

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta  
**DIPLOMOVÁ PRÁCE**



Tomáš Gubanec

**Užití Fourierovy transformace v neživotním  
pojištění**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Iva Justová  
Studijní program: Matematika  
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2007

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucí práce Mgr. Ivě Justové za ochotné zapůjčení literatury a za poskytnutí některých podnětů, které přispěly k celkovému zkvalitnění této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 10.srpna 2007

Tomáš Gubanec



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Fourierova transformace</b>	<b>7</b>
2.1	Definice . . . . .	7
2.2	Základní vlastnosti . . . . .	9
2.3	Další vlastnosti . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Užití Fourierovy transformace v teorii neživotního pojištění</b>	<b>15</b>
3.1	Charakteristické a vytvořující funkce . . . . .	15
3.2	Laplaceova transformace . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Agregace spojitých náhodných veličin</b>	<b>24</b>
4.1	Agregace spojitých reálných náhodných veličin . . . . .	24
4.2	Agregace rizik . . . . .	29
4.2.1	Individuální model rizika . . . . .	30
4.2.2	Kolektivní model rizika . . . . .	30
4.2.3	Agregace veličin se složeným rozdělením . . . . .	30
4.2.4	Přechod do více dimenzí . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Numerická Fourierova transformace</b>	<b>34</b>
5.1	Diskrétní Fourierova transformace . . . . .	35
5.1.1	Jednorozměrný případ . . . . .	35
5.1.2	Vícerozměrný případ . . . . .	37
5.2	Rychlá Fourierova transformace . . . . .	38
5.3	Zdiskrétnění . . . . .	40
5.4	Závislost . . . . .	41
5.5	Další metody . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Příklad a další komentáře</b>	<b>47</b>
	<b>Literatura</b>	<b>52</b>

Název práce: Užití Fourierovy transformace v neživotním pojištění

Autor: Tomáš Gubanec

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Iva Justová

e-mail vedoucího: Iva.Justova@cnb.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme použitím Fourierovy transformace v neživotním pojištění. Na jedné straně se práce zaměřuje na teoretickou Fourierovu transformaci a její použití v teorii pravděpodobnosti, např. charakteristické funkce náhodných veličin. Dále ukážeme použití charakteristických funkcí při počítání sdruženého škodního rozdělení a při agregaci rizik. Na druhé straně práce popíšeme numerickou Fourierovu transformaci a představíme metodu pro její rychlý výpočet. Tento algoritmus použijeme v příkladu, kde budeme agregovat rizika, která nejsou nezávislá. Zmíníme se také o možném rozšiřování Fourierových metod do více dimenzí.

Klíčová slova: Fourierova transformace, agregace závislých rizik.

Title: The use of Fourier transform in the non-life insurance

Author: Tomáš Gubanec

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: Mgr. Iva Justová

Supervisor's e-mail address: Iva.Justova@cnb.cz

Abstract: In the present work we study the use of Fourier transform in the non-life insurance. On the first side it is concerning about the theoretical Fourier transform and its use in the probability theory, e.g. characteristic functions of the random variables. Then we show how to use characteristic functions in computing aggregate loss distribution and how to combine risk portfolios. On the other side we describe also numerical Fourier transform method and introduce its fast computational form. We use this algorithm in an example, where we aggregate risk portfolios, which are not independent. We also discuss the multivariate extension of Fourier methods.

Keywords: Fourier transform, aggregation of correlated risk portfolios.

# Kapitola 1

## Úvod

Tato diplomová práce pojednává o možném použití Fourierovy transformace (dále FT) v neživotním pojištění. Je rozdělena do dvou částí. První z nich se zabývá teoretickým zpracováním FT a jejího použití v teorii neživotního pojištění. Toto je obsahem kapitol 2, 3 a 4. Na ně navazuje praktická část v kapitolách 5 a 6. Zde ukážeme praktické použití FT v neživotním pojištění.

Kapitola 2 je zaměřena na základní seznámení s teoretickou FT. Vysvětlíme zde její podstatu v obecné formě a uvedeme její základní vlastnosti. Velkou část těchto poznatků budeme používat v dalších částech.

Třetí kapitola se zabývá užitím Fourierovy transformace v teorii neživotního pojištění. Důraz je kladen především na souvislost charakteristické funkce náhodné veličiny a FT její hustoty. Vedle toho si ukážeme další vztahy s vytvářejícími funkcemi dané náhodné veličiny. Druhá část této kapitoly se věnuje Laplaceově transformaci, která se používá v teorii rizika. Ukážeme si, že platí blízký vztah mezi Laplaceovou a Fourierovou transformací. Podstata některých výsledků z kapitoly 2 je proto stejná pro obě transformace.

Poslední v teoretické části je kapitola 4. Navazuje na předchozí kapitoly a zabývá se výhradně použitím FT při agregaci spojitých náhodných veličin. Tímto rozumíme teorii hledání rozdělení součtu  $S = X_1 + \dots + X_n$  náhodných veličin  $X_1, \dots, X_n$  (nezávislých i závislých). Ukážeme si také, jak s pomocí FT můžeme teoreticky najít rozdělení náhodného součtu  $S = X_1 + \dots + X_N$ , kde  $N$  je diskrétní veličina. Umět prakticky vyřešit tyto úlohy může být obecně velmi důležité například v interních modelech pojišťoven. Abychom toho byli schopni s pomocí teoretických výsledků z první části práce, musíme se nejdříve seznámit s praktickou (tj. numerickou verzí) FT.

Praktická část začíná kapitolou 5 a hned v úvodní podkapitole si předsta-

víme numerickou verzi FT. Dále si ukážeme, že pro její výpočet existuje rychlý algoritmus, což jen umocní praktické využití metod, které jsou založeny na FT a které jsou popsány v teoretické části. K tomu si popíšeme, jak vyřešit problémy, které jsou způsobeny rozdílností teoretické a praktické FT. Jedna podkapitola je vyhrazena problematice agregace závislých veličin. Ukážeme si také jiný možný postup numerického řešení úloh, které jsou založeny na FT, a jeho rozšíření do dvou dimenzí.

V závěrečné kapitole budeme na příkladu ilustrovat, jak prakticky využít poznatků této práce.

# Kapitola 2

## Fourierova transformace

V této kapitole představíme FT po teoretické stránce. Z matematického hlediska se jedná o jednu z mnoha tzv. integrálních transformací. Ty mají velké použití nejen ve fyzice, zejména v kvantové mechanice, ale i v matematice, a to například při řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic.

### 2.1 Definice

Ještě před zadefinováním klíčového pojmu FT musíme, bohužel, poznamenat, že v různých oborech se používají nejen odlišná značení, ale i odlišné definice. Proto se seznámíme s obecnější variantou zavedení FT a jak uvidíme, rozdílnost definic spočívá zejména v používání jiných konstant, což naštěstí nemá zásadní vliv na některé důležité vlastnosti FT, které uvádíme v dalším textu této kapitoly.

**Definice 2.1.** Pro komplexní funkci  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  a konstanty  $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definujeme její (přímou) Fourierovu transformaci  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}f = \hat{f}_{(A,B,k)}$  vztahem

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}f(\mathbf{t}) = A^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik(\mathbf{t},\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Podobně její opačná (inverzní) Fourierova transformace  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}f = \check{f}_{(A,B,k)}$  vztahem

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}f(\mathbf{t}) = B^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik(\mathbf{t},\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n,$$

kde pro  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  je  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ .

Funkce  $f$  se nazývá vzor FT a  $\hat{f}$  její obraz. Podobně pro opačnou FT se vzorem  $f$  je obraz  $\check{f}$ .  $\diamond$

Tyto definice tedy používají nějaké konstanty  $A$ ,  $B$  a  $k$ , které se v různých vědních oborech liší. Podstatné je, že splňují vztah

$$AB = \frac{|k|}{2\pi}, \quad (2.1)$$

který spolu s dalšími předpoklady o funkci  $f$  zaručuje platnost věty o inverzi 2.19 (viz dále).

Často užívané hodnoty jsou např. v klasické fyzice  $A = \frac{1}{2\pi}$ ,  $B = 1$  a  $k = -1$ , v systémovém inženýrství  $A = 1$ ,  $B = \frac{1}{2\pi}$ ,  $k = 1$  či v harmonické analýze  $A = B = 1$ ,  $k = 2\pi$ . Program MATHEMATICA používá automaticky ve výpočtech variantu  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $k = -1$ , jiným nastavením parametrů je však možné počítat s libovolnými konstantami splňujícími (2.1).

Značení  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}$  a  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}$  je poněkud těžkopádné, proto budeme často používat zjednodušenou formu zápisu  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$ . Případné zdůraznění použitých konstant budeme uvádět explicitně, a to použitím původního zápisu. Podobnou úmluvu zavedeme i pro  $\hat{f}_{(A,B,k)}$ ,  $\check{f}_{(A,B,k)}$  a  $\hat{f}$ ,  $\check{f}$ . Těchto kratších zápisů budeme používat hlavně při použití konstant (2.2), uvedených dále.

**Poznámka 2.2.** Podívejme se na konstantu  $k$  z definice 2.1. Změníme-li její znaménko, fakticky zaměníme (až na konstantu) přímou FT za opačnou a obráceně. Proto v některých úvahách stačí pracovat pouze s obecnou definicí 2.1 pro zobrazení  $\mathcal{F}$  a pro  $\mathcal{F}^{-1}$  je potom výsledek analogický.

Později budeme často pracovat s variantou

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2\pi}, \quad k = -1. \quad (2.2)$$

Definice 2.1 přejde v takovém případě na tvar

$$\mathcal{F}f(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{F}^{-1}f(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

**Poznámka 2.3.** Jednotlivé varianty zobrazení  $\mathcal{F}$  z definice 2.1 s různými konstantami  $A$ ,  $B$ ,  $k$  lze na sebe snadno převádět. Máme například

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}f(\mathbf{t}) = A^n \mathcal{F}_{(1, \frac{1}{2\pi}, -1)}f(-k\mathbf{t}), \quad \mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}f(\mathbf{t}) = (2\pi B)^n \mathcal{F}_{(1, \frac{1}{2\pi}, -1)}^{-1}f(-k\mathbf{t}).$$



Zobrazení  $\mathcal{F}$  je definováno pro funkce  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Následující příklad ukazuje, že obrazy nemusí ležet v  $L_1(\mathbb{R}^n)$ .

**Příklad 2.4.** Pro  $a > 0$  a funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & x \in (-a, a), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

je její FT s konstantami (2.2) tvaru

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} \frac{\sin at}{at} & t \neq 0, \\ 1 & t = 0. \end{cases}$$

Funkce  $\hat{f}(t)$  je klasický příklad funkce, pro niž Newtonův integrál  $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) dt$  konverguje neabsolutně, ale absolutně diverguje, tj.  $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)| dt = \infty$ . Pro naše další úvahy je důležité, že  $\hat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$ .

Funkce  $g(x) = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  nemá FT, protože  $g \notin L_1(\mathbb{R})$ .

Domluvíme se ještě na značení, které budeme používat. Správně bychom měli psát  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}(f) = \hat{f}_{(A,B,k)}$  a  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}(f) = \check{f}_{(A,B,k)}$ , ale protože  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$  jsou zobrazení mezi prostory funkcí, je běžné používat značení bez závorek, tj.  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}f = \hat{f}_{(A,B,k)}$  a  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}f = \check{f}_{(A,B,k)}$ , jako v definici 2.1.

Někdy se hodí zvláště vyznačit proměnnou ve vzoru. Aby nedošlo k nedorozumění, poznamenejme, že budeme v tomto případě používat označení

$$\mathcal{F}f(\mathbf{t}) = (\mathcal{F}(f(\mathbf{x}))) (\mathbf{t}) = \widehat{f(\mathbf{x})}(\mathbf{t}) = \hat{f}(\mathbf{t}).$$

## 2.2 Základní vlastnosti

Pro lepší seznámení s FT uvedeme nyní některé její základní vlastnosti. Několik z nich se nám bude hodit v dalších částech textu. Důkazy vět nejsou pro naši potřebu podstatné, a proto pouze poznamenejme, že je lze nalézt v publikaci [Kopáček].

**Lemma 2.5** (Vztahy mezi přímou a opačnou transformací). *Pro přímou a opačnou FT z definice 2.1 platí následující jednoduché vztahy*

$$\check{f}(\mathbf{t}) = \left(\frac{B}{A}\right)^n \hat{f}(-\mathbf{t}), \quad \bar{f}(\mathbf{t}) = \left(\frac{B}{A}\right)^n \hat{f}(\mathbf{t}), \quad \bar{\bar{f}}(\mathbf{t}) = \left(\frac{B}{A}\right)^n \check{f}(\mathbf{t}),$$

kde  $\bar{z}$  značí komplexně sdružené číslo k číslu  $z$ .

I následující lemma plyne přímo z definice, případně vhodnou substitucí.

**Lemma 2.6** (Vztahy k posunutí a násobení nezávisle proměnnou).

$$\widehat{f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}(\mathbf{t}) = e^{-ik(\mathbf{y}, \mathbf{t})} \widehat{f}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\widehat{f}(\mathbf{t} - \mathbf{s}) = e^{ik(\mathbf{x}, \mathbf{s})} \widehat{f(\mathbf{x})}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\widehat{f(a\mathbf{x})}(\mathbf{t}) = |a|^{-n} \widehat{f}(\mathbf{t}/a), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nyní zdefinujeme prostor  $C_B(\mathbb{R}^n)$ . Kvůli jednoduššímu zapamatování je vhodné uvést následující obecnější definici, vycházející ze známějšího prostoru spojitých funkcí  $C$ .

**Definice 2.7.** Pro otevřenou množinu  $G \subset \mathbb{R}^n$  a  $m \in \mathbb{N}_0$  značíme  $C^m(G)$  množinu spojitých funkcí na  $G$ , které mají na  $G$  spojitě derivace až do řádu  $m$  včetně. Označme  $C_B^m(G)$  množinu spojitých a omezených funkcí na  $G$ , které mají na  $G$  spojitě a omezené derivace až do řádu  $m$  včetně. Místo  $C_B^0(G)$  budeme pro stručnost psát  $C_B(G)$ . Množina funkcí  $C_B(\mathbb{R}^n)$  spolu s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce komplexním číslem tvoří vektorový prostor.  $\diamond$

Důležitost právě zavedeného prostoru  $C_B(\mathbb{R}^n)$  osvětluje následující věta.

