, která jsou dělitelná 5, je 199. Přirozených čísel menších než 1 000, která jsou dělitelná 7, je 142. Čísla, která jsou dělitelná 5 i 7 (tedy dělitelná 35), jsme započítali u pětky i u sedmičky (je jich 28). Hledaných čísel je tedy 999 – (199 + 142 – 28) = 686.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 33: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 5 třetí série



Graf 34: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 5 třetí série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Lakonicky vysvětlené správné řešení s drobnou numerickou chybou (jen ve sčítání a odčítání počtu správně vybraných čísel).

3 body

- Řešení na základě chybného pochopení textu z hlediska matematické logiky.
- Správně vyřešená úloha, ale velmi zjednodušená na základě chybného čtení textu.

2 body

- Neodečtení čísel dělitelných 5 a 7 zároveň, zbytek řešení bez chyb.

1 bod

- *Neodečtení čísel dělitelných 5 a 7 zároveň, zbytek řešení s menší chybou.*

0 bodů

- *Řešení vystavěné na hrubé chybě.*
- *Vynechaná úloha.*

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Řešitelé, kteří úlohu měli správně, použili všichni strategii jako v autorském řešení.

Nesprávná řešení:

1. Jeden z řešitelů si špatně přečetl zadání a úlohu řešil pouze pro čísla do 100. Tuto úlohu vyřešil správně. (Strategií bylo všechna čísla dělitelná pěti a všechna čísla dělitelná sedmi si vypsat, vyškrtat ta, která jsou zapsána dvakrát, a jejich počet odečíst od stovky.) Tato strategie je sice správná, bylo ale reálně možné ji použít pouze díky chybnému čtení úlohy. *(3 body)*
2. Jako problém se ukázaly výrazy z matematické logiky. Dva z žáků úlohu pochopili jako hledání čísel, která nejsou dělitelná zároveň 5 i 7 – viz obr. 11. *(3 body)*

3b ČÍSLA, KTERÁ JSOU DĚLITELNÁ PĚTI A SEDMI, JSOU VŽDY PO 35. ČÍSLA DO TISÍCE, KTERÉ JSOU DĚLITELNÉ 5 A 7:
35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315, 350, 385, 420, 455, 490, 525, 560, 595, 630, 665, 700, 735, 770, 805, 840, 875, 910, 945, 980
TEDA 28 ČÍSEL DO TISÍCE JSOU DĚLITELNÁ 5 A 7 ...
„ani 5, ani 7" To, co hledal Ty, by bylo 5 a 7 zároveň...
ODPOVĚĎ: 972 PŘIROZENÝCH ČÍSEL NENÍ DĚLITELNÝ 5 A 7.
(1000 − 28 = 972) 2 TISÍCE

Obr. 11: Řešení Zdeňka

3. Řešitel si uvědomil, že čísla dělitelná 35 jsou výjimečná, jejich počet ale přičetl k počtu čísel dělitelných 5 a počtu čísel dělitelných 7 místo jejich odečtení. Buď se jednalo pouze o přehlédnutí, spíš bych ale odhadovala neorientování se v situaci. *(3 body)*
4. Očekávanou chybu, kdy si řešitel neuvědomí, že čísla dělitelná 5 i 7 jsou započtená dvakrát, udělal jen jeden z řešitelů. *(2 body)*

Poznámky

- Úloha byla pro žáky snadná, opět ji nikdo nevynechal. Řešitelé s 5 body byli tentokrát čtyři.
- Mnou očekávanou chybu zapomenutí na dvojité započítání čísel dělitelných 35 udělal jediný řešitel, větší problém byly logické spojky (nejsou dělitelné 5 ani 7 bylo pochopeno dvakrát jako nedělitelná 35).
- Na matematickou kulturu řešitele ukazuje i to, zda dokázal najít počet čísel, která musíme od tisíce odečíst, najít, aniž by je vypisoval.

  Řešitelé, kteří dosáhli plného počtu bodů, všichni skutečně získali hledaná čísla čistě kombinatoricky – vytyčili si požadovanou vlastnost a pomoc operace dělení zjistili počet čísel, která tuto vlastnost mají.

  Mezi řešiteli, kteří plného počtu bodů nedosáhli, se našly oba způsoby řešení. Vyskytli se řešitelé, kteří se také pokoušeli o určení počtu čísel kombinatorickým způsobem. Jiní řešitelé ale vypisovali všechna čísla, která danou vlastnost mají, a počítali, kolik jich je – viz např. obr. 11. (V tomto způsobu řešení měli všichni z nich nějakou chybu – ať už numerickou, nebo logickou).

  Vhodná obtížnější alternativa úlohy by byla zadat např. čísla do milionu a sledovat, jaký u řešitelů, kteří se pokoušeli všechna hledaná čísla vypsat, nastal posun.

7.4.6. Úloha 6

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 8

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 7

Zadání

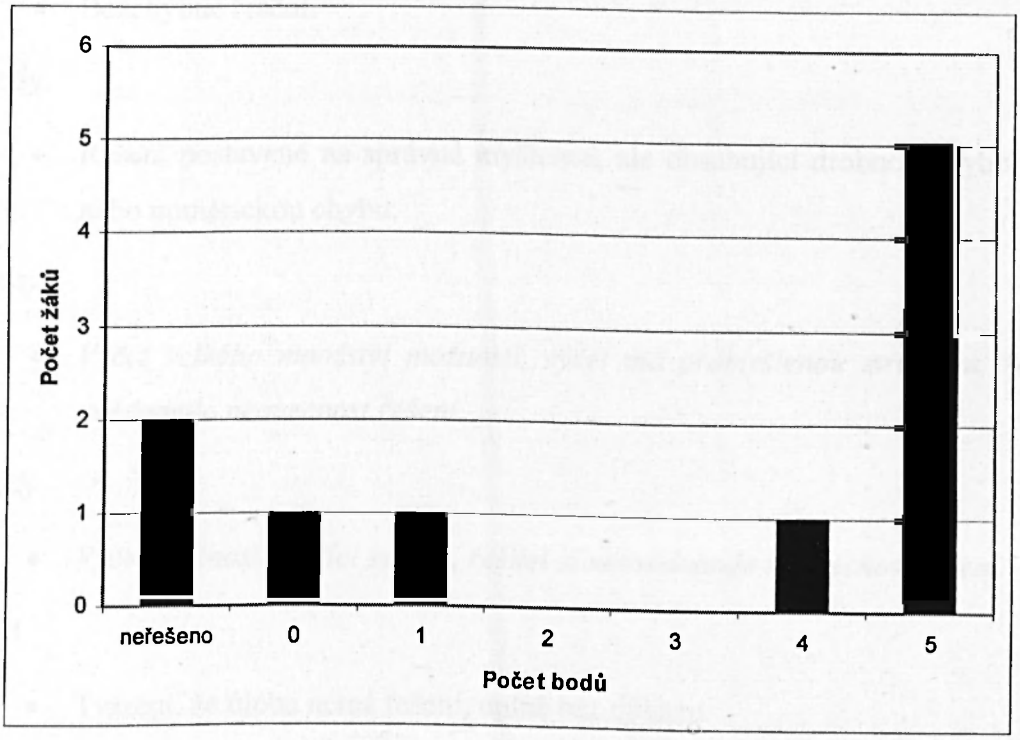
Dokažte, že neexistují celá čísla x a y, pro která platí $2x^2 - 5y^2 = 29$.

Řešení

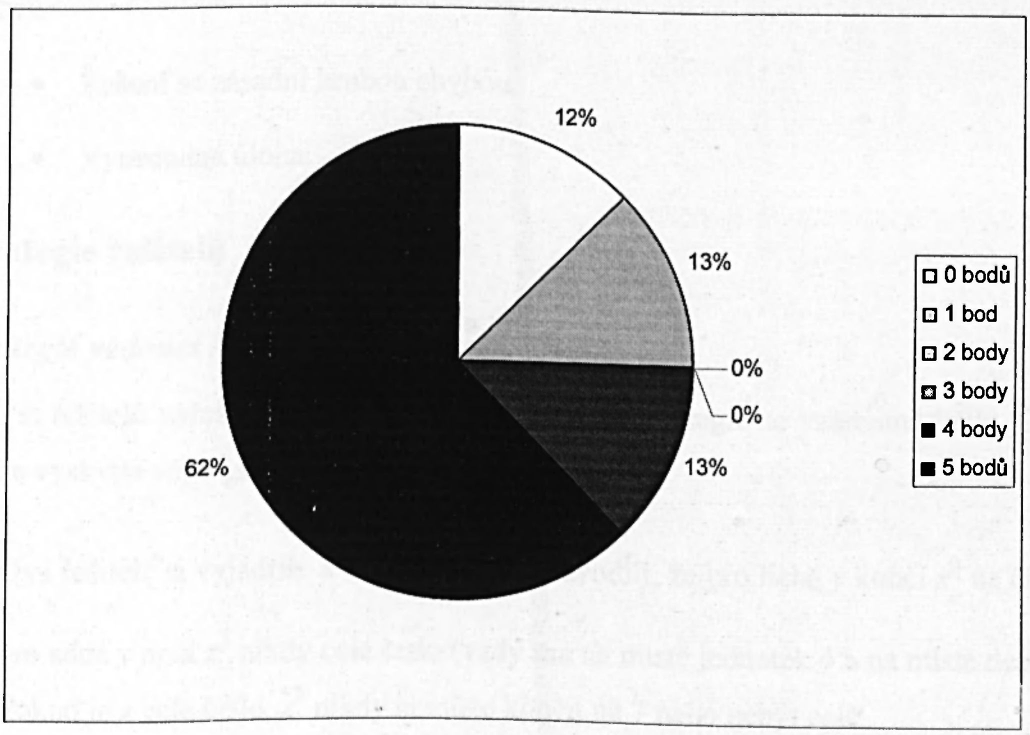
Po dosazení libovolného celého čísla končí $2x^2$ na číslici 0, 2 nebo 8, obdobně $5y^2$ končí na číslici 0 nebo 5. Žádnou kombinací těchto čísel nemůžeme dostat číslo, které by končilo na 9.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 35: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy 6 třetí série



Graf 36: Úspěšnost žáků, kteří řešili úlohu 6 třetí série



Bodování

5 bodů

- Bezchybné řešení.

4 body

- Řešení postavené na správné myšlence, ale obsahující drobnou chybu v úvaze nebo numerickou chybu.

3 body

- *Výčet velkého množství možností, výčet má promyšlenou strukturu, řešitel si uvědomuje neobecnost řešení.*

2 body

- *Výčet možností mající systém, řešitel si neuvědomuje neobecnost řešení.*

1 bod

- Tvrzení, že úloha nemá řešení, úplně bez důkazu.
- Tvrzení, že úloha nemá řešení, podepřené výčtem několika možností.

0 bodů

- Řešení se zásadní hrubou chybou.
- Vynechaná úloha.

Strategie řešitelů

Strategie vedoucí ke správnému řešení:

1. Pět řešitelů vyřešilo úlohu zcela správně. Jejich strategie se vzájemně lišily. Dvakrát se vyskytla strategie stejná jako v autorském řešení.
2. Dva řešitelé si vyjádřili $x^2 = \dfrac{5y^2 + 29}{2}$ a odvodili, že pro lichá y končí x^2 na číslici 7, pro sudá y není x^2 nikdy celé číslo (vždy má na místě jednotek 4 a na místě desetin 5). Pokud je x celé číslo, x^2 nikdy nemůže končit na 7 nebo nebýt celé.

3. Jeden řešitel si vyjádřil x a pak i y přímo jako odmocninu a odvodil, že nikdy nemůže být celá. Strategii měl velmi podobnou předchozí strategii, čísla ale nedělil na sudá a lichá.
4. Zajímavé bylo, že někteří žáci (konkrétně dva, jeden oceněný pěti a jeden čtyřmi body) prováděli důkaz zbytečně dlouze. Dokázali na základě nějakých vlastností čísel, že pokud je y celé číslo, neexistuje odpovídající celé číslo x. S tím se však nespokojili a dokazovali i druhou implikaci, totiž že pokud x je celé číslo, neexistuje k němu odpovídající celé číslo y, které by danou vlastnost splňovalo. Ve svém věku samozřejmě pravděpodobně neznají matematickou logiku, nadbytečnost druhé části důkazu mohli ale objevit intuitivně. (Jiní řešitelé s obdobnou strategií nadbytečné části důkazu neměli.) Usuzuji proto na nedostatečný nadhled nad úlohou – tuto domněnku dokládají i jejich další úspěchy – oba patří sice k nadprůměrným řešitelům, nikoli ale k úplné špičce.

Nesprávná řešení:

1. Hrubě chybným řešením bylo, že autor pouze vyřešil dvě rovnice: $2x^2 - 5x^2 = 29$ a $2y^2 - 5y^2 = 29$. Obě tyto rovnice řešil, nevšiml si ani, že jsou stejné. Tím, že mu nevyšlo ani v jedné z nich celé číslo, myslil, že má důkaz provedený. *(0 bodů)*
2. Nehrubě chybné řešení se objevilo, když autor ukazoval neexistenci vypozorováním vlastností čísel („vždy to vyjde liché…“ apod.) Tato svá tvrzení však neměl ničím podepřena. *(4 body)*
3. I v poslední sérii se našel řešitel, který neexistenci „dokázal“ výčtem několika konkrétních příkladů. *(1 bod)*

Poznámky

- Úloha je záměrně hodně podobná úloze 1 z první série. Zajímalo mě totiž, nakolik se žáci dokážou poučit z vlastních chyb a autorského řešení. Bodování jsem nechala přesně stejné jako u úlohy 1 z první série. Myslela jsem, že získaná data vyhodnotím z hlediska procenta úspěšnosti apod. Toto ale nemá příliš cenu, protože po první sérii mnoho řešitelů skončilo a ti řešitelé, kteří úlohy posílají dosud, jsou obvykle řešitelé z horní poloviny výsledkové listiny. Tedy procento úspěšnosti v úloze nelze srovnávat, ve třetí sérii by bylo vyšší, i kdyby se žáci z chyb nepoučili vůbec. Protože je řešitelů málo, můžu však srovnat jejich bodové zisky pro každého zvlášť:

Jméno řešitele	Body za úlohu 1-1	Body za úlohu 3-6	Vývoj
Bětuška	1	0	↓
Gabriela	5	5	↔
Anna	5	5	↔
Barbora	5	5	↔
Cecílie	5	5	↔
Ivan	0	5	↑
Greta	1	1	↔
Zděněk	5	4	↓
Veronika	5	0 (vynecháno)	↓
Ondřej	0 (vynecháno)	0 (vynecháno)	↔

Má hypotéza byla, že žáci budou mít u této úlohy vyšší úspěšnost než u úlohy 1 první série. Předpokládala jsem, že se žáci poučí ze svých chyb a úlohy, které neměli správně, se budou snažit pochopit z autorského řešení. Z údajů o Gabriele, Anně, Barboře a Cecílii neusoudíme o práci s autorským řešení nic – problémy jim nedělala ani úloha první. Zdeněk se sice mírně zhoršil, ale nijak výrazně – s autorským řešením nejspíš nepracoval, protože měl první úlohu sám zcela správně. Greta se nepoučila vůbec – obě úlohy řešila stejným stylem (výčtem několika možností). Nepoučila se ani z autorského řešení, ani z mých vpisků k úloze. (Vždy jsem se snažila řešitelům vyznačit, v čem udělali chybu. I Gretě jsem tedy napsala poznámku, že důkaz neexistence výčtem několika náhodně zvolených případů není důkazem.) Bětuška řešila úlohu první série výčtem, druhou sérii se již snažila řešit obecně. Její způsob byl ale tak nesmyslný (řešení rovnice $2x^2 - 5x^2 = 29$ – viz výš), že se její bodový stav zhoršil, i když stejnou chybu jako minule neopakovala. Veronika úlohu vynechala úplně, Ondřej se nepokusil ani o jednu z dvojice úloh. Moje hypotéza tedy pro můj vzorek žáků nebyla potvrzena. Mnoho žáků se nejspíš baví úlohou pouze, pokud jim jde, když se objeví problém, odejdou od ní. Druhým možným vysvětlením je, že žáci analogii obou příkladů nevidí. Podle mě je realita kombinací obou vysvětlení.

7.5. Shrnutí

7.5.1. Rozdělení úloh podle tématu

Úlohy v soutěži byly rozvrženy následujícím způsobem:

Série	Úloha	Oblast matematiky
1.	1	Aritmetika a algebra
	2	Geometrie
	3	Matematické hrátky
	4	Aritmetika a algebra
	5	Matematická logika
	6	Slovní úlohy o pohybu
2.	1	Geometrie
	2	Geometrie
	3	Aritmetika a algebra
	4	Kombinatorika
	5	Kombinatorika
	6	Geometrie
3.	1	Matematické hrátky
	2	Aritmetika a algebra
	3	Geometrie
	4	Geometrie
	5	Aritmetika a algebra
	6	Aritmetika a algebra

7.5.2. Rozdělení úloh podle obtížnosti

Abych mohla spravedlivě porovnat, jak byla která úloha pro řešitele obtížná, musím se omezit na řešitele, kteří se zúčastnili všech tří kol. Takových řešitelů je však pouze šest, proto zde uvedené závěry mají jen orientační vypovídající hodnotu. Průměrné bodové zisky v úloze jsou vyšší než v předchozích analýzách, protože všechna tři kola v soutěži absolvovali pouze nejmotivovanější a nejúspěšnější žáci.

Řešitel (ročník[9])	Počet bodů v úloze																		Průměrně
	1. série						2. série						3. série						
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
Anna (8.)	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4,89
Barbora (6.)	5	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	4,67
Cecílie (8.)	5	3	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	4,78
Gabriela (8.)	5	5	5	0	2	2	1	5	1	4	5	0	3	3	2	1	3	5	2,89
Ivan (8.)	0	0	5	2	5	2	1	5	1	5	5	0	0	0	5	2	2	5	2,50
Ondřej (9.)	0	1	5	5	3	3	0	0	0	0	0	1	4	3	0	5	4	0	1,89
Průměrný bodový zisk v úloze	3,33	2,33	5,00	3,67	4,17	3,33	2,67	4,17	2,83	4,00	4,17	2,67	3,67	3,33	3,50	3,83	4,00	4,17	

Na tomto malém vzorku se jeví jako nejsnazší úloha 3 první série – sudoku. Jak jsem již zdůvodňovala v analýze této úlohy, myslím, že vysoké bodové zisky zapříčiňuje modernost a popularita této číselné křížovky.

Jako nejobtížnější vyšla úloha 2 první série. Jedná se o geometrickou úlohu s prvky kombinatoriky. (Najít všechny pravidelné n-úhelníky, pro které platí, že velikost vnitřního úhlu vyjádřená ve stupních je celočíselná.) Toto zjištění potvrzuje trend, že úlohy z geometrie jsou žáky vnímány jako obtížné.

Používání postupu bodování uvedeného v kapitole „Reflexe a sebereflexe mé činnosti“ spolu s tím, že – převážně v druhém a třetím kole soutěže – problémy řešili hlavně matematicky nadaní a pro matematiku motivovaní žáci, vyústilo v jistou anomálii grafů vyznačujících bodové zisky řešitelů úlohy. Tyto grafy kopírují Gaussovu křivku jen velmi výjimečně. (Jako „hezká“ Gaussova křivka vycházejí úlohy 6 první série a 3 třetí série).

[9] Ročník školní docházky odpovídající základní škole, 8. tedy může znamenat i např. tercii osmiletého gymnázia.

