Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

NEEUKLIDOVSKÉ GEOMETRIE V HISTORII MATEMATIKY A JEJICH VYUŽITÍ PRO SOUČASNÉ CÍLE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES IN THE HISTORY OF MATEMATICS AND THEIR USE FOR CONTEMPORARY AIMS IN TEACHING MATEMATICS

Zuzana Štíbrová

Vedoucí diplomové práce: **RnDr. Jaroslav Zhouf Ph.D.**

Učitelství VVP pro SŠ a 2. stupeň ZŠ

český jazyk – matematika

2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně. Veškerou použitou literaturu uvádím v přiloženém seznamu literatury.

V Praze, dne 21. 11. 2008

podpis

Děkuji RnDr. Václavu Sýkorovi za to, že ve mně vzbudil zájem o neeuklidovskou geometrii, a za pomoc s výběrem tématu práce a RnDr. Jaroslavu Zhoufovi za jeho cenné rady a připomínky, které mi byly velkým přínosem.

Tato diplomová práce se snaží shrnout téma neeuklidovských geometrií, především z didaktického hlediska. Přináší nástin jejich historického vývoje, uplatnění v praxi a popis těchto geometrií využitelný ve výuce zejména na středních školách. Dále zkoumá možnosti a meze studentů v přijímání neeuklidovských geometrií, shrnuje nejčastější problémové oblasti v jejich výuce a přináší návrhy způsobů, jakými je možné těmto problémům předcházet, jakož i výsledky jejich ověření v praxi, na jejichž základě jsou navrženy některé možné podoby výuky ve škole.

This thesis tries to summarize the subject of non-Euclidean geometries, above all from the viewpoint of didactics. It brings about the outline of their historical development, practical implementation along with the description of these geometries, which is of use in the education process, especially in secondary schools. Investigated are also students capabilities and limits in accepting non-Euclidean geometries, summarized are the most frequent problem areas in their teaching. The thesis also brings suggestions on how to avoid and prevent such problems along with the results of their practical verification on the basis of which some possible variations of school teaching are suggested.

Málokterým nedal spát
pátý postulát,
většina ho měla za věc běžnou.
Říkali s Euklidem,
že lze každým bodem
jedinou vést přímku rovnoběžnou.
Dneska ale všichni volaj:
Ať žije Lobačevskij, ať žije Bolyai!

E. Calda (Úvod do obecné teorie prostoru)

Obsah

1 Úvod

Objev neeuklidovských geometrií přinesl v historii do matematiky obrovskou revoluci. Velcí matematikové, kteří se zastávali neeuklidovského přístupu ke geometrii, byli nuceni obhajovat svůj názor proti většinovému mínění a vzepřít se tak filozofii své doby, jež kralovala ostatním vědám, a to nebyl úkol zrovna jednoduchý. Aby úspěšně završili svou snahu o vymýcení starých předsudků, museli totiž sebrat odvahu k nabourání jednoho ze základních pilířů lidského myšlení, platného více než dvacet století, totiž Euklidova výkladu geometrie. Přes tato úskalí své mínění nakonec obhájili, čímž vykonali lidstvu velkou službu: podkopali totiž víru v úplnou pravdu znalostí člověka o světě, otevřeli jeho obzory a umožnili mu lépe proniknout do podstaty některých do té doby nejasných jevů, když rozšířili hranice lidského chápání prostoru. Tím vším podpořili toleranci názorové plurality a nenapadnutelné pravdy o našem světě začaly ztrácet svůj absolutní význam. Neeuklidovské geometrie se tak staly pevnou součástí matematiky.

Bylo dokázáno, že náš svět ve skutečnosti není euklidovský. Neeuklidovské geometrie našly své uplatnění v mnoha různých vědních oborech i dalších oblastech lidského působení, a jejich objev má tedy nejen důsledky teoretické, ale i praktické. Domnívám se proto, že seznámení studentů s existencí těchto geometrií i jejich zasvěcení do hlubší podstaty problému je na místě. Přesto neeuklidovské geometrie nejsou součástí výuky matematiky ve školách. Ovšem nebylo tomu tak vždy. Ještě před šedesáti lety patřila jejich výuka k vrcholným kapitolám gymnaziálního učiva, dnes se však učí jen jako součást některých specializací na vysokých školách. Přitom tato oblast matematiky vůbec nemusí být pro studenty další zásobárnou nových pojmů a pouček, naopak, umožní jim podívat se jinýma očima na to, co už znají, a uplatnit již známé pojmy a postupy v nových souvislostech.

Myslím si, že neeuklidovské geometrie jsou pro studenty v mnohém podnětné a že výprava za takovýmto druhem poznání se ve třídách setká s kladným ohlasem. Na střední škole již studenti mají všechny znalosti potřebné pro přijetí neeuklidovských geometrií a je škoda, když jim do tohoto podivuhodného světa neotevřeme dveře. Cílem této diplomové práce je proto zkoumat eventuality zapojení některých partií neeuklidovských geometrií do školního učiva.

Jelikož se neeuklidovské geometrie objevily na poli matematiky poměrně nedávno, poznatky z této oblasti se stále vyvíjejí, zpřesňují i mění, a proto je toto téma velmi složité a rozsáhlé a nelze ho v rámci rozsahu diplomové práce samozřejmě vyčerpat. Zaměřuji se proto v historii neeuklidovských geometrií zejména na ty oblasti, které s sebou přinášejí možnosti využití ve školní výuce nebo takovou výuku nějakým způsobem ovlivňují.

Události z dějin neeuklidovských geometrií související s jejich rozvojem, podstata jejich vzniku i význam mohou být v mnohém inspirativní pro studenty i učitele. V první části této práce bude proto podána základní charakteristika historického vývoje a seznámíme se zde s osobnostmi, které se o rozvoj této ve své době revoluční teorie zasloužily nejvíce.

Dále bude čtenář obeznámen s matematickým popisem základních typů geometrií a bude pojednáno o důsledcích objevu neeuklidovských geometrií a jejich praktickém využití.

V další části pak bude toto téma rozebráno z didaktického hlediska a budou nastíněny možnosti učitele, jak pojmout téma neeuklidovských geometrií pro potřeby výuky ve škole.

Při snaze zavést neeuklidovské geometrie do školní výuky je samozřejmě nejdůležitější správně odhadnout možnosti a meze studentů v chápání této problematiky, předpokládat možné potíže a snažit se jim předejít a usnadnit tak studentovi náhled do dané oblasti. V poslední části se tedy zaměřím na to, zda je vůbec téma neeuklidovské geometrie pro studenty středních škol zajímavé a lákavé, rozeberu některá studentská řešení úloh, upozorním na chyby, které se při jejich řešení nejčastěji vyskytují, podám návrhy na způsoby, jak těmto chybám čelit, a ověřím jejich účinnost v praxi. Na základě získaných dat a poznatků pak uvedu možné řešení, jakým způsobem lze neeuklidovské geometrie prezentovat v rámci školní výuky tak, aby byla látka pro studenty zajímavá a co možná nejpřijatelnější. Čtenář zde také najde návrhy některých příkladů, které mohou přispět k zajímavosti výuky a podnítit tak zájem studentů o neeuklidovskou geometrii.

2 Významné osobnosti

Objev neeuklidovské geometrie představuje jednu z největších revolucí v dějinách matematiky a i vědy jako takové. Protože o nich dále bude řeč, seznámíme se nejprve blíže s osobnostmi, které tuto revoluci rozpoutaly nebo k ní zásadním způsobem přispěly, a tím nám umožnily nahlédnout za obzor, do úplně nového světa, který se na začátku zdál být nemožným.

2.1 **Euklides** (365 – 300 př.n.l.)

Obr. 1: Jedna z možných Euklidových podob

Euklides (též Eukleides, Euklid; obr. 1 [44]) byl řecký matematik a geometr z alexandrijského Múseia, který žil přibližně v letech 365 př.n.l. – 300 př.n.l. (některé zdroje uvádějí asi 340 – 280 př.n.l.). Byl to vynikající logik schopný příkladně systematické vědecké práce. O Euklidovi toho nevíme mnoho, neznáme místo jeho narození ani smrti. Domníváme se však, že se narodil v Řecku a studoval v Athénách na Platónově Akademii. Poté snad na žádost krále Ptolemaia I. pracoval a učil v Alexandrijské knihovně, kde mezi jeho žáky patřil možná i Archimédes. Jediná dochovaná historka týkající se Euklida svědčí o tom, že si byl vědom své velikosti. Když se ho totiž všemocný král Ptolemaios tázal, zda snad neexistuje snadnější cesta k osvojení matematiky, než jak ji popisuje Euklides ve svém stěžejním díle *Základy*, odpověděl pyšně: „Matematika nezná žádné královské cesty.“

[12][35][44][58][66]

2.2 Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Obr. 2: C.F. Gauss

Carl Friedrich Gauss (obr. 2 [46]) se narodil 30. dubna roku 1777 v Brunšviku (v dnešním Německu). Traduje se hodně historek o jeho brzké genialitě, z nichž nejznámější je ta, v níž Gauss odvodil vzorec pro součet aritmetické řady v pouhých devíti letech, když během chvilky vypočítal ve škole zadaný příklad – součet čísel od 1 do 100.

V roce 1788 začal studovat na gymnáziu. Gaussovy vynikající schopnosti zaujaly vévodu z Brunšviku, který se rozhodl Gausse, pocházejícího z nemajetné rodiny, podporovat v dalším studiu formou stipendia na Collegium Carolinum (dnešní Technická univerzita v Brunšviku), kde mladý Carl studoval v letech 1792 – 1795. Hned poté nastoupil na univerzitu v Göttingenu, kde studoval do roku 1798, a díky stálé vévodově podpoře mohl dokončit i doktorandské studium na univerzitě v Helmstedu. Ve své disertační práci rozebíral základní algebraické teorémy a mimo jiné podal důkaz základní věty algebry, tedy že každý polynom nad komplexními čísly má alespoň jeden komplexní kořen. Během univerzitních studií Gauss „znovuobjevil“ několik vět (např. Bodeův zákon, binomickou větu, aritmetický a geometrický průměr, zákon kvadratické reciprocity, větu o prvočíslech). V pouhých 17 letech objasnil nezodpovězený problém sestrojitelnosti pravidelného sedmiúhelníku pouze pomocí pravítka a kružítka, tedy euklidovsky. Zjistil, že tímto způsobem lze sestrojit pouze ty pravidelné mnohoúhelníky s lichým počtem stran, jejichž počet stran je násobkem prvočísel 3, 5, 17, 257 nebo 65 537. Již ve 23 letech se stal členem petrohradské Akademie a v roce 1801 vydal své stěžejní dílo Disquisitiones Arithmeticae (napsal ho však už roku 1798), ve kterém položil základy teorie čísel jako matematické disciplíny.

Gauss nebyl jen výborným matematikem. Zabýval se také optikou, působil jako zeměměřič a podílel se na zhotovování map. Usiloval rovněž o pozici v astronomii. Všeobecnou slávu v tomto oboru mu přinesl přesný výpočet dráhy planetky Ceres, kterou vědci objevili roku 1801. Planeta se jim však záhy ztratila při přechodu přes sluneční kotouč, ale roku 1802 byla opravdu nalezena tam, kde Gauss předpověděl, když určil její polohu svou novou metodou pro výpočet dráhy nebeských těles. Roku 1807 byl jmenován profesorem matematiky a astronomie a stal se ředitelem göttingenské hvězdárny, jímž zůstal až do svých sedmdesáti let.

V roce 1809 vydal Gauss svou další knihu o diferenciálních rovnicích a eliptických drahách planet a v letech 1820 – 1830 publikoval více než 70 odborných prací s rozdílnou tématikou. Roku 1822 získal cenu kodaňské univerzity.

V roce 1831 začal Gauss spolupracovat s fyzikem Wilhelmem Weberem a výsledkem této spolupráce byla teorie zemského magnetismu. Navíc spolu s Weberem sestrojili první primitivní telegraf, pomocí kterého mohli přenášet zprávy na vzdálenost asi 1,5 km.

Carl Friedrich Gauss zemřel 23. února 1855 ve věku nedožitých 78 let. Těžko bychom hledali jedinou oblast matematiky, kterou by nějak neovlivnil. Významným krokem bylo objevení možnosti neeuklidovské geometrie, ovšem tento objev byl tak odvážný, že ho Gauss raději nepublikoval ze strachu z polemiky. Později neeuklidovskou geometrii objevil i syn Gaussova přítele János Bolyai a rozvinul ji Gaussův žák Bernhard Riemann.

[12][46][59][64][66]

2.3 János Bolyai (1802 – 1860)

Maďarský matematik János Bolyai (obr. 3 [42]) se narodil 15. prosince 1802 ve městě Koloszvár (dnes Cluj-Napoca, Rumunsko). Již záhy projevil nadání pro matematiku a svůj talent dále rozvíjel pod vedením otce, matematika Wolfganga Bolyaie.

Obr. 3: J.Bolyai

V letech 1818 – 1822 studoval vysokou školu ve Vídni a do roku 1829 připravil pojednání o kompletním systému neeuklidovské geometrie, a je tak často považován za zakladatele nauky o neeuklidovské geometrii. Tato práce byla vydána roku 1832 jako dodatek k eseji jeho otce. Roku 1848 Bolyai zjistil, že k obdobným závěrům došel již dříve ruský matematik N. I. Lobačevskij. Gauss na základě Bolyaiovy práce vzdal hold mladému matematikovi, zároveň ale přiznal, že k takovým závěrům došel již dávno sám. Po tomto Gaussově vyjádření zklamaný Bolyai již dále nepublikoval. Po jeho smrti byly však nalezeny rozsáhlé matematické rukopisy, ve kterých například pečlivě rozvinul geometrickou představu komplexních čísel.

János Bolyai zemřel 27. ledna roku 1860.

[22][40][42][54][61][66]

2.4 Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792 – 1856)

Obr. 4: N.I. Lobačevskij

Ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (obr. 4 [47]) se narodil 1. prosince 1792 v Nižnim Novgorodě. Po smrti otce se s matkou odstěhoval do Kazaně, kde vystudoval gymnázium a poté Kadaňskou státní univerzitu. Zde se v roce 1811 stal magistrem v oboru matematika a fyzika. Zřejmě ho zde nejvíce ovlivnily přednášky z dějin matematiky profesora Martina Bartelse a podnítily ho k pozdějšímu zájmu o Euklidovy axiomy. V roce 1814 Lobačevskij začal na kadaňské univerzitě přednášet, kromě matematiky a fyziky zde vyučoval také astronomii, roku 1822 se stal profesorem a v letech 1827 – 1846 byl na této univerzitě rektorem.

Pro matematiku bylo největším Lobačevského přínosem objevení neeuklidovské geometrie, zvláště pak prokázání nedokazatelnosti Euklidova pátého postulátu ze zbylých čtyř. Konkrétně objevil jeden druh neeuklidovské geometrie, geometrii hyperbolickou, o níž poprvé informoval 23. února 1826 v Kazani. Tento objev však publikoval až na přelomu let 1829 a 1830. Během svého života Lobačevskij napsal několik knih, v nichž se zabýval základy geometrie. Nejvýznamější z nich je kniha *Geometryia*.

N. I. Lobačevskij zemřel v Kazani 24. února 1856.

[22][47][66]

2.5 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Obr. 5: G. F. B. Riemann

Tento německý matematik (obr. 5 [50]) se narodil 17. září 1826 ve vesničce Breselenz. Již od raného dětství projevoval výjimečné matematické nadání. Roku 1840 se odstěhoval k babičce do Hanoveru, aby zde studoval místní lyceum. Po babiččině smrti roku 1842 odešel do Johannea v Luneburgu. Roku 1846 přerušil studia filologie a teologie a zahájil studium matematiky na univerzitě v Göttingenu. Zde se poprvé setkal s C. F. Gaussem, který zde byl jeho profesorem.

Riemann začal rozvíjet myšlenky neeuklidovské geometrie na základech, které před ním vystavěli Gauss, Lobačevskij a Bolyai. Ti však stále uvažovali o jednodušším druhu geometrie, protože všechny jejich výpočty se zabývaly dvojrozměrným prostorem, zakřivenou plochou. Riemann však přinesl do neeuklidovské geometrie další revoluci, když dokázal, že stejným způsobem lze studovat zakřivené prostory o jakémkoli počtu rozměrů. Jeho teorie byla nesmírně široká a komplexní a všechny dosavadní geometrie byly jen dílčími případy geometrie Riemannovy. Tyto nové myšlenky Riemann předložil roku 1854 v konkurzní přednášce v sále göttingenské univerzity, když se ucházel o místo soukromého docenta. Roku 1857 se stal mimořádným profesorem této univerzity a roku 1859 profesorem řádným.

Riemannovi rodiče předčasně zemřeli na tuberkulózu, na stejnou nemoc začali umírat i jeho sourozenci a tento osud bohužel neminul ani Riemanna samotného. V závěru života se ještě snažil stihnout poslední práci na velké fyzikální teorii, která měla poskytnout sjednocený popis elektromagnetismu, světla a gravitace, zemřel však 20. července 1866 v italské Selasce. Jednotná fyzikální teorie, o které Riemann snil, tak zůstává snem vědců dodnes, přesto vykonal pro fyziku nesmírně mnoho. Svými pracemi totiž připravil půdu pro Alberta Einsteina a jeho obecnou teorii relativity, která popisuje gravitaci právě jako důsledek zakřivení prostoru.

[12][50][60][65][66]

2.6 **Eugenio Beltrami** (1835 – 1900)

Italský matematik Eugenio Beltrami (obr. 6 [43]) se narodil v Cremoně 16. listopadu roku 1835. Od roku 1856 pracoval v administraci ředitelství drah, od roku 1862 působil jako mimořádný profesor matematiky na boloňské univerzitě a od roku 1863 jako profesor geodesie v Pise. V letech 1866 – 1873 přednášel na boloňské univerzitě mechaniku, poté vyšší matematiku v Římě a roku 1876 byl jmenován profesorem matematické fyziky na pavijské univerzitě.

Obr. 6: E. Beltrami

E. Beltrami zemřel 18. prosince 1900. Za svého života přispěl k pracím o diferenciální geometrii, přeložil do italštiny a francouzštiny Gaussovy práce a rozvinul první modely neeuklidovské geometrie. Věnoval se také optice a termodynamice.

[43][66]

2.7 Felix Christian Klein (1849 – 1925)

Obr. 7: F. Ch. Klein

Felix Christian Klein (obr. 7 [45]) byl německý matematik, jenž se narodil 25. dubna 1849 v Dusseldorfu do rodiny vládního úředníka. Navštěvoval Dusseldorfské gymnázium a poté studoval matematiku a fyziku na univerzitě v Bonnu. V roce 1868 získal doktorát v pouhých 23 letech, roku 1872, získal místo profesora v Erlagenu a od roku 1875 působil na Technische Hochschule v Mnichově, kde vychoval řadu pozdějších vynikajících matematiků a fyziků (např. Adolf Hurwitz, Max Planck). V tomto roce se také oženil s vnučkou filozofa Georga W. F. Hegela, Annou Hegelovou. V roce 1880 začal působit na univerzitě v Lipsku, kde setrval do roku 1886, kdy odešel do Göttingenu a tam pracoval až do odchodu do penze roku 1913. Univerzita v Göttingenu se za jeho působení stala jedním z největších center matematiky na světě. Od roku 1900 se Klein výrazně angažoval v otázce výuky matematiky na středních školách a zavedl například výuku diferenciálního a integrálního počtu.

Felix Klein za svůj život získal řadu ocenění. V roce 1885 byl zvolen členem Royal Society, roku 1893 získal De Morganovu medaili, udělovanou londýnskou matematickou společností, a v roce 1912 byl oceněn Copleyovou medailí.

Zabýval se především geometrií, zvláště pak neeuklidovskou, ale také teorií grup a funkcí. Spolu se Sophusem Liem realizovali základy Kleinova Erlangenského programu, jehož hlavní myšlenkou je studování jednotlivých geometrických struktur pomocí jejich symetrií a invariantů a z toho vyplývající hlubší propojení geometrie s algebrou. Jako rámec pro všechny ostatní tehdy známé geometrie, zejména neeuklidovské, zde pak slouží geometrie projektivní. Tento program tak přispěl i k rozvoji teorie relativity a částicové fyziky. Při studiu neeuklidovských geometrií Klein objevil dvojrozměrnou uzavřenou plochu, která má pouze jeden povrch a dnes se nazývá Kleinova láhev. Jeho objevem je také fascinující útvar moderní matematiky, tzv. Kleinova kvartická křivka nebo také kvartika. Ta v jistém smyslu představuje zobecnění platónských těles pro případ, kdy jsou stěny tvořeny 24 pravidelnými sedmiúhelníky. Toto zobecnění je možné v prostoru s hyperbolickou geometrií.

Felix Klein zemřel 22. června 1925 v Göttingenu. Jeho práce v oblasti matematiky představují vlivné dílo nadčasové hodnoty.

[45][66]

2.8 István Lénárt

István Lénárt žije a pracuje v maďarské Budapešti. Vyučuje budoucí učitele základních a středních škol na Univerzitě Loranda Eötvöse. Je autorem několika učebnic, učebních pomůcek a programů, především pro výuku geometrie. V řadě zemí pořádá přednášky a vede kurzy pro veřejnost. Je zároveň činný v matematickém výzkumu, především v oblasti finitní geometrie a teorie čísel. [69]

3 Historický vývoj

Zájemce o historický vývoj neeuklidovských geometrií najde poučení například v pracích Martiny Bečvářové [7], Egmonta Colera [11], [12], Dirka Struika [28], Milana Hejného [17], Leonarda Mlodinowa [23], Petra Vopěnky [31], Jiřího Svrška [32], [57] či v encyklopediích [9] a [27]. Z těchto článků a publikací v této kapitole čerpám.

3.1 Počátky geometrie

Pojem prostoru vznikl přirozeně jako pojem místa, kde žijeme, tedy Země, a poprvé se vyskytl souběžně s rozvojem toho, co Egypťané s Babyloňany nazývali „měření Země“, tedy zeměměřičství. Počátky geometrie jako takové tedy spadají do doby, kdy se kočovníci začínají trvale usazovat, a pociťují tak potřebu měřit pozemky. Že přírodu lze zkoumat pomocí matematiky a že geometrii je možné využít nejen k popisování, ale i k objevování, si jako první uvědomili staří Řekové, kteří tak zavedli pojem bodu, přímky a plochy. Jejich úspěchy mají kořeny v matematice starověkých civilizací Babylonu a Egypta. Jelikož však aritmetické úkony vyžadují jistou míru abstraktního uvažování, provádění operací s čísly se rozvíjelo velmi pomalu. První významné kroky v této oblasti byly podniknuty v šestém tisíciletí před naším letopočtem, kdy lidé v údolí Nilu postupně opustili kočovný způsob života a začali se věnovat obdělávání půdy. Nil každý rok zaplavoval pole, a hranice pozemků tak byly splaveny či zaneseny bahnem. Území tedy museli znovu vyznačit úřední geometři, takzvaní *harpedonopté* neboli „napínači provazu“. Právě z jejich činnosti vznikala první geometrická terminologie a vzorce pro obsahy a objemy útvarů. Egypťané zakládali sídla na vyvýšeninách, které se během záplav proměnily v ostrovy spojené hrázemi, vybudovali zavlažovací síť a skladiště na obilí; znalosti *harpedonoptů* tak pomáhaly ve stavitelství, zejména při stavbě egyptských pyramid, kde znalost úklonu bočních stěn umožňovala postavit pyramidu zvolené výšky. *Harpedonopta* zaměstnával tři otroky, kteří za něj manipulovali lanem, které mělo ve stanovených vzdálenostech uzly. Napnul-li se provaz tak, že uzly tvořily vrcholy, bylo možné vytyčit trojúhelník o stranách daných délek a s úhly příslušných hodnot.

3.2 Rozvoj geometrie

S bohatstvím a sídly se ve starém Egyptě zrodily také daně a snad právě ony nejvíce podnítily rozvoj geometrie. Vyměřovaly se totiž na základě rozsahu záplav a rozlohy pozemků. Jak se dozvídáme ze dvou hlavních zdrojů poznatků o egyptské matematice, Rhindova a Moskevského papyru, Egypťané vymysleli sice složitou, ale celkem spolehlivou metodu pro výpočet plochy čtverce, obdélníku a lichoběžníku. Například plochu kruhu počítali tak, že jej nahradili čtvercem o straně rovné osmi devítinám jeho průměru, což vychází stejně, jako kdybychom počítali s hodnotou pí rovnou 3,16. Staří Egypťané znali dokonce půjčky, úrok se stanovoval jednoduše na 100 % za rok.

Zatímco se Egypťané usazovali na březích Nilu, další osidlování začalo ve 4. tisíciletí v Mezopotámii, oblasti mezi řekami Eufrat a Tygris. Někdy mezi lety 2000 a 1700 př.n.l. si nesemitský národ, sídlící severně od Perského zálivu, v čele s panovníkem Chammurapim podrobil své jižní sousedy. Sjednocené království pak bylo pojmenováno podle města Babylon, a právě Babyloňané zřejmě vymysleli matematický systém, který je pokládán za mnohem důmyslnější než egyptský. Z hliněných tabulek nalezených v Asýrii například víme, že babylonský stavitel počítal objem hlíny, kterou bylo potřeba odebrat z kanálu s průřezem tvaru lichoběžníku, i kolik času tato práce zabere určitému počtu dělníků. Babylonští lichváři dokázali počítat dokonce i složitý úrok.

Texty na hliněných tabulkách dokazují, že Babyloňané nepsali rovnice a veškeré úlohy a výpočty vyjadřovali slovy. Pravděpodobně také znali Pythagorovu větu. Tu sice používali i Egypťané, jak naznačuje technika napínačů provazu, babylonští písaři však pokryli hliněné destičky trojicemi čísel, pro které Pythagorova věta platila. Přitom nezaznamenávali pouze trojice s nízkými hodnotami, ale i s hodnotami vysokými, například 3 456, 3 367 a 4 825, z čehož plyne, že zřejmě znali elementární teorii čísel alespoň do takové míry, že byli schopni takové trojice generovat.

Ani jedna z těchto kultur však nedokázala vyvodit pro Pythagorovu větu obecné pravidlo.

Geometrie Egypťanů i Babyloňanů byla totiž opřena pouze o empirické znalosti, bezesporu však přispěla k matematizaci fyzikální reality.

3.3 Geometrie jako věda

Geometrie, a s ní celá matematika, se však začala stávat skutečnou vědou, až když pocítila potřebu zobecňovat vlastnosti objevené ve speciálních případech; toto zobecňování se zároveň stalo jejím cílem a pravdivost takovýchto tvrzení se již nemohla opírat pouze o zkušenost, ale vyžadovala prokázání.

Dlouhou dobu zůstávala veškerá věda součástí filozofie, jelikož potřeba racionálních úvah se právě ve filozofii zrodila, a tak prvními, kdo se zabývali zobecněními v oboru geometrie, byli řečtí filozofové (Thales, Eudoxos, pythagorejská škola), ale teprve matematici Euklides, Archimédes a Apollónios se zasloužili o to, aby se výstavba geometrie vytvořené Řeky deduktivní metodou založenou na základních pojmech, axiómech a postulátech stala východiskem úspěšného rozvoje.

Výsadní postavení mezi těmito geometry má právě Euklides, zejména pro své největší dílo *Základy geometrie* (řec. *Stoicheia*, lat. *Elementa*), které je vedle Bible doposud snad nejvydávanější knihou světa. Díky tomuto třináctidílnému spisu se stal Euklides nejznámějším z antických matematiků a jeho dílo bylo dlouhou dobu vzorem axiomaticky podložené a deduktivně budované teorie a až donedávna sloužilo bez jakýchkoli zásadních úprav za učebnici geometrie například na anglických středních školách.

Pokud máme alespoň stručně popsat historii neeuklidovské geometrie, nelze se o Euklidových Základech nezmínit, neboť tato práce paradoxně sehrála důležitou roli v objevování jiných než euklidovských geometrických světů.

3.4 Euklidovy Základy geometrie

Toto souborné dílo řecké matematiky vznikalo od 6. století př.n.l. a na knihách, jež ho tvoří, se podílelo mnoho význačných řeckých matematiků (jmenovat lze např. Hippokrata z Chiu, Thaleta, Eudoxa z Knidu, Archyta z Tarentu, pythagorejce a Theaitéta z Athén). Euklides jej kolem r. 300 př.n.l. dokončil a jeho zásluhou je především uspořádání poznatků, při němž se snažil postupovat od jednodušší látky ke složitější a svá tvrzení dokazovat. Základy však neobsahují tehdy známé matematické výsledky. Euklides byl autorem i dalších matematických děl, mezi něž patří např. *Data*, *Porismata* a mimo to kniha o kuželosečkách, která se stala základem pro pozdější významné dílo Apollonia z Pergy. Z jeho prací se dochovaly jen některé, nedosáhly však významu jeho Základů, které byly překládány do arabských jazyků a z nich do středověké latiny a postupem času se staly jednou z nejrozšířenějších knih západní kultury. Dle odhadů jen tiskem vyšlo více než 1 500 vydání, z nichž některá dosáhla obrovských nákladů.

Euklidovy Základy jsou rozděleny do třinácti knih. Jejich vrcholem je proslulý systém axiómů, tedy nejjednodušších, dále již nedokazovaných a nerozložitelných základních pravd, na nichž je vybudována celá geometrie. První kniha Základů se zabývá trojúhelníky a rovnoběžníky a končí klasickým euklidovským důkazem Pythagorovy věty. Druhá kniha je věnována planimetrii, kniha třetí a čtvrtá planimetrii dále rozvíjejí a podávají nauku o kruhu a tětivových a tečnových mnohoúhelnících. Kniha pátá pojednává o poměrech, kniha šestá pak zkoumá geometrickou podobnost. V této knize Euklides mimo jiné vyslovuje rozšíření Pythagorovy věty, když uvádí, že *součet podobných obrazců nad oběma odvěsnami se vždy rovná obdobnému podobnému útvaru nad přeponou* [12, s.48-49]. V dalších knihách, sedmé až desáté, Euklides vybudoval úplnou teorii čísel. Hovoří zde mimo jiné o rozdílu mezi prvočísly a čísly složenými a předkládá důkaz, že prvočísel je nekonečně mnoho (důkaz o nespočetnosti prvočísel). Fakt, že kniha o geometrii se zabývala také teorií čísel, může být poněkud překvapivý. Euklides však čísla reprezentoval jako úsečky, které měly určité vlastnosti a geometrický význam. Právě kvůli budování teorie čísel pomocí geometrie a délek úseček se dostal do nemalých obtíží při zápisu iracionálních čísel, jimž se ve svém díle také věnuje. Knihy zbývající, jedenáctou až třináctou, věnuje autor stereometrii. Při svých úvahách o objemu těles Euklides postupuje tak, jako by ovládal základy infinitezimálního počtu, který objevili až v 17. století Leibniz a Newton. Euklides dnes bývá spojován především s rozvojem geometrie, ačkoliv se v Základech nevěnuje pouze jí. Tato matematická oblast byla totiž jeho axiomatickým přístupem ovlivněna pravděpodobně nejvíce.

Euklides se tedy zabýval pouze geometrií rovinnou (planimetrií) a prostorovou (stereometrií) a jeho (euklidovská) geometrie tvoří vůbec nejstarší část geometrie, založenou na axiomech, dále pak definicích a postulátech.

Definic Euklides v Základech zavádí dvacet tři. Definuje takové pojmy, jako jsou bod, čára, přímka, kruh, úhel, povrch a rovina. Např. kruh popisuje jako *rovinný útvar uzavřený takovou křivkou, že všechny úsečky, které ji spojují s jedním z bodů ležících uvnitř tohoto kruhu zvaným střed, mají stejnou délku* [23, s.32], a rovnoběžky vymezuje jako *přímky, které leží-li ve stejné rovině, se nikde nesbíhají, pokud bychom je v obou směrech prodloužili do nekonečna* [23, s.32]. Uvádí však také, že bod je to, co se nedá rozdělit, čára nemá žádnou šířku atd. Jak je vidět, z dnešního pohledu jsou některé Euklidovy definice vágní a sotva použitelné, neboť se snaží definovat pojmy nedefinovatelné. Jiné z jeho definic, např. právě definice kruhu, rovnoběžek či pravého úhlu, však význam mají.

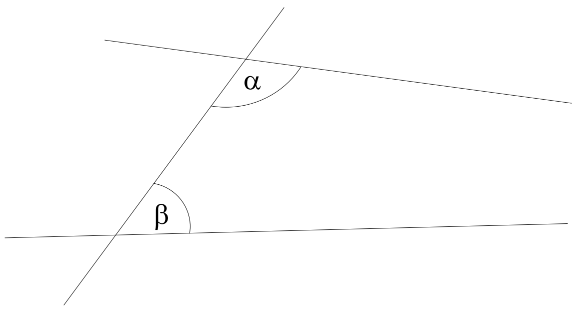
Euklides dále uvádí pět postulátů (*postulát je filozofický výraz pro předpoklad lišící se od axiomu a hypotézy, který není ani evidentní, ani demonstrovatelný, ale který se předpokládá; je vždy považován za pravdivý a zřejmý, aniž by byl požadován důkaz* [22, s.75]), z nichž lze všechny další pojmy logicky odvodit. Jedná se o následující postuláty:

1. *Od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu lze vésti eutheiu.*
2. *Eutheiu lze nepřetržitě prodloužit.*
3. *Z jakéhokoli středu jakýmkoli poloměrem lze sestrojit kruh.*
4. *Všechny pravé úhly jsou navzájem stejné.*
5. *Když dvojice eutheií proťata třetí eutheou tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, pak ony dvě euthey, prodlouženy jsouce do nekonečna, sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých* (obr. 8). [17, s.110]

Na základě těchto postulátů dokázal Euklides věty o geometrických útvarech. Eutheou přitom označuje přímou čáru. Nejedná se tedy ani o přímku, neboť eutheu lze prodloužit, ani o úsečku, neboť euthea nemá krajní body.

3.5 Reakce na pátý postulát

Na první pohled je vidět, že pátý postulát se odlišuje od všech ostatních. Euklides s ním nebyl spokojen a pokoušel se mu co nejdéle vyhnout. Proto prvních 28 vět v Elementech dokázal bez jeho použití. [32]



$\alpha + \beta < 180^{\circ}$ *Obr.8*

Pátý postulát: *Když dvojice eutheií proťata třetí eutheou tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, pak ony dvě euthey, prodlouženy jsouce do nekonečna, sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*

Tento postulát vzbudil velkou pozornost antických filozofů – matematiků a později i matematiků středověkých a novověkých. Filozofové vytýkali pátému postulátu například nepoužitelnost takové definice při rozhodování o rovnoběžnosti přímek. Jak již bylo řečeno výše, postuláty jsou zřejmé a nepotřebují žádné další osvětlování. Zřejmé je však to, co se odehrává před naším zrakem, ale prodlužování přímek do nekonečna tuto vlastnost nemá. Zřejmě proto se ještě za Euklidova života objevily názory, že se nejedná o postulát, ale jen o tvrzení, které je třeba dokázat pomocí čtyř předchozích postulátů. Euklides postupoval po vyslovení pátého postulátu logicky správně, ale tím spíše se stával postulát předmětem zkoumání a snah o jeho odvození ze zřejmějších tvrzení. Často se pak stávalo, že matematici v „důkazu“ použili něco, co měli ve skutečnosti dokázat, neboť takové „samozřejmé“ věty byly s pátým postulátem ekvivalentní.

S pátým Euklidovým postulátem jsou ekvivalentní např. tyto věty:

Axióm rovnoběžnosti (viz dále Proclus)

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180^0.

Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 360^0.

Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.

Pythagorova věta

Hlavními důvody, které vedly ke zpochybnění pravdivosti pátého postulátu, byly jednak neskladná formulace myšlenky (bylo k ní potřeba více slov, než k formulaci předchozích čtyř postulátů), jednak zkušenosti Řeků s ošidností smyslového poznání. Pramenem nejistoty mohla být i Euklidova zjevná opatrnost při formulaci postulátu; nehovoří totiž o tom, že se dané přímky protínají, ale uvádí pouze, že se sbíhají. Sbíhat se však mohou i asymptoticky.

Nejeden matematik si všiml nápadné odlišnosti formulace tohoto postulátu od ostatních, a pátý Euklidův postulát tak měl později zásadní vliv na vznik neeuklidovských geometrií.

Jedním z prvních matematiků, kteří se snažili o důkaz pátého postulátu byl Posidonios (asi 135 – 50 př.n.l.). Ten nalezl ideu rovnoběžnosti v pojmu, který dnes nazýváme ekvidistanta.

Astronom a matematik Ptolemaios Klaudius (asi 100 – 178) vysvětloval pátý postulát velmi komplikovaně, ve skutečnosti však vycházel z jeho alternativní formulace, z níž odvodil původní znění. Tautologické tvrzení však za důkaz samozřejmě považovat nemůžeme.

Proclus Diadochos (410 – 485), scholarch na Platónově Akademii, napsal k *Základům* komentář, ve kterém seznamuje čtenáře se svým pokusem odvodit pátý postulát z prvních čtyř. Píše zde také, že Ptolemaios podal chybný důkaz. Sám Proclus ovšem podal jiný chybný důkaz, když mluvil o vzdálenosti rovnoběžných přímek; sice ji blíže nespecifikoval, tvrdil však, že je konstantní. To ovšem nelze matematicky dokázat bez použití postulátu o rovnoběžkách, a Proclus se tedy dopustil stejné chyby jako Ptolemaios. Objevil však, že pátý postulát je ekvivalentní jinému axiómu:

Je-li dána přímka a bod na ní neležící, pak lze tímto bodem proložit přímku, která bude s první přímkou rovnoběžná. [32]

Tento axiom nese jméno Johna Playfaira, který v roce 1795 napsal k Základům vynikající komentář.

V podstatě stejné chyby jako Proclus s Ptolemaiem se o několik století později dopustil i bagdádský učenec Thábit ibn-Quarra (830 – 901).

Švýcarský matematik a Eulerův žák Louis Bertrand (1731 – 1812) ve svém důkazu pátého postulátu předpokládal, že daným bodem lze k dané přímce vést alespoň dvě různé rovnoběžky. Rovinu pak rozdělil na nekonečný počet shodných pásů a konečný počet shodných úhlů, kdy byl úhel částí pásu a došel ke sporu. Chyba ale spočívala v tom, že s nekonečnými množinami prováděl operace, jako by byly konečné.

Následovalo ještě mnoho pokusů dokázat pátý postulát použitím zbylých čtyř, řada z nich byla přijata, ale později se ukázaly být chybnými. Další matematikové zkoumali jiné vlastnosti, s pátým postulátem ekvivalentní. John Wallis (1616 – 1703), přední anglický matematik přednewtonovské éry, který mimo jiné zavedl značku ∞ pro nekonečno, v roce 1663 dokázal následující tvrzení jako ekvivalentní pátému postulátu:

Ke každému trojúhelníku existuje podobný trojúhelník libovolného zvětšení. [32]

Ve snahách o důkaz pátého postulátu sehrála významnou roli práce Girolama Saccheriho (1667 – 1733). Důležitost jeho důkazu z roku 1697 spočívá v novém přístupu. Nejprve se také pokoušel pátý postulát dokázat přímo, pak se ale vzdal naděje na úspěch touto cestou a zvolil důkaz pomocí sporu, kdy chtěl dokázat, že negovaný pátý postulát je s ostatními postuláty neslučitelný. Připustil tedy, že mohou platit současně, a chtěl dojít ke sporu. Ve svém postupu bohužel udělal chybu, odvodil však řadu vět neeuklidovské geometrie, aniž k ní dospěl.

Saccheriho pokračovatel, německý matematik, fyzik, astronom a filozof Johan Henrich Lambert (1728 – 1777) dospěl ve své práci ještě blíže cíli. V roce 1766 totiž ukázal, že v Saccheriho nové geometrii roste součet úhlů v trojúhelníku, pokud velikost plochy trojúhelníků klesá. Přesto se Lambert nestal objevitelem neeuklidovské geometrie, neboť se nedokázal zbavit předsudků a domníval se, že to, co vidí, je pouhý klam.

Wallis, Lambert i Saccheri vycházeli z děl arabských matematiků Nasíra ad-Dín at-Túsího (1201 – 1274) a Omara Chajjáma (1048 – 1131), kteří ve svých na sebe navazujících pracích učinili ve snahách o důkaz pátého postulátu významné kroky.

Čtyřicet let svého života strávil studiem postulátu o rovnoběžkách Adrien Marie Legendre (1752 – 1833) a svou práci shrnul v dodatcích k různým vydáním velmi úspěšné knihy *Élements de Géométrie*. Dokázal například, že Euklidův pátý postulát odpovídá tvrzení:

Součet úhlů v trojúhelníku je roven dvěma pravým úhlům. [32]

Jean le Rond D'Alembert (1717 – 1783) označil v roce 1767 problém rovnoběžek za skandál elementární geometrie.

3.6 Objev neeuklidovských geometrií

Prvním matematikem, který do problému pátého Euklidova postulátu pronikl hlouběji a začal chápat otázku rovnoběžnosti, byl Gauss. Toto téma ho přilákalo již roku 1792, kdy se ve věku pouhých patnácti let pokusil odvodit pátý postulát pomocí čtyř zbylých postulátů. Roku 1813 však přiznal, že velkého úspěchu nedosáhl. O čtyři roky později vyjádřil své přesvědčení, že pátý postulát je na ostatních postulátech nezávislý. V letech 1813 až 1816 jako profesor matematické astronomie v Göttingenu totiž konečně učinil definitivní průlom, na který svět čekal už od Euklida. Vypracoval rovnice vyjadřující vztahy mezi částmi trojúhelníku v novém, neeuklidovském prostoru, jehož strukturu dnes nazýváme *hyperbolickou geometrií*.

Tak začal studovat důsledky geometrie, v níž můžeme bodem, který neleží na dané přímce, vést k této přímce několik rovnoběžek. Samostatně tak rozvinul geometrii, která si neodporovala, v níž neplatil postulát o rovnoběžkách a součet úhlů v trojúhelníku byl menší než 180 stupňů.

Celou teorii měl Gauss patrně vytvořenou již roku 1824. V cestě k úspěchu mu tak bránila jediná věc – tuto svoji práci uchovával v tajnosti. Ještě za Gaussových časů nebyly věda a filozofie přísně oddělené, fyzice se například neříkalo „fyzika“, ale „přírodní filozofie“. A v té době filozofii vládly názory Immanuela Kanta, který ve svém stěžejním díle [20] nazýval euklidovský prostor „nezbytnou potřebou myšlení“. Kant píše: *Prostor je nutnou představou a priori, která je základem všech vnějších názorů (...), lze si totiž představit jen jeden jednotný prostor (...). Geometrické věty jsou totiž všechny apodiktické, tj. spojené s vědomím své nutnosti, jako například, že prostor má jen tři rozměry (...).* [20, s.56 a 58] Gauss tedy nechtěl vyvolávat spory.

V zásadě k téže geometrii jako Gauss dospěl právník Schweikart, který objev Gaussovi předvedl, za což sklidil pochvalu. Schweikartův synovec Taurinus, kterému však Gauss roku 1824 své myšlenky svěřil, roku 1825 uveřejnil jako první úvahy o neeuklidovské geometrii a také hovořil o imaginární kouli, opět však upadl do Saccheriho chyby a posléze tvrdil, že postulát o rovnoběžkách platí výhradně v Euklidově smyslu.

Gauss vedl o teorii rovnoběžek debaty se svým přítelem Wolfgangem von Bolyaiem, který se také snažil pátý postulát dokázat, avšak neúspěšně. Jeho syn János byl tímto problémem rovněž velmi zaujat, ačkoli ho jeho otec od snah o důkaz, které začal považovat za nesmyslné, zrazoval. János Bolyai se však odradit nedal a v roce 1823 napsal otci, že *objevil velmi překvapující věci, neboť se mu podařilo vytvořit podivný nový svět.* [32] A skutečně vybudoval neeuklidovskou geometrii totožnou s geometrií Gaussovou. Své poznatky pak vydal v příloze o 24 stranách v otcově knize publikované roku 1832.

Poté, co si Gauss přílohu prostudoval, napsal svému příteli, že *mladý geometr János Bolyai je génius prvního řádu.* [32] Bolyai přitom pouze předpokládal, že pátý postulát neplatí, a že by tedy mohla existovat nová geometrie, a čekal, zda dojde ke sporu. Přelom nastal ve chvíli, kdy Gauss připustil existenci neeuklidovské geometrie jako geometrie reálně možné. Sám později uvedl, že neeuklidovskou geometrii objevil dříve než Bolyai, pouze výsledky své práce nepublikoval. To ovšem nemá na Bolyaiův přínos matematice žádný vliv.

Nezávisle na Gaussovi a Bolyaiovi uveřejnil roku 1829 práci o neeuklidovské geometrii i ruský matematik Lobačevskij. Byla publikována pouze v Rusku v univerzitním časopise *Kazaňský zpravodaj*, a Bolyai ani Gauss tedy tuto práci neznali. Ačkoli se Lobačevskij snažil přiblížit práci široké veřejnosti, jeho článek byl odmítán.

Až roku 1840 vešly Lobačevského úvahy o neeuklidovské geometrii ve známost, když publikoval knihu *Geometrické objevy v teorii rovnoběžek* o délce 61 stran. Tak revoluční myšlenky však matematikové ještě nebyli s to přijmout.

Lobačevskij rozdělil všechny přímky v rovině na ty, jež danou přímku protínají, a na ty, jež ji neprotnou. Zároveň postulát o rovnoběžkách nahradil postulátem novým, který tvrdí, že existují dvě přímky procházející bodem neležícím na dané přímce, které jsou s danou přímkou rovnoběžné.

Ukázal rovněž, že v malých rozměrech se zákonitosti neeuklidovské geometrie blíží zákonitostem platícím v euklidovském prostoru.

Zajímavostí je, že Lobačevského dříve učil Johann Bartels, který působil jako profesor v Kazani. On a Wolfgang Bolyai se neeuklidovským prostorem dlouho zabývali a do diskusí o něm zapojili také Gausse. Otázkou zůstává, zda to byla opravdu náhoda, že krátce poté, co Gauss objevil tuto ohromující teorii a debatoval o ní s přáteli, přátelé a příbuzní jeho přátel přicházejí se stejným významným objevem. Vetšina historiků se však dnes domnívá, že se šířila spíše podstata Gaussovy práce než konkrétní fakta a že Bolyai a Lobačevskij o svém snažení v té době navzájem nevěděli.

Riemann, který svoji doktorskou disertační práci psal pod Gaussovým vedením, ve své inaugurační přednášce 10. června 1854 přeměnil celý koncept geometrie. Geometrii definoval jako prostor s dodatečnou strukturou, která umožňuje studovat jeho vlastnosti. Riemann ve své přednášce krátce popsal „sférickou" geometrii, v níž každá přímka procházející bodem P neležícím na přímce tuto přímku protne. V Riemannově geometrii neexistují rovnoběžky. Spíše než na celkovou charakteristiku se zaměřil na vlastnosti malých oblastí povrchu. Vysvětlil, jak je možné kouli interpretovat jako dvourozměrný eliptický prostor, a tato přednáška, která byla publikována až roku 1868, dva roky po Riemannově smrti, tak měla zásadní vliv na rozvoj diferenciální geometrie.

Bolyai ani Lobačevskij neukázali, že jejich popis nové geometrie je konzistentní.

Prvním, kdo se konzistencí neeuklidovské Bolyaiovy-Lobačevského geometrie zabýval, byl Eugenio Beltrami. V článku *Esej o interpretaci neeuklidovské geometrie* z roku 1868 představil trojrozměrný euklidovský model dvourozměrné neeuklidovské geometrie, který realizoval na pseudosféře. Tento model sice nebyl úplný, ale umožnil formulaci konečných závěrů o Euklidově pátém postulátu.

Beltramiho práci na tomto modelu dokončil roku 1871 Felix Klein. Navíc popsal i další modely neeuklidovských geometrií, například Riemannovy geometrie sférické.

Klein ukázal existenci tří typů geometrií a shrnul jejich vlastnosti. Přímky v Bolyaiově-Lobačevského geometrii mají dva nekonečně vzdálené body, přímky v Riemannově geometrii nemají žádné dva nekonečně vzdálené body (resp. mají dva imaginární nekonečně vzdálené body) a euklidovská geometrie je hraniční případ mezi těmito dvěma typy geometrií.

Objev neeuklidovské geometrie byl zlomovým krokem vývoje lidského myšlení. Ukázal něco, co protiřečilo smyslové zkušenosti člověka, a tím i obecně přijatému názoru. Navíc to bylo poprvé, co se povedlo ukázat, že v rámci daného axiomatického systému jisté tvrzení dokázat nelze a tato myšlenka se později stala jedním z pilířů vnímání světa a lidských možností. Tím, že bylo ukázáno, že tradiční přesvědčení lidstva o pravdivosti a neměnnosti dosavadního poznání nemusí být založeno na pravdivých argumentech nebo že tyto argumenty nemusejí být vyčerpávající, se otevřel prostor pro zpochybňování „absolutních pravd“ i v jiných oblastech lidského myšlení, než byla matematika. Objev neeuklidovských geometrií spolu s dalšími revolučními myšlenkami (např. teorie evoluce Charlese Darwina, založená na přírodním výběru, či Laplaceova teorie o vzniku sluneční soustavy z rotující mlhoviny [2]) tak podpořil vstřícnost vůči jiným názorům, a ve svém důsledku tedy i toleranci odlišných kultur.

4 Typy neeuklidovských geometrií

4.1 Tři základní druhy geometrií

Geometrii, o jejíž objev se zasloužili Gauss, Bolyai a Lobačevskij, dnes nazýváme geometrií hyperbolickou. V hyperbolickém geometrickém prostoru lze v rovině vést k dané přímce *p* daným bodem na ní neležícím právě dvě rovnoběžky, a navíc mnoho různých přímek, které přímku *p* nikdy neprotnou, a v důsledku toho je součet úhlů v trojúhelníku menší než dva úhly pravé.