**Věta 2.8.**  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{F}^{-1}$  jsou spojitá lineární zobrazení  $L_1(\mathbb{R}^n)$  do  $C_B(\mathbb{R}^n)$  a pro  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  platí

1.  $\lim_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\mathbf{t}) = \lim_{|\mathbf{t}| \rightarrow \infty} \check{f}(\mathbf{t}) = 0$ ,
2.  $\widehat{f}$  a  $\check{f}$  jsou stejnoměrně spojitě funkce na  $\mathbb{R}^n$ .

**Poznámka 2.9.** Jak se snadno nahlédne, například pomocí funkcí z příkladu 2.4, není ani jeden z prostorů  $L_1(\mathbb{R}^n)$  a  $C_B(\mathbb{R}^n)$  podprostorem druhého.

Následující definice je pouze technického charakteru, jejíž cílem bude usnadnění dalšího zápisu.

**Definice 2.10.** Multiindexem  $m = (m_1, \dots, m_n)$  budeme rozumět uspořádanou  $n$ -tici čísel  $m_j \in \mathbb{N}_0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Řádem multiindexu  $m$  nazveme číslo  $|m| = \sum_{j=1}^n m_j$ . Součtem multiindexů  $m$  a  $l$  rozumíme multiindex  $(m+l) = (m_1+l_1, \dots, m_n+l_n)$ .

Pro funkci  $f$  s  $n$  proměnnými označme

$$D^m f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} f(\mathbf{x}).$$

Pro  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a multiindex  $m$  se definuje  $\mathbf{x}^m = (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n})$ .  
 $\diamond$

Jak jsme se již zmínili, jednou z výhod FT je její použití při řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic. K tomu se hodí následující dvě věty.

**Věta 2.11** (Vztah k derivaci vzoru). *Nechť  $f \in C^d(\mathbb{R}^n)$  a  $D^m f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  a pro multiindex  $m$  platí  $|m| \leq d$ , potom*

$$\widehat{D^m f}(\mathbf{t}) = (ik\mathbf{t})^m \hat{f}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n,$$

kde  $k$  je konstanta z definice 2.1.

**Věta 2.12** (Vztah k derivaci obrazu). *Nechť  $\mathbf{x}^m f(\mathbf{x}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$  pro  $|m| \leq d$ . Potom  $\hat{f} \in C_B^d(\mathbb{R}^n)$  a platí*

$$D^m \hat{f}(\mathbf{t}) = (\mathcal{F}((-ik\mathbf{x})^m f(\mathbf{x}))) (\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n,$$

kde  $k$  je konstanta z definice 2.1.

Nyní připomeneme obecnou definici konvoluce dvou funkcí. Tento pojem patří mezi základní v teorii pravděpodobnosti.

**Definice 2.13.** Nechť  $f$  a  $g$  jsou dvě obecně komplexní funkce na  $\mathbb{R}^n$ . Jejich konvolucí  $h = f * g$  rozumíme funkci definovanou jako

$$h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (2.3)$$

Je-li  $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$  i  $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$  potom jejich konvoluce  $h(\mathbf{x})$  existuje pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .  
 $\diamond$

**Poznámka 2.14.** Jsou-li  $f$  i  $g$  z předchozí definice funkce jedné reálné proměnné, které jsou nulové na intervalu  $(-\infty, 0)$ , potom pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  platí, že  $g(y) = 0$ ,  $y < 0$  a  $f(x - y) = 0$ ,  $x < y$ . Rovnice (2.3) tak přejde na

$$h(x) = \int_0^x f(x - y)g(y)dy, \quad x > 0.$$

Konvoluce  $f * g$  tedy bude rovna nule na  $(-\infty, 0)$ , stejně jako  $f$  i  $g$ .

Operaci konvoluce vzorů FT odpovídá operace násobení obrazů FT. Tato velmi důležitá vlastnost FT, kterou budeme často používat, je popsána v další větě. FT se proto, vedle diferenciálních rovnic, hodí k řešení rovnic konvolučních.

**Věta 2.15** (FT konvoluce). *Nechť  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Potom platí*

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}(f * g) = A^{-n} \mathcal{F}_{(A,B,k)}(f) \cdot \mathcal{F}_{(A,B,k)}(g),$$

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}(f * g) = B^{-n} \mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}(g).$$

*Speciálně pro náš případ  $A = 1$ ,  $B = \frac{1}{2\pi}$ ,  $k = -1$  z (2.2) je*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g), \quad \mathcal{F}^{-1}(f * g) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g).$$

Z předešlých tvrzení víme, že nelze jednoduše charakterizovat množinu Fourierových obrazů funkcí z  $L_1(\mathbb{R}^n)$  a naopak mnohé rozumné funkce (např. nenulová konstantní funkce, viz věta 2.8) nejsou Fourierovým obrazem žádné funkce z  $L_1(\mathbb{R}^n)$ . V následující definici zavedeme prostor  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n) \cap C_B(\mathbb{R}^n)$ , který  $\mathcal{F}$  zobrazuje prostě na  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  a má na něm inverzní  $\mathcal{F}^{-1}$ .

**Definice 2.16.** Pro nekonečně spojitě diferencovatelnou funkci  $f$  a dva multiindexy  $l$  a  $m$  definujme normu jako

$$\|f\|_{l,m} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\mathbf{x}^l D^m f(\mathbf{x})|.$$

Dále označme  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  jako množinu všech nekonečně spojitě diferencovatelných funkcí  $f$ , takových, že pro každé dva multiindexy  $l$  a  $m$  platí  $\|f\|_{l,m} < \infty$ . Spolu s operacemi sčítání funkcí a násobení funkce komplexním číslem tvoří  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  vektorový prostor.  $\diamond$

**Příklad 2.17.** Je-li  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  pro  $x \in \mathbb{R}$ , potom  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Použijeme-li konstanty (2.2), dostaneme  $\hat{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , a tedy i  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Prostor  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  je invariantní vůči operaci násobení. Tato vlastnost se nám ještě bude hodit, a proto ji zapíšeme ve tvaru jednoduchého, leč užitečného lemma.

**Lemma 2.18.** Jsou-li  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  potom i  $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Důležitost prostoru  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  vyplyne v následující větě.

**Věta 2.19** (O inverzi). *Fourierova transformace i opačná Fourierova transformace zobrazují prostě  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  na  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  a jsou navzájem k sobě inverzní, neboli*

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}(\mathcal{F}_{(A,B,k)}f) = \mathcal{F}_{(A,B,k)}(\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}f) = f, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Existuje i mírné zobecnění věty o inverzi. Stačí předpokládat integrovatelnost obrazů, aby opačná FT měla smysl.

**Věta 2.20.** *Nechť  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  a také  $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Potom také platí*

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}(\mathcal{F}_{(A,B,k)}f) = \mathcal{F}_{(A,B,k)}(\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}f) = f.$$

Z věty o inverzi a z věty o transformaci konvoluce 2.15 plyne další tvrzení. Poznamenejme, že na rozdíl od věty 2.15 je potřeba pracovat s funkcemi z prostoru  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , protože díky lemmatu 2.18 je FT dobře definovaná.

**Věta 2.21** (FT součinu). *Pro funkce  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  platí*

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}(fg) = B^n(\mathcal{F}_{(A,B,k)}f * \mathcal{F}_{(A,B,k)}g),$$

$$\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}(fg) = A^n(\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}f * \mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}g).$$

*Speciálně pro případ  $A = 1$ ,  $B = \frac{1}{2\pi}$ ,  $k = -1$  z (2.2) je*

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{f} * \hat{g}), \quad \mathcal{F}^{-1}(fg) = \check{f} * \check{g}.$$

## 2.3 Další vlastnosti

Tato část má spíše doplňující charakter. Informace, které zde uvedeme, nebudeme v dalších kapitolách potřebovat. Slouží ke zlepšení celkového pohledu na FT.

V souvislosti s teoretickou FT se někdy uvádějí tzv. Sinová FT a Cosinová FT. Ukážeme zde některé jejich vztahy s FT. Pracovat budeme pro jednoduchost v jednorozměrném případě, ve více dimenzích je situace analogická. Budeme používat obecnou variantu s konstantami  $A, B, k$ , ale s užitím zjednodušeného zápisu  $\mathcal{F}f = \mathcal{F}_{(A,B,k)}f$ .

**Definice 2.22.** Pro komplexní funkci  $f \in L_1(\mathbb{R})$  a konstanty  $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definujeme její *Cosinovou Fourierovu transformaci* vztahem

$$\mathcal{F}_{Cos}f(t) = 2A \int_0^\infty \cos(kxt) f(x) dx$$

a *Sinovou Fourierovu transformaci* vztahem

$$\mathcal{F}_{Sin}f(t) = 2A \int_0^\infty \sin(kxt) f(x) dx.$$

◇

Uvědomme si nyní následující lemma, plynoucí z linearitě integrálu a Eulerovy identity  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ .

**Lemma 2.23.** Pro sudou funkci  $\psi \in L_1(\mathbb{R})$  a pro lichou  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$  platí

$$\mathcal{F}\psi(t) = \mathcal{F}_{Cos}\psi(t), \quad \mathcal{F}\varphi(t) = -i\mathcal{F}_{Sin}\varphi(t).$$

Pro sudou integrovatelnou funkci tedy FT splývá s Cosinovou FT, pro liché funkce je situace podobná. Víme-li dále, že libovolnou funkci  $f \in L_1(\mathbb{R})$  můžeme rozložit na součet sudé a liché pomocí

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = s_f(x) + l_f(x).$$

dostaneme výsledný vzájemný vztah

$$\operatorname{Re}[\mathcal{F}f(t)] + i\operatorname{Im}[\mathcal{F}f(t)] = \mathcal{F}f(t) = \mathcal{F}s_f(t) + \mathcal{F}l_f(t) = \mathcal{F}_{Cos}s_f(t) - i\mathcal{F}_{Sin}l_f(t).$$

který dává dohromady reálnou a imaginární část FT se Sinovou a Cosinovou FT.

# Kapitola 3

## Užití Fourierovy transformace v teorii neživotního pojištění

Ještě než přistoupíme k jednotlivým částem této kapitoly, domluvme se na následujícím značení. Často budeme nezápornou spojitou náhodnou veličinou, tj. veličinou  $X$  s hustotou  $f_X$ , pro kterou platí  $f_X = 0$ , pro  $x < 0$ , nazývat *riziko*. Tato terminologie je v teorii neživotního pojištění standardní obecně pro nezáporné veličiny.

### 3.1 Charakteristické a vytvořující funkce

**Definice a vztahy mezi nimi**

Začneme připomenutím definic vytvořujících funkcí náhodných vektoru a veličin.

**Definice 3.1.** Pro reálný náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  jsou definovány *sdíružená vytvořující funkce pravděpodobnosti*

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = P_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}t_1^{X_1} \cdots t_n^{X_n}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

*sdíružená momentová vytvořující funkce*

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n} = \mathbf{E}e^{(\mathbf{t}, \mathbf{X})}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

a *sdíružená charakteristická funkce*

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}e^{it_1 X_1 + \dots + it_n X_n} = \mathbf{E}e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{X})}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Pro zjednodušení zápisu budeme někdy používat mezinárodní značení, tj. vytvořující funkce pravděpodobností – pgf. od „probability generating function“, momentová vytvořující funkce – mgf. od „moment generating function“ a charakteristická funkce – ch.f. jako „characteristic function“. Pro náhodné veličiny se používá pgf., mgf. a ch.f. bez přívlastku „sdružená“.

Budeme se držet úmluvy, že pro daný náhodný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  uvažujeme pgf., mgf. a ch.f. pouze pro taková  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ , kde integrály z definičních vztahu (3.1), (3.2) a (3.3) jsou konečné. Platí například vzájemná jednoznačnost mezi náhodným vektorem a jeho sdruženou ch.f. Nabízí se tedy otázka, jak spolu pro pevný vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  souvisí jeho sdružené pgf., mgf. a ch.f. Tomuto problému nyní věnujeme několik odstavců. Jelikož později ukážeme vztah mezi FT hustoty náhodného vektoru a jeho sdruženou ch.f., budeme vědět, jak se FT promítne i na vytvořující funkce (pgf. a mgf).

Přímo z definičních rovností (3.1) a (3.2) plyne často užitečný vztah

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n} = \mathbf{E}e^{t_1 X_1} \dots e^{t_n X_n} = P_{X_1, \dots, X_n}(e^{t_1}, \dots, e^{t_n}). \quad (3.4)$$

Máme pgf., mgf. a ch.f. definovány jako funkce reálné proměnné. Přitom pgf. a mgf. jsou reálné funkce, proto se předchozí rovnost (3.4) odvodí bez problémů. Z definičního vyjádření (3.3) je vidět, že sdružená ch.f. může být pro některé náhodné vektory obecně funkcí komplexní. Chceme-li tedy nějakým způsobem dát rovnosti (3.1), (3.2) a (3.3) dohromady, je zapotřebí použít následujících úvah.