7.5.3. Zhodnocení grafů bodových ohodnocení úloh

Nejčastějším typem grafu, který vyšel, byla jakási obrácená Gaussova křivka – tedy velmi nízkého a velmi vysokého bodového ohodnocení dosáhlo velké procento řešitelů, střední bodové zisky se neobjevily téměř u nikoho. To je poměrně snadno vysvětlitelné. Problém byl postavený tak, že žáci buď základní myšlenku objevili, nebo ne. Střední bodový zisk se vyskytl málokdy, protože máme vzorek matematicky nadaných nebo alespoň motivovaných žáků. Pokud tedy přišli na základní myšlenku, dokázali ji již dotáhnout do konce. (Takové bodové rozvržení můžeme najít u úloh 1 a 4 první série, 1, 3 a 6 druhé série a úlohy 6 třetí série.)

Velké množství úloh má řešitelské pole posunuto nahoru, tedy většina z řešitelů získala vysoký počet bodů. (Úlohy 3 první série, 2, 4 a 5 druhé série a 4 a 5 třetí série.) Tato situace je způsobena dvěma faktory: Jak jsem již psala v obecných kapitolách o korespondenčním semináři Pikomat, je účelem soutěže i motivace žáků, kteří jisté nadání pro matematiku mají, ale nejsou vysoce nadaní. A tohoto účelu jsem chtěla dosáhnout i tím, že jsem do soutěže zařazovala také problémy ne příliš obtížné, které jsou hravé a jiné než v matematických učebnicích. Druhý faktor je úbytek žáků po prvním kole soutěže. Všimněme si, že z první série je úloha posunutá k vyšším bodovým ziskům jen jedna, kdežto v dalších sériích je jich více. V soutěži totiž v dalších sériích vytrvali pouze řešitelé s opravdovým zájmem. Opačná situace, tedy že graf je posunut k nižším bodovým ziskům, nastala pouze u úlohy 2 první série. Je v souladu s mými domněnkami, že se jedná o úlohu právě z první série, kde ještě účastníků bylo hodně, i těch méně motivovaných či méně nadaných. Toto zjištění koresponduje i s údajem, že tato úloha vyšla jako nejobtížnější i u vzorku žáků, kteří řešili všechny tři série.

Zcela netypicky vyšly grafy úloh 5 první série a 1 a 2 třetí série. U úlohy 5 první série je maximum u počtu dva body – analýzou této úlohy jsem se již zaobírala, nyní bych jen dodala, že se jedná o úlohu z matematické logiky, se kterou žáci nemají v tomto věku velké zkušenosti, i když intuitivně by ji měli být schopni vyřešit. Úlohy 1 a 2 třetí série mají velmi podobné grafy získaných počtů bodů. U obou nezískal nikdo z těch, kdo poslali řešení této úlohy, 0 nebo 1 bod. U ostatních bodových stavů byly velmi vyrovnané počty řešitelů. Situaci si opět zdůvodňuji tím, že v této sérii soutěžili již jen motivovanější jedinci – opět tedy pokud přišli alespoň na část postupu, byli ji schopni dotáhnout alespoň k nějakému závěru. Pokud na základní myšlenku nepřišli, úlohu prostě neřešili. Dosahování i středního množství bodů vidím v tom, že úloha 1 (vážení oříšků) byla sice poměrně jednoduchá, bodovala jsem ji však celkem přísně (právě proto, že byla jednoduchá). Úloha 2 (porovnávání „velkých“ čísel) byla naopak dost obtížná, a i když řešitelé měli nápad, neznamenalo to, že jej byli schopni dotáhnout až do konce.

7.5.4. Zhodnocení úspěšnosti jednotlivých řešitelů

Až dosud jsme se věnovali analýze úlohy z hlediska úspěšnosti řešitelů, kteří se o ni pokusili, tedy jakési horizontální situaci. Věnujme se nyní situaci z vertikálního pohledu, tedy úspěšnosti jednotlivých řešitelů. V soutěži se podle mého názoru objevily tři výrazné matematické talenty, a to Anna, Barbora a Cecílie. Odhlédněme od bodů přepočtených se zvýhodněním podle věku řešitele, které posunuly Barboru (6. třída) ve výsledném hodnocení nad Cecílii (8. třída) a na stejné místo s Annou (8. třída), i když měla nepřepočítaných bodů nejméně z těchto tří. Potom zjistíme, že ze všech možných devadesáti bodů celého ročníku ztratila Anna dva body, Cecílie čtyři body a Barbora šest bodů. Ohodnocení řešitelek věcnými cenami bylo v tomto případě vysoce spravedlivé, protože všechny tři dívky odvedly v soutěži vynikající výkon – jejich řešení byla nejen ve většině případů naprosto správná, ale jejich zápisy postupů řešení měly velmi vysokou úroveň, dopodrobna rozebíraly všechny kroky a nikdy v nich nebyly opomenuty podmínky řešitelnosti. Bodové výsledky těchto dívek byly velmi podobné, mezi třetím místem (Cecílií) a čtvrtým místem (Gabrielou) byl však obrovský skok – v přepočtených bodech dosáhly Anna a Barbora 147 bodů, Cecílie 143 bodů a čtvrtá Gabriela 87 bodů. Tedy jako matematické talenty se projevily právě první tři řešitelky, ostatní se mi jeví pouze jako v matematice nadprůměrní nebo průměrní žáci. (Mezi nimi již není tak ostrá hranice, nemůžeme je rozlišovat ani podle umístění v konečné výsledkové listině, protože mnoho žáků se druhé a třetí série neúčastnilo a výrazně se tím propadlo z umístění, na kterém začínali. Pravděpodobně ani mezi nimi však výrazný matematický talent nebyl, protože nikdo v žádné sérii nezískal tolik bodů jako tři dívky na prvních místech.)

O konkrétních bodových ziscích jednotlivých žáků je možné se více dočíst v „Přílohách“ ve výsledkových listinách. (Pro účely této diplomové práce jsou jména žáků změněna a sloupec, ze které jsou žáci školy, je nahrazen pouze údajem, zda se jedná o víceleté gymnázium nebo základní školu. Soutěž ale takto anonymní nebyla, účastníci dostávali výsledkové listiny v plné verzi – včetně celého jména a názvu školy všech účastníků.)

7.5.5. Zhodnocení přístupů k řešení problémů

Vysledovat konkrétní přístupy k řešení problémů podle jejich členění zmíněného v kapitole „Členění přístupů ke strategiím řešení problémů“ je obtížné, a to ze dvou důvodů. Jednak je u většiny úloh řešitelských kroků poměrně málo, jednak by bylo potřeba osobního rozhovoru s žákem. (Žák sice musí precizně popsat postup, kterým úlohu řešil, nepopisuje však veškeré své myšlenkové pochody. Tedy řešitelé zcela jistě využívají některé z komplexnějších strategií řešení problémů, ale tyto se do výsledného zápisu řešení, který odevzdávají, nedostanou. Do těchto „načisto přepsaných“ úloh tedy řešitelé již nepíší, jak si např. úlohu zjednodušili a vysledovali postup, kterým pak vyřešili úlohu najednou; ani nezmiňují např. strategie, které vyzkoušeli a které nevedly k cíli.)

Přesto však můžeme některé z teoreticky popsaných strategií zkoumat i v našem vzorku žákovských řešení.

Sledování přístupů můžeme začít hned u úlohy 1 první série. („Je možné, aby byl výraz $a^2+b^2-c^2$ dělitelný pěti, jestliže ani jedno z přirozených čísel a, b, c není dělitelné číslem 5?“) Celkem jasným prvním krokem úlohy, který předpokládám, udělali všichni žáci, je vyzkoušení několika konkrétních trojic čísel. (U zcela správných řešení tento krok žáci nezapisovali, psali již rovnou vyprecizovaný důkaz, který však evidentně nevymysleli na první pohled a bez mezikroků.) Někteří žáci u tohoto logického prvního kroku zůstali a nedokázali se již přesunout do obecné roviny.

Vyzkoušení několika konkrétních trojic čísel je nejprve metodou pokusu a omylu. Řešitelé si zkouší, zda by náhodou nějakou trojici splňující zadané podmínky nenašli, čímž by měli problém téměř bez práce vyřešen. Někteří řešitelé se od této strategie nedovedli odpoutat a na obecnou rovinu se nedostali. Jiní však po určité době marného hledání vyhovující trojice začali hledat trojice systematicky nebo se snažili v již nalezených nefungujících trojicích hledat společné prvky – přešli tedy průběžně od metody pokusu – omylu ke strategii stoupání. (Vytvořili si jednodušší – zde konkrétní – úlohy, ty potom zesložiťovali hledáním obecných vztahů – nejdříve asi pouze pro určité skupiny trojic čísel, nakonec došli k obecnému řešení problému.)

Strategie stoupání je podle mého názoru nejčastěji používanou řešitelskou strategií v Pikomatu. Takto žáci řešili např. i úlohu 2 první série (situaci vyzkoušeli pro trojúhelník, čtyřúhelník apod., poté začali hledat obecné pravidlo, opět mnoho žáků zůstalo pouze u konkrétních příkladů), úlohu 2 třetí série (mnozí žáci začali vyzkoušením součinů do tří, do čtyř, do pěti, ... a dívali se, jakým směrem se posouvají rozdíly), úlohu 5 třetí série (nejdřív si vyzkoušeli najít „ručně“ čísla daných vlastností např. do sta a potom hledali obecnosti) a mnohé další. Domnívám se, že strategii stoupání bychom mohli zjistit u většiny správných řešení většiny úloh celého ročníku Pikomatu.

Stejně tak bychom – při získávání vhledu do situace u úspěšných řešitelů a jako dominantní strategii řešení u některých řešitelů neúspěšných – našli u velkého množství odevzdaných prací řešitelů metodu pokusu a omylu.

Strategie stoupání byla u některých úloh naprosto zjevná (např. výše zmíněné vypisování konkrétních trojic čísel, hledání zákonitostí pro konkrétní trojice a zobecnění u úlohy 1 první série.) Zde si řešitelé sami uvědomovali, že začali od jednodušších případů a propracovávali se ke složitějším. Ale existují i úlohy, kde to zjevné není, ale přece bylo strategie stoupání použito. Tím myslím např. sudoku. Řešitelé totiž zjevně již někdy sudoku řešili. (Bez předchozí zkušenosti s jednoduššími tabulkami by bylo řešení soutěžního sudoku velmi obtížné.) Tím vlastně použili strategii stoupání, aniž by si tento postup uvědomili.

Strategii rozdělení problému na dílčí části najdeme např. u úlohy 4 první série. („Najděte zlomek mezi $\frac{96}{35}$ a $\frac{97}{36}$ s co nejmenším jmenovatelem.“) Jednou ze strategií (i když ne zcela správných) bylo rozdělení problému na kroky: 1) najít všechny zlomky ležící mezi krajními hodnotami, které mají celočíselný čitatel a jmenovatel rovný nejmenšímu společnému násobku jmenovatelů zadaných zlomků, 2) vybrat ty z nich, které se dají krátit, 3) vybrat zlomek, který je možné zkrátit nejvíce. (Samozřejmě i tuto strategii najdeme i u jiných úloh.)

Analýzu prostředků a závěrů bychom našli mimo jiné u úlohy 3 třetí série („Jak je možné rozřezat plášť krychle tak, aby vznikl útvar na obrázku?“) Žáci měli jasně definovaný počáteční stav – daný obrazec. Daný cíl – vhodně jej rozřezat, aby bylo možné sestavit krychli. Zjevný průběžný cíl bylo určit si obsah jedné stěny krychle. Prostředkem bylo uvědomit si, jakým způsobem je možné obrazec řezat.

Zcela jistě u konkrétních řešení najdeme i příklady dalších strategií. Ty však již nebudu rozepisovat, protože by se jednalo pouze o můj dohad, jak asi žák při řešení postupoval – v mnou opravovaných pracích explicitně obsaženy nebyly.

V některých případech je zařazení strategie do příslušného typu sporné, protože často se strategie prolínají a bylo by možné je zařadit do více přístupů.

7.6. Podrobná didaktická analýza vybrané úlohy

V předcházející kapitole jsem ukázala vlastní metodologii, jak je možné didakticky analyzovat žákovské výsledky soutěžních úloh. Jedná se o středně rozsáhlou analýzu – zabývám se tam sumárními výsledky a přehledy, ale také přehledovým způsobem procházím veškeré strategie žákovských řešení úloh.

Úlohy je možné analyzovat ještě podrobněji – svoji metodologii podrobné analýzy rozpracuji na ukázce jedné z úloh soutěže.

Takto podrobná didaktická analýza žákovských řešení není účelem mojí diplomové práce. Pro analýzy žákovských řešení úloh ze soutěží je vhodná podle mého názoru právě analýza středního rozsahu. Analýza založená pouze na přehledu, kolik žáků mělo kolik bodů, neukazuje na to, kde žáci nejčastěji chybovali a jaké byly jejich řešitelské strategie. Analýza velkého rozsahu je velmi časově náročná a zároveň již ztrácí přehledový charakter a čtenáře unavuje vysokým množstvím detailních informací. Tuto podrobnou analýzu mohu doporučit tam, kde se autor zabývá konkrétním matematickým tématem a jeho zvládnutím žáky, ne soutěžními úlohami obecně, nebo tam, kde by cíl výzkumu byl porovnat výsledky skupin žáků nebo týchž žáků s větším časovým odstupem, nikoli však jako výstup práce výzkumníka, ale jako prostředek k porovnání či vyvození jiných závěrů.

7.6.1. Úloha 1 druhé série

Počet řešitelů celé série: 10

Počet řešitelů úlohy: 8

Počet řešitelů úlohy, kteří získali alespoň 1 bod: 7

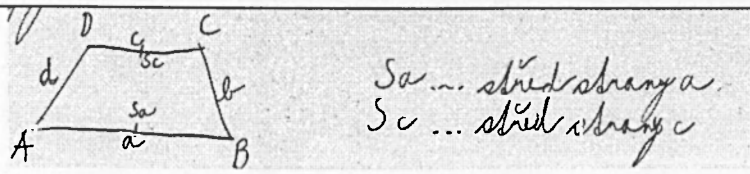
Zadání

Kuchyně má tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou větší než 60°. Delší základna lichoběžníku má délku a metrů, kratší základna c metrů, výška v metrů. Honza postavil Mňoukala do kuchyně. Mňoukal byl nesmírně líný kocour, který raději několik hodin počítal, než by – jen to ne – udělal o jediný rychlý krok navíc! Takže si sedl nad plán myších děr, o kterých věděl, že jsou v každém rohu kuchyně jedna, a začal počítat, aby našel místo, ze kterého je ke každé díře stejně daleko. Najděte, kde přesně je místo, ze kterého má Mňoukal ke každé myší díře stejně daleko. V jaké je to vzdálenosti od středu delší základny lichoběžníku?

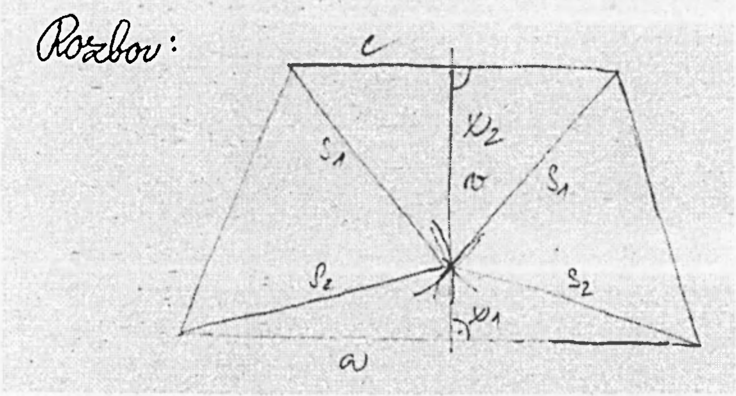
Řešení, bodování a přehled úspěšnosti řešitelů (grafy)

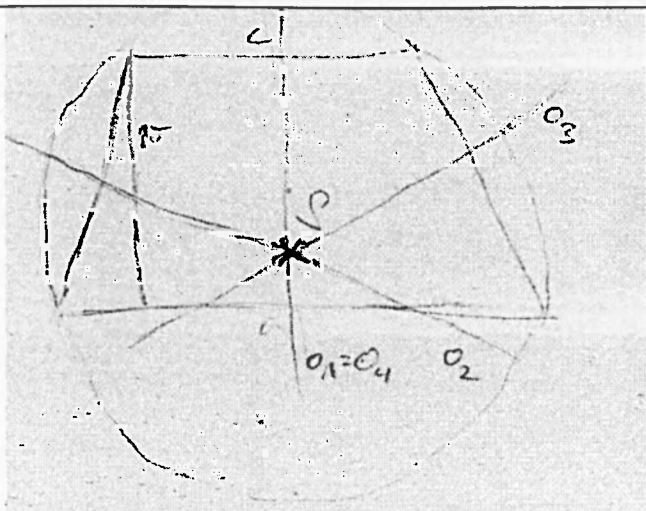
Viz kapitola „Druhá série“ – „Úloha 1“ – tyto části jsou identické.

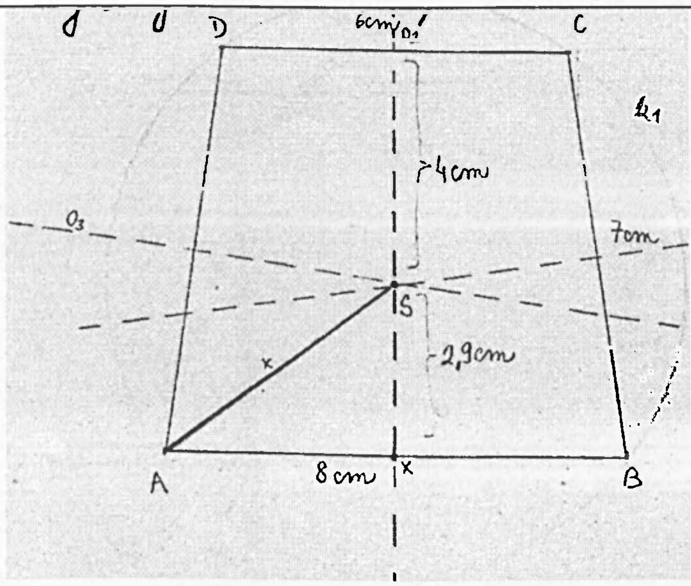
Strategie řešitelů

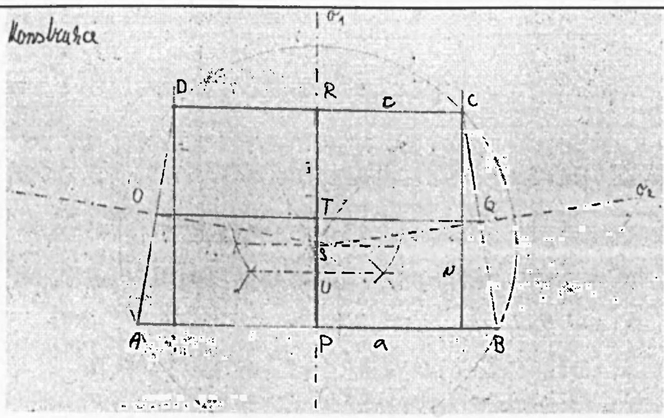
Anna	5 bodů
Strategie	Řešitelka pracovala s aritmetickými výrazy, úlohu řešila podobně jako v autorském řešení přes Pythagorovu větu. Překvapující na jejím řešení byl velmi malý a málo podrobný náčrtek, zbytek byl popsán slovně.
Diskuse	ano
Obrázek	
Úspěšnost v jiných úlohách	vynikající
Řešitelé s podobnou strategií	Barbora
Komentář	Řešitelka předvedla, že je schopná pracovat bez podrobného náčrtku. Otázka je, zda je to správně, či nikoli. Určitě předvedla vysokou schopnost abstrakce a teoretického myšlení. Jedná se o řešitelku, o které vím z jiných úloh, že pokud potřebuje, je schopná mít i náčrtek důkladný a propracovaný. Algebraickému řešení není co vytknout. Uvědomuje si, že existují případy, pro něž úloha nemá řešení; za náčrtkem uvádí: „Dále jsem pracovala s předpokladem, že bod *S* leží uvnitř lichoběžníku. V opačném případě úloha nemá řešení.“

Shrnutí	Výborné řešení, jemuž není téměř co vytknout.