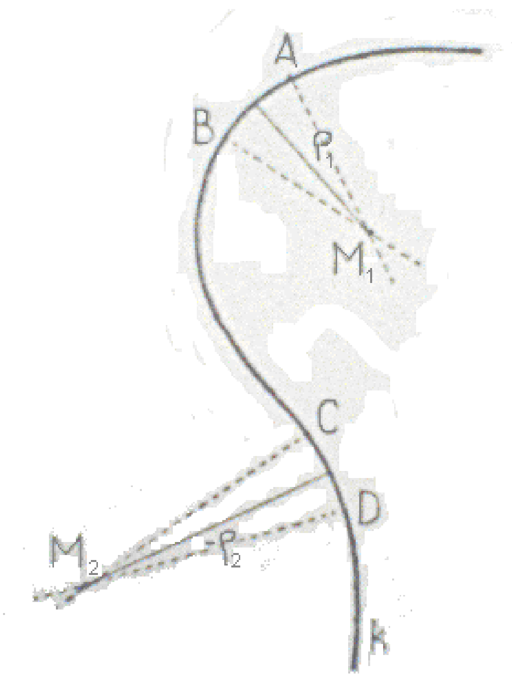
V klasickém, euklidovském prostoru lze, jak víme, v rovině vést k dané přímce *p* daným bodem na ní neležícím právě jednu přímku, která přímku *p* nikdy neprotne, v důsledku čehož je součet úhlů v trojúhelníku roven dvěma úhlům pravým.

Zbývá tedy takový geometrický prostor, v němž by se protnuly každé dvě různé přímky ležící v téže rovině a součet úhlů v trojúhelníku by byl větší než dva úhly pravé. Takový geometrický svět nazýváme eliptickou geometrií. Ta bývá někdy nazývána geometrií Riemannovou, jelikož se o její zrození zásadním způsobem zasloužil Bernhard Riemann při rozvíjení diferenciální geometrie. Konečnou podobu však obdržela až v Erlangenském programu Felixe Kleina. [31]

4.2 Popis neeuklidovských geometrií

Chceme-li se blíže seznámit s matematickým popisem neeuklidovských geometrií, můžeme čerpat zejména z publikací [11], [15], [19], [25] a [31]. Níže uvedený popis přejímám s úpravami především z knihy Egmonta Colera [11], neboť je díky své přehlednosti pro potřeby této práce nejvhodnější.

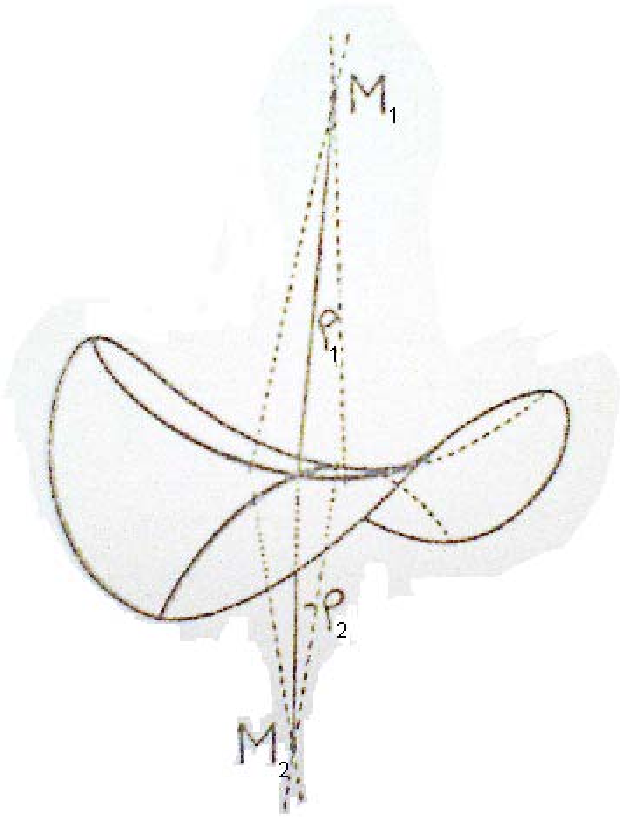
Označme si n–rozměrný prostor R_n. (Povrch koule pak bude stejnoměrně zakřiveným prostorem R_2, kruh stejnoměrně zakřivený prostor R_1.) Míru pro zakřivení, tzv. křivost, vymyslel pro R_1 již Isaac Newton, na plochy pak pojem křivosti rozšířil Gauss. Abychom zjistili míru zakřivení, stanovíme dvěma číselnými hodnotami největší a nejmenší zakřivení prvku plochy. Vycházíme přitom z toho, že každý nejmenší dílek libovolné křivky je možno považovat za nepatrnou část kruhového oblouku. Tak má každý prvek křivky v jakémkoli místě takzvaný poloměr křivosti, který je roven poloměru kružnice, s níž je právě v tomto místě křivka identická (obr. 9 [11, s.384]).



Obr. 9

Část *AB* křivky *k* na obrázku má tak poloměr křivosti ρ_1 a část *CD* poloměr křivosti ρ_2. Křivost vyjadřujeme převrácenou hodnotou poloměru křivosti, tedy $1/\rho_1$ a $1/\rho_2$. Podle úmluvy můžeme ještě určit směr zakřivení, a to znaménkem. Znaménkem se budou lišit takové poloměry křivosti, které probíhají opačnými směry, což znamená, že středy kružnic křivosti (v našem případě M_1 a M_2) leží na opačných stranách křivky. V případě uvedeném na obrázku tedy uvažujeme křivosti $1/\rho_1$ a $-1/\rho_2$, nebo $-1/\rho_1$ a $1/\rho_2$.

Abychom zjistili Gaussovu křivost plochy, proložíme měřeným prvkem plochy dvě kolmé průsečné roviny, které stojí kolmo i k sobě navzájem (obr. 10 [11, s.384]). Jako výslednou křivost pak obdržíme součin křivostí obou prvků křivek, které dostaneme jako průsečík s rovinami, čili $1/(\rho_1\rho_2)$. Leží-li oba středy křivosti na opačných stranách zakřivené plochy, musí být jedna ze dvou křivostí záporná, výslednou křivost pak obdržíme jako $-1/(\rho_1\rho_2)$ a mluvíme o plochách se záporným zakřivením nebo také plochách sedlovitých, jak je vidět na obr. 10.



Obr. 10

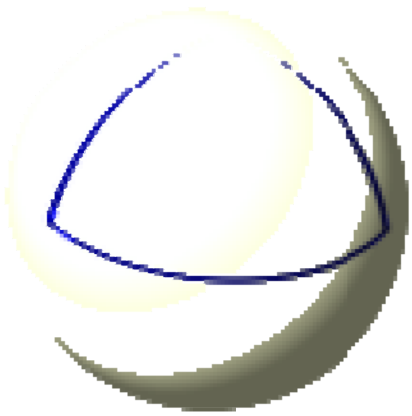
O takových plochách, jejichž oba poloměry křivosti mají v kterémkoli místě stále stejnou velikost, tzn. $|\rho_1| = |\rho_2|$, mluvíme jako o plochách s kladným nebo záporným konstantním zakřivením, a jejich křivost je tedy rovna $\pm 1/\rho^2$, kde $\rho = |\rho_1| = |\rho_2|$.

Takových ploch jsou tři druhy:

1) Jsou-li $\rho_1 = \rho_2$ kladné (ne nekonečné), pak jde o plochu kulovou neboli sférickou.
2) Liší-li se ρ_1 a ρ_2 znaménkem (a nejsou-li nekonečné), dostáváme záporně konstantně zakřivenou plochu, která se v každém bodě rovná pravidelné ploše sedlovité. Taková plocha se obecně označuje jako pseudosféra.
3) Jsou-li oba poloměry křivosti nekonečné, stejně či opačně orientované (tzn. $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ nebo $\rho_1 = +\infty$, $\rho_2 = -\infty$), dostáváme křivost plochy rovnou $1/\infty^2$ nebo $-1/\infty^2$, tedy konstantně zakřivenou plochu s křivostí rovnou nule, čili rovinu.

Vidíme však, že k tomu, aby výsledná křivost byla rovna nule, stačí, jestliže je nekonečnu roven jen jeden z obou poloměrů křivosti ρ_1, ρ_2. Plocha s křivostí $1/(\rho_1\rho_2)$, kde se buď ρ_1, nebo ρ_2 rovná nekonečnu, má rovněž křivost 0, a přesto je zakřivena. Příkladem takové plochy je plášť válce nebo kužele. Je-li křivost plochy rovna nule, pak na této ploše platí euklidovská geometrie a axiomatika, je-li jiná než nula, platí jedna z geometrií neeuklidovských. Válec a kužel mají skutečně rozvinutelné pláště, jež lze bez protažení rozvinout a svinout do roviny. Narýsujeme-li tedy na list papíru geometrické konstrukce, můžeme tento list ovinout kolem válce či kužele, aniž se změní poměry obrazců. Proces navíjení a rozvíjení je třeba si představit prodloužený do nekonečna, aby nedocházelo k přesahování obrazců. Proto na euklidovských plochách kolmo k ose existují nekonečně dlouhé euklidovské přímky. Byl to právě Gauss, kdo učinil euklidovskou nebo neeuklidovskou strukturu plochy závislou na křivosti.

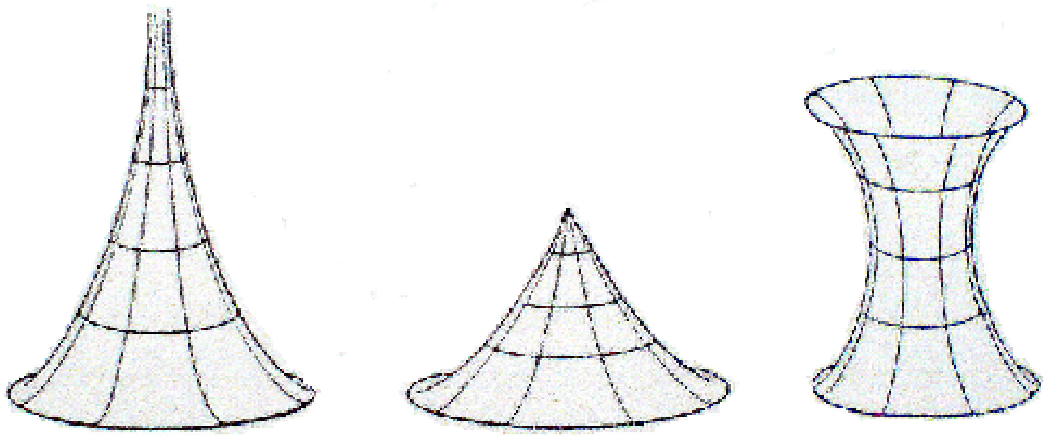
Na zakřivených plochách typu 1) jsou při křivosti plochy $1/\rho^2 > 0$ tedy na kouli g-liniemi (jak zde nazýváme nejjednodušší křivky reprezentující přímky) hlavní kružnice, a to z toho důvodu, že dva body ležící na povrchu koule lze nejkratším způsobem spojit právě kratší částí oblouku hlavní kružnice. Doplněk tohoto oblouku na celou kružnici, je pak nejdelší možnou spojnicí. Je tedy vidět, že kdyby byly oba body protějšími (např. póly na zeměkouli), pak by byly obě spojnice stejně dlouhé, a bylo by jich navíc nekonečně mnoho (všechny poledníky). Z důvodu jednoznačnosti se proto ve sférické geometrii omezujeme často pouze na polokouli. Z tvaru g-linií na kouli také plyne, že zde neplatí postulát o rovnoběžkách. Jelikož se všechny g-linie, jsou-li prodlouženy, musí navzájem protnout ve dvou bodech v konečnu, neexistují na povrchu koule žádné rovnoběžné g-linie. Z toho také vyplývá, že zde neplatí věta o 180stupňovém součtu úhlů v trojúhelníku, která je s postulátem o rovnoběžkách ekvivalentní. Vnitřní geometrie na kouli se řídí hypotézou tupého úhlu, proto má trojúhelník na kouli součet úhlů $\Sigma > 180°$. Je zde možné narýsovat trojúhelník se třemi pravými úhly (obr. 11 [40]).



Obr. 11

Vnitřní geometrie povrchu koule je tedy geometrií eliptickou a bývá nejčastěji nazývána také geometrií sférickou.

Je-li křivost plochy $-1/\rho^2 < 0$ (typ 2)), vzniká na této záporně zakřivené ploše tzv. pseudosférická neboli hyperbolická geometrie. Tato plocha, jelikož má konstantní zakřivení, musí v každém bodě odpovídat ploše sedlovité se dvěma stejnými poloměry křivosti v různých směrech. Takových ploch, jimž tato vlastnost vyhovuje, najdeme více (obr. 12 b, c [11, s.391]). Jako nejčastější tvar pseudosféry bývá uváděna plocha vznikající rotací křivky traktrix (obr. 12 a [11, s.391]).



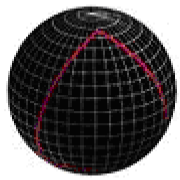
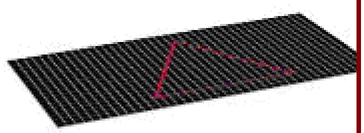
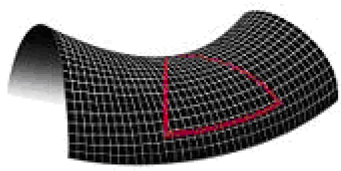
a *b* *c*

Obr. 12

I na pseudosféře existují g-linie jako nejkratší spojnice dvou bodů. Utvoříme-li z nich trojúhelníky, zjistíme, že zde platí hypotéza ostrého úhlu a součet úhlů v trojúhelníku je při křivosti $k = -1/\rho^2$ menší než dva pravé úhly, tedy $\Sigma<180°$. Takže je opět porušen Euklidův postulát o rovnoběžkách: Na pseudosféře existují k dané g-linii vždy dvě rovnoběžné g-linie vedené jedním bodem, a navíc nekonečně mnoho g-linií, které ji neprotínají, a stejně tak někonečně mnoho g-linií, které ji protínají.

A konečně, jestliže se $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ (typ 3) nebo je-li nekonečný jen jeden z poloměrů, přecházíme, jak již bylo řečeno výše, do planimetrie roviny neboli planimetrie euklidovské, která bývá nazývána také geometrií parabolickou.

Tři hlavní typy geometrií (s konstantní křivostí) jsou názorněji sestaveny v tabulce 1 ([11, s.393],[40]):

Tvar R_2	**Křivost**	**Počet rovnoběžek jedním bodem**	**Název**	**Ukázka plochy s rovnostranným trojúhelníkem**
Koule (Sféra)	$k = 1/\rho^2$ ($\rho_1 = \rho_2$ kostantní)	**0**	**Eliptická**, sférická geometrie (neeuklidovská)	
Rovina (popř. plášť válce nebo kužele)	$k = 0$ ($\rho_1 = \rho_2$ konstantní nebo $\rho_1 = \infty$ nebo $\rho_2 = \infty$)	**1**	**Parabolická**, rovinná geometrie (euklidovská)	
Pseudosféra (nebo ekvivalentní rotační plocha)	$k = -1/\rho^2$ ($\rho_1 = -\rho_2$ kostantní)	**2**	**Hyperbolická**, pseudosférická geometrie (neeuklidovská)	

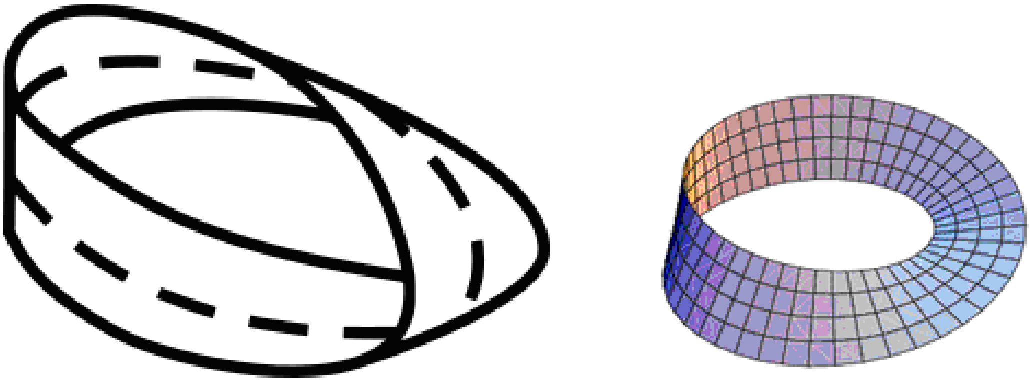
Tab. 1

Je však samozřejmé, že poloměry křivosti nemusí být navzájem stejné a zakřivení plochy nemusí být v každém bodě konstantní. Nekonstantně zakřivené plochy s kladným, nebo záporným zakřivením mají také každá svou vlastní neeuklidovskou geometrii. Existuje tedy tolik různých geometrií, kolik je druhů zakřivených ploch a pouze ve zlomku z nich platí Euklidův axiom o rovnoběžkách. Pro nás je však, vzhledem ke tvaru naší planety, z neeuklidovských geometrií nejzajímavější geometrie sférická, jinak v našem světě nemáme mnoho důvodů zabývat se jinými neeuklidovskými formami geometrie; zakřivené plochy si můžeme představit jako vložené do prostoru euklidovského a vztahovat je na kartézský systém souřadnic.

V euklidovském prostoru R_1, R_2, ..., R_n má přímka stále stejný charakter, totéž musíme předpokládat o ostatních g-liniích v prostorech s konstantní křivostí. Při nekonstantní křivosti se mění charakter g-linií od místa k místu.

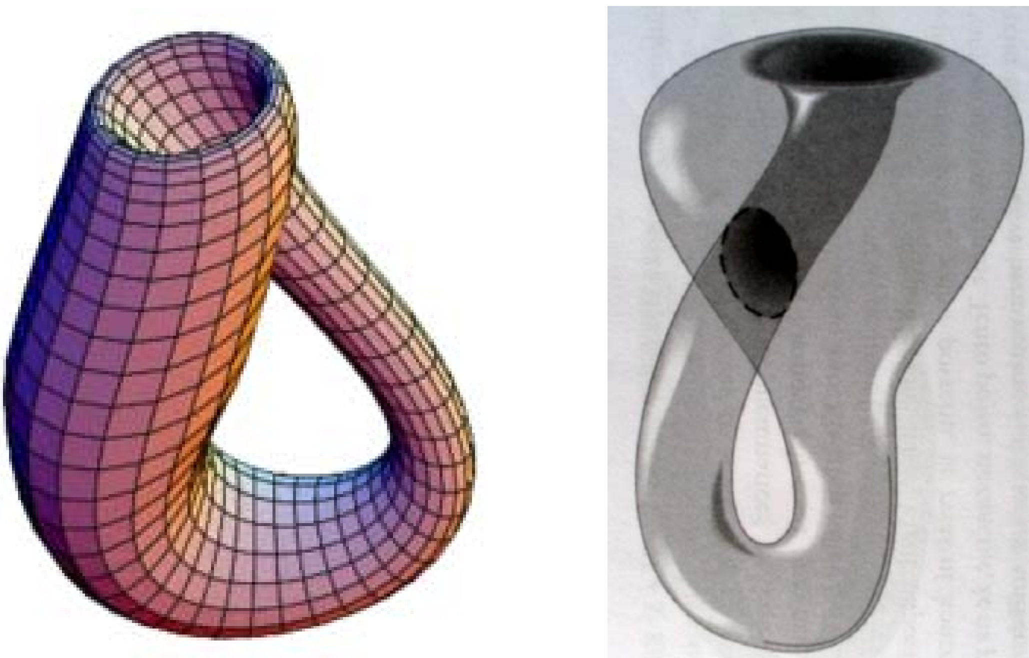
Všechny věty související s axiomem o rovnoběžkách platí tedy pouze v geometrii euklidovské a metrické vztahy jsou v obou typech geometrií jiné.

Jedním z pozoruhodných zakřivených prostorů R_2 je tzv. Möbiova páska (jinak také Möbiův list, Möbiův pás, Möbiův pásek). Jedná se o plochu, která má jen jednu stranu a jednu hranu (obr. 13 [37],[54]). Model takové plochy si můžeme snadno vyrobit z proužku papíru, otočíme-li proužek na jednom konci o 180° a oba konce slepíme. Pokud na libovolném místě povedeme g-linii rovnoběžnou s okrajem, tato linie se vrátí sama do sebe, a je tedy neohraničena. Když opět proužek rozstřihneme, zjistíme, že jsme pokreslili jedním tahem obě jeho strany. Protože žádnou čáru nelze vést z jedné strany povrchu na druhou, aniž bychom překročili jeho okraj, je to důkaz, že Möbiova páska má opravdu jen jednu stranu. A jelikož stranovost je pevně spjata s existencí okrajů, je jasné, že tato páska má také jen jeden okraj. To můžeme opět ověřit tak, že jej obarvíme a po dokončení nám žádný neobarvený okraj nezbývá. Takové prostory nazýváme prostory neorientovatelné.



Möbiova páska

Obr. 13



Kleinova láhev

Obr. 14

Uzavřený povrch, který odpovídá Möbiově pásce je tzv. Kleinova láhev (obr. 14 [36], [14, s.203]), pojmenovaná po svém objeviteli, v kapitole 2 již zmiňovaném Felixi Kleinovi. Je to dvojrozměrný geometrický útvar, který si lze představit jako nádobu, která nemá žádnou hranu, vnitřek ani vnějšek, nelze u ní rozhodnout, který bod prostoru je vně a který uvnitř láhve, jelikož její vnitřní a vnější část splývají, z čehož opět plyne, že tato plocha má pouze jeden povrch. Vhodným řezem Kleinovy láhve vzniká Möbiova páska a lze jí teoreticky sestrojit tak, že slepíme k sobě dvě Möbiovy pásky podél jejich jediného okraje. Jakožto matematický objekt existuje Kleinova láhev pouze ve čtyřrozměrném prostoru, kde nemusí procházet sama sebou. V našem trojrozměrném prostoru musíme její povrch protáhnout sebou samotným, jak je vidět na obr. 14.

Další vlastnosti Möbiovy pásky a Kleinovy láhve, jež odhalují některé pokusy s těmito předměty, které lze uskutečnit ve výuce, budou popsány v kapitole 8.

5 Důsledky a využití neeuklidovských geometrií

Netrvalo dlouho a neeuklidovská geometrie, která se mnohým nejprve zdála být pouze abstraktním výtvorem znuděných myslí geniálních matematiků, našla své praktické uplatnění a ukázalo se, že je s prostředím, v němž žijeme, spjata daleko více, než se na první pohled mohlo zdát. A opět se začala hroutit do té doby platná a zdánlivě neotřesitelná „fakta“, neboť po Euklidovi to byl především Isaac Newton, kdo na objev neeuklidovské geometrie „doplatil“.

5.1 Obecná teorie relativity

Následující faktické údaje týkající se obecené teorie relativity čerpám z publikace Leonarda Mlodinowa [23] a ze zdrojů [36], [62] a [63].

Začátek jedenáctileté éry, která vědce postupně zavedla do nového vesmíru se zakřiveným prostorem, jehož existenci matematicky připouštěli Gauss a Riemann, znamenaly dva články z roku 1905, které svému tvůrci, Albertu Einsteinovi, vynesly nesmrtelnou slávu. V tomto roce Einstein formuloval svou speciální teorii relativity, jež vysvětlovala chování světla šířícího se prostorem. Navěky se tak propojily prostor a čas a z jejich svazku vzešla vskutku výstřední geometrie.

Teorie relativity tvrdí, že každý vnímá vztah prostoru a času jinak, tato subjektivnost jejich měření se ostatně odráží v názvu teorie, proto je podle Einsteina třeba geometrické pojmy upravit tak, aby zahrnovaly právě čas i prostor.

Ve speciální teorii relativity přistupoval Einstein k problému ještě euklidovsky, byla však již předznamenáním pozdějších revolučních teorií, kde již sehrála zásadní roli geometrie neeuklidovská. V této, řekněme „umírněnější“ teorii postavil své úvahy na dvou axiomech, které lze zjednodušeně reprodukovat takto:

1. *Zda jsme v klidu, anebo se pohybujeme rovnoměrným přímočarým pohybem, zjistíme pouze porovnáním s jinými tělesy.* [23, s.168]
2. *Rychlost světla nezávisí na rychlosti světelného zdroje a je stejná pro všechny pozorovatele ve vesmíru.* [23, s.169]

V důsledku to znamená, že délka předmětů závisí na pozorovateli, který se na ně dívá. Konkrétně dochází ke zkrácení délky objektu, který se vzhledem k pozorovateli pohybuje, než kdyby byly objekt a pozorovatel vůči sobě v klidu (tomuto jevu říkáme *Lorentzova kontrakce délek*), což je jistě zcela nový druh geometrie. A podobně jsme na tom i s časem, jelikož Einstein ve své teorii připouští, že události, které jsou současné v jedné vztažné soustavě, nemusí být současné v jiné vztažné soustavě. Ačkoli Einstein Newtona obdivoval, popíral tedy jedno z jeho hlavních přesvědčení, a to existenci absolutního prostoru a času. Navíc svou teorií říkal, že světlo nepotřebuje žádné médium pro své šíření, a tím vyvracel i existenci éteru, tedy jakési pevné látky prostupující celým vesmírem, která byla po dvě stě let pilířem fyzikální teorie.

Einstein si však již roku 1905 uvědomoval, že jeho teorie není úplná. Podařilo se mu už setřít rozdíl mezi klidem a rovnoměrným pohybem (nenulovou rychlostí), čímž postavil inerciální pozorovatele na stejnou úroveň. Zatím však šlo vlastně jen o novou kinetiku, která popisovala, jak tělesa reagují na působení konkrétních sil, tyto síly však již dále nevysvětlovala. Proto hledal nový princip, pomocí kterého by mohl teorii relativity vylepšit, a snažil se ji rozšířit tak, aby zahrnovala všechny pozorovatele, tedy i ty, kteří se vzhledem k inerciálním soustavám pohybují zrychleně, a tak by se jeho teorie v případě „nerovnoměrného“ pohybu obešla bez „fiktivních“ sil, které byly důsledkem toho, že pro události nahlížené dvěma pozorovateli jako by ve speciální teorii relativity platily odlišné zákony. Tato jeho nová teorie byla později nazvána „obecnou teorií relativity“.

V roce 1905 platila jediná teorie gravitace, a to Newtonova. Jelikož však Einsteinova teorie nahradila Newtonovy pohybové zákony novou kinetikou, gravitační teorie se speciální teorií relativity už nekorespondovala. Einstein tedy musel vypracovat takový popis gravitace, která s ní bude v souladu. Vodítko pro vypracování teorie mu poskytlo poznání, k němuž dospěl prostřednictvím myšlenky, kterou později označil jako „nejšťastnější ve svém životě“: „Když člověk padá volným pádem, neuvědomuje si tíži vlastního těla“.

Tento výrok se v obecnějším pojetí stal třetím Einsteinovým axiomem, principem ekvivalence:

Setrvačná a gravitační hmotnost jsou si navzájem úměrné, při vhodné volbě jednotek jsou si rovné. [62]

Z toho vyplývá, že *pouze porovnáním s jinými tělesy lze zjistit, zda se těleso pohybuje s rovnoměrným zrychlením, nebo stojí v klidu v homogenním gravitačním poli.* [23, s.185]

Jinými slovy princip ekvivalence, platící pro homogenní gravitační pole, vede k tomu, že gravitace je také taková „fiktivní“ síla, čímž dochází k neodlišitelnosti setrvačných a gravitačních jevů. Princip tak umožňuje popisovat gravitaci za pomoci křivého časoprostoru.

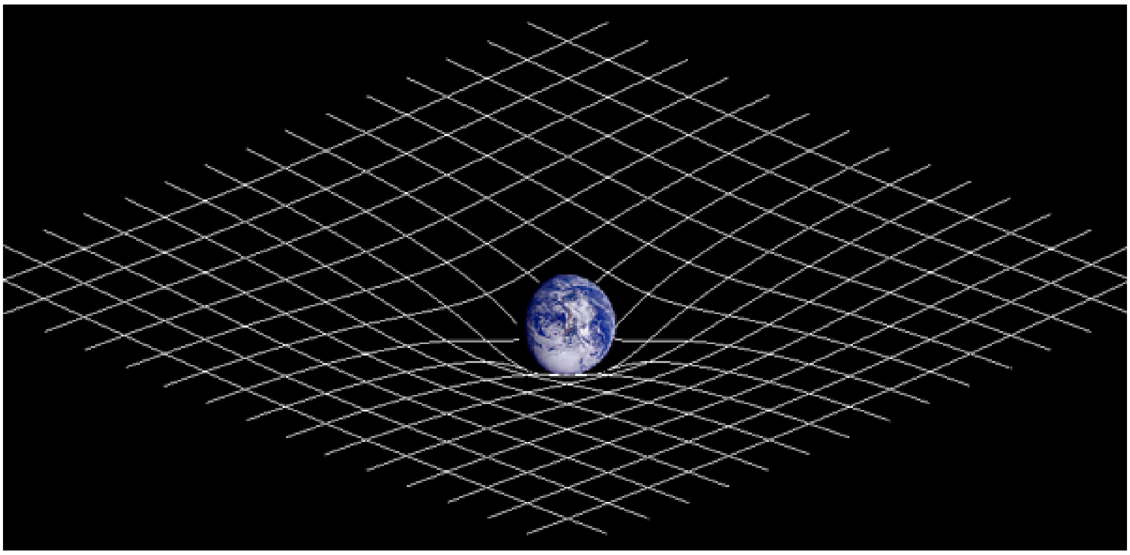
Při zjišťování účinků gravitace na čas a prostor analyzoval Einstein výsledky vjemů různých pozorovatelů pohybujících se zrychleným pohybem, kteří si mezi sebou vyměňovali načasované světelné signály. Jelikož pro ně tak neplatila speciální teorie relativity, vyslovil předpoklad, že v dostatečně malém prostoru, v dostatečně krátkém čase a při dostatečně malém zrychlení speciální teorie relativity přibližně platí. Mohl tak uplatnit speciální teorii relativity i princip ekvivalence na infinitesimální oblasti i v nehomogenním poli. Právě práce Gausse a Riemanna umožňovaly Einsteinovi aplikovat tuto teorii na jakékoli gravitační pole, a to tak, že nehomogenní pole pokládal za skládanku pospojovanou z infinitesimálních homogenních polí.

Einstein při svém bádání odhalil, že přítomnost gravitace musí ovlivňovat tok času a tvar prostoru. Poznatek, že gravitace ovlivňuje tok času, vyslovil poprvé roku 1907, dalších pět let mu trvalo, než si uvědomil, že ovlivňuje i prostor. Za zmínku stojí, že o vztahu mezi gravitací a zakřivením prostoru se Einstein poprvé zmínil roku 1912 v Praze. Napsal: *Protože ve vztažné soustavě, jež rotuje vzhledem k inerciální soustavě, dochází k Lorentzově kontrakci délek, pravidla, jimiž se řídí tuhá tělesa, neodpovídají zákonům eukleidovské geometrie. Z toho důvodu je třeba od eukleidovské teorie upustit.* [23, s.188]

Proto Einstein potřeboval novou geometrii – takovou, která popisuje zakřivení prostoru. Naštěstí zde bylo Gaussovo a Riemannovo dílo, a Einstein tak mohl 25. listopadu 1915 představit svou práci *Rovnice gravitačního pole*, v níž prohlásil, že obecná teorie relativity „konečně tvoří logickou uzavřenou strukturu."

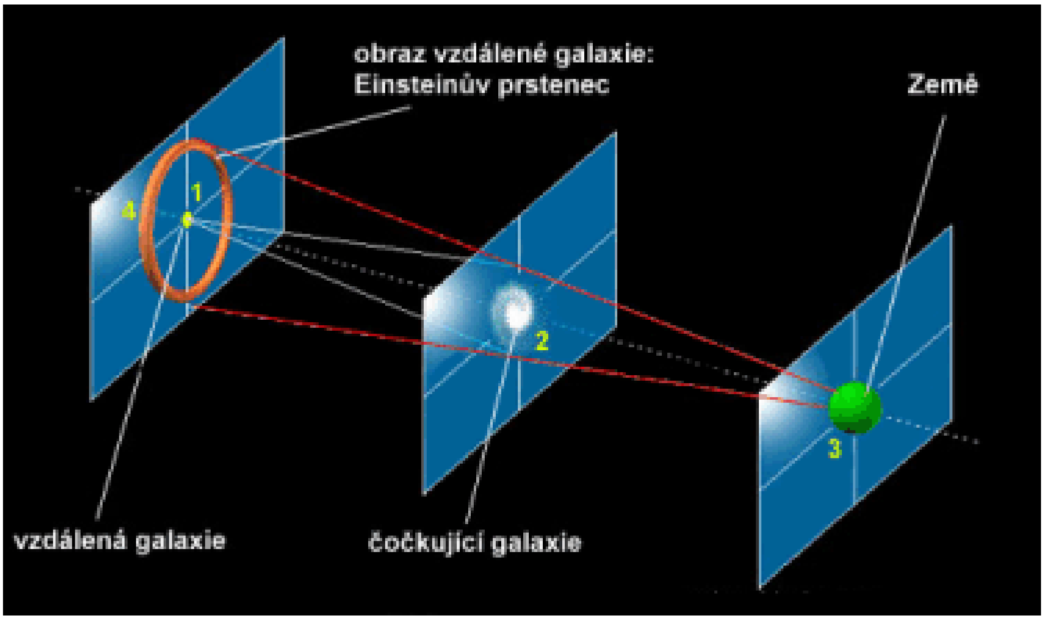
5.2 Praktické důsledky obecné teorie relativity

Einstein tedy dokázal, že přítomnost hmoty ovlivňuje geometrii, protože zakřivuje prostor (a čas). Přesněji řečeno předpokládá, že jakýkoliv objekt s vlastní hmotností zakřivuje prostor, ve kterém se nachází, a toto zakřivení se projevuje jako gravitace. Gravitace je tedy v Einsteinově pojetí zakřivení časoprostoru, přičemž toto zakřivení si můžeme názorně představit jako prohlubeň, jež zakřivuje povrch trampolíny, na které leží těžký předmět (obr. 15 [63]). Hmotnější těleso přitom zakřivuje časoprostor ve větší míře. Stejně tak zakřivení závisí na hustotě daného tělesa. Tělesa se v tomto prostoru pohybují po nejpříměj-ších možných drahách, tzv. geodetikách. Tělesa tedy časoprostor sama vytvářejí – bez nich neexistuje a nemá smysl.

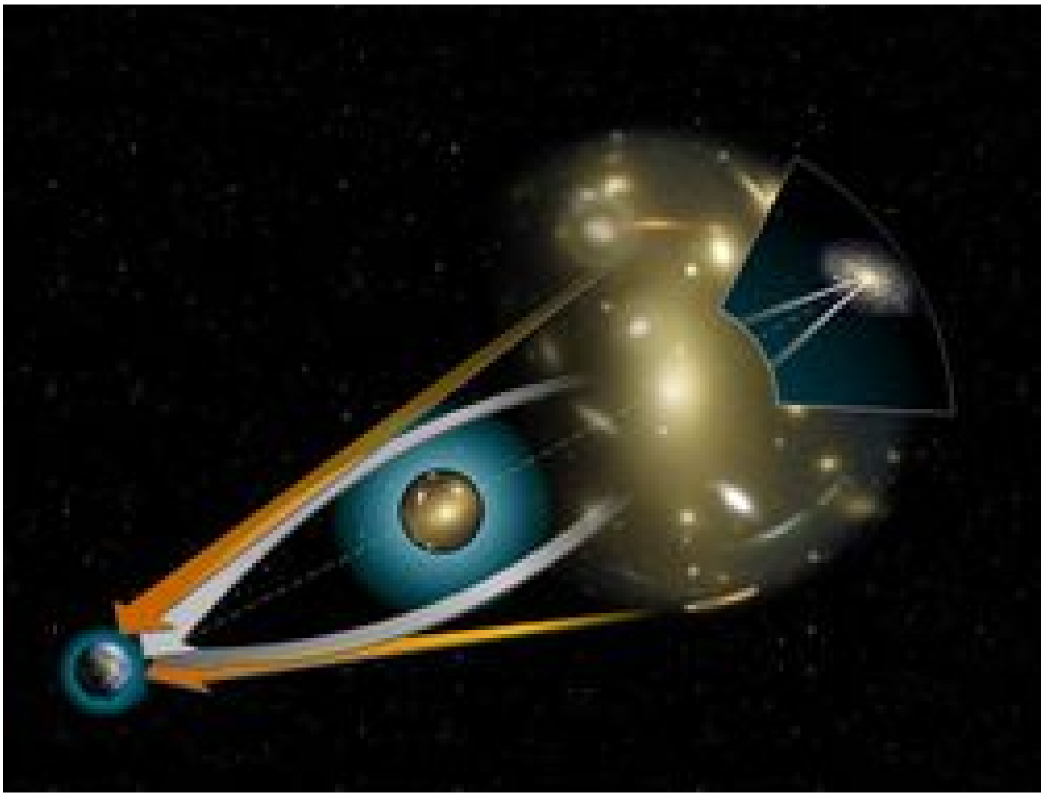


Obr. 15

Dnes nejčastějším měřeným projevem zakřivení prostoru jsou gravitační čočky. Objekt s intenzivním gravitačním polem ležící mezi pozorovatelem a zdrojem světla či jiného záření zakřivuje paprsky vycházející ze zdroje (obr. 16 a [36], b [62]).



Obr. 16a



Obr. 16b

Například kolem Slunce se zakřivení prostoru projevuje stáčením perihelia Merkuru a odklonem světelného paprsku hvězd od přímky. Odchylka v poloměru Slunce, která zakřivením vzniká mezi skutečným radiálním měřením a měřením plochy povrchu Slunce činí 0,5 km.

Je tedy zřejmé, že projevy zakřivení časoprostoru na Zemi jsou téměř bezvýznamné. Přesto se v praxi nedávno začaly využívat, neboť synchronní provoz satelitů pro GPS vyžaduje korekce vycházející právě z obecné teorie relativity.

Díky obecné teorii relativity se ukázalo, že prostor, který obýváme, je vlastně neeuklidovský, a navíc se geometrie opět stala středobodem fyziky, čímž došla docenění práce Gausse a Riemanna, jehož jméno bylo ještě na začátku Einsteinova bádání neznámé nejen vědci samotnému.

6 Význam neeuklidovských geometrií pro školu

6.1 Historie matematiky jako součást výuky

Na většině našich škol tradičně nebývá zvykem zavádět historii matematiky jako součást výuky. Důvodem je zřejmě časová omezenost vyučovací hodiny a kvantum učiva, které žáci mají za vymezený časový úsek zvládnout. Jsem však přesvědčena, že alespoň krátké výpravy do historie právě probíraného tématu přispějí k oživení výuky, zvláště v době, kdy se klade důraz na mezipředmětové vztahy. Nejenže si studenti rozšíří obzory zajímavými poznatky, ale zasazení strohých matematických faktů a údajů do historického kontextu (např. informace o tom, kdo, kdy a proč dospěl k určitému objevu) přispěje k jejich „zlidštění" a zpřístupnění pro žáka, který se na matematiku dívá s nedůvěrou jako na jasně danou, již uzavřenou a neměnnou vědu, ve které není místa pro pochybnosti ani další vývoj, jak někdy bývá ve škole prezentována. Přitom právě pochybnost je pro žáka tím, co žene dopředu jeho zvědavost a touhu objevovat a především dokazovat či ověřovat již objevené. K tomu je třeba věnovat pozornost kultivaci kritického myšlení žáků a studentů snahou o vymýcení formalismu konstruktivním přístupem k vyučování matematice a oslabováním jeho instruktivního charakteru, neboť ne mnoho žáků dnes usiluje o porozumění jevům, které jim učitel předkládá. Ukázkou toho, jak právě pochybnost a schopnost kritického úsudku přispívá k vývoji matematiky, rozšiřování stávajících a odhalování nových a netušených obzorů, je právě historie neeuklidovské geometrie, která může být v mnohém inspirací pro studenty i jejich učitele.

6.2 Neeuklidovské geometrie ve výuce

Hypotéza genetické paralely říká, že vývoj matematických představ v hlavě žáka má korespondovat s historickým vývojem těchto poznatků v matematice jako vědecké disciplíně. Právě proto je dobré, když učitel hledá v historii didaktickou inspiraci, neboť *učitel, který se zamýšlel nad omyly, blouděním, hledáním a úspěchy velkých matematiků, je lépe připraven porozumět omylům svých žáků, protože lépe rozumí složitým procesům odhalování matematiky*. [17, s.107]

Proces odhalování neeuklidovské geometrie je jedním z nejvzrušivějších momentů historie lidského uvažování a skrývá v sobě klíč ke konstruktivnímu přístupu k vyučování matematice. Je třeba se ptát, jak ti, kdo dospěli k určitému matematickému poznání, tápali, objevovali a nacházeli a proč šli právě tou či onou cestou.

Didaktickým problémem je přitom narušování stereotypů v geometrickém pohledu na naše okolí. Žáci i studenti by měli rozlišovat euklidovskou geometrii svého bezprostředního okolí a potřebu formalizovat prostorové vztahy v rámci celosvětových nebo i kosmických souvislostí. K tomuto účelu nám mohou dobře posloužit návodné otázky, úlohy či příklady z praxe, které jsou v rozporu se „zákony" euklidovské geometrie (o takových bude zmínka v kapitole 8 a podkapitole 7.7.1), které vzbudí ve studentovi potřebnou zvědavost a chuť pustit se do odhalování nových skutečností a odvahu zpochybnit úplnost dosud nabytých poznatků. Tato schopnost nedůvěřovat tak automaticky informacím, které jsou jim předkládány, pak u studentů přirozeně vede ke kultivaci kritického myšlení, čehož se snažíme dosáhnout, jak již bylo řečeno výše.

Důležitou úlohu v procesu poznávání a osvojování si nových poznatků či utváření dalších souvislostí mezi nimi přitom hraje pojmotvorný proces. Pojmy jsou pro člověka základem komunikace i myšlení a získáváním nových poznatků a zkušeností se zpřesňují a diferencují. Svět těch geometrických pojmů a vztahů mezi nimi se pak studentům osvětluje právě skrze nejrůznější úlohy. Podobný proces zpřesňování a třídění pojmů pak probíhá při vědeckém bádání, když člověk odhaluje dosud nepoznané jevy. Problémem při studentově snaze porozumět matematickým jevům může být učitelova věrnost tezi „pojem zavádíme definicí“, která je znakem formalismu ve vyučování, neboť vede k pouhému paměťovému učení, kdy student sice definici správně odříká, ve skutečnosti však neví, o čem mluví. *Učit žáky pojmu X neznamená učit je definici pojmu, ale rozšiřovat jejich zkušenosti s konkrétními případy pojmu X.* [17, s.109] Právě historie matematiky je nám v této otázce nápomocna, neboť žádný z důležitých pojmů se nezrodil definicí, ale vedla k němu určitá intuitivní představa. Vezmeme-li si tedy z historie ponaučení, je třeba studentovi nejprve předkládat konkretizace pojmu v různých souvislostech pomocí příkladů a návodných úloh a až posléze předložit definici, kterou student bude schopen na základě příkladů vyvodit víceméně samostatně. Neuzavřeme mu tím hned na začátku cestu k poznání a navíc mu vytvoříme prostor k vlastním dalším, mnohdy překvapujícím závěrům.

Pro seznámení studentů s neeuklidovskou geometrií je dle mého názoru nejvhodnější geometrie sférická, neboť mají již od raného dětství zažitou představu o kouli a jejím tvaru. Na kouli se navíc všechny jevy odehrávají přímo před jejich zrakem. Z pedagogického hlediska je zde podstatným momentem určitá změna v myšlení, překročení hranic zažitého způsobu nazírání na svět a okamžik rozpoznání oprávněnosti existence dalších způsobů uvažování. Důležité tedy je neunáhlit se příliš s tímto „nabouráváním“ studentových představ a zvyklostí v uvažování, aby zbytečně nedošlo k chaosu. Proto si myslím, že je vhodné seznámit studenty s tímto světem až na střední škole, kde ostatně byla sférická geometrie ještě před šedesáti lety běžně vyučována. Ve vyšších ročnících je pak možné předložit studentům i základní poznatky z geometrie hyperbolické, a to alespoň jako zajímavost.

Ostatně celá neeuklidovská geometrie může mít ve výuce pouze jakýsi informační charakter. V jednorázovém nadstandardním bloku hodin pak lze studenty seznámit s jiným pohledem na svět a rozšířit jejich obzory ukázkou základních zákonitostí neeuklidovské geometrie, jež mohou být prezentovány jako rozdíly se zákony geometrie euklidovské. Náplní takového cyklu mohou být úlohy například o zeměkouli, ve kterých se studenti hravou formou s novými zákonitostmi seznámí a navíc ocení jejich praktickou využitelnost (např. viz podkapitola 7.7.1).

Jiným, vážnějším pojetím pak může být systematické zabudování sférické geometrie do geometrie euklidovské jakožto součásti, kdy bude docházet k průběžné konfrontaci pojmů a řešení konkrétních úloh v rovině i na kouli, a následné srovnání výsledků tak může být samozřejmou součástí výuky. [21]

6.2.1 Přínos výuky neeuklidovských geometrií

Důvodů, proč tématem neeuklidovských geometrií obohatit výuku, je celá řada. Především se, zvláště pak geometrie sférická, blíží něčemu, co lze nazvat „reálnou matematikou“. Jedna z nejčastějších otázek studentů v hodinách matematiky zní: „A k čemu mi to bude?“ Při výkladu sférické geometrie se učitel nemusí potit při vyhýbavé odpovědi typu „budete to potřebovat při přijímacích zkouškách na vysokou školu“ nebo „formuje to vaše myšlení“. Sférická geometrie hraje důležitou roli v mnoha oblastech lidské činnosti – v geografii, astronomii, fyzice, technických vědách, umění, designu, stavitelství a architektuře, čímž také vznikají korespondence mezi matematikou a zeměpisem či fyzikou, nebo dokonce výtvarnou výchovou. Navíc se změnou nazírání na svět formuje kritické myšlení, a tím i samostatné uvažování a jednání, když je student nucen uvažovat v širších souvislostech a vybočit z mezí, do kterých je tlačen tradiční výukou matematiky. V neposlední řadě geometrie koule nepochybně rozvíjí prostorové vidění a studentovu představivost. Při srovnávání euklidovské a neeuklidovské geometie a odhalování platnosti některých poznatků navíc studenti mohou lépe pochopit planimetrii v rovině. Přiblížením základů hyperbolické geometrie, která je tak důležitá v moderní fyzice i jiných vědách, pomůžeme zase studentům poodkrýt jakési „tajemno“, které toto téma zahaluje.

Historie neeuklidovských geometrií, která by měla praktické znalosti doprovázet, také nemusí být zanedbatelnou součástí výuky. Objev těchto geometrií v 19. století přinesl nový pohled na geometrizaci reálného světa, když ukázal něco, co bylo v rozporu s obecně přijatým názorem i každodenní smyslovou zkušeností jedince. Znalost historie této revoluční změny v geometrii mimo jiné vybízí studenty (ale i učitele) k toleranci vůči jinému pohledu a odlišnému způsobu uvažování, ke schopnosti vnímat lidi s odlišným názorem ne jako nepřátele, ale jako partnery při hledání pravdy. Navíc nejenom že nabádá studenty k hledání nepoznaného, ale rovněž vede jejich učitele k odvaze dávat jim k tomu příležitost, a rozvíjet tak jejich intuici, fantazii, vytvářet objekty, které ještě neviděli a rozhodovat o možnosti jejich existence.

6.2.2 Lénártův projekt

Průkopníkem v oblasti didaktiky neeuklidovských geometrií je v současné době maďarský matematik István Lénárt.

Se svým projektem srovnávací geometrie, v jehož rámci zavádí výuku neeuklidovských geometrií do škol, seznamuje českého čtenáře prostřednictvím časopisu *Učitel matematiky*, v článku [21].

6.2.2.1. Popis projektu

Úlohy určené v rámci tohoto projektu žákům jsou jak z prostředí geometrie euklidovské, tak z geometrie sféry, a některé i z hyperbolické geometrie, která je zde modelována na hemisféře. Důležité je, že Lénártův projekt dle autorových slov *nepředpokládá žádné předchozí znalosti geometrie sféry, pouze běžné životní zkušenosti, které má s tvarem koule již žák základní školy* [21, s.1], a může ho tak využít jakýkoli učitel matematiky bez speciální předchozí přípravy žáků.

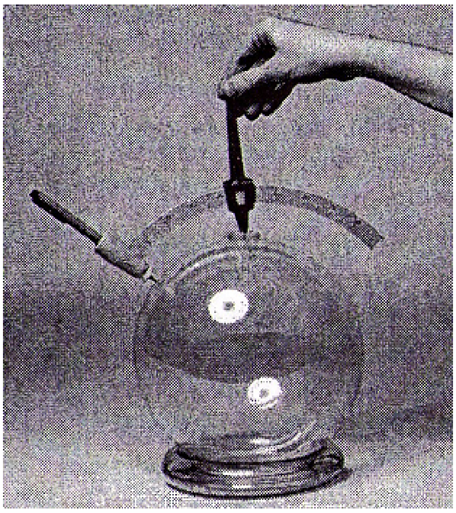
Lénárt zpřístupňuje žákům svět nových geometrických vztahů prostřednictvím úloh, žák přitom používá k jejich řešení rýsovací nástroje, případně i počítačovou techniku, pokud je třeba. Celý projekt je, jak vypovídá název, založen na srovnávání geometrie roviny, sféry a hyperbolické geometrie, proto jsou úlohy z prostředí všech třech oblastí. Hyperbolická geometrie přitom rozšiřuje a doplňuje poznatky z předchozích dvou oblastí.

Jak již bylo řečeno, z modelů hyperbolické geometrie autor volil místo otevřeného kruhu či otevřené poloroviny model polokoule, a to tak, že sféru rozděluje rovníkem na severní a jižní; všechny body severní hemisféry bez rovníku jsou pak považovány za body hyperbolické geometrie. Svou volbu autor odůvodňuje takto: *Model polokoule velmi názorně demonstruje pojmy jako* *hyperbolická přímka, kruh, měření úhlů atd. Navíc při práci s modelem polokoule lze výborně využít zkušenosti ze sférické geometrie. Je známo, že u většiny studentů se zkušenosti z planimetrie omezují na eukleidovskou geometrii, naproti tomu polokoule, právě pro svou odlišnost od roviny, je k představení nového geometrického systému vhodnější, než kdybychom museli již zažité planimetrické pojmy a modely znovu definovat v rámci jiného systému axiomů.* [21 č.1, s.2]

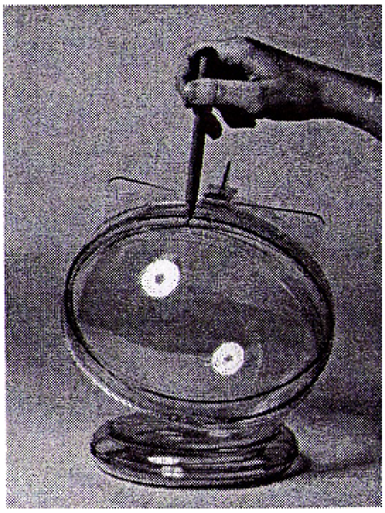
Lenárt zavádí výuku neeuklidovských geometrií poměrně brzy: První etapa výuky zahrnuje úlohy v euklidovské rovině společně s paralelními úlohami na sféře, později se začnou objevovat úlohy o hemisféře, a to u žáků čtrnáctiletých. Projekt využívá výukové pomůcky s názvem Lénárt Sphere.