Pracujme s reálnou náhodnou veličinou  $X$ . Jestliže do mgf. dosadíme za proměnnou komplexní číslo  $a+bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , dostaneme díky Eulerově identitě  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$  a reálnosti  $X$ , komplexní funkci

$$M_X(a + bi) = \mathbf{E}e^{(a+bi)X} = \mathbf{E}e^{aX} e^{ibX} = \mathbf{E}e^{aX} (\cos bX + i \sin bX) = \mathbf{E}e^{aX} \cos bX + i \mathbf{E}e^{aX} \sin bX.$$

Tímto způsobem je možné definovat mgf. veličiny  $X$  i pro komplexní čísla. Podobnou úvahu lze aplikovat ve více dimenzích. S pomocí vztahu (3.4) dostaneme stejný výsledek také pro pgf. Toto „rozšíření“ definice pgf. a mgf. i pro komplexní proměnné se běžně používá např. ve [Wang]. Potom již můžeme psát



$$\begin{aligned}\phi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) &= \mathbf{E}e^{it_1 X_1 + \dots + it_n X_n} = \\ M_{X_1, \dots, X_n}(it_1, \dots, it_n) &= P_{X_1, \dots, X_n}(e^{it_1}, \dots, e^{it_n}),\end{aligned}$$

V jednorozměrném případě přejde definice 3.1 a předchozí vztahy na

$$P_X(t) = \mathbf{E}t^X, \quad M_X(t) = \mathbf{E}e^{tX}, \quad \phi_X(t) = \mathbf{E}e^{itX}$$

a

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}e^{itX} = M_X(it) = P_X(e^{it}). \quad (3.5)$$

Na závěr této části se podíváme na pgf., mgf. a ch.f. náhodného vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , který má nezávislé složky. V teorii pravděpodobnosti je nezávislost náhodných veličin často vítaná vlastnost, protože usnadňuje mnoho práce. V našem případě přejde sdružená pgf. na součin pgf. marginálních veličin. Odvození je triviální, nicméně výsledky explicitně uvedeme, neboť je budeme potřebovat v dalších částech. Dostaneme tak vyjádření

$$P_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}t_1^{X_1} \dots t_n^{X_n} = \mathbf{E}t_1^{X_1} \dots \mathbf{E}t_n^{X_n} = P_{X_1}(t_1) \dots P_{X_n}(t_n).$$

Podobně platí pro sdruženou mgf.

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n} = \mathbf{E}e^{t_1 X_1} \dots \mathbf{E}e^{t_n X_n} = M_{X_1}(t_1) \dots M_{X_n}(t_n)$$

a sdruženou ch.f.

$$\phi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}e^{it_1 X_1 + \dots + it_n X_n} = \mathbf{E}e^{it_1 X_1} \dots \mathbf{E}e^{it_n X_n} = \phi_{X_1}(t_1) \dots \phi_{X_n}(t_n).$$

## Složené rozdělení

Nyní si připomeneme jeden ze základních pojmů pojistné matematiky, tzv. složené rozdělení, a protože se zabýváme vytvářejícími funkcemi, vyjádříme pro veličiny se složeným rozdělením její mgf., resp. ch.f. Závěry z této krátké části využijeme později, a to při agregaci rizik.

**Definice 3.2.** Řekneme, že náhodná veličina  $S$  má *složené rozdělení*, jestliže pro ni platí

$$S = \sum_{k=1}^N X_k, \quad (3.6)$$

kde  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  jsou vzájemně nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny a  $N$  je diskrétní náhodná veličina, nabývající hodnot  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , nezávislá na  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ .  $\diamond$

Momentová vytvořující funkce  $M_S$  veličiny  $S$  se složeným rozdělením se dá výhodně vyjádřit pomocí vytvořující funkce pravděpodobností  $P_N$  načítací veličiny  $N$  a momentové vytvořující funkce  $M_X$  veličiny  $X$  jako

$$M_S(t) = \mathbb{E}e^{tS} = \mathbb{E}(\mathbb{E}e^{tS}|N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}e^{t(X_1+\dots+X_n)}P(N=n) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_X^n(t)P(N=n) = \mathbb{E}(M_X(t))^N = P_N(M_X(t)).$$

Odvození pro charakteristickou funkci  $\phi_S$  by bylo až na komplexní konstantu stejné nebo bychom mohli vycházet z již odvozené formule (3.5). Oběma způsoby nakonec obdržíme analogický vztah

$$\phi_S(t) = P_N(\phi_X(t)). \quad (3.7)$$

## Souvislost Fourierovy transformace a charakteristické funkce

Zatím jsme se věnovali na jedné straně popisu Fourierovy transformace funkce  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  a na straně druhé vztahy mezi sdruženými vytvořujícími funkcemi a sdruženou charakteristickou funkcí reálného náhodného vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . Nyní se zaměříme na souvislost mezi těmito pojmy. Využijeme přitom i doposud uvedených poznatků a výsledky použijeme dále.

Uvědomme si nejprve, že zobrazení  $\mathcal{F}$  z definice FT 2.1 transformuje funkce. My budeme chtít transformovat hustoty náhodných veličin, resp. vektorů, a proto se omezíme pouze na takové náhodné vektory, které mají sdruženou hustotu  $f_{\mathbf{X}} = f_{X_1, \dots, X_n}$ , tedy vektory, jejichž všechny složky jsou spojité náhodné veličiny  $X_k$  s hustotami  $f_{X_k}$ . Protože hustota je nezáporná funkce a platí  $\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}} = 1$ , je  $f_{\mathbf{X}} \in L_1(\mathbb{R}^n)$  a FT je definována bez potíží pro hustotu libovolného náhodného vektoru.

Na druhé straně sdružená ch.f. náhodného vektoru je definována pomocí střední hodnoty, bez rozlišování spojitosti či diskrétnosti složek. Kvůli výše uvedeným důvodům se však nebudeme zabývat nespojitými náhodnými veličinami, resp. vektory, což se nám bude hodit i dále, například při popisu agregace rizik.

Nyní také více vysvitne důvod pro použití konstant (2.2) z definice FT 2.1. Je totiž

$$\hat{f}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E} e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{X})} = \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$$

a v jednorozměrném případě

$$\hat{f}_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \mathbb{E} e^{itX} = \phi_X(t). \quad (3.8)$$

Vidíme tedy, že FT sdružené hustoty reálného náhodného vektoru je jeho sdružená charakteristická funkce. Použijeme-li jednorozměrného zápisu (3.8) pro spojitou veličinu  $X$ , dostaneme pomocí (3.5) souvislost mezi její FT hustoty, ch.f., mgf. a pgf.

$$\hat{f}_X(t) = \phi_X(t) = M_X(it) = P_X(e^{it}).$$

**Příklad 3.3.** Označíme-li  $Y$  náhodnou veličinu s hustotou ve tvaru funkce  $f$  z příkladu 2.4, potom má  $Y$  rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(-a, a)$ . Dále pro ch.f. platí  $\phi_Y(t) = \hat{f}(t)$ , kde  $\hat{f}$  je také z příkladu 2.4.

Nechť  $Z$  je náhodná veličina, která má normované normální rozdělení. Potom její hustota je tvaru funkce  $f$  z příkladu 2.17 a ch.f. má vyjádření

$$\phi_Z(t) = \hat{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Má-li  $X$  normální rozdělení s parametry  $\mu, \sigma^2$ , potom pomocí prvního a třetího tvrzení lemmatu 2.6 a funkce

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2)$$

lze odvodit její ch.f. na

$$\phi_X(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}. \quad (3.9)$$

Všimněme si také, že je  $f_X \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , a protože FT je bijekcí na  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , je také  $\phi_X \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

V aktuáriske literatuře se můžeme setkat i s jiným názvoslovím, např. v [Meyers] nebo [Wang] je způsobem  $\phi_X(t) = \mathbb{E} e^{itX}$  definována FT náhodné veličiny  $X$ , místo námi zavedené FT hustoty  $f_X$ . Výhodou této definice

oproti naší je, že se dá aplikovat i na diskrétní veličiny. Proto se také sdruženou ch.f. často rozumí FT náhodného vektoru bez rozlišování jeho spojitosti či nespojitosti.

Poznamenejme na tomto místě, že existuje i diskrétní varianta FT, která však konečnému vektoru čísel přiřazuje stejně dlouhý vektor čísel. Její hlavní význam je numerický a budeme se jí zabývat v praktické části této práce, konkrétně v oddíle 5.1.1.

O několik řádků výše jsme se omezili na spojitě náhodné veličiny, a to z toho důvodu, že teoreticky umíme fourierovsky transformovat pouze funkce. Pokud budeme FT potřebovat k agregaci rizik, tak se na spojitě veličiny omezovat nemusíme, ba naopak. Zmíněnou diskrétní variantu FT totiž aplikujeme na vektor čísel, který může představovat např. pravděpodobnostní rozdělení diskrétní náhodné veličiny.

Pokud bychom chtěli sladit terminologii podle [Meyers] či [Wang] a rozšířit tak naši souvislost mezi FT náhodné veličiny a její ch.f. na diskrétně rozložené náhodné veličiny, potřebovali bychom transformaci, která z vektoru, popisujícího pravděpodobnostní rozložení  $\{x_k, p_k\}_{k=1}^{\infty}$ , vytvoří spojitou funkci, neboť charakteristické funkce jsou stejnoměrně spojitě<sup>1</sup>. Tímto problémem se nebudeme zabývat. V dalších částech totiž budeme pracovat výhradně s charakteristickými funkcemi spojitých náhodných veličin.

## 3.2 Laplaceova transformace

V této podkapitole budeme pracovat pouze s funkcemi jedné proměnné. Z tohoto důvodu nejdříve připomeňme, že pro funkci  $f \in L_1(\mathbb{R})$  jedné reálné proměnné a pro konstanty (2.2) jsme zavedli její FT předpisem

$$\mathcal{F}f(t) = \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jednou z teoretických partií neživotního pojištění je tzv. teorie rizika. Teorie rizika se hlouběji zabývá nezápornými spojitými náhodnými veličinami, neboli riziky. Důležitým matematickým nástrojem v teorii rizika je Laplaceova transformace (dále LT), která však pracuje s funkcemi definovanými jen na intervalu  $[0, \infty)$ , speciálně s hustotami rizik. Uvedeme přesné definice

<sup>1</sup>Je známo, že ch.f. libovolné náhodné veličiny je stejnoměrně spojitá funkce. Za povšimnutí však stojí, že pro spojitě náhodné veličiny to plyne z věty 2.8 a výsledku této části (3.8).

a začneme prostorem  $L_1^+$ , který je konstruován tak, aby pro funkce z tohoto prostoru mělo smysl definovat LT.

**Definice 3.4.** Symbolem  $L_1^+$  označme množinu všech komplexních funkcí  $f \in L_1^{loc}(0, \infty)$ , ke kterým existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$  taková, že pro  $s \in \mathbb{C}$  platí  $\int_0^\infty |e^{-sx} f(x)| dx < \infty$ , pro  $\operatorname{Re}(s) > c$ . Symbolem  $c_f$  označme infimum množiny takových  $c$ . Množina  $L_1^+$  tvoří vektorový prostor vzhledem k operacím sčítání funkcí a násobení komplexním číslem.  $\diamond$

Pro FT je definiční obor  $L_1(\mathbb{R})$ . Právě zavedený prostor  $L_1^+$  bude definiční obor pro LT. Abychom mohli lépe porovnat FT a LT, omezíme se jenom na interval  $(0, \infty)$ . Z definice 3.4 je vidět, že například pro funkci  $g(x) = 1$ ,  $x \in (0, \infty)$  platí, že  $g \in L_1^+$ , ale  $g \notin L_1(0, \infty)$ . Naopak vezmeme libovolnou funkci  $f \in L_1(0, \infty)$ . Zřejmě je  $f \in L_1^+$ , neboť např. pro  $c \geq 0$  a  $s \in \mathbb{C}$ ,  $s = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  platí

$$\int_0^\infty |e^{-sx} f(x)| dx = \int_0^\infty |e^{-ax} e^{-ibx} f(x)| dx \leq \int_0^\infty e^{-ax} |f(x)| dx < \infty, \quad a > c. \quad (3.10)$$

**Poznámka 3.5.** Pro  $c < 0$  nemusí již první integrál z (3.10) konvergovat pro nějaké  $a \in (c, 0)$ . Tím jsme ukázali, že pro obecnou funkci  $f \in L_1(0, \infty)$  může  $c_f$  nabývat nejvýše hodnoty 0. Dále si všimněme, že pro  $c = a = 0$  integrál konverguje pro všechna  $b \in \mathbb{R}$ , tedy na imaginární ose komplexní roviny.

Dohromady máme, že  $L_1(0, \infty) \subsetneq L_1^+$  a LT tedy na intervalu  $(0, \infty)$  pracuje s „větším“ množstvím funkcí než FT. Poznamenejme, že v teorii rizika se pracuje s integrovatelnými funkcemi, speciálně s hustotami rizik, takže bychom si vystačili i s  $L_1(0, \infty)$ . Prostor  $L_1^+$  potřebujeme k následující definici v obecné formě.

**Definice 3.6.** Pro funkci  $f \in L_1^+$  definujeme její *Laplaceovu transformaci*  $\mathcal{L}f$  předpisem

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \quad \operatorname{Re}(s) > c_f.$$

$\diamond$

**Poznámka 3.7.** Používají se i jiné varianty LT, odpovídající různým variantám FT, podle použitých konstant. Transformace z definice 3.6 odpovídá případu  $A = k = 1$ ,  $B = \frac{1}{2\pi}$ .

Zdůrazněme, že pro funkci reálné proměnné  $f$  byl její Fourierův obraz  $\hat{f} = \mathcal{F}f$  také funkcí reálné proměnné, kdežto její Laplaceův obraz  $\mathcal{L}f$  je funkcí komplexní proměnné.

Obor konvergence funkce  $\mathcal{L}f$  je potom dán konstantou  $c_f$ , příslušející funkci  $f$ . Obecně pro funkci  $f \in L_1^+$  Laplaceův integrál  $\mathcal{L}f(s)$  konverguje pro  $s \in \mathbb{C}$ ,  $Re(s) > c_f$  a diverguje pro  $Re(s) < c_f$ . O několik řádků výše jsme v poznámce 3.5 ukázali, že pro  $f \in L_1(0, \infty)$  konverguje  $\mathcal{L}f$  alespoň na polorovině  $s \in \mathbb{C}$ ,  $Re(s) \geq 0$ .

Cílem této práce je osvětlit možné aplikace FT v neživotním pojištění. Důležitou částí této podkapitoly je tudíž následující věta, která dává dohromady FT a LT. V jejím tvrzení uvedeme i jednoduché odvození, které odpovídá verzím FT s konstantami (2.2) a LT s konstantami podle poznámky 3.7. Uvědomme si ještě, že kvůli FT je potřeba dodefinovat funkce nulou na intervalu  $(-\infty, 0)$ .