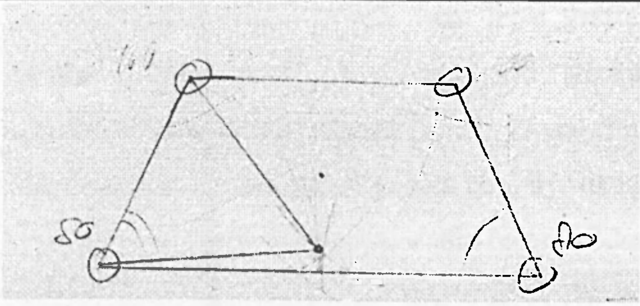
Barbora		5 bodů
Strategie	Řešitelka si nejprve udělala důkladný rozbor úlohy – přehledný obrázek, kde má vyznačeny všechny potřebné údaje. Vypsala si vztahy, které mezi jednotlivými vzdálenostmi jsou, použila Pythagorovu větu (obdobně jako je v autorském řešení).	
Diskuse	není	
Obrázek		
Úspěšnost v jiných úlohách	vynikající	
Řešitelé s podobnou strategií	Anna	
Komentář	Řešitelka pracovala úsporně (postup je rychlý a efektivní). Umí bezchybně pracovat s algebraickými výrazy. Řešitelka nediskutovala polohu bodu (zda může vyjít i mimo kuchyň, což by odporovalo kontextu zadání). Protože se jedná o vynikající řešitelku, přikládám tento fakt spíše nezkušenosti než zanedbání. (Řešitelka byla v primě osmiletého gymnázia, tedy v nejmladší skupině.)	
Shrnutí	Výborné řešení.	

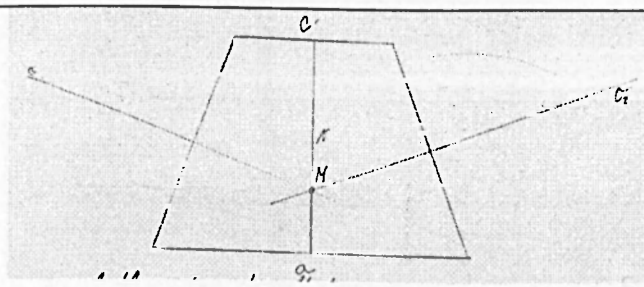
Cecílie	4 body
Strategie	Řešitelka úlohu řešila pouze geometricky, nevyjádřila tedy požadovanou vzdálenost pomocí rozměrů lichoběžníku. Geometrickou konstrukci ale přesně popsala, ukázala, že bod *S* bude ležet blíže delší straně lichoběžníku, a diskutovala reálný kontext (že bod *S* musí ležet uvnitř kuchyně), přidala příklad konkrétního lichoběžníku, pro který by tento bod uvnitř kuchyně neležel.
Diskuse	ano
Obrázek	
Úspěšnost v jiných úlohách	vynikající
Řešitelé s podobnou strategií	Dana, Ivan
Komentář	Ač řešitelka nesplnila, co po ní zadání požadovalo, a nemohla tedy dostat plný počet bodů, její řešení bylo na výborné úrovni jak myšlenkově, tak zpracováním.
Shrnutí	Velmi pěkné řešení, nesplnění zadání.

Evžen	3 body
Strategie	Řešitel si zvolil konkrétní rozměry lichoběžníku, pro ně provedl přehledný výpočet pomocí Pythagorovy věty. Byl si vědom neobecnosti, v závěru uvedl: „Jestliže by rozměry lichoběžníka byly jiné, vyšel by nám i jiný výsledek, ale postupovali bychom stejně.“
Diskuse	není
Obrázek	
Úspěšnost v jiných úlohách	nadprůměrná
Řešitelé s podobnou strategií	–
Komentář	Autor se blíží obecnému řešení, vytvořil jakýsi návod, jak úlohu kdykoli řešit. Jelikož se ale jednalo o studenta primy šestiletého gymnázia (tedy 8. ročníku ZŠ), myslím, že by práci s algebraickými výrazy již zvládat mohl.
Shrnutí	Pěkné řešení nedotažené do obecného závěru.

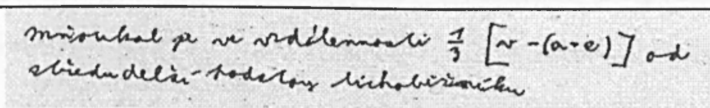
Gabriela	1 bod
Strategie	Řešitelka z konkrétní situace na narýsovaném obrázku vyvodila chybné zdůvodnění, že hledaný bod je ve 3/8 výšky. (Zavedeme-li si značení podle obrázku, vypadalo to, jako by osa úsečky AD protínala osu podstav ve středu úsečky UT, což byla zároveň argumentace autorky.)
Diskuse	není
Obrázek	
Úspěšnost v jiných úlohách	mírně nadprůměrná
Řešitelé s podobnou strategií	–
Komentář	Autorka je ještě příliš vázaná na konkrétní situaci, nepřemýšlí obecně.
Shrnutí	Chybné řešení vycházející ze zavádějícího obrázku.

Dana	1 bod
Strategie	Řešitelka správně narýsovala jedinou konkrétní situaci, k řešení nepřidala ani popis konstrukce, ani jiný zpřesňující komentář.
Diskuse	není

Obrázek	
Úspěšnost v jiných úlohách	nadprůměrná
Řešitelé s podobnou strategií	Cecílie, Ivan
Komentář	Na to, že řešitelka byla v jiných úlohách poměrně úspěšná, předvedla v této úloze velmi slabý výkon.
Shrnutí	Slabé řešení pro jedinou situaci.

Ivan	1 bod
Strategie	Zcela stejná strategie jako u Dany – narýsovat jediné konkrétní řešení bez postupu konstrukce a jiných zpřesňujících komentářů.
Diskuse	není
Obrázek	
Úspěšnost v jiných úlohách	průměrná
Řešitelé s podobnou strategií	Cecílie, Dana

Komentář	Oproti Daně oceňuji, že měl Ivan lepší grafickou úpravu a do závěru připsal větu: „Vzdálenost od středu delší podstavy k místu M nemůžeme přesně určit, závisí totiž na rozměrech lichoběžníku.“ Tento výrok je sice chybný, ukazuje však jasně, že si je řešitel alespoň neúplnosti svého řešení vědom.
Shrnutí	Opět zcela neobecné řešení podobné Daninu.

Ondřej	0 bodů
Strategie	Chybné řešení $(\frac{1}{3}(v-(a-c))$ absolutně bez postupu nebo zdůvodnění myšlenek.
Diskuse	není
Obrázek	
Úspěšnost v jiných úlohách	velmi kolísavá, celkově průměrná
Řešitelé s podobnou strategií	–
Komentář	Protože řešitel nepodal absolutně žádné zdůvodnění, nevím, na jaké myšlence se jeho výpočet zakládal a jak moc závažná v něm byla chyba.
Shrnutí	Zcela chybný výpočet.

Honza, Filip	0 bodů
Strategie	Tito řešitelé úlohu vynechali.
Diskuse	–
Obrázek	–

Úspěšnost v jiných úlohách	u obou průměrná
Řešitelé s podobnou strategií	–
Komentář	–
Shrnutí	Vynechaná úloha.

Zhodnocení úlohy

Úloha patřila k obtížnějším úlohám – pravděpodobně ne pro myšlenkovou náročnost, ale proto, že vyžadovala práci s algebraickými výrazy s více proměnnými, na což pravděpodobně žáci základních škol nejsou příliš zvyklí.

Fakt, že v kolonce Úspěšnost v jiných úlohách není úspěšnost nižší než průměrná, vychází z faktu, že se jednalo již o druhou sérii, které se účastnili již pouze ti studenti, které soutěž více oslovila.

Úloha byla vhodně zařazena do soutěže, protože řešitelé v ní dosáhli rozmanitých bodových výsledků, tudíž byla úloha vhodná k jejich rozškálování do výsledkové listiny. Dále se projevila vhodnost úlohy na vlastnosti, kterou bychom v hodnocení testových úloh zařadili do reliability testu. Tedy žáci, kteří podávají v jiných úlohách vynikající výkony, vyřešili úlohu správně, a žáci, kteří mají slabší výsledky v jiných úlohách, mají slabší výsledky i zde.

Ukázalo se, že někteří žáci ještě neudělali potřebný krok od konkrétní práce k abstraktní. Je ale velmi zajímavé pozorovat, jak jsou někteří z řešitelů v půli cesty – řešení sice provedou neobecně, ale z některé jejich poznámky je zřejmé, že jsou si neobecnosti svého řešení vědomi.

Při zpětném zhodnocení pokládám připravené bodování za přiměřené a úlohu jako vhodně zadanou.

8. Reflexe a sebereflexe mé činnosti

8.1. Zkušenosti z pozice řešitele

S Pikomatem jsem začínala v oblasti problem solving – jako studentka primy až kvarty všeobecného gymnázia jsem se semináře účastnila. Bavilo mě řešit netradiční úlohy, vyhovovala mi forma, kdy jsem si sama mohla rozvrhnout, kdy se úlohám budu věnovat, a vždy jsem se těšila na další část průvodního příběhu.

Z tohoto období jsem si do dnešní práce odnesla hlavně tři zkušenosti:

1. Poutavý příběh je velmi důležitý. Jako řešitelka jsem vždy očekávala, až přijde další díl. V tercii jsem byla v situaci, kdy mi můj profesor matematiky nabídl korespondenční semináře dva. Jeden s příběhem, druhý bez něj. Na prvním bylo zajímavé, že měl úlohy sdružené do tematických celků, druhý měl úlohy různě namíchané a pospojované příběhem. Já se rozhodla pro druhý z nich.

2. Opravovatel musí zkoumat různá chápání textu úlohy. Jednou jsem se s organizátory soutěže dostala do sporu, protože jsem nedostala body za své řešení úlohy, jejíž text bylo možné pochopit dvěma různými způsoby. Své body jsem nakonec získala, ale odnesla jsem si zkušenost, že jako organizátor mám vždy dbát na jednoznačné vyznění textu úlohy. A u žákovských řešení, která zdánlivě vycházejí z upraveného textu, prozkoumat vždy, zda nebylo možné text tímto způsobem pochopit. S tímto problémem jsem nakonec bojovala i jako zadavatel u úloh 4 a 5 druhé série, kde úlohy nebyly zadány zcela jednoznačně a já musela uznávat různé typy řešení.

3. Organizátor si musí dávat velký pozor na pečlivost a spravedlnost. To se zdá automatické, ale v době, kdy jsem se semináře účastnila jako řešitel, se organizátorům podařilo řešení moje a ještě tří spoluřešitelů ztratit. Nakonec situaci vyřešili tak, že nám přidělili průměrný počet bodů, který jsme dosáhli v sériích předchozích, ale ani pro organizátory, ani pro nás řešitele tato situace rozhodně příjemná nebyla.

Vzhledem k tomu, že od doby, kdy jsem se Pikomatu naposledy účastnila jako řešitel, uplynulo již osm let, konkrétní připomínky a poznámky, které by se daly využít při samotné tvorbě problémů, z této doby nemám. Navíc v této době byly i moje znalosti matematiky a didaktiky matematiky na zcela jiné úrovni než dnes, proto si nemyslím, že i kdybych si o zadání tehdejších úloh pamatovala víc, ovlivnilo by to nějak významně můj dnešní přístup.

8.2. Zkušenosti z pozice opravovatele – ne autora

Moje další zkušenost s Pikomatem byla zkušenost prostého opravovatele. Jako pomocná vědecká síla na Katedře matematiky PedF UK jsem dva roky pomáhala J. Zhoufovi, který v té době seminář vedl sám, a to jak s opravováním úloh, tak s organizační stránkou. Tehdy jsem se poprvé seznámila se soutěží z pohledu organizátora.

V této době jsem se také poprvé setkala se zadáváním úloh z pozice organizátora. Tyto zkušenosti je obtížné verbalizovat. Ale viděla jsem všechna zadání a sama si je musela propočítat, abych byla schopná je opravovat. Díky tomu jsem získala přehled o tom, jak obtížné úlohy jsou v soutěži požadovány.

8.3. Opravování a hodnocení

8.3.1. Zkušenosti s opravováním a hodnocením

Získala jsem navíc cenné zkušenosti s opravováním. V té době jsem ještě neměla nic společného se zadáváním problémů, ale již tehdy jsem měla plně volnou ruku v tom, jak nastavit bodování. Nejdříve mi opravování řešení problémů zabralo neúměrně dlouhou dobu – nejprve jsem opravila všechna řešení a u těch, které nebyly na jasných nula nebo jasných pět bodů, jsem ohodnocení velmi dlouho zvažovala, seřazovala si je od nejlepšího po nejhorší a teprve potom příslušné body přidělovala. (Využívala jsem tedy sociální vztahovou normu hodnocení.)

Na jedné straně si myslím, že moje hodnocení bylo spravedlivé, i když zde samozřejmě můžeme diskutovat, zda je spravedlivá sociální vztahová norma hodnocení.

Já se přikláním k názoru, že v běžné školní práci je nejspravedlivější kriteriální vztahová norma. Tam je důležité, jestli žák látku zvládl v požadované úrovni, nebo ne, nikoli jak dobře si s problémem poradili jeho spolužáci. U soutěže mi ale připadají spravedlivé jak kriteriální, tak sociální vztahová norma. V soutěži totiž potřebujeme výkony řešitelů rozškálovat a seřadit od nejlepšího po nejhorší, čemuž nejlépe odpovídá právě sociální vztahová norma. Při vyšším počtu úloh však požadovanou škálu vytvoří i kriteriální vztahová norma.

Hodnocení podle sociálně vztahové normy kladlo neúměrnou časovou náročnost na opravovatele, protože tento styl práce znamenal opravit žákovská řešení, seřadit je podle kvality a při výsledném bodování si vlastně znovu projít celý postup každého řešení a rozhodnout o přidělení příslušného počtu bodů.

Postupem času jsem tedy přešla k hodnocení podle kriteriální vztahové normy s prvky normy sociální a tohoto postupu se držím dosud a ostatním opravovatelům jej doporučuji.

Tento postup obnáší: Nejprve jsem problém vyřešila sama a navrhla předběžně hodnocení. Odhadla jsem nejčastější chyby, každou zařadila do příslušné bodové škály. Měla jsem sice připraveno co nejvíce variant nesprávných řešení, co mě napadlo, a promyšleno, který myšlenkový krok je pro mě důležitý a kolik za jeho nesplnění strhnu bodů, ale nemusela jsem toto hodnocení propracovat jako hodnocení otevřené úlohy didaktického testu. (Což by obnášelo snažit se vymyslet opravdu všechny varianty, které by řešitelé mohli předvést (např. podle Hrabala, Lustigové, Valentové 2004)). Žákovská řešení, která odpovídala některému bodu mnou navržené škály, jsem již mohla rovnou obodovat a víc se k nim nevracet. Nesprávná řešení, která mě v předchozím rozboru nenapadla vůbec, a řešení, která z jakéhokoli důvodu „byla mezi“, jsem při opravování odkládala stranou a ohodnotila je, až když jsem opravila vše. Body jsem těmto řešitelům přidělovala již podle toho, jak se mi jejich úroveň jevila v porovnání s ostatními řešiteli, kteří již body přiděleny měli.

Tento způsob se mi velmi osvědčil a používala jsem jej i při svém výzkumném 21. ročníku. Moje navržené bodování se většinou ukázalo při reálném opravování jako přiměřené, i když – velmi zřídka – jsem je musela v průběhu hodnocení žáků měnit. Toto nastalo např. u úlohy 5 první série (matematická logika). Mnoho žáků v této úloze text pochopilo jiným způsobem – neslučitelným se zadáním textu. Navíc pro toto pochopení textu problém vůbec nebyl řešitelný, čehož si nikdo z těchto řešitelů nevšiml. Tato chyba mě v rozboru úlohy nenapadla, ale do hodnocení jsem ji nejprve jako chybu velkého rozsahu zahrnula tak, aby příslušní řešitelé získali jeden bod. Bodování jsem ale musela v průběhu práce změnit, protože této chyby se dopustilo příliš mnoho řešitelů a já nechtěla hned v první sérii udílet hodně nízkých bodových ohodnocení, abych řešitele neodradila od práce na dalších sériích – přidělovala jsem tedy za řešení obsahující tuto chybu dva body. (Více o této úloze v příslušné kapitole didaktických analýz.)

Bodování, která jsou navržena v didaktických analýzách v kapitole „Didaktické analýzy žákovských řešení 21. ročníku Pikomatu“, jsou již jakousi syntézou uvedeného postupu – jsou v nich zaznamenána chybná řešení, která jsem k příslušnému počtu bodů přiřadila v úvodním rozboru, i ta, která vyplynula z reálného opravování. Z tohoto důvodu jsou v bodování navrženy i takové počty bodů, které v reálu nikdo nezískal (v textu jsou vyznačeny kurzívou).

8.3.2. Zpětné úvahy o bodování

V předchozí kapitole jsem se zabývala způsobem, jakým jsem bodování vytvářela a jak jsem jej podle potřeby korigovala. Zbývá se zamyslet nad tím, zda mnou vytvořené bodování splnilo, co jsem od něj očekávala.

Podíváme-li se na mnou navržená bodování, u některých úloh se může zdát, že sleduji více to, jak moc se výsledné řešení odlišuje od správného výsledku (např. úloha 5 první série nebo úloha 1 třetí série), než jaká je míra logických úvah v řešení. Na tuto skutečnost můžu argumentovat dvojím způsobem:

1. Jsme v matematické soutěži, nikoli v klasické vyučovací hodině. Soutěž by měla žáky připravovat na reálný život tím, že v budoucnosti bude jejich práce posuzována hlavně podle výsledku činnosti, méně podle jejího průběhu.
2. Důležitější argument spočívá v tom, že ač se na první pohled zdá, že bodování úlohy nepostupuje podle míry logických úvah, není to pravda. Protože zkušenost s žákovskými řešeními ukázala, že u zmíněného typu úloh, kde se ptáme na jistý konečný počet věcí či úkonů, přibližně platí přímá úměrnost – čím lepší myšlenka, tím přesnější výsledek. Bodování u těchto úloh však není možné brát absolutně a pokud najdu žákovské řešení postavené na dobré myšlence, které ale kvůli nějakému méně závažnému omylu nedojde ke správnému řešení, samozřejmě mu přidělím vyšší počet bodů, než je v předpřipravené tabulce.

8.3.3. Bodování v pětibodové škále

Práce na opravování a hodnocení žákovských řešení mě přivedla ještě k jedné úvaze, a to, zda je vhodná zavedená tradice hodnotit každou úlohu 0 – 5 body. (Tato tradice platí u většiny základoškolských, ale u menšiny středoškolských matematických korespondenčních seminářů). Jiná možnost by samozřejmě byla úlohy rozdělit podle obtížnosti tak, jak ji vnímá zadavatel, a přidělit každé úloze přiměřený počet bodů – např.

tak, aby celkový součet bodů, který je možné za sérii získat, zůstal konstantní. Při rozboru výhod a nevýhod obou způsobů mi vyšla následující argumentace:

Výhody pětibodové škály:

1. Velkou výhodu vidím v motivaci slabších studentů. (Jak jsem již zmiňovala, semináře na základní škole si kladou za cíl i motivaci slabších studentů tím, že jim nechají zažít pocit alespoň dílčího úspěchu, že jim ukážou matematiku v jiném světle.) Vezměme si nyní příklad studenta, který vyřešil zcela správně jedinou, a to nejjednodušší úlohu. Při bodování na pětibodové škále za ni dostane 5 bodů rovnocenných s 5 body, které bylo možné získat v jiné úloze. Má tedy pocit, že vyřešil správně úlohu v soutěži. Naopak pokud by byla úloha např. pouze za dva body, věděl by, že vyřešil jen tu nejsnazší úlohu, a výš se nedostal. První případ je pro něj podle mého názoru motivačně cennější.
2. Ze zkušenosti z práce na semináři vím, že je vysoce obtížné předem odhadnout, jak bude která úloha pro žáky obtížná. Jednak proto, že tento odhad vyžaduje pedagoga s mnoha lety praxe, jednak proto, že žáci mnohdy najdou jiný způsob řešení než pedagog. Jejich způsob je přiměřenější jejich věku, a proto jsou v úloze mnohem úspěšnější (nebo naopak méně úspěšní), než pedagog očekával.
3. Je snazší připravit materiály při tomto bodování, protože se nemusím tolik zamýšlet nad bodováním předem.