6.2.2.2 Lénárt Sphere

Tento komplet zahrnuje průhlednou kouli velikosti fotbalového míče, na jejímž povrchu žáci kreslí a měří, hemisférickou fólii (tzv. náčrtník), jež se dá na kouli upevnit a slouží pak k témže účelům, dále sférické měřítko-úhloměr, s jehož pomocí lze na kouli rýsovat hlavní kružnice (obr. 17 [21, s.2]), sférické kružítko k rýsování sférických kružnic libovolného poloměru (obr. 18 [21, s.2]) a další součástí je obal „Živá planeta“, s jehož pomocí lze změnit kouli na globus, který je možné pokreslit.



Obr. 17



Obr. 18

První varianta této soupravy vznikla v Maďarsku již roku 1986, výrazně zdokonalenou formu pak vydalo kalifornské nakladatelství Key Curriculum Press roku 1996 pod názvem Lénárt Sphere. Různé úrovně této sady si lze zakoupit na webové adrese [69] spolu s dalšími pomůckami a knihami, které usnadňují výuku neeuklidovských geometrií. Zde nabízená poněkud komerčnější sada obsahuje osmidílnou průhlednou plastovou kouli se stojánkem, fólii, z které je možno i vystřihovat tvary, sférické pravítko pro rýsování hlavních kružnic, sférické kružítko s kompasem pro určování polohy, sadu popisovačů, nástěnku pro prezentaci konstrukcí, obal „Živá planeta“, šestnáctistránkovou brožurku *Začínáme s Lénártovou sférou* a jiné (obr. 19 [69]).

Obr. 19

Jak Lénárt píše, tento *materiál sloužil po léta podnikavým učitelům a studentům jako určitá lahůdka, zajímavost. Dodnes se nestal povinnou učební látkou. O to jsem ani neusiloval, protože jsem přesvědčen, že takový výukový program může přinést pozitivní výsledky pouze za předpokladu houževnaté práce, při dobrovolném přesvědčení žáků i učitelů o správnosti takové volby. Vnucenou, jen s poloviční chutí přijímanou povinnost pokládám nejen za zbytečnou, ale za vysloveně škodlivou z hlediska projektu i jeho účastníků.* [21, s.79] Proto nejsou k dispozici statisticky přesvědčivé údaje, ale dle autorových slov zazněly na projekt ze stran vyučujících i studentů ve valné většině kladné ohlasy a soudy.

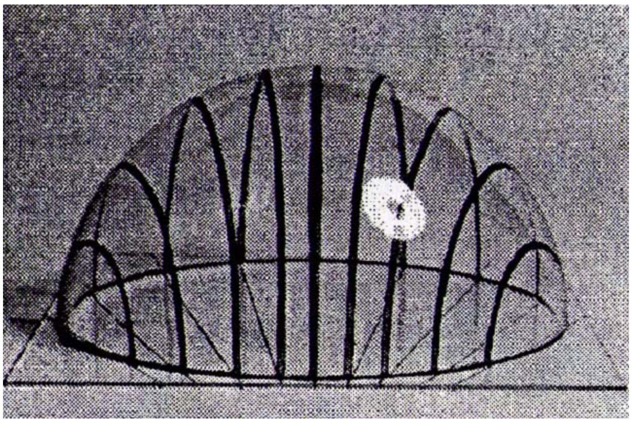
Hromadnému šíření projektu ve vzdělávacích institucích však brání finanční stránka, jelikož souprava není zrovna nejlevnější (speciální set pro výuku ve třídě stojí téměř 420 $). Autor míní, že další překážkou je nedostatek času a energie pedagogů, a za nejdůležitější překážku považuje to, co nazývá „neomylností“: *Projektem se zabývám několik let a dodnes se mi stává, že mi některý z deseti či dvanáctiletých žáků položí otázku, na kterou jsem schopen odpovědět jen obtížně nebo taky vůbec.* [21, s.81]

6.2.2.3 Porovnání geometrických objektů ve třech geometriích v rámci projektu

Ve svém článku [21] Lénárt seznamuje čtenáře se způsoby, kterými prezentuje odlišnosti ve vlastnostech některých geometrických objektů v jednotlivých typech geometrií. V této podkapitole bude jeho popis stručně nastíněn.

6.2.2.3.1 Přímky a svazek přímek

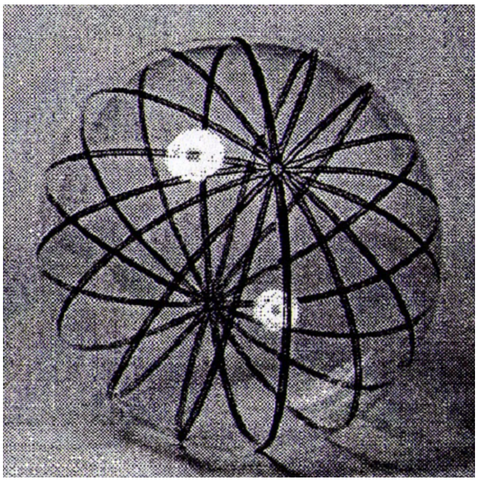
V euklidovské rovině je přímkou „obyčejná přímka“, jak ji známe, na sféře zastupuje přímku hlavní kružnice a přímkou na hemisféře je každá polokružnice, která je řezem hemisféry a roviny kolmé na rovinu rovníku, neboli polokružnice kolmá na rovník (obr. 20, [21, s. 4]).



Obr.20

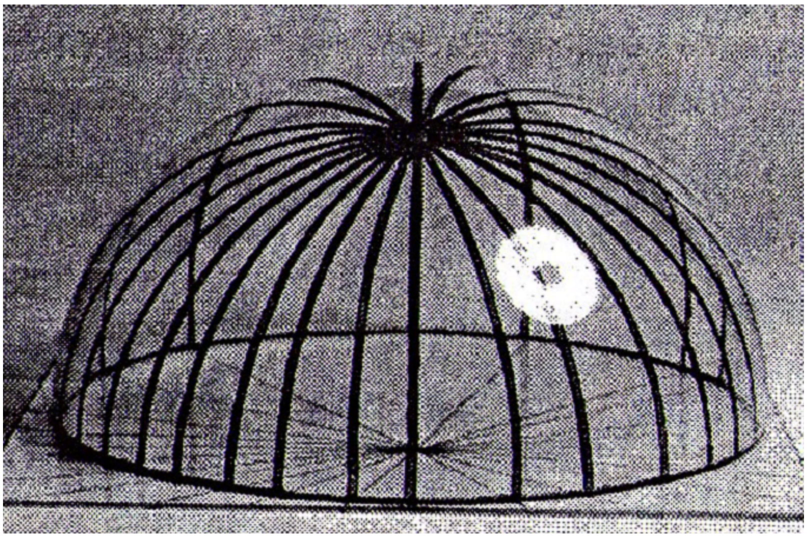
V euklidovské rovině nazýváme svazkem přímek všechny přímky procházející jedním bodem, Lénárt svazkem navíc nazývá i všechny přímky rovnoběžné s danou přímkou. V rovině tedy existují dva druhy svazků přímek.

Na sféře nazýváme svazkem přímek množinu všech hlavních kružnic procházejících jedním pevně zvoleným bodem sféry (obr. 21, [21, s. 4]). Existuje zde tedy jen jeden druh svazku přímek, neboť neexistují rovnoběžné hlavní kružnice.

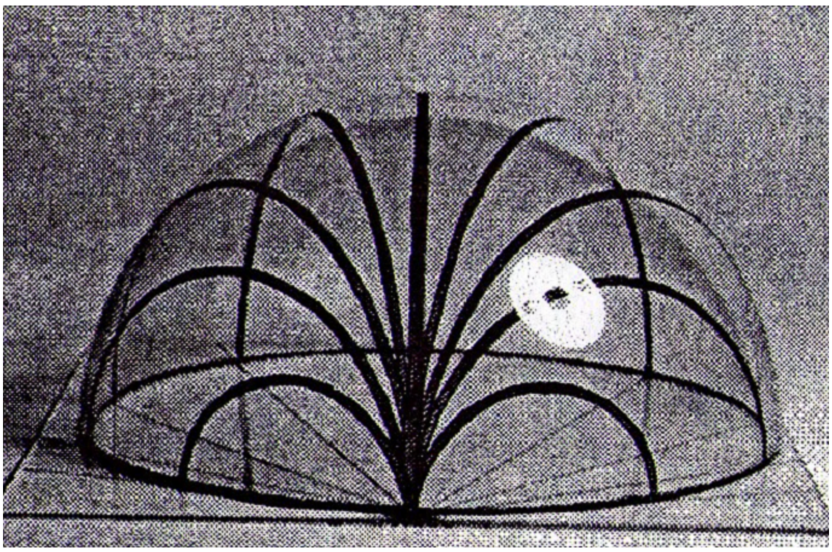


Obr. 21

Na hemisféře nazýváme svazkem přímek množinu všech řezů hemisféry rovinami kolmými na rovník procházejícími daným bodem na dané přímce, jež je rovněž kolmá na rovinu rovníku hemisféry. Leží-li průsečík přímek na hemisféře, nazýváme takový svazek svazkem prvního druhu (obr. 22 [21, s.5]), leží-li průsečík na kružnici rovníku, mluvíme o svazku druhého druhu (obr. 23 [21, s.5]), a leží-li vně kružnice hemisféry, jedná se o svazek druhu třetího (obr. 20). Další typ svazku, tedy polokružnice, které vzniknou jako řezy hemisféry rovinami rovnoběžnými s danou rovinou kolmou na rovinu rovníku, přiřazuje Lénárt pro zjednodušení ke svazku přímek třetího druhu, ve skutečnosti však v hyperbolické geometrii existují čtyři druhy svazků přímek.



Obr. 22

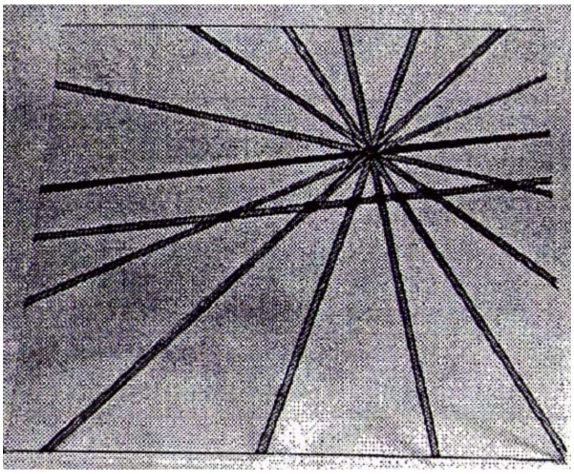


Obr. 23

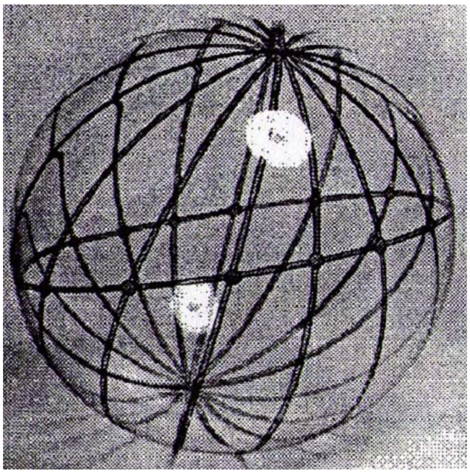
6.2.2.3.2 Neprotínající se přímky, rovnoběžnost

Zákony rovnoběžnosti v jednotlivých typech geometrií prezentuje Lénárt právě pomocí svazků přímek a jedné přímky mimo tento svazek a zkoumá, kolik přímek ze svazku je s přímkou mimo něj rovnoběžných.

V euklidovské rovině existuje právě jedna taková přímka (obr. 24 [21, s.6]), na sféře však všechny přímky svazku protínají danou přímku mimo něj, takže zde žádné rovnoběžné přímky neexistují (obr. 25 [21, s.6]).

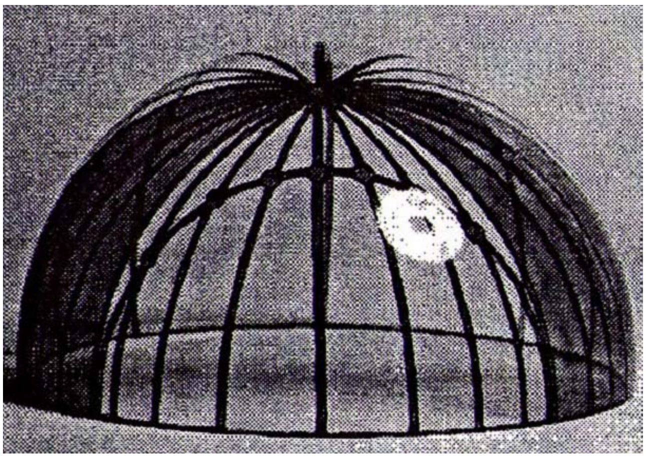


Obr. 24



Obr. 25

Na hemisféře pak existuje nekonečně mnoho přímek, které danou přímku mimo svazek protínají a nekonečně mnoho těch, které ji neprotnou (obr. 26 [21, s.6]).



Obr. 26

6.2.2.3.3 Vzdálenost

V euklidovské rovině je přímka, jak víme, nekonečná a umíme zde porovnat délky jakýchkoli dvou úseček. Na sféře je délka hlavní kružnice rovna $2\pi r$, kde r je poloměr kulové plochy, a každá přímka na sféře tak má konečnou délku. Úsečkou je pak část oblouku hlavní kružnice a jeho délka je dána poměrem k délce přímky (tedy hlavní kružnice). Budeme-li měřit např. délku rovníku mezi 90. a 110. poledníkem, bude tedy rovna $\pi r/10$, kde r je poloměr zeměkoule.

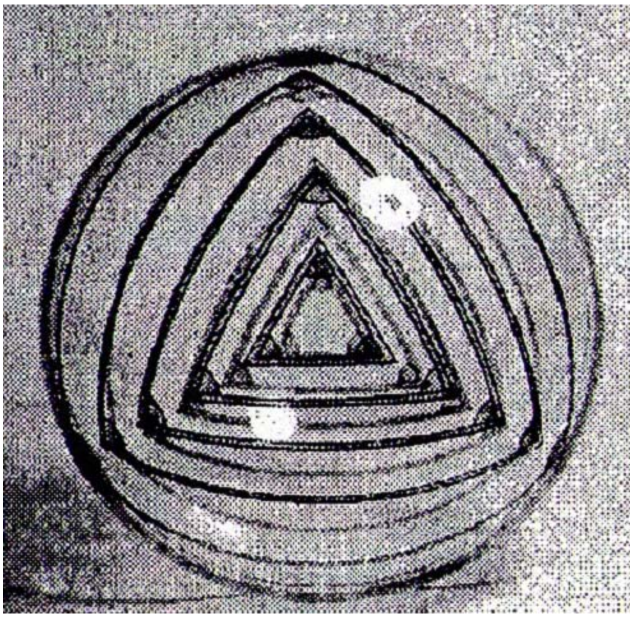
Na hemisféře sloužící jako model hyperbolické geometrie však nemůžeme pojem vzdálenosti opřít o životní zkušenosti. Každá přímka je zde polokružnicí, jejíž koncové body leží na rovníku, který už však není součástí modelu. Obyvatel hyperbolického světa, který se po přímce pohybuje stále stejnou rychlostí a stejně dlouhými kroky, se nám, vnějším pozorovatelům jeví tím pomalejší, čím blíže je rovníku, a tím kratší se zdají být jeho kroky. Nebohý „Hyperboliťan“ navíc k rovníku nikdy nedojde. V hyperbolické geometrii je tedy přímka nekonečná stejně jako v euklidovské rovině.

6.2.2.3.4 Velikost úhlu dvou přímek

V euklidovské rovině měříme úhly úhloměrem a můžeme naměřit odchylku přímek v rozmezí od 0° do 90°. Na sféře a hemisféře změříme úhel, který svírají dvě přímky (tedy kružnice či polokružnice) tak, že jednoduše změříme úhel, který svírají tečny k těmto kružnicím (polokružnicím) vedené jejich průsečíkem. Zde nás tedy smysly neklamou a úhly vidíme ve všech geometriích takové, jaké skutečně jsou.

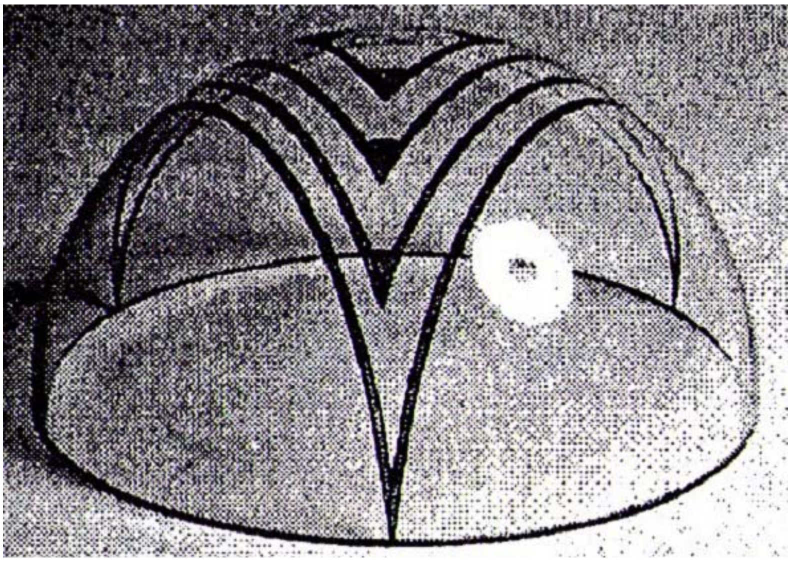
6.2.2.3.5 Součet úhlů v trojúhelníku

Lénárt se ve svém popisu zabývá pouze trojúhelníky rovnostrannými. V rovině má každý jejich vnitřní úhel přirozeně velikost 60°, a součet úhlů v trojúhelníku je tedy roven 180° nezávisle na velikosti trojúhelníku. Na kouli se vnitřní úhly v trojúhelníku zvětšují s jeho velikostí (obr. 27 [21, s.75]). Malé trojúhelníky se podobají trojúhelníkům rovinným, takže velikost každého z jejich vnitřních úhlů se blíží 60°, velké trojúhelníky se podobají hlavním kružnicím, takže velikost jejich vnitřních úhlů se blíží 180°. Na kouli tedy můžeme naměřit součet úhlů v trojúhelníku v otevřeném intervalu (180°; 540°).



Obr. 27

Na polokouli, v hyperbolické geometrii, se naopak velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku zmenšují se zvětšující se velikostí trojúhelníku. Malé trojúhelníky se také blíží útvarům rovinným a jejich vnitřní úhly velikosti 60°; čím větší trojúhelník, tím však „špičatější" vrchol s vnitřním úhlem blížícím se 0° (obr. 28 [21, s.76]). V hyperbolické geometrii můžeme tedy jako součet vnitřních úhlů v trojúhelníku naměřit jednu z hodnot otevřeného intervalu (0°; 180°).



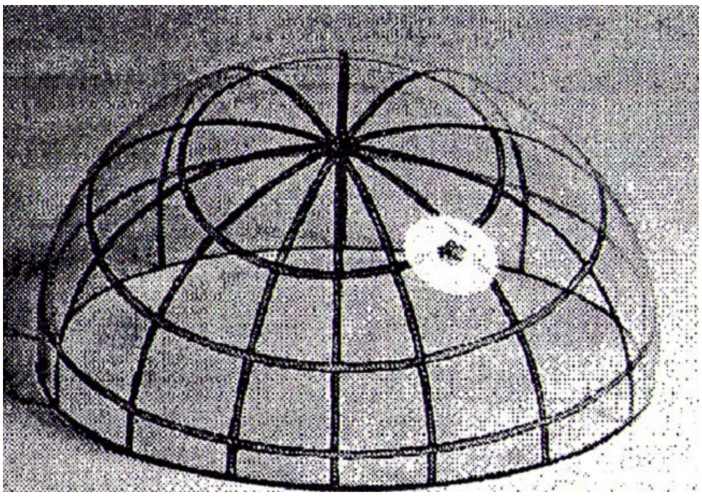
Obr. 28

6.2.2.3.6 Kružnice a cykly

V hyperbolické geometrii je obtížné znázornit oblouky stejné velikosti, a tak nemůžeme narýsovat množinu bodů stejně vzdálených od středu. Aby se vyvaroval těchto obtížností, zavádí Lénárt kružnici jako *spojitou křivku, která je kolmá ke každé přímce svazku.* [21, s.76]

V rovině a na kouli tak získáme kružnice, jejichž střed leží ve společném průsečíku přímek svazku, v hyperbolické geometrii se však jedná o kružnice, jejichž střed na tomto průsečíku neleží (obr. 29 [21, s.76]).

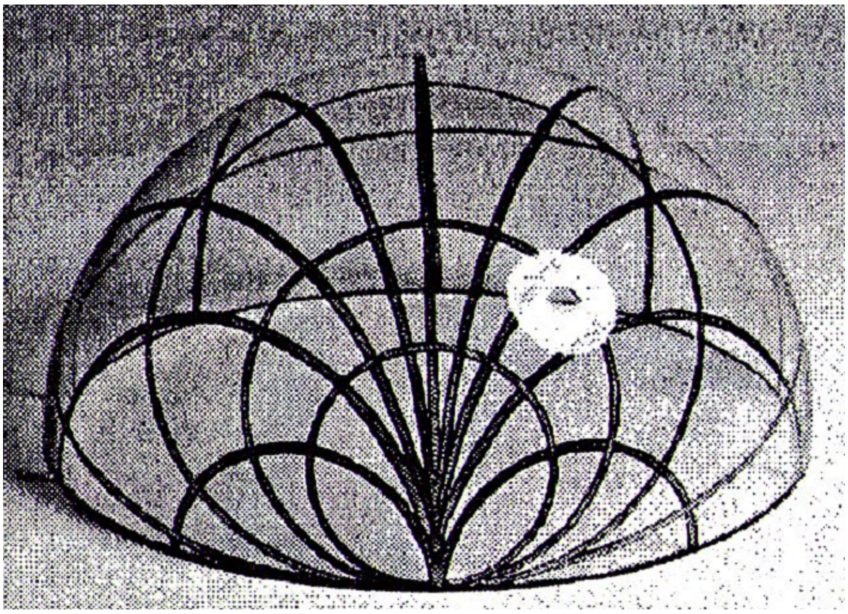
.



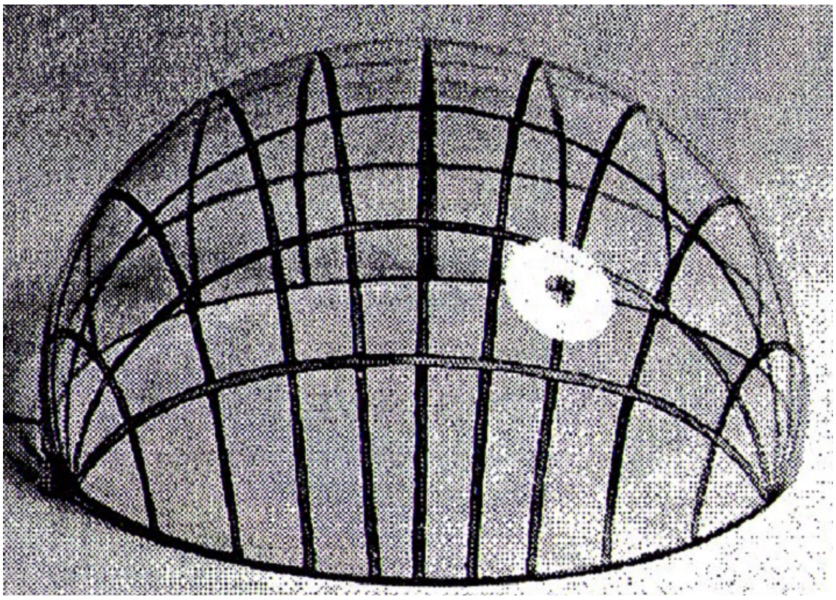
Obr. 29

U svazku přímek druhého druhu leží společný střed kružnic dokonce mimo model hyperbolické plochy, na rovníku (obr. 30 [21, s.77]). Takové kružnice, dotýkající se rovníku, tedy nemají v hyperbolické geometrii žádný střed a nazýváme je *paracykly*.

Sestrojíme-li stejným způsobem „kružnice“ u svazku přímek třetího druhu, dostaneme jen kruhové oblouky s koncovými body na rovníku (obr. 31 [21, s.77]). Takové pak nazýváme *hypercykly*.



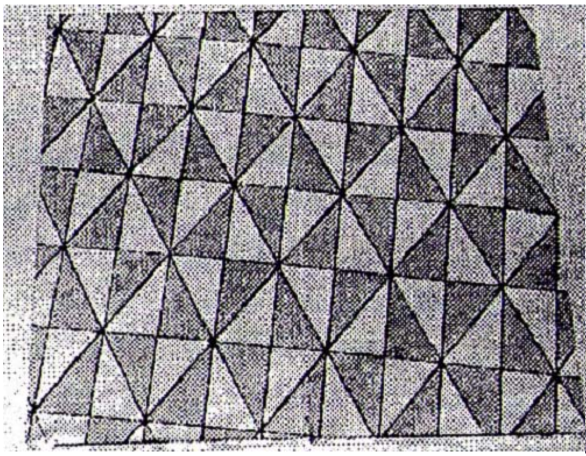
Obr. 30



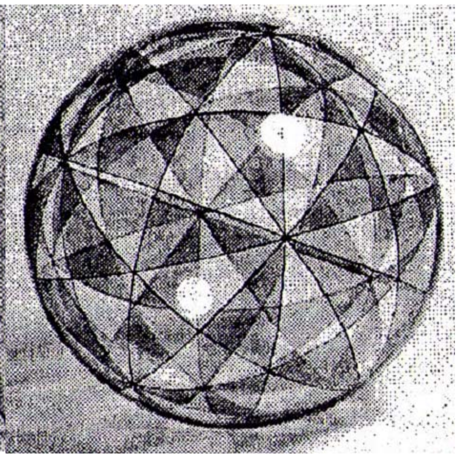
Obr. 31

6.2.2.3.7 Mozaiky a dlaždice

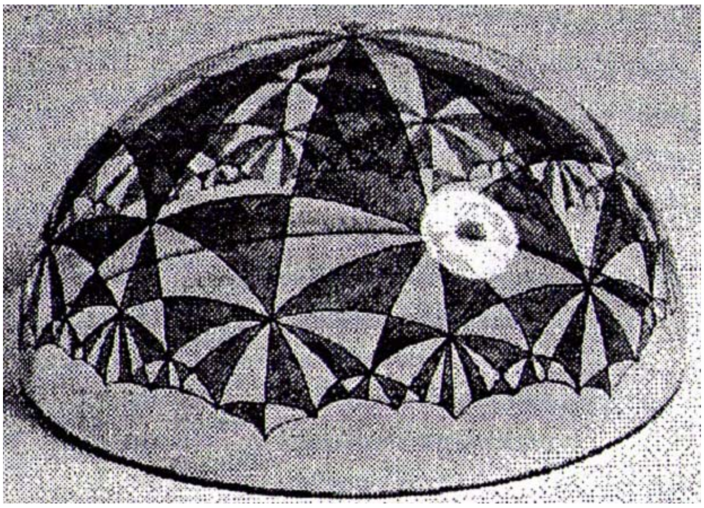
Pokrýváme-li v jednotlivých geometriích povrch shodnými mnohoúhelníky, které se navzájem nepřekrývají, v rovině (obr. 32 [21, s.78]) a na kouli (obr. 33 [21, s.78]) se zdají být stále shodné, na polokouli, v geometrii hyperbolické, se však jejich strany zdánlivě zmenšují, protože se jednotlivé vzdálenosti zdají být kratší. Všechny úhly však zůstávají shodné (obr. 34 [21, s. 78]).



Obr. 32



Obr. 33



Obr. 34

Zvláštnosti, které vznikají pokrýváním povrchu shodnými útvary v jednotlivých geometriích, využívá ve svých grafikách výtvarník Maurits Cornelis Escher (více v kap. 8).

7 Výzkum

7.1 Cíl výzkumu

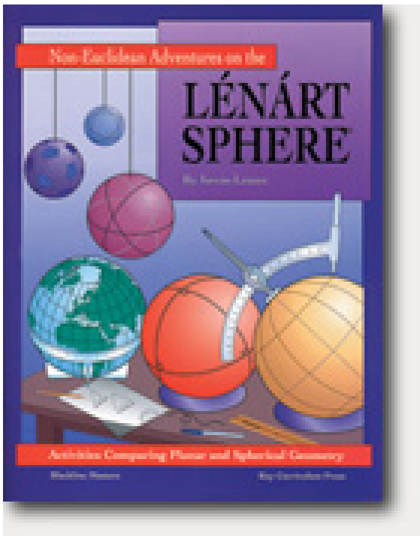
Ve svém výzkumu jsem se zaměřila především na to, jestli a do jaké míry jsou studenti střední školy schopni a ochotni přijmout poznatky neeuklidovské geometrie, konkrétně geometrie sférické, a zda dokážou úspěšně tyto poznatky uplatnit v příkladech jak teoretických, tak praktických. Dále jsem se zaměřila na jejich schopnost porovnat geometrii euklidovskou a sférickou a na základě tohoto srovnání samostatně vyvodit závěry o sférické geometrii a tvrzení pro ni platná.

Z časových důvodů bylo možné prověřit u studentů pouze jeden typ neeuklidovské geometrie. Přirozeně jsem se rozhodla pro geometrii sférickou, která je z výše popsaných důvodů pro studenty mnohem samozřejmější než geometrie hyperbolická, již je možno zařadit po probrání sférické geometrie jako zajímavost, a aby si studenti pohled na geometrii ucelili.

Cílem výzkumu je tedy dozvědět se, zda mají studenti střední školy o tuto problematiku zájem, zhodnocení jejich připravenosti na přijetí poznatků neeuklidovské geometrie a dále zmapování nejčastějších obtíží, se kterými se studenti potýkali při řešení příkladů z geometrie sférické, a navržení a prověření možných řešení těchto obtíží. Výsledky výzkumu mohou najít využití u učitelů, kteří se rozhodnou seznámit své studenty se základy neeuklidovské geometrie a kterým mohou být inspirací jak ve volbě vhodných příkladů, tak při rozhodování o tom, co zdůraznit a čeho se vyvarovat, aby studenti vstřebali látku co nejpřirozeněji.

7.2 Zdroj úloh a výběr řešitelů

Na výše zmíněných webových stránkách [69] nakladatelství Key Curriculum Press je nabízena ke koupi jedna z Lénártových knih *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere* (obr. 35 [69]). Jsou zde k dispozici ukázkové příklady z prvních kapitol knihy, které by tedy měly studenty zavést do neeuklidovské geometrie, a vštípit jim tak její základy.



Obr. 35

Přeložené a pro potřeby svého výzkumu upravené příklady (viz Příloha 1 a Příloha 2) jsem rozdala studentům všech ročníků střední průmyslové školy technického zaměření, každý z ročníků přitom navštěvovalo kolem třiceti studentů. Škola tohoto typu se mi pro výzkum zdá vhodná především proto, že se zde studenti setkávají s geometrií častěji než ve školách všeobecného zaměření, tříbí svou prostorovou představivost již od prvního ročníku při hodinách technického kreslení a povinnou součástí výuky je deskriptivní geometrie. Nemyslím si, že sférická geometrie není vhodná pro výuku na gymnáziích, naopak, ale výše vyjmenované výhody technické střední školy tvoří vhodné zázemí pro výzkum, který musel být bohužel časově omezený a proběhl bez pomůcek, jež tvoří Lénártovu sadu a které studentům usnadňují práci.

7.3 Podoba a typy úloh

Úlohy, ve kterých se studenti seznamují se základy sférické geometrie, jsou zaměřeny především na možnosti protnutí přímek a rovnoběžnost přímek v obou typech geometrií, čímž korespondují s vývojem představ v historii neeuklidovských geometrií. Studenti zde nejprve provádějí známé geometrické konstrukce v rovině a poté obdobné konstrukce na povrchu koule, aby mohlo následně dojít ke srovnání konstrukcí v obou typech geometrií (úlohy 1 až 10). Je zde rovněž apelováno na studentovu představivost a předvídavost, když má dopředu odhadovat řešení v (pro něj zatím neznámé) sférické geometrii.

V další části (úlohy 11, 12, 13 a 15) jsou úkoly zaměřeny čistě na oblast geometrie sférické. Dochází v nich především ke specifikaci otázky rovnoběžnosti ve sférické geometrii a důvodu odlišnosti od geometrie euklidovské. V závěru (úloha 14) se pak studenti snaží o zobecnění, vytvářejí postulát o rovnoběžnosti platný pro sférickou geometrii (opět na základě porovnání s postulátem platným v euklidovské rovině).

Řešitelé rovněž vyjadřují svou názor, když odpovídají na otázky, které je vyzývají k hodnocení obou geometrií, a formulují důvody, proč je ta která geometrie zajímavější (úlohy 9 a 10).

Lénárt uvádí tyto parametry pro vypracování celé sady příkladů:

Typ školy:	Střední škola
Předpoklady:	Studenti znají termíny přímka a hlavní kružnice.
Čas výuky:	25 – 40 minut

Osobně se domnívám, že výuka ve třídě, alespoň v českém prostředí, vyžaduje přece jenom více času. Tématu úvodu do sférické geometrie prezentovaného podobnou formou doporučuji věnovat alespoň dvě vyučovací hodiny, aby žáci měli možnost proniknout do této problematiky hlouběji.

7.4 Průběh výzkumu

Výzkum probíhal ve dvou fázích. Dále stručně popíšu průběh každé z nich:

7.4.1 Průběh první fáze výzkumu

V první fázi jsem se zaměřila na to, jak studenti přijmou zákonitosti sférické geometrie a jakým způsobem budou s to je uplatnit v konkrétních příkladech, aniž budou předem zasvěceni do základů neeuklidovské geometrie. Jak již bylo řečeno, sám Lénárt pokládá u žáků za předpoklad úspěšného řešení pouze znalost pojmu hlavní kružnice a přímka a vzhledem k obeznámenosti studentů s tvarem koule jsem ani já nepovažovala předchozí hlubší vhled do problematiky za bezpodmínečně nutný. Studenti měli tento vhled postupně získávat v průběhu řešení příkladů a jejich úkolem bylo samostatné „objevení“ geometrie sférické a vyvození pravidel, která pro ni platí. Příklady v první fázi řešili jako týdenní domácí úkol studenti 2. a 3. ročníku. Aby byly splněny předpoklady, uvedla jsem do pracovního listu několik definic hlavní kružnice a připojila obrázky jako příklad. Pracovní list v podobě, v jaké jim byl rozdán, označuji jako „Verze 1“ a přikládám ho v Příloze 1; práce studentů z první fáze a její výsledky budou podrobně rozebrány v podkapitole 7.6.

7.4.2 Průběh druhé fáze výzkumu

Na základě nejčastějších chyb, kterých se studenti dopustili při práci na Verzi 1, jsem vypracovala nový, opravený pracovní list, který zde označuji jako „Verze 2“, v němž se pomocí usnadněného či zpřesněného zadání snažím těmto chybám předejít a eliminovat nejasnosti, které studenti pociťovali v zadání Verze 1. Opravený pracovní list přikládám jako Přílohu 2.

Dále jsem na základě obtíží, se kterými se studenti potýkali, a nejčastějších otázek, jež pokládali, vypracovala jednu z možných podob úvodní hodiny, jejímž prostřednictvím lze studenty do neeuklidovské geometrie zasvětit a vzbudit v nich o tuto problematiku zájem. Tato hodina bude podrobněji rozebrána v podkapitole 7.7.1 a přípravu na ni přikládám v Příloze 3.

Nová verze příkladů a úvodní hodina se staly podkladem pro druhou fázi výzkumu, jež probíhala ve třech prvních ročnících a jednom ročníku čtvrtém (bohužel jsem neměla možnost opět pracovat s řešiteli Verze 1) a ve které jsem sledovala, jestli a jak se změní řešení studentů a jejich přístup k neeuklidovské geometrii, když s ní budou dříve blíže seznámeni nebo budou mít k dispozici zpřesněný pracovní list, který se snaží podpořit správné řešení. Výzkum měl tedy několik částí:

1) V jednom z prvních ročníků (1.G) jsem znovu použila Verzi 1, ale než studenti začali úlohy řešit, zařadila jsem úvodní hodinu a sledovala, jak tím budou studentská řešení ovlivněna.
2) V jiném prvním ročníku (1.A) jsem použila již Verzi 2, ale bez předchozí úvodní hodiny a zajímaly mne především odlišnosti od řešení studentů z první fáze výzkumu.
3) V posledním z prvních ročníků (1.D) jsem zařadila úvodní hodinu a následně řešení příkladů Verze 2 a po-

zorovala jsem, zda bude splněn logický předpoklad nejvyšší úspěšnosti těchto řešitelů (ze všech tří prvních ročníků).

4) A konečně, studentům čtvrtého ročníku jsem bez předchozí přípravy rozdala nejprve Verzi 1 a poté, co ji vyřešili a odevzdali, rozdala jsem příklady znovu, tentokrát však ve Verzi 2, a zaměřila jsem se na to, zda studenti budou schopni pouze na základě změněného zadání opravit své chyby a dojít ke správným závěrům.

Z časových důvodů vypracovávali studenti ve většině případů zadané úkoly formou týdenní domácí práce, jelikož považuji za důležité věnovat dostatek prostoru zejména úvodní hodině o neeuklidovské geometrii, pokud se jí vyučující rozhodne zařadit.

Pro větší přehlednost shrnuji průběh celého výzkumu v tabulce 2.

Fáze výzkumu	**Forma a typ zadání**	**Forma vypracování**	**Ročník / třída**
1) 1. fáze	Verze 1	DÚ	2. a 3. ročník
2) 2. fáze	**1)** úvodní hodina + Verze 1	DÚ	1. G
	2) úvodní hodina + Verze 2	DÚ	1. D
	3) Verze 2	školní práce	1. A
	4) Verze 1 + Verze 2	DÚ	4. ročník

Tab. 2

7.5 Faktory ovlivňující řešení úloh

Ještě před samotnou analýzou řešení jednotlivých úloh studenty znovu připomínám a upřesňuji některé faktory, které mohly řešení v obou fázích výzkumu ovlivnit a jež je třeba vzít na vědomí při konstatování závěrů z analýzy vyplývajících.

1) Studenti v první fázi výzkumu vypracovávali příklady zcela samostatně, neměli tedy možnost přímých otázek týkajících se zadání, nemohli si ověřit, zda zadání pochopili správně apod. (Přestože jsem se formou zadání úloh snažila eliminovat potřebu doplňujících otázek, k nejasnostem docházelo, i když jich nebylo mnoho.)

   Samostatně vypracovávali úlohy i studenti ve druhé fázi výzkumu, všichni však byli v průběhu zadávání upozorněni na to, že si mají úlohy přečíst a zeptat se na nejasnosti, a tuto možnost měli po celý týden, kdy mezi námi docházelo k přímému kontaktu. Studenti 1.A, kteří řešili úlohy přímo ve škole, navíc měli možnost ptát se přímo v průběhu práce.

2) Úlohy byly studentům zadány náhle, jako nadstandardní učivo a v případě 2., 3., 4. ročníku a třídy 1.A bez předchozího úvodu do problematiky. Na některých řešeních se tak projevil vliv právě probíraného tématu, například analytické geometrie ve 3. ročníku.

3) Podstatný vliv na všechna řešení měl fakt, že studenti neměli k dispozici Lénártovu sadu pro výuku sférické geometrie, ani nic jiného, co by ji nahradilo, proto museli veškeré konstrukční úlohy určené pro povrch koule řešit formou náčrtku v rovině euklidovské.

   Na rozdíl od studentů, kteří se zúčastnili první fáze výzkumu, měli studenti prvních ročníků ve druhé fázi k dispozici míčky, na něž mohli svá řešení zakreslovat před načrtnutím do pracovních listů nebo v průběhu úvodní hodiny. Studentům čtvrtého ročníku byl tento způsob užívání kulatých předmětů při řešení alespoň doporučen. Bylo tak možné studovat, jestli se v závislosti na užívání modelu zvýší pravděpodobnost úspěšného řešení.

4) Na mnoha vyřešených úlohách je patrné, že docházelo k opisování, ačkoli studenti věděli, že učivo je jim předkládáno spíše jako zajímavost a za úlohy vyřešené nesprávně či vůbec je nečeká žádný postih v podobě špatné známky. Mohlo tak dojít k tomu, že snáze ovlivnitelný student raději opsal většinové nesprávné řešení, než aby uvedl své správné nebo jiné; předpokládám však, že se studenti uchýlili k opisování těch úloh, s jejichž řešením si nevěděli rady.

7.6 První fáze výzkumu

Analýza studentských řešení, která následuje, si neklade za cíl podat přesnou statistiku o počtu úspěšných a neúspěšných řešení, neboť to autorka této práce nepovažuje za podstatné, ale spíše upozornit na chyby, které se mohou u studentů při řešení úloh z neeuklidovské geometrie vyskytnout, a pomocí rozboru těchto chyb podat náměty na vylepšení předloženého zadání a na způsob zasvěcení studentů do základů neeuklidovské geometrie.

V řešení studentů, která uvádím jako příklady, opravuji gramatické chyby, nikoli však chyby stylistické.

7.6.1 Analýza jednotlivých úloh a řešení první fáze výzkumu

Typ zadání: Verze 1

Řešitelé: Studenti 2. a 3. ročníku

Forma vypracování: DÚ

Čas na vypracování: Týden

Pomůcky: Studenti nemají k dispozici žádné speciální pomůcky

I. Zadání:

Konstrukce v rovině

Krok 1 Narýsujte přímku. Pojmenujte ji *l*.

Krok 2 Narýsujte jinou přímku, která nemá žádný společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *a*.

Krok 3 Narýsujte přímku, která má právě jeden společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *b*.

Krok 4 Narýsujte přímku, která má právě dva společné body s přímkou *l*. Pojmenujte ji *c*.

Krok 5 Narýsujte přímku, která má více než dva společné body s přímkou l. Pojmenujte ji d.

Vyšetřete

1. Které tyto konstrukce jsou možné v rovině?

2. Které z vašich přímek jsou rovnoběžné? Proč?

3. Popište všechny možné způsoby, jak se mohou dvě různé přímky protínat v rovině.

4. ***Odhadněte***:
Budou vaše závěry stejné pro hlavní kružnice na kulové ploše?

Předpokládané řešení:

Krok 4 samozřejmě zkonstruovat nelze. Jediná možnost konstrukce *kroku 5* je narýsovat dvě shodné přímky s nekonečným počtem společných bodů.

Dvě různé přímky jsou buď navzájem rovnoběžné, bez společných bodů, nebo se protínají s právě jedním společným bodem (průsečíkem).

Řešení studentů:

S konstrukcemi v rovině studenti neměli příliš mnoho problémů a v převážné většině vyřešili naprosto správně všechny *kroky* a úlohy **1** a **2**. Nejčastější chyba se v tomto úseku vyskytovala v *kroku 5*, když tuto konstrukci řešitelé považovali za nemožnou. Někteří studenti nepovažovali shodné přímky za rovnoběžné, jiní, kteří byli v menšině, zahrnuli do rovnoběžných pouze přímky shodné. Z řešení vyplývá, že nejobtížnější byla pro studenty úloha **3**, což zřejmě způsobilo nejednoznačné zadání, a tak často docházelo k nepochopení úlohy. Uvádím některé z odpovědí, které se většinou velmi lišily:

- *Za sebou / před sebou.*
- *Jsou na sebe kolmé / jsou to úhlopříčky těles (čtverec, obdélník) / mají společný jeden nebo více bodů / jsou to různoběžky.*
- *Mohou na sobě ležet, jakákoli různoběžnost zaručuje, že se protínají.*
- *Způsobů je nekonečně mnoho, liší se jen v úhlu, v jakém se protínají.*

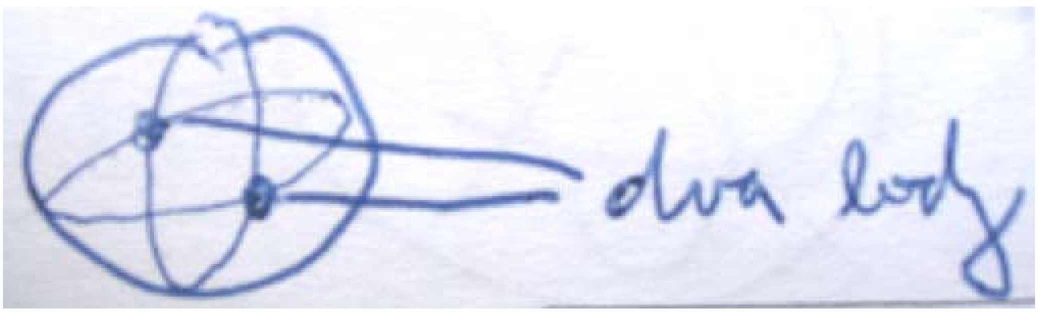
V úloze **4** téměř všichni studenti správě předpokládali, že jejich závěry na kulové ploše stejné nebudou. Pokud se některý student pokusil o zdůvodnění svého závěru, docházelo však často k mylným domněnkám:

- *1) Hlavní kružnice na kulové ploše je možná být v rovině.*
  2) Hlavní kružnice, pokud budou jako poledník a obratníky Země, jsou nebo mohou být rovnoběžné.

Vyskytlo se však i zdůvodnění s velmi správnými předpoklady (věřím, že student dodržoval posloupnost příkladů):

- *Určitě ne v kroku 4, kdy se dá udělat přímka s dvěma body protínající jinou X nedá se udělat krok 3 a 2.*

Že měl student i přes neskladnou formulaci na mysli správné řešení, je patrné z obr. 36:



Obr. 36

Závěr:

Studenti prokázali dobré znalosti euklidovské geometrie roviny potřebné jako vstupní pro základy sférické geometrie.

Aby napříště nedocházelo k nejasnostem, bylo třeba blíže specifikovat požadavky na řešení v úloze **3** (Příloha 2).

II. Zadání:

Konstrukce na kulové ploše (na kouli)

5. Stejné kroky, které jste provedli v rovině, proveďte na kulové ploše (na kouli), jen nahraďte přímky hlavními kružnicemi (pouze načrtněte obrázek). Sledujte, které konstrukce jsou na kulové ploše možné.

Vyšetřete

6. Popište všechny způsoby, jak se mohou dvě hlavní kružnice protínat na kulové ploše.

7. Mohou být dvě hlavní kružnice někdy rovnoběžné?

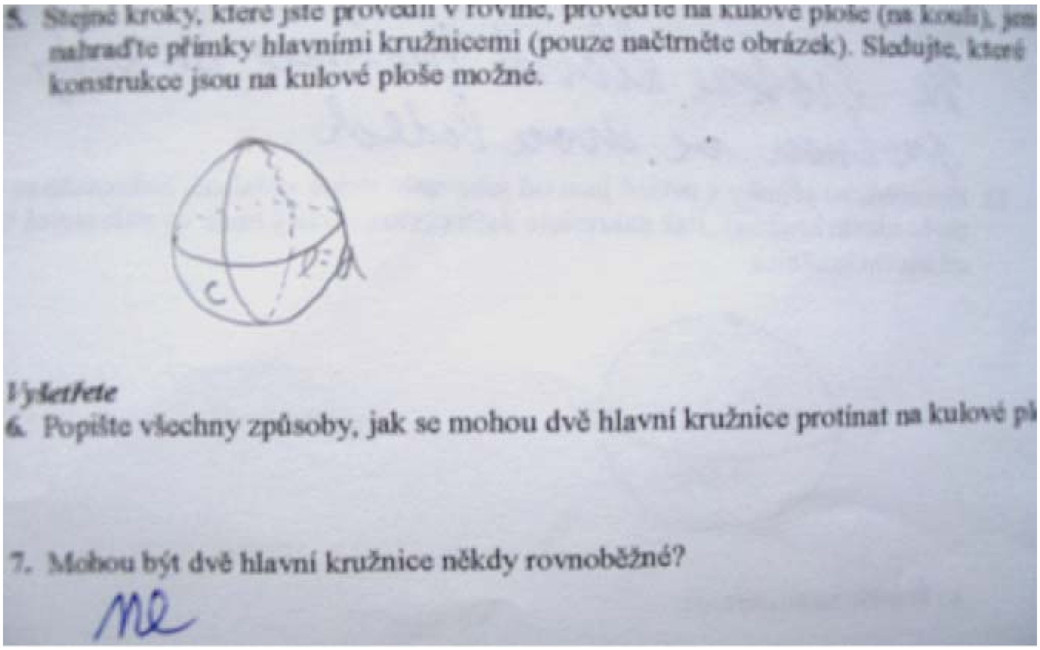
Předpokládané řešení:

Na kulové ploše je možný jen *krok 4* a *krok 5*, jediným řešením *kroku 5* je přitom najít shodné hlavní kružnice, stejně jako tomu bylo s přímkami. Dvě různé hlavní kružnice se vždy protínají ve dvou bodech, a nemohou tedy být nikdy rovnoběžné.

