**Oponentský posudek disertační práce**
**Jakub Staněk**
**Deterministic and Stochastic Epidemic Models**

Práce se zabírá problematikou modelování průběhu infekční choroby v homogenní populaci.Je pouzit klasický Kermackův-McKendrickuv model (KM), který je postupne rozsiřován a zobecnován na slozitejší případy, zejména pak s ohledem na zapojení stochastické difúze do modelu

Práce je psaná přehledne a jde bez zbytecných průtahů k jádru problému. V první, kratší části, je shrnuto několik poznatků o existenci a vlastnostech řešení deterministického modelu. Oproti klasickému KM modelu je zde přidána závislost přenosu infekce na počtu již nakažených jedinců a také vakcinace, která hraje podstatnou roli v další části práce

Druhá část práce obsahuje hlavní výsledky výzkumu autora. Jedná se o formulaci KM modelu se stochastickou složkou. Nejprve jde o model s proměnnou velikostí populace, takzvaný model s migrací. Dále se uvažuje model s očkováním a hleda se optimální strategie očkování v závislosti na průběhu epidemie. Celý model je poté ještě zobecněn na případ více patogenů téže choroby a v závěru práce je představen velmi obecný model zahrnující všechny předchozí případy. Zde je zkoumána zejména existence řešení obecného stochastickéhé modelu epidemie a uvedeno několik příkladu.

Podstatným přínosem autora je studium stochastických diferenciálních rovnic s lokálně lipschitzovskými koeficienty, které mají omezený nosič a řešení je absorbováno. To má v oblasti modelování epidemií význam, nebot klesne-li počet nemocných (případně zdravých) na nulu, nemuže se choroba dále šířit a tento fakt je nutno zohlednit při konstrukci modelu. Difúzní člen je navíc modelován pomocí druhé odmocniny, není tedy lipschitzovský v nule a tento fakt je nutno v existenčních důkazech ošetřit. Toto považuji za hlavní přínos autora.

K práci mám několik připomínek. Na několika místech bych doporučil trochu důkladnejší rozbor situace. Volba modelu by také měla být lpe zdůvodněna. Dále bych uvítal větší množství ilustrací a zejména srovnání s nejakou známou epidemií, která v minulosti proběhla. Po stránce jazykové mi práce přijde napsaná velmi dobře, překlepů jsme našel minimum

Několik konkrétních připomínek a dotazů:

(1) K modelu s vakcinací (strany 8, 9). Proč je rychlost vakcinace vázána na počet „uzdravených"a ne na počet uzdravených a nemocných (ekvivalentně na počet zdravých). Proč rychlost vakcinace není nějak úměrná času, lze očekávat libovolně velkou rychlost vakcinace?
(2) Věta 2.3 tak, jak je vyslovena neplatí. Čtenář sice vytuší, že autor má na mysli pouze nezáporné koeficienty $\beta$ a $\theta$, ovšem to v předpokladech věty není. Věta dále obecně neplatí, pokud je uvažovaná funkce $\beta(z)$ nemonotónní, je také třeba předpokládat, že i funkce $\theta(z)$ je neklesající
(3) V příkladu 2.2 je předpokládáno, že $\theta(z)$ je lineární funkce a $\tau_v$, čas, kdy jsou všichni zbývající zdraví očkováni, není konečný. Lze fakt $\tau_v = \infty$ nějak vyvodit z koeficientů KM modelu?
(4) V tabulce 2.1 by se pro porovnání hodily i kombinace (100,0) a (300,0).
(5) Nerozumím významu hodnot $c_0 = 1.576$ a $c_1 = 0.838$ v prvním odstavci na straně 20.
(6) Ve vzorci (3.1.0.1) je chybně uvedena poslední řádka.
(7) Na straně 23 autor pracuje s pojmem „previsible path functional". Domnívám se, že nejde o zcela běžný pojem a jeho definice by zde měla být uvedena a vysvětlena. Na druhou stranu je otázka, zda při práci se spojitými koeficienty vůbec je používání tohoto pojmu nezbytné. Kromě věty 3.1 se dále v práci nevyskytuje.
(8) Ve větě 3.1 nemá zřejmě být *sub-norm*, ale *sup-norm*.
(9) Na straně 26 se vyskytují náhodné časy $\tau$ a $\tau_b$. Jedná se o markovské časy? Používání $\tau_b$ ve stochastickém integrálu na straně 26 dole vyžaduje jistou opatrnost.