Nevýhody pětibodové škály:

1. Bodování nezohledňuje různou obtížnost úloh.
2. U některých úloh je velmi obtížné navrhnout přiměřené bodování – např. u úlohy, která má dvě nebo tři stejně náročné podúlohy. Vyvstávají otázky jako: Kterou část úlohy mám ohodnotit více než druhou? Co když jsou úlohy vzájemně provázané, já podle toho udělám bodování (více bodů v první části, kde se nosná myšlenka objeví poprvé), a žák první část vynechá, ale druhou přesto vyřeší správně? Když mám pět podúloh, každou tedy musím hodnotit po jednom bodu; co když ale žák bude mít zjevně správnou myšlenku a pouze drobnou numerickou chybu? ...
3. Není možné spojovat úlohy do velkých celků, nebo zadávat velmi krátké úlohy, protože u nich by byl bodový zisk pěti bodů neadekvátní.

Shrneme-li si všechny argumenty, vidíme, že obě možnosti mají výhody, které druhá možnost nemůže nabídnout. Záleží na názoru každého, ke které z možností se přikloní. Mně se – pravděpodobně i s ohledem na to, že jsem v pětibodové škále zvyklá pracovat – stále o trochu více líbí práce s bodováním 0 – 5 bodů.

Možnost částečného překonání problému pětibodové škály:

Pokud zadám úlohu, která je postavena na jedné – i když náročné – myšlence, pak téměř všichni účastníci získají nula, jeden, nebo pět bodů. (Jeden bod získají, pokud nějak řešení rozpracují, ale vydají se špatným směrem.) Jiné bodové zisky sice možné jsou, ale získá je velice málo účastníků.

Proto jsem se zpočátku domnívala, že stačí zadat úlohu, jejíž postup řešení je poměrně dlouhý a která není postavena na jediné myšlence; tím že se přirozeným způsobem rozškálují bodové zisky účastníků. To ale nebyla pravda. Rozvrstvení bodových zisků u takové úlohy je sice o něco lepší, ale stejně většinou dochází k situaci, že buď řešitel přijde na způsob jejího řešení a získá čtyři nebo pět bodů, nebo na tento postup nepřijde a jeho bodový zisk je nula nebo jeden bod. (Situace je samozřejmě ovlivněna tím, že řešitelé pracují dobrovolně, a tudíž se u nich dá předpokládat zájem o matematiku. Proto obvykle dokážou myšlenku – pokud ji mají – dotáhnout do konce.) Řešitelů se středním bodovým ohodnocením je tedy i u těchto úloh málo. (Viz kapitola „Zhodnocení grafů bodových ohodnocení úloh“, kde se zamýšlím nad tím, proč grafy neodpovídají Gaussově křivce.)

Jako nejlepší z hlediska bodování se mi zatím jeví úlohy s více podúkoly (viz např. „Apendix“). Pokud jsou úkoly na sobě relativně nezávislé, zjednoduší se tím situace opravovatele, protože je jednoznačnější, za co má přidělit bod. Bodové zisky u těchto úloh jsou pak také rozvrstveny přirozeněji.

Samozřejmě ale není možné do soutěže zadávat pouze úlohy s více podúkoly, to by pak soutěž směřovala směrem Pythagoriády nebo Matematického klokana – tedy hodně úloh s poměrně krátkým řešením. Já myslím, že v Pikomatu by měly být úlohy rozvrženy pestře a že by se v něm měly vyskytovat úlohy s dlouhým řešením, protože tyto úlohy rozvíjejí u žáka systematickou matematickou práci a mají i spoustu jiných výhod.

Myslím tedy, že do Pikomatu by se měla zadávat pestrá škála různých typů úloh. Kdybych však měla úloh tvořit znovu, úlohy s více podúkoly by dostaly jistě více prostoru.

8.4. Vlastní tvorba

21. ročník jsem již sama vedla, abych vytvořené materiály a získané zkušenosti mohla zpracovat do diplomové práce.

8.4.1. Tvorba příběhu

Tento ročník se konal ve školním roce 2007/2008, tedy ve čtvrtém ročníku mého vysokoškolského studia. Práce na něm však začala již o prázdninách tomuto školnímu roku předcházejících, protože bylo potřeba připravit do září minimálně zadání první série.

Hned v úvodu vyvstal první problém. Začít příběhem, do kterého pak dosadím úlohy, nebo vybrat úlohy a k nim vymyslet příběh? Já jsem se přiklonila k první variantě. Vyhovovala mi ze dvou důvodů.

Jako začátečníkovi s tvorbou nebo výběrem problémů pro mě nebylo snadné problémy vytvořit zcela volně – s jediným omezením přiměřené náročnosti. Mám-li již příběh hotový, snažím se vytvořit úlohu na jisté téma tak, aby se do textu hodila. To mi práci usnadňovalo.

Druhá výhoda tkví v tom, že má-li člověk předem připravené úlohy, na které chce vymyslet příběh, skáče od jednoho tématu k druhému a brzy zjistí, že jeho příběh je velmi roztříštěný a epizodický s příliš mnoha odbočkami a velmi slabou tendencí sledovat jednu hlavní dějovou linii.

Na druhé straně jsem se však bála, abych zadání úloh svým příběhem nesvázala příliš a nedostala se do opačného extrému. Tedy abych neměla příliš jednoznačně a přesně daný příběh, kvůli kterému bych neměla volnost zadávat úlohy rozmanitého typu. Proto jsem se snažila napsat příběh jednak jednoduchý, aby byl srozumitelný i přes dodatečné odbočky k úlohám, jednak volný, aby umožňoval přechody k různým typům úloh. A tato strategie se mi opravdu osvědčila.

Nejprve jsem tedy vymyslila základní dějovou linii, kterou jsem zpracovávala tak, abych v ní již měla předpřipravená místa pro úlohy. (Kdybych neměla, dostala bych se k podobnému problému, jako kdybych tvořila úlohy nejdřív. Zde by sice měl příběh jasnou dějovou linii, ale k úlohám by nejspíš odbočoval dost násilně.)

Text jsem měla tedy připravený způsobem: „Nyní už je Honza půl dne na cestě za krásnou princeznou Zlatovláskou. Když opouštěl svůj domeček, kocoura Mňoukala nechal doma s jediným úkolem: chytit myš Antoinettu, která se jim usadila přímo v kuchyni. ...Nějaká geometrická úloha...“.

Tato situace nakonec ve výsledku vypadala: *Nyní už je Honza půl dne na cestě za krásnou princeznou Zlatovláskou. Když opouštěl svůj domeček, kocoura Mňoukala nechal doma s jediným úkolem: chytit myš Antoinettu, která se jim usadila přímo v kuchyni.*

<u>Úloha 1:</u>

Kuchyně má tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou větší než 60°. Delší základna lichoběžníku má délku a metrů, kratší základna c metrů, výška v metrů. Honza postavil Mňoukala do kuchyně. Mňoukal byl nesmírně líný kocour, který raději několik hodin počítal, než by – jen to ne – udělal o jediný rychlý krok navíc! Takže si sedl nad plán myších děr, o kterých věděl, že jsou v každém rohu kuchyně jedna, a začal počítat, aby našel místo, ze kterého je ke každé díře stejně daleko. Najděte, kde přesně je místo, ze kterého má Mňoukal ke každé myší díře stejně daleko. V jaké je to vzdálenosti od středu delší základny lichoběžníku?

Někdy byla úloha, na kterou jsem nechala vynechané místo, omezená situačním kontextem i oblastí matematiky (např. již zmíněná úloha o kuchyni na geometrii nebo např. úloha o babě Jaze na vyhledávání čísla s danou vlastností: „Baba Jaga zabezpečila Chaloupku na muří nožce kódovaným zámkem, kód ve tvaru zlomku začarovala do následující úlohy: ...něco o kódu zámku... Teď není schopna zámek odemknout. ...“

Ve výsledné podobě jsem do soutěže zařadila: *Baba Jaga zabezpečila Chaloupku na muří nožce kódovaným zámkem, kód ve tvaru zlomku začarovala do následující úlohy:*

<u>Úloha 4:</u>

Najděte zlomek mezi $\frac{96}{35}$ *a* $\frac{97}{36}$ *s co nejmenším jmenovatelem.*

Jindy byla úloha do vynechaného místa omezena kontextem pouze situačním: „Strašný drak Sedmihlavec narozený v Šedivých skalách se usadil v Černých skalách za městem a požaduje vydání krásné princezny Zlatovlásky. ...nějaká úloha o drakovi, např. na rychlost létání apod. ...“

Ve výsledku situace vypadala: *Strašný drak Osmihlavec narozený v Šedivých skalách se usadil v Černých skalách za městem a požaduje vydání krásné princezny Zlatovlásky.*

Úloha 5:

Drak Osmihlavec má – což vás nejspíš už napadlo – osm hlav. Některé hlavy jsou príma, ale některé jsou strašně ukecané a lžou, jako když tiskne. (Pravdomluvné hlavy budeme označovat dále d. jako důvěryhodné, hlavy, které vždycky lžou, nd. jako nedůvěryhodné.) Poznáte z následujících vyjádření, které hlavy jsou důvěryhodné a které ne?

1. hlava: „Z hlav 3 a 7 je jedna d. a druhá nd."

2. hlava: „Hlavy 4 i 5 jsou obě nd."

3. hlava: „Z hlav 1 a 2 je jedna d, druhá nd."

4. hlava: „Hlavy 1 a 7 jsou buď obě d, nebo obě nd."

5. hlava: „Hlavy 1 a 8 jsou obě d."

6. hlava: „Hlavy 3 a 8 jsou obě d."

7. hlava: „Hlavy 5 a 6 jsou buď obě d, nebo obě nd."

8. hlava: „Hlavy 2 a 4 jsou obě nd."

Tedy i situační kontext jsem místy zpětně mírně upravovala, aby do něj úloha zapadala (např. zde Osmihlavec místo Sedmihlavce).

Další osvědčenou taktikou bylo vynechávat místa, do kterých by se dala dosadit libovolná úloha. Např. „Než princeznu přivedli, krátil si drak čas mimo jiné řešením následujících úloh: ... tři nebo čtyři úlohy..."

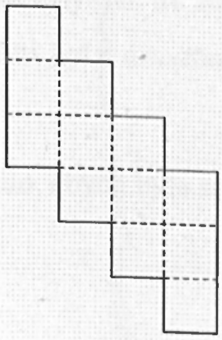
V konečné verzi vypadalo zadání: *Než princeznu přivedli, krátil si drak čas mimo jiné řešením následujících úloh:*

Úloha 2:

Které z čísel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008$ *a* 2008^{1004} *je větší a proč?*

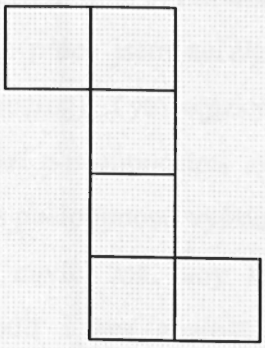
Úloha 3:

Jak je možné rozřezat plášť krychle tak, aby vznikl útvar na obrázku?



Úloha 4:

Na obrázku je síť krychle s hranou délky 1. Určete nejdelší úsečku, která se dá umístit do sítě, a vypočtěte její délku. Na plášti krychle tuto lomenou čáru znázorněte.



Úloha 5:

Kolik přirozených čísel menších než 1 000 není dělitelných ani 5, ani 7?

Takto vynechaná místa se mi osvědčila velice, protože jsem jimi mohla kompenzovat tematické nedostatky. V mém případě to byla absence úloh ze stereometrie v zadání ostatních úloh. Také jsem tato místa mohla využít k tomu, abych zařadila hezkou úlohu, která se jinam kvůli situačnímu kontextu nehodila. (Např.: *Které z čísel* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008$ *a* 2008^{1004} *je větší a proč?*)

Při tvorbě příběhu jsem navíc dodržovala následující zásady:

1. Příběh není složitý, aby bylo snadné sledovat dějovou linii i přes časté přerušování úlohami.
2. Příběh je poutavý pro žáky druhého stupně základní školy.
3. Příběh má i přes různé odbočky jednoduchou dějovou linii, má jasný a uzavřený konec.
4. Příběh jsem psala rovnou rozdělený na tři části, abych jej nemusela rozdělovat v nevhodném místě. Tyto tři části byly uzavřené, dohromady však tvořily jednotný celek.
5. Téma příběhu mě samotnou bavilo, abych byla schopná dodržet předcházející zásady.

8.4.2. Tvorba problémů

Pak jsem začala tvořit odpovídající problémy. Při tvorbě problémů do korespondenčního semináře jsem využila i zkušenosti z psaní nediplomní práce SVOČ ve druhém ročníku PedF UK, kdy jsem nejprve řešila sadu úloh J. Zhoufa na téma posloupností vyšších řádů (problem solving) a již v průběhu práce jsem začala vytvářet jiné úlohy a jiné otázky související s tématem (problem posing). Tyto otázky jsem nejprve kladla sama sobě a objevovala různé nové vztahy mezi posloupnostmi vyšších řádů, v závěru práce jsem se snažila vytvořit sadu úloh na téma posloupností vyšších řádů pro studenty gymnázií, kteří chtějí dělat v matematice něco navíc, tak, aby byli schopni si některé vlastnosti posloupností vyšších řádů odvodit i bez znalosti teorie. (Tedy věnovala jsem se polostrukturované tvorbě problémů.) Tyto úkoly byly mé první zkušenosti s tvorbou a precizací matematických problémů.

Během práce na korespondenčním semináři jsem prošla všemi třemi typy tvorby matematického problému:

1. Volná tvorba – tvořila jsem problémy do soutěže na libovolné téma.
2. Polostrukturovaná tvorba – týká se tvorby problémů v daném kontextu, popř. i na dané matematické téma, jak bylo potřeba do textu zadání. Obvykle jsem měla ale kontext i téma zadány velmi volně, význačně omezená polostrukturovaná tvorba se týkala jediného problému, a to druhého z dvojice problémů založených na podobném principu (úlohy 1 první série a úlohy 6 třetí série), kde jsem chtěla ověřit pozitivní posun žáků během soutěže.
3. Strukturovaná tvorba – týkala se vhodného výběru neautorských problémů do soutěže a jejich úpravy, a to zejména ve čtyřech směrech:
   a) Zjednodušení úlohy přiměřeně k věku a předpokládané úrovni řešitelů.
   b) Ztížení úlohy přiměřeně k věku a předpokládané úrovni řešitelů.
   c) Výběr vhodné části rozsáhlejší úlohy a její přeformulování jako úlohy kratší.
   d) Zasazení úlohy do nového situačního kontextu tak, aby se hodila do příběhu o Honzovi a princezně za současného zachování kontextu matematického.

Při tvorbě problémů do soutěže Pikomat jsem začala první a druhou sérií, dotvoření třetí jsem odložila do doby, kdy jsem měla v ruce výsledky z první série, abych mohla podle úrovně řešitelů připravit úlohy snazší nebo obtížnější. Zásahu do mé představy o obtížnosti však třeba nebylo.

8.4.3. Rozložení témat v problémech

Soutěž by měla nabízet pestrou škálu úloh z různých matematických oblastí, obsahovat tvořivé úlohy a vyrovnané množství geometrických a aritmetických úloh. Tuto podmínku jsem nijak speciálně neošetřovala (např. sestavením specifikační tabulky apod.). Snažila jsem se dávat úlohy rozumně vyrovnané tak, abych ani jednu z oblastí matematiky výrazně neupřednostňovala, ale precizní plán jsem neměla. Nakonec bylo rozvržení úloh docela rovnoměrné. Ve výsledku se v soutěži vyskytlo:

- 6 úloh z aritmetiky a algebry (úlohy 1 a 4 první série, úloha 3 druhé série a úlohy 2, 5 a 6 třetí série)
- 6 úloh z geometrie (úloha 2 první série, úlohy 1, 2 a 6 druhé série a úlohy 3 a 4 třetí série)
- 6 úloh z ostatních témat, a to:
  - 2 matematické hrátky (úloha 3 první série a úloha 1 třetí série)
  - 2 úlohy z kombinatoriky (úlohy 4 a 5 druhé série)
  - 1 úloha z matematické logiky (úloha 5 první série)
  - 1 slovní úloha o pohybu (úloha 6 první série)

Toto rozdělení ale neznamená, že by pouze úlohy typu „matematické hrátky" byly zadávány hravou formou, o tento přístup jsem se snažila v celé soutěži. Celkové tematické vyvážení úloh jsem dopracovala až při tvorbě třetí série.

V úplném úvodu práce jsem vyšla ze zkušenosti z předchozího ročníku, kdy byl z hlediska řešitelů o soutěž velmi malý zájem. Proto jsem se rozhodla dát hned do první série problém, který měl být pro žáky atraktivní, a přilákat tak jejich pozornost. Jako takový problém mi připadá vyřešit sudoku.

Sudoku jsem sama nevytvářela ani neupravovala, ale při dnešní popularitě této křížovky nebyl problém nějaké najít. A vzhledem k tomu, že těchto křížovek je všude hodně a že jsem soutěžní sudoku nakonec vybrala z časopisu (Vlasta 19/2007), který v době zadání soutěže byl již starý, nehrozilo nebezpečí, že by soutěžící sudoku našli a řešení opsali. Horší bylo vybrat přiměřenou obtížnost. Sama jsem při hledání vhodného zadání vyluštila velké množství těchto křížovek, ale až asi u desátého sudoku se mi zdála obtížnost přiměřená žákovi druhého stupně. (Sáhla jsem do kategorie středně těžkých sudoku.) Ukázalo se ale, že jsem podcenila módnost sudoku. Žáci byli zjevně velmi trénovaní, úspěšnost úlohy byla velmi vysoká (a to navíc v první sérii, které se účastnili i slabší řešitelé). Po této zkušenosti bych již určitě vybírala z kategorie těžkých.

8.4.4. Obtížnost problémů

Další tvorba problémů již byla zaměřena na problémy spadající čistě do oblasti matematiky. Jak jsem již zmínila, snažila jsem se zařazovat problémy velmi obtížné (za účelem vyhledávání matematických talentů), úlohy jednodušší (abych motivovala žáky, kteří nejsou vysoce matematicky nadaní) i úlohy střední obtížnosti.

Za obtížné úlohy jsem považovala úlohy 4, 5 a 6 první série, úlohu 3 druhé série a úlohy 2 a 3 třetí série. (Úloha 3 třetí série vyžaduje, aby se řešitel „povznesl" nad předkreslené linky čtvercové sítě, poté je již úloha velmi snadná. Jak se ukázalo, můj předpoklad, že toto „povznesení" bude pro žáky obtížné, byl správný.) Jako snadné jsem zadala úlohy 1 a 3 první série, úlohy 2, 4 a 5 druhé série a úlohy 1 a 5 třetí série. Ostatní úlohy byly voleny střední obtížnosti. V rozporu s mým očekáváním se však úlohy 1 první série a 1 třetí série ukázaly rovněž jako středně těžké.