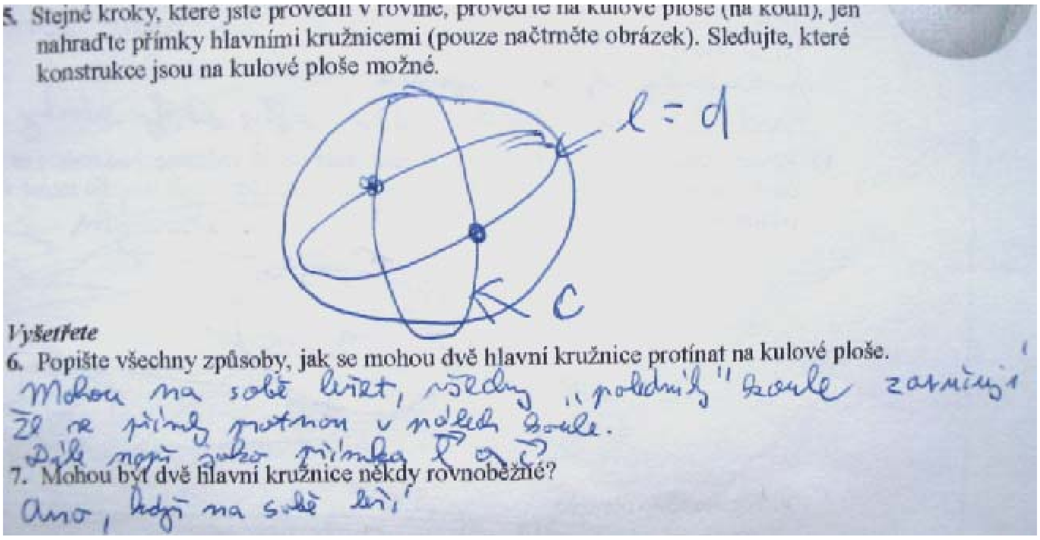
Studenty může překvapit zjištění, že rovnoběžné hlavní kružnice (bez společného bodu) neexistují.

Řešení studentů:

V úloze **5** se zhruba vyrovnal počet úspěšných a neúspěšných řešení. Ti, kteří tuto úlohu vyřešili správně, pak v drtivé většině správně odpověděli i v úlohách **6** a **7**. Řešení úspěšných řešitelů ilustrují obr. 37 a 38.



Obr. 37



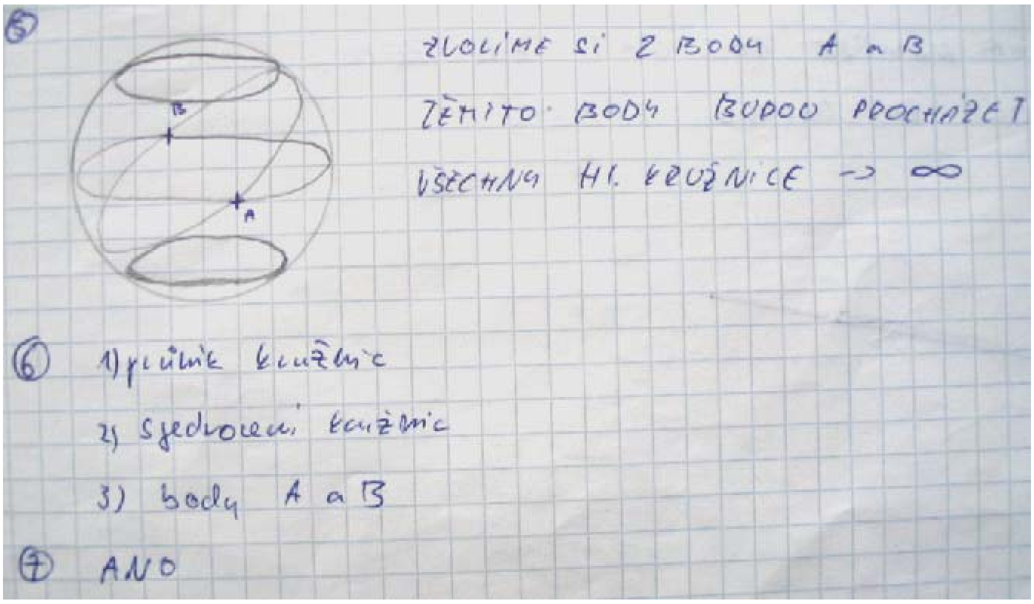
Obr. 38

V druhé polovině případů často docházelo k záměně hlavní kružnice za jakoukoli kružnici na povrchu koule, což přirozeně negativně ovlivnilo i řešení zbylých příkladů, kdy se studenti domnívali, že se kružnice protnout nemusí, mohou být rovnoběžné atd.

Někteří studenti zvolili dobrou cestu, přestože nebyly vyčerpány všechny možnosti:

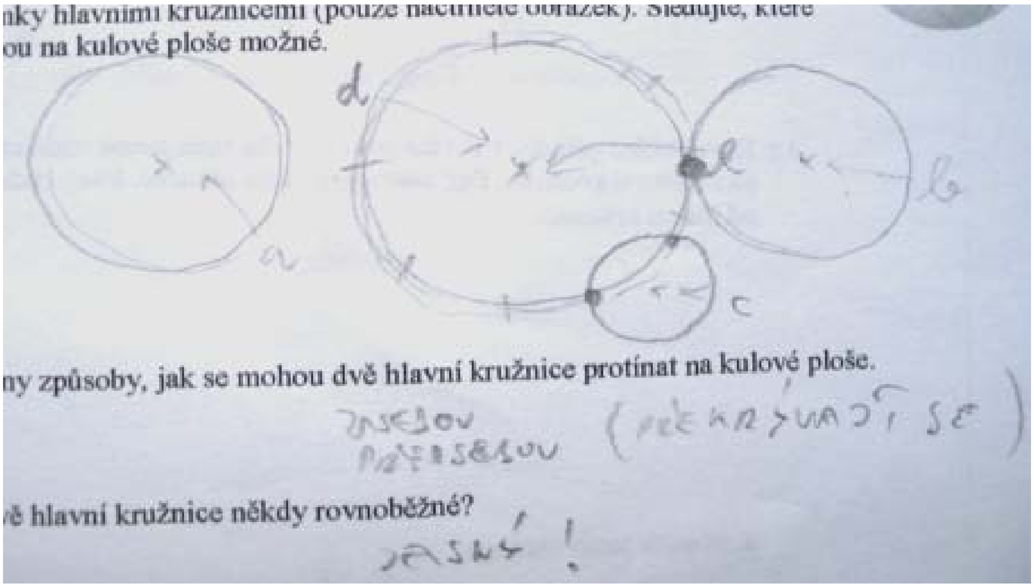
- *Zvolíme si 2 body A a B, těmito body budou procházet všechny hl. kružnice → ∞*

... Do řešení však započítali i jiné než hlavní kružnice (obr. 39).



Obr. 39

Vyskytl se i náčrtek, ve kterém se student pokusil jakýmsi způsobem transformovat konstrukci do roviny, z čehož pak vyplynulo nesprávné řešení (obr. 40).



Obr. 40

Závěr:

Studentům se zřejmě zdá divné, že by na kouli neexistovaly dvě různé rovnoběžné hlavní kružnice. V důsledku toho konstruují kružnice, které nejsou hlavními. Dalším důvodem může být nepochopení pojmu „hlavní kružnice“. Předpokládala jsem, že tento problém nastane, proto jsem do pracovního listu uvedla několik definic, které měly studentům dopomoci k představě o hlavní kružnici, doprovozených příkladem (přirovnání k poledníkům a rovníku na zeměkouli) a obrázkem. Přesto však docházelo k dotazům, kterými se studenti utvrzovali o správnosti své představy o hlavní kružnici.

Dalším jevem, který může studentům ve správném řešení bránit, je pak nedostatek prostorové představivosti, jenž vede k tomu, že student načrtne obrázek nesprávně nebo vůbec. Těmto i výše zmíněným obtížím se dá čelit tak, že studentům poskytneme možnost užívat vhodné pomůcky. Lze předpokládat, že se část chybných řešení vymýtí při zakreslování řešení přímo na povrch předmětu tvaru koule, mnohem více pak při využívání Lénártova sférického pravítka pro rýsování hlavních kružnic. Bez těchto pomůcek snad studentům alespoň trochu pomůže, když jim kromě názorného obrázku nabídneme například předkreslenou kouli, na kterou pak budou znázorňovat svá řešení (Příloha 2).

V úloze **7** tak, jak byla zadána i v originále, je nutné uznat za správné obě varianty odpovědi (tedy ano i ne), jelikož není jasné, zda studenti nemají na mysli dvě kružnice totožné. Z odpovědí, pokud je řešitelé nerozvedou, tak není patrné, zda student problém rovnoběžnosti ve sférické geometrii pochopil. Na to můžeme usuzovat pouze z řešení předchozích úloh. Je tedy dobré v úloze **7** specifikovat, že máme na mysli dvě různé hlavní kružnice.

III. Zadání:

Srovnejte rovinu a kulovou plochu

8. Určete, kolik postřehů můžete učinit o průsečíku dvou přímek v rovině a průsečíku dvou hlavních kružnic na kulové ploše (kdy jde o 0, 1, 2, více průsečíků, ...). Zaznamenejte je do srovnávací tabulky. *Přidejte tolik řádek, kolik potřebujete.*

Předpokládané řešení:

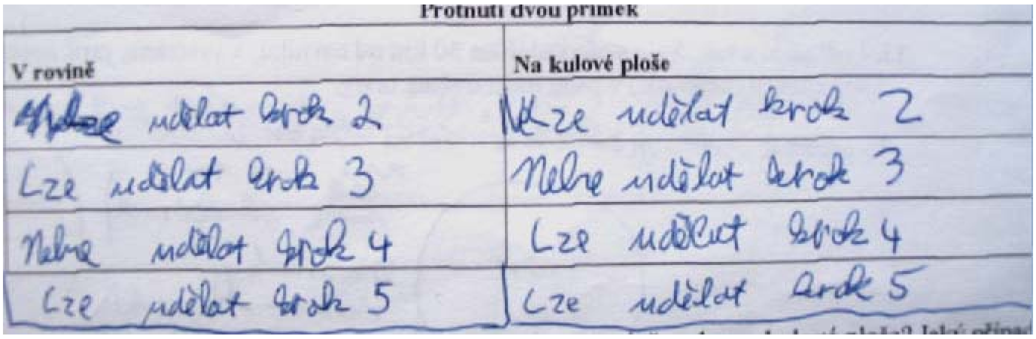
Protnutí dvou přímek

V rovině	**Na kulové ploše**
Dvě různé přímky bez průsečíku se nazývají rovnoběžky.	Dvě různé hlavní kružnice nemohou být nikdy vzájemně rovnoběžné.
Dvě různé přímky s právě jedním společným bodem se nazývají různoběžky.	Dvě různé hlavní kružnice nemohou mít právě jeden společný bod.
Dvě různé přímky nemohou mít víc než jeden průsečík.	Dvě různé hlavní kružnice mají vždy právě dva průsečíky.

Řešení studentů:

Studenti měli potíže s uchopením této úlohy. Z řešení je vidět, že si nebyli jisti, co přesně mají do tabulky zaznamenat. Jen nízký počet řešení tohoto příkladu se dal pokládat za zcela správný, většina řešení byla neúplná, často pak řešitelé tabulku úplně vynechali. Někteří studenti se vrátili ke *krokům 1-5* a řešení založili na porovnání možností konstrukce. Naprostá většina studentů nevyužila možnosti přidat k tabulce další řádky.

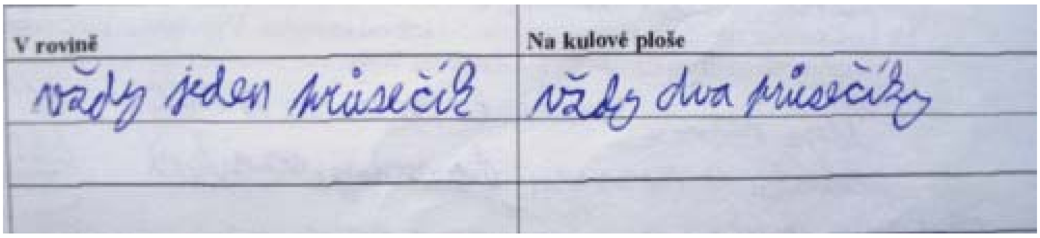
Příklad správného řešení najdeme na obr. 41, neúplné řešení ilustruje obr. 42 a nesprávné řešení obr. 43.



Protnutí dvou přímek

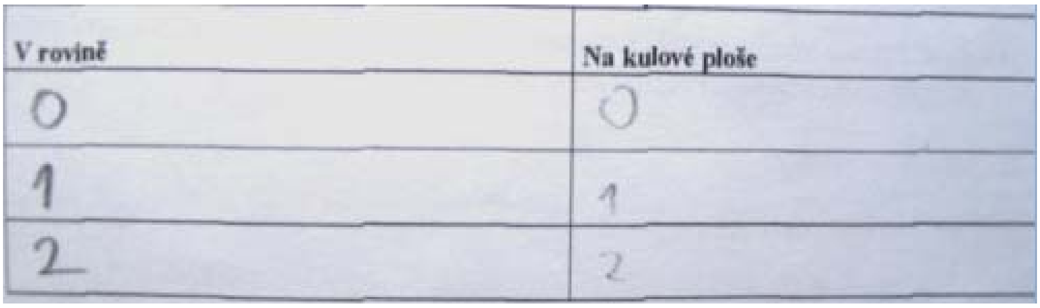
V rovině	Na kulové ploše
Nelze udělat krok 2	Nelze udělat krok 2
Lze udělat krok 3	Nelze udělat krok 3
Nelze udělat krok 4	Lze udělat krok 4
Lze udělat krok 5	Lze udělat krok 5

Obr. 41



V rovině	Na kulové ploše
vždy jeden průsečík	vždy dva průsečíky

Obr. 42



V rovině	Na kulové ploše
0	0
1	1
2	2

Obr. 43

Závěr:

Aby nedocházelo k pochybnostem nad podobou řešení úlohy, je možné zadat ji například v této podobě:

8. Určete, kolik postřehů můžete učinit o průsečíku dvou přímek v rovině a průsečíku dvou hlavních kružnic na kulové ploše. Zaznamenejte je do srovnávací tabulky – pokud je potřeba, doplňte údaje, a škrtněte nehodící se výrazy. Přidejte tolik řádek, kolik potřebujete, a zaznamenejte své další postřehy.

V rovině	Na kulové ploše
Dvě různé přímky bez průsečíku existují/neexistují. Pokud existují, nazývají se ……………………………….	Dvě různé hlavní kružnice bez průsečíku existují/neexistují. Můžeme něco říct o rovnoběžnosti hlavních kružnic? ………………………………………………
Dvě různé přímky mohou/nemohou mít právě jeden společný bod. Pokud ano, nazývají se …………….	Dvě různé hlavní kružnice mohou/nemohou mít právě jeden společný bod.
Dvě různé přímky mohou/nemohou mít víc než jeden průsečík. Pokud ano, nazývají se ……………	Co můžeme říct o průsečících hlavních kružnic (kolik jich je, kdy)? …………………………………………………..

Úloha je však původně záměrně koncipována tak, aby studenty vybízela k samostatnému uvažování nad rozdíly mezi sférickou a euklidovskou geometrií a přiměla je k samostatnému vyvození obecných závěrů z praktických pokusů. Snaha tlačit je k odpovědím v předem připravené formě (ačkoli by studenty mohla přimět znovu se zamyslet nad jejich řešením) tak může být spíše škodlivá, neboť může strhnout jejich úvahy pouze jedním směrem a mohlo by dojít k tomu, že se nebudou zamýšlet nad dalšími zvláštnostmi, kterých si v geometrii sféry všimli.

Přikláním se tedy spíše k tomu nechat tabulku prázdnou. Můžeme však specifikovat zadání podobně jako v příkladu **3** a vybídnout tak studenty, aby se více zamysleli a rozepsali své postřehy (Příloha 2).

IV. Zadání:

9. Myslíte, že je protnutí dvou přímek jednodušší v rovině, nebo na kulové ploše? Jaký případ je zajímavější? Proč?

10. Nyní zkuste změnit své argumenty. Uveďte důvody, proč je protnutí dvou přímek jednodušší nebo spletitější (zajímavější) v případě, který jste nevybrali výše.

Řešení studentů:

Navzdory mému očekávání naprostá většina studentů odpověděla, že protnutí přímek je jednodušší na kulové ploše. Důvodem je jim pak lepší viditelnost. Většinou ho pokládají i za zajímavější. Zde jsou některé odpovědi:

9. - *Na kulové ploše – lépe se protnou (viditelnost).*

- *Jednodušší v kulové ploše, zajímavější v rovině → konstrukce složitější.*

- *V rovině je protnutí dvou přímek jednodušší, protože získáme jeden průsečík.*

10. - *Už jen proto, že kružnice je zajímavější než přímka, navíc při různém otáčení kružnic se vytvářejí někdy opravdu zajímavé obrazce.*

Některé z odpovědí byly skutečně zajímavé, svědčící o dobrém vhledu studenta do problematiky:

9. - *…V rovině se nepatrná různoběžnost představuje těžce, velké vzdálenosti se nedají tak znázornit jako v kouli.*

10. - *V rovině je špatná představivost velikostí nade všechny meze (velmi nepatrná různoběžnost dvou přímek …). Tím, že je rovina sférická, se řeší problém, že si lidé nedokážou představit nekonečné meze. Hlavní rozdíl je v tom, že v kouli se přímky jeví jako kružnice.*

Pro některé bylo těžké přijmout kulovou plochu jako dvojrozměrnou:

9. - *Jednodušší v kulové ploše – protože má 3 rozměry.*

V jiném případě se vyskytla dokonce i tato odpověď:

10. - *V rovině je to složitější kvůli souřadnicím [x,y,z], v kulové ploše je to jen [x,y].*

Jak je vidět, studenti se v těchto úlohách daleko více rozepsali o rozdílech v obou geometriích a o zvláštnostech, jež při řešení úloh spatřují.

Závěr:

Přínosné je zjištění, že studenti pokládají sférickou geometrii za zajímavou a nebojí se pátrat po tom, v čem spočívá důvod její poutavosti. Často docházejí k překvapivým názorům, neboť si nezřídka uvědomují, že to, co se v euklidovské rovině odehrává v nekonečnu, probíhá na povrchu koule přímo před naším zrakem. Jelikož přirozeně preferují tuto viditelnost zkoumaných jevů, považují sférickou geometrii za jednodušší.

V. Zadání:

11. Představte si, že by bylo možné, aby pár železničních kolejí vedl kolem celé Země. Mohou tyto železniční koleje představovat rovnoběžné přímky (tedy hlavní kružnice) a proč?

Předpokládané řešení:

Je patrné, že dvě kolejnice se nikdy neprotnou. Protože se každý pár hlavních kružnic protíná, obě kolejnice nemohou ležet na hlavních kružnicích, takže obě nemohou reprezentovat hlavní kružnice na kulové ploše.

Řešení studentů:

Řešení této úlohy korespondovalo s řešením úlohy **5**. Ti studenti, kteří si v úloze **5** věděli rady a úspěšně ji vyřešili, vyřešili bez problémů i tuto úlohu, a naopak zbylí studenti dokládali oprávněnost kladné odpovědi obrázkem, v kterém znázorňovali rovnoběžné kružnice, z nichž alespoň jedna přirozeně nebyla hlavní, popřípadě odpověděli správně, nedokázali však svou odpověď zdůvodnit. Počet úspěšných a neúspěšných řešení se zde tak opět zhruba vyrovnal.

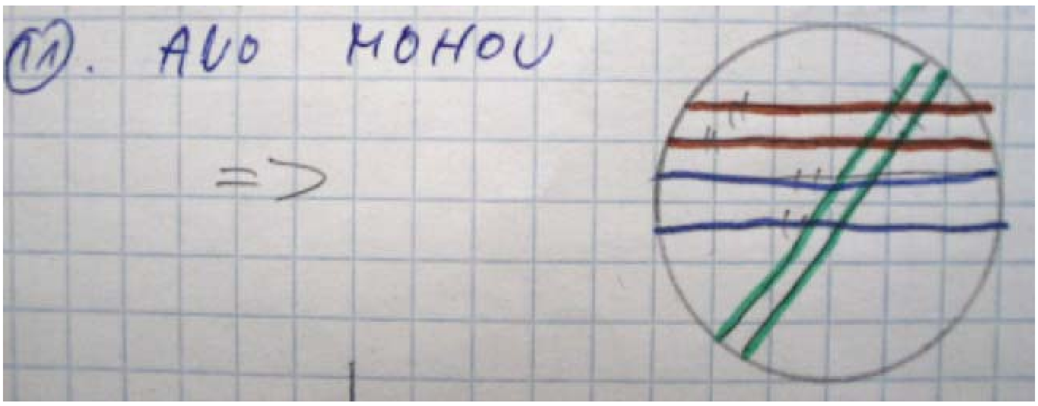
Správné odpovědi vypadaly například takto:

- *Nemohou, aby byly rovnoběžné po celou svou délku, porušila by se definice hlavní kružnice (že její střed leží ve středu kulové plochy).*
- *Ne. Protože hlavní kružnice se vždy protnou ve dvou bodech.*

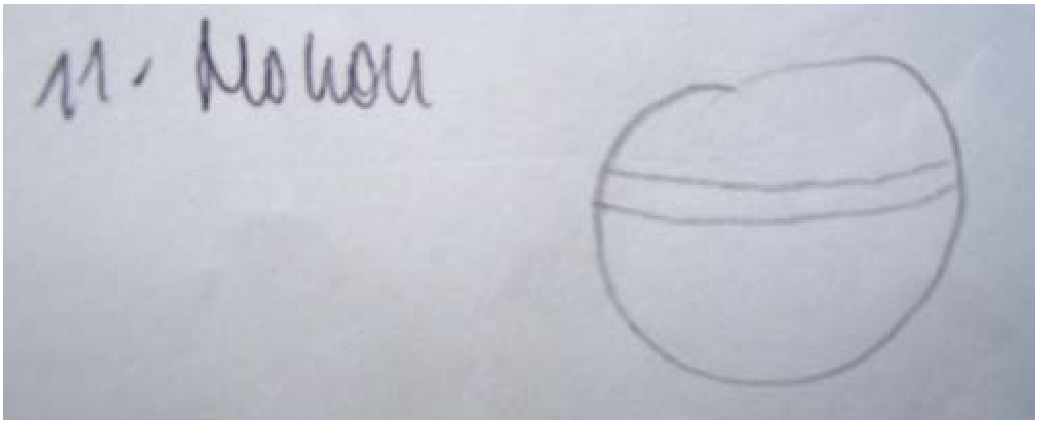
Ukázky nesprávných řešení zobrazují obr. 44 a 45.

Závěr:

Studentům, kteří správně pochopili pojem hlavní kružnice, nečiní úloha potíže. Ostatním by mohl pomoci například doprovodný obrázek, či výše navrhované zpřesnění zadání předchozích úloh (Příloha 2).



Obr. 44



Obr. 45

VI. Zadání:

12. Rovnoběžné přímky v rovině jsou od sebe stále stejně vzdálené. Nakreslete na kulové ploše hlavní kružnici. Pak nakreslete další obrazec, který bude ve stále stejné vzdálenosti od hlavní kružnice.

a. Popište tento obrazec.

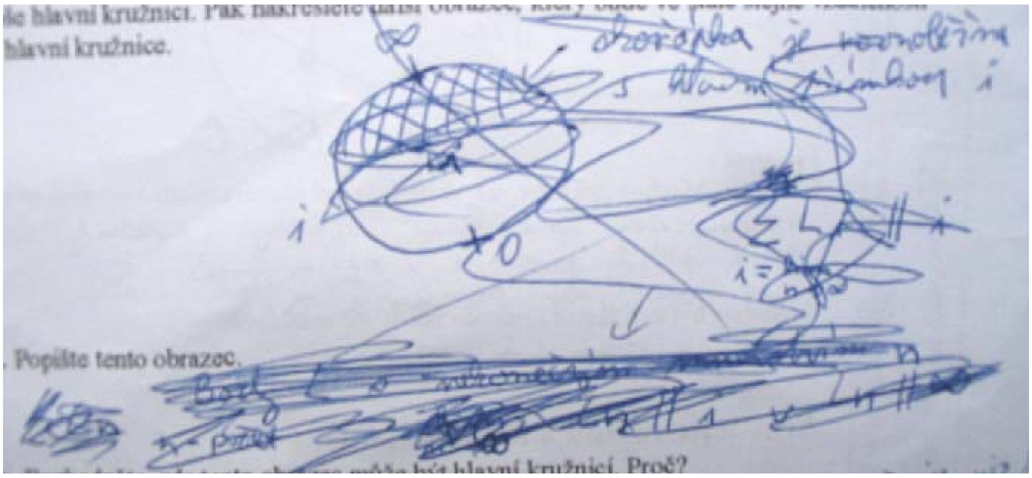
b. Rozhodněte, zda tento obrazec může být hlavní kružnicí. Proč?

Předpokládané řešení:

Obrazec je kružnice s poloměrem menším nebo rovným poloměru koule. Hlavní kružnicí může být pouze tehdy, když je vzdálenost obrazců nejmenší možná (rovná nule), a jedná se pak o kružnici totožnou s původní. Jestliže je vzdálenost největší možná, jedná se o bod (pól původní hlavní kružnice).

Řešení studentů:

S vypracováním této úlohy měli studenti obtíže. Počet zcela správných řešení byl minimální (ke správné odpovědi samozřejmě postačilo, že obrazec bude kružnice, která není hlavní kružnicí). Nalezení požadovaného obrazce se nedařilo dokonce ani studentům, kteří v předchozích úlohách prokázali velmi dobrý vhled do problematiky. Například řešení jednoho z nejúspěšnějších řešitelů ostatních úloh zobrazuje obr. 46.



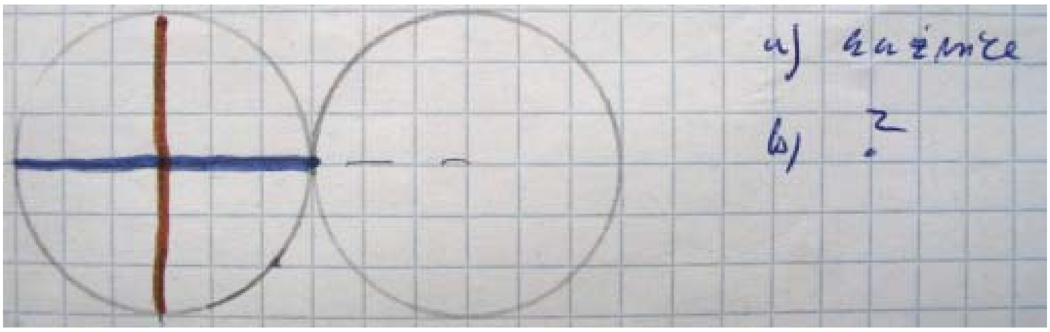
Obr. 46

Vyskytly se i případy, kdy student sice správně odpověděl, že se jedná o kružnici, z náčrtku však není patrné, jestli k tomuto závěru dospěl správnou představou (kresba - obr. 47 - svědčí spíše o opaku). Nezřídka se zdálo, že studenti nepochopili, že obrazec je nutné zakreslovat opět na kulovou plochu a se svým řešením se dostávali mimo ni (obr. 48).

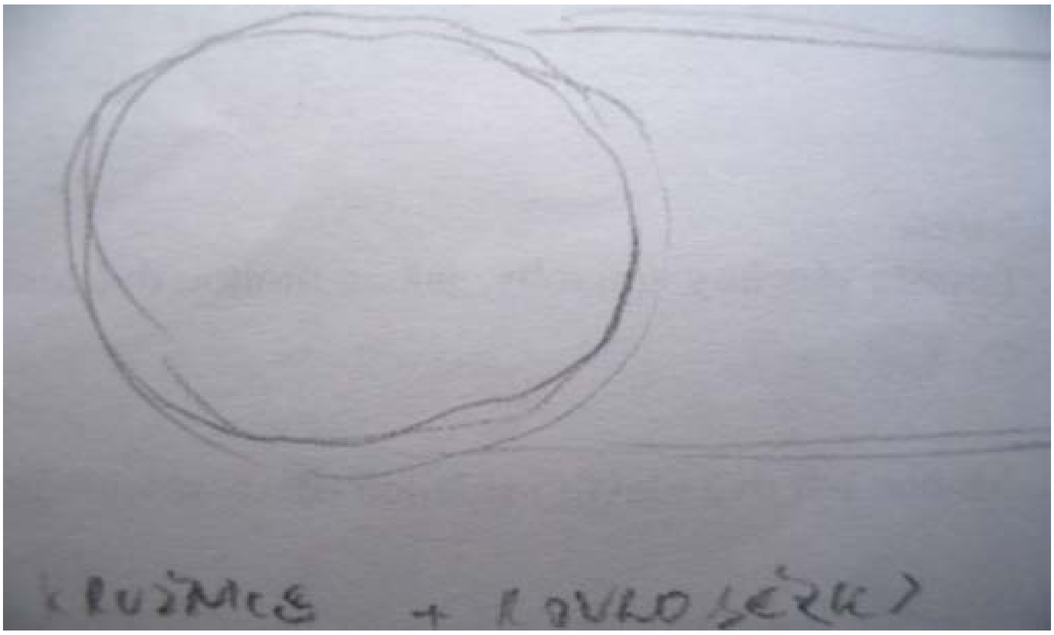
Jak je z obrázků vidět, studenti mnohdy hledali v řešení zbytečné složitosti.

Velmi často studenti správně odpovídali v bodu **b**, i když si nevěděli rady s podobou hledaného obrazce, někdy však svůj závěr zdůvodnili pochybně. Vyskytovaly se odpovědi tohoto typu:

- *Nemůže, protože by nesplňoval definici hlavní kružnice.*
- *Tento obrazec nemůže být hlavní kružnicí, protože nemá maximální poloměr.*
- *Nemůže, není v dobré vzdálenosti.*



Obr. 47



Obr. 48

Závěr:

V této úloze se ukázalo, jaký problém mají studenti s přijmutím kulové plochy jako roviny zakřivené do tvaru koule a jediného prostoru pro všechny geometrické konstrukce. Řešením je opět nabídnout studentům vhodné pomůcky s možností rýsování přímo na kouli. V stávající situaci můžeme alespoň upravit zadání tak, že upozorníme, že obrazec leží na kulové ploše, popřípadě nabídnout studentům předkreslený náčrtek koule s hlavní kružnicí, do něhož budou řešení zobrazovat, čímž dáme možnost i těm, kteří pojem hlavní kružnice nepochopili a neuměli ji na kouli zakreslit (Příloha 2).

VII. Zadání:

13. Loď cestuje tak, že je stále vzdálena 50 km od rovníku. Vysvětlete, proč necestuje nejpřímější (nejkratší) cestou mezi dvěma body.

Předpokládané řešení:

Loď necestuje nejpřímější cestou mezi dvěma body, protože dráha, která je stále vzdálena 50 km od rovníku, má tvar kružnice s menším poloměrem, než je poloměr kulové plochy, a nejedná se tedy o hlavní kružnici, jejíž část je nejkratší spojnicí dvou bodů.

Řešení studentů:

Ze všech řešení této úlohy nebylo ani jedno úspěšné. Drtivá většina studentů opět uvažovala řešení mimo povrch koule (obr. 49). Odpovědi pak byly velmi obdobné:

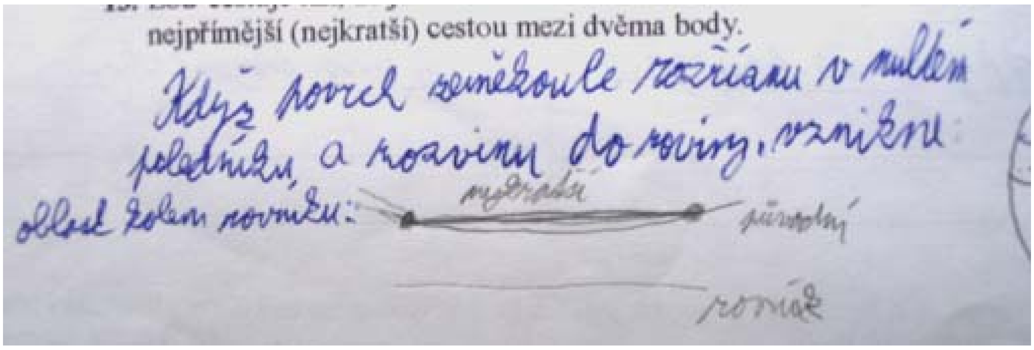
- *Protože v podzemí není vítr ani moře. (…) Matematicky řečeno – opustila by množinu bodů, které ohraničují kulovou plochu.*
- *Protože loď nemůže cestovat skrz Zemi. Musí plout po obvodu Země.*

Obr. 49

Studenti, kterým se nedařilo řešit ani předchozí příklady zaměřené na sféru, na otázku buď neodpovídali vůbec, nebo jejich odpověď neměla valnou informační hodnotu:

- *Asi nemůže a není to nejkratší.*

Řešení, které se asi nejvíce blížilo podstatě problému (ačkoli obsahuje chybné předpoklady a domněnky, když se student snaží rozvinout kouli do roviny rozříznutím jednoho poledníku) zobrazuje obr. 50.



Obr. 50

Závěr:

Tato úloha koresponduje s úlohou **11**, kde si studenti mohli všimnout, že dvě rovnoběžné kružnice nemohou být obě hlavními kružnicemi. Přesto ani ti řešitelé, kteří v úloze **11** odpovídali naprosto správně, tuto úlohu nevyřešili. Příčina zřejmě spočívá v tom, že si studenti neuvědomili, že dva body na povrchu koule lze nejkratším způsobem spojit kratší částí oblouku hlavní kružnice.

Záměrně jsem do pracovního listu neuvedla, proč je přímka na kulové ploše reprezentována hlavní kružnicí, a čekala jsem, zda některý ze studentů dojde v této úloze k obecnému závěru a na základě předchozích úloh vyvodí důvod sám. Přiznávám však, že jsem neočekávala, že by se tak stalo, a můj předpoklad se bohužel vyplnil.

Studentům při řešení této úlohy mohou pomoci například návodné otázky, doprovázející tvrzení o tom, že přímky jsou na kouli reprezentovány hlavními kružnicemi, které by je přiměly zamyslet se nad důvodem této skutečnosti (Příloha 2).

V této úloze se navíc naplno potvrdil problém předestřený již v úloze předcházející, totiž že studenti při řešení úloh uvažují spíše v třírozměrném euklidovském prostoru. Pomoci jim může uvedení do tématu sférické geometrie formou úvodní hodiny (viz podkapitola 7.7.1 a Příloha 3). V pracovním listu jim lze pomoci úpravou zadání a připojením vhodnějšího obrázku, na němž by situace byla patrnější (Příloha 2).

VIII. Zadání:

14. (*Úvod o Euklidovi*) Zde je jedna z podob Euklidova postulátu o rovnoběžnosti: Je dána přímka a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou.

a. Narýsujte přímku a bod, který na přímce neleží. Narýsujte všechny možné rovnoběžky k dané přímce procházející daným bodem. Pomocí vaší kresby vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti platí v rovině.

b. Přepište postulát o rovnoběžnosti pro kulovou plochu nahrazením slova *přímka* za slovo *hlavní kružnice*. Pak proveďte na kulové ploše obdobnou konstrukci jako na rovině. Nyní vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti neplatí na kulové ploše.

c. Napište svůj vlastní postulát o rovnoběžnosti, který bude platný pro geometrii na kulové ploše (sférickou geometrii).

Předpokládané řešení:

Odpovědi v bodě c mohou mít například tuto podobu: „Daným bodem, který neleží na dané hlavní kružnici, neprochází žádná hlavní kružnice, která by byla s danou hlavní kružnicí rovnoběžná.“

Řešení studentů:

V řešení bodu **a.** studenti většinou pouze narýsovali obrázek. Pravděpodobně se (stejně jako Euklides) domnívali, že tato skutečnost je natolik zřejmá, že vysvětlení nepotřebuje. Někteří tuto domněnku explicitně vyjádřili:

- *Tady není co vysvětlovat. Více než jednu rovnoběžku k přímce daným bodem nelze vést.*

Naopak student, z jehož práce bylo patrné, že tuší problém rovnoběžnosti přímek v rovině spočívající v tom, že se vše neodehrává před naším zrakem, jak by se mohlo zdát, jelikož přímky mají nekonečnou délku, se o vysvětlení platnosti Euklidova postulátu pokusil. Jeho formulace je však dosti neobratná a těžko srozumitelná:

- *V rovině se nám nemění přímky v kružnice, proto nikdy nenastane situace, že by bod, který by neležel na přímce p, nezaručoval, že přímka vedená dotyčným bodem nebyla rovnoběžná s p.*

Při vysvětlení bodu **b.** většinou neměli žádný problém studenti, z jejichž práce bylo jasné, že rozumí dobře pojmu hlavní kružnice a přijímají skutečnost, že hlavní kružnice reprezentuje na kouli přímku. Titíž pak dokázali napsat vlastní postulát v bodě **c.**:

- ***b.** Je dána hlavní kružnice a bod, který na ní neleží. Daným bodem nelze vést rovnoběžnou hlavní kružnici s danou hlavní kružnicí. Aby byla kružnice hlavní kružnicí, musí mít*

co největší poloměr, z čehož vyplývá, že musí hlavní kružnici (danou) protínat, a to znamená, že není rovnoběžná.
c. *Na jedné kulové ploše neexistují dvě různé rovnoběžné hlavní kružnice.*

Někteří, i když pojmu hlavní kružnice evidentně rozuměli, si nevěděli rady s formulací vlastního postulátu. Snažili se tak popsat za jakých podmínek k rovnoběžnosti na kouli dochází:

- ***b.*** *Veškerý problém je v již několikrát zmiňované definici hlavní kružnice → její střed leží ve středu kulové plochy.*
  c. *Je dána jakákoliv kružnice 1 a bod, který je vzdálen od poloměru stejně jako kružnice 1. Daným bodem lze vést právě jednu kružnici 2, která je rovnoběžná s původní kružnicí 1.*

Ostatní vysvětlení nezaznamenali, nebo odpovídali nesmyslně:

- ***b.*** *Na kružnici to nejde.*
  c. *Pokavaď jsou body vždy vzdáleny stejně, jsou přímky rovnoběžné.*

Závěr:

Z řešení je patrné, že studentům, kteří získali náhled do problematiky, nečiní žádné potíže vyvození obecných zákonitostí platných pro sférickou geometrii na základě srovnání obou typů geometrií. Od těch, kteří se ve sférické geometrii již od začátku neorientovali, pravděpodobně nic podobného očekávat nelze.

IX. Zadání:

15. Popište všechny způsoby, jak se mohou protínat tři různé hlavní kružnice.

Předpokládané řešení:

Tři různé hlavní kružnice mohou mít na kulové ploše buď dva, nebo šest průsečíků v případě, že se každé dvě protínají ve dvou různých bodech.

Řešení studentů:

Část úspěšných řešitelů pracovního listu odpověděla na tuto úlohu zcela správně:

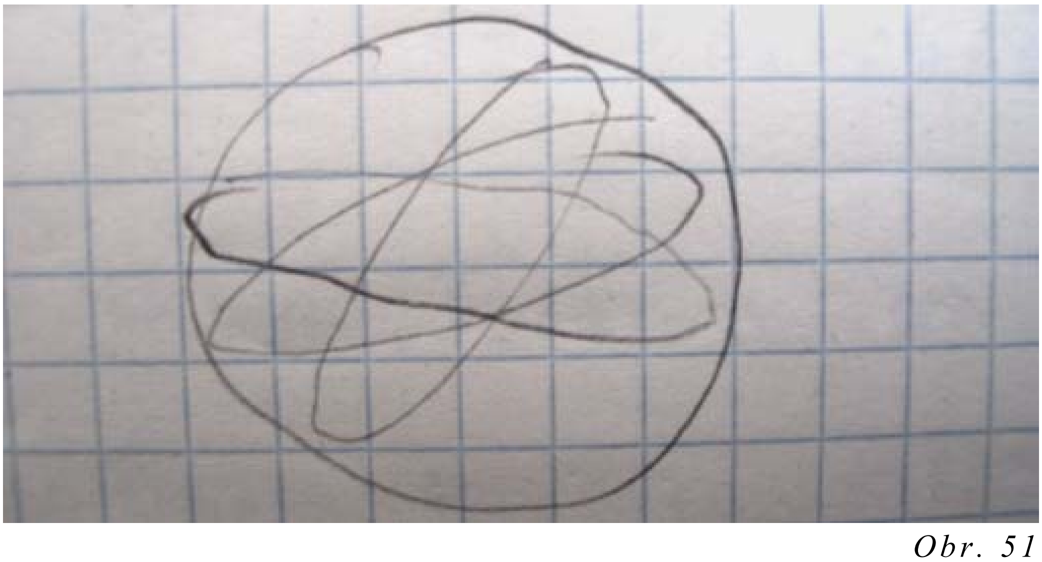
- *Protínají se vždy ve 2 nebo 6 bodech.*

Častěji se vyskytly pouze částečně správné odpovědi (a jak je vidět, i odpovědi „šalamounské“):

- *1) Protínají se v pólech.*
  2) Když leží na sobě.
  3) Všechny způsoby, jaké jsou možné.
- *Jakkoliv tyto kružnice situuji, vždy se navzájem protínají.*

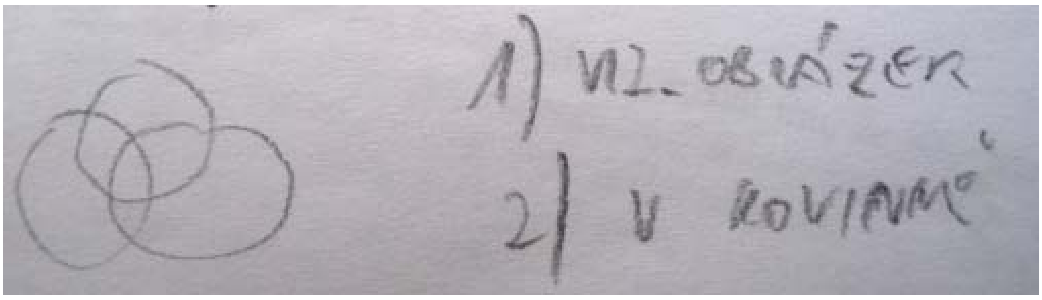
U spíše neúspěšných řešitelů pracovního listu se vyskytovaly v zásadě tři typy odpovědí:

- žádná
- nakreslili obrázek zahrnující jen jeden případ protnutí kružnic (obr. 51).



Obr. 51

- jakási transformace do roviny (obr. 52).



Obr. 52

Závěr:

Z řešení vyplývá, že protnutí tří kružnic na povrchu koule je velmi náročné na představivost studentů. V tomto případě opět může pomoci pomůcka tvaru koule a nástroj na rýsování hlavních kružnic, se kterým studenti mohou manipulovat a zkoušet různé možnosti.

7.6.2 Shrnutí výsledků první fáze výzkumu

Při řešení příkladů ze sférické geometrie byla celkově úspěšná asi polovina studentů, pro ostatní bylo těžké přijmout zákonitosti této geometrie a část z těchto studentů pak nedovedla řešit úlohy načrtnutím povrchu koule. Dále lze říci, že ve způsobu řešení nebyl patrný výraznější rozdíl mezi studenty druhého a třetího ročníku. Je sice pravda, že nejúspěšnější řešení pocházela z per třeťáků, ve stejné třídě však vznikala i řešení nejméně úspěšná.

Dále uvádím shrnutí nejzásadnějších obtíží, se kterými se studenti potýkali a které byly zastoupeny vždy ve větším počtu prací:

Největší a zásadní problém spočíval v tom, že se studenti nedokázali oprostit od způsobu nazírání na prostor, který se uplatňuje v klasické, euklidovské geometrii. To dosvědčují především následující znaky a postupy, které se v řešeních projevovaly:

1) Mnozí řešitelé se stále snažili rozvinout kouli do roviny a řešení pak načrtávat v této rozvinuté rovině (viz příklady řešení výše). Je zajímavé, že většina těchto studentů však považovala za jednodušší protnutí přímek/hlavních kružnic na kulové ploše, a to z důvodu lepší viditelnosti – kulová plocha se jim tedy zdála názornější.
2) Z řešení bylo patrné, že i ti studenti, kteří svá řešení zakreslovali správně, stále přemýšleli v souladu s geometrií euklidovskou a kouli si představovali jako umístěnou v trojrozměrném euklidovském prostoru, jehož všechny body (tedy i ty vně a uvnitř koule) jsou jim volně dostupné. S těmito body pak do svého řešení počítali.

Jak již bylo řečeno výše, řada studentů měla potíže s pochopením pojmu „hlavní kružnice“ a s představou této kružnice jako „přímky na kouli“. Tito studenti pak neměli šanci v úlohách o konstrukci na kulové ploše uspět.

Na základě analýzy studentských řešení se domnívám, že je vhodné zařadit do výuky, dříve než studenti přikročí k řešení těchto úloh, úvodní hodinu, v níž budou stručně seznámeni s historií neeuklidovské geometrie (kdo k ní dospěl, jak a proč) a s obecnými zákonitostmi, které platí v geometrii sférické. V této hodině jim pak lze předložit úlohy z běžného života a jiné zajímavé úlohy, které mohou vzbudit u studentů zájem o téma neeuklidovské geometrie.

Náplň a průběh úvodní hodiny, kterou jsem na základě analýzy výsledků první fáze výzkumu uskutečnila, popisuji v podkapitole 7.7.1.

7.6.3 Možné důvody problémů a jejich případné řešení

Příčin, které vedly u studentů k nesprávnému či chybějícímu řešení některých úloh, může být celá řada; od nezájmu o práci na domácím úkolu „navíc“, přes stereotypy ve vidění okolního světa po skutečné potíže s prostorovou představivostí. Všechny tyto problémy však lze řešit nebo alespoň zmírnit vhodným přístupem k látce a jejímu předávání studentům.

7.6.3.1. Možné důvody nezájmu a návrh řešení

Eventuální nezájem o řešení úloh ze strany studentů není nepochopitelným jevem, jelikož, jak již bylo řečeno, úlohy byly v této fázi výzkumu zadány náhle bez souvislosti s právě probíranou látkou, a někteří tudíž zřejmě neviděli smysl snahy, kterou bylo potřeba vyřešení pracovního listu věnovat. Bez předchozí motivace v jakékoli podobě je samozřejmě nelehké takový smysl najít, zvláště pak u studentů, kteří matematiku nepovažují za oblíbený předmět. A jelikož je známo, že matematika žebříčku popularity školních předmětů zrovna nevévodí, lze předpokládat, že studentů vedených touhou poznávat a objevovat, kterým snad řešení úloh dělalo radost, nebylo mnoho. Ostatní navíc nebyli motivováni ani vnějšími prostředky v podobě známek či postihu za neodevzdání práce. Snaha, kterou studenti práci věnovali, byla na řešení úloh samozřejmě patrná; někteří odevzdali listy téměř prázdné, jiní je neodevzdali vůbec. I přes to všechno se ale našlo několik jedinců, z jejichž práce bylo patrné, že je problematika sférické geometrie skutečně zaujala. Kdybychom se snažili postihnout počty prací na škále od (na první pohled) precizních k „odbytým“, zjistili bychom, že i zde platí Gaussova křivka. Vše je ovšem založeno na pouhé domněnce vyplývající z posouzení produktu, nikoli průběhu práce, neboť jsem neměla možnost s těmito studenty o jejich práci promluvit a vím, že snaha se může skrývat i za nevyřešenými úlohami.

Domnívám se, že jedním z možných způsobů jak ve studentech podnítit zájem o tuto látku je zasvětit je nejprve do vzrušující historie neeuklidovských geometrií, nechat je, aby na základě indicií sami vyvodili, kde euklidovská geometrie neplatí a proč, ukázat jim zvláštnosti a zdánlivé paradoxy, které v důsledku zákonitostí této geometrie vznikají, a seznámit je s možnostmi využití neeuklidovských geometrií v praxi (konkrétněji podkapitola 7.7.1).

7.6.3.2 Možné důvody snahy transformovat kouli na rovinu a návrh řešení

Důvodem tendence studentů řešit konstrukční úlohy na kouli rozvinuté do roviny je zřejmě skutečnost, že jsou jednoduše zvyklí řešit podobné úlohy v rovině. Například při počítání vzdáleností v tělesech uplatňují řezy tělesy a potřebnou část si zobrazí v rovině. Navíc je k tomu nabádá srovnání geometrie na kulové ploše právě s geometrií roviny. Proto se zřejmě snaží kouli do roviny rozvinout, aby mohli srovnání bez potíží uskutečnit. (Podobný postup přece uplatňují i v jiných oblastech matematiky – například při porovnávání dvou zlomků převádějí oba zlomky na společného jmenovatele (zde se snaží převést kouli do roviny) a následně porovnávají čitatele (zde geometrické konstrukce v rovině a na kulové ploše).)

Jelikož studenti neměli k dispozici model, na který by mohli své konstrukce zakreslovat, bylo pro ně řešení samozřejmě mnohem obtížnější. Zřejmě pro ně pak nebylo snadné pochopit, že musejí uvažovat pouze v dvourozměrné rovině zakřivené do tvaru koule, když si museli v dvourozměrné euklidovské rovině nakreslit náčrtek trojrozměrného tělesa a na něj pak novou geometrii aplikovat.

V úvodní hodině je tedy potřeba studentům vysvětlit, že neeuklidovská geometrie (pohybujeme-li se v R_2) je geometrie zakřiveného povrchu, který není možné rozvinout do roviny. Naproti tomu geometrie na povrchu například hranolu, válce apod. euklidovská je, neboť jejich plášť lze do roviny rozvinout. (Studenti si mohou vzpomenout na sítě těles, které v rovině zakreslovali. Síť koule po nich jistě nikdo nechtěl.)

7.6.3.3 Možné důvody potíží s oproštěním se od euklidovského prostoru a návrh řešení

Důvod, proč si studenti při svých řešeních stále představují kouli v třírozměrném euklidovském prostoru a počítají i s body mimo její povrch, je prostý. Třírozměrný euklidovský prostor je prostor, ve kterém žijí. Dokážou si tedy představit pouze tento prostor a všechny jeho opět euklidovské podprostory. Žijeme sice na planetě, která má tvar koule, ale jsme schopni vnímat smysly pouze naše bezprostřední okolí a zakřivený neeuklidovský povrch, po němž se pohybujeme, tak vnímáme jako euklidovský. Že budou studenti hned přistupovat k této geometrii neeuklidovsky, se od nich tedy ani nedalo očekávat.