(10) Je v modelu (3.2.0.7) zaručeno, že $X_t$ je nerostoucí proces a $Z_t$ je neklesající proces? Pokud ne, jakou máme interpretaci, je-li velikost populace konstantní (zde není uvažován model s migrací)?
(11) Ve větě 3.2 na straně 29 mi není jasné, zda $\tau_N$ je opravdu markovský čas. Jedná se o první výstup z uzavřené množiny, což obecně markovský čas není.
(12) Autor by na straně 30 mohl rozvést, v čem přesně spočívá problém s tím, že koeficienty stochastické diferenciální rovnice nejsou lipschitzovské v nule. Lze uvést nějaký příklad jak takové řešení vypadá a na co je nutné si dát pozor?
(13) Na straně 29 je zavedeno $\tau_N$. Zjevně nemůže nastat případ, kdy jedna z hodnot $X$, $Y$, $Z$ překročí $N$, aniž by předtím některá z nich byla záporná. Platí tedy $\tau_N = \inf\{t > 0 : \min(X_t, Y_t, Z_t) < 0\}$.
(14) Na obrázku 3.2 na straně 36 jsou uvedeny histogramy. Chybí však jejich popis.
(15) Na obrázku 3.3 vlevo je rozdíl středních hodnot řešení modelu (3.2.0.7) a (3.2.0.11). Neměl by rozdíl těchto středních hodnot být hladký v čase (viz obrázek 3.4)?
(16) Na straně 39 je uváděn příklad „zavření škol"jako příklad obecných protiepidemických opatření. V tomto případě lze očekávat téměř skokovité snížení hodnoty $\beta$. Jak to ovlivní studovaný model? Lze něco říci o existenci řešení i v tomto případě?
(17) Na straně 40 se domnívám, že ke konci epidemie dojde, pokud buď $X$ klesne na nulu, nebo *všechny* procesy $Y^i$ klesnou do nuly, nikoliv je *některé* (pátý řádek textu na straně 30).
(18) Předpokládá model (3.3.0.2), že se stejnou pravděpodobností bude ještě nenarozené dítě infikováno otcem, stejně jako matkou? Nebo se předpokládá, že oba rodiče jsou nakaženi?
(19) Jsou správně všechna znaménka v definicích $\sigma_{i,j}$ na straně 41 uprostřed?
(20) Ve vzorci (3.1.0.13) na straně 44 by velikost populace $N$ snad nemusela být pevná. Model (3.4.0.10) přeci obsahuje i migraci, narození a smrt jedince.
(21) V důkazu lemmatu 3.5 je třeba postupovat opatrně. Časy $s_n$, ani $t_n$ nemusejí být markovské, navíc závisí na trajektorii. Je nutno opatrně pracovat s uvedenými stochastickými integrály. Předpoklad $\lambda^0 < \infty$ je třeba učinit pro množinu nenulové míry.

Přes těchto několik výhrad se domnívám, že předložená práce je velmi povedená a obsahuje dostatek vlastních výsledků autora k tomu, aby mohla být uznána jako disertační práce na MFF UK. Doktorand prokázal, že je schopen samostatné tvořivé vědecké práce, je schopen napsat kvalitní matematickou práci a publikovat výsledky své práce v časopisech. Protože uchazeče znám jako studenta již mnoho let, vím, že o matematiku jeví velký zájem, který je podporen velkým talentem. Proto **doporučuji, aby na základě předložené disertace byl Jakubu Staňkovi udělen titul Ph.D.**

doc. RNDr. Daniel Hlubinka, PhD
11. srpna 2009