8.4.5. Zpětné úpravy vytvořených problémů

U úloh jsem měla většinou již rámcově rozmyšlené, jaké parametry by měly mít, proto jsem úlohu navrhla a obvykle ji již takto ponechala, pouze jsem dodatečně např. mírně upravila formulace, které se mi zpětně jevily jako kostrbaté, nebo úlohu zkrátila o část b), aby nebyla příliš těžká s neadekvátně nízkým bodovým ohodnocením. (To, že za každou úlohu je 5 bodů, je neměnné pravidlo uvedené již v průvodním dopise.) Např. u úlohy 2 třetí série jsem měla vymyšlenou ještě část b) – úloha měla vypadat:

„a) Které z čísel $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2008$ a 2008^{1004} je větší a proč?

b) Seřaďte podle velikosti čísla 4^{100}, 32^{50}, 64^{24}."

Úloha měla řešitele trénovat v práci s „velkými" čísly. Část b) byla alespoň podle mého názoru výrazně snazší než část a). (Obvyklejší je sice zadávat snazší část úlohy jako a), ale já ji nechtěla mít jako návodnou úlohu.) Chtěla jsem zároveň sledovat, zda žáci i přes neúspěch v úloze a) zkusí řešit alespoň úlohu b) (zda je napadne, že úlohy nemusí být provázané). Navíc jsem si myslila, že úloha b) by pro žáky mohla být částečně nápovědou (nic nepočítat, ale upravovat a přeskupovat čísla tak, dokud neuvidí, co potřebují). Od tohoto záměru jsem však upustila právě pro již zmíněnou neadekvátní náročnost úlohy vzhledem k přidělovanému počtu bodů a do soutěže se dostala pouze část a).

Stejný problém jsem řešila i u úloh 4 a 5 druhé série – úlohy o šachovnicích. Tam jsem problém vyřešila tak, že jsem části a) a b) od sebe roztrhla a vytvořila z jedné úlohy dvě samostatné. Původně jsem mínila zadat:

„a) Kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici dvě figurky – bílou a černou – tak, aby při hře dáma bílá mohla brát černou?

b) Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozmístit dvě figurky – bílou a černou – tak, aby se mohly brát navzájem? (Pozn. Dáma se hraje pouze na černých políčkách.)“

Nakonec jsem ale do soutěže zařadila dvě úlohy:

Úloha 4:

Kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici dvě figurky – bílou a černou – tak, aby při hře dáma bílá mohla brát černou? (Pozn. Dáma se hraje pouze na černých políčkách.)

Úloha 5:

Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozmístit dvě figurky – bílou a černou – tak, aby se mohly brát navzájem? (Opět hrajeme pouze na černých políčkách šachovnice.)

Tyto úlohy byly navzájem provázané – ne tak, že bez vyřešení jedné bychom nemohli vyřešit úlohu druhou, ale tak, že stejný postup jako u jedné úlohy byl možný aplikovat i na úlohu druhou. Úloha se však neukázala jako vymyšlená příliš vhodně kvůli nejednoznačnosti textu, a tedy „legálně“ možnému zjednodušení úlohy. Většina řešitelů proto dosáhla na pětibodový zisk u obou úloh. Rozdíl (jednoho bodu) v ohodnocení obou úloh se vyskytl u jediného řešitele.

Velké změny nastaly ještě např. u úlohy 6 třetí série. Původně jsem na její místo měla připravenu úlohu zcela jinou (důkaz neexistence trojúhelníku s danými vlastnostmi). Potom mě napadlo, že bych zadáním úlohy obdobné některé z úloh první série mohla zkoumat, jak žáci pracují se získanými zkušenostmi – zda se dokážou poučit z autorského řešení. A vhodná mi k tomuto účelu přišla variace úlohy 1 první série (více v didaktické analýze úlohy 6 třetí série). Navíc se mi zdálo symbolické, že úvodní úloha 1 první série a závěrečná úloha 6 poslední série jsou obdobné. Proto jsem zadala rovnost, která – stejně jako úloha 1 první série – nemá žádné celočíselné řešení. Původně jsem otázku chtěla formulovat úplně stejně jako v první sérii, tedy zda existují celá čísla, která by splňovala dané podmínky. To se pak ale ukázalo jako nevhodné pro situační kontext úlohy, kde jsem potřebovala úkol zadaný ve formě „dokaž, že neexistuje...“.

Výsledná podoba úlohy tedy byla: *Dokažte, že neexistují celá čísla x a y, pro která platí* $2x^2 - 5y^2 = 29$.

8.4.6. Tvorba autorských řešení

Ruku v ruce s tvorbou problémů (problem posing) šlo i řešení problémů (problem solving). A to nejen proto, že tvorbu a řešení od sebe nikdy nemůžeme striktně oddělit (viz kapitola „Problem posing“), ale i z praktické příčiny, že bylo nezbytné napsat autorská řešení. Při psaní autorských řešení jsem využila své zkušenosti z různých soutěží – např. Pikomatu nebo Matematické olympiády, kdy jsem již jako studentka základní a střední školy byla nucena přehledně zapisovat svá řešení a způsob uvažování.

Nyní bylo pouze potřeba naučit se psát řešení zhuštěnějším způsobem – nekomentovat tak podrobně, jak jsem ke které myšlence přišla, ale stručně a jasně vysvětlit, jak k řešení dojít (např. kvůli finanční stránce, aby se nemuselo rozesílat příliš papírů). Při této činnosti jsem však přišla na to, že neúměrné šetření místem není rovněž správné. (Mými čtenáři nejsou profesionální matematici, ale žáci věku základní školy.) Proto je např. dobré kreslit obrázky i v řešení úloh, které obrázek přímo nevyžadují (např. úloha 1 druhé série). Místa sice zaberou víc, ale jsou mnohem přehlednější než odstavec textu. Ke kreslení obrázků jsem využívala program Cabri Geometrie.

Snažila jsem se rovněž o přiměřenost jazyka – neužívat příliš složité výrazy ani příliš velkou matematickou zkratku, ale zároveň se nedopouštět nepřesností.

Autorská řešení jsem vždy psala dřív, než se mi dostala do ruky žákovská řešení těchto úloh. Nejlépe je psát autorská řešení dřív, než sérii vůbec zadám. Autor si pak může lépe uvědomit některé nejasnosti nebo problémy v úloze a zadání včas změnit. Není ale dobré mít tato řešení již nezměnitelně připravená a natištěná – podle žákovských řešení je někdy dobré či nezbytné do autorského řešení něco přidat (např. upozornění na častou chybu v úloze 5 první série o drakovi: „Uvědomte si, že nd hlava ve svých výrocích o ostatních hlavách lže – ona přeci umí jen lhát. V tom hodně z vás chybovalo.“).

Další zpětné úpravy řešení jsou vhodné tam, kde většina řešitelů využívá jiný způsob řešení, než napadl mě, nebo tam, kde se objeví nějaký hodně zajímavý či rychlý způsob řešení. Samozřejmě tím nemyslím vypisovat všechny zajímavé způsoby řešení úlohy, to by bylo jednak příliš náročné na místo, jednak velmi nepřehledné. Ale občas se vyskytnou v žákovských řešeních takové myšlenky, které je přínosné sdělit i ostatním řešitelům. Alespoň jeden z postupů řešení úlohy musí být rozepsán podrobně, druhý už podle situace může být psán zkratkovitou formou sdělující čtenáři pouze podstatnou myšlenku postupu. (Např. dopsání dalšího způsobu řešení do autorského řešení úlohy 3 druhé série: „Jiný způsob: Z vlastností zlomků si uvědomíme, že $a = kc$, $b = kd$, kde k je kladné reálné číslo. Tyto vztahy pak dosadíme do pravého vztahu.“)

8.5. Nepedagogická práce na semináři

Organizační práce na semináři neznamená jen práci pedagogickou, ale také mnoho neodborných činností, bez kterých by soutěž nemohla probíhat (lepení obálek, evidence adres řešitelů, tvorba výsledkových listin apod.). Tyto činnosti však zmiňuji pouze proto, že k semináři patří a že si je organizátor soutěže musí uvědomit, když si plánuje práci, s problem posing a problem solving však společného nemají nic.

8.6. Reflexe vytváření didaktických analýz

Když přišla první žákovská řešení mnou zadaných úloh, začala jsem přemýšlet, jak získaná data zpracovat. Nechtěla jsem pouze přejmout z některých materiálů metodologii, jak řešení zpracovávat, chtěla jsem si vytvořit svůj způsob, který by zohledňoval moje priority a zvláštnosti konkrétní práce s konkrétními úlohami a konkrétními žáky.

Bylo mi jasné, že je nezbytné statisticky zpracovat úspěšnost řešitelů tak, aby bylo na první pohled možné usuzovat i na obtížnost úlohy. Vyzkoušela jsem mnoho různých typů grafů (práce s procenty, poměry, absolutními čísly...) a nakonec mi vyšlo jako nejpřehlednější do dvou typů grafů zohlednit absolutní čísla i procenta, zároveň rozebrat úspěšnost všech řešitelů série a úspěšnost pouze mezi řešiteli, kteří úlohu nevynechali.

Za zcela nezbytné jsem pokládala věnovat se řešitelským strategiím, protože ty bývají často výrazně odlišné od strategií, které si představuje pedagog. Jejich rozdělení na Strategie vedoucí ke správnému řešení a Nesprávná řešení jsem volila pro přehlednost.

Vzhledem k tomu, že ve Strategiích zmiňuji i počty bodů získané za jednotlivé chyby, nepokládala jsem původně za důležité konkrétně vypisovat bodování. Pak jsem si ale uvědomila, že hledání celkové bodové škály je takto pro čtenáře velmi obtížné, mnohdy i nemožné, protože celá bodová škála u některých příkladů ani nebyla vyčerpaná. A chtěla jsem, kdyby čtenář některé z úloh použil na svém vzorku žáků, aby měl připravené materiály co nejúplnější, aby se mu s nimi tedy lehce pracovalo a aby výsledky svých žáků mohl porovnat s výsledky dětí z Pikomatu.

Zpracované analýzy byly ke splnění všech mých cílů dostačující. Aby však byla má práce úplná, přidala jsem ještě „Podrobnou didaktickou analýzu vybrané úlohy“, kde jsem se řešitelskými strategiemi zaobírala do větší hloubky. Tuto analýzu jsem přidala již ne jako materiál k posouzení vytvořených úloh z hlediska reakcí žáků na ně, ale pouze jako ukázku metodologie, kterou je možné použít pro potřeby podrobnější analýzy. Uvědomila jsem si totiž, že v případě plánu zadat např. za deset let stejné úlohy do semináře znovu pro porovnání vývoje schopností řešitelů Pikomatu a posuny v úspěšnosti v konkrétních tématech, je vhodnější hlubší analýza a bohatší evidence vedená o žákovských řešeních. Pro potřeby této diplomové práce mi však stačila ukázka hlubší analýzy jedné úlohy.

K většině úloh jsem chtěla dodat navíc nějaký postřeh nebo poznámku, která se nehodila do oddílů o úspěšnosti řešitelů, bodování nebo řešitelských strategií. Proto jsem ke každé úloze přidala oddíl „Poznámky“. V nich jsem měla prostor zaznamenat cokoli, co mě k dané úloze napadlo. (Většinou se jednalo o celkové zhodnocení úlohy, o zajímavé citáty nebo o mé názory vysvětlující reálnou úspěšnost žáků v úloze.)

Práce na analýzách pro mě byla obrovským přínosem, protože jsem se o mnou zadaných úlohách dozvěděla mnohem více, než je patrné pouze z pouhého opravení žákovských řešení. Rozpracování analýz mě přinutilo hlouběji se zamyslet nad všemi aspekty úlohy i jejího hodnocení. (Analýzy jsem dělala zpravidla po skončení série, kdy jsem měla k dispozici již jen kopie prací žáků – bylo již zcela uzavřené obodování, rozeslané autorské řešení a už nebylo možné nic měnit.) Během analýzy jsem si ze statistického zpracování udělala hrubou představu o obtížnosti úlohy a poté jsem se rozborem jednotlivých strategií znovu vcítila do myšlení žáků. Samozřejmě, že při opravování jsem si úlohy také prošla očima dítěte a jeho strategií, že jsem se musela ponořit do jeho postupu, abych přidělila co nejspravedlivější počet bodů. Analýza všech řešení mě však přinutila vnímat žákovské strategie z globálnějšího hlediska – mohla jsem strategie řešitelů navzájem porovnávat, pořádně si uvědomit, která strategie se vyskytla nejčastěji a jaký přístup k úloze je tedy pravděpodobně žákům nejbližší. Z tohoto zorného úhlu jsem si znovu prošla bodování úlohy a měla prostor se zamyslet, zda by jinak nastavená bodová škála nebyla vhodnější. Na základě tohoto komplexního pohledu na úlohu jsem si mohla udělat představu o tom, jak moc vhodně úloha byla zadána, a upravit svou vnitřní představu o schopnostech žáků a z nich vyplývajících možností, co zadávat do stejného semináře v budoucnu. Bohužel toto „vnitřní měřítko“, které sem získala na vhodnost úloh do semináře, je dovedností – nemohu jej tedy zcela přesně vyjádřit slovy a předat někomu jinému, to lze získat pouze zkušeností. A právě nutnost hlubšího rozboru žákovských řešení úloh mi tuto zkušenost dala.

8.7. Závěr reflexí

V průběhu práce na tvorbě úloh a jejich řešení jsem pociťovala, že se od původní mírné neznalosti toho, co všechno tato práce obnáší a čeho je třeba si všímat, začínám v této problematice více orientovat, že poznávám, co je třeba v mé práci upravit, odstranit, nebo naopak prohloubit. Ukazuje se pravdivost tvrzení, že když se člověk věnuje nějaké činnosti dlouhodoběji, že se zvyšují jeho schopnosti a dovednosti v této oblasti.

9. Závěr

Ve své práci jsem se zabývala problem posing a problem solving v matematické soutěži. Téma jsem zpracovala z teoretického i praktického hlediska.

V teoretické části jsem se věnovala problem posing a problem solving z obecného hlediska a z hlediska problem posing a problem solving v matematice; vyhotovila jsem přehled matematických soutěží pořádaných v České republice s výrazným zaměřením na problem posing a problem solving v nich.

V praktické části jsem se rovněž věnovala problem posing i problem solving. Problem posing jsem sama vyzkoušela při přípravě problémů a ostatních textů pro 21. ročník matematického korespondenčního semináře Pikomat. Kromě těchto vytvořených materiálů může čtenář v mé diplomové práci najít rovněž reflexi mé činnosti při tvorbě problémů a souvisejících textů a zpětné zhodnocení, které problémy zadané v soutěži se ukázaly jako vhodně zadané a které nikoli.

Problem solving z praktického hlediska jsem se věnovala prostřednictvím kvalitativní i kvantitativní analýzy žákovských řešení problémů zadaných ve 21. ročníku Pikomatu. Zde se také pokouším podat vysvětlení, proč byla která úloha pro žáky obtížná nebo snadná.

Úspěšnost žáků v úlohách jsem analyzovala horizontálně i vertikálně – tedy položkovou analýzou po jednotlivých úlohách i úspěšnost jednotlivých řešitelů v celém ročníku.
Tím jsem dosáhla splnění vytčených cílů.

Největší přínos této diplomové práce je shrnut v následujících bodech:

- Zmapovala jsem situaci v matematických soutěžích konaných v České republice z hlediska problem posing a problem solving, tedy z jiného hlediska, než je u různých přehledů soutěží obvyklé.

- Formou reflexe vlastní činnosti jsem shrnula vlastní zkušenosti s tvorbou úloh a ostatních textů do matematického korespondenčního semináře. Tyto texty mohou sloužit všem, kteří se podobnou činností chtějí zabývat, i jako výměna zkušeností s těmi, kteří se již organizací matematických soutěží a tvorbou úloh zabývají.

- Vytvořila jsem si vlastní metodologii, jak analyzovat žákovské výstupy v rámci matematické soutěže.
- Vytvořila a odzkoušela jsem vhodnou sadu úloh do matematické soutěže.

Česky jsem shrnula dostupné základní informace o problem posing a problem solving. (Publikace na tato témata vycházejí převážně v anglickém jazyce.) Práce s literaturou byla přínosem pro mé znalosti o tvorbě a řešení problémů a snažila jsem se téma zpracovat tak, aby přečtení mé práce bylo přínosné i pro čtenáře, a to nejen pro práci v matematické soutěži, ale i pro práci v běžných hodinách učitele matematiky.

Věnovala jsem se práci s žáky v matematickém korespondenčním semináři. Tedy snažila jsem se o maximální rozvoj jak výrazně, tak středně, i méně nadaných žáků. Toho jsem se snažila docílit prostřednictvím úloh rozmanité obtížnosti – lehčí úlohy jako motivace pro slabší žáky, těžké úlohy a tipy na efektivní způsoby řešení úloh v autorském řešení pro žáky výborné. Seminář je velmi užitečný i pro učitele, protože jim pomáhá v práci s motivací i dovednostmi žáků.

Jako slabinu své práce vnímám nízký počet účastníků, který o něco snižuje vypovídací hodnotu mých závěrů hodnotících obtížnost jednotlivých úloh. (Na jiné aspekty práce – na teoretickou stránku, vytváření problémů a materiálů, reflexi činnosti, vytvoření metodologie analýz ani na rozbor jednotlivých strategií řešitelů – počet účastníků vliv neměl.) Podle vlastních zkušeností z předchozích ročníků, které jsem opravovala, i podle zkušeností z pedagogických praxí však můžu říci, že i když můj vzorek řešitelů nebyl statisticky reprezentativní, závěry o obtížnosti či snadnosti odzkoušených úloh pravděpodobně platí pro žáky matematicky nadané obecně. (Původně jsem očekávala o soutěž větší zájem, můj vedoucí diplomové práce mi v rozhovoru potvrdil skutečnost, že počet účastníků v dobrovolném mimoškolním matematickém semináři stále klesá. Když on sám začínal jako organizátor soutěže, byl prý počet účastníků soutěže vyšší mnohonásobně.)

Dobrým námětem k další práci by jistě bylo za několik let (minimálně za čtyři, aby již museli být všichni účastníci soutěže jiní) zadat stejné nebo alespoň velmi podobné úlohy, žákovská řešení zanalyzovat stejným způsobem a sledovat jak posun v zájmu o soutěž, tak vývoj úspěšnosti žáků v úlohách. (Musel by se však zadat jiný příběh, aby si např. starší sourozenci budoucích účastníků nevzpomněli, že se jedná o jejich zadání, a alespoň změnit číselné hodnoty v úlohách, aby nebylo možné výsledky dohledat na starých internetových stránkách soutěže.) Dále by bylo jistě zajímavé sledovat volbu typu vysoké školy a profesního zaměření řešitelů soutěže. Odhaduji, že alespoň první tři řešitelky, jejichž výkony byly vzhledem k ostatním účastníkům soutěže vynikající, se budou matematice věnovat i nadále v přímém studiu matematiky nebo alespoň při studiu jiného oboru, kde však své matematické znalosti a dovednosti budou moci využít.

Práce v matematickém semináři mě posunula o hodně dál jako tvůrce úloh a organizátora soutěže. Získala jsem velké množství zkušeností, vytvořila si vlastní způsoby organizování práce, prošla si různými stupni dovedností jako opravovatel i jako tvůrce úloh. Názory na to, jakým způsobem je dobrá soutěž organizovaná, jsem sice nezměnila, vyvíjely se ale postupy, kterými jsem dobré organizace soutěže chtěla dosáhnout. Čím déle jsem soutěž organizovala, tím ekonomičtěji se mi dařilo pracovat za současného dosažení stejné nebo i vyšší kvality práce. Nyní se cítím kvalifikovaná organizovat nějakou matematickou soutěž sama, i bez vnější kontroly; nebo vést seminář pro budoucí organizátory a autory podobných soutěží. Této činnosti se v budoucnu určitě v nějaké formě věnovat chci, protože si myslím, že matematická soutěž je jeden z velmi cenných a motivačně silných nástrojů pro práci s matematicky nadanými žáky, cestou k jejich vedení, prostředkem, aby si vlastní talent uvědomili, rozvíjeli jej a také přijali odpovědnost za svůj seberozvoj.