V úvodní hodině je tedy na místě vysvětlit studentům, že pokud řeší úlohy ve sférické geometrii, stává se povrch koule „celým jejich světem“, který nemohou opustit. Zcela nejlepší je dát jim k dispozici model koule, který mohou pokreslit, a řešení pak podle modelu načrtnout na papír (konkrétněji v podkapitole 7.7.1).

7.6.3.4 Možné důvody problémů s pojmem „hlavní kružnice“ a návrh řešení

Důvodem, proč studenti nezobrazovali správně hlavní kružnice, bylo zřejmě nedostatečné věnování pozornosti uvedené definici nebo její nesprávné pochopení. Ti, kteří pak měli potíže s přijetím hlavní kružnice jako reprezentace přímky na kulové ploše, zřejmě neviděli důvod, proč by přímku měla reprezentovat právě hlavní kružnice a ne i například libovolná rovnoběžka (využijeme-li přirovnání koule k zeměkouli).

V úvodní hodině je tedy třeba pečlivě studenty seznámit s pojmem hlavní kružnice, nakreslit názorné příklady a ujistit se, že tomuto pojmu všichni bezpečně rozumějí a dokážou rozlišit hlavní kružnici od ostatních kružnic, které lze narýsovat na povrchu koule. Bez porozumění nemá valný smysl postupovat dál, jelikož pak studenti v řešení úloh nemohou obstát. Důležité pak je vysvětlit jim, *proč* je přímka na povrchu koule reprezentována právě hlavní kružnicí. Konkrétní návrhy čtenář nalezne v podkapitole 7.7.1.

7.7 Druhá fáze výzkumu

7.7.1 Úvodní hodina – úvod do neeuklidovských geometrií

Jak již bylo řečeno v úvodu kapitoly o výzkumu, úvodní hodina, jako příprava na řešení úloh ze sférické geometrie, která měla studenty s touto geometrií blíže seznámit, proběhla ve dvou prvních ročnících. Připravila jsem si na ni pomůcky, které měly sloužit k názornosti příkladů a studentům k usnadnění práce: globus k demonstraci korespondence neeuklidovské geometrie s reálným světem kolem nás, míč jako model koule, na který jsme zakreslovali jednotlivé situace, a okopírovanou mapu světa pro demonstraci zkreslení vzdáleností při pokusu rozvinout kouli do roviny. Každý ze studentů měl navíc k dispozici vlastní model koule v podobě míčku, který bylo také možné pokreslit.

Náplň úvodní hodiny pokryla téměř přesně 45 minut vyměřených pro jednu vyučovací hodinu. Dále uvádím parametry úvodní hodiny:

Téma hodiny:	Úvod do neeuklidovské geometrie
Typ školy:	Střední škola
Ročník:	1. – 4. ročník
Čas výuky:	45 min.
Pomůcky:	Míč
	Glóbus
	Atlas světa
	Barevné fixy

7.7.1.1 Vlastní průběh úvodní hodiny

1) ÚVOD

V úvodu hodiny byli studenti stručně seznámeni s tématem. Na začátku jim bylo vysvětleno, že se budeme zabývat neeuklidovskou geometrií. Na dotaz, jestli se s tímto pojmem už někdy setkali nebo vědí, co znamená, odpovídali negativně. Postupně jsme se tedy pomocí otázek, odpovědí, dedukcí i indukcí dostali k tomu, že geometrie, kterou žáci znají a používají již od základní školy, se nazývá geometrie euklidovská, a to proto, že její pravidla sestavil a shrnul ve 4. století př.n.l. Euklides. O Euklidovi studenti věděli velmi málo, odvodili si jen, že to byl matematik a Řek, tak jsme si velmi stručně pověděli něco o jeho životě a díle Základy, čímž jsme se dostali k pěti postulátům, na kterých Euklides euklidovskou geometrii vybudoval, a na tabuli jsme si každý z nich ilustrovali obrázkem.

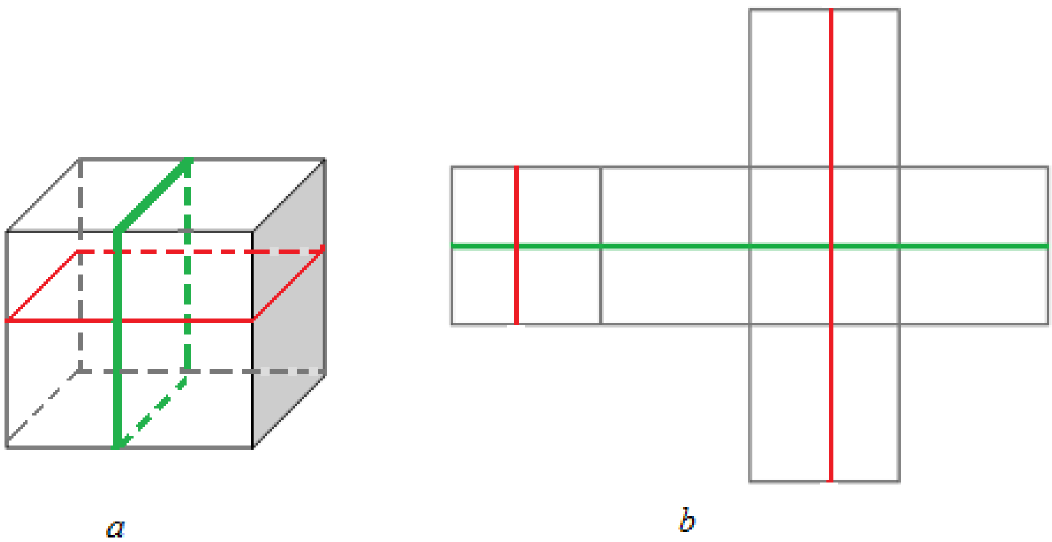
Sami studenti nebyli s formulací 5. postulátu spokojeni, na rozdíl od všech předchozích si nedokázali hned a bez ilustrace představit, co vlastně znamená, a nakreslení obrázku na tabuli vyžadovali. Na otázku, který z postulátů se jim zdá nejméně jasný, všichni odpovídali, že postulát pátý.

2) HISTORIE

Pověděli jsme si tedy, že stejně tak jako oni i matematici dávných i nedávných dob nebyli s 5. postulátem spokojeni a snažili se ho dokázat pomocí zbylých čtyř, že přitom přišli na ekvivalenci s Pythagorovou větou, až skutečně objevili prostor, ve kterém euklidovská geometrie neplatí, a dostali jsme se tak k hlavním jménům neeuklidovské geometrie, Gaussovi, Bolyaiovi, Lobačevskému a Riemannovi. Studenty jsem samozřejmě nezatěžovala přílišnými podrobnostmi z historie, ale snažila jsem se vyzdvihnout zajímavosti i dobové těžkosti, s jakými se matematici museli potýkat, a zdůraznit tak převratnost tohoto objevu. Zdálo se, že historie neeuklidovských geometrií studenty zaujala, zvláště je překvapilo, že objevit ji trvalo 21 století.

3) NEEUKLIDOVSKÝ PROSTOR

Přes historii jsme se dostali k tomu, že neeuklidovská geometrie je tedy geometrie zakřivené plochy, kterou nelze rozvinout do roviny (řekli jsme si, že se budeme zabývat neeuklidovskou geometrií dvourozměrného prostoru), a jelikož existují i takové zakřivené plochy, které do roviny rozvinout lze, ne každá zakřivená plocha je neeuklidovská. Tuto skutečnost jsme si demonstrovali nakreslením obrázku na zohýbaném papíře, který jsme následně narovnali, a na příkladu s krychlí, na jejíž síti jsme rovněž demonstrovali zachování zákonitostí euklidovské geometrie při rozvinutí do roviny (obr. 53 a, b). Studenti pak sami odvodili, že neeuklidovská geometrie bude platit na povrchu takového tělesa, jehož sít nedokážeme narýsovat, a že takovým tělesem je koule.



Obr. 53

Poukázala jsem pak na to, že je zvláštní, že objevení neeuklidovské geometrie trvalo tak dlouho, když žijeme na kulaté planetě, a že ve velkých měřítkách v našem světě tedy platí právě její zákony. Seznámila jsem pak studenty s jejich úkolem zjistit, jak je to tedy s rovnoběžností přímek na naší planetě (na kouli), když zde neplatí pátý Euklidův postulát.

4) HLAVNÍ KRUŽNICE

Aby studenti mohli formulovat pravidla, jimž rovnoběžnost přímek na povrchu koule podléhá, bylo třeba, aby odvodili a pochopili, jaký útvar na kouli reprezentuje přímku a proč. K tomu jsem použila níže uvedené návodné otázky (Otázka 1-3) a úkoly (Úkol 1-3), s jejichž pomocí měli studenti dojít k odpovědi. Rozdělila jsem tabuli na dvě poloviny, na jednu jsme zakreslovali údaje platné v rovině, na druhou pak údaje platné na povrchu koule. Zakreslování situací nejenom na modely, ale i na načrtnutou kouli na tabuli považuji za důležité nejen kvůli větší názornosti, ale také proto, aby studenti neměli stejné problémy s náčrtky do pracovních listů jako účastníci první fáze výzkumu.

Otázka 1: *Jaký tvar má trajektorie člověka, který jde po rovině stále rovně?*

S odpovědí na tuto otázku studenti samozřejmě neměli problém a odpovídali, že je to přímka, což jsme si ilustrovali na tabuli.

Otázka 2: *Kam dojde člověk, který se bude pohybovat stále rovně po povrchu zeměkoule?*

Studenti opět s odpovědí neváhali a odpovídali, že na stejné místo. Byli vyzváni, aby situaci zakreslili na své modely, zároveň jsme vše zakreslili na větší míč i tabuli.

Otázka 3: *Jaký útvar tímto pohybem na povrchu zeměkoule opíše?*

Studenti věděli, že to bude kružnice, jak bylo patrné i z náčrtků.

Úkoly 1-3: *Načrtněte na kouli (model zeměkoule) trajektorii člověka, který jde stále rovně, když:*

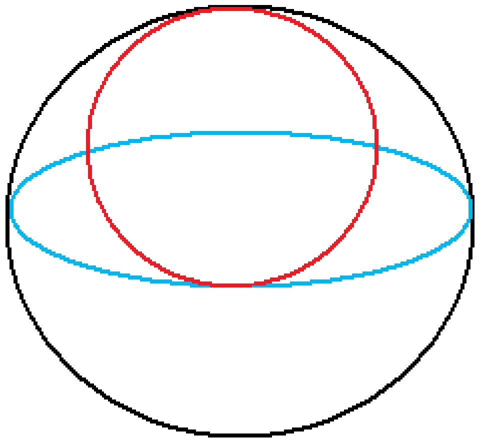
1) Jeho výchozí poloha je na rovníku.

2) Jeho výchozí poloha je na pólu.

3) Jeho výchozí poloha je mimo rovník a póly.

U všech úkolů byli studenti nejprve vyzváni, aby situaci ukázali na glóbu. V bodě 1) všichni dotázaní správně vyznačili rovník, v bodě 2) poledník. U bodu 3) jsem na glóbu záměrně vybrala jako výchozí bod město ležící na jedné z rovnoběžek a studenti se rozdělili na dvě skupiny. První, početnější skupina vyznačovala na glóbu, modelech i náčrtku na tabuli onu rovnoběžku, pár žáků tvořících druhou skupinu již vědělo, že trajektorií bude hlavní kružnice, jak bylo z jejich náčrtků patrné. Na otázku, proč podle nich trajektorie vypadá zrovna takhle, odpovídali, že kružnice musí být stejná, jako dvě předchozí.

Ostatní žáci stále ještě nenahlédli, proč tomu tak je, proto jsme si vysvětlili, že jelikož je koule souměrná podle středu, trajektorie člověka, který jde po ní rovně, musí mít skutečně vždy stejný tvar bez ohledu na výchozí pozici, což jsem demonstrovala tím, že kouli můžeme vždy natočit tak, abychom výchozí bod umístili na pomyslný rovník či poledník. Vše jsme pak zakreslili na model koule a skutečně bylo vidět, že nová trajektorie z „rovníku“ se liší od předchozí „rovnoběžky“ (obr. 54). Těm, kterým toto vysvětlení nestačilo a stále namítali, že se člověk může pohybovat rovně i po některé jiné rovnoběžce než rovníku, pomohl příklad rovnoběžky velmi blízké některému z pólů. Po zakreslení na model koule bylo patrné, že by člověk opisoval kolečko kolem jednoho místa a rozhodně by nešel rovně. Poté se zdálo, že všichni studenti již do problému nahlédli.



Obr. 54

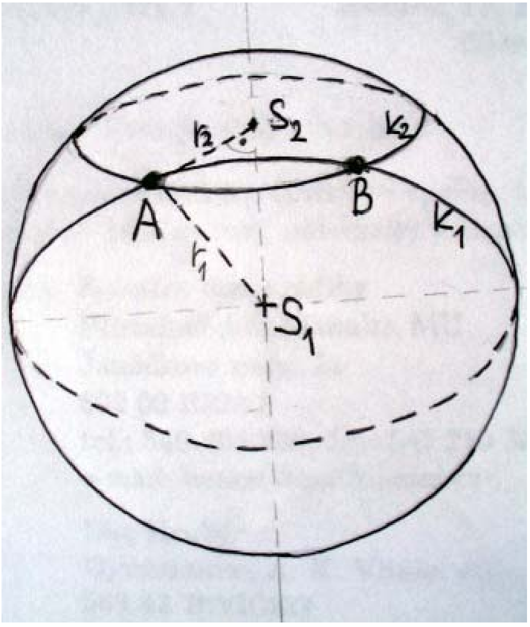
Chtěla jsem pak od studentů vědět, co mohou o kružnici, která tvoří trajektorii rovně kráčejícího člověka na povrchu (země)koule říci; bez problémů odpovídali, že je to kružnice, která má střed ve středu koule, a poloměr tedy rovný poloměru koule. Seznámila jsem studenty s tím, že takovou kružnici nazýváme kružnicí hlavní.

Shodli jsme se tedy na tom, že to vypadá, že přímku na kouli reprezentuje hlavní kružnice, ale bylo třeba to potvrdit, proto jsme se na základě definice přímky jako nejkratší spojnice dvou bodů snažili dokázat, že nejkratší spojnicí dvou bodů na kouli je oblouk hlavní kružnice, a to zhruba tímto způsobem:

Tak, jako lze v rovině každými dvěma body proložit přímku, lze vést na kouli každými dvěma body hlavní kružnici. Tak jako je přímka (respektive její část – úsečka ohraničená body) nejkratší spojnicí mezi dvěma body v rovině, je hlavní kružnice (respektive kratší část jejího oblouku ohraničeného body) nejkratší spojnicí mezi dvěma body na kulové ploše. Proč tomu tak je, si ukážeme na obrázku.

Nakreslíme na kouli hlavní kružnici (označíme ji k_1) a jinou kružnici (k_2), která má s hlavní kružnicí dva společné body (obr. 55).

Vše jsme zakreslovali na míč i tabuli, studenti kreslili na své modely.



Obr. 55

Jelikož víme, že hlavní kružnice má na povrchu koule největší možný poloměr, rovný poloměru koule, je patrné, že poloměr kružnice k_1 (hlavní kružnice) je větší než poloměr kružnice k_2.

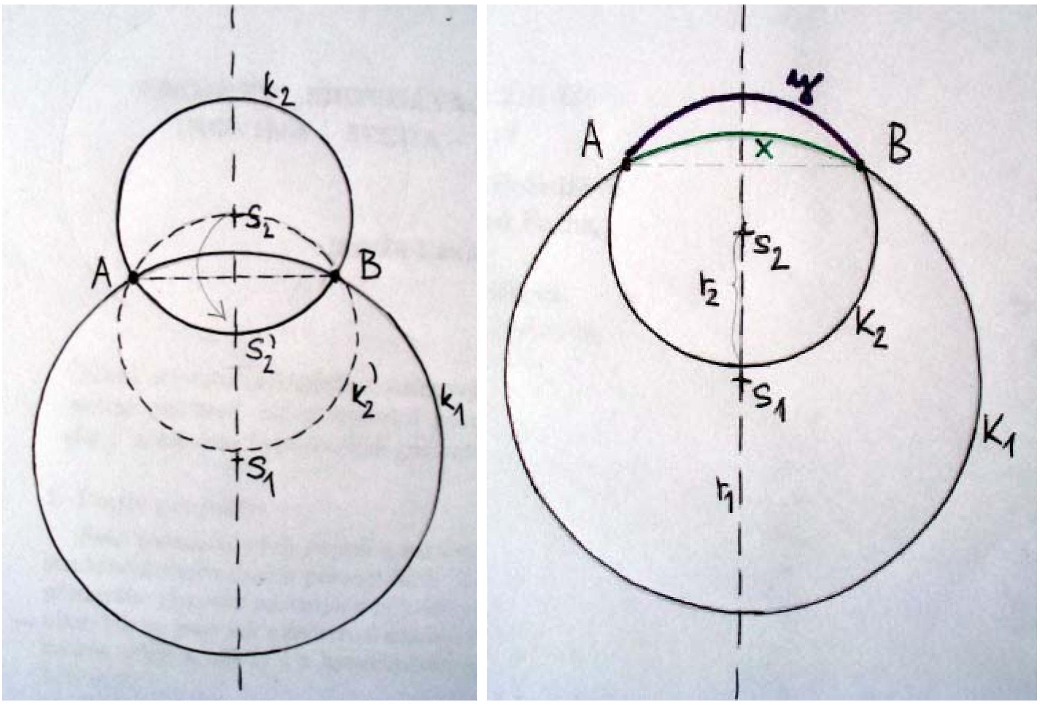
Máme tedy dány dvě kružnice, jejichž poloměry se nerovnají a které mají společné dva body.

Označíme si délku oblouku AB kružnice k_1 jako x a délku oblouku AB kružnice k_2 jako y. Chceme tedy dokázat, že x je menší než y.

Otázka 4: *Jak mohu dokázat, že vzdálenost x je menší než vzdálenost y?*

Zde se podle mého názoru projevila výhoda technické střední školy, když někteří ze studentů sami navrhovali, že můžeme kouli „říznout těmi dvěma kružnicemi“.

Provedeme tedy řezy koule rovinami obsahujícími kružnice a sklopíme do jedné roviny (obr. 56 a)*, kružnici k_2 pak ještě zobrazíme v osové souměrnosti s osou AB* (obr. 56 b).



a *b*

Obr. 56

Z obrázku je patrné, že délka x části oblouku kružnice k_1 je kratší než délka y části oblouku kružnice k_2.

Můžeme vyvodit závěr: Máme dány dvě kružnice, jejichž poloměry se nerovnají a které mají společné dva body A, B. Pak část oblouku AB kružnice s menším poloměrem bude vždy větší než část oblouku AB kružnice s větším poloměrem. Vždy uvažujeme kratší části oblouku, které body A a B na kružnicích ohraničují.

Hlavní kružnice je kružnice s největším možným poloměrem, kterou můžeme na kulové ploše narýsovat, jelikož její poloměr se rovná poloměru kulové plochy. Jakákoli jiná než hlavní kružnice na povrchu koule tedy musí mít menší poloměr než kružnice hlavní. Proto je nejkratší spojnicí dvou bodů na kulové ploše kratší část oblouku hlavní kružnice, kterou těmito body proložíme. Hlavní kružnice na povrchu koule tak reprezentuje přímku.

Nezdálo se, že s přijmutím tohoto důkazu mají studenti nějaký problém. Důkazem jsme dokončili probrání toho, co potřebovali vědět k úspěšnému řešení úloh z pracovního listu.

Zatímco těm, kteří úlohy řešili bez úvodní hodiny, byla reprezentace přímky na kouli hlavní kružnicí předložena jako fakt, v úvodní hodině měli studenti možnost zjistit, proč tomu tak je. Nahlédnutí do podstaty věci vždy zlepšuje orientaci v problému, a jak se ukázalo, ani v tomto případě tomu nebylo jinak.

Mohli jsme tedy přistoupit k důsledkům neeuklidovské geometrie a zajímavým úlohám, skrze něž bylo cílem podpořit ve studentech zájem o poznání zákonitostí sférické geometrie, upevnit představu o jejich fungování, prezentovat vazby mezi neeuklidovskou a euklidovskou geometrií a reálným světem a umožnit studentům lepší zažití načerpaných poznatků.

5) ZAJÍMAVOSTI, ÚLOHY

Aby si studenti uvědomili důsledky neeuklidovské geometrie v reálném světě a poznali deformace vzdáleností, ke kterým dochází při zobrazení světa v atlase, tedy na rovině, zvolila jsem nejprve Příklad 1.

Příklad 1: *Najděte na mapě světa New York a Madrid a vyznačte mezi nimi nejkratší vzdálenost.*

Při pohledu na mapu světa studenti většinou volili řešení znázorněné na obr. 57. Vysvětlili jsme si tedy, že toto je nejkratší vzdálenost mezi body označující města na mapě, ale nás zajímá, jak bude vypadat nejkratší vzdálenost mezi městy v reálu.

Poté někteří studenti již správně tvrdili, že to bude nějaký oblouk, jiní si situaci nedokázali představit. Zařadila jsem tedy Příklad 2.

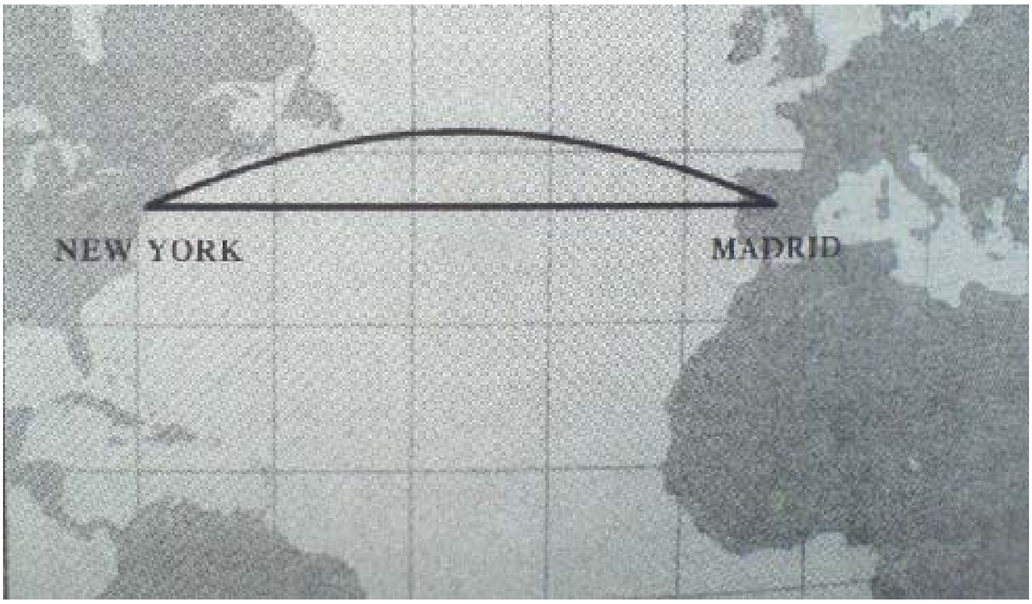
Obr. 57

Příklad 2: *Najděte New York a Madrid na glóbu a opište nejkratší vzdálenost, na základě toho, co již víte.*

V tomto případě studenti na glóbu i v náčrtcích opisovali oblouk hlavní kružnice, spojující New York a Madrid. Na základě srovnání tohoto oblouku a rovnoběžky, která obě města spojuje a která je zobrazena i v atlase světa, většina dosud nepřesvědčených rovněž došla k tomu, že nejkratší vzdáleností bude oblouk mezi oběma městy. Vrátili jsme se tedy zpět k mapě:

Otázka 5: *Která ze dvou cest z New Yorku do Madridu vyznačených na obrázku* (obr. 58, [23, s. 124]) *je tedy v reálném světě kratší?*

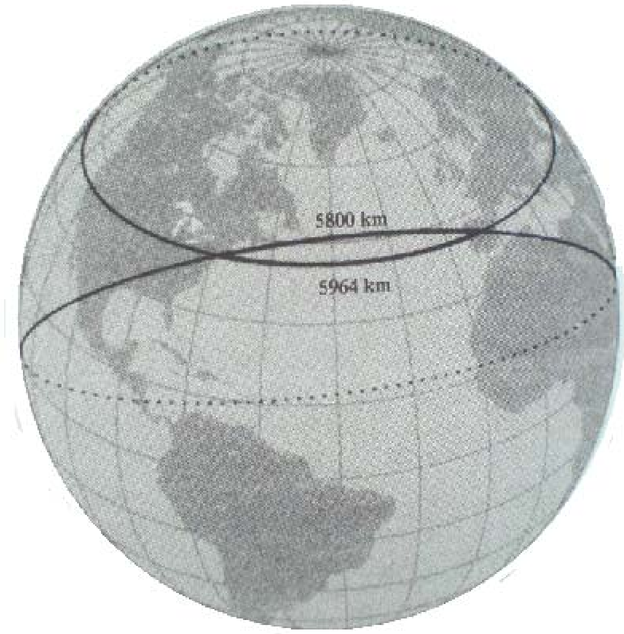
Většina studentů už věděla, že to bude cesta vedoucí po oblouku. Ukázalo se však, že ne všichni věnovali pozornost předcházejícímu výkladu, nebo mu neporozuměli tak, jak tvrdili, neboť ve třídě stále zůstávala skupinka několika studentů, kteří se s tímto faktem nehodlali ztotožnit.



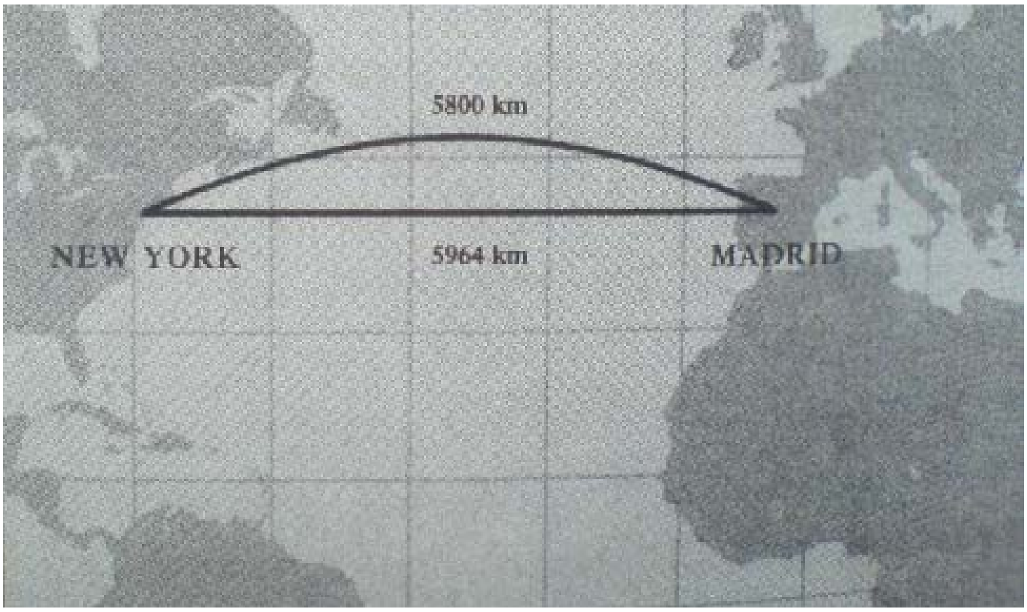
Obr. 58

Ukázali jsme si tedy obrázky (obr. 59 a 60 [23, s. 124]) se vzdálenostmi, jaké byly v reálu naměřeny. Po prezentaci těchto obrázků se ve třídě strhla vášnivá debata, při které ona skupinka studentů tvrdila, že „to není možné“, a to při pohledu na obrázek z atlasu světa s naměřenými vzdálenostmi (obr. 60). Přesto, že předcházející část hodiny byla založena na odvozování toho, že to možné je a proč, debata mě potěšila, neboť bylo vidět, že jsou studenti tématem zaujati a není jim lhostejné.

Poukázala jsem tedy na to, že obr. 59 je v podstatě totožný s obrázkem, ze kterého jsme vycházeli při důkazu toho, že oblouk hlavní kružnice je nejkratší vzdáleností dvou bodů na kouli (obr. 55). Korespondence mezi obr. 59 a 60 je zřejmá, neboť přímka spojující města na obr. 60 je rovnoběžná se znázorněnými zemskými rovnoběžkami, proto se musí jednat o část kružnice s menším poloměrem, než má kružnice hlavní, jelikož New York s Madridem neleží na rovníku. Vysvětlila jsem pak znovu, že celé zkreslení je důsledkem toho, že atlas znázorňuje v rovině města a kontinenty, které ve skutečnosti leží na kouli, a jelikož kouli do roviny rozvinout nelze, dochází k deformacím tvarů a vzdáleností.



Obr. 59



Obr. 60

Studenti poté tvrdili, že vše již chápou, později však na jejich řešeních úloh z pracovních listů bylo patrné, že v problému stále ještě tápají.

Na závěr jsem poznatky z této úlohy ještě shrnula a přidala některé zajímavosti:

Pokud bychom se tedy chtěli plavit v co nejkratším čase z New Yorku do Madridu, musíme plout nejdříve směrem na severovýchod, pak se pozvolna stočit víc na jih a nakonec na jihovýchod. Jedná se o stejnou křivku, po níž by se pohybovala nerušeně se kutálející bowlingová koule nebo po níž při migraci letí někteří chytří ptáci jako kulík hnědokřídlý nebo koliha aljašská, tedy o část oblouku hlavní kružnice, která prochází danými dvěma body – zde New Yorkem a Madridem. [23]

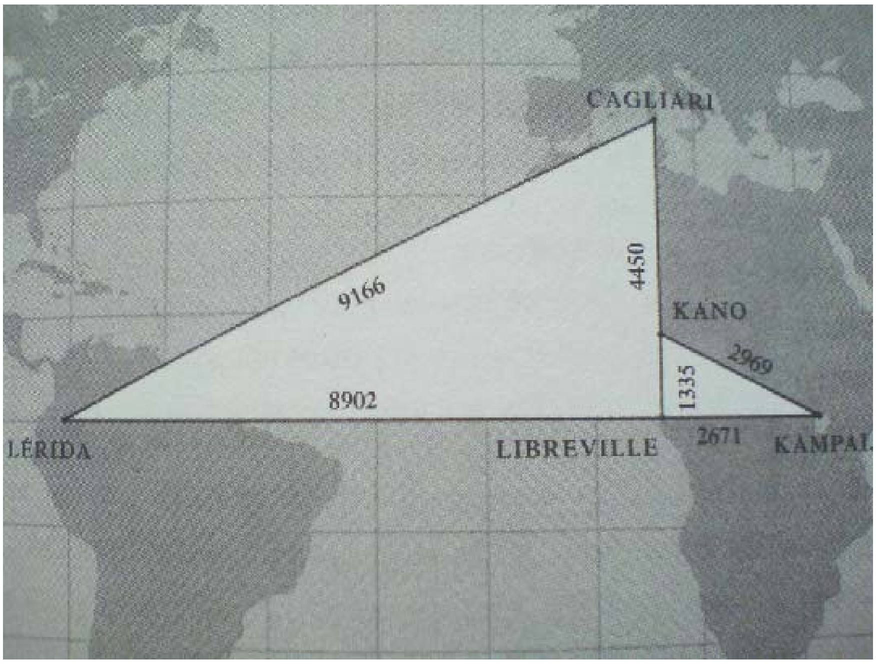
Studenti z úvodu hodiny věděli, že pátý Euklidův postulát je ekvivalentní s Pythagorovou větou, proto jsem do hodiny zařadila Příklad 3 ([23]), jednak k tomu, aby si ověřili, že na povrchu koule Pythagorova věta neplatí, jednak aby se ještě blíže seznámili se zákonitostmi sférické geometrie na povrchu zeměkoule, tedy v obrovských měřítkách, a viděli tak korespondenci mezi geometrií neeuklidovskou a euklidovskou a pochopili, proč vnímáme svět euklidovsky, ačkoli žijeme na povrchu koule.

Příklad 3: *Podíváme se, jak to na kouli vypadá s pravoúhlými trojúhelníky. Na mapě* (obr. 61 [23, s. 121]) *je vyznačeno město Libreville v Gabunu ležící na nultém poledníku a 09° východní délky: je součástí vrcholu pravoúhlého trojúhelníku. Když se přesunete o 12° na sever, přibližně do míst, kde se nachází Kano v Nigerii a o 24° na východ do Kampaly v Ugandě, vytvoříte odvěsny tohoto trojúhelníku. Jedním ze základních teorémů euklidovské geometrie je Pythagorova věta.*

Kdybyste mezi těmito městy cestovali nejkratší možnou cestou, naměřili byste tyto vzdálenosti:

Kampala – Libreville:	*2 671 km*
Libreville – Kano:	*1 335 km*
Kano – Kampala:	*2 969 km*

Studentům jsem zároveň ukázala obrázek znázorňující, jak situace vypadá v reálu na zeměkouli (obr. 62 [23, s. 121]).



Obr. 61

Obr. 62

Část studentů ověřila součet čtverců nad odvěsnami (8 910 446 km^2), část čtverec nad přeponou (8 814 961 km^2).

Nyní se podíváme na mnohem větší trojúhelník tvořený městy Libreville, italským Cagliari ležícím na 39° severní šířky a Léridou v Kolumbii na 71° západní délky.

Vzdálenosti, které byste naměřili:

Libreville – Lérida	*8 902 km*
Lérida – Cagliari	*9 199 km*
Cagliari – Libreville	*4 450 km*

Nyní jsme opět ověřili součet čtverců nad odvěsnami (99 048 104 km^2) a nad přeponou (84 015 556 km^2) a bylo vidět, že odchylka je tentokrát mnohem větší.

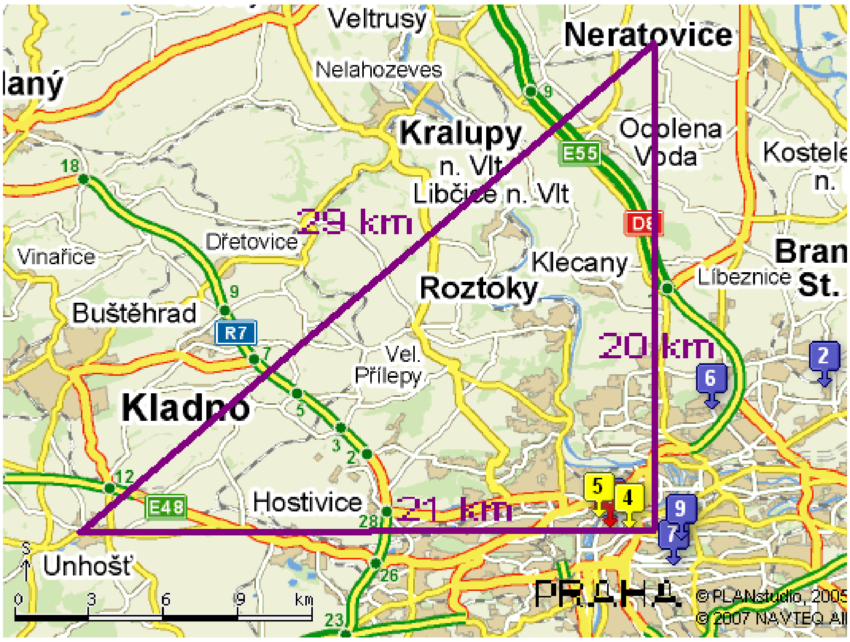
Ověřili jsme tedy, že na povrchu zeměkoule, pohybujeme-li se v obrovských vzdálenostech, Pythagorova věta neplatí a že čím větší jsou vzdálenosti, tím větší je i odchylka od pravidel Pythagorovy věty. Zbývalo podívat se, jak to vypadá, zkrátíme-li vzdálenosti na pouhé desítky kilometrů:

Pokud však nebudete chtít cestovat po celém světě, spokojíte se pouze s okolím Prahy a uskutečníte z centra hlavního města výlet do Neratovic, z Neratovic se zajedete podívat do Unhoště a pak se vrátíte zpět do centra (obr. 63)*, naměříte tyto vzdálenosti:*

Praha – Neratovice:	*20 km*
Neratovice – Unhošť:	*29 km*
Unhošť – Praha:	*21 km*

Opět jsme stejným způsobem ověřili součet čtverců nad odvěsnami (841km^2) a nad přeponou (841km^2).

Z výpočtů jsme zjistili, že pro poměrně malé trojúhelníky tedy Pythagorova věta platí. Vysvětlila jsem studentům, že je to tím, že poloměr zeměkoule je tak veliký, že krátké vzdálenosti na jeho povrchu se zdají být v rovině. Čím je však trojúhelník na Zemi větší, tím větší je i odchylka.



Obr. 63

Ukázali jsme si také, že v důsledku těchto zákonitostí je součet úhlů ve sférickém trojúhelníku větší než 180° a studenti dostali za úkol najít a načrtnout na své modely trojúhelník se třemi pravými úhly.

Úkol 4: *Načrtněte na kouli trojúhelník, jenž má tři pravé úhly.*

Někteří ze studentů nevěděli, jak úlohu uchopit a kde začít, proto jsem úlohu opět převedla na úlohu se zeměkoulí a zadání pak znělo tak, že hledáme poledník, který bude kolmý k rovníku a jiný poledník, který bude kolmý k rovníku i k prvnímu poledníku.
Studenti věděli, že k rovníku je kolmý každý poledník, stačilo tedy jeden zvolit a najít jiný, na něj kolmý. Poté, co jsme si jako první poledník zvolili poledník nultý, všichni spolupracující studenti věděli, že hledaný poledník bude poledník devadesátý. Vše jsme si pečlivě načrtli na model koule, na kterém byl trojúhelník se třemi pravými úhly zřetelně vidět.

Považovala jsem za užitečné studenty seznámit s některými dalšími paradoxy, se kterými se ve sférické geometrii běžně setkáváme. Posloužil mi k tomu Příklad 4 [23, s. 130]:

Příklad 4: *Vezměte si obruč o poloměru 1m. Když tuto obruč roztočíte kolem pasu, nacházíte se uvnitř ní? Zdá se evidentní, že ano. Pokud tuto obruč položíte na zem a stoupnete si doprostřed, jste stále uvnitř, že? Když zvětšíte poloměr obruče na 2 kilometry, bude už opravdu velká, ale s porovnání s planetou je stále mnohem menší. Stále tedy můžete tvrdit, že se ocitáte uvnitř obruče. Co když ale zvětšíte její poloměr na 6 400 km a ona teď obepíná planetu stejně jako rovník? Už začnete pochybovat, jestli jste stále ještě uvnitř, nebo vně, není to tak? Když budete poloměr obruče pomyslně dál zvětšovat, tedy oddalovat od sebe její obvod, obruč se začne ve skutečnosti smršťovat. Nakonec bude vypadat stejně jako na začátku, s poloměrem 1m, její střed se však bude nacházet daleko od vás. Jako byste stáli mimo ni. Jak se lze dostat zevnitř ven pouhým zvětšováním obruče? Pojmy „za“, „před“, „uvnitř“ a „vně“ zde ztrácejí na jednoduchosti. Takové rozpory jsou pro sférický prostor charakteristické.*

6) DALŠÍ DŮSLEDKY A VYUŽITÍ NEEUKLIDOVSKÉ GEOMETRIE

V poslední části hodiny jsem se snažila s pomocí studentů shrnout, v jakých oblastech můžeme poznatky z neeuklidovské geometrie využít, a seznámila jsem je s tím, při jak důležitém objevu z nich bylo čerpáno.

Na otázku, v jakých oblastech se neeuklidovská geometrie uplatňuje, studenti (zřejmě pod vlivem předcházejících úloh) nejčastěji jmenovali geografii, dále pak fyziku i architekturu.

Seznámila jsem stručně studenty s tím, že neeuklidovskou geometrii využil i Einstein ve své teorii relativity, když hledal matematický aparát, pomocí něhož by popsal svůj objev, totiž že tělesa svou hmotností zakřivují prostor kolem sebe. Aby si studenti vše dokázali představit, využila jsem obr. 15. Došli jsme tak k zajímavému důsledku, že kdyby Země byla menší (s obvodem rovníku např. pouhých 100 km), ale zachovala si svou hmotnost, při jasném dni bychom si viděli na záda.

Nyní se ve třídě strhla další vášnivá debata o tom, jestli je něco takového možné, jestli by pak člověk mohl trefit sám sebe dopředu vrženým kamenem apod. Někteří ze studentů se zdáli být problémem zakřivených prostorů doslova konsternováni a zajímali se o to, jak je zakřiven vesmír a jakou roli v zakřivování prostoru hraje čas. Na některé z jejich otázek jsem opravdu nedokázala odpovědět.

7) POZNÁMKY K PRACOVNÍM LISTŮM

V závěru vyučovací hodiny jsem studentům rozdala příslušné pracovní listy a vzhledem k nejčastějším problémům studentů z první fáze výzkumu jsem je upozornila na to, že, jak bylo patrné i z náčrtků, které jsme prováděli v hodině, ve svých řešeních nemohou opustit povrch koule. K tomu jim měla pomoci představa, že svá řešení zakreslují na průhlednou kouli, tu si pak postaví před sebe a kreslí ji do listu jako model. Použila jsem i přirovnání ke konstrukcím v euklidovské rovině: Pokud do řešení zahrnou i body mimo kulovou plochu, bude toto řešení obdobné situaci, kdy by při rýsování na list papíru mohli rýsovat křivky i nad tímto listem a pod ním. Například při zadání „Načrtněte na list papíru krychli“ by v jejich řešení byla na listu pouze základna krychle a její zbytek by se vznášel v prostoru nad papírem. Je jasné, že něco takového není možné a na povrchu koule je situace obdobná.

Aby bylo řešení úloh studentům jasnější, doporučila jsem jim, aby si nejprve zakreslovali řešení na své modely koule a pak teprve do pracovního listu.

7.7.1.2 Shrnutí úvodní hodiny

Účelem úvodní hodiny bylo především seznámení studentů s pojmem neeuklidovská geometrie; měli se dozvědět něco o jejím původu a podstatě a pochopit, že v ní fungují trochu jiné zákonitosti, než na jaké jsou zvyklí, a porozumět tomu, proč je hlavní kružnice „přímkou na kouli“. Skrze tyto kroky měli proniknout do sférické geometrie, aby byli schopni samostatně poznávat její další zákonitosti a vyvozovat vlastní závěry. Záměrně jsem proto nevolila jako náplň úvodní hodiny úlohy, které by byly obdobné těm z pracovního listu, a vyhnula jsem se jakýmkoli soudům o rovnoběžnosti na sféře. Řekli jsme si pouze to, že sférická geometrie patří do geometrie neeuklidovské, pro kterou neplatí pátý Euklidův postulát. Úlohy byly tedy zaměřeny pouze na názornou demonstraci faktu, že přímka je na sféře reprezentována hlavní kružnicí a že zde neplatí ty zákony geometrie, které studenti dosud znali. Účastníci výzkumu se tedy při řešení úloh z pracovních listů museli opravdu zamyslet nad důsledky skutečností, se kterými se v této hodině seznámili, a zcela samostatně objevovat pravidla pro sférickou geometrii platná.

V úvodní hodině se projevily některé další výhody, které zařazení neeuklidovské geometrie do výuky přináší. Jelikož studenti pro úspěšné řešení úloh skutečně nepotřebují zvláštní vědomosti, které je třeba těžce získávat při hodinách (některými nenáviděné) matematiky, ale stačí jim znalosti, které již dávno nabyli z běžných situací, ve kterých se setkali s tvarem koule, šanci uspět zde mají i matematicky méně zdatní studenti. Například v jednom z prvních ročníků, ve kterých jsem úvodní hodinu zařadila, se zdál tématem nejvíc zaujat student, který byl dle obecného mínění profesorů ve škole považován spíše za slabšího. Tento student byl pak v řešení úloh nejúspěšnější z celé třídy. Jelikož většinu z nás motivuje k větší snaze a oblibě jistého oboru spíše úspěch v dané oblasti, věřím, že i neeuklidovská geometrie svou přitažlivostí může přispět ke zvýšení zájmu studentů o matematiku.

Přitažlivost neeuklidovské geometrie podle mého názoru spočívá v tom, že je obklopena jistým tajemnem, které studenti pozvolna poodhalují. Na začátku nejsou daná přesná pravidla, na jaká jsou v hodinách matematiky zvyklí, ale na základě indicií postupně budují nový svět, pomocí kterého objevují jiný pohled na skutečnost.

Zřejmě díky tomu byli studenti tématem neeuklidovské geometrie skutečně zaujati, téměř všichni v hodině spolupracovali, kreslili na své modely, hádali se nad některými skutečnostmi a snažili se dozvědět více, než jsem jim původně měla v plánu prozradit. Debata o zakřivených prostorech se s některými z nich protáhla až do přestávky a můžu říci, že tato hodina byla jednou z nejpříjemnějších, které jsem za týden strávený se studenty prožila.

Jako každé téma, samozřejmě i toto přinášelo svá úskalí. Studenti se v průběhu hodiny často nedokázali oprostit od toho, že zeměkoule nám slouží pouze jako model, a stále argumentovali svými poznatky z geografie. Například někteří z nich tvrdili, že neeuklidovská geometrie na povrchu Země ve skutečnosti neplatí, jelikož, jak vědí z hodin zeměpisu, zeměkoule ve skutečnosti koulí není, neboť je na pólech zploštělá. Dále argumentovali tím, že zemský povrch není zcela hladký atd. Vysvětlila jsem jim, že zeměkoule je pro nás modelem a jako na dokonalou kouli se na ni díváme pouze pro zjednodušení, nicméně ani tvar, jaký má ve skutečnosti, do roviny rozvinout nedokážeme. Proto na ní zákony neeuklidovské geometrie platí, jak jsme si ostatně dokázali v příkladech se vzdálenostmi. Zohledňování grafických poznatků v řešení příkladů se však později objevilo i v pracovních listech, jak bude popsáno v další kapitole.

7.7.2 Analýza druhé fáze výzkumu a srovnání výsledků s první fází

Cílem této podkapitoly je především srovnat obě fáze výzkumu a posoudit význam dalších složek (úvodní hodina, upravené zadání, modely koule) pro úspěšnost studentských řešení, proto zde již nebudou podrobně popisována a rozebírána řešení jednotlivých úloh, ale zaměřím se především na odlišnosti od závěrů (případně shodnosti se závěry), ke kterým docházeli studenti v první fázi výzkumu. Jak již bylo řečeno v kapitole 7.4, pro každou ze tříd byla zvolena jiná kritéria seznámení studentů s neeuklidovskou geometrií; z důvodu zachování objektivity a jednoznačnějších výsledků se zaměřím nejprve zvlášť na práce studentů prvního ročníku (neboť mezi jejich matematickým myšlením a myšlením čtvrťáků byly samozřejmě rozdíly) a pokusím se vystihnout vliv úvodní hodiny či upraveného zadání na jejich řešení a porovnat ho s výsledky první fáze výzkumu, až poté proberu řešení studentů čtvrtého ročníku a možnosti upraveného zadání ovlivnit postup stejného řešitele. Očekávám, že tak budou potvrzeny či vyvrácený domněnky, ke kterým jsem dospěla na základě analýzy výsledků první fáze, a budu moci učinit závěry o tom, jaký způsob seznámení studentů s neeuklidovskou geometrií je pro ně přijatelný a zajímavý. V doslovných ukázkách opět neopravuji stylistické chyby, pouze chyby gramatické.

7.7.2.1 Analýza řešení úloh studentů prvního ročníku

Forma a typ zadání:	Verze 1 s úvodní hodinou (1.G)
	Verze 2 s úvodní hodinou (1.D)
	Verze 2 bez úvodní hodiny (1.A)
Řešitelé:	Studenti 1. ročníku
Forma vypracování:	DÚ
Čas na vypracování:	Týden
Pomůcky:	Modely koule v podobě míčků, jež je možné pokreslit

I. Zadání:

Konstrukce v rovině

Krok 1 Narýsujte přímku. Pojmenujte ji *l*.

Krok 2 Narýsujte jinou přímku, která nemá žádný společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *a*.

Krok 3 Narýsujte přímku, která má právě jeden společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *b*.

Krok 4 Narýsujte přímku, která má právě dva společné body s přímkou *l*. Pojmenujte ji *c*.

Krok 5 Narýsujte přímku, která má více než dva společné body s přímkou *l*. Pojmenujte ji *d*.

Vyšetřete

1. Které tyto konstrukce jsou možné v rovině?

2. Které z vašich přímek jsou rovnoběžné? Proč?

3. Vyšetřete všechny možné způsoby, jak se mohou dvě různé přímky protínat v rovině.

4. ***Odhadněte***:

Budou vaše závěry stejné pro hlavní kružnice na kulové ploše?

Upravené zadání:

3. Popište všechny možné způsoby, jak se mohou dvě různé přímky protínat v rovině (poloha přímek, počet průsečíků, …).

Řešení studentů:

Jelikož jsme se v úvodní hodině nezabývali podrobným probíráním možností protnutí dvou přímek v rovině (ale ani na kulové ploše), studentská řešení většiny bodů této úlohy se nijak zásadně nelišila od řešení, která uváděli studenti v první fázi výzkumu. *Kroky 1 – 4* opět vyřešili téměř všichni bez problémů, pokud docházelo k chybám, opakovaly se ty z předchozí fáze výzkumu. Rozdíl nastal u úlohy **3**. Ti, kteří řešili úlohy ve Verzi 1, měli s uchopením úlohy stále potíže bez ohledu na to, zda absolvovali úvodní hodinu nebo ne, a někteří na ni neodpovídali vůbec. Toto jsou některé z odpovědí:

- *Když nejsou rovnoběžné, nebo splývají.*
- *Vždy se budou protínat jen v jednom bodě.*

Studenti, kterým se dostalo do rukou upravené zadání Verze 2, byli v odpovědích na úlohu **3** jistější a přesnější. Sice stále docházelo k chybám, kdy někteří zapomněli do výčtu uvést některou z možností, téměř všichni zde však začali pracovat s pojmy „rovnoběžnost“, „různoběžnost“ a „totožnost“ a na rozdíl od předchozích uváděli i úplná řešení. :

- *Rovnoběžné – 0 průsečíků, různoběžné – 1 průsečík, totožné – více než 2 průsečíky.*
- *Můžou být totožné, rovnoběžné, nebo různoběžné.*
- *Rovnoběžky, různoběžky – kolmé, různé.*
- *Různoběžky – 1, totožné – všechny.*

V odpovědích na otázku úlohy **4** byly patrné rozdíly mezi studenty, kteří absolvovali úvodní hodinu, a těmi, kteří do neeuklidovské geometrie nebyli předem zasvěceni. Studenti 1.A, kteří se úvodní hodiny neúčastnili, si sice většinou mysleli, že jejich závěry pro kulovou plochu stejné nebudou, odpovídali však přirozeně stejně jako studenti z první fáze výzkumu většinou pouze jednoslovně, nikdo z nich se navíc nepokusil své závěry zdůvodnit. V každém z případů se vyskytla jedna z následujících odpovědí:

- *Ne.*
- *Ano.*
- *Nevím, asi ne.*

Nikdo ze studentů, kteří úvodní hodinu absolvovali, se nedomníval, že pro kulovou plochu učiní stejné závěry. Někteří řešitelé v této úloze svůj závěr zdůvodňovali, ačkoli je k tomu zadání přímo nevybízelo; jejich argumenty byly navíc smysluplné a srozumitelné:

- *Ne – na kulové ploše mohou mít dvě přímky dva společné body.*
- *Ne – dá se provést krok 4.*

Závěr:

V úvodní hodině jsme rovinu a zákonitosti v ní platné užívali pouze ke srovnání se zákony, které platí na kulové ploše. Po srovnání řešení úloh týkajících se roviny studenty z první a druhé fáze výzkumu lze říci, že úvodní hodina studenty nijak neovlivnila v chápání roviny a v produkci závěrů pro rovinu platných.