**Věta 3.8** (Vztah FT a LT). *Je-li  $f \in L_1^+$ , dodefinovaná nulou na  $(-\infty, 0)$ , pak pro  $Re(s) > c_f$  platí*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Re(s)x} e^{-iIm(s)x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-Im(s)x)} e^{-Re(s)x} f(x) dx = (\mathcal{F}(e^{-Re(s)x} f(x)))(-Im(s)). \end{aligned}$$

Pro reálnou náhodnou veličinu  $X$  jsme ukázali, že FT její hustoty  $f_X$  je (až na použité konstanty FT) její charakteristickou funkcí  $\phi_X$ . Také jsme ukázali další souvislosti s vytvářejícími funkcemi pgf. a mgf. v rovnosti (3.5).

Pro riziko  $X$  platí také podobný jednoduchý vztah mezi LT hustoty  $f_X$  a momentovou vytvářející funkcí  $M_X$

$$\mathcal{L}f_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx = \mathbf{E}e^{-sX} = M_X(-s), \quad Re(s) > c_{f_X}.$$

Takže pro rizika se dá rozšířit (3.5) na

$$\mathcal{F}f_X(t) = \phi_X(t) = M_X(it) = P_X(e^{it}) = \mathcal{L}f_X(-it), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zdůrazněme, že předchozí vztah platí pro  $t \in \mathbb{R}$  a  $\mathcal{L}f_X(-it)$  je konečné číslo, jak jsme se již zmínili.

Jelikož obraz LT je definován i pro komplexní čísla, bylo by pro rozšíření definice mgf. rizik na komplexní rovinu možné použít i předchozí rovnost. Pro reálné náhodné veličiny by pak připadlo v úvahu použít dvoustrannou LT, o které se zmíníme o několik řádků dále.

V kapitole o FT jsme bez důkazu uvedli některé její charakteristické znaky. Jelikož platí věta 3.8, je možné většinu vět pro verzi LT odvodit jako důsledek vět o FT.

Pro úplnost části o LT se zmíníme o méně známější tzv. dvoustranné LT. Motivací jejího vzniku je fakt, že její definice není omezena pouze na kladná čísla vzorové funkce, což umožní snadnější převody s FT. Zobrazení označíme symbolem  $\mathcal{B}$  od „Bilateral LT“. Definuje se předpisem

$$\mathcal{B}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Mezi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{L}$  pak existuje převodní vztah

$$\mathcal{B}f(s) = (\mathcal{L}(f(x)))(s) + (\mathcal{L}(f(-x)))(-s).$$

Také se můžeme setkat s další modifikací, která přináší při některých operacích úsporu zápisu

$$\mathcal{B}f(s) = s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Její použití je na individuálním zvážení autora, podle toho, kolik práce můžeme ušetřit

Dvoustranné LT nebudeme v dalších částech potřebovat.

## Kapitola 4

# Agregace spojitých náhodných veličin

Tato kapitola je nejdůležitější v teoretické části o užití FT v neživotním pojištění. Využijeme zde značnou část doposud uvedených poznatku. Bude na ni také navazovat praktická část. Ještě než se začneme zabývat agregací rizik, zaměříme se zpočátku na obecnější úlohu, a to agregaci spojitých reálných náhodných veličin. Rozbor této situace provedeme trochu důkladněji. V další podkapitole o agregaci rizik se díky tomu budeme lépe orientovat a zaměříme se v ní už jen na teoretický popis více praktických modelů.

### 4.1 Agregace spojitých reálných náhodných veličin

Uvažujme následující problém. Máme  $n$  spojitých reálných náhodných veličin  $X_1, \dots, X_n$  s hustotami  $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ . Agregací těchto veličin budeme rozumět nalezení rozdělení jejich součtu

$$S = \sum_{k=1}^n X_k,$$

tj. chceme znát hustotu  $f_S$ . Pro přehlednost tuto situaci rozdělíme do čtyř odstavců, rozdělených dle kombinace použití následujících dvou předpokladů.

1. Veličiny  $X_1, \dots, X_n$  jsou vzájemně nezávislé.



2. Pro jejich hustoty platí, že  $f_{X_k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Poznamenejme, že bychom mohli přidat další předpoklad například o stejné rozdělenosti  $X_1, \dots, X_n$ , který bychom mohli využít v některých speciálních případech. Rozepisování variant s tímto předpokladem je však pro jeho jednoduchost zbytečné.

## Dva předpoklady

Uvažujme tedy nyní obě výše uvedená zjednodušení. První předpoklad, který se týká nezávislosti, způsobí, že hustota  $f_S$  se dostane pomocí konvoluce

$$f_S = f_{X_1} * \dots * f_{X_n}.$$

Aplikací věty 2.15 potom pro ch.f. platí

$$\phi_S = \phi_{X_1} \cdots \phi_{X_n}, \quad (4.1)$$

neboli  $\hat{f}_S = \hat{f}_{X_1} \cdots \hat{f}_{X_n}$ .

Zdůrazněme zde ještě význam druhého předpokladu, tj. prostoru  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Protože máme  $f_{X_k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , platí také

$$\phi_{X_k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, n$$

a podle lemmatu 2.18 platí i pro součin  $\phi_S = \phi_{X_1} \cdots \phi_{X_n}$ , že  $\phi_S \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . V tomto případě opačná FT existuje bez problému, protože  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$  a FT i inverzní FT jsme v definici 2.1 zavedli pro integrovatelné funkce.

Dohromady za daných předpokladů tedy stačí provést FT na jednotlivé hustoty  $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ . Jako výsledek dostaneme  $\phi_{X_1}, \dots, \phi_{X_n}$ , jejich vynásobením potom máme  $\phi_S$  a aplikací opačné FT vznikne požadovaná hustota  $f_S$  součtu  $S$ .

**Příklad 4.1.** Podle příkladu 3.3 taková situace nastane například když  $X_1, \dots, X_n$  mají normální rozložení a lze je považovat za nezávislé.

## Jen první předpoklad

Nyní jsme v situaci nezávislosti  $X_1, \dots, X_n$ . Podle věty 2.8 víme, že pro charakteristické funkce platí

$$\phi_{X_k} \in C_B(\mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Rádi bychom je měli i v  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , abychom mohli použít inverzní FT jako v předchozím případě. Příklad 2.4 však ukazuje, že Fourierovy obrazy hustot obecně neleží ani v  $L_1(\mathbb{R})$ . I kdyby však platilo  $\phi_{X_k} \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , neznamená to, že součin  $\phi_S = \phi_{X_1} \cdots \phi_{X_n}$  je integrovatelnou funkcí.

Když ale budeme dodatečně předpokládat  $\phi_S \in L_1(\mathbb{R})$ , potom je situace zachráněna, protože podle věty 2.20 stačí následně provést opačnou FT na funkci  $\phi_S$  a jako výsledek dostaneme požadovanou hustotu  $f_S$ . Proto bude v dalších úvahách tento technický předpoklad o integrovatelnosti  $\phi_S$  často doplňován. Plně se jím nahradí absence druhého předpokladu.

Nyní ukážeme příklad, který ilustruje situaci, kdy druhý předpoklad neplatí, ale nemusíme dodatečně uvažovat  $\phi_S \in L_1(\mathbb{R})$ .

**Příklad 4.2.** Uvažujme dvě nezávislé veličiny  $X$  a  $Y$ , které mají rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(-a, a)$ . Postupujme podle označení funkcí  $f$  a  $\hat{f}$  v souladu s příkladem 2.4. Potom pro hustoty veličin  $X$  a  $Y$  platí  $f = f_X = f_Y$  a pro jejich ch.f.  $\phi_X = \phi_Y = \hat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$ . Nicméně pro  $\phi_S = \phi_X \cdot \phi_Y$  platí

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_S(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 at}{(at)^2} dt = \frac{\pi}{a} < \infty.$$

Můžeme tedy provést opačnou FT na  $\phi_S$  a výsledná hustota  $f_S$  má podle očekávání tzv. trojúhelníkové schéma, neboli

$$f_S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} + \frac{x}{4a^2} & x \in (-2a, 0), \\ \frac{1}{2a} - \frac{x}{4a^2} & x \in (0, 2a), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro hlubší vztah mezi integrovatelností  $\phi_S$  a hustotou  $f_S$  je v této části zajímavé uvést následující větu, kterou i s důkazem lze nalézt ve skriptech [Lachout].

**Věta 4.3.** *Když má reálná náhodná veličina  $S$  lebesgueovskými integrovatelnou charakteristickou funkci, potom má spojitě rozdělení se spojitou omezenou hustotou.*

uz 2.20

Na závěr této části uveďme, že postup při agregaci je stejný jako v předchozím případě, jestliže platí  $\phi_S \in L_1(\mathbb{R})$ . Pokud tomu tak není, poznamenejme, že existuje i obecnější verze výpočtu rozdělení náhodné veličiny z její ch.f. Lze ji též nalézt ve skriptech [Lachout], ale pro naši další potřebu není podstatná.

## Jen druhý předpoklad

V tomto případě naopak nezávislost postrádáme. Máme k dispozici pouze  $f_{X_k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Vzhledem k tomu, že nyní mají  $X_1, \dots, X_n$  nějakou korelační strukturu, rozšíříme druhý předpoklad na sdružené rozdělení. Máme tedy vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  a o jeho sdružené hustotě předpokládáme  $f_{\mathbf{X}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Opět chceme najít hustotu  $f_S$ , pro součet  $S$ . Bez nezávislosti však nelze k výpočtu  $\phi_S$  použít předchozích úvah se součinem charakteristických funkcí marginálních veličin jako v (4.1).

K určení  $\phi_S$  využijeme následující rovnost a poznamenejme, že při nezávislosti bychom dostali přesně to, co jsme použili v předchozích případech

$$\phi_{X_1, \dots, X_n}(t, \dots, t) = \mathbf{E}e^{itX_1 + \dots + itX_n} = \mathbf{E}e^{it(X_1 + \dots + X_n)} = \phi_S(t). \quad (4.2)$$

Při agregaci postupujeme v tomto případě následovně. Vezmeme sdruženou hustotu  $f_{\mathbf{X}}$ , provedeme na ni FT a dostaneme sdruženou ch.f.  $\phi_{\mathbf{X}}$ . Pomocí (4.2) najdeme  $\phi_S$  a jsme v situaci, kdy stačí aplikovat opačnou FT na  $\phi_S$ , neboť je  $\phi_S \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , díky tomu, že je  $\phi_{\mathbf{X}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

## Žádný předpoklad

Nyní se jedná o nejobecnější verzi. Tento problém už vlastně známe z předchozích případů, jen je musíme dát dohromady. Když jsme neměli nezávislost, tak jsme pracovali se sdruženým rozdělením. Na druhé straně, bez „hezkých“ funkcí bylo potřeba doplnit integrovatelnost  $\phi_S$ .

Pro agregaci  $X_1, \dots, X_n$  pracujeme se sdruženou ch.f.  $\phi_{X_1, \dots, X_n}$ , definujeme  $\phi_S(t) = \phi_{X_1, \dots, X_n}(t, \dots, t)$  jako v (4.2). Dále budeme předpokládat  $\phi_S \in L_1(\mathbb{R})$ . Aplikací opačné FT dostaneme požadovanou hustotu  $f_S$ , pro součet  $S$ .

Námi použité dva teoretické předpoklady z předchozích případů se hodí ke zjednodušení práce, případně ke zlepšení teoretického popisu agregace náhodných veličin. Pokud jsme použili oba dva předpoklady, tak jsme agregování vyřešili nejelegantněji. V praxi však zdaleka předpoklady nemusí být splněny. Těžko si také lze představit, že by někdo prakticky sledoval funkce z prostoru  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Avšak sledovat závislost či nezávislost může být značně důležité. Nicméně z pozorování jednotlivých veličin, obecně nelze snadno určit jejich sdružené rozdělení. Situaci bez předpokladů částečně vyřešíme v praktické části této práce.

Než postoupíme ke speciálním případům agregace rizik, podíváme se obecněji na nezáporné veličiny. Vzhledem k předchozímu rozboru situací by se nám hodilo, kdyby nějaká širší třída rizik popisujících výše škod měla hustotu v prostoru  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Podle definice 2.16 bychom k tomu nejprve potřebovali spojitost hustot na celé množině  $\mathbb{R}$ . Tu bohužel nemáme ani u tak základního rozdělení výší škod, jakým je exponenciální.

Pro exponenciální veličinu  $X$  s hustotou  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$  je její ch.f. tvaru

$$\phi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

V souladu s větou 4.3 musí vyjít

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_X(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + t^2}} dt = \infty.$$

Situace je v tomto případě analogická příkladu 4.2.

Obecně však u nezáporných veličin oproti reálným nedojde k žádnému zjednodušení práce při jejich agregaci.

**Poznámka 4.4.** Při agregaci náhodných veličin  $X_1, \dots, X_n$  používáme při FT konstanty (2.2). Tím dostaneme ch.f. jednotlivých veličin. Pokud se nám s jejich pomocí podaří najít ch.f. součtu  $S$ , která je integrovatelná, aplikujeme na ni opačnou FT s konstantami (2.2) a máme výslednou hustotu  $f_S$ .

Co se však stane, když bychom pracovali s jinými hodnotami  $A, B, k$  splňující (2.1), speciálně s jinými konstantami  $A, B$ . V takovém případě zůstane součin  $A \cdot B$  stejný. V platnosti zůstává také věta 2.15. Postup agregace bude stejný, jen nebudeme pracovat přímo s charakteristickými funkcemi veličin  $X_1, \dots, X_n$  (případně sdruženou ch.f.  $\phi_{\mathbf{X}}$ ), protože neplatí (3.8), ale s funkcemi, které se od ch.f. liší multiplikační konstantou (podle volby  $A, B$ ). Definováním funkce  $\phi_S$  pomocí (4.1) nebo (4.2) se tato multiplikační konstanta  $n$ -krát „přenes“ na  $\phi_S$ . Následnou aplikací inverzní FT se stejnými  $A, B, k$  se však „odstraní“ jen jednou. Může se tak stát, že výslednou hustotu  $f_S$  musíme ještě následně upravit, v tomto případě přenásobením konstantou  $A^{1-n}$ , abychom dostali hustotu  $f_S$ , která opravdu odpovídá součtu  $S$ .

Pokud použijeme jinak i konstantu  $k$ , bude situace ještě složitější. Proto je důležitá volba podle (2.2).