O své zkušenosti jsem se již podělila s pedagogy různých typů škol ve formě vystoupení na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2009, v jejímž sborníku jsem příspěvek publikovala.

Vytváření této diplomové práce mě obohatilo o řadu znalostí, zkušeností a dovedností. Věřím, že si alespoň něco z toho odnese i čtenář této práce – ať již pro organizaci matematických soutěží, tvorbu problémů, analýzu jejich řešení nebo práci učitele v hodinách matematiky. Také bych byla velmi ráda, kdyby tato práce alespoň trochu přispěla k oživení zájmu o matematické soutěže a k jejich propagaci, protože o jejich užitečnosti jsem nezlomně přesvědčená.

10. Apendix: Odzkoušené pozměněné úlohy

Po skončení a zhodnocení 21. ročníku Pikomatu jsem stále nebyla spokojena s podobou některých úloh. A jelikož se objevila možnost provést korekci v těchto úlohách a zadat je znovu další skupině žáků ve 22. ročníku soutěže, provést jejich didaktickou analýzu a porovnat výsledky s předcházejícím ročníkem, využila jsem toho, a tak vznikl tento apendix.

Jako nevhodně zadané jsem v kapitolách „Reflexe a sebereflexe mé činnosti“ a „Didaktické analýzy žákovských řešení 21. ročníku Pikomatu“ vyhodnotila čtyři z úloh, a to:

- úlohu 3 první série (Úlohou bylo najít čísla, která se skrývají pod políčky sudoku. Tato úloha byla pro žáky příliš snadná.)
- úlohu 5 první série (Jednalo se o úlohu z matematické logiky. Většina žáků udělala při práci s úlohou stejnou chybu, do zadání byla potřeba přidat vhodnou nápovědu.)
- úlohu 4 druhé série (Zadání bylo nejednoznačné, čímž se stala úloha pro řešitele příliš snadnou – každý žák pochopil zadání způsobem, který mu byl blízký.)
- úlohu 5 druhé série (K její obměně byl stejný důvod jako u úlohy 4 druhé série, úlohy si byly velice podobné.)

Tyto úlohy jsem proto vhodně pozměnila a zadala je jako první čtyři úlohy v rámci první série nového 22. ročníku Pikomatu, v textu je uvádím i s didaktickými komentáři, vysvětlením provedených změn a zhodnocením, zda takto zadaná úloha již splňuje na ni kladené požadavky.

10.1. Pozměněná úloha 5 první série

Zadání

Pan Novák má 8 zaměstnanců. (Označme je A, B, C, D, E, F, G, H.) Každý z nich buď mluví jenom pravdu, nebo jenom lže. Pan Novák by chtěl vědět, kteří jeho zaměstnanci mluví pravdu, aby jim mohl zvýšit plat. Poradíte mu, kteří z jeho zaměstnanců jsou ti pravdomluvní? Od každého zaměstnance máme zapsanou jednu větu, kterou řekl:

pan Antoš (A): „C a G buď oba mluví pravdu, nebo oba lžou.“

paní Bechyňová (B): „D a E oba lžou.“

paní Celestýnová (C): „A a B buď oba mluví pravdu, nebo oba lžou.“

pan Ducháček (D): „Ze zaměstnanců A a G jeden mluví pravdu, jeden lže.“

pan Eustach (E): „A a H mluví oba pravdu.“

paní Fialková (F): „C a H mluví oba pravdu.“

pan Granátový (G): „E a F buď oba mluví pravdu, nebo oba lžou.“

pan Hrabčák (H): „B a D oba lžou.“

(Uvědomte si, že oni mluví pravdu nebo lžou pořád. Jestliže tedy víme např., že pan X řekl: „Pan Y mluví pravdu.“, může to pro nás (pokud o panu X nic nevíme) znamenat dvě varianty:

Pan X mluví pravdu → řekl pravdu i o panu Y→ pan Y také mluví pravdu.

Pan X lže → lhal i o panu Y → pan Y lže.)

Řešení

Označme si zaměstnance, který mluví pravdu, p; zaměstnance, který lže, l. Začněme od pana A. Pokud pan A mluví pravdu (Ap), jsou dvě možnosti: buď je Cp i Gp, nebo Cl i Gl.

Pokud pan A lže (a je tedy Al), jsou buď Cp a Gl, nebo Cl a Gp. Podle výroků paní C a pana G a pak i dalších zaměstnanců získáme následující možnosti:

<table>
<tr><th></th><th>Podle výroku pana A</th><th>Podle výroku paní C</th><th>Podle výroku paní B</th><th>Dopočet pravdivosti výroků zbylých zaměstnanců a zkouška</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Ap</td><td>Ap, Cp, Gp</td><td>Ap, Bp, Cp, Gp</td><td>Ap, Bp, Cp, Dl, El, Gp</td><td>Ap, Bp, Cp, Dl, El, Fl, Gp, El</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ap, Cl, Gl</td><td rowspan="2">Ap, Bl, Cl, Gl</td><td>Ap, Bl, Cl, Dp, Ep, Gl</td><td>Nevychází.</td></tr>
<tr><td>Ap, Bl, Cl, Dp, El, Gl</td><td>Nevychází.</td></tr>
</table>

			Ap, Bl, Cl, Dl, Ep, Gl	Nevychází.
Al	Al, Cp, Gl	Al, Bl, Cp, Gl	Al, Bl, Cp, Dp, Ep, Gl	Nevychází.
			Al, Bl, Cp, Dp, El, Gl	Nevychází.
			Al, Bl, Cp, Dl, Ep, Gl	Nevychází.
	Al, Cl, Gp	Al, Bp, Cl, Gp	Al, Bp, Dl, El, Cl, Gp	Nevychází.

Úloha má jediné řešení, tedy pravdu mluví pan Antoš, paní Bechyňová, paní Celestýnová a pan Granátový, ostatní zaměstnanci lžou.

Komentář

V úloze jsem změnila kontext a používané výrazy – zaměstnanci místo hlav draka, „mluví pravdu“ místo „je důvěryhodný“, „lže“ místo „je nedůvěryhodný“.

Podstatná změna je v tom, že jsem prohloubila komentář. (Aby už nebylo možné pochopit text stejně chybným způsobem jako při předchozím ročníku.)

Původně jsem chtěla i do výroků jednotlivých zaměstnanců psát plná jména, a nechat tak na žácích, aby si značení jednotlivých lidí museli zavést sami. (Výrazným vodítkem by bylo, že zaměstnanci mají jména začínající na první písmena abecedy, myslím, že to by byl pro žáky signál – ve většině slovních úloh pracují pan A, pan B, ... Proto předpokládám, že by nakonec všichni žáci měli zavedené značení stejným způsobem. Zkušenější řešitelé by pravděpodobně značení zavedli okamžitě, méně zkušení by k němu přišli kvůli délce zápisů a na symboliku by si začali zvykat.)

Text byl potom ale dlouhý a nepřehledný a já nechtěla již tak pro žáky základní školy poměrně složitou úlohu činit ještě složitější.

Úloha je variací úlohy o drakovi (tedy úlohu jsem tvořila strukturovaně), z hlavy 1 jsem udělala důvěryhodnou (tedy) pravdomluvného zaměstnance a podle toho změnila čtyři z výroků tak, aby řešení vycházelo. Tím jsem zamezila tomu, aby loňští řešitelé řešení úlohy prostě opsali z loňských autorských řešení.

Bodování

5 bodů – bezchybné řešení

4 body – řešení, které nevychází pouze u jednoho zaměstnance a má správně zdůvodněný postup

3 body – řešení, které nevychází pouze u jednoho zaměstnance, postup není zdůvodněn

2 body – řešení, které nevychází u dvou nebo tří zaměstnanců

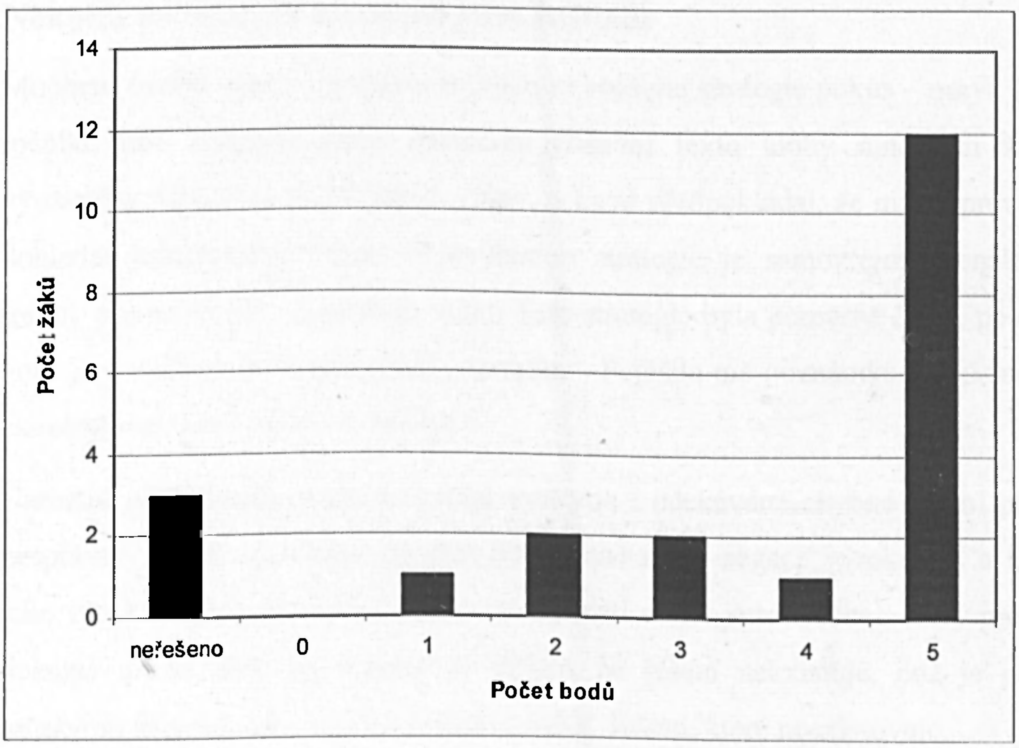
1 bod – řešení, které nevychází u tří nebo čtyř zaměstnanců

0 bodů – řešení, které nevychází u více než čtyř zaměstnanců

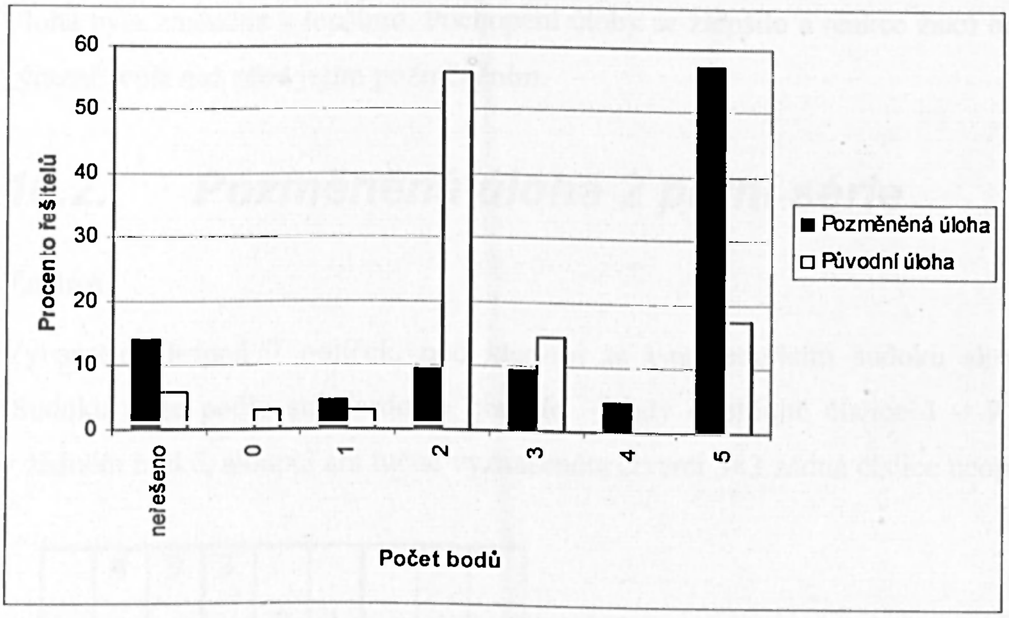
Pozn.: To, že řešení nevychází u jedné hlavy, neznamená, že se pouze u jednoho zaměstnance liší od autorského řešení. Toto řešení může být i velice odlišné, projdeme-li si ale výroky zaměstnanců, jen u jednoho nesedí. Každou variantu musí tedy opravovatel zvlášť procházet, úloha je proto náročná na opravování.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 37: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy



Graf 38: Porovnání úspěšnosti s úspěšností původní úlohy



Rozdistribuování bodových zisků v úloze není ani teď ideální, opět jeden sloupec ukazuje nadpoloviční většinu, porozumění úloze (kvůli kterému jsem úlohu obměňovala) se však výrazně zlepšilo.

Graf bodových zisků v upravené úloze má méně gaussovský charakter než graf bodových zisků v úloze původní, přesto se však domnívám, že tato úloha byla vhodnější, neboť se předešlo nedorozumění, ze kterého vyplývá změna podstaty úlohy.

Několik poznámek ke strategiím řešitelů

Mnohem častěji oproti loňskému ročníku se objevila strategie pokus – omyl. (V minulém ročníku tato strategie kvůli špatnému chápání textu úlohy mnohými žáky nebyla využitelná. Řešitel si zvolil jednu z hlav, o které předpokládal, že mluví pravdu a pak už dohledal jednoznačné řešení. (Nevýhodou strategie je samozřejmě nenalezení všech řešení, pokud by jich existovalo více.) Tato strategie byla poměrně častá, pouze si každý volil jiný výchozí bod, kde začal „tipnutím“. Potěšila mě poznámka: „Nakonec jsem vše zkontroloval, odpovídá-li to zadání.“

Narozdíl od loňského roku se častěji vyskytlo i očekávaně chybné řešení postavené na nesprávné negaci složeného výroku (konkrétně např. negace výroku „B a D oba lžou“ jako výrok „B a D oba mluví pravdu“). Vyskytl se ale jeden řešitel, který pro tuto chybu dokázal udělat dále již bezchybný důkaz, že řešení neexistuje, což je pokrok proti loňskému ročníku, kdy většina řešitelů „našla“ řešení, které neexistovalo.

Zhodnocení

Úloha byla změněná k lepšímu. Pochopení úlohy se zlepšilo a reakce žáků na úlohu byly výrazně lepší než před jejím pozměněním.

10.2. Pozměněná úloha 2 první série

Zadání

Vybarvěte alespoň 7 políček, pod kterými se v následujícím sudoku skrývá číslo 4. (Sudoku řešte podle standardních pravidel – tedy doplňujte číslice 1 – 9 tak, aby se v žádném řádku, sloupci ani tučně vyznačeném čtverci 3×3 žádná číslice neopakovala.)

	4	9	3				5	
				9	1			
5		7		8				
			9			6		1
2				3				8
3		1			7			
				5		2		6
			8	1				
	5				3	9	1	

Řešení

1	4	9	3	7	6	8	5	2
8	3	2	5	9	1	4	6	7
5	6	7	4	8	2	1	9	3
4	7	5	9	2	8	6	3	1
2	9	6	1	3	5	7	4	8
3	8	1	6	4	7	5	2	9
9	1	3	7	5	4	2	8	6
6	2	4	8	1	9	3	7	5
7	5	8	2	6	3	9	1	4

Komentář

Sudoku bylo v předchozím ročníku zadáno nevhodně, protože bylo pro řešitele příliš snadné. Letošní sudoku je rovněž převzaté (Vlasta 34/2008), opět k němu byl přidán úkol. V předchozím ročníku bylo však zadáno sudoku středně těžké, letos již těžké. Pokud by se ani toto neosvědčilo, ještě je možnost zadat obtížnost pro mistry, nechtěla jsem však přidávat náročnost po příliš velkých skocích.

Sudoku jsem chtěla zadat podobně jako v minulém ročníku, tedy dát jistý prostor volnosti, aby žáci nemuseli řešit celou tabulku, ale aby šanci na bodový zisk měli i ti řešitelé, kteří sudoku nevyluští celé. Zadání jsem však mírně obměnila kvůli řešitelům, kteří se zúčastnili i loňského ročníku. (Místo hledání čísel do konkrétních políček jsem nyní chtěla najít políčka, do kterých patří konkrétní číslo.)

Čtyřka byla vybrána, protože při vlastním řešení úlohy mi připadala jako nejobtížnější z čísel v daném sudoku.

V úloze byl záměrně zadán jeden údaj sporně, a to nalezení alespoň 7 políček. Nikde jsem totiž neřekla, zda jedno z nich může být i políčko, kde je 4 předtištěná. Údaj jsem zadala nejednoznačně záměrně, zajímalo mě, jak se s nejednoznačností vypořádají řešitelé. Při opravování jsem předtištěnou čtyřku hodlala uznávat jako hledané číslo, pokud ji řešitel vybarví. Můj odhad byl, že řešitelé předtištěnou čtyřku většinou nebudou počítat do hledaných „alespoň sedmi čtyřek". Odhadovala jsem rovněž, že řešitelé, kteří vyřeší celou tabulku, vybarví opravdu všech 9 čtyřek.

Můj odhad úspěšnosti této úlohy byl, že bude rovněž velmi vysoká.