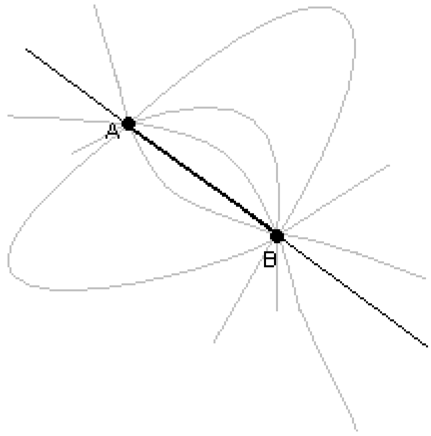
V případě úlohy **3** bylo vidět, jak lze pouze zpřesněným zadáním studenta nasměrovat ke správnému řešení. Jakmile studenti pochopili, co přesně je v úloze jejich úkolem, neměli s řešením zásadnější potíže.

Na vyjádřeních studentů v úloze **4** bylo vidět, že jim úvodní hodina zřejmě pomohla k lepší orientaci v problému, neboť ačkoliv navštěvují teprve první ročník, jsou jejich odpovědi výstižnější než odpovědi studentů ročníku třetího a svědčí o lepším vhledu do sférické geometrie.

Upravené zadání, přidané do pracovního listu Verze 2 navíc:

Zopakujte si definici přímky v rovině.

Co můžeme tedy říct o přímce procházející dvěma body? (uvažujte vzdálenost dvou bodů)



………………………………………………

………………………………………………

Na základě toho, co jste si zopakovali, se zamyslete nad tím, proč jsou na kulové ploše přímky reprezentovány právě hlavními kružnicemi.

K jakým závěrům jste dospěli?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Nikdo ze studentů, kterým se dostala do rukou Verze 2 s návodnými otázkami, neodpověděl, že oblouk hlavní kružnice je na kulové ploše nejkratší vzdáleností dvou bodů, bez ohledu na to, jestli absolvovali úvodní hodinu, či nikoli.

Někteří z těch, kteří neprošli úvodní hodinou, věděli, že přímka v rovině spojuje dva body nejkratším způsobem, nedokázali však tvrzení analogicky převést na oblouk hlavní kružnice. Často se vyskytovaly odpovědi, že přímka má *přesně daný směr* a je reprezentována hlavní kružnicí, protože ta *má také stále stejný směr*.

Další odpovědi svědčily o tom, že studenti opět uvažují body mimo kouli:

- Na kulové ploše jsou přímky reprezentovány hlavními kružnicemi, *protože průsečíky hlavních kružnic určují přímku, která určí průměr koule.*

Objevil se i student, jehož zřejmě zmátl obrázek, který mu měl v řešení pomoci, když na první otázku odpověděl:

- *Vzdálenost dvou bodů na přímce je rovna vzdálenosti průsečíků zobrazených elips.*

Žádnou z odpovědí studentů, kteří neprošli úvodní hodinou, nebylo možné uznat za správnou.

Závěry studentů, kteří úvodní hodinou prošli, se nijak patrně nelišily, jak již bylo uvedeno, často se vyskytovaly závěry podobné výše uvedeným, jejich formulace byly však většinou přesnější a srozumitelnější; někdy docházeli k zajímavým postřehům:

- *Když se nejedná o hlavní kružnici, tak se jedná o křivku.*

Někteří při svých úvahách přišli na novou definici přímky, která se však v matematickém světě zřejmě neujme:

- *Přímka je kružnice s body stejně vzdálenými od sebe.*
- *Je to přímka. Má dva body.* (Odpověď na otázku „co můžeme říct o přímce procházející dvěma body.“)

Závěr:

Je zajímavé, že studenti, kteří absolvovali úvodní hodinu, nedokázali popsat hlavní kružnici (resp. její oblouk) jako nejkratší vzdálenost dvou bodů. S touto skutečností jsme totiž v úvodní hodině pracovali, když jsme si osvětlovali, proč přímka hlavní kružnici reprezentuje. Jelikož však studentům nebyl v hodině poskytnut návod na řešení většiny ostatních úloh z pracovního listu, možná jim bylo divné, že bych se ptala na to, co jsme si už říkali, a snažili se uvést jiné důvody obhajující hlavní kružnici jako přímku na kouli.

V každém případě z řešení studentů vyplynulo, že pouze tyto návodné otázky nestačí k tomu, aby si uvědomili, že oblouk hlavní kružnice je nejkratší spojnicí dvou bodů, a mohli tak úspěšně řešit úlohu **13**. Možné je pak uvést více otázek, které by k tomuto faktu studenty postupně dovedly podobně jako v úvodní hodině (otázky o trajektorii rovně jdoucího člověka apod.).

II. Zadání:

Konstrukce na kulové ploše (na kouli)

5. Stejné kroky, které jste provedli v rovině, proveďte na kulové ploše (na kouli), jen nahraďte přímky hlavními kružnicemi (pouze načrtněte obrázek). Sledujte, které konstrukce jsou na kulové ploše možné.

Vyšetřete

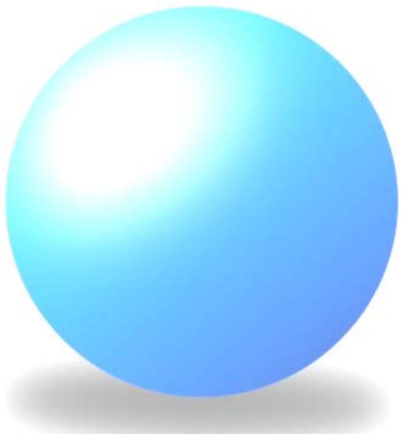
6. Vyšetřete všechny způsoby, jak se mohou dvě hlavní kružnice protínat na kulové ploše.

7. Mohou být dvě hlavní kružnice někdy rovnoběžné?

Upravené zadání:

Nezapomeňte, že při řešení příkladů na kulové ploše nesmíte povrch koule opustit a uvažovat řešení mimo něj. Představte si, že svá řešení zakreslujete například na míček.

5. Stejné kroky, které jste provedli v rovině, proveďte na kulové ploše (na kouli), jen nahraďte přímky hlavními kružnicemi (načrtněte obrázek na znázorněnou kouli).
Sledujte, které konstrukce jsou na kulové ploše možné.



7. Mohou být dvě hlavní kružnice někdy rovnoběžné?

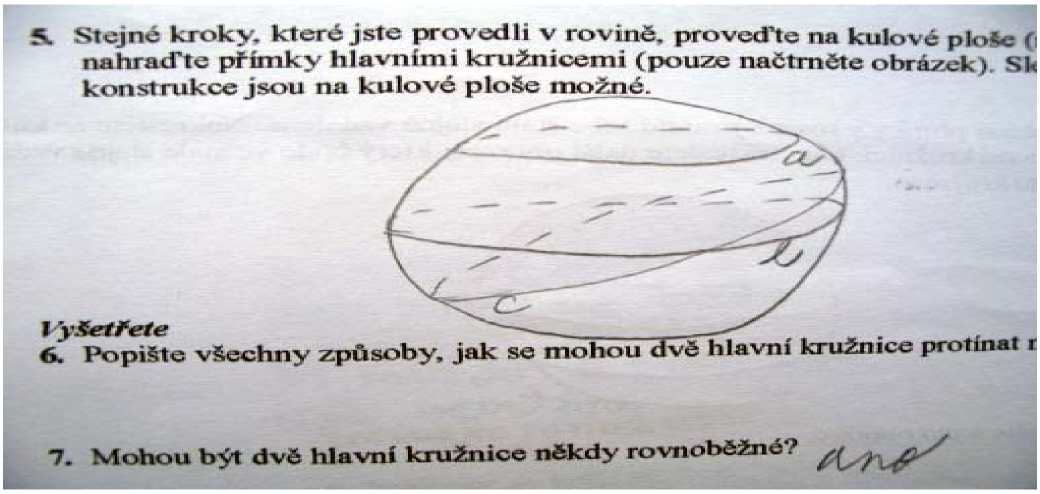
Řešení studentů:

U těchto úloh se procento úspěšnosti oproti první fázi výzkumu podstatně zvýšilo, a to jak studentů, kteří se zúčastnili úvodní hodiny, tak u těch kteří úvodní hodinu neměli, řešili však úlohy v upraveném zadání Verze 2.

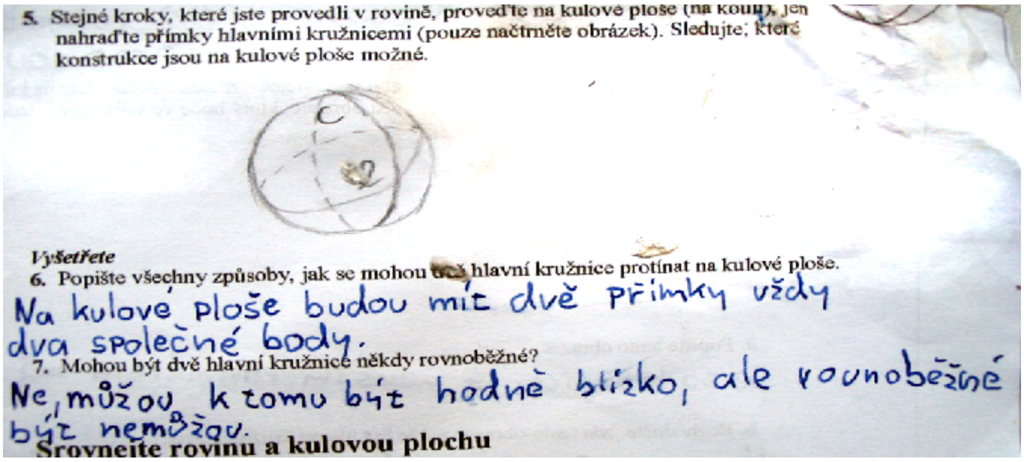
Ze všech řešitelů, kteří absolvovali úvodní hodinu, byli neúspěšní pouze tři (z toho dva řešitelé Verze 1, jeden ve Verzi 2), kteří se buď domnívali, že existují rovnoběžné hlavní kružnice a nedokázali popsat způsoby jejich protnutí na kulové ploše (obr. 64), nebo odpovídali nesmyslně:

- **5.** -
  6. *Když budou kolmé na sebe.*
  7. *Ne*

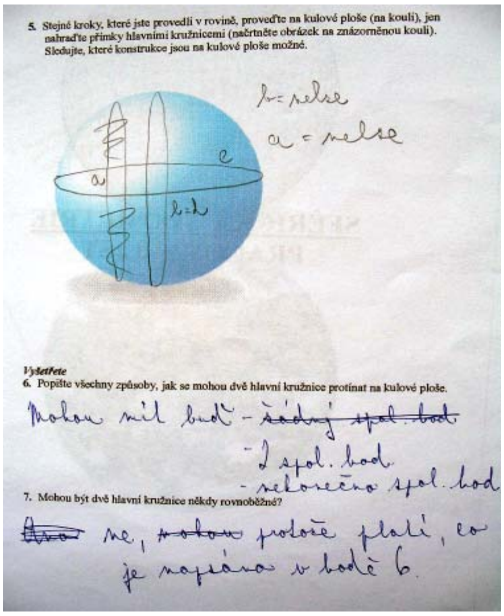
Ostatní, tedy naprostá většina řešitelů, byli částečně či zcela úspěšní. Nejčastější případy řešení ilustrují obr. 65, 66 a 67.

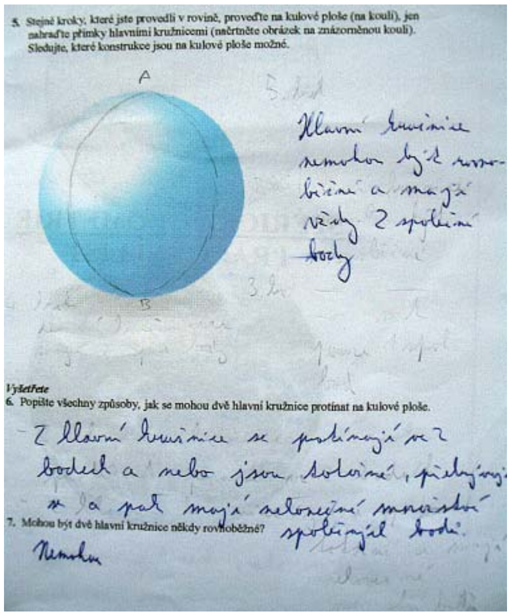


Obr. 64



Obr. 65

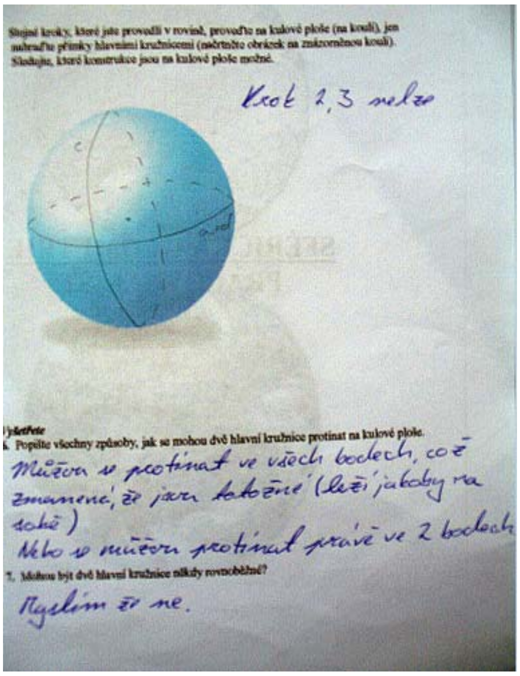


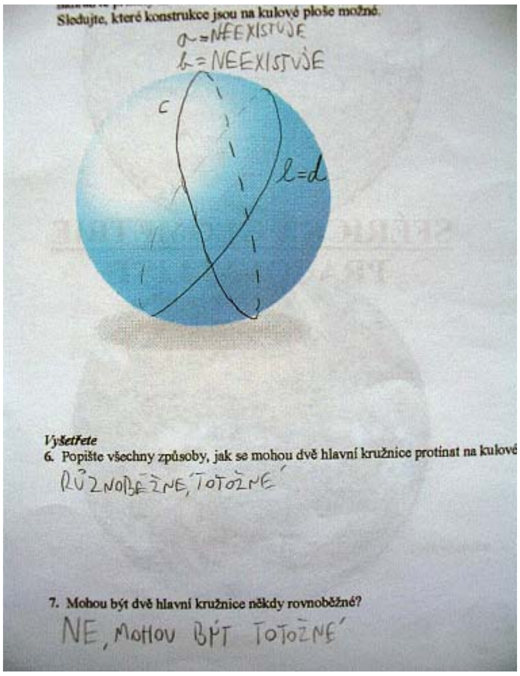


Obr. 66

Obr. 67

Zajímavé je, že i studenti z 1.A, kteří neabsolvovali úvodní hodinu, byli v těchto úlohách daleko úspěšnější než řešitelé z první fáze výzkumu. Někteří úlohy nevyplnili, většina však uvedla částečně nebo zcela správné řešení, i když jejich formulace nebyly tak přesné jako u těch, kteří se úvodní hodiny zúčastnili. Zřejmě jim tedy pomohlo upravené zadání s předkreslenou koulí, již řešitelé využívali k načrtnutí obrázků a na základě jejich posouzení pak docházeli ke správným závěrům (obr. 68, 69).





Obr. 68 *Obr. 69*

Předkreslený obrázek využívali i studenti 1.D, kteří řešili příklady Verze 2 v návaznosti na úvodní hodinu; pro ty, kteří úvodní hodinu absolvovali, se však tato pomoc zdá zbytečná, neboť všichni studenti 1.G, kteří vyplňovali Verzi 1, dokázali načrtnout vlastní kouli i se svým řešením, jak je patrné z obr. 64 a 65. Někteří v úloze **5** ani obrázek nekreslili a rovnou správně odpovídali:

- *2) Hlavní kružnice nemohou být rovnoběžné.*
  3) Hlavní kružnice nemohou mít pouze jeden společný bod.
  4) Hlavní kružnice mají právě dva společné body.
  5) Hlavní kružnice jsou totožné.

Za velmi pozitivní považuji fakt, že ani v jednom z případů, bez ohledu na zařazení úvodní hodiny, nedošlo ke snaze transformovat kouli do roviny, jak tomu bylo u studentů z první fáze výzkumu.

Závěr:

Z řešení je vidět, že úvodní hodina pozitivně ovlivnila představivost studentů a jejich chápání zákonitostí platících na povrchu koule. Zatímco studenti z první fáze výzkumu, kteří úvodní hodinu neabsolvovali, často zaměňovali kružnici hlavní za jakoukoli kružnici; zde se taková záměna objevila pouze ve dvou výše zmiňovaných případech, což svědčí o dobrém pochopení pojmu „hlavní kružnice“, jež je základním předpokladem pro úspěšné řešení úloh většinou studentů.

Projevil se zde také pozitivní vliv předkresleného obrázku na řešení úloh těmi studenty, kteří úvodní hodinu neměli. Studenti z první fáze si nezřídka nevěděli rady s uchopením úlohy, když se snažili kružnice znázorňovat v rovině, kde se situace jeví zkresleně. Zde však k podobné transformaci nedošlo, zřejmě proto, že předkreslený obrázek k tomu nedával řešitelům příliš mnoho možností a mohl jim pomoci ujasnit si způsob, jakým je třeba podobné úlohy řešit. Studenti pak přirozeně přijali kouli jako jediný prostor k zakreslování řešení, kde je možné snadno odhalit rozdíl mezi hlavní a vedlejší kružnicí, a počet správných odpovědí se výrazně zvýšil.

III. Zadání:

Srovnejte rovinu a kulovou plochu

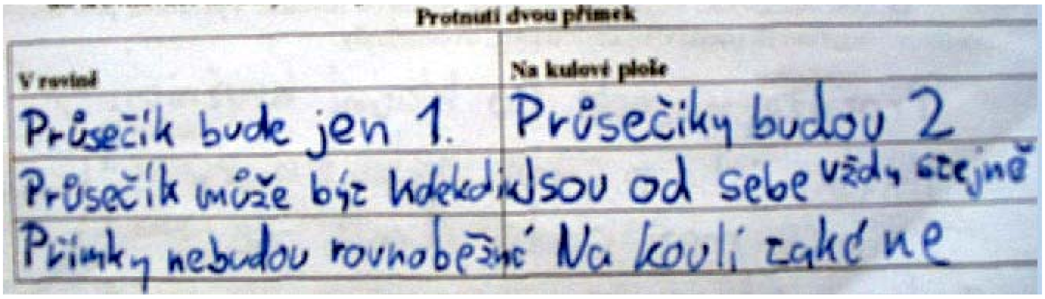
8. Určete, kolik postřehů můžete učinit o průsečíku dvou přímek v rovině a průsečíku dvou hlavních kružnic na kulové ploše (kdy je 0, 1, 2, více průsečíků, ...). Zaznamenejte je do srovnávací tabulky. *Přidejte tolik řádek, kolik potřebujete.*

Upravené zadání:

8. Určete, kolik postřehů můžete učinit o průsečíku dvou přímek v rovině a průsečíku dvou hlavních kružnic na kulové ploše (poloha a jí odpovídající počet průsečíků, odpovídající názvy přímek v příslušné poloze; kdy je 0, 1, 2, více průsečíků, jaké jsou další postřehy, rozdíly, zvláštnosti). Zaznamenejte je do srovnávací tabulky. *Přidejte tolik řádek, kolik potřebujete.*

Řešení studentů:

Počet správných řešení této úlohy se oproti první fázi výzkumu opět zvýšil, nesprávná či neúplná řešení však nad správnými stále převažovala u studentů, kteří řešili úlohy Verze 1, a to i u těch, kteří na další otázky odpovídali správně. Většina řešitelů v této úloze neúspěšných tabulku nevyplnila vůbec. V jednom z případů se student, zřejmě ovlivněn formulací zadání Verze 1 (bez ohledu na specifikaci v závorce), zabýval pouze případem, kdy se přímky a hlavní kružnice protnou (obr. 70). S ohledem na tento fakt však úlohu vyřešil správně.

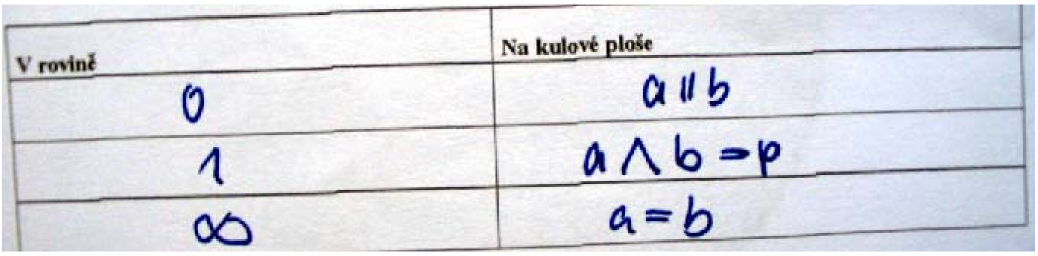


Protnutí dvou přímek

V rovině	Na kulové ploše
Průsečík bude jen 1.	Průsečíky budou 2
Průsečík může být kdekoli	Jsou od sebe vždy stejně
Přímky nebudou rovnoběžné	Na kouli také ne

Obr. 70

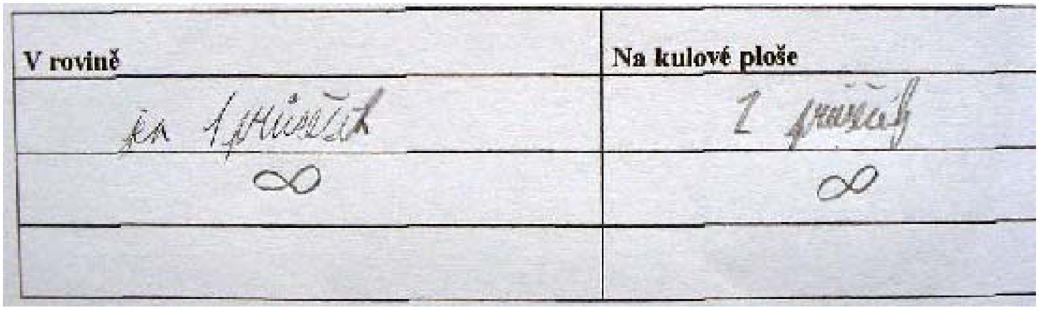
Naproti tomu studenti, kterým se dostala do rukou Verze 2 se zpřesněným zadáním, zaznamenali větší úspěch, bez ohledu na to, zda absolvovali úvodní hodinu, či nikoliv. I když někteří vyplňovali do tabulky pouze údaje platné pro rovinu (obr. 71), většina vyplnila tabulku alespoň částečně správně (obr. 72 – 77).



V rovině	Na kulové ploše
0	$a \parallel b$
1	$a \wedge b = p$
∞	$a = b$

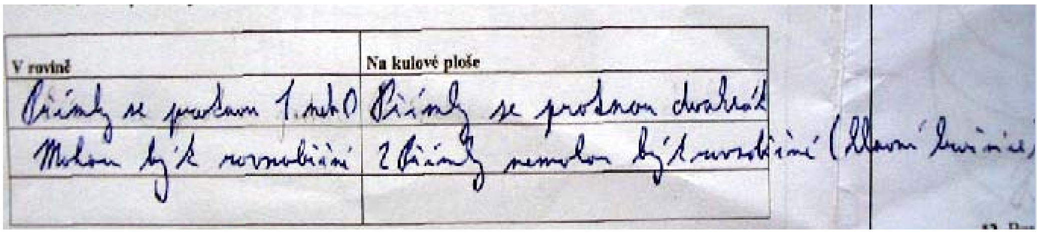
Obr. 71

Toto jsou některá řešení studentů, kteří absolvovali úvodní hodinu:



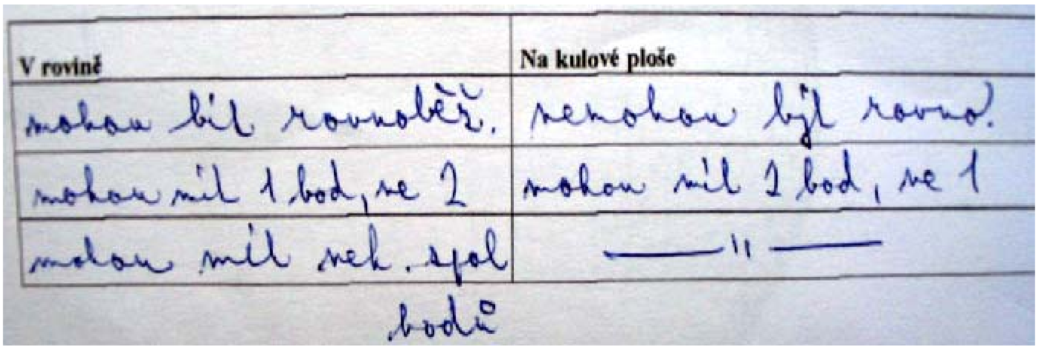
V rovině	Na kulové ploše
ža 1 průsečík	2 průsečík
∞	∞

Obr. 72



V rovině	Na kulové ploše
Přímky se protnou 1. bod	Přímky se protnou dvakrát
Mohou být rovnoběžné	2 přímky nemohou být rovnoběžné (hlavní kružnice)

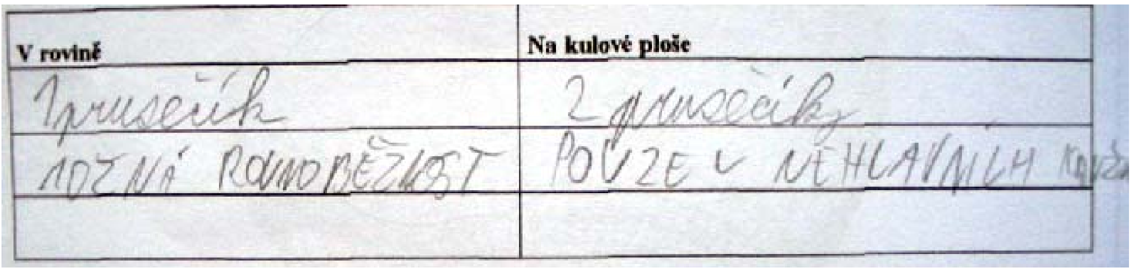
Obr. 73



V rovině	Na kulové ploše
mohou být rovnoběž.	nemohou být rovno.
mohou mít 1 bod, se 2	mohou mít 2 bod, se 1
mohou mít nek. spol bodů	—— " ——

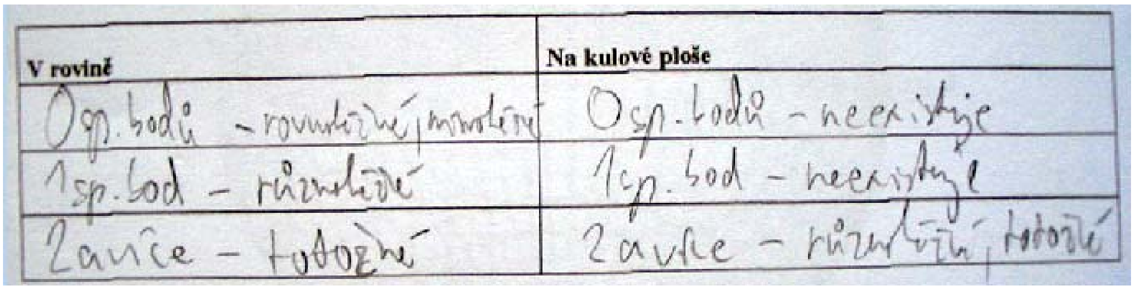
Obr. 74

A takto úlohu řešili studenti i bez úvodní hodiny:



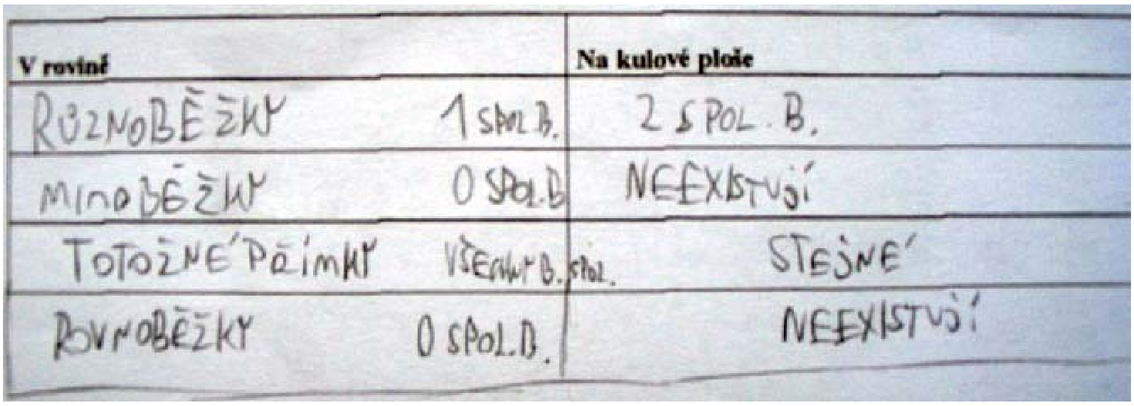
V rovině	Na kulové ploše
1 průsečík	2 průsečíky
MOŽNÁ RŮZNOBĚŽNOST	POUZE V NEHLAVNÍCH KRUŽ

Obr. 75



V rovině	Na kulové ploše
0 sp. bodů – rovnoběžné, mimoběžné	0 sp. bodů – neexistuje
1 sp. bod – různoběžné	1 sp. bod – neexistuje
2 a více – totožné	2 a více – různoběžné, totožné

Obr. 76



V rovině		Na kulové ploše
RŮZNOBĚŽKY	1 SPOL. B.	2 SPOL. B.
MIMOBĚŽKY	0 SPOL. B	NEEXISTUJÍ
TOTOŽNÉ PŘÍMKY	VŠECHNY B. SPOL.	STEJNÉ
ROVNOBĚŽKY	0 SPOL. B.	NEEXISTUJÍ

Obr. 77

Závěr:

Nezdá se, že by úvodní hodina nějak zásadně ovlivnila studenty v řešení této úlohy. I když jsem zaznamenala nárůst správných řešení u studentů řešících Verzi 1, kteří se úvodní hodiny zúčastnili, nebyl nijak výrazný. Z toho, že tabulku nevyplnili správně ani ti z těchto studentů, kteří byli v řešení zbylých úloh převážně úspěšní, a prokázali tak dobrý vhled do sférické geometrie, vyplývá, že problém, který někteří řešitelé s touto úlohou měli, zřejmě opravdu vyvstával ze zadání, které jsem pro Verzi 2 blíže specifikovala. Potvrdily to i výsledky studentů řešících Verzi 2, kteří úvodní hodinu neabsolvovali, přesto však byli v řešení této úlohy úspěšnější. Jak se dalo předpokládat, nejzdařilejší byla v této úloze řešení studentů, kteří se účastnili úvodní hodiny a zároveň řešili pracovní list ve Verzi 2.

Uvědomila jsem si také, že přesnější je vyzvat studenty k učinění postřehů o „možnostech protnutí“ dvou přímek, neboť postřehy o „průsečíku“ opravdu svádějí k rozebrání pouze jednoho případu (i když se jednalo o řešení jediného studenta).

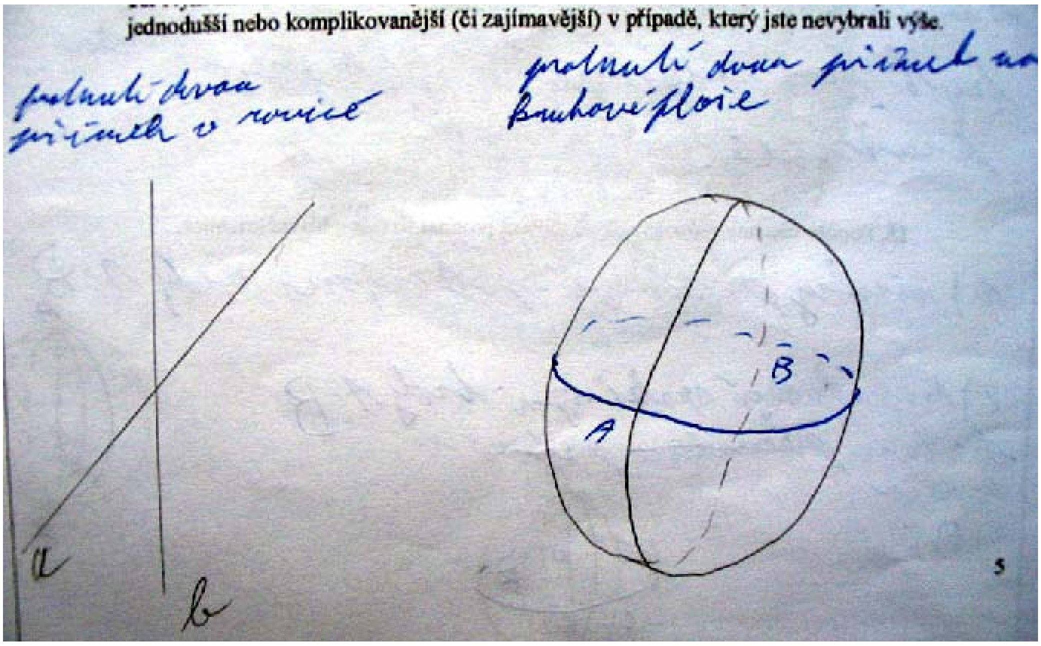
IV. Zadání:

9. Myslíte, že je protnutí dvou přímek jednodušší v rovině, nebo na kulové ploše? Jaký případ je zajímavější? Proč?

10. Nyní zkuste změnit své argumenty. Uveďte důvody, proč je protnutí dvou přímek jednodušší nebo spletitější (zajímavější) v případě, který jste nevybrali výše.

Řešení studentů:

Ve srovnání s první fází výzkumu jsem nezaznamenala výraznější rozdíly v soudech o zajímavosti situace v rovině a na kulové ploše; naprostá většina studentů nezávisle na typu zadání i účasti na úvodní hodině opět považovala kulovou plochu za zajímavější. Překvapující však je, že na rozdíl od studentů, kteří se s neeuklidovskou geometrií neseznámili formou úvodní hodiny, nikdo z těch, jež do ní nahlédli, nepovažoval protnutí přímek na sféře za jednodušší. Pro naprostou většinu byla kulová plocha náročnější na představivost, což je opak toho, co uváděli studenti v první fázi výzkumu i někteří řešitelé z 1.A, kde jsem úvodní hodinu nezařadila. V odpovědích jsou patrné i další rozdíly mezi těmi, kteří úvodní hodinu absolvovali – jejich formulace jsou přesnější a zasvěcenější, někteří je doprovodili obrázkem (obr. 78) – a studenty, kteří se jí neúčastnili. Ti často nenacházejí vhodná slova pro popsání situace, kterou intuitivně správně odhadli, uvažují však v souvislosti s koulí o třírozměrném prostoru stejně jako studenti v první fázi a objevuje se zde i pojem „elipsa“ pro přímku na kouli.



Obr. 78

Dále uvádím některé z odpovědí studentů, kteří absolvovali úvodní hodinu:

9. - *V rovině je jednodušší, na kulové ploše je zajímavější, protože je složitější si tato protnutí představit a zakreslit.*

- *Určitě v rovině, protože v rovině je jednodušší vytvořit přímku. Zajímavější bude také rovina – víc možných kombinací.*
- *Jednodušší je to v rovině, protože se přímky mohou protnout vždy v jenom bodě.*
- *Ani jeden. Zajímavější je na kulové ploše, protože na místě, kde vznikne průsečík, máme druhý na opačné straně.*
- *V rovině je to jednodušší, zajímavější případ je na kulové ploše, kdy se musejí protnout.*

10. - *Protnutí dvou přímek by mohlo být zajímavější na kulové ploše, protože přímky by byly vždy stejné, jen jinak otočené.*
- *Protože tam jsou dva body k protnutí.*
- *Na kulové ploše, ať udělám jakékoli dvě přímky, tak se nám vždy protnou ve dvou bodech. U roviny si musíme dát pozor, abychom nevytvořili rovnoběžky.*

Takto pak odpovídali studenti, u kterých řešení úloh úvodní hodina nepředcházela:

9. - *Jednodušší v kulové ploše, zajímavější v rovině.*
- *Jednodušší jsou v rovině. Zajímavější případ je v kouli, protože je to neobvyklejší a méně známé.*
- *Na kulové ploše je zajímavější, protože je přímka trochu zahnutá.*
- *Protnutí přímek je jednodušší, protože jsou rovně, a na kouli jsou to zahnuté, od oka střílíme křivky.*

10. - *Komplikovanější je to v kouli, kvůli tomu, že to je v prostoru.*
- *Těžší je v kouli, protože tam nerýsujeme prakticky přímku, ale elipsu.*
- *Jednodušší na kulové ploše.*

Závěr:

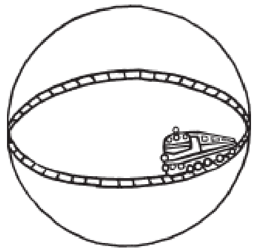
Často se stává, že čím hlouběji člověk nahlédne do určité problematiky, tím složitější mu připadá. I to může být důvodem, proč studenti po účasti na úvodní hodině najednou považují protnutí přímek na kulové ploše za složitější. Pozoruhodný je také fakt, že zatímco studenti z první fáze výzkumu považovali za zajímavější kulovou plochu z důvodu lepší viditelnosti, zde většinou považují sféru za zajímavější ze zcela opačného důvodu. Z odpovědí je dále patrné, že téměř nikdo, kdo se účastnil úvodní hodiny, již neměl problémy s představou, jak vlastně protnutí přímek na kulové ploše vypadá, a nikdo také nepovažoval kulovou plochu za třírozměrnou, ale byla opravdu chápána a přijímána jako zakřivená rovina, a studenti evidentně „věděli, o čem mluví“, což se o všech řešitelích z první i druhé fáze výzkumu, kteří úvodní hodinou neprošli, říct nedá. Pojem elipsa, který se v některých pracích těchto studentů objevil, ukazuje na fakt, že studenti vnímali podobu a tvar hlavních kružnic pouze na základě náčrtků, v nichž se hlavní kružnice jeví jako elipsa díky perspektivě, ačkoli měli k dispozici modely koule v podobě míčků.

V. Zadání:

11. Představte si, že by bylo možné, aby pár železničních kolejí vedl kolem celé Země. Mohou tyto železniční koleje představovat rovnoběžné přímky (tedy hlavní kružnice) a proč?

Upravené zadání:

11. Představte si, že by bylo možné, aby pár železničních kolejí vedl kolem celé Země. Mohou tyto železniční koleje představovat rovnoběžné přímky (tedy hlavní kružnice) a proč?



Řešení studentů:

Studenti, kteří se účastnili úvodní hodiny, neměli s řešením této úlohy problém. Vyskytl se ojedinělý případ, kdy student sice v úloze **7** odpověděl, že hlavní kružnice nemohou být rovnoběžné, zde však odpovídal kladně. Ostatní studenti tuto úlohu však vyřešili úspěšně; někteří sice odpovídali jednoslovně, většina z nich však své řešení i správně odůvodnila. Nevyskytl se ani jeden případ, kdy by student bral při řešení v úvahu body prostoru mimo kulovou plochu. Řešitelé upraveného zadání často využívali obrázek ve svých odpovědích, někdy do něj i zakreslovali. Úspěšnost v řešení úlohy se tak po absolvování úvodní hodiny zvýšila téměř dvojnásobně.

Zde jsou příklady odpovědí, které se vyskytly v pracovních listech studentů po úvodní hodině:

- *Nemohou, protože by se ve dvou bodech protnuly.*
- *Nemohou, protože hlavní kružnice nemohou být rovnoběžné.*
- *Tyto rovnoběžné přímky nemohou představovat hlavní kružnice, protože hlavní kružnice nemohou být rovnoběžné. Hlavní kružnice by vedla přesně uprostřed kolejí.*

Někteří ve svých řešeních zohledňovali velikost zeměkoule a docházeli tak k závěrům, že díky malé vzdálenosti kolejí je možné zakřivení plochy zanedbat. Toto řešení je dle mého názoru třeba uznat za správné:

- *Dvě přímky na kulové ploše nemohou být rovnoběžné, ale v tomto případě ano, protože koleje od sebe mají velmi malou vzdálenost a vzhledem k velikosti Země je zakulacení ve vzdálenosti kolejí od sebe zanedbatelné.*

U studentů, kteří neprošli úvodní hodinou, se vyskytlo více nesprávných odpovědí, stále zde však byli úspěšnější než studenti z první fáze výzkumu, zřejmě proto, že dosáhli větších úspěchů již při řešení úlohy **5**.

Asi třetina odpovědí byla nesprávná, uvádím některé z nich:

- *Mohou, proč ne?*
- *Mohou, mají stejný poloměr jako koule.*
- *Ano mohou, protože koleje jsou vždy rovnoběžné.*

Stejně jako v první fázi výzkumu, i u těchto studentů se vyskytly (někdy skutečně netradiční) odpovědi započítávající do řešení trojrozměrný prostor:

- *Nemůžou, protože vlak bude jezdit kousek od povrchu Země.*

- *Née → jelikož jsou od skutečné hlavní přímky vzdáleny polovinu jejich vzdálenosti jednotlivých kol na jedné nápravě.*

Někteří se v odpovědích oháněli zeměpisnými argumenty:
- *Ne, Země není koule.*

Další odpovědi byly v pořádku:
- *Nemohou, protože by to nebyla nejdelší možná přímka v kouli.*
- *Ne, protože hlaví kružnice mají stejný střed, tzn. že musí mít společné body.*

I někteří z těchto studentů zohledňovali měřítka na zeměkouli:
- *Jelikož by to bylo na Zemi, možné by to prakticky bylo, neboť se na takové velké vzdálenosti rovnoběžnost vytratí. Ovšem kdybychom měli malou kuličku (oproti Zemi), možné by to nebylo.*

Většina správných odpovědí však byla jednoslovná.

Závěr:

Zde se potvrdila důležitost pochopení pojmu „hlavní kružnice“ a možností jejího zobrazování na kulové ploše. Jelikož se s tímto pojmem studenti v úvodní hodině seznámili velmi podrobně, počet úspěšných řešení úlohy těmito studenty oproti první fázi výzkumu rapidně vzrostl. Zároveň zde byla zcela eliminována ta řešení, která počítala s trojrozměrným prostorem, zřejmě v důsledku procvičování náhledu na kulovou plochu v jednotlivých příkladech úvodní hodiny i díky tomu, že studenti byli v jejím závěru výslovně upozorněni, že kulová plocha je také pouze dvourozměrná a s takovou je s ní třeba v řešení úloh počítat. Na sklon některých studentů zohledňovat v řešeních měřítka na zeměkouli mohla mít vliv prezentace příkladu 3 z úvodní hodiny, ve kterém jsme si ukázali, že Pythagorova věta na Zemi platí pro menší trojúhelníky se stranami o délkách do desítek centimetrů, nikoli však pro trojúhelníky větší. Jelikož Země pak figuruje i v úloze **11**, studenti přirozeně (a správně) uvažovali, že v malých měřítkách je na Zemi postulát o rovnoběžnosti zachován. Stavba takových kolejí kolem Země by totiž byla teoreticky opravdu uskutečnitelná. Důležité při tom bylo, že řešitelé dokázali své postoje odůvodnit a obhájit pádnými argumenty. Nutno však podotknout, že podobné řešení se vyskytlo i u jednoho ze studentů, kteří úvodní hodinu neabsolvovali.

Jak již bylo řečeno, řešení této úlohy korespondovalo s úlohou **5** a ti, kteří ji vyřešili správně, uspěli i v řešení této úlohy, proto se oproti první fázi výzkumu zvýšil i zde počet úspěšných řešitelů, kteří úvodní hodinou neprošli, měli však k dispozici zpřesněné zadání, které jim pomohlo řešit předcházející úlohy. Bylo však patrné, že někteří z nich stále tápou v chápání pojmu hlavní kružnice a její funkce, neboť nesprávných odpovědí bylo stále dost. Jelikož tito studenti neměli možnost pevně uchopit zákonitosti sférické geometrie ve svém chápání prostřednictvím aktivit v úvodní hodině, počítali stále s trojrozměrným prostorem mimo kouli, jak se projevilo i v některých dalších úlohách.

VI. Zadání:

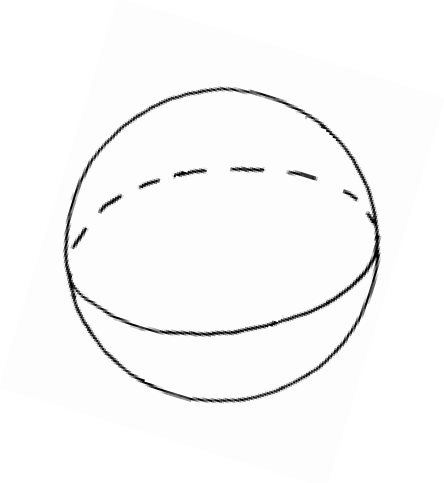
12. Rovnoběžné přímky v rovině jsou od sebe stále stejně vzdálené. Nakreslete na kulové ploše hlavní kružnici. Pak nakreslete další obrazec, který bude ve stále stejné vzdálenosti od hlavní kružnice.

a. Popište tento obrazec.

b. Rozhodněte, zda tento obrazec může být hlavní kružnicí. Proč?

Upravené zadání:

12. Rovnoběžné přímky v rovině jsou od sebe stále stejně vzdálené. Na kulové ploše, kterou vidíte na obrázku, je zakreslena hlavní kružnice. Nakreslete na tuto kulovou plochu další obrazec, který bude ve stále stejné vzdálenosti od hlavní kružnice.



a. Popište tento obrazec.

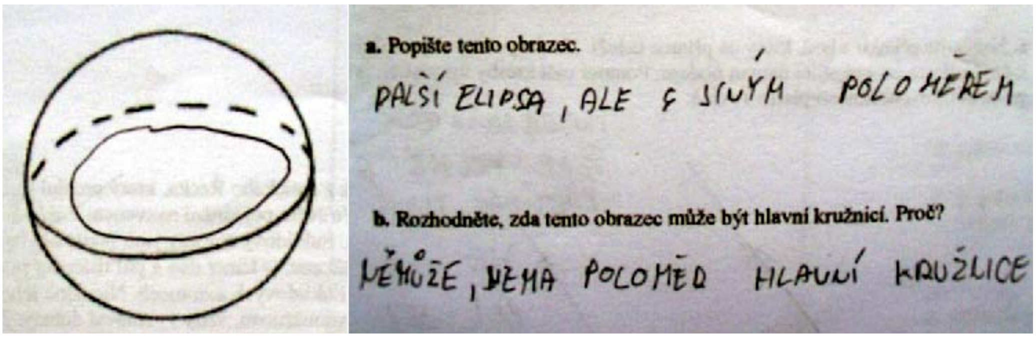
b. Rozhodněte, zda tento obrazec může být hlavní kružnicí. Proč?

Řešení studentů:

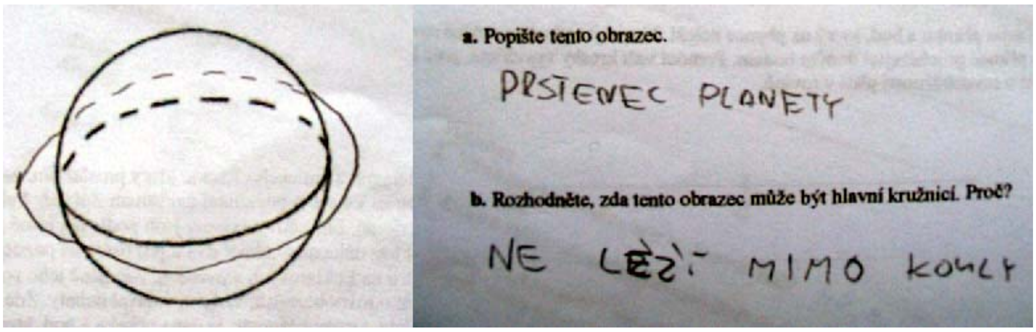
Studenti z první fáze výzkumu měli s touto úlohou opravdu potíže a téměř nikdo z nich ji nevyřešil. Studenti z druhé fáze byli o poznání úspěšnější.

Někteří z těch, jež neprošli úvodní hodinou, se s řešením úlohy stále potýkali – ačkoli měli k dispozici zpřesněné zadání a předkreslenou kouli, hlavním problémem při tom opět bylo zakreslování řešení mimo kulovou plochu (obr. 79 a 80). Někteří z těch, kteří v úloze neuspěli, se domnívali, že takovou konstrukci uskutečnit nelze (obr. 81), jiní nalezli obrazec, který nesplňoval dané podmínky (obr. 82). Jak je vidět na obr. 79, v některých řešeních se opět objevil pojem „elipsa“ v náhradě za „kružnici“.