## 4.2 Agregace rizik

V předchozí podkapitole jsme ukázali, jakým způsobem může vypadat teoretický popis agregace spojitých náhodných veličin. Při agregaci rizik bychom mohli zacházet podobně či ještě detailněji, např. zahrnutím veličin se složeným rozdělením. Postupné kombinování možností by vycházelo z teoretického rozboru závislém na daných předpokladech. Místo podrobnějšího zkoumání se více zaměříme jen na tři teoretické modely a při jejich popisu už stručně použijeme výsledky minulých částí. Uvedeme také možné rozšíření do více dimenzí. Na poznatky z této kapitoly navážeme v praktické části práce. K výběru dále uvedených modelů uvedeme následující motivaci.

Koncept Solventnost II zavádí pro pojišťovny výpočet solvenčního kapitálového požadavku (SCR) pomocí tzv. standardního modelu. Kalkulace SCR podle standardního modelu je však univerzální pro všechny pojišťovny v EU. Jinými slovy řečeno, různě velké pojišťovny s různým pojistným kmenem či jiným způsobem zajištění by měly provádět výpočet stejně. Snadno si představíme rozdílnost velké francouzské pojišťovny s malou českou pojišťovnou. Standardní model nemusí být vhodný právě pro menší pojišťovny, například kvůli nedostatku dat pro vyplnění. Proto se plánuje, že vedle standardního modelu by pojišťovny mohly používat vlastní, tzv. interní modely. Ty by měly mít vůči pojišťovnám individuální přístup, a lépe tak vystihovat jejich rizikový profil.

K výpočtu SCR pro neživotní pojišťovny pomocí interních modelů je vhodné znát celkové riziko  $S$ , kterému je pojišťovna vystavena. K tomu se může hodit úloha agregace rizik, jestliže jednotlivá rizika modelují riziko určitého pojistného odvětví. V rámci jednoho odvětví se celkové riziko může modelovat buď pomocí agregace menších skupin homogenních rizik, nebo s použitím kolektivního či individuálního modelu rizika.

Existuje mnoho způsobů, jak prakticky aproximovat výpočet složeného rozdělení v kolektivním modelu rizika nebo řešit agregaci rizik. Zmínka o použití Fourierových metod pro jejich aproximativní výpočet v interních modelech pojišťoven je dokonce v [IMP], a to s odkazem na relativně nízkou časovou náročnost, kterou probereme v praktické části. Teoretickým základem Fourierových metod se zabýváme nyní. Postoupíme tedy dále popisem konkrétních případů.

### 4.2.1 Individuální model rizika

Individuální model rizika předpokládá  $n$  smluv v pojistném kmeni.  $k$ -té smlouvě přísluší riziko  $X_k$ . Veličiny  $X_1, \dots, X_n$  předpokládáme nezávislé. Celkový úhrn škod je tak popsán veličinou

$$S = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Již víme, že její hustotu  $f_S$  najdeme aplikací inverzní FT na její ch.f.  $\phi_S$ , která má tvar součinu (4.1), tedy

$$\phi_S = \phi_{X_1} \cdots \phi_{X_n}.$$

Musí však být splněno, že  $\phi_S$  je integrovatelná funkce.

### 4.2.2 Kolektivní model rizika

Kolektivní model rizika používá k modelování úhrnu škod veličinu se složeným rozdělením (3.6)

$$S = \sum_{k=1}^N X_k.$$

V neživotním pojištění se za  $X_k$  uvažují nezáporné veličiny, tj. rizika. Ty představují výše jednotlivých škod v dostatečně homogenním pojistném kmeni, proto je považujeme za stejně rozdělené. Načítací veličina  $N$  potom udává počet nastalých škod. Dohromady má náhodný součet  $S$  význam celkové výše škod na daném homogenním pojistném kmeni.

Aplikací inverzní FT určíme rozdělení  $S$  za pomoci vzorce pro ch.f. (3.7)

$$\phi_S(t) = P_N(\phi_X(t)),$$

jestliže platí  $\phi_S \in L_1(\mathbb{R})$ .

### 4.2.3 Agregace veličin se složeným rozdělením

Dostáváme se do situace, která je poměrně zajímavější, a to jak z teoretického, tak i praktického hlediska. Jestliže pojišťovna v rámci jednoho odvětví má  $n$  homogenních skupin pojistek a výše škod v  $k$ -té skupině modeluje pomocí kolektivního modelu rizika s veličinou  $S_k$  se složeným

rozdělením, potom k určení celkového úhrnu škod v odvětví potřebuje agregovat veličiny  $S_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Pro přehlednost situaci probereme jen pro  $n = 2$ , pro vyšší  $n$  můžeme postupovat analogicky. Označme

$$S_1 = \sum_{m=1}^M X_m, \quad S_2 = \sum_{n=1}^N Y_n$$

a pomocí ch.f. hledejme rozdělení součtu

$$S = S_1 + S_2 = X_1 + \dots + X_M + Y_1 + \dots + Y_N.$$

Situaci rozdělíme do dvou částí, podle závislosti  $S_1$  a  $S_2$ .

### $S_1$ a $S_2$ jsou nezávislé

Tady postupujeme jako v (4.1), takže pomocí (3.7) máme

$$\phi_S(t) = \phi_{S_1}(t) \cdot \phi_{S_2}(t) = P_M(\phi_X(t)) \cdot P_N(\phi_Y(t))$$

a k určení hustoty  $f_S$  už potřebujeme jen integrovatelnost  $\phi_S$ .

### $S_1$ a $S_2$ nejsou nezávislé

Pojem závislosti  $S_1$  a  $S_2$  není příliš zřejmý. Je potřeba si uvědomit, že zde vystupují veličiny  $X, Y, M$  a  $N$ . Závislost mezi  $S_1$  a  $S_2$  tak může být určena různými kombinacemi závislostí mezi dvojicemi  $X, M$  a  $Y, N$ .

Existuje hezký příklad, jak teoreticky vyjádřit  $\phi_S$  v případě, kdy jediná závislost mezi  $S_1$  a  $S_2$  je v načítacích veličinách  $M$  a  $N$ . Podle definice ch.f. spočítáme

$$\begin{aligned} \phi_S(t) &= \mathbf{E}e^{itS} = \mathbf{E}(\mathbf{E}e^{itS} | M, N) = \mathbf{E}(\mathbf{E}e^{it(X_1 + \dots + X_M + Y_1 + \dots + Y_N)} | M, N) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}e^{it(X_1 + \dots + X_m + Y_1 + \dots + Y_n)} P(M = m, N = n) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_X(t))^m (\phi_Y(t))^n P(M = m, N = n) = \\ &= \mathbf{E}(\phi_X(t))^M (\phi_Y(t))^N = P_{M,N}(\phi_X(t), \phi_Y(t)). \end{aligned}$$

Obecně bychom pro práci se závislými  $S_1$  a  $S_2$  potřebovali znát jejich sdružené rozdělení a  $\phi_S$  určit s použitím (4.2). Je vhodné zduraznit, že znalost takového sdruženého rozdělení je v praxi téměř nemožná. Je však možné odhadovat závislost náhodných veličin  $S_1$  a  $S_2$  ze starých pozorování pomocí empirických vzorců pro korelaci či kovarianci. V takovém případě nemusíme přesně znát závislost mezi dvojicemi  $X, M$  a  $Y, N$ . Aproximaci určení  $\phi_S$  založenou na znalosti celkové kovariance mezi  $S_1$  a  $S_2$  si ukážeme v části 5.4.

#### 4.2.4 Přechod do více dimenzí

Na závěr teoretické části si ukážeme rozšíření kolektivního modelu rizika do dvou dimenzí. Začneme se složeným rozdělením podle (3.6) a přejdeme do tvaru, kde součet  $\mathbf{S}$  bude dvourozměrná náhodná veličina. Vyjádříme příslušnou charakteristickou funkci  $\phi_S$ , která bude v tomto případě funkcí dvou proměnných. Pokud z ní budeme chtít zjistit dvourozměrnou hustotu  $f_S$  pomocí inverzní FT, budeme muset předpokládat  $\phi_S \in L_1(\mathbb{R}^2)$ .

K přechodu do dvou rozměrů si ukážeme dvě možnosti.

#### Dvourozměrné výše škod

Tento model používá dvourozměrné výše škod  $(X, Y)$  a klasickou načítací veličinu  $N$ . Podobně jako v jednorozměrném případě předpokládáme posloupnost  $\{(X_k, Y_k)\}$  nezávislou a stejně rozdělenou a dále nezávislou s  $N$ . Veličina  $\mathbf{S}$  se složeným rozdělením má potom tvar

$$\mathbf{S} = (S_x, S_y) = (X_1, Y_1) + \dots + (X_n, Y_n).$$

Pro její ch.f. máme

$$\begin{aligned} \phi_S(s, t) &= \phi_{S_x, S_y}(s, t) = \mathbf{E}e^{isS_x + itS_y} = \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}e^{isS_x + itS_y} | N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}e^{is(X_1 + \dots + X_n) + it(Y_1 + \dots + Y_n)} P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}e^{isX_1 + itY_1 + \dots + isX_n + itY_n} P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{E}e^{isX + itY})^n P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_{X, Y}(s, t))^n P(N = n) = P_N(\phi_{X, Y}(s, t)). \end{aligned} \quad (4.3)$$



Použití tohoto modelu si můžeme představit při některých typech teorie zajištění. Výše plnění cedenta udává veličina  $X$  a výši plnění zajišťovny veličina  $Y$ . Mezi nimi však může existuje nějaká závislost, která je zohledněna ve sdružené ch.f.  $\phi_{X,Y}$ , resp. sdružené hustotě  $f_{X,Y}$ .

### Dvourozměrný počet škod

Nyní uvažujeme dvourozměrnou načítací veličinu  $(M, N)$ . K ní předpokládejme dvě nezávislé a stejně rozdělené sady výší škod  $\{X_k\}$  a  $\{Y_k\}$ , které jsou nezávislé mezi sebou i na  $(M, N)$ . Veličinu  $\mathbf{S}$  si představíme ve tvaru

$$\mathbf{S} = (S_x, S_y) = (X_1 + \dots + X_M, Y_1 + \dots + Y_N).$$

Opět přímým výpočtem odvodíme tvar sdružené charakteristické funkce  $\phi_{\mathbf{S}}$  jako

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{S}}(s, t) &= \phi_{S_x, S_y}(s, t) = \mathbf{E}e^{isS_x + itS_y} = \mathbf{E}(\mathbf{E}e^{isS_x + itS_y} | M, N) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}e^{is(X_1 + \dots + X_m) + it(Y_1 + \dots + Y_n)} P(M = m, N = n) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_X(s))^m (\phi_Y(t))^n P(M = m, N = n) = P_{M,N}(\phi_X(s), \phi_Y(t)). \end{aligned}$$

## Kapitola 5

# Numerická Fourierova transformace

V teoretické části jsme zavedli Fourierovu transformaci  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}$  jako zobrazení mezi prostory funkcí z  $L_1(\mathbb{R}^n)$  do  $C_B(\mathbb{R}^n)$ . Podobně jsme zavedli opačnou FT  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}$ . Jestliže jsme chtěli aplikovat na obraz  $\hat{f}$  opačnou FT, abychom dostali vzor  $f$ , dostali jsme se do problému s integrovatelností obrazu. Prostor  $C_B(\mathbb{R}^n)$  totiž není podprostorem  $L_1(\mathbb{R}^n)$ , což je definiční obor pro FT i opačnou FT. Také jsme zavedli prostor  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , na němž jsou  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}$  a  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}$  navzájem inverzní.

V kapitole 4 o agregaci spojitých náhodných veličin jsme se zmínili o tom, že z praktického hlediska nemá prostor  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  v neživotném pojištění valné uplatnění, protože obsahuje „málo“ užitečných funkcí. Často jsme tak museli předpokládat alespoň integrovatelnost Fourierových obrazů, aby transformace, a tedy i agregace rizik měla smysl.

V této kapitole představíme základní metodu numerického výpočtu FT. Vzhledem k poznámce 2.2 lze tento postup použít i při počítání opačné FT. Zmíněná metoda pak nachází značné uplatnění při praktických výpočtech v interních modelech pojišťoven. Teoretické výsledky z předchozí kapitoly, na které můžeme tuto metodu aplikovat, tím nabývají větší významnosti.

Zdůrazněme již zde, že nám odpadne řada problémů, které jsme v teoretické části museli ošetřit dodáním předpokladů. Jedná se například o integrovatelnost funkcí, jež jsou vstupem do FT. Dále v podkapitole 5.4 ukážeme, jak se vypořádat s agregací závislých rizik.

## 5.1 Diskrétní Fourierova transformace

Nejčastěji se k výpočtu FT používá tzv. diskrétní FT (DFT). V definici 2.1 jsme obecně zavedli FT jako zobrazení, které integrovatelné komplexní funkci  $n$  proměnných přiřadí jinou komplexní funkci  $n$  proměnných. Jednoduše z ní potom vyplynul případ, který odpovídá hodnotě  $n = 1$ , tedy funkcím jedné proměnné. Použili jsme také obecný tvar s čísly  $A, B, k$  a domluvili se, že budeme používat případ (2.2).

V této podkapitole představíme DFT, ale nejdříve její jednorozměrnou variantu a potom se podíváme na rozšíření do více dimenzí. Budeme tedy postupovat opačně než v teoretické části. Důvodem je hlavně značně složitější zápis vícerozměrných variant, navíc nás dále bude zajímat zejména jednorozměrná, případně dvourozměrná metoda.

### 5.1.1 Jednorozměrný případ

Podstata jednorozměrné DFT spočívá v tom, že transformuje  $N$ -tici komplexních čísel (vzorů) na jinou  $N$ -tici komplexních čísel (obrazů). Protože číslo  $N$  je konečné, budou obrazy existovat pro libovolný vstupní  $N$ -rozměrný vektor. Tímto odpadá teoretický problém s integrovatelností funkce jedné proměnné, která vstupuje do jednorozměrné FT (případně inverzní FT).

Zobrazení  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}$  a  $\mathcal{F}_{(A,B,k)}^{-1}$  byla závislá i na konstantách  $A, B, k$ . Stejně tomu bude nyní.