Bodování

5 bodů – 7 a více políček správně

4 body – 6 políček správně

3 body – 4 – 5 políček správně

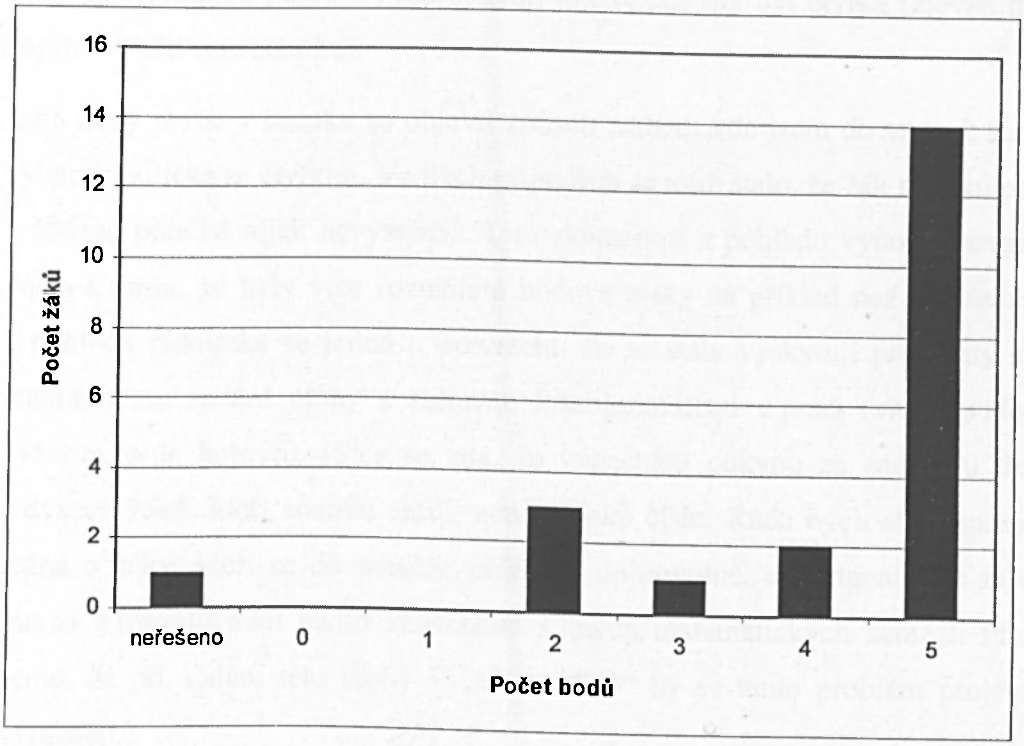
2 body – 2 – 3 políčka správně

1 bod – 1 políčko správně

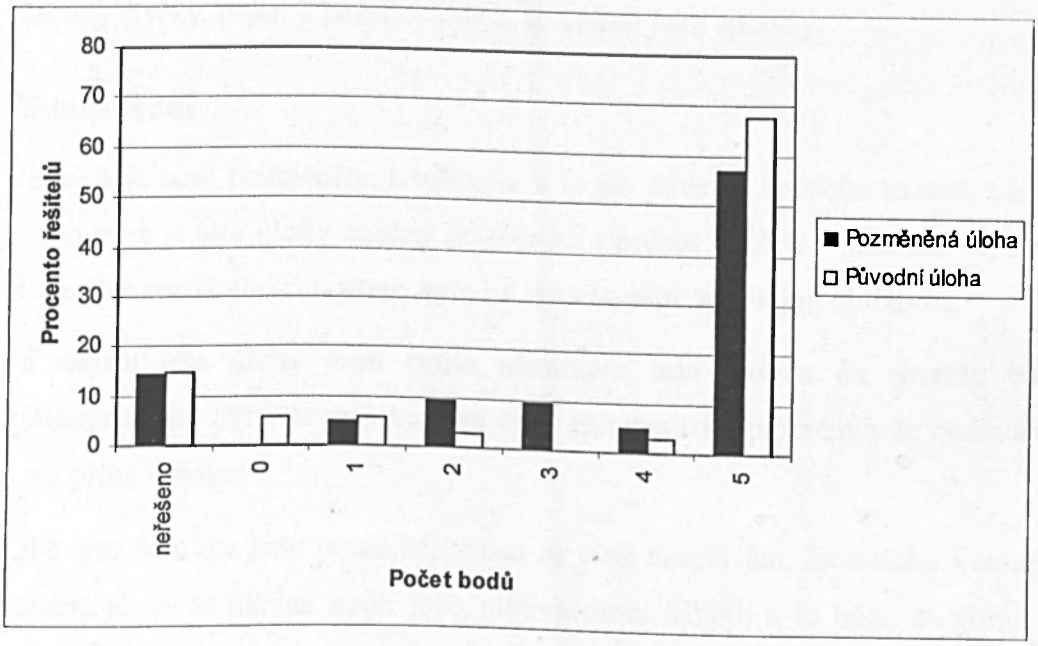
0 bodů – 0 políček správně

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 39: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy



Graf 40: Porovnání úspěšnosti s úspěšností původní úlohy



Z grafu vidíme, že se rozdělení mezi jednotlivé bodové zisky mírně zlepšilo, přesto však zůstává nadpoloviční většina řešitelů s plným bodovým ziskem.

Několik poznámek ke strategiím řešitelů

Oproti mému očekávání se dost často vyskytla varianta, že žák poslal mřížku sudoku zcela nevyplněnou pouze s vybarvenými místy, kde má být čtyřka (zjevně na vedlejším papíře vyřešil celé sudoku).

Jako nový prvek v sudoku se objevil způsob zadání, kde jsem do textu k sudoku zadala vybarvit políčka se čtyřkou. Ve třech případech se totiž stalo, že žák sudoku pouze vyřešil a žádaná políčka nijak nevyznačil. Tato skutečnost z pohledu vyhodnocovatele soutěže vedla k tomu, že byly více rozmanité bodové zisky za příklad než u loňského sudoku. Z pohledu didaktika se jedná o potvrzení, že se stále vyskytují problémy s povrchním čtením textu zadání úlohy a sklonem k šablonovitosti v práci (vidím sudoku, tak ho vyřeším, a je hotovo). (Sice se zdá, že vynechání pokynu ze zadání u třech řešitelů z dvaceti žáků, kteří sudoku řešili, není vysoké číslo. Ráda bych ale připomněla, že se jedná o žáky, kteří se do soutěže přihlásili dobrovolně, což signalizuje zájem o obor; mnozí z řešitelů mají nadto zkušenosti z jiných matematických soutěží. Předpokládám proto, že při zadání této úlohy v „běžné třídě“ by se tento problém projevil mnohem výrazněji.)

Předpoklad, že všichni řešitelé, kteří dosáhnou pětibodového zisku, budou mít vybarvené všechny čtyřky, nejen 7 požadovaných, se ukázal jako správný.

Zhodnocení

Úloha byla opět pozměněna k lepšímu, a to jak změnou způsobu zadání, tak obtížností. Přesto však u této úlohy značný prostor ke zlepšení ještě je – ukázalo se, že aby měla úloha více rozlišující charakter, bylo by potřeba ještě zvýšit její obtížnost.

Po zadání této úlohy jsem čelila námitkám, zda sudoku do soutěže vůbec patří. Protiargumenty byly, že sudoku není čistě matematický problém a že bodové zisky jsou u něj příliš vysoké.

Obě tyto námitky jsou pravdivé, přesto se však domnívám, že sudoku v soutěži zadáno vhodně je. A to hlavně kvůli jeho motivačnímu náboji, a to hned dvojímu. Jednak si myslím, že do soutěže přiláká žáky, kteří by si jí jinak ani nevšimli. A žáci, kteří se do soutěže zapojí, si hrají, a zároveň řeší úlohu matematické soutěže – tedy sudoku odkrývá některým žákům matematiku jako zábavu.

Jako obhajobu proti druhé námitce chci uvést, že soutěž má dostatek jiných úloh, které „rozhodí pole“, a tak si může dovolit zařadit i úlohu s vysokou úspěšností. Navíc bych – měla-li bych tu možnost – do další série zadala sudoku ještě obtížnější, aby bodové zisky nebyly tak výrazně posunuty směrem k pěti bodům.

10.3. Pozměněná úloha 4 druhé série

Zadání

Kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici dvě figurky – bílou a černou – tak, aby při hře dáma bílá mohla brát černou? Bílá i černá figurka jsou běžné figurky.

Úlohu řešte za předpokladu, že

a) Víme, na které straně šachovnice hraje bílá a na které černá.

b) Nevíme, ne které straně šachovnice hraje bílá a na které černá.

Pozn.: Dáma se hraje pouze na černých políčkách. Běžná figurka znamená, že tato figurka není dáma. (Nemůže tedy skákat o víc políček najednou.)

Řešení:

a) Do obrázku šachovnice jsem umístila čísla následujícím způsobem: Nechť bílá hraje směrem „odspodu nahoru“. Představila jsem si, že na příslušném políčku, do kterého jsem chtěla vpisovat číslo, stojí bílá figurka. A počítala jsem, kolik možností vyhovujících zadání je pro postavení černé figurky.

			•		•		
				2			

	0		0		0		0
0		0		0		0	
	1		2		2		1
1		2		2		1	
	1		2		2		1
1		2		2		1	
	1		2		2		1
1		2		2		1	

Celkový počet možností je součet čísel v tabulce. Celkem je tedy 36 možností.

b) Přibudou možnosti, kdy bílá hraje „odshora dolů“, a těch je stejně, jako když hraje „odspoda nahoru“. Tedy celkem je možností $36 \cdot 2 = 72$.

Komentář

Jedná se o stejnou úlohu jako v předchozím ročníku, pouze je zpřesněno zadání. Otázky jsou – alespoň podle mě – zadány již jednoznačně. Úloha je obměněna přidáním části b), tudíž vypadá složitěji. Přitom výsledek části b) je jednoduše dvojnásobek výsledku v části a).

Část a) je pouze přesnějším vyjádřením toho, jak stejnou úlohu v předcházejícím ročníku chápali žáci, část b) přesnějším vyjádřením toho, jak jsem úlohu tehdy chápala já jakožto autor.

Zařazení úlohy se dvěma částmi se mi jevilo jako vhodné, protože úloha bez podúloh se jevila jako příliš snadná a velmi málo vytvářela bodové rozdíly mezi řešiteli. Spojení úlohy s úlohou o dámách mi ale nepřipadá vhodné, protože tím se rozsah úlohy příliš zvětší a podúlohy jsou na sobě příliš málo závislé, tedy je obtížnější bodování. (Které části pak přidělit 3 body a které pouze 2?)

Bodování

Část a):

3 body – správné řešení

2 body – řešení s velmi malou chybou – numerickou nebo logickou

1 bod – řešení se závažnější logickou chybou

0 bodů – zcela nesprávné řešení

Část b):

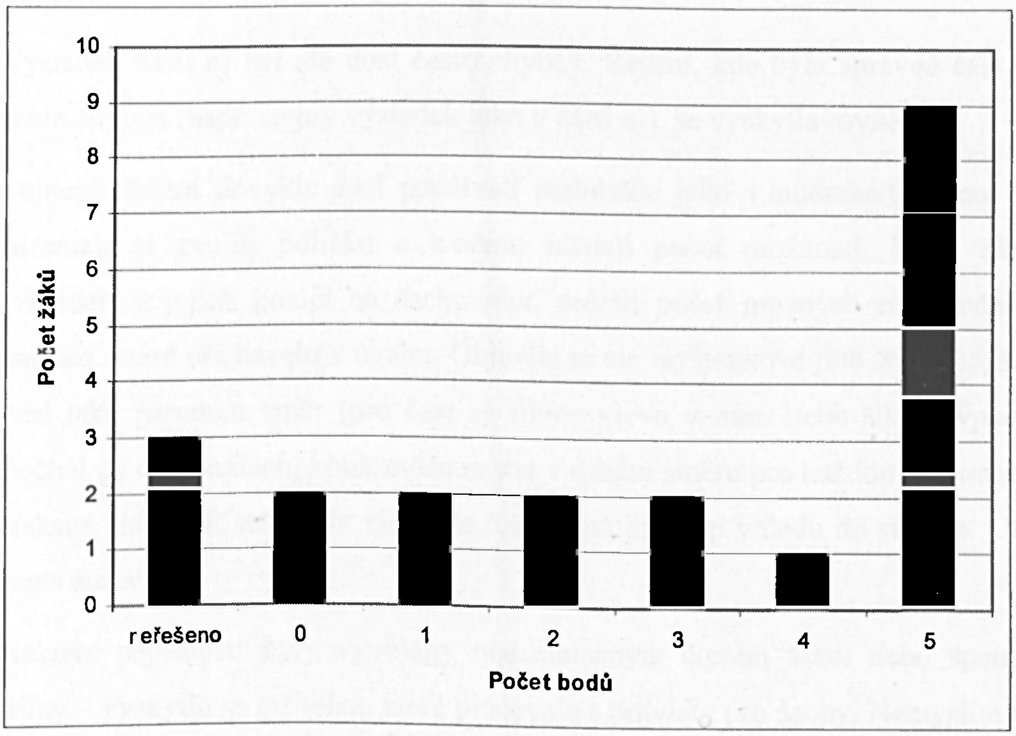
2 body – zcela správné řešení nebo chybné řešení vzniklé vynásobením chybného řešení z části a) dvěma

1 bod – řešení s drobnou logickou nebo numerickou chybou

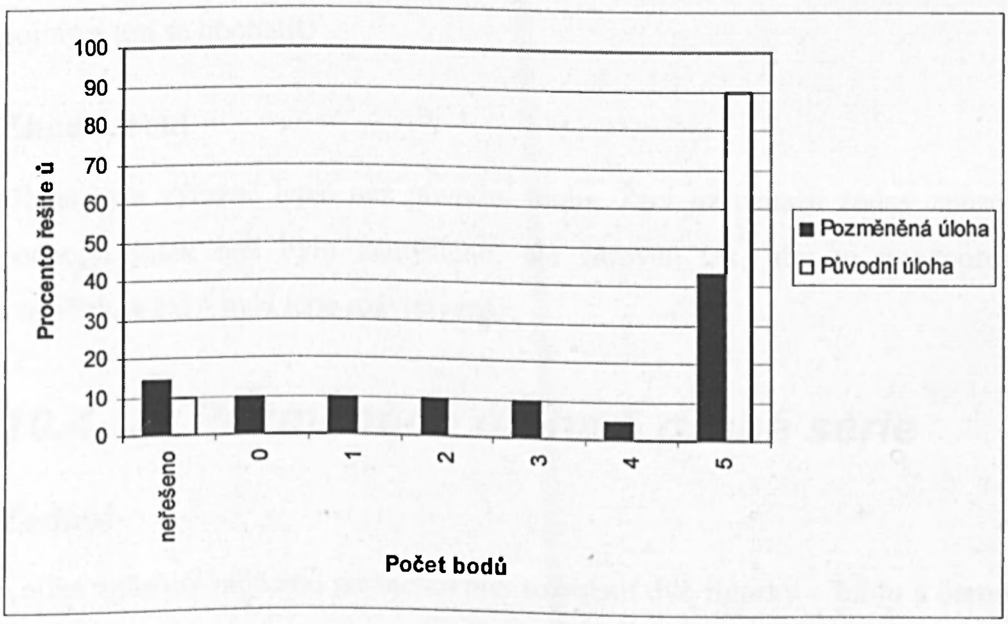
0 bodů – zcela chybné řešení

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 41: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy



Graf 42: Porovnání úspěšnosti s úspěšností původní úlohy



Úspěšnost žáků je mnohem pestřeji distribuována mezi různé bodové hodnoty, úloha má mnohem lepší potenciál rozlišit mezi účastníky soutěže.

Několik poznámek ke strategiím řešitelů

Většina žáků si správně uvědomila, že výsledek části b) je dvojnásobkem výsledku z části a).

Výsledek části a) byl ale dost často chybný. Řešení, kde byla správně část a) a část b) zcela chybně (např. stejný výsledek jako v části a)), se vyskytla rovněž.

Strategii řešení obvykle žáci používali podobnou jako v autorském řešení – tedy jako parametr si zvolili políčko a k němu hledali počet možností. Našli různá políčka vzhledem k jejich pozici na šachovnici, sečetli počet možných rozmístění pro každé políčko, které přicházelo v úvahu. Objevila se ale myšlenkově jiná strategie, kdy si řešitel vzal jako parametr směr (pro část a) šikmo vlevo vzhůru nebo šikmo vpravo vzhůru). Počítal po diagonálách, kolik může nastat v daném směru pro každou diagonálu možností, získaná čísla pak sečetl. Je vidět, že řešitel má jiný typ vhledu do situace. Úlohu vyřešil zcela správně.

Některé nejasnosti byly vyvolány nedostatečným čtením textu nebo špatnou znalostí dámy – vyskytla se řešitelka, která pracovala s pravidly pro šachy. Nemyslím si ale, že by bylo nutné pravidla dámy do zadání připisovat, protože se jedná o korespondenční soutěž, kde se počítá s tím, že žák má dostatek času a možností vyhledat si v literatuře neznámé pojmy a tím se obohatit.

Zhodnocení

Úloha byla výrazně lepší než původní úloha. Žáci již nenašli žádný způsob, jak úlohu pochopit jinak než bylo zamýšleno, ale zároveň tak, aby to neodporovalo zadání. I úspěšnost žáků byla lépe rozvrstvena.

10.4. Pozměněná úloha 5 druhé série

Zadání

Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozmístit dvě figurky – bílou a černou – tak, aby se mohly brát navzájem? Víme přitom, na které straně šachovnice hraje bílá a na které černá. Úlohu řešte za předpokladu, že:

a) Obě figurky jsou běžné figurky.

b) Černá je dáma a bílá běžná figurka.

c) Černá je běžná figurka a bílá je dáma.

d) Obě figurky jsou dámy.

e) Obě figurky jsou dámy, nestojí ale na políčkách, která spolu sousedí, (tj. na čtvercích, které mají společný vrchol).

Pozn.: Opět hrajeme pouze na černých políčkách šachovnice. Běžná figurka znamená figurku, která není dáma. Nezapomeňte také, že běžná figurka se umí pohybovat pouze dopředu, dáma dopředu i zpátky.

Řešení

Úlohu řešíme stejným postupem jako úlohu předcházející, tedy představíme si, že na políčku, do kterého chceme vepsat číslo, stojí bílá figurka. Zjistíme, kolika způsoby můžeme přidat černou figurku tak, aby splňovala dané podmínky, a toto číslo do políčka napíšeme. Výsledný počet je součtem čísel ve všech políčkách.

a)

	0		0		0		0
0		0		0		0	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		0		0		0	

Celkem je 25 možností.

b)

	0		0		0		0
0		0		0		0	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		0		0		0	

Situace je úplně stejná jako v podúkolu a). Černá je sice dáma, nemůže ale skákat z jiného políčka než bezprostředně blízkého, protože pak by ji bílá figurka nemohla brát. Celkem je 25 možností.

c) Situace je totožná s podúkolem b), pouze stranově převrácená. Nezáleží na tom, která ze dvou figurek je dáma, jejich vzájemná pozice musí být stejná.

d)

	0		0		0		0
0		5		5		5	
	5		7		7		0
0		7		9		5	
	5		9		7		0
0		7		7		5	
	5		5		5		0
0		0		0		0	

Celkem je 110 možností.

e)

	0		0		0		0
0		3		3		4	
	3		3		3		0
0		3		5		3	
	3		5		3		0
0		3		3		3	
	4		3		3		0
0		0		0		0	

Celkem je 60 možností.

Komentář

Úloha je opět řešitelná podobným myšlenkovým postupem jako úloha předcházející, pouze členění podúloh je jinak strukturované. Úloha je lehčí tím, že jsou jasně definované všechny předpoklady.

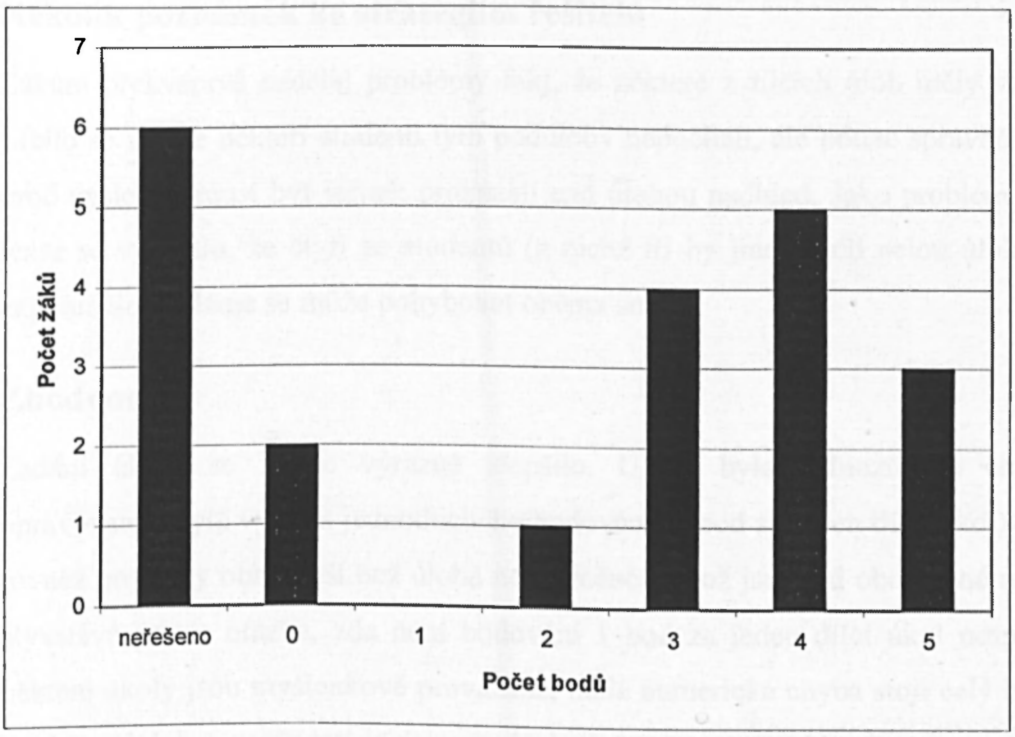
Podúlohy jsou vzájemně velmi provázané, což by mělo usnadnit řešiteli práci.