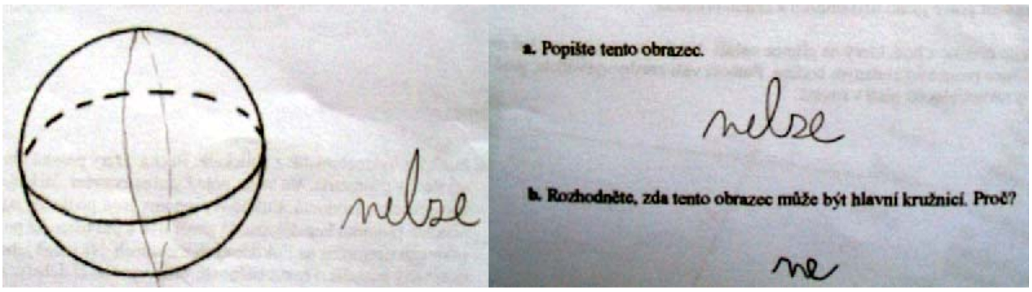
V žádném z případů však nedošlo k pokusu rozvinout kouli do roviny.



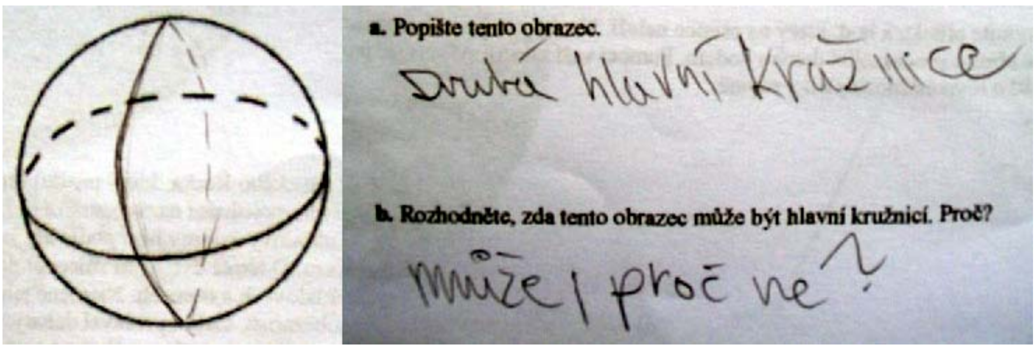
Obr. 79



Obr. 80

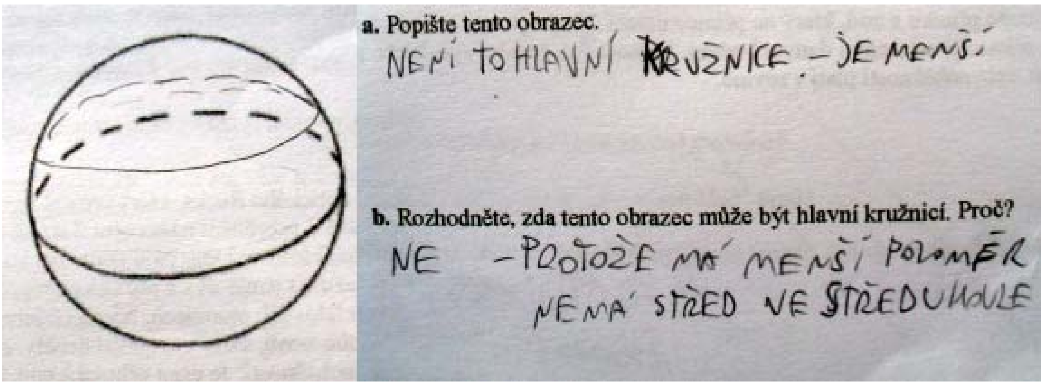


Obr. 81

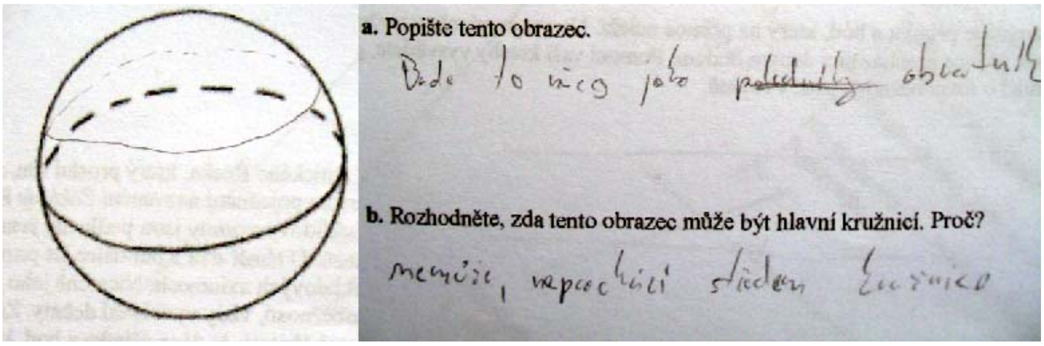


Obr. 82

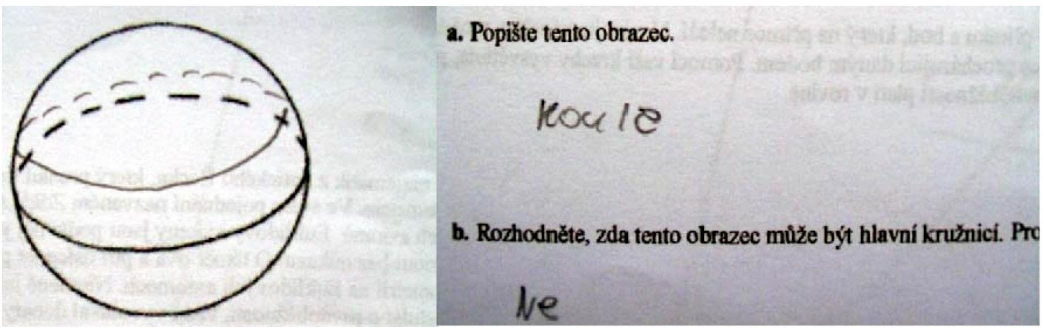
I mezi studenty, kteří neabsolvovali úvodní hodinu, se však našlo dost těch, kteří úlohu vyřešili částečně či zcela správně (obr. 83); byla jich asi polovina, což vzhledem k výsledkům první fáze výzkumu považuji za úspěch. Někteří v řešeních opět používali přirovnání k zeměkouli (obr. 84), někteří na kouli správně zakreslili hledaný obrazec, do rozhodnutí o jeho podobě pak zřejmě zahrnuli sjednocení všech řešení úlohy, když odpovídali, že se jedná o kouli (obr. 85).



Obr. 83



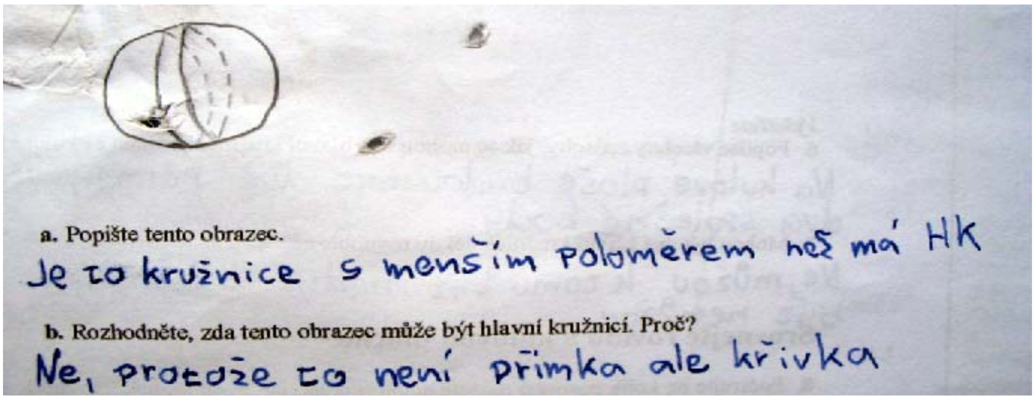
Obr. 84



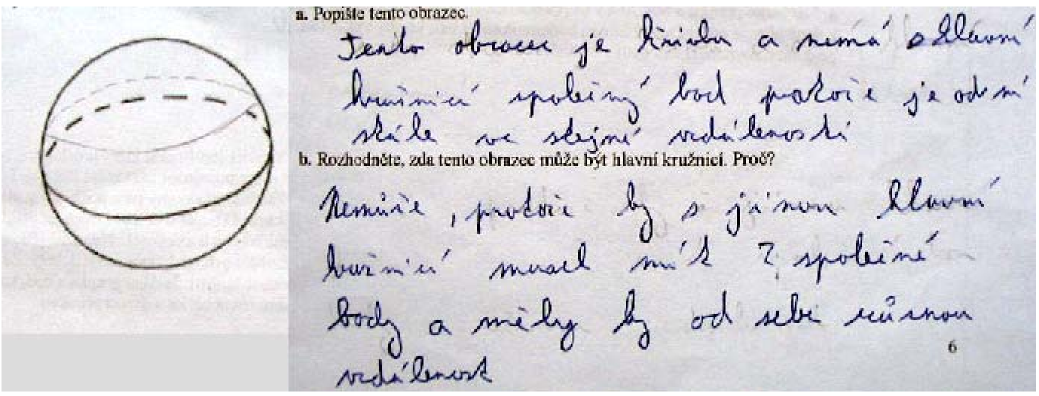
Obr. 85

Daleko výraznější pokrok je patrný na řešení studentů, kteří se zúčastnili úvodní hodiny. Tuto úlohu totiž úspěšně vyřešili všichni, někteří alespoň částečně, kdy sice obrazec nepopsali, alespoň ho však na kouli zdárně načrtli. Většina studentů však neměla potíže s žádnou částí úlohy, bez ohledu na to, jestli řešení zaznamenávali na předkreslenou kouli s hlavní kružnicí ve Verzi 2, nebo zda museli kouli i hlavní kružnici načrtnout sami ve Verzi 1 (obr. 86 - 88). I zde se vyskytovala přirovnání k rovnoběžkám na zeměkouli (obr. 89, 90) a značná část studentů dokonce uváděla, že řešením může být i jediný bod (obr. 90). Opět se ani v jednom z případů nevyskytl pokus transformovat kouli do roviny, jak tomu bylo v mnoha případech u studentů z první fáze.

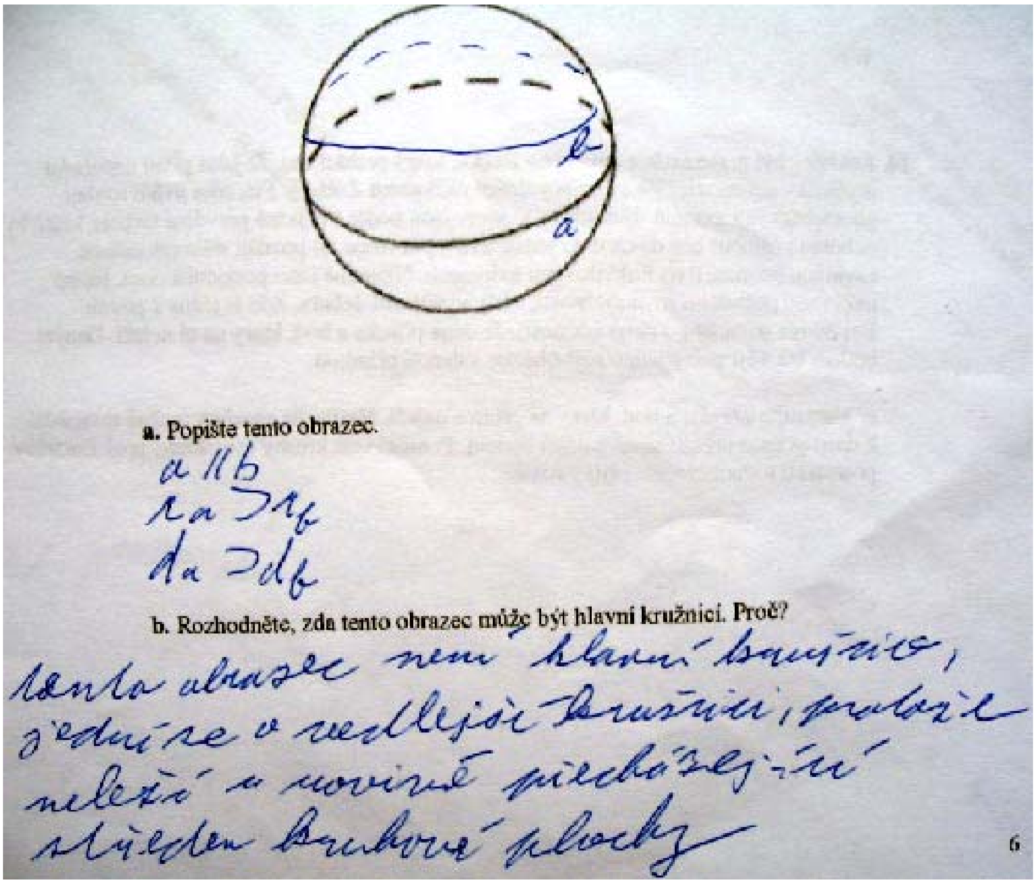
Za zmínku stojí, že někteří po absolvování úvodní hodiny přestali používat pojem „kružnice" a začali operovat s výrazy „přímka" pro hlavní kružnici a „křivka" pro kružnici vedlejší (obr. 86, 87), což svědčí o dobrém pochopení situace na sféře.



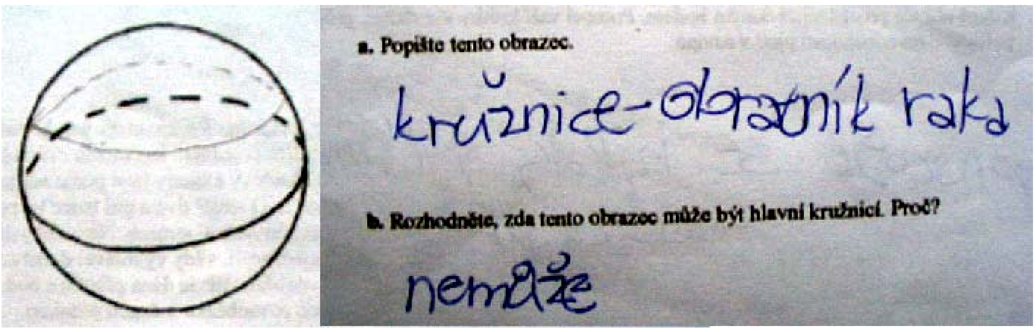
Obr. 86



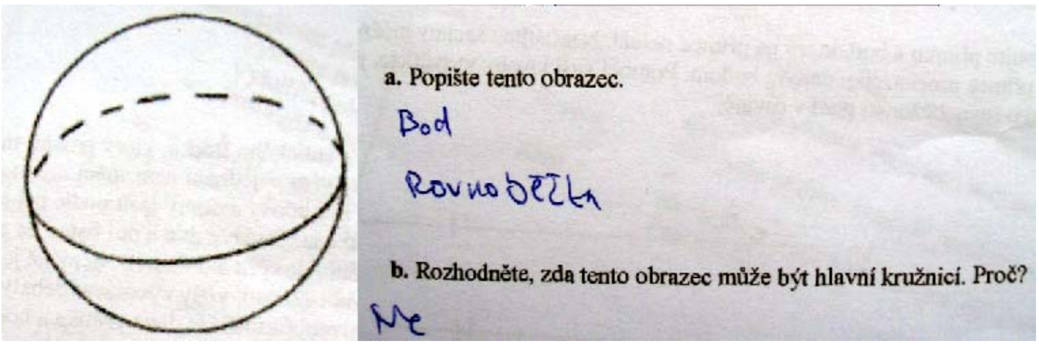
Obr. 87



Obr. 88



Obr. 89



Obr. 90

Závěr:

Všichni studenti, kteří absolvovali úvodní hodinu, dokázali načrtnout kouli s hlavní kružnicí i hledaný obrazec, a to i ti, kteří měli potíže s řešením předchozích úloh. V první fázi výzkumu byly ale tyto kroky pro některé nepřekonatelným problémem. Nikdo z těchto studentů se navíc nepokusil hledat řešení mimo kulovou plochu, což spolu s výše zmíněným užíváním výrazů „přímka“ a „křivka“ vypovídá o tom, že po úvodní hodině si studenti vytvořili správné představy o sféře jako zakřivené rovině, kterou přijali jako nový svět, jehož zákonitostem přizpůsobili svá řešení. Nesnažili se tedy kouli umísťovat do trojrozměrného prostoru a počítat se všemi jeho body, jak tomu bylo u těch, kteří se úvodní hodiny neúčastnili.

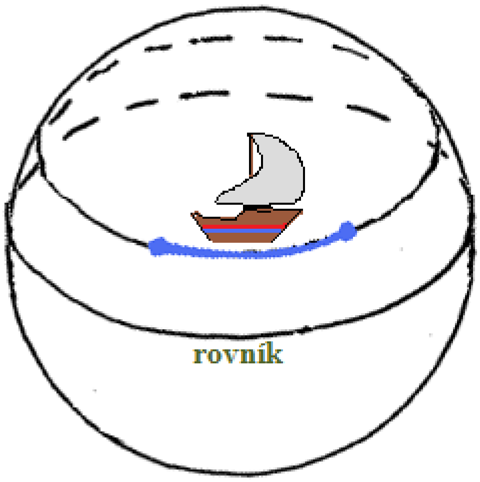
I ti, jež úvodní hodinou neprošli, však byli úspěšnější než studenti z první fáze, zřejmě díky zpřesněnému a předkreslenému zadání, které některým sice nezabránilo zobrazovat řešení mimo kulovou plochu, zato ale u nikoho nedocházelo k zakreslování zkreslených řešení v rovině, což se v první fázi výzkumu často stávalo.

VII. Zadání:

13. Loď cestuje tak, že je stále vzdálena 50 km od rovníku. Vysvětlete, proč necestuje nejpřímější (nejkratší) cestou mezi dvěma body.

Upravené zadání:

13. Loď cestuje tak, že je stále vzdálena 50 km od rovníku. Vysvětlete, proč necestuje na povrchu Země nejpřímější (nejkratší) cestou mezi dvěma body.



Řešení studentů:

Stejně jako v první fázi výzkumu, i tato úloha zřejmě byla pro všechny studenty nejproblematičtější z celého pracovního listu.

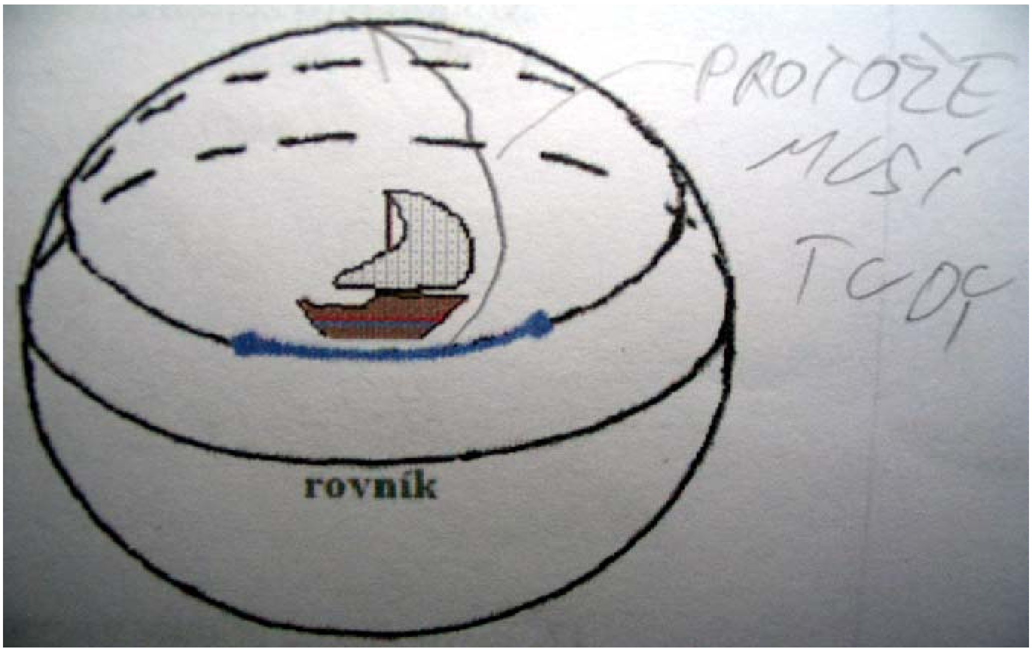
Nikdo z těch, kteří neměli úvodní hodinu, ji nevyřešil správně (většina ji neřešila vůbec), stejně jako v první fázi výzkumu. Upravené zadání však zřejmě přimělo studenty hlouběji se nad řešením zamyslet, neboť se odpovědi v porovnání s první fází výzkumu více různily a názorů, že by loď musela jet skrz zemi, bylo méně. Vyskytly se odpovědi tohoto typu:

- *Cestuje, ale je to přes kopeček.*
- *Země je kulatá.*
- *Loď by musela mít kolečka, aby mohla cestovat po povrchu Země, nebo by musela být ponorkou.*
- *Protože pluje po kulové ploše, nejkratší cesta by byla ponorkou – to ale není na povrchu → pluje nejkratší cestou.*

V jednom případě se zpřesněné zadání ukázalo být spíše překážkou, když ho studentka nesprávně pochopila a odpověděla takto:

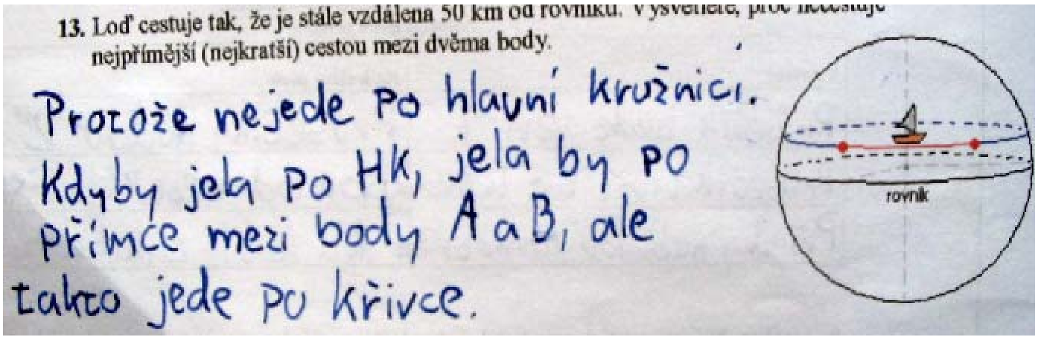
- *Ale loď cestuje na povrchu Země. Jenom opíše menší kružnici, ale rozhodně nebude cestovat mimo povrch Země.*

Řešení, které bylo správné odpovědi asi nejblíže, zobrazuje obr. 91. Student si však zřejmě nevšiml i dvou znázorněných bodů, mezi kterými loď cestuje, a tak navrhl jako řešení část jiné hlavní kružnice.

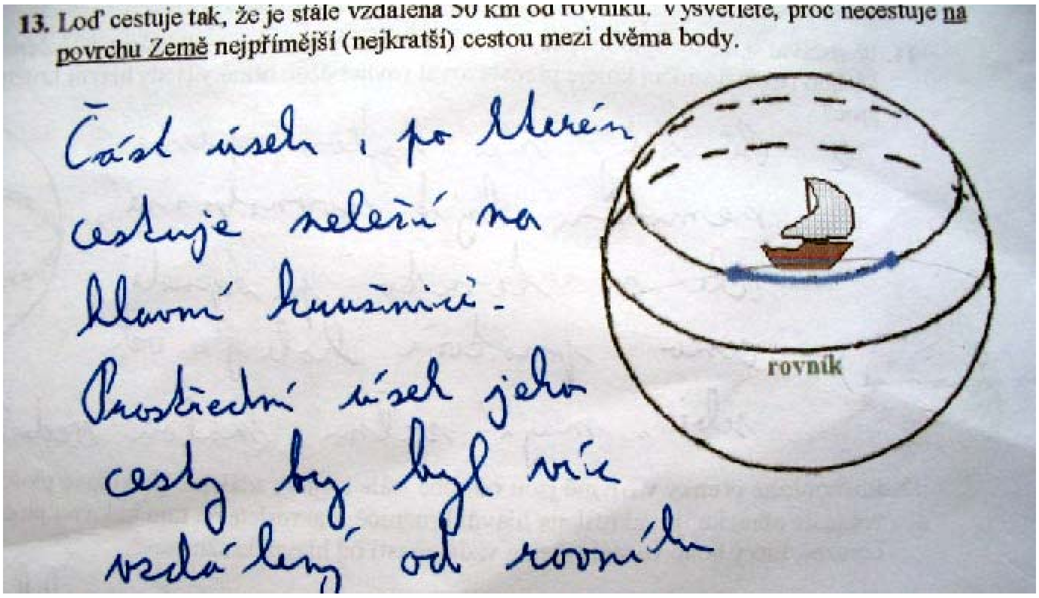


Obr. 91

Naproti tomu u studentů, kteří prošli úvodní hodinou, se správná řešení objevila, i když jich nebylo mnoho. Byla však přesná a výstižná (obr. 92, 93).



Obr. 92



Obr. 93

Další studenti pak úlohu buď nevyřešili vůbec, nebo do řešení započítávali zeměpisné poznatky, když tvrdili, že lodi v cestování brání pevnina (navíc se domnívali, že loď musí objet celou Zemi):

- *Vedlejší kružnice vzdálená 50 km od rovníku nebude pouze vodní plochou, je na třech místech přerušená souší – (Jižní Amerika, Afrika, Asie).*

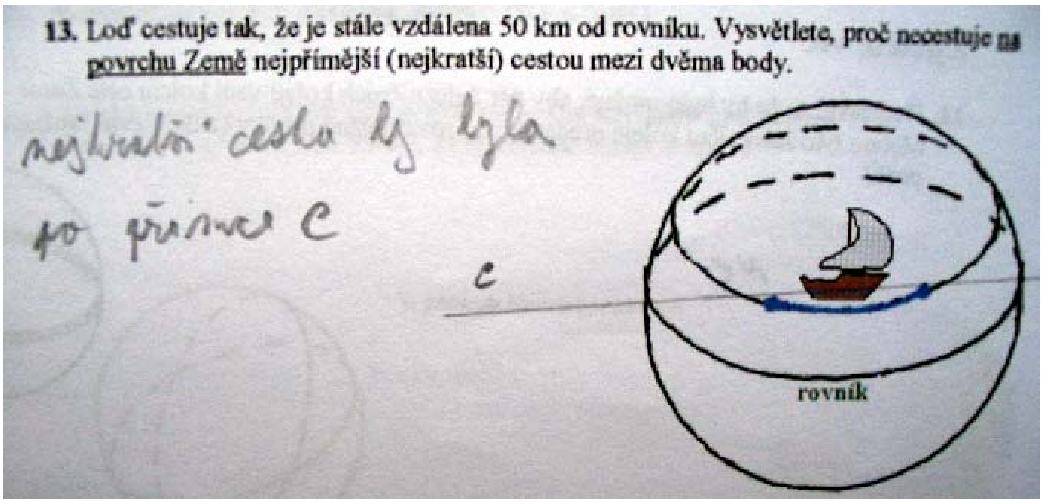
Toto byla první úloha, ve které i ti studenti, kteří absolvovali úvodní hodinu, do řešení započítali i body mimo kulovou plochu, když odpovídali, že loď jinak musí plout skrz Zemi, jejich počet byl však mnohem nižší, než v první fázi výzkumu (vyskytla se dvě taková řešení):

- *Protože musí cestovat po obvodu a ne skrz.*

Nejčastějším typem odpovědi, která se u těchto studentů vyskytovala, je odpověď podobná této:

- *Nejkratší cesta by byla po přímce.*

Jelikož tito řešitelé svou úvahu blíže nevysvětlili, není jasné, zda měli na mysli přímku sférickou, tedy hlavní kružnici, nebo přímku euklidovskou, která do řešení opět zahrnuje body mimo povrch koule. Někteří z nich řešení doplnili kresbou, která bohužel mluví spíše pro druhý případ (obr. 94).



Obr. 94

Závěr:

Jelikož studenti, v jejichž třídě úvodní hodina neproběhla, nedocházeli k příliš přesným závěrům, k jakým je měly dovést návodné otázky přidané do pracovního listu ve Verzi 2, nebylo překvapením, že neuspěli v řešení této úlohy. Přesto si myslím, že docházeli ke smysluplnějším závěrům než studenti z první fáze výzkumu, a to zřejmě proto, že byli celkově úspěšnější i v řešení ostatních úloh nebo jim pomohlo zpřesněné zadání.

Je zajímavé, že ačkoli úloha **13** byla jediná z pracovního listu, jejíž řešení bylo studentům v úvodní hodině v podstatě vyzrazeno, když jsme k důkazu reprezentace přímky na kouli hlavní kružnicí použili definici přímky jako nejkratší spojnice dvou bodů, počet správných řešení u těchto studentů nebyl nijak vysoký. Za úspěch však považuji, že se na rozdíl od první fáze výzkumu správná řešení přece jen vyskytla, a pozitivní vliv úvodní hodiny na řešení studentů je tak nepopiratelný.

Je těžké odhadnout, zda řešení studentů nějak ovlivnil nový obrázek ve Verzi 2, zachycující situaci viditelněji, je však pravdou, že tento obrázek studenti často doplňovali a používali k ilustraci svého řešení (obr. 91, 93, 94), což se ve Verzi 1 nestalo ani jednou.

VIII. Zadání:

14. (*Úvod o Euklidovi*) Zde je jedna z podob Euklidova postulátu o rovnoběžnosti: Je dána přímka a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou.

a. Narýsujte přímku a bod, který na přímce neleží. Narýsujte všechny možné rovnoběžky k dané přímce procházející daným bodem. Pomocí vaší kresby vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti platí v rovině.

b. Přepište postulát o rovnoběžnosti pro kulovou plochu nahrazením slova *přímka* za slovo *hlavní kružnice*. Pak proveďte na kulové ploše obdobnou konstrukci jako na rovině. Nyní vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti neplatí na kulové ploše.

c. Napište svůj vlastní postulát o rovnoběžnosti, který bude platný pro geometrii na kulové ploše (sférickou geometrii).

Řešení studentů:

V pracích všech studentů, kteří se zúčastnili úvodní hodiny, se vyskytly pouze tři nesprávné odpovědi, z nichž dvě byly tohoto typu:

- **b.** *Je dána hlavní kružnice a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s danou hlavní kružnicí.*

Na další odpovědi je patrné, že studenta zřejmě zaujal jiný Euklidův postulát:

- **a.** *Na kulové se protínají ve dvou bodech.*

  c. *Pokud máme dané dva body, je tudíž jedna přímka, která jimi prochází. Všechny pravé úhly jsou si rovny.*

Ostatní odpovědi bylo třeba uznat za zcela či částečně správné. Většina studentů zde dokázala odůvodnit, proč Euklidův postulát neplatí pro kulovou plochu v bodě **b.** i napsat vlastní postulát o rovnoběžnosti v bodě **c.** Hodně studentů opět vynechávalo bod **a.** pravděpodobně z toho důvodu, že se jim rovnoběžnost v rovině zdá příliš zřejmá.

Zdá se, že studenti po absolvování úvodní hodiny začali více přemýšlet o vlivu pravidelného zakřivení na zákonitosti, jež platí v rovině, a zahloubali se do problému rovnoběžnosti na kulové ploše, když uvažovali o rovnoběžnosti nejen mezi přímkami, ale i mezi křivkami. Některé odpovědi byly zajímavé a ukazovaly na zaujetí studenta daným tématem:

- **c.** *Na kulové ploše neexistují dvě rovnoběžné přímky.*
- **a.** *Protože se nikdy přímky nesetkají.*

  b. *Protože přímky mají nejméně dva společné body.*
- **a.** *Přímky se nemohou setkat.*

  b. *Obě díky zakřivení koule již nejsou rovnoběžné.*
- **b.** *Protože hlavní kružnice leží v rovině procházející středem kulové plochy.*

  c. *Na kulové ploše mohou být dvě hlavní kružnice rovnoběžné jenom v případě, že jsou totožné, a na kulové ploše může být rovnoběžná hlavní kružnice s kružnicí vedlejší nebo mohou být rovnoběžné vedlejší kružnice.*

- **a.** *Protože v rovině se rovnoběžky nikdy neprotnou – nemají společný bod.*
  b. *Je dána kružnice a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s hlavní kružnicí. – Postulát neplatí, protože hk nemůže mít rovnoběžku.*
  c. *Na kulové ploše nikdy nemůžou být dvě přímky rovnoběžné, ale přímka a křivka ano.*

Všichni studenti, kteří prošli úvodní hodinou, řešení této úlohy uvedli.

Naopak studenti, kteří úvodní hodinu neměli, často řešení úlohy **14** vynechávali. Celkově však byli úspěšnější než studenti z první fáze výzkumu. Počet správných a nesprávných odpovědí se zhruba vyrovnal. I zde se objevili řešitelé, kteří odpovídali velmi správně, formulace většiny však nejsou zdaleka tak přesné a zasvěcené, jako odpovědi těch, kteří se zúčastnili úvodní hodiny.

Takto vypadaly některé z odpovědí studentů, kteří do situace příliš nenahlédli:

- **b.** *Nevím, nechápu.*
  c. *Dvě nebo více kružnic okolo koule jsou rovnoběžné tehdy, když na jedné vztyčíme kolmici, tak na průsečíku druhé kružnice a této kolmice musí vzniknout pravý úhel.*

U některých je patrné, že základní představu mají správnou, nevyznají se však v termínech „přímka“ a „křivka“ na kouli:

- **b.** *Neplatí, protože hlavní kružnice v kouli nemůžou být rovnoběžné.*
  c. *Přímky v kouli budou rovnoběžné právě tehdy, když jedna kružnice nebude hlavní.*

Jeden ze studentů sice správně odpověděl v bodě **b.**, takže to vypadalo, že problém rovnoběžnosti na sféře chápe, v bodě **c.** se však usvědčil z problémů s představou sféry jako takové:

- **b.** *Je dána hlavní kružnice a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu hlavní kružnici. Neplatí, protože by se pak kružnice protínaly.*

  c. *Rovnoběžnost na kulové ploše platí pouze tehdy, pokud se jedná o plochy.*

Takto vypadaly některé odpovědi, které bylo lze uznat za správné:

- **a.** *Bodem může procházet libovolný počet přímek. Musí být totožné.*

  b. *Je dána hl. kružnice a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu hl. kružnici s danou přímkou. Neplatí, protože by byla mimo povrch.*

  c. *Není možné vést k jedné hl. kružnici druhou tak, aby byly rovnoběžné.*

- **a.** *No protože přímky leží v rovině → tím pádem mohou být //.*

  b. *Protože je to kulatý. Tím pádem tyto přímky neleží v rovině → nemohou být //.*

  c. *Přímky mohou být rovnoběžné pouze v rovině. Kdežto na kulové ploše tohoto nelze docílit.*

- **b.** *To neplatí, protože hlavní kružnice bude k 2. hlavní kružnici trochu nakloněná a bude ji protínat.*

  c. *Na kulové ploše není možné sestrojit dvě rovnoběžné hlavní kružnice.*

Závěr:

Po absolvování úvodu do neeuklidovské geometrie byli téměř všichni zúčastnění studenti schopni vyvodit zcela, nebo alespoň částečně správné závěry o zákonitostech platících pro kulovou plochu, zatímco studenti, kteří úvodní hodinu neměli, byli úspěšní v méně než polovině případů. Zároveň bylo patrné, že studenti jsou po účasti na úvodní hodině schopni hovořit zasvěceněji o zákonitostech pro sféru platných, používat vhodné termíny a hlouběji rozebírat jednotlivé možnosti situací a tvrzení, které lze o rovnoběžnosti na sféře pronést.

V této úloze se jednalo hlavně o shrnutí poznatků, které studenti učinili o kulové ploše v průběhu řešení předcházejících příkladů, je proto logické, že zde stejně jako v první fázi výzkumu uspěli ti, kteří s většinou předcházejících úloh neměli potíže. Po absolvování úvodní hodiny se počet těchto studentů výrazně zvýšil.

IX. Zadání:

15. Popište všechny způsoby, jak se mohou protínat tři různé hlavní kružnice.

Řešení studentů:

Řešení této úlohy se od těch z první fáze nijak zásadně nelišila, nezávisle na typu zadání či na tom, zda studenti absolvovali úvodní hodinu nebo ne.

Vyskytly se odpovědi správné, mluvící o dvou a šesti bodech,

- *1) Všechny procházejí společnými body A, B.*
  2) Dvě procházejí společnými body A, B, třetí je protíná v bodech C, D, E, F.

odpovědi správné jen částečně, počítající jen se dvěma body jako průsečíky tří kružnic,

- *Způsobů je nekonečně mnoho, ale vždy se budou protínat ve dvou bodech.*

odpovědi, které se o počtu průsečíků vůbec nezmiňovaly,

- *Je nekonečně mnoho způsobů, mohou i splývat, ale nikdy nebudou rovnoběžné.*

i několik odpovědí nesprávných:

- *Mohou se protínat pouze v jednom bodě.*

Úlohu přitom častěji nevyplňovali ti studenti, kteří neprošli úvodní hodinou, ostatní se o odpověď většinou pokusili.

Závěr:

Tato úloha klade větší nároky na představivost studentů, když do hry vstupují už tři hlavní kružnice místo dosavadní jedné či dvou. Nezdá se, že by úvodní hodina schopnost studentů představit si tuto situaci nějak výrazně ovlivnila, i když je pravda, že po jejím absolvování řešili úlohu častěji; správné, částečně správné a nesprávné odpovědi se však vyskytovaly zhruba ve stejném poměru jako v první fázi výzkumu.

7.7.2.2 Analýza prací studentů čtvrtého ročníku

Typy nejčastějších chyb, kterých se studenti při řešení úloh z neeuklidovské geometrie dopouštějí, a obtíží, s nimiž se při tom mohou potýkat, stejně jako postupy a úvahy řešitelů nad jednotlivými úlohami byly popsány již výše. Výzkum ve čtvrtých ročnících byl zaměřen především na porovnání dvou typů zadání, tedy Verze 1 a upravené Verze 2, a na zkoumání jejich vlivu na postupy a úspěšnost řešení studentů. Cílem tohoto zkoumání je najít nejvhodnější způsob, jakým můžeme úlohy ze sférické geometrie studentům předkládat, aby téma co možná nejpřirozeněji přijali a pochopili, postupně získávali nový geometrický pohled na situaci, byli poté schopni vyvozovat samostatné závěry a zbytečně je od této zajímavé geometrické oblasti neodradila bezradnost v řešení úloh způsobená nepochopením některého ze základních pojmů potřebných pro orientaci v neeuklidovské geometrii.

7.7.2.2.1 Forma a obecné výsledky výzkumu ve čtvrtých ročnících

Studentům jednoho ze čtvrtých ročníků byl tedy rozdán pracovní list s úlohami ze sférické geometrie ve Verzi 1, stejný jako řešili studenti v první fázi výzkumu. Poté, co tento list vyřešili, byly jim úlohy rozdány znovu, nyní však v upraveném zadání Verze 2. Řešitelé byli vyzváni, aby si znovu přečetli zadání úloh a vyřešili tentokrát pouze ty, jejichž řešení se rozhodnou na základě nového zadání změnit (k ostatním psali, že řešení je stejné jako v předchozím listě). Každý ze studentů se samozřejmě podepsal, aby bylo možné posuzovat práce jednotlivých řešitelů zvlášť. Někteří studenti chyběli při zadávání jednoho z typů úloh, jiní chyběli při jejich odevzdávání; do ruky se mi tak nakonec dostalo dvanáct kompletních řešení, tedy Verze 1 i Verze 2 vypracovaná týmž řešitelem. Z výše zmíněných důvodů se zde zaměřím především na posuzování práce těchto studentů.

Aby bylo možné zkoumat vliv samotného způsobu zadání na úspěšnost řešení úlohy, nebyla do výuky těchto studentů zařazena úvodní hodina.

Na pracích studentů ze čtvrtého ročníku bylo vidět, že jejich matematické myšlení a představivost jsou vyspělejší, než u studentů ročníku prvního, ale i studentů z první fáze výzkumu. Téměř všichni dokázali sami zakreslovat náčrtky koule a do nich svá řešení. K pokusu řešit úlohy pomocí transformace do roviny či započítávat body mimo povrch koule došlo (nepočítám-li úlohu **13**) jen dvakrát, a to vždy pouze ve Verzi 1 (bohužel ale tito studenti chyběli při zadávání či odevzdávání Verze 2, takže není možné zjistit, zda by svá řešení upravili). Naprostá většina dokázala správně porovnat možnosti protnutí přímek v rovině a na kulové ploše pomocí tabulky v úloze **8** již ve Verzi 1; přijali fakt, že přímka je na kouli reprezentována hlavní kružnicí a tomuto pojmu zřejmě dobře rozuměli, jelikož všichni správně odpověděli v úloze **11**, že koleje nemohou představovat hlavní kružnice, a někteří dokázali obhájit, proč tomu tak je. Ovšem ve vyvozování vlastních závěrů v úloze **14** byli sice úspěšnější než řešitelé z první fáze výzkumu, avšak o mnoho slabší než studenti těch prvních ročníků, které absolvovaly úvodní hodinu.

Všichni řešitelé byli v řešení Verze 2 úspěšnější než ve Verzi 1, u některých změna řešení ovlivnila zásadně celkovou úspěšnost vypracování úloh. Skutečně měnili řešení především těch úloh, jejichž zadání bylo pro Verzi 2 upraveno. Jelikož úlohy v pracovním listě spolu přirozeně korespondují, docházelo ke změnám i dalších úloh na základě nových vlastností platících ve sférické geometrii, jejichž existenci si studenti na základě změněného zadání zřejmě uvědomili.

Každý student změnil na základě upraveného zadání řešení alespoň jedné úlohy, nejvýše se pak vyskytlo osm úloh změněných jedním studentem.

Počty změněných řešení jednotlivých úloh a porovnání úspěšnosti řešení obou verzí zobrazuje tabulka 3. V tabulce vynechávám úlohy **9** a **10**, ve kterých studenti hodnotí zajímavost a obtížnost sférické geometrie, a přirozeně tak nelze rozhodnout o správnosti řešení, a úlohu **14 a**, v níž řešitelé většinou kreslili jen obrázek rovnoběžek. V1 v tabulce značí zadání Verze 1, V2 pak Verze 2.

Tabulka 4 dále zachycuje porovnání řešení Verze 1 a Verze 2 jednotlivými studenty, jejich zlepšení a zhoršení a další změny, které na základě upraveného zadání v řešení provedli.

číslo úlohy	vyřešeno správně		vyřešeno částečně správně		vyřešeno nesprávně		nevyřešeno	
	V1	V2	V1	V2	V1	V2	V1	V2
1	9	11	3	1	0	0	0	0
2	9	11	3	1	0	0	0	0
3	6	7	2	4	2	0	2	1
4	11	12	1	0	0	0	0	0
5	9	11	1	0	2	1	0	0
6	6	9	3	1	3	2	0	0
7	9	11	0	0	3	1	0	0
8	7	7	3	3	1	1	1	1
11	12	12	0	0	0	0	0	0
12a	4	7	3	2	4	3	1	0
12b	9	9	1	1	1	2	1	0
13	0	1	0	0	11	10	1	1
14b	6	7	2	1	2	3	2	1
14c	3	3	0	0	2	2	7	7
15	5	5	4	5	3	2	0	0
celkem	105	123	26	19	34	27	15	11

Tab. 3

Student	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12	
Verze / Úloha	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	/	+	/	/	+	+	/	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	/	/	+	+	+	+	+	+	/	+	/	+	+	+	+	+
3	+	+	-	/	+	+	-	+	+	+	+	+	x	/	/	/	x	x	+	+	/	/	+	+
4	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	/	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+
6	+	+	/	+	+	/	+	/	+	+	/	/	/	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-
8	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	/	/	x	x	/	/	+	+	+	+	/	/	+	+
11	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12a	+	+	+	+	/	/	+	+	+	+	-	+	x	-	-	/	-	-	-	-	/	+	/	+
12b	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	x	-	+	+	/	/	-	-	+	+	+	+
13	-	+	-	-	-	-	-	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14b	+	+	/	/	-	-	x	-	/	+	+	+	x	x	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+
14c	+	+	x	x	x	x	x	x	-	-	x	x	x	x	+	+	-	-	x	x	+	+	x	x
15	+	+	-	-	-	/	/	/	+	+	+	+	-	-	+	+	/	/	/	/	+	+	+	+

Tab. 4

Legenda k tabulce 4:

+	úspěšné řešení
-	neúspěšné řešení
/	částečně úspěšné řešení
x	nevyřešeno
	změna k lepšímu
	neutrální změna
	změna k horšímu
	opravená či zpřesněná formulace, která úspěšnost neovlivnila

Bíle jsou podbarvena nezměněná řešení úloh

7.7.2.2.2 Vlastní rozbor řešení úloh

Z obou tabulek je patrné, že řešitelé byli úspěšnější při řešení úloh ve Verzi 2. Dále budou rozebrány konkrétní podoby změn, které studenti v jednotlivých úlohách nejčastěji provedli.

Změny v úlohách **1** až **2**, týkajících se konstrukcí v rovině, spočívaly především v tom, že si studenti nejprve neuvědomili, že lze narýsovat přímku, která má více než dva společné body s danou přímkou, tedy přímku totožnou. Tuto možnost pak doplnili do Verze 2.

V úloze **3**, v níž mají řešitelé popsat způsoby protnutí přímek, bylo na některých řešeních opět vidět, že studenti mají potíže s uchopením úlohy ve Verzi 1; změny řešení, které uváděli v druhé verzi, vypadaly například takto:

- V1: -
  V2: *Jeden nebo žádný společný bod.*
- V1: *Pokud nejsou rovnoběžné.*
  V2: *Mohou mít jeden společný bod.*
- V1: *Když nejsou rovnoběžné nebo splývají.*
  V2: *Shodné – nekonečně mnoho spol. bodů, různoběžné – 1 společný bod.*

V úloze **4** se jeden ze studentů nejprve domníval, že jeho závěry budou pro kulovou plochu stejné, na základě zkušenosti s řešením Verze 1 pak své tvrzení ve Verzi 2 opravil. Další změny spočívaly v případném odůvodnění teze.

Úlohám na kulové ploše předcházejí ve Verzi 2 návodné otázky, pomocí kterých měli studenti přisoudit hlavní kružnici vlastnost, která ji opravňuje k reprezentaci přímky na sféře, na základě analogie s definicí přímky v rovině. Návodné otázky jim měly pomoci především při řešení úlohy **13**, se kterou měla většina řešitelů první fáze výzkumu potíže.

Z dvanácti řešitelů byly v odpovědích na tyto otázky zcela úspěšní pouze tři, když odpovídali, že přímka (resp. úsečka) je nejkratší možnou spojnicí dvou bodů v rovině, stejně jako hlavní kružnice (resp. její odpovídající část) je nejkratší možnou spojnicí dvou bodů na kulové ploše, ovšem jen jeden z nich uplatnil novou informaci v řešení úlohy **13** a opravil své původně nesprávné řešení na správné. Ostatní odpovědi neuváděli, nebo uvedli jen definici přímky, nebo odpovídali nesmyslně. Zde jsou příklady některých takových odpovědí:

- *Přímka prochází body A, B. A, B náleží k, S(k) je na přímce.*
  V rovině je přímka úsečka, která začíná - ∞ a končí +∞ nebo jen ∞, na kouli se počítá s jiným prostorem, to je blbost, u koule ta koule je dána rozměrem, rovina ne.
- *Musela by být zakřivená.* (Odpověď na otázku „Co můžeme říct o přímce procházející dvěma body (v rovině).)
- *Musí být lomená.* (Odpověď na tutéž otázku.)

V úloze **5** se někteří studenti nejprve domnívali, že na kulové ploše nelze narýsovat přímku, která má s danou přímkou společné dva body, že lze narýsovat přímku rovnoběžnou, nebo úlohu nedokázali vyřešit. Ve Verzi 2 pak začali do koule znovu zakreslovat náčrtky hlavních kružnic a svá řešení vždy velmi správně opravili:

- **5.** V1: *3, 5 nejde.*
  V2: *2, 3 nejde.*
  6. V1: *Jakmile se protnou, vždy ve dvou bodech.*
  V2: *Více než jeden bod, nebo dva body.*
  7. V1: *Ano.*
  V2: *Ne.*
- **5.** V1: -
  V2: *2, 3 nejde.*

6. V1: *Vždy se protnou.*

V2: *Mají společné 2 body, nebo více než jeden bod.*

\- **5.** V1: -

V2: *Lze provést kroky 1, 4, 5.*

\- **6.** V1: *Mají 1, 2, ∞ společných bodů.*

V2: *Mají 2 nebo ∞ společných bodů.*

7. V1: *Ano.*

V2: *Ne.*

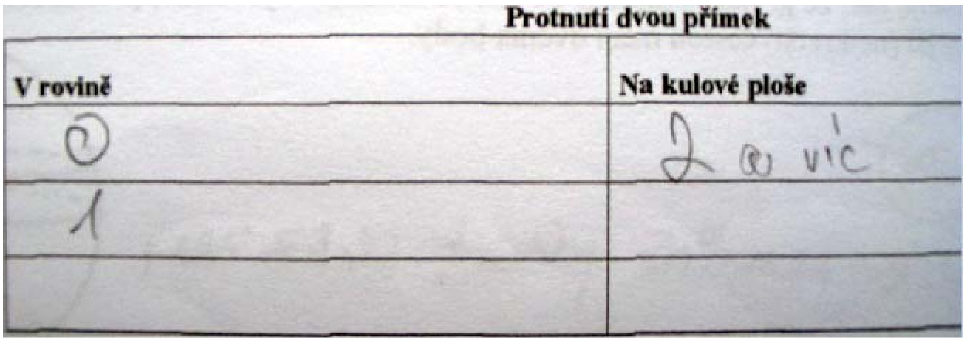
\- **7.** V1: *Ne.*

V2: *Můžou, pokud splývají.*

Z tabulky 4 je dobře vidět, že úlohy **1** až **3** opravovali většinou ti studenti, kteří opravili i úlohy **5** až **7**. Je možné, že si na základě bližšího prozkoumání kulové plochy a způsobů protnutí dvou hlavních kružnic uvědomili další možnosti protnutí přímek v rovině, na které zapomněli (především totožnost).