**Definice 5.1.** Pro posloupnost bodů  $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$  definujeme její *diskrétní Fourierovu transformaci*  $\{\hat{a}_n\}_{n=0}^{N-1}$  vztahem

$$\hat{a}_n = A \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{-ikmn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

a *opačnou (inverzní) diskrétní Fourierovu transformaci*  $\{\check{a}_n\}_{n=0}^{N-1}$

$$\check{a}_n = B \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{ikmn}, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

kde  $A, B, k$  jsou opět nějaké nenulové konstanty, které splňují (2.1).  $\diamond$

Často užívané hodnoty jsou např.  $A = B = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ,  $k = \frac{2\pi}{N}$  nebo dále  $A = 1$ ,  $B = \frac{1}{N}$ ,  $k = -\frac{2\pi}{N}$  či  $A = \frac{1}{N}$ ,  $B = 1$ ,  $k = \frac{2\pi}{N}$ . Výpočetní program

MATHEMATICA používá automaticky variantu  $A = B = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ,  $k = -\frac{2\pi}{N}$ , lze však nastavit parametry na ostatní právě uvedené možnosti.

My budeme pracovat s variantou

$$A = 1, B = \frac{1}{N}, k = -\frac{2\pi}{N}, \quad (5.1)$$

jako je použito např. ve [Wang] nebo [Mildenhall]. Vzorce z definice DFT 5.1 potom mají tvar

$$\begin{aligned} \hat{a}_n &= \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{\frac{2\pi i}{N} mn}, \quad n = 0, \dots, N-1, \\ \check{a}_n &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{-\frac{2\pi i}{N} mn}, \quad n = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Podíváme-li se na používané možnosti výběru čísel  $A, B$  a  $k$  při FT a DFT, zjistíme, že u DFT se ve vzorcích vždy objevuje  $k = \frac{2\pi}{N}$  nebo  $k = -\frac{2\pi}{N}$ . To souvisí s tím, že DFT využívá faktu, že pro rovnici  $z^N = 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$  jsou řešení tvaru  $e^{\frac{2\pi i}{N} m}$ ,  $m = 0, \dots, N-1$ .

Připomeňme, že pokud budeme DFT používat při agregaci rizik, pak podle poznámky 4.4 výsledek závisí na zvolené variantě. Očekáváme tedy, že by bylo vhodné pracovat s konstantami, které jsou analogické s konstantami (2.2) používanými v teoretické části. Porovnáme-li například hodnoty  $A, B$  a  $k$ , které používá program MATHEMATICA na výpočet FT a DFT, zjistíme, že číslům (2.2) u FT odpovídají opravdu (5.1) u DFT.

Z definice 5.1 plyne, že na DFT se dá nahlížet jako na maticové násobení. Protože jsme se domluvili pracovat u DFT s verzí danou konstantami (5.1), uvedeme si příslušné matice v této variantě. Z tohoto zápisu lépe vynikne podstata definičních vzorců.

Označme  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$  a definujme *Fourierovu matici*  $\mathbf{F}$  o  $N$  řádcích a  $N$  sloupcích jako

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Je-li  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{N-1})^T$  sloupcový vektor, pak pro obraz DFT platí  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{F}\mathbf{a}$ .

Podobně lze definovat *inverzní Fourierovu matici*  $\mathbf{F}^{-1}$  jako

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

kde potom je  $\mathbf{a} = \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{a}}$ . Z uvedených vztahů i z podstaty FT samozřejmě plyne, že  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{F}^{-1}$  jsou navzájem inverzní matice.

### 5.1.2 Vícerozměrný případ

Ukážeme si zejména dvourozměrný případ. Zobecňování do třech a více dimenzí postupuje analogicky.

Základní představou jednorozměrných FT a DFT je, že pracují s funkcí jedné proměnné, resp. s vektorem čísel. Dvourozměrná metoda FT a DFT transformuje funkci dvou proměnných, resp. matici čísel. Poznamenejme, že i vícerozměrná DFT má různé tvary podle  $A, B$  a  $k$ . Následující definice odpovídá případu s konstantami (5.1).

**Definice 5.2.** Pro komplexní čísla, která můžeme napsat do matice o  $N_1$  řádcích a  $N_2$  sloupcích jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,N_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_1-1,0} & \cdots & a_{N_1-1,N_2-1} \end{pmatrix},$$

zapišeme dvourozměrnou DFT a inverzní dvourozměrnou DFT jako čísla, která analogicky označíme

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{0,0} & \cdots & \hat{a}_{0,N_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{N_1-1,0} & \cdots & \hat{a}_{N_1-1,N_2-1} \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \check{a}_{0,0} & \cdots & \check{a}_{0,N_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{a}_{N_1-1,0} & \cdots & \check{a}_{N_1-1,N_2-1} \end{pmatrix}.$$

K jejich určení použijeme následující vzorce

$$\hat{a}_{n_1,n_2} = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} e^{\frac{2\pi i}{N_1} m_1 n_1} \left( \sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} m_2 n_2} a_{m_1,m_2} \right), \quad (5.3)$$

$$\tilde{a}_{n_1, n_2} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} m_1 n_1} \left( \sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} m_2 n_2} a_{m_1, m_2} \right).$$

Snadno se nahlédne, jak bude vypadat přechod do více dimenzí. Další případy však nebudeme potřebovat.

## 5.2 Rychlá Fourierova transformace

V této podkapitole prozkoumáme operační náročnost DFT a představíme efektivní výpočetní algoritmus, který hraje klíčovou úlohu při praktickém počítání DFT. Zaměříme se na jeho verzi pro jednorozměrnou DFT z části 5.1.1. K výpočtu dvourozměrné DFT stačí tento algoritmus použít opakovaně. Podle (5.3) představuje totiž výraz v závorce vzorec pro jednorozměrnou DFT počítaný pro jednu složku vstupních čísel. Celkový výpočet potom může probíhat v obou složkách nezávisle na sobě. Pro verzi  $n$ -rozměrné DFT je postup analogický.

Vezměme  $N$ -rozměrný vektor  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{N-1})^T$ . Z definičního vztahu nebo nahlédnutím přes maticové násobení zjistíme, že k výpočtu  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{F}\mathbf{a}$  potřebujeme  $N^2$  komplexních součinů a  $N^2$  komplexních součtů. Tak velké množství operací výrazně snižuje možnost počítání DFT v reálném čase. Toto platí hlavně pro velká  $N$ .

Existuje však efektivní algoritmus výpočtu DFT, nazývaný rychlá Fourierova transformace (FFT - Fast Fourier Transform), který vyžaduje řádově jen  $N \log_2(N)$  komplexních součinů a  $N \log_2(N)$  komplexních součtů. Většinou je FFT označením množiny všech algoritmů pro efektivní výpočet obrazu DFT, tohoto názvosloví se budeme držet i my.

Jsou to právě FFT algoritmy, které umožňují prakticky využívat DFT. Díky nim budeme tudíž moci použít některé důležité teoretické výsledky z kapitoly 4. Není bez zajímavosti se blíže seznámit s charakterem FFT algoritmů. Uvědomme si také, že v teoretické části platila poznámka 2.2. Stejně tomu je i u výpočtu DFT, a proto uvedenou FFT metodu můžeme aplikovat na přímou i inverzní transformaci.

Základním kamenem FFT algoritmů je vlastnost, která pro sudou délku vstupního vektoru umožňuje převést výpočet na dva vektory poloviční délky. Jeden se skládá z lichých členů a druhý ze sudých. Tato vlastnost se někdy označuje jako Danielsonovo-Lanczosovo lemma. Uvedeme si jej i s krátkým odvozením.

**Lemma 5.3** (Danielson-Lanczos). *Mějme vektor  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{N-1})$ . Pro sudé  $N$  a při použití konstant (5.1) v definici 5.1 platí pro výpočet DFT  $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{N-1})$  následující rovnost*

$$\begin{aligned}\hat{a}_n &= \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{\frac{2\pi i}{N} mn} = \sum_{m=0}^{N/2-1} a_{2m} e^{\frac{2\pi i}{N} (2m)n} + \sum_{m=0}^{N/2-1} a_{2m+1} e^{\frac{2\pi i}{N} (2m+1)n} = \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} a_m^S e^{\frac{2\pi i}{N/2} mn} + e^{\frac{2\pi i}{N} n} \sum_{m=0}^{N/2-1} a_m^L e^{\frac{2\pi i}{N/2} mn},\end{aligned}$$

kde používáme označení sudých a lichých členů jako

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) = (a_0^S, a_0^L, a_1^S, a_1^L, \dots, a_{N/2-1}^S, a_{N/2-1}^L).$$

Podstatu použití předchozího lemma si zjednodušeně vysvětlíme. Je-li číslo  $N$  dělitelné čtyřmi, potom  $N/2$  je sudé číslo, a lemma tedy můžeme použít opakovaně na dva vektory o poloviční délce  $N/2$ . Je-li  $N$  mocnina čísla 2, potom po  $\log_2(N)$  děleních stačí provést DFT na  $N$  jednorozměrných vektorů, tedy čísel. Obrazem transformace vektoru délky 1 je podle vzorce (5.2) stejné číslo. Z nich se potom postupně skládají hodnoty výstupního vektoru délky  $N$ . Proto se FFT algoritmy nejčastěji používají pro posloupnosti délky  $N = 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Jsou neefektivnější. Uvažujeme-li zápis DFT pomocí Fourierovy matice  $\mathbf{F}$  typu  $N \times N$ , potom pro sudé  $N$  ji lze vyjádřit jako matici, v níž se vyskytují dvě Fourierovy matice typu  $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ .

Tímto jsme stručně nastínili, proč mají FFT algoritmy tak časté použití. Nicméně při běžných výpočtech se o tuto filozofii nemusíme zajímat, neboť díky mohutnému rozvoji výpočetní techniky jsou dnes FFT algoritmy zabudovanou součástí mnoha výpočetních programů.

V praxi se používají hlavně  $N = 256, 512, 1024, 2048, 4096$ . Při těchto hodnotách již přináší výpočet DFT pomocí FFT výraznou úsporu početního výkonu. Záleží však na konkrétní úloze, některé obory uvádějí délku  $N$  při použití DFT řádově až v desetitisících. K tomu je potřeba také kvalitní programové vybavení. Například program MICROSOFT EXCEL umí pracovat pouze se vstupními vektory délky  $N = 2, 4, 8, \dots, 4096$  a zvládne pouze jednorozměrnou DFT.

Zavedli jsme DFT jako transformaci vektoru komplexních čísel. Symbolem FFT rozumíme efektivní algoritmy pro výpočet DFT. Můžeme se setkat i s jinou terminologií, např. v publikaci [Wang] se pod pojmem FFT skrývá

námi zavedená DFT i FFT. Autor uvádí toto zjednodušení názvosloví s odkazem na aplikaci programu MICROSOFT EXCEL, kde se pod pojmem FFT rozumí obecnější varianta DFT.

### 5.3 Zdiskrétnění

V teoretické části jsme použili jednorozměrnou FT jako zobrazení, které funkci jedné proměnné přiřadí jinou funkci jedné proměnné. Numerický výpočet však pracuje s definicí 5.1, která funguje jako zobrazení, jež vektoru přiřadí vektor stejné délky. Abychom tedy mohli využívat dosavadní výsledky z části o agregaci rizik, potřebujeme vytvořit z funkce (vzoru FT) vektor (vzor DFT). Takový postup je hlavním obsahem této podkapitoly. Domluvme se, že jej budeme nazývat *zdiskrétnění*.

Již jsme se zmínili o tom, že agregace rizik nebo určení rozdělení v kolektivním modelu rizika hraje významnou úlohu při interních výpočtech pojišťovny. Jedna z efektivních metod jejich řešení vede přes FT, speciálně přes FFT z předchozí podkapitoly. Vstupem do FT jsou potom hustoty používaných rizik, proto se při zdiskrétnění zaměříme jen na nezáporné funkce.

Označme  $X$  riziko,  $f_X$  jeho hustotu a  $F_X$  distribuční funkci. V aktuáрске literatuře se používá několik různých možností zdiskrétnění, my si jej zadefinujeme způsobem

$$\begin{aligned} a_k &= F_X((k+1)h) - F_X(kh), \quad k = 0, \dots, N-2, \\ a_{N-1} &= 1 - F_X((N-1)h), \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde  $h$  představuje jakýsi „krok zdiskrétnění“. Jeho volba podstatně závisí na konkrétní úloze, kterou je potřeba vyřešit. Z konstrukce vektoru  $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$  plyne, že

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n = 1.$$

Pro danou hustotu  $f_X$  závisí její zdiskrétnění  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{N-1})$  na volbě parametrů délky  $N$  a kroku  $h$ . Výběr čísla  $N$  může být shora omezen například hodnotou 4096, nemáme-li k dispozici kvalitní výpočetní programy. Naopak s příliš malým  $N$  hrozí, že vektor  $\mathbf{a}$  nebude dostatečně věrohodně kopírovat rozdělení rizika  $X$ . Z téhož důvodu volíme délku kroku  $h$  co nejmenší. Musí však být natolik velká, aby bylo dostatečné množství



čísel  $a_k$  pro velká  $k$  nulových nebo téměř nulových. Obecně lze říci, že volíme co největší  $N$  a nejmenší  $h$ , aby součin  $N \cdot h$  vyhovoval dané úloze o agregaci a abychom byli schopni danou úlohu numericky vyřešit. Co znamená spojení „vyhovovat úloze o agregaci“ se pokusíme osvětlit v následujících odstavcích na příkladě s diskretními veličinami. Pro spojitě veličiny bude platit stejná úvaha, jen bychom napřed použili zdiskrétnění.

Představme si, že máme dvě nezáporné diskretní náhodné veličiny  $M$  a  $N$ , které nabývají pouze hodnot  $1, \dots, m$  s kladnými pravděpodobnostmi  $p_1^M, p_2^M, \dots, p_m^M$ , resp.  $1, \dots, n$  s  $p_1^N, p_2^N, \dots, p_n^N$ . Uvažujme dále, že budeme chtít tyto veličiny agregovat, tj. nalézt rozdělení součtu  $S = M + N$ . Předpokládáme-li nejprve, že  $M$  a  $N$  jsou nezávislé, vidíme, že nejvyšší hodnota, kterou bude  $S$  nabývat s kladnou pravděpodobností je  $m + n$ .