Bodování

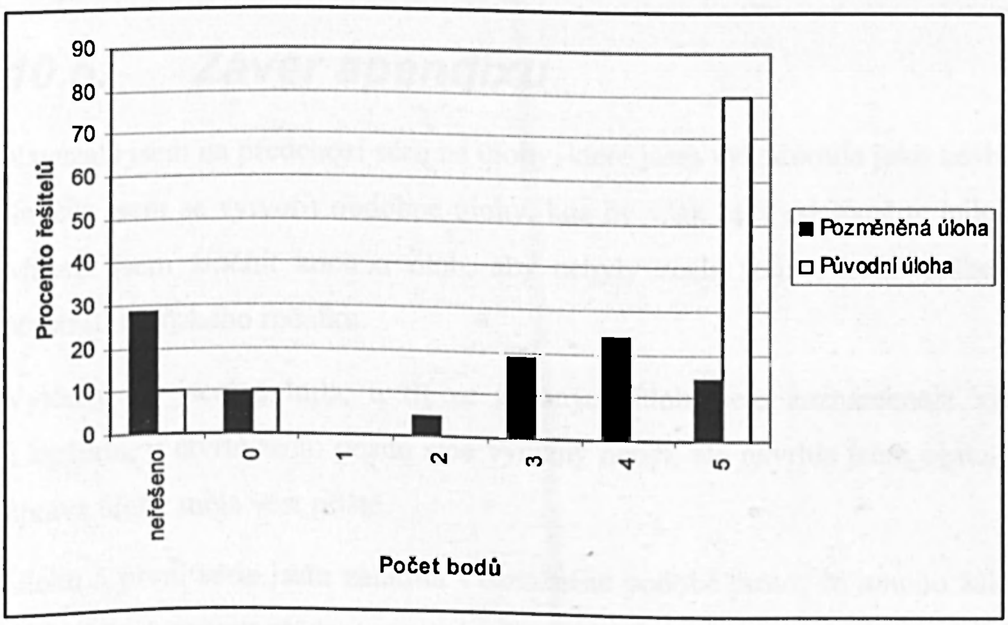
Každá správně vyřešená podúloha znamená 1 bod. Pokud žák pouze opomene, že dáma smí hrát na obě strany (tj. výsledky úkolů d) a e) má poloviční), dostane za části d) a e) jeden bod dohromady. Pokud je jedna z částí d) nebo e) chybně a jedna polovinou hledané hodnoty, jsou oba výsledky hodnoceny jako chybné.

Přehled úspěšnosti řešitelů

Graf 43: Bodové ohodnocení řešitelů úlohy



Graf 44: Porovnání úspěšnosti s úspěšností původní úlohy



Jak je vidět, úspěšnost žáků v původní úloze byla výrazně vysoká. Odmyslíme-li si vysoké procento žáků, které obměněnou úlohu vynechali, blíží se úspěšnost řešitelů v obměněné úloze Gaussově křivce. Jak jsem již zmiňovala, v soutěžních úlohách není úspěšnost kopírující Gaussovu křivku důležitá, když se však povede, ukazuje to na velmi vhodnou úlohu.

Několik poznámek ke strategiím řešitelů

Žákům překvapivě nedělal problémy fakt, že některé z dílčích úloh měly stejná řešení. Líbilo se mi, že někteří studenti tyto podúlohy nepočítali, ale pouze správně zdůvodnili, proč výsledky musí být stejné; prokázali nad úlohou nadhled. Jako problém s chápáním textu se vyskytlo, že čtyři ze studentů (z nichž tři by jinak měli celou úlohu správně), zapomněli, že dáma se může pohybovat oběma směry.

Zhodnocení

Zadání úlohy se i zde výrazně zlepšilo. Úloha byla jednoznačné chápána. Pro opravovatele byla výhoda jednoduchého bodování (1 bod za jeden dílčí úkol). Úloha byla rovněž pro žáky obtížnější než úloha nepozměněná, což jsem od obměněné úlohy chtěla. Vyvstává pouze otázka, zda není bodování 1 bod za jeden dílčí úkol nespravedlivé – některé úkoly jsou myšlenkově provázané, malá numerická chyba stojí celý bod. Protože je ale podúloh a možností k zisku bodů hodně a tento problém je pouze u této úlohy, nepovažuji tuto situaci za velkou překážku.

10.5. Závěr apendixu

Navázala jsem na předchozí sérii na úlohy, které jsem vyhodnotila jako nevhodně zadané. Snažila jsem se vytvořit obdobné úlohy, kde by však byly odstraněny jejich nedostatky. Musela jsem změnit kontext úloh, aby nebyly zcela stejné, kvůli řešitelům, kteří se účastnili i loňského ročníku.

Vytčený cíl jsem splnila, u tří ze zadaných úloh jsem zaznamenala výrazný posun k lepšímu, u čtvrté tento posun sice výrazný nebyl, ale navrhla jsem cestu, kterou by se úprava úlohy měla vést příště.

Úlohu 5 první série jsem zařadila v obměněné podobě proto, že mnoho žáků udělalo při jejím řešení stejnou chybu – nesprávně pracovali s textem úlohy. Tato chyba sice nebyla mojí chybou v zadání, ukázalo se ale, že toto zadání je pro děti věku základní školy nejspíš příliš obtížné, a proto jsem do obměny úlohy zařadila navíc nápovědu. Tato nápověda splnila svůj účel, žáci nyní úlohu pojali správně. Tato pozměněná úloha se již jeví jako vhodně zadaná.

Úlohu 2 první série (sudoku) jsem vyhodnotila jako příliš snadné. Proto jsem do nového kola soutěže kromě změny kontextu a dílčích úkolů zařadila o úroveň těžší sudoku (těžké místo středně těžkého). Projevila se nejspíš módnost tohoto hlavolamu, protože i v tomto úkolu získala nadpoloviční většina řešitelů plný počet bodů. Kdybych úlohu zadávala znovu, sáhla bych po ještě vyšší obtížnosti (bývá označována „pro mistry“).

Úlohy 4 a 5 druhé série jsem změnila výrazně, a to nejen zpřesněním zadání, abych odstranila nejednoznačnost chápání, ale i rozdělením do většího počtu podúkolů. Výsledné úlohy měly opět výrazně lépe rozdistribuovány zisky řešitelů mezi různé bodové hodnoty.

Když všechny úlohy řešené v apendixu zařadím místo úloh v původním zadání a přitom ještě vyměním sudoku za obtížnější, dostanu soubor úloh, jehož získání bylo jedním z cílů této diplomové práce – tedy vytvořila jsem sadu úloh do matematické soutěže, kterou jsem sama odzkoušela a jejich analýzou je uznala jako vhodně zadané.

11. Použitá literatura

[1] BORBA, M. C. *High School Students' Mathematical Problem Posing: An Explorery Study in the Classroom.* AERA. New Orleans 1994.

[2] CHI, M. T., FELTOVICH, P., GALESR, R. *Categorisation and Representation of Physics Problems by Experts and by Novices.* Pittsburgh, PA: Learning Research and Development Center. Pittsburgh 1981.

[3] ENGLISH, L. D. The Development of FIFA-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics (no. 1/1997).* Springer Netherlands. Dordrecht 1997.

[4] GONZALES, N. A. Problem Posing: A Neglected Component in Mathematics Course. *School Science and Mathematics (vol. 94, no. 2).* SSMA. Oklahoma City 1994.

[5] GRUNDMEIER, T. A. University Students' Problem Posing Abilities and Attitudes towards Mathematics. *Primus: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (vol. 12, no. 2).* Taylor & Francis Group. New York 2002.

[6] HENDERSON, K. B., PINGRY, R. E. Problem Solving in Mathematics. In Fehr, H. F. (ed.) *The Learning: Its Theory and Practice.* NCTM. Reston 1953.

[7] HRABAL, V., LUSTIGOVÁ, Z., VALENTOVÁ, L. *Testy a testování ve škole.* PedF UK. Praha 1994.

[8] LEUNG, S. On the Open-ended Nature in Mathematical Problem Posing. In Pehkonen, E. (ed.) *Use Of Open-ended Problems in Mathematics Classroom.* Helsinki Univ. Helsinky 1997.

[9] LIN, P. Supporting Teachers on Designing Problem Posing Tasks as a Tool of Assessment to Understand Students' Mathematical Learning. In Woo, J., et al. (eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3.* International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cape Town 2004.

[10] MANN, E. L. Creativity: the Essence of Mathematics. *Journal for Education of the Gifted (vol. 30, no. 2).* Prufrock Press. Waco 2006.

[11] MESTRE, P. J. Probing Adults` Conceptual Understanding and Transfer of Learning via Problem Posing. *Journal of Applied Developmental Psychology (vol. 23, no. 1).* Elsevier. Columbus 2002.

[12] PALEČKOVÁ, J, TOMÁŠEK, V., STRAKOVÁ, E. *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání – Test z matematiky a fyziky pro středoškoláky.* Ústav pro informace ve vzdělávání. Praha 1999.

[13] PATÁKOVÁ, E. *Posloupnosti vyšších řádů.* Nediplomní práce SVOČ 2006.

[14] PIRIE, S. E. B. *Problem Posing: What can it tell us about Students` Mathematical Understanding?* ERIC/CSMEE Publications. Columbus 2002.

[15] POLYA, G. *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method (2nd edition).* Princeton University Press. Princeton 1973.

[16] POLYA, G. *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving, volume I.* John Wiley & Sons. New York 1964.

[17] POLYA, G. *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving, volume II.* John Wiley & Sons. New York 1965.

[18] REITMAN, V. *Cognition and Thought.* New York: Wiley & Sons. New York 1965.

[19] SEO, H. S. On the Use of What-if-not Strategy for Posing Problem. In Pehkonen, E. (ed.) *Use of Open-ended Problems in Mathematics Classroom.* Helsinki Univ. Helsinki 1997.

[20] SILVER, E. A., CAI, J. An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education (vol. 27, no. 5).* NCTM. Reston 1996.

[21] SRIRAMAN, B. Are Giftedness and Creativity Synonyms in Mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education (no. 3/2005).* Prufrock Press. Fall 2005.

[22] STOYANOVA, E. Empowering Students` Problem Solving via Problem Posing: The Art of Framing "Good" Questions. *Australian-Mathematics-Teacher (vol. 56, no.1).* AAMT. Adelaide 2000.

[23] TICHÁ, M., MACHÁČKOVÁ, J. Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In Sýkora, V. (ed.) *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP.* JČMF Praha 2006.

[24] ZHOUF, J. Tvorba diagnostických úloh z matematiky. In Hejný, J., Novotná, J., Stehlíková, N. (eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* PedF UK. Praha 2004.

[25] 6 × rébus sudoku. In *Vlasta 19/2007.* Sanoma Magazines Praha 2007.

[26] 6 × rébus sudoku. In *Vlasta 34/2008.* Sanoma Magazines Praha 2008.

[27] http://www.math.muni.cz/~rvmo/ [22. 6. 2008]

[28] http://www.glouny.cz/matematika/pythagoriada/p_03_04_6rocnik.htm [22. 6. 2008]

[29] http://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagori%C3%A1da [22. 6. 2008]

[30] http://userweb.pedf.cuni.cz/kmdm/aktivity/m_souteze/klokan.htm [22. 6. 2008]

[31] http://matematickyklokan.net/ [22. 6. 2008]

[32] http://www.glouny.cz/klokan/index.htm [22. 6. 2008]

[33] http://www.kag.upol.cz/turnajmest/struktura.html [22. 6. 2008]

[34] http://bart.math.muni.cz/~brkos/ [24. 6. 2008]

[35] http://mks.mff.cuni.cz/info.php [24. 6. 2008]

[36] http://mam.mff.cuni.cz/index.php3?stranka=archiv&menu=1&pg=12&tn=&cis=1&roc=XIV [24. 6. 2008]

[37] http://www.pikomat.unas.cz/ [24. 6. 2008]

[38] http://ckgym-ckos.ic.cz/sp.html [24. 6. 2008]

[39] http://pikomat.mff.cuni.cz/ [24. 6. 2008]

[40] http://kokos.gmk.cz/index.php?fil=uvod [24. 6. 2008]

[41] http://fos.ujep.cz/kmat/KoS/Junior.htm [24. 6. 2008]

[42] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_solving [5. 8. 2008]

[43] http://en.wikipedia.org/wiki/How_to_Solve_It [5. 8. 2008]

Přílohy

(G ve sloupci „Škola“ znamená nižší stupeň víceletého gymnázia.)

Výsledková listina po první sérii

	Jméno	Škola	Třída	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Celkem	Přepočteno
1.-3.	Anna	G	8	5	5	5	5	5	3	28	47
	Barbora	G	6	5	0	5	5	5	5	25	47
	Cecílie	G	8	5	3	5	5	5	5	28	47
4.	Dana	ZŠ	6	5	3	5	5	5	0	23	45
5.	Jiří	G	9	5	1	5	5	5	5	26	40
6.	Kateřina	ZŠ	8	5	0	5	5	3	4	22	37
7.	Filip	ZŠ	7	5	0	5	5	2	0	17	33
8.-9.	Gabriela	ZŠ	8	5	5	5	0	2	2	19	32
	Lukáš	ZŠ	7	1	1	5	5	3	1	16	32
10.-11.	Mirek	G	8	3	4	5	0	2	3	17	28
	Evžen	G	8	5	3	5	0	2	2	17	28
	Honza	ZŠ	8	5	0	5	5	2	0	17	28
12.	Norbert	G	8	5	3	4	0	2	2	16	27
13.	Ondřej	ZŠ	9	0	1	5	5	3	3	17	24
14.-15.	Pavla	ZŠ	8	5	1	5	0	2	1	14	23
	Ivan	ZŠ	8	0	0	5	2	5	2	14	23
16.-17.	Radka	G	8	0	0	5	5	3	0	13	22
	Simona	ZŠ	8	5	0	5	1	2	0	13	22
18.	Tereza	ZŠ	7	0	0	5	2	0	3	10	20
19.-21.	Uršula	ZŠ	8	1	0	5	0	2	2	10	17
	Veronika	ZŠ	8	5	0	5	0	0	0	10	17
22.	Zdeněk	ZŠ	9	5	1	1	0	3	2	12	16
23.-24.	Alena	ZŠ	8	1	5	0	0	2	1	9	15
	Bětuška	ZŠ	8	1	0	5	1	2	0	9	15
25.-28.	Carmen	ZŠ	8	0	5	0	0	2	1	8	13
	Drahuše	ZŠ	8	1	0	5	0	2	0	8	13
	Emílie	ZŠ	8	0	0	5	0	1	2	8	13
	Františka	ZŠ	8	5	0	0	1	2	0	8	13
29.-30.	Greta	ZŠ	8	1	1	1	2	2	0	7	12
	Havel	ZŠ	8	1	0	5	0	0	1	7	12
31.	Ignác	ZŠ	7	1	1	0	0	2	0	4	8
32.	Jakub	ZŠ	6	1	0	0	0	2	0	3	7
33.-34.	Kamila	ZŠ	9	0	0	0	2	2	1	5	5
	Lumír	ZŠ	???	1	0	2	0	2	0	5	5

Výsledková listina po druhé sérii

	Jméno	Škola	Třída	1.	2.	3.	4.	5.	6.	2. série	Přepočteno	Celkem
1.-2.	Anna	G	8	5	5	5	5	5	5	30	50	97
	Barbora	G	6	5	5	5	5	5	5	30	50	97
3.	Cecílie	G	8	4	5	5	5	5	5	29	48	95
4.	Dana	ZŠ	6	1	4	1	5	5	1	17	37	82
5.-6.	Evžen	G	8	3	4	1	5	5	5	23	38	66
	Filip	ZŠ	7	0	5	2	5	5	0	17	33	66
7.	Gabriela	ZŠ	8	1	5	1	4	5	0	16	27	59
8.	Honza	ZŠ	8	0	5	1	5	5	0	16	27	55
9.	Ivan	ZŠ	8	1	5	1	5	5	0	17	28	51
10.	Jiří	G	9	0	0	0	0	0	0	0	0	40
11.	Kateřina	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	37
12.	Lukáš	ZŠ	7	0	0	0	0	0	0	0	0	32
13.	Mirek	G	8	0	0	0	0	0	0	0	0	28
14.	Norbert	G	8	0	0	0	0	0	0	0	0	27
15.	Ondřej	ZŠ	9	0	0	0	0	0	1	1	1	25
16.	Pavla	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	23
17.-18.	Radka	G	8	0	0	0	0	0	0	0	0	22
	Simona	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	22
19.	Tereza	ZŠ	7	0	0	0	0	0	0	0	0	20
20.-21.	Uršula	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	17
	Veronika	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	17
22.	Zdeněk	ZŠ	9	0	0	0	0	0	0	0	0	16
23.-24.	Alena	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	15
	Bětuška	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	15
25.-28.	Carmen	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
	Drahuše	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
	Emílie	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
	Františka	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
29.-30.	Greta	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	12
	Havel	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	12
31.	Ignác	ZŠ	7	0	0	0	0	0	0	0	0	8
32.	Jakub	ZŠ	6	0	0	0	0	0	0	0	0	7
33.-34.	Kamila	ZŠ	9	0	0	0	0	0	0	0	0	5
	Lumír	ZŠ	???	0	0	0	0	0	0	0	0	5

Výsledková listina po třetí sérii

	Jméno	Škola	Třída	1.	2.	3.	4.	5.	6.	2. série	Přepočteno	Celkem
1.-2.	Anna	G	8	5	5	5	5	5	5	30	50	147
	Barbora	G	6	5	4	5	5	5	5	29	50	147
3.	Cecílie	G	8	5	5	4	5	5	5	29	48	143
4.	Gabriela	ZŠ	8	3	3	2	1	3	5	17	28	87
5.	Dana	ZŠ	6	0	0	0	0	0	0	0	0	82
6.	Ivan	ZŠ	8	0	0	5	2	2	5	14	23	74
7.-8.	Evžen	G	8	0	0	0	0	0	0	0	0	66
	Filip	ZŠ	7	0	0	0	0	0	0	0	0	66
9.	Honza	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	55
10.-11.	Greta	ZŠ	8	4	5	2	4	5	1	21	35	47
	Ondřej	ZŠ	9	4	3	0	5	4	0	16	22	47
12.	Jiří	G	9	0	0	0	0	0	0	0	0	40
13.-14.	Zdeněk	ZŠ	9	2	2	0	4	3	4	15	21	37
	Kateřina	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	37
15.	Bětuška	ZŠ	8	2	2	2	3	3	0	12	20	35
16.	Veronika	ZŠ	8	0	0	2	5	3	0	10	17	34
17.	Lukáš	ZŠ	7	0	0	0	0	0	0	0	0	32
18.	Mirek	G	8	0	0	0	0	0	0	0	0	28
19.	Norbert	G	8	0	0	0	0	0	0	0	0	27
20.	Pavla	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	23
21.-22	Radka	G	8	0	0	0	0	0	0	0	0	22
	Simona	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	22
23.	Tereza	ZŠ	7	0	0	0	0	0	0	0	0	20
24.	Uršula	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	17
25.	Alena	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	15
26.-29.	Carmen	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
	Drahuše	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
	Emílie	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
	Františka	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	13
30.	Havel	ZŠ	8	0	0	0	0	0	0	0	0	12
31.	Ignác	ZŠ	7	0	0	0	0	0	0	0	0	8
32.	Jakub	ZŠ	6	0	0	0	0	0	0	0	0	7
33.-34.	Kamila	ZŠ	9	0	0	0	0	0	0	0	0	5
	Lumír	ZŠ	???	0	0	0	0	0	0	0	0	5