Při aplikaci DFT na pravděpodobnostní rozdělení veličin  $M, N$  a následném použití inverzní DFT na rozdělení součtu  $S$  pracujeme stále s vektory stejné délky. Vzhledem k tomu, že rozdělení  $S$  je vektor délky  $m + n$ , musí být vstupní vektory odpovídající rozdělením  $M, N$  také délky  $m + n$ . Toho dosáhneme doplněním dostatečného množství nul v rozděleních  $M$  a  $N$  na místech  $m + 1, \dots, m + n$ , resp.  $n + 1, \dots, m + n$ .

Jestliže  $M$  a  $N$  jsou závislé takovým způsobem, že platí  $\text{Cov}(M, N) > 0$ , očekáváme, že  $S$  může s kladnou pravděpodobností nabývat hodnoty vyšší než  $m + n$ . V takových případech je nutné dobře odhadnout tuto „nejvyšší mez“ agregované veličiny  $S$ . Jinými slovy řečeno, je potřeba najít maximální hodnotu, kterou může  $S$  nabývat s významně kladnou pravděpodobností. Do DFT potom vstupují vektory doplněné nulami alespoň do této horní meze.

Když nedodáme dostatečné množství nul na konec vstupních vektorů, můžeme očekávat následující problém, který budeme ilustrovat na předchozím příkladě s agregací nezávislých diskretních veličin  $M$  a  $N$ . Zvolme délku vektorů DFT rovnu  $m + n - k$ , pro přirozené  $k > 0$ ,  $m + n - k > \max(m, n)$ . Potom výsledný vektor  $(p_1^S, p_2^S, \dots, p_{m+n-k}^S)$ , který popisuje rozdělení veličiny  $S$ , bude mít také délku  $m + n - k$ . Použijeme-li postup agregace správně, musí vyjít  $p_0^S + p_1^S + \dots + p_{m+n-k}^S = 1$ . To ale znamená, že kladné hodnoty  $p_{m+n-k+1}^S, \dots, p_{m+n}^S$  se zobrazily někam do  $(p_0^S, p_1^S, \dots, p_{m+n-k}^S)$ . Celkově tedy může dojít ke značnému zkreslení výsledku agregace.

## 5.4 Závislost

Při agregaci náhodných veličin  $X_1, \dots, X_n$  jsme v teoretické části pracovali s předpokladem jejich nezávislosti. Jestliže  $X_k$  představuje pro pojišťovnu

výši škod  $k$ -tého pojistného odvětví, potom z praktického hlediska jsou  $X_1, \dots, X_n$  korelované. Stačí si představit, že při nadměrném množství např. autonehod bude více úrazů apod. Celkovou výši rizika  $S = \sum_{k=1}^n X_k$ , kterému je pojišťovna vystavena lze potom teoreticky i prakticky určit, pokud známe sdružené rozdělení vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . Toto jsme dodatečně předpokládali při teoretickém popisu agregace spojitých náhodných veličin. Pojišťovny však nemusí mít k dispozici dostatek pozorování, aby mohli toto sdružené rozložení určit. Proto nemohou zjistit rozdělení  $S$  pomocí (4.2).

V této části ukážeme dvě možnosti, jak tento problém odstranit. Místo znalosti sdruženého rozdělení vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  se omezíme na znalosti jednotlivých veličin  $X_1, \dots, X_n$  a jejich kovariančních koeficientů

$$v_{k,l} = \frac{\text{Cov}(X_k, X_l)}{\mathbf{E}X_k \mathbf{E}X_l}. \quad (5.5)$$

Matici těchto koeficientů budeme nazývat *matice kovariančních koeficientů* a značit

$$\mathbf{V}_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Je užitečné si uvědomit, že rovnici s kovariančním koeficientem (5.5) lze rozepsat pomocí koeficientu korelace  $\rho_{k,l}$  mezi veličinami  $X_k$  a  $X_l$  jako

$$v_{k,l} = \rho_{k,l} \frac{\sqrt{\text{Var}X_k} \sqrt{\text{Var}X_l}}{\mathbf{E}X_k \mathbf{E}X_l}.$$

K popsání závislosti mezi dvěmi náhodnými veličinami tak poslouží korelační koeficient stejně dobře jako kovarianční koeficient. Z důvodu snazšího zápisu (viz dále) budeme používat kovarianční koeficienty.

Tyto předpoklady již jsou prakticky realizovatelné, neboť výše škod v  $k$ -tém odvětví lze odhadnout pomocí dat z minulých škodních průběhů pojišťovny nebo celého pojistného trhu. Podobně je možné určit empirickou kovarianci mezi dvěmi odvětvími, a proto je možné odhadnout i matici kovariančních koeficientů.

Pokud známe rozdělení marginálních veličin  $X_1, \dots, X_n$  a jejich matici kovariančních koeficientů  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}}$ , potom k nim teoreticky může existovat nekonečně mnoho sdružených rozdělení vektoru  $\mathbf{X}$ . Nicméně nalezení jednoho konkrétního sdruženého rozdělení může být složité.

Nejprve si uvědomme, že i při neznalosti sdruženého rozdělení  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  můžeme pro součet  $S$  určit jeho střední hodnotu a pomocí matice  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}}$  i rozptyl. Platí totiž

$$ES = E(X_1 + \dots + X_n) = EX_1 + \dots + EX_n$$

a pro rozptyl

$$\text{Var}S = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}X_1 + \dots + \text{Var}X_n + 2 \sum_{k < l} v_{k,l} EX_k EX_l.$$

Již jsme se zmínili o tom, že najít přesně rozdělení veličiny  $S$  je teoreticky možné s pomocí sdružené ch.f. s použitím rovnice (4.2). Prakticky je za našich předpokladů možné veličinu  $S$  aproximovat veličinou  $Z$ , která má stejnou střední hodnotu a rozptyl jako  $S$ . Ukážeme si dvě možnosti, jak takovou veličinu  $Z$  hledat.

První možností aproximace rozdělení  $S$  rozdělením  $Z$  spočívá v zavedení nové veličiny  $Y$  tak, že platí

$$EY = 0, \quad \text{Var}Y = 2 \sum_{k < l} v_{k,l} EX_k EX_l. \quad (5.6)$$

Velichinu  $Z$  potom definujeme jako součet  $Z = X_1 + \dots + X_n + Y$ , přičemž veličiny  $X_1, \dots, X_n, Y$  považujeme za vzájemně nezávislé. Takto zavedená veličina  $Z$  má střední hodnotu i rozptyl stejnou jako veličina  $S$  a k nalezení jejího rozdělení bychom mohli aplikovat FT již známým způsobem podle (4.1), tj.  $\phi_Z = \phi_{X_1} \cdots \phi_{X_n} \phi_Y$ .

Za rozdělení  $Y$  se nabízí použít normální nebo například posunuté logaritmicko-normální. Je však důležité si uvědomit, že z (5.6) plyne, že

$$P(Y < 0) > 0. \quad (5.7)$$

V takovém případě si nejprve uvědomme, že zdiskrétnění jsme definovali pouze pro nezáporné veličiny, takže by byla potřeba dodatečných úprav. Podstatnější problém vyplývá v porovnání s poznámkou 2.14. Jde o to, že ani  $Z$  nemusí s pravděpodobností jedna vyjít jako nezáporná veličina, kdežto  $S$  je nezáporná. V takovém případě můžeme při výpočtu pomocí DFT očekávat následující nepřesnost. Část rozdělení  $Z$ , která by vyšla nezáporná se promítne někam do kladných hodnot tohoto rozdělení. Záleží také na volbě zdiskrétnění. Dále očekáváme, že tento způsob aproximace veličiny  $S$  veličinou  $Z$  bude přesnější s menší hodnotou  $\text{Var}Y$ , definovanou v (5.6).

Právě popsaný způsob je přiblížen v [Mildenhall]. Všimněme si, že se zde vůbec nepracuje se sdruženým rozdělením. Vycházeli jsme jen ze znalosti střední hodnoty a rozptylu veličiny  $S$ . Ještě jednodušší metody aproximace  $S$  by tedy mohli spočívat v tom, že za  $Z$  položíme nějaké rozdělení se dvěma parametry (např. logaritnicko-normální), které určíme pomocí předem daných  $ES = EZ$  a  $\text{Var}S = \text{Var}Z$ . Aproximace tohoto typu však mohou být příliš zjednodušující, protože neberou v úvahu více informací o celém rozdělení  $S$ .

Zajímavější metoda je převzata z [Wang]. Autor se zabývá problematikou zavedení sdruženého rozdělení vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  ze známých marginálních rozdělení a matice kovariančních koeficientů. Víme, že sdružená ch.f. náhodného vektoru určuje jednoznačně jeho rozdělení, proto by bylo dobré nějakou takovou ch.f. najít. Budeme pracovat s rovností definující sdruženou ch.f. jako

$$\phi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \phi_{X_1}(t_1) \cdots \phi_{X_n}(t_n) \left\{ 1 + \sum_{k < l} v_{k,l} [1 - \phi_{X_k}(t_k)] [1 - \phi_{X_l}(t_l)] \right\}. \quad \text{Wang}$$

Jestliže vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  má sdruženou ch.f. podle této rovnosti, potom  $v_{k,l}$  jsou kovarianční koeficienty z (5.5). Výraz ve složené závorce tak představuje složku, která zahrnuje korelační strukturu vektoru  $\mathbf{X}$ .

Již z teoretické části víme, že ze sdružené ch.f. vektoru  $\mathbf{X}$  dostaneme ch.f. součtu  $S = X_1 + \dots + X_n$  pomocí (4.2). V tomto duchu tedy můžeme provést přiblížení rozdělení  $S$  pomocí veličiny  $Z$ , kterou definujeme jako

$$\phi_Z(t) = \phi_{X_1}(t) \cdots \phi_{X_n}(t) \left\{ 1 + \sum_{k < l} v_{k,l} [1 - \phi_{X_k}(t)] [1 - \phi_{X_l}(t)] \right\}. \quad (5.8) \quad \checkmark$$

$Z$  má potom stejnou střední hodnotu i rozptyl jako  $S$ . Obsah složené závorky má stejný význam jako při předchozí metodě výraz  $\phi_Y$ . Jestliže veličina  $Z$  vyjde s pravděpodobností jedna nezáporná, můžeme takto aproximovat rozdělení součtu  $S$ .

Pro praktické účely stačí numericky spočítat rozdělení  $Z$ . Kvůli možným nepřesnostem by však bylo vhodné dodatečně vyšetřit, jak dobře je tato aproximace vhodná. U toho záleží mimo jiné na hodnotách kovariančních koeficientů a jejich odhadu.

## 5.5 Další metody

K výpočtům sdruženého rozdělení v kolektivním modelu rizika lze použít mnoho různých metod. V této práci se zabýváme verzí, která vede přes použití FT a je teoreticky popsána vzorcem (3.7). Nicméně k numerickému výpočtu rozdělení  $S$  nemusí být použita metoda DFT, kterou jsme popsali v části 5.1.1. V aktuáriské literatuře lze najít i několik dalších výpočetních metod, které používají jako teoretický základ vzorec (3.7). V této podkapitole si ukážeme jiný numerický způsob výpočtu, který je znám poměrně dlouho. Vznikal současně s rozvojem výpočetní techniky.

Tento způsob pracuje se spojitým rozdělením výší škod  $X$ , ale nepoužívá zdiskrétnění hustoty  $f_X$ . Nicméně kvůli zjednodušení výpočtů se použije aproximace funkce  $f_X$  na jinou, která na intervalech  $(a_k, a_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, n$  nabývá konstantních hodnot  $d_k$ . Je vhodné, aby integrál této aproximované hustoty byl roven jedné. Není-li tomu tak, můžeme ještě do bodu  $a_{n+1}$  soustředit zbývající pravděpodobnost  $p$  do požadované hodnoty 1. Distribuční funkce takto aproximované veličiny je po částech lineární a jediný bod nespojitosti má v bodě  $a_{n+1}$ . Její charakteristickou funkci potom snadno spočítáme

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}e^{itX} = \sum_{k=1}^n d_k \frac{e^{ita_{k+1}} - e^{ita_k}}{it} + pe^{ita_{n+1}}.$$

Funkci  $\phi_S$  dostaneme pomocí (3.7). K určení distribuční funkce  $F_S$  pomocí  $\phi_S$  se potom používá integrační formule

$$F_S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\phi_S(t)| \frac{\sin(xt - \arg \phi_S(t))}{t} dt, \quad (5.9)$$

kde  $\arg z$  značí argument komplexního čísla  $z$ .

Při počítání integrálu v (5.9) je zapotřebí opatrnosti u hodnot blízkých nule. Podrobněji je tento postup analyzován v článku [HM] (proto se také někdy nazývá podle autorů jako Heckman-Meyers metoda nebo krátce HM-metoda). Tento odkaz je již poněkud starší a zdánlivě neaktuální, což je samozřejmě také díky masívnímu rozvoji výpočetní techniky. V současnosti je však zajímavý v souvislosti s jeho rozšířením do dvou dimenzí. Konkrétně se jedná o aplikaci na model s dvourozměrnými výšemi škod, který jsme popsali v první části odstavce 4.2.4. Podobně jako v jednorozměrném případě představíme ve stručnosti tento přístup. Tentokrát budeme citovat článek [Homer] a na něj také odkážeme pro více podrobností.

Nyní uvažujeme dvourozměrný vektor  $(X, Y)$  se sdruženou hustotou  $f_{X,Y}$ , kterou budeme aproximovat podobným způsobem jako v jednorozměrném případě. Představme si proto funkci, která nabývá konstantních hodnot  $d_{k,l}$  na obdélnících  $(a_k, a_{k+1}) \times (b_l, b_{l+1})$ , pro  $k = 1, \dots, m$  a  $l = 1, \dots, n$ . Od této funkce požadujeme, aby její integrál na  $(0, \infty) \times (0, \infty)$  byl roven jedné. Je-li menší, můžeme použít podobných metod jako s bodem  $a_{n+1}$  v jednorozměrném případě a soustředit pravděpodobnosti do bodů nebo úseček. Tímto postupem se nebudeme zabývat, zápis by totiž byl poněkud složitější. Potom pro určení sdružené ch.f. použijeme podobný jednoduchý výpočet

$$\phi_{X,Y}(s, t) = \mathbf{E}e^{isX+itY} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n d_{k,l} \frac{e^{isa_{k+1}} - e^{isa_k}}{is} \frac{e^{itb_{l+1}} - e^{itb_l}}{it}.$$

Charakteristickou funkci  $\phi_{S_x, S_y}$  dostaneme pomocí (4.3) a z ní se počítá sdružená distribuční funkce  $F_{S_x, S_y}$  pomocí vztahu

$$F_{S_x, S_y}(x, y) = \frac{1}{2}(F_{S_x}(x) + F_{S_y}(y)) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi^2}I, \quad (5.10)$$

kde

$$I = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty (|\phi_{S_x, S_y}(s, t)| \cos(sx + ty - \arg(\phi_{S_x, S_y}(s, t))) - |\phi_{S_x, S_y}(s, -t)| \cos(sx - ty - \arg(\phi_{S_x, S_y}(s, -t)))) \frac{dsdt}{(is)(it)}.$$

Opět se při numerickém počítání tohoto integrálu musí postupovat s větší opatrností v okolí bodu  $(0, 0)$ . Poznamenejme, že tento způsob výpočtu je možný aplikovat i na případ s dvourozměrným počtem škod, který jsme popsali v druhé části odstavce 4.2.4.

# Kapitola 6

## Příklad a další komentáře

Nyní si ukážeme příklad, na němž budeme demonstrovat jednotlivé kroky, kterými jsme se doposud zabývali při popisu agregace. Budeme hledat rozdělení součtu tří korelovaných náhodných veličin se složeným rozdělením. Tento případ v sobě zahrnuje další jednodušší případy agregací.

Uvažujme tři náhodné veličiny se složeným rozdělením, které popisují kolektivní model rizika. Označme je  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a necht' pro ně platí

1. Veličina  $S_1$  má počet škod dán veličinou  $K$  s negativně binomickým rozdělením o parametrech  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  a výše škod veličinou  $X$  s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda = \frac{1}{50}$ .
2. Veličina  $S_2$  má počet škod dán veličinou  $L$  s negativně binomickým rozdělením s parametry  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 5$  a výše škod veličinou  $Y$  s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 1$ .
3. Veličina  $S_3$  má počet škod dán veličinou  $M$  s poissonovým rozdělením s parametrem  $\lambda = 10$  a výše škod veličinou  $Z$  s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 2$ .

Při popisu náhodné veličiny může někdy vzniknout nedorozumění, neboť její parametry mohou být různě definované. Pro výše uvedená rozdělení počtu škod budeme používat vyjádření pgf.

$$P_K(t) = P_L(t) = [1 - \beta(t - 1)]^{-\alpha},$$

$$P_M(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

a pro rozdělení výší škod hustoty tvaru

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$f_Y(x) = f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right]^2}, \quad x > 0.$$

Pro střední hodnoty v závislosti na použitých parametrech platí

$$\mathbf{EK} = \mathbf{EL} = \alpha \cdot \beta, \quad \mathbf{EM} = \lambda, \quad \mathbf{EX} = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{EY} = \mathbf{EZ} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Budeme předpokládat, že mezi veličinami  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$  je nějaká závislost, která je dána hodnotami kovariančních koeficientů

$$v_{1,2} = 0,2, \quad v_{2,3} = 0,1, \quad v_{1,3} = 0,25.$$

Nejdříve si rozmyslíme, jakou budeme používat délku vstupního vektoru DFT. V tomto příkladě použijeme hodnotu  $N = 4096$ , kterou je možné použít i v běžném výpočetním programu MICROSOFT EXCEL.

Dále spočítáme střední hodnotu celkového součtu  $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$\mathbf{ES} = \mathbf{EK} \cdot \mathbf{EX} + \mathbf{EL} \cdot \mathbf{EY} + \mathbf{EM} \cdot \mathbf{EZ} = 2 \cdot 3 \cdot 50 + 3 \cdot 5 \cdot e^{2,5} + 10 \cdot e^3 \doteq 683. \quad (6.1)$$

Nyní určíme délku kroku  $h$ , o níž jsme se zmínili v podkapitole 5.3. Když zvolíme  $h = 1$ , potom máme pro součin  $N \cdot h = 4096$ . V tomto okamžiku řešíme otázku, zda očekáváme hodnotu  $P(S > N \cdot h)$  dostatečně malou. Můžeme si pomoci například znalostí střední hodnoty veličiny  $S$ . Z rovnice (6.1) vidíme, že platí přibližně  $6 \cdot \mathbf{ES} = N \cdot h$ . My si zvolíme raději  $h = 1,5$ , abychom zvětšili interval, na kterém budeme hledat rozdělení  $S$ , na devítinásobek střední hodnoty  $S$ . Volba kroku  $h$  záleží v tuto chvíli na individuálním rozhodnutí.

Dále už je práce jednoduchá. Hustoty  $f_X, f_Y, f_Z$  zdiskrétníme způsobem (5.4) a dostaneme tak postupně vektory

$$\mathbf{a}^X = (a_0^X, \dots, a_{N-1}^X), \quad \mathbf{a}^Y = (a_0^Y, \dots, a_{N-1}^Y), \quad \mathbf{a}^Z = (a_0^Z, \dots, a_{N-1}^Z).$$

Na ně implementujeme FFT a dostaneme tak vektory

$$\hat{\mathbf{a}}^X = (\hat{a}_0^X, \dots, \hat{a}_{N-1}^X), \quad \hat{\mathbf{a}}^Y = (\hat{a}_0^Y, \dots, \hat{a}_{N-1}^Y), \quad \hat{\mathbf{a}}^Z = (\hat{a}_0^Z, \dots, \hat{a}_{N-1}^Z).$$



Podle rovnosti (3.7) určíme vektory, které odpovídají charakteristickým funkcím veličin  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$ . Postupným dosazením hodnot  $\hat{a}_0^X, \dots, \hat{a}_{N-1}^X$  do pgf. veličiny  $K$ , dostaneme

$$\hat{\mathbf{a}}^{S_1} = (\hat{a}_0^{S_1}, \dots, \hat{a}_{N-1}^{S_1}) = (P_K(\hat{a}_0^X), \dots, P_K(\hat{a}_{N-1}^X)).$$

Analogickým způsobem se určí vektory

$$\hat{\mathbf{a}}^{S_2} = (\hat{a}_0^{S_2}, \dots, \hat{a}_{N-1}^{S_2}), \quad \hat{\mathbf{a}}^{S_3} = (\hat{a}_0^{S_3}, \dots, \hat{a}_{N-1}^{S_3}).$$

V souladu s rovností (5.8) definujeme vektor  $\hat{\mathbf{a}}^S$ . Nejprve způsobem prvek po prvku spočítáme korelační složku  $\hat{\mathbf{a}}^{Korel}$  s pomocí následující rovnosti

$$\hat{\mathbf{a}}^{Korel} = 1 + 0,2(1 - \hat{\mathbf{a}}^{S_1})(1 - \hat{\mathbf{a}}^{S_2}) + 0,1(1 - \hat{\mathbf{a}}^{S_2})(1 - \hat{\mathbf{a}}^{S_3}) + 0,25(1 - \hat{\mathbf{a}}^{S_1})(1 - \hat{\mathbf{a}}^{S_3}).$$

Poté opět způsobem prvek po prvku dosadíme vše dohromady podle vyjádření

$$\hat{\mathbf{a}}^S = \hat{\mathbf{a}}^{S_1} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{S_2} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{S_3} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{Korel}.$$

Nyní už jen aplikujeme inverzní formu FFT na vektor  $\hat{\mathbf{a}}^S$  a dostaneme výsledek

$$\mathbf{a}^S = (a_0^S, \dots, a_{N-1}^S).$$

Vektor  $\mathbf{a}^S$  tedy určuje rozdělení agregované veličiny  $S$ . Pravdou je, že nemáme přímo funkci, která by odpovídala hustotě  $f_S$ , ale pouze její zdiskrétněnou verzi. To nám ale nijak nevadí, protože o rozdělení  $S$  víme prakticky vše. Můžeme určit například některé zajímavé kvantily, které jsou uvedeny v tabulce 6.1.

$\alpha$	$\alpha$ -kvantil
90	1236
95	1560
99	2382
99.5	2842

Tabulka 6.1: Výsledky kvantilů veličiny  $S$  při použití  $h = 1,5$

Z celého postupu vidíme, jak se projeví volba kroku  $h$ . S menším  $h$  dosáhneme toho, že vektor  $\mathbf{a}^S$  bude lépe kopírovat hustotu  $f_S$ . Na druhé straně se nám tím zmenší rozsah  $N \cdot h$ , a proto se více zkreslí informace

$\alpha$	$\alpha$ -kvantil
90	1242
95	1562
99	2326
99.5	2692

Tabulka 6.2: Výsledky kvantilů veličiny  $S$  při použití  $h = 1$

z konce rozdělení veličiny  $S$ . V tabulce 6.2 jsou uvedeny hodnoty kvantilu výsledného rozdělení  $S$ , jestliže jsme ve stejné úloze použili krok  $h = 1$ .

Dále očekáváme, že s větším  $N$  bude možné dosahovat lepších výsledků. Na druhé straně je potřeba vzít v úvahu, zda si při výpočtu můžeme dovolit adekvátní časovou a paměťovou náročnost.

Při výpočtech jsme použili program MATHEMATICA 5.2. Téměř všechny operace jsou založeny na základních početních úkonech, jejichž realizaci zvládne běžný uživatel tohoto programu. Výjimky tvoří několik příkazů, které si nyní ukážeme.

Jedná se o speciální příkaz `Fourier`, jehož aplikací se počítá DFT. V souladu s poznámkou 4.4 je důležité použít při diskrétní transformaci konstanty (5.1). Toho dosáhneme nastavením `FourierParameters`  $\rightarrow \{1, 1\}$ . Celkem tedy zadáme vektor `data` a jeho DFT s potřebnými konstantami dostaneme aplikací příkazu

$$\text{Fourier}[\text{data}, \text{FourierParameters} \rightarrow \{1, 1\}].$$

Pro inverzní transformaci používá MATHEMATICA 5.2 podobný příkaz `InverseFourier`. Potřebné parametry vložíme stejným způsobem jako u přímé transformace. Při agregaci jsme tedy použili při výpočtu inverzní DFT vektoru `data` příkaz

$$\text{InverseFourier}[\text{data}, \text{FourierParameters} \rightarrow \{1, 1\}].$$

V příkladě jsme pracovali s hodnotou  $N = 4096 = 2^{12}$ . Výpočet DFT není s použitím programu MATHEMATICA 5.2 časově náročný. Trvá jen zlomek sekundy, takže celá agregace proběhla prakticky velmi rychle. Pro ilustraci časové náročnosti uvádíme v tabulce 6.3 dobu výpočtu DFT pro různě dlouhé vektory  $(1, \dots, N)$ .

délka N	čas	délka N	čas	délka N	čas
$2^{20}$	0,440s	$2^{21}$	0,761s	$2^{22}$	1,183s
$2^{20} - 1$	3,595s	$2^{21} - 1$	6,780s	$2^{22} - 1$	15,302s

Tabulka 6.3: Časová náročnost DFT pro různé délky vstupního vektoru

Celkově můžeme zkonstatovat, že agregace rizik a hledání sdruženého rozdělení pomocí FT s aplikací FFT má před sebou dobrou budoucnost. S pomocí kvalitního výpočetního programu si můžeme dovolit počítat více těchto úloh se značnou přesností. Ta se samozřejmě zvětšuje s dalším rozvojem výpočetní techniky.

Porovnejme si nyní rozšíření HM-metody z konce předchozí kapitoly a DFT do více dimenzí. To znamená numerický výpočet sdruženého rozdělení, který je založen na rovnosti (4.3) zobecněný případně na tři či více dimenzí.

Výpočet dvourozměrné DFT jsme definovali v rovnosti (5.3). Další rozšíření ze dvou do třech dimenzí by probíhalo prakticky jen zopakováním postupu přechodu z jedné dimenze do dvou. I zdiskrétnění vícerozměrné hustoty není problém zobecnit analogicky. Problém je, že pokud bychom zopakovali výpočet sdruženého dvourozměrného rozdělení podle našeho příkladu, nemusíme ve výsledku dostat vždy reálná a nezáporná čísla, která popisují výsledné dvourozměrné pravděpodobnostní rozdělení.

Na druhé straně se zaměříme na HM-metodu. Přechod od výpočtu (5.9) k výpočtu (5.10) se zdá být trochu složitější. Některá zjednodušení výpočtu (5.10) jsou uvedena v přílohách v [Homer]. Lze očekávat, že už při zobecnění do třech dimenzí se dostaneme do značných složitostí.

Otázkou zůstává pouze časová a operační náročnost její realizace.

# Literatura

- [HM] Heckman, P.E., Meyers, G.G.: *The Calculation of Aggregate Loss Distributions from Claim Severity and Claim Count Distributions*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society LXX, 1983, 22-61.
- [Homer] Homer, D.L.: *Aggregating Bivariate Claim Severities With Numerical Fourier Inversion.*, Casualty Actuarial Society Winter Forum, 2006, 205-230.
- [IMP] International Actuarial Association: *Internal Model Practices for Insurer Risk Assessment and Capital Requirements*, Návrh směrnice, 30.ledna 2007.
- [Kopáček] Kopáček, J.: *Matematická analýzy pro fyziky (IV)*, Matfyzpress, Praha, 2001.
- [Lachout] Lachout, P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha, 2004.
- [Meyers] Meyers, G.G.: *Discussion of Shaun S. Wang's Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society LXXXV, 1999, 781-805.
- [Mildenhall] Mildenhall, S.J.: *Correlation and Aggregate Loss Distributions with an Emphasis on the Iman-Conover Method*, Casualty Actuarial Society Winter Forum, 2006, 103-203.
- [Wang] Wang, S.S.: *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms*, Casualty Actuarial Society, LXXXV, 1998, 848-939.