Změny v úloze **8** spočívaly především v tom, že studenti upřesnili svá řešení a přiřadili k sobě jednotlivé možnosti protnutí přímek v obou srovnávaných prostorech, jak ilustrují obr. 95 a, b.

V1:

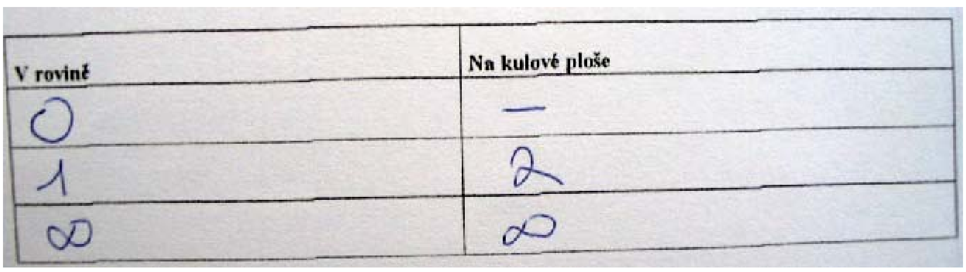


Protnutí dvou přímek

V rovině	Na kulové ploše
0	2 a víc
1	

Obr. 95a

V2:



V rovině	Na kulové ploše
0	—
1	2
∞	∞

Obr. 95b

Někteří studenti se rozhodli změnit nebo upřesnit i své závěry o jednoduchosti a zajímavosti protnutí přímek v rovině na kulové ploše v úlohách **9** a **10**; druhá výpověď svědčí o tom, že někteří přijali hlavní kružnici jako přímku teprve při řešení Verze 2:

- **9.** V1: *V rovině jednodušší, jsem na to zvyklý.*
  V2: *V rovině, víc se v ní orientuju, je to jako kus papíru.*
  10. V1: *Je to jako v jiném prostoru, nevím.*
  V2: *Neorientuju se, nejsem na to zvyklý.*
- **9.** V1: *Jelikož na kulové ploše nejsou přímky, tak jednodušší to bude u přímek.*
  V2: *Je to stejné, pokud uvažujeme hlavní kružnici jako přímku.*

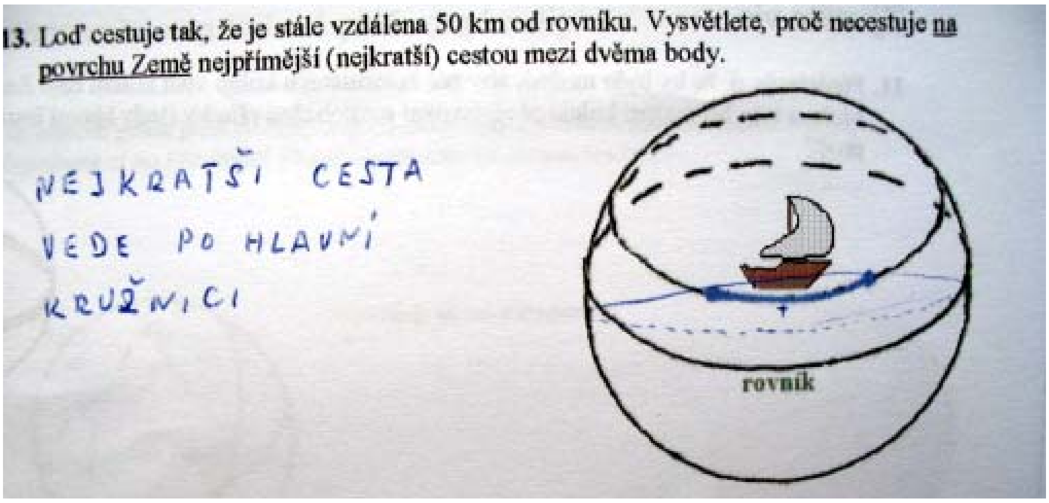
Jak již bylo řečeno, úlohu **11** vyřešili všichni správně již v první verzi. Ve Verzi 2 tedy většinou doplňovali některé další důvody a znaky, na základě kterých poznáme, že dvě hlavní kružnice nemohou být rovnoběžné. Jeden ze studentů se rozhodl změnit správné řešení na špatné, ani jedno z nich však nedokázal podpořit žádnými argumenty:

- V1: *Ne, nemají stejný poloměr.*
  V2: *Ne, nemají stejný střed.*
- V1: *Ne, nemohou; hlavní kružnice nemohou být rovnoběžné po celém obvodu země, protože středy hlavních kružnic mají být i středem Země.*
  V2: *Hlavní kružnice nemohou být různé, aniž by se protínaly.*
- V1: *Ne.*
  V2: *Aha, tak to by asi šlo, tak to vše mění.*

Úloha **12** byla jednou z nejopravovanějších, jak je vidět i z tabulky 4. Většina oprav spočívala v tom, že studenti, kteří ve Verzi 1 správně odpověděli, že se jedná o kružnici, zde doplňovali další řešení (bod). Někteří ve Verzi 1 úlohu nevyřešili a zde odpovídali správně ve všech bodech.

Úloha **13** byla jako u všech ostatních řešitelů z celého výzkumu i u čtvrťáků „kamenem úrazu“. Ve Verzi 1 ji správně nevyřešil nikdo. Ve Verzi 2 ji vyřešil správně alespoň jeden student, který odhalil korespondenci mezi návodnými otázkami a touto úlohou. Ostatní své řešení buď neopravili, nebo jejich oprava neměla na úspěšnost vliv, a to ani v případě, že tito studenti správně odpověděli na návodné otázky.

- V1: *Nejkratší cesta vede pod povrchem Země.*
  V2: *Nejkratší cesta vede po hlavní kružnici.* (Student řešení doplnil správným náčrtkem do připojeného obrázku (obr. 96).)
- V1: *Protože opisuje kružnici a nejede „rovně“.*
  V2: *Protože Země je kulatá.*



Obr. 96

Jak bylo řečeno výše, v úloze **14a** kreslili studenti, stejně jako řešitelé z první fáze výzkumu, většinou pouze obrázek dvou rovnoběžek. V tabulce 4 je vidět, že úlohu **14b** opravili v upraveném zadání pouze dva studenti, jeden z nich však pouze přepsal Euklidův postulát nahrazením slova „přímka“ souslovím „hlavní kružnice“, neodůvodnil však jeho neplatnost. Druhý student opravil svou těžko srozumitelnou formulaci z první verze a uvedl postulát platný pro kulovou plochu (i zde se nevyjádřil zcela přesně, věřím však, že měl na mysli správné odůvodnění):

- V1: *Protože bod nemůže ležet na hlavní kružnici, tak nemůže být druhá hlavní kružnice rovnoběžná s první a procházet bodem, protože to už je vedlejší kružnice (jiný střed a poloměr).*

  V2: *Nelze vést druhou rovnoběžnou kružnici k hlavní, protože už by byla mimo střed.*

Řešení úlohy **15**, kde měli řešitelé popsat způsoby protnutí tří hlavních kružnic, bylo u studentů čtvrtého ročníku opět srovnatelné s řešiteli z první fáze výzkumu; i zde se vyskytovaly stejné typy odpovědí. Oprava této úlohy vypadala například takto:

- V1: *Shodné, 2, 4, 6 průsečíků.*

  V2: *Shodné, různoběžné.*

7.9 Shrnutí výsledků výzkumu

Na základě rozboru výsledků výzkumu lze říci, že přijímání neeuklidovského světa nepředstavuje pro studenty středních škol závažnější problém. Ti, kteří dokázali úspěšně vyřešit většinu úloh, byli v převaze, někteří vyřešili zcela správně všechny úlohy a našli se i tací, kteří to dokázali bez návodu, jak do neeuklidovského světa nahlížet, a bez modelu, který by jim pomohl. Mnoho takových studentů mělo sice potíže s přijímáním eliptické roviny jako dvourozměrné plochy, úvodní hodina a vhodné zadání však většině z nich pomohly tento nedostatek odstranit.

Druhá fáze výzkumu totiž prokázala, že upravené zadání i úvodní hodina mají na řešení studentů nemalý vliv. Především úvodní hodina je dokázala v náhledu na sférický prostor správně nasměrovat. Její náplní přitom bylo pouze důkladné seznámení studentů s pojmem hlavní kružnice a prezentace oprávněnosti jejího ztotožnění s přímkou na kouli pomocí analogie s rovinou, důkazu i úloh z reálného života. Přesto studenti po jejím absolvování dokázali samostatně vyvozovat zákony platné pro sférickou rovinu, formulovat postuláty o rovnoběžnosti a postihnout rozdíly mezi euklidovskou a eliptickou rovinou i jejich podstatu. Prokázalo se tak, jak důležité je pro ně pochopit, *proč* je přímka na kulové ploše reprezentována hlavní kružnicí. Výzkum také ukázal, že samostatné vyvození tohoto závěru je při řešení podobných úloh pro většinu studentů problematické, jelikož těch, kteří to dokázali, nebylo mnoho.

Z formulací studentů, kteří absolvovali úvodní hodinu, jež byly mnohem přesnější, s použitím správných termínů a působily zasvěceněji než odpovědi ostatních řešitelů, lze usoudit, že díky účasti na úvodní hodině studenti nahlédli do situace na sféře hlouběji a s větší jistotou. Svědčí pro to i další atribut, který řešení úloh těchto řešitelů provázel. Bylo jím odůvodňování odpovědí, i těch, kde nebylo vysvětlení explicitně vyžadováno.

V druhé fázi výzkumu byly téměř úplně vymýceny hlavní problémy, s kterými se potýkali studenti v první fázi. K pokusu transformovat kulovou plochu do roviny docházelo jen ve velmi ojedinělých případech, navíc nikdy u studentů, kteří prošli úvodní hodinou. I počet případů snahy zahrnout do řešení body mimo kulovou plochu se oproti první fázi výzkumu snížil na minimum. Zdálo se také, že studenti dobře pochopili pojem hlavní kružnice, neboť téměř vůbec nedocházelo k její záměně za kružnici jinou.

Jelikož se výrazně nezlepšila řešení pouze těch, kteří se účastnili úvodní hodiny, ale i ostatních, lze toto zlepšení přičíst nejen upravenému zadání, ale podle mého názoru především tomu, že studenti z této fáze používali modely koule v podobě míčků a někteří svá řešení zakreslovali přímo na ně; navíc, jak již bylo řečeno, byl všem nejprve vysvětlen pojem hlavní kružnice. Projevilo se tak, jak je důležité nabídnout studentům více možností způsobů řešení, aby si mohli vybrat ten nejvhodnější, a prezentovat téma různými cestami, díky nimž si ujasní jeho podstatu.

Studenti prvního ročníku byli po absolvování úvodní hodiny v řešení úloh úspěšnější než studenti ročníku druhého a třetího a v mnoha ohledech předčili i studenty v ročníku posledním. Přestože úspěšnost čtvrťáků byla v porovnání se studenty z první fáze výzkumu celkově vysoká, většina z nich nebyla v závěru pracovního listu schopna vyvodit postuláty platné pro sférický prostor na rozdíl od studentů těch prvních ročníků, v nichž byla do výuky zařazena úvodní hodina, jimž se to v naprosté většině bez potíží povedlo. Pokud tedy zvolíme vhodný způsob seznámení studentů s neeuklidovskou geometrií, můžeme tak učinit kdykoli během jejich studia; na přijetí neeuklidovské geometrie jsou připraveni již v prvním ročníku střední školy.

Za neméně důležité, a snad i důležitější, považuji další skutečnost, která z výzkumu vyplynula: studenti pokládají neeuklidovskou geometrii za zajímavou. Svědčí pro to nejen jejich soudy o této geometrii, které uváděli v pracovních listech, ale i průběh úvodní hodiny, v níž se zajímali o další podrobnosti a důsledky této geometrie, ačkoli věděli, že je to látka nadstandardní a znalosti z této oblasti nebudou muset nijak vykazovat. Stejně tak odevzdávali vyplněné pracovní listy, i když věděli, že se jedná o „pouhý výzkum“, kterého se vlastně nemusejí účastnit.

Přitažlivost neeuklidovské, konkrétně tedy sférické geometrie pro studenty dle mého názoru spočívá v její veliké výhodě – díky tvaru naší planety ji můžeme vztáhnout na situace z reálného světa a paradoxy, které díky tomu vznikají, jsou pro studenty, a nejen pro ně, opravdu „lákavým soustem“. Studenti se tohoto faktu hned chopili, a především ti, kteří se zúčastnili úvodní hodiny, vztahovali podmínky v úlohách na okolnosti na Zemi, čímž dospěli tak daleko, že zatímco ostatní mluvili o kružnicích hlavních a vedlejších, někteří z těchto řešitelů začali mluvit i v souvislosti s koulí o přímkách a křivkách.

Jak se ukázalo, upravené zadání bylo pro studenty přínosem a dokázalo je správně nasměrovat, avšak pro ty, kteří se účastnili úvodní hodiny, ztratilo smysl, neboť tito studenti dokázali s úspěchem řešit úlohy v zadání původním. Očekávaný logický závěr „nejúspěšnější v řešení úloh z neeuklidovské geometrie jsou čtvrťáci s použitím upraveného pracovního listu ve Verzi 2“ se tedy nekoná. Zasvěťme nejprve studenty do tajů neeuklidovské geometrie jejich seznámením s historickým vývojem a osvětlením faktu, proč je přímka reprezentována hlavní kružnicí, a budou úspěšní v jakémkoli ročníku střední školy i s použitím původních úloh Verze 1. Pokud bychom však snad chtěli výuku neeuklidovských geometrií pojmout formou samostatného bádání studentů a postupného odhalování zákonitostí této geometrie i jejich důvodů jimi samými po vzoru velkých matematiků z historie, což je dle mého názoru také možné, jelikož taková výuka může být pro studenty v mnohém obohacením a rozšířením jejich obzorů (předpokládá však hlubší zájem o tuto látku a matematiku samotnou), je upravené zadání, které alespoň některým zabrání hned sejít ze správné cesty, na níž je těžké se vrátit, jistě na místě.

8 Návrhy dalších úloh

8.1 Hyperbolická geometrie

Po seznámení studentů se zákonitostmi sférické geometrie je můžeme stručně seznámit s existencí geometrie hyperbolické, neboť studenti sami mohou pocítit neúplnost v novém nahlížení do geometrického světa. Dosud žili v představě, že daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu rovnoběžku, nyní se dozvěděli, že je možný prostor, kde žádná rovnoběžka neexistuje. Mohou se tedy ptát: „Existuje i svět, ve kterém lze vést daným bodem k dané přímce více rovnoběžek?“:

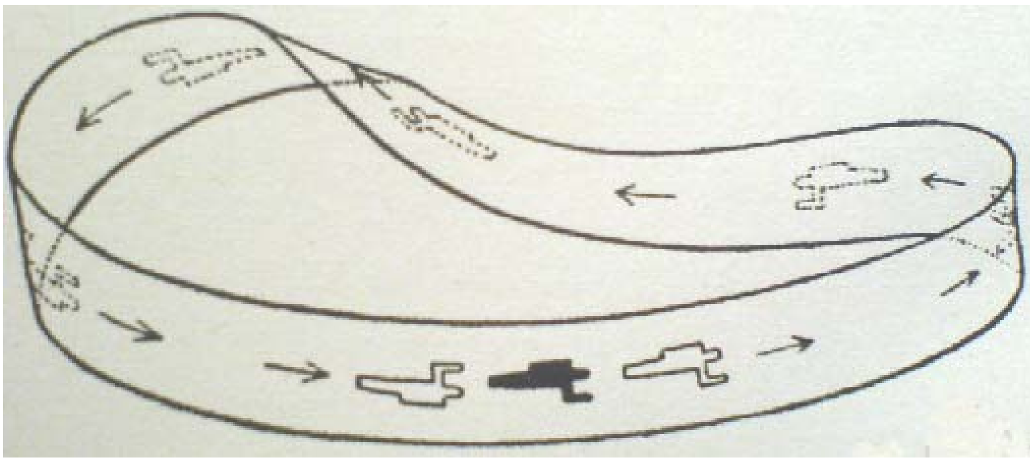
Třetí možností je logicky prostor s nejjednoduššími liniemi, který má následující vlastnost: Existuje více než jedna nejjednodušší linie, která je rovnoběžná k dané linii a prochází daným bodem. Otázku, zda lze takový prostor najít, zodpověděli jako první v 19. století právě Carl Friedrich Gauss, János Bolyai, Nikolai Lobačevskij a další. Vskutku můžeme nalézt takové prostory, ale jsou o trochu složitější a méně názorné než rovina s přímkami a kulová plocha s hlavními kružnicemi. Pokud například nahradíme přímky v rovině a hlavní kružnice na kulové ploše jistými oblouky (jako nejjednoduššími liniemi) jistého kruhu, můžeme vybudovat geometrii třetího druhu.

Hyperbolická geometrie je daleko náročnější na představivost a ne všichni studenti ji bez potíží přijmou. Hlavní problém dle mého názoru spočívá v tom, že studentům můžeme nabídnout adekvátní modely rovinné a sférické geometrie, jejichž zakřivení skutečně odpovídá požadovaným vlastnostem té které plochy; plochu, jež v každém místě odpovídá pravidelné sedlovité ploše, však vytvoříme těžko. Model polokoule, jaký používá při výuce I. Lénárt, se sice takové ploše přibližuje, je však třeba zapojit mnohem více představivost, než při řešení příkladů z předchozích dvou geometrií. Myslím si tedy, že postačí, když studenty seznámíme s existencí hyperbolické geometrie. Můžeme jim ukázat, že hyperbolická plocha má v každém místě sedlovitý tvar, nebo je seznámit s jejími modely. Vzhledem k tomu, že tato geometrie nemá tak přímou vazbu na náš reálný svět jako geometrie sférická (i když je důležitá v moderní fyzice i jiných vědách), nemusí být pro studenty tak lákavá a hlubší rozebrání této látky je možná lepší nechat pro opravdové zájemce (např. formou nepovinného semináře).

8.2 Další zakřivené prostory

Jako demonstraci skutečnosti, že v neeuklidovské geometrii neplatí zákony geometrie euklidovské, můžeme studentům, kromě příkladů a úloh, které byly zmíněny v podkapitole 7.7.1, nabídnout například dále zmíněné příklady a aktivity.

Abychom vzbudili ještě větší zájem studentů o neeuklidovské geometrie, můžeme jim ukázat několik zajímavých prostorů, jako je Möbiova páska nebo Kleinova láhev. Zajímavost světa Möbiovy pásky lze prezentovat následujícím příkladem:



Obr. 97

Představte si, že prostor, který představuje Möbiova páska, obývají plošné bytosti, jaké vidíme na obr. 97 [11, s.402]. *Co se v takovém prostoru s ubohými bytostmi děje?*

Jak vidíme, bílý obyvatel se loučí se svým černým přítelem a vydává se na cestu kolem světa. Ovšem během cesty je náhle převeden fyzicky ve svůj zrcadlový obraz. Vidíme, že při odchodu mává příteli svou pravou rukou a vrátiv se za rok z Möbiovské cesty kolem světa zdraví přítele podle svého mínění tou samou rukou, avšak přítel a my, kteří situaci sledujeme venku v R_3, považujeme tuto ruku za levou. Náhle tedy má své dvojrozměrné srdce na pravém místě, a to doslova. Černého přítele, který zůstal stát, však považuje při shledání za převráceného a oba se navzájem zřejmě považují za šílené. Abychom se opět uklidnili, nazýváme tyto prostory neorientovatelné. [11, s.402]

Möbiovu pásku navíc můžeme se studenty v hodině vyrobit. Posléze je možné ji různými způsoby střihat a sledovat, jaké zvláštnosti při tom vznikají:

Kromě v podkapitole 4.2 již zmíněného důkazu o existenci pouze jedné strany a jednoho okraje v Möbiově pásce můžeme Möbiovu pásku podélně rozstřihnout uprostřed její strany. Učiníme-li tak, nevzniknou dva kusy, jak by se mohlo zdát, ale ačkoliv jsme jedinou stranu Möbiovy pásky rozdělili na dva díly, vznikne jeden jediný dlouhý a několikrát protočený proužek.

Nebudeme-li stříhat pásku uprostřed, ale u jejího okraje, vzniknou dva do sebe vpletené proužky. Jeden bez vlastností Möbiovy pásky, dvakrát delší než druhý, s jejími vlastnostmi. Budeme-li ve stříhání dále pokračovat, všechny vzniklé proužky budou vzájemně propleteny.

Počítačové animace zajímavých zakřivených prostorů, Kleinovy láhve a Möbiovy pásky a videa a návody, co vše lze s Möbiovou páskou uskutečnit, naleznou studenti na internetových stránkách [51] a [53].

Je dobré seznámit studenty s tím, že Möbiova páska má díky svým vlastnostem své praktické využití například jako přehrávací páska s dvojnásobnou dobou záznamu nebo součást tiskáren a psacích strojů. Studenti mohou nejprve sami podávat návrhy na využití této pásky v praxi.

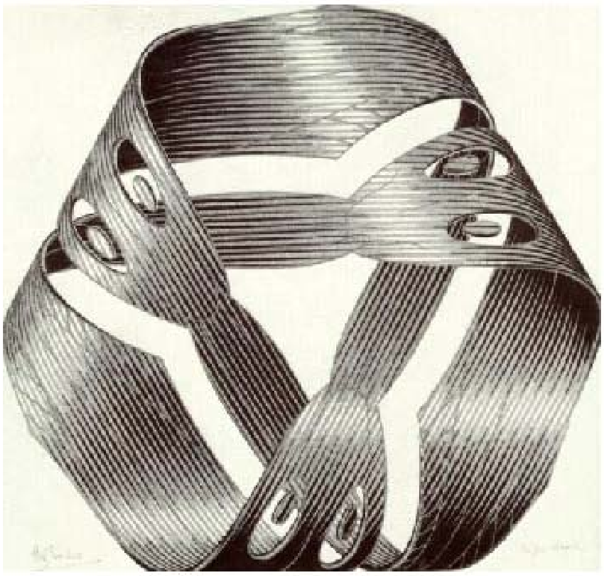
Můžeme je také upozornit na inspiraci touto páskou například v různých odvětvích umění:

Lze je odkázat na vědeckofantastickou literaturu, neboť slavní autoři tohoto žánru, jako je A. C. Clark, A. J. Deutsch a mnoho dalších, často využívají tento prostor ve svých příbězích jako přechod do jiných dimenzí, či vyjádření své představy o podobě vesmíru.

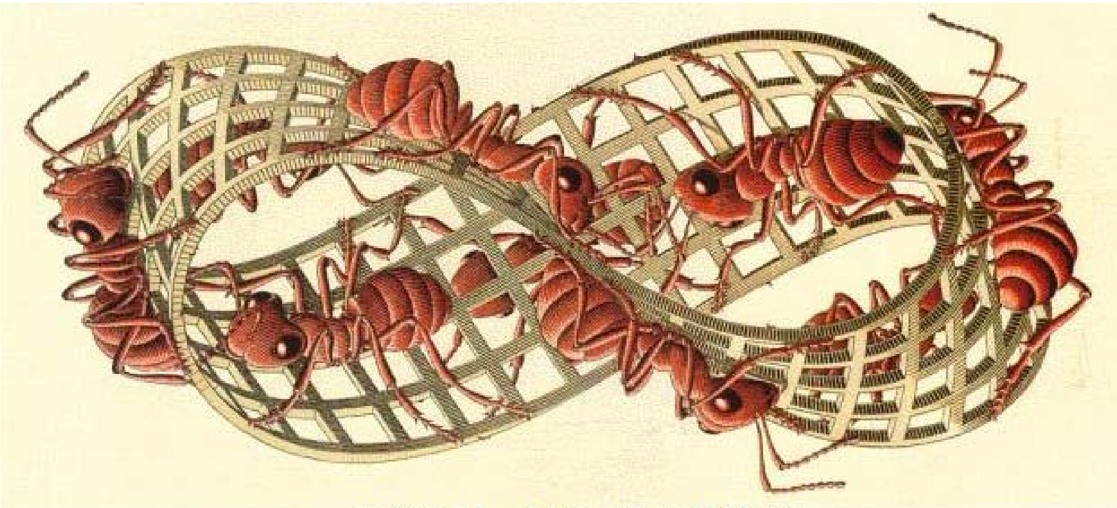
Můžeme poukázat na fakt, že Möbiova páska je oficiálním symbolem pro recyklaci (obr. 98 [55]).

A především můžeme studentům ukázat některá díla M. C. Eschera, který se zakřivením Möbiovy pásky silně inspiroval (obr. 99, 100, 101 [72]). Ovšem i jiné jeho grafiky nám skvěle poslouží k prezentaci neeuklidovské geometrie; některé jsou výbornou ilustrací nedokonalosti smyslů a ošidnosti lidského vnímání (obr. 102, 103 [72]) a pojetí nekonečnosti v konečném prostoru (obr. 104, 106 [72]). Dokonce můžeme na jediném Escherově motivu předvést studentům modely všech tří typů geometrií, tedy rovinné (obr. 105 [72]), hyperbolické (obr. 106) a sférické (obr. 107 [72]).

Obr. 98

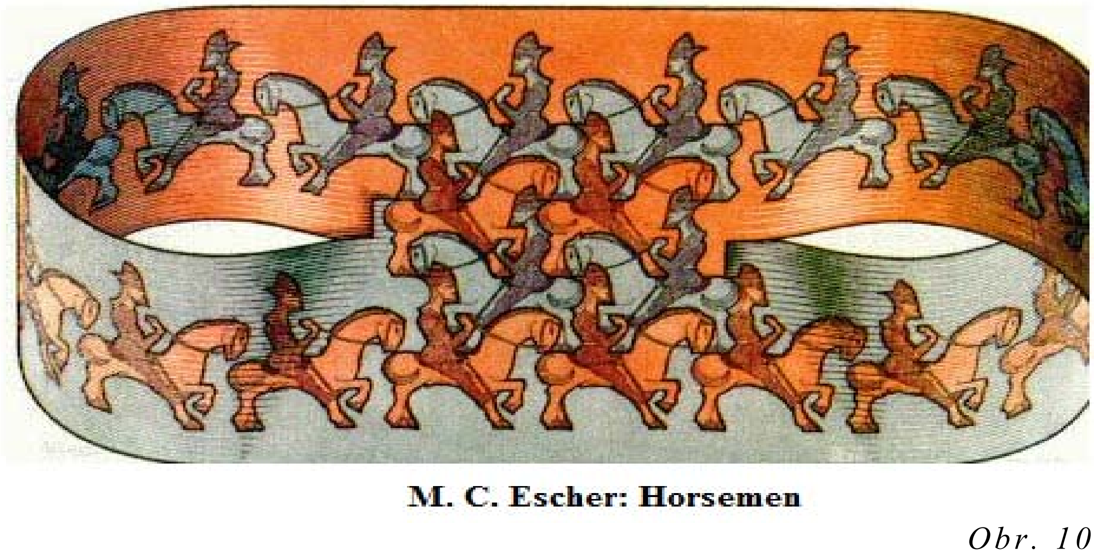


M. C. Escher: Mobius Strip I *Obr. 99*



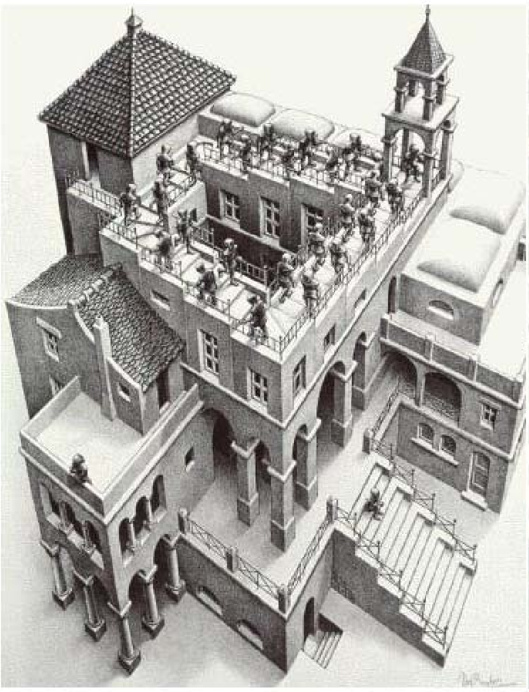
M. C. Escher: Mobius Strip II (Ants)

Obr. 100



M. C. Escher: Horsemen

Obr. 101

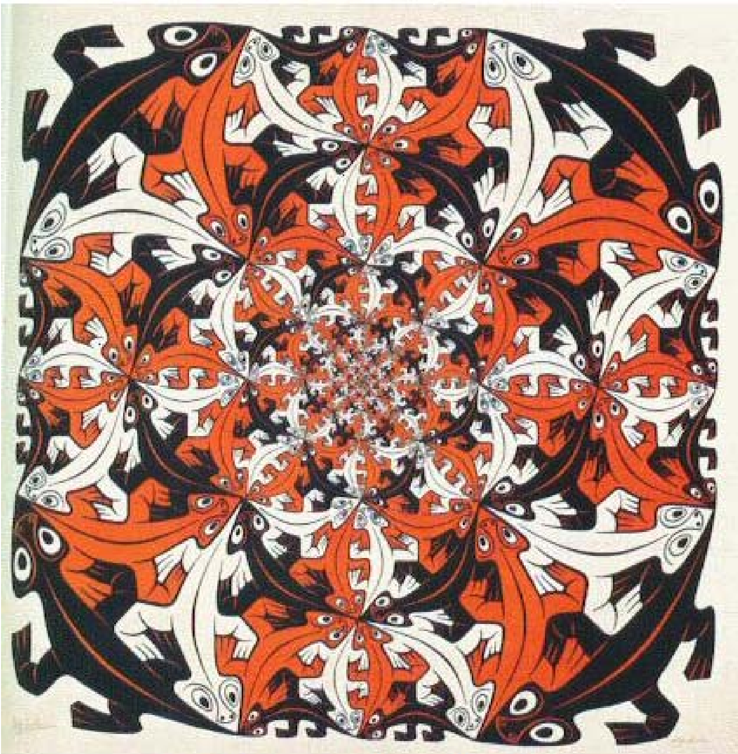


M. C. Escher: Ascending and Descending

Obr. 102

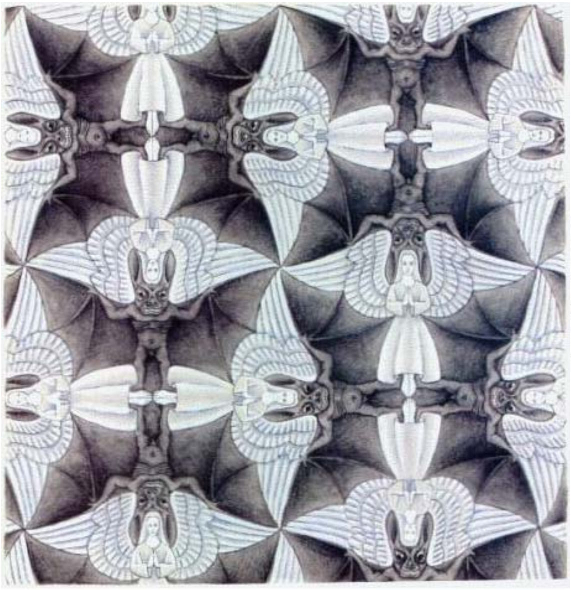
M. C. Escher: Waterfall

Obr. 103

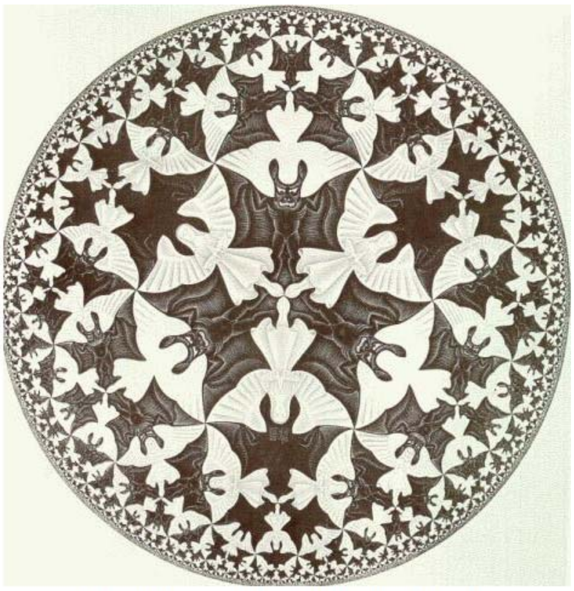


M. C. Escher: Smaller and Smaller

Obr. 104



M. C. Escher: Devils and Angeles



M. C. Escher: Circle Limit IV (Devils and Angeles)

Obr. 105 *Obr. 106*

M. C. Escher: Devils and Angeles

Obr. 107

9 Didaktická inspirace v knihách

Bohužel v současnosti existuje velmi málo původně české literatury, která by se snažila o přiblížení tématu euklidovské geometrie laickému čtenáři nebo byla upravena pro potřeby studenta střední školy a byla běžně dostupná.

Takovým pracím zde vévodí kniha Petra Vopěnky [31], která může být velkou inspirací učiteli, jenž při výuce neeuklidovské geometrie uplatňuje princip genetické paralely. Tato kniha odhaluje čtenáři myšlenky tohoto geometrického světa v naprostém souladu s jeho historickým vývojem, nechává ho bádat společně s hlavními osobnostmi této matematické oblasti, uskutečňovat s nimi důkazy a postupně dospět ke stejnému poznání, k jakému dospěl před dvěma sty lety Carl Friedrich Gauss. Navíc je připojen i beletristický dodatek *Trýznivé tajemství*, který nahlíží do těžkého období Gaussova života a nechává čtenáře prožít s hlavním hrdinou mučivé rozhodování, zda vynést či nevynést objev neeuklidovské geometrie na světlo světa.

Dále jsou na českém trhu dostupné spíše vysokoškolské učebnice neeuklidovské geometrie ([15], [19]), jejichž využitelnost pro středoškolskou výuku není příliš vysoká.

Další významnou pomocí učitelům při zapojování neuklidovské geometrie do výuky může být článek Milana Hejného [17], v němž se autor mimo jiné zabývá rozdíly v chápání matematických pojmů ze strany studenta a učitele a přináší rozbory pokusů o důkaz pátého Euklidova postulátu.

Z knih zahraničních autorů pak nemohu nezmínit poměrně novou knihu Leonarda Mlodinowa [23], která, ačkoli se jedná o literaturu populární, může učitele inspirovat v produkci různých příkladů a být zásobárnou zajímavostí z historie nejen neeuklidovské geometrie, ale celé matematiky.

Několik kapitol věnuje neeuklidovským geometriím ve své knize i Egmont Colerus [11]. Čtenář zde najde srozumitelný popis všech tří typů geometrií s názornými ukázkami i některé zajímavosti o zakřivených prostorech a tato kniha může být učiteli opět podnětem ve výběru vhodných příkladů pro prezentaci vlastností neeuklidovských geometrií.

O neeuklidovských geometriích se zmiňuje i kniha Johna D. Barrowa [2], která se snaží poutavou formou obsáhnout základní myšlenky celé matematiky, a jelikož se nejedná o mnohasvazkové dílo, ale pársetstránkovou knihu, činí tak přirozeně na úkor podrobnosti předkládaných faktů. Zájemci o problematiku neeuklidovských geometrií tak může sloužit spíše jako prvotní seznámení se s tématem a inspirace pro další práci.

A v souvislosti s touto látkou mohu ještě zmínit Delvinovu knihu [14], jejíž část se zabývá zakřivenými prostory z jiného úhlu pohledu, a sice z topologického hlediska.

10 Závěr

Tato diplomová práce se snažila ne shrnout podstatu neeuklidovských geometrií jako celku, ale přinést shrnutí poznatků neeuklidovských geometrií využitelných pro výuku zejména na středních školách a zaměřit se přitom na různé zdroje inspirace pro učitele.

Dalším cílem bylo prověřit eventuální připravenost studentů střední školy na přijetí poznatků neeuklidovské geometrie, spočívající nejen v jejich možnostech pochopit danou tematiku, ale i ve stupni zájmu o ni, a navrhnout možné postupy, formy výuky i konkrétní podoby hodin a úloh této geometrie, ověřit jejich účinnost v praxi a na základě toho dospět k vhodné formě předávání poznatků z tohoto oboru studentům.

Výzkum byl v první části zaměřen na diagnostiku nejčastějších potíží studentů při nahlížení do nového, neeuklidovského světa, spočívající v popsání těchto potíží a odhalení jejich možných důvodů, v druhé části pak na odstranění problémů na základě výsledků části první. Palčivé problémy provázející řešení studentů z první části výzkumu byly ve druhé části skutečně eliminovány a studenti byli v řešení úloh velmi úspěšní.

Věřím, že víc, než samotná látka, je pro přijetí studenty důležitá její prezentace učitelem. Neeuklidovská geometrie je bezpochyby jednou z matematických disciplín, které nabízejí výběr možností, jak látku prezentovat zajímavě a pro studenty lákavě. Nejenže má za sebou mimořádně vzrušující historii, která může být součástí výuky a jež se rovněž může stát pro studenty lákadlem, ale je především spjata s reálným světem, útočí na představivost a smysly člověka, otevírá nové obzory a učí nás zdravé pochybnosti, která je důležitá pro kritické myšlení.

Myslím, že studenti jsou dnes v hodinách matematiky zvyklí pouze přijímat předkládané informace jako hotový fakt a jinou formu výuky, předpokládající jejich aktivní zapojení, kdy musejí docházet k platným závěrům sami pouze na základě indicií, nejsou příliš ochotni akceptovat. Neeuklidovská geometrie, tím, že útočí na jejich smysly a na zákony, které studenti doposud považovali za bezvýhradně platné, přímo vybízí ke spekulacím a touze objevovat a ověřovat nově poznané skutečnosti, jak se ukázalo v úvodní hodině, kde se studenti nebáli vyslovovat pochybnosti o závěrech vyplývajících z vlastností sférické geometrie, debatovat a spekulovat o nich i možnostech řešení úloh. Nový svět, který objevili, je tak donutil zamýšlet se nad čerstvými fakty, vzbudil v nich touhu přesvědčit se o nich, a někteří se zdáli být až ohromeni nedokonalostí vlastních smyslů a dosavadního pohledu na okolní svět.

V úvodní hodině se navíc potvrdila premisa, že v této oblasti může uspět i student, který se v běžných hodinách matematiky neřadí právě mezi ty nejlepší, neboť předpokladem úspěchu zde nejsou žádné speciální vstupní znalosti a student si vystačí pouze s běžnou představivostí a ochotou poznávat nové věci. Neeuklidovská geometrie tedy může přispět nejenom k zájmu o matematiku, ale také přenést aktivní způsob učení se novým poznatkům i do jejích jiných oblastí.

Ve výzkumu je samozřejmě možné pokračovat a ověřit připravenost a ochotu studentů přijímat poznatky geometrie hyperbolické. Lze například porovnat názory studentů na hyperbolickou a sférickou geometrii, zkoumat jejich úspěšnost v řešení úloh z hyperbolické geometrie v závislosti na zvoleném modelu, ověřit postupy navrhované Lénártem a doplnit je vlastními náměty, či je s nimi konfrontovat. Tím, že neeuklidovská geometrie nemá v současnosti pevné místo ve výuce, a není tak zcela ověřena praxí, a ani jako vědní disciplína není zcela probádána a podrobně popsána, nabízí nepřeberné množství námětů na další samostatný výzkum.

Přínosem této diplomové práce pak může být skutečnost, že (jak bylo řečeno výše) snad žádná dostupná literatura tuto tematiku z didaktického hlediska neshrnuje. Tato práce se o takové shrnutí snaží, navíc s využitím globálních souvislostí, do nichž neeuklidovské geometrie vstupují v současnosti i v historii. V průběhu výzkumu byla výuka neeuklidovských geometrií prověřena v současné praxi v českém prostředí a na základě výsledků tohoto prověření didakticky popsána. Věřím, že práce tak najde uplatnění u učitelů, kteří se nebojí pouštět do nových věcí a experimentovat s formami výuky i náplní hodin a nechtějí své žáky ochudit o poznatky, které se bezprostředně týkají našeho světa i věcí a oblastí, s nimiž se běžně setkáváme, ale naopak chtějí ukázat i těm, pro něž není matematika oblíbeným předmětem, že může být zajímavá, že v ní je ještě leccos k objevení a že si zde každý může hledat oblast, ve které uspěje. Takovým učitelům pak tato práce může být pouhou inspirací, vstupním vodítkem pro zavedení neeuklidovské geometrie do výuky, aby věděli, co přitom mohou od studentů očekávat a na co se mají připravit, jakož i konkrétním návrhem formy pojetí neeuklidovských geometrií ve výuce i zdrojem postupů a jednotlivých úloh. Zároveň však může posloužit nejen učitelům, ale každému, kdo projeví zájem o téma neeuklidovských geometrií, k rozšíření jeho vlastních obzorů nebo doplnění či ověření poznatků, ale i třeba jako téma k zamyšlení se nad okolním světem a způsoby nazírání na něj.

Za další přínos považuji již zmíněnou skutečnost, že se během výzkumu opravdu podařilo najít takový způsob prezentace neeuklidovské geometrie v hodinách matematiky, o němž lze na základě výsledků druhé fáze výzkumu říci, že úspěšně předchází problémům s pochopením předkládané látky, které mohou studenti při setkání s neeuklidovskou geometrií pociťovat (jak vyplynulo z první fáze výzkumu), i když je samozřejmé, že tento způsob lze dále vylepšovat.

Úvodní hodina spočívající především v zasvěcení studentů do neeuklidovských geometrií, výkladu jejich historie a zamyšlení se nad některými důsledky těchto geometrií byla velmi příjemně stráveným časem, v jehož průběhu se většina studentů s viditelným zájmem aktivně podílela na výuce. Některé otázky studentů přiměly i mne samotnou zamyslet se nad dalšími skutečnostmi a důsledky neeuklidovských geometrií, o nichž jsem dříve neuvažovala, a tak výuka přinesla obohacení o nové znalosti nejen studentům. Zájem o látku po absolvování úvodní hodiny byl pak vidět i na většině pracovních listů.

Celkově si z celého projektu odnáším dobrý pocit, jelikož jsem se v průběhu bádání dozvěděla spoustu nových zajímavých a užitečných věcí, které mohu předávat dál, ucelila jsem si pohled na matematiku a přidala do své pedagogické praxe pár nových zkušeností, které se mi v budoucnu budou nepochybně hodit, neboť se budu snažit i své budoucí studenty s existencí neeuklidovských geometrií pro zajímavost a pro užitečné oživení hodin matematiky seznámit.

Netvrdím, že problematika neeuklidovské geometrie zaujme bezvýhradně každého studenta, domnívám se však, že je škoda, když studentům neotevřeme dveře do světa této geometrie, která je právoplatnou a důležitou součástí matematiky i mnoha jiných vědních oborů a v případě sférické geometrie navíc běžně použitelná. Pak již můžeme nechat na studentech samotných, zda se rozhodnou do tohoto světa vstoupit, či nikoliv. Zařazení kapitol o neeuklidovské geometrii do středoškolského učiva, alespoň jako nepovinné nadstandardní části výuky, jistě nemůže být na škodu a může přispět k oživení hodin matematiky, zvláště pak v době, kdy je kladen velký důraz na vztahování matematických příkladů k reálným situacím a na vzájemnou provázanost poznatků různých disciplín a oborů.

11 Seznam literatury

[1] Acheson, D.: *1089 a další parádní čísla.* Dokořán, Praha 2006.

[2] Barrow, J. D.: *Pí na nebesích.* Mladá fronta, Praha 2000.

[3] Beckmann, P.: *Historie čísla pí.* Academia, Praha 1998.

[4] Bečvář Jindřich, Fuchs Eduard: *Historie matematiky II.* Prometheus, Praha 1997.

[5] Bečvář J., Fuchs, E.: *Matematika v 19. století.* Prometheus, Praha 1996.

[6] Bečvář, J., Fuchs, E.: *Matematika v proměnách věků II.* Prometheus, Praha 2001.

[7] Bečvářová, M.: *Eukleidovy základy, jejich vydání a překlady.* Prometheus, Praha 2002.

[8] Bečvářová, M.: *Historie matematiky.* Matfyzpress, Praha 2007.

[9] Beutelspacher, A.: *Matematika do vesty.* Baronet, Praha 2005.

[10] Colerus, E.: *Matematika – Od násobilky k integrálu.* Sfinx, Praha 1942.

[11] Colerus, E.: *Od bodu k čtvrtému rozměru.* Družstevní práce, Praha 1939.

[12] Colerus, E.: *Od Pythagory k Hilbertovi.* Družstevní práce, Praha 1941.

[13] Devlin, K.: *Jazyk matematiky. Jak zviditelnit neviditelné.* Dokořán, Argo, Praha 2003.

[14] Devlin, K.: *Problémy pro třetí tisíciletí.* Dokořán a Argo, Praha 2005.

[15] Gatial, J., Hejný, M.: *Stavba Lobačevského planimetrie.* ÚV matematické olympiády, Mladá fronta, Praha 1969.

[16] Gatial, J., Hejný, M.: *Stavba planimetrie.* SPN, Bratislava 1973.

[17] Hejný, M.: Objevování neeuklidovské geometrie: Pohled učitele. In Bečvář, J., Fuchs, E.: *Člověk – umění – matematika*. Prometheus, Praha 1996.

[18] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika.* Portál, Praha 2001.

[19] Hlavatý, V.: *Úvod do neeuklidovské geometrie.* JČMF, Praha 1926.

[20] Kant, I.: *Kritika čistého rozumu.* Oikoymenh, Praha 2001.

[21] Lénárt, I.: Projekt „Srovnávací geometrie“ (rovina – sféra – hemisféra). *Učitel matematiky* 2004, roč. 13, č. 1-2.

[22] *Malý encyklopedický slovník A-Ž.* Academia, Praha 1972.

[23] Mlodinow, L.: *Eukleidovo okno.* Slovart, Praha 2007.

[24] Novikov, I.: *Černé díry a vesmír.* Mladá fronta, Praha 1989.

[25] Pavlíček, J. B.: *Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953.

[26] Punčochář, M.: *Nedaleko nekonečna.* Academia, Praha 2004.

[27] Rossiová, A. a kol.: *Encyklopedie matematiky.* Mladá fronta, Praha 1988.

[28] Struik, D. J.: *Dějiny matematiky.* Orbis, Praha 1963.

[29] Vopěnka, P.: *Geometrizace reálného světa: Třetí rozpravy s geometrií.* Matfyzpress, Praha 1995.

[30] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha 1989.

[31] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií: Otevření neeuklidovských geometrických světů.* Vesmír, Praha 1995.

[32] http://archiv.neviditelnypes.zpravy.cz/veda/clanky/2866_0_0_0.html (k 27.9.2008)

[33] http://archiv.neviditelnypes.zpravy.cz/veda/clanky/3046.html (k 27.9.2008)

[34] http://biomech.ftvs.cuni.cz/staff/zeman/www/texty/chaos.html (k 27.9.2008)

[35] http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleid%C3%A9s_z_Megary (k 20.9.2008)

[36] http://cs.wikipedia.org/wiki/Gravita%C4%8Dn%C3%AD_%C4%8Do%C4%8Dka (k 10.12.2008)

[37] http://cs.wikipedia.org/wiki/Kleinova_l%C3%A1hev (22.12.2008)

[38] http://cs.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6biova_p%C3%A1ska (22.12.2008)

[39] http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Spacetime_curvature.png (k 10.12.2008)

[40] http://encyklopedie.seznam.cz/heslo/29467-bolyai (k 20.9.2008)

[41] http://encyklopedie.seznam.cz/heslo/495038-neeuklidovska-geometrie (k 20.11.2008)

[42] http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai (k 20.9.2008)

[43] http://en.wikipedia.org/wiki/Eugenio_Beltrami (k 20.9.2008)

[44] http://en.wikipedia.org/wiki/Euklid (k 20.9.2008)

[45] http://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein (k 20.9.2008)

[46] http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss (k 20.9.2008)

[47] http://en.wikipedia.org/wiki/Lobachevski (k 20.9.2008)

[48] http://en.wikipedia.org/wiki/Non-Euclidean_geometry (k 20.11.2008)

[49] http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry (k 20.11.2008)

[50] http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann (k 20.9.2008)

[51] http://fyzmatik.pise.cz/73355-matematicka-lahev.html (22.12.2008)

[52] http://geometrie.kma.zcu.cz/projekt/prezentace/lobacovskeho_geometrie/index.php?str=2.htm (k 27.9.2008)

[53] http://keynot.tumblr.com/post/34585102/m-biova-p-ska (22.12.2008)

[54] http://mant.upol.cz/soubory/Akce/Bolyai.htm (k 27.9.2008)

[55] http://mobiova-paska.navajo.cz/ (22.12.2008)

[56] http://mujweb.cz/www/nepmi/index.htm#3.7.%20Eratosthenes %20z%20Kyrény%20(kolem%20275%20%20195%20př.%20n. %20l.), (k 27.9.2008)

[57] http://natura.eri.cz/natura/2002/1/20020105.html (k 5.12.2008)

[58] http://vedci.wz.cz/Osobnosti/Eukleides.htm (k 20.9.2008)

[59] http://vedci. wz.cz/Osobnosti/Gauss_K_F.htm (k 20.9.2008)

[60] http://vedci.wz.cz/Osobnosti/Riemann_G_F_B.htm (k 20.9.2008)

[61] http://wikipedia.infostar.cz/j/ja/janos_bolyai.html (k 20.9.2008)

[62] http://www.aldebaran.cz/astrofyzika/gravitace/otr.html (k 10.12.2008)

[63] http://www.astro-vesmir.estranky.cz/clanky/velky-tresk_-a-jine-teorie/obecna-teorie-relativity (k 10.12.2008)

[64] http://www.converter.cz/fyzici/gauss.htm (k 20.9.2008)

[65] http://www.emis.de/classics/Riemann (k 20.9.2008)

[66] http://www.geneze.info/jmena/osobnosti.htm (k 20.9.2008)

[67] http://www.keypress.com/documents/ALookInside/NonEuclid AdvLenartSphere/NonExclAdvLenart_pp_28_31.pdf (3.1.2009)

[68] http://www.keypress.com/documents/ALookInside/NonEuclid AdvLenartSphere/NonEuclAdvLenart_pp_iii_iv.pdf (3.1.2009)

[69] http://www.keypress.com/x5883.xml (2.1.2009)

[70] http://www.keypress.com/x6245.xml (2.1.2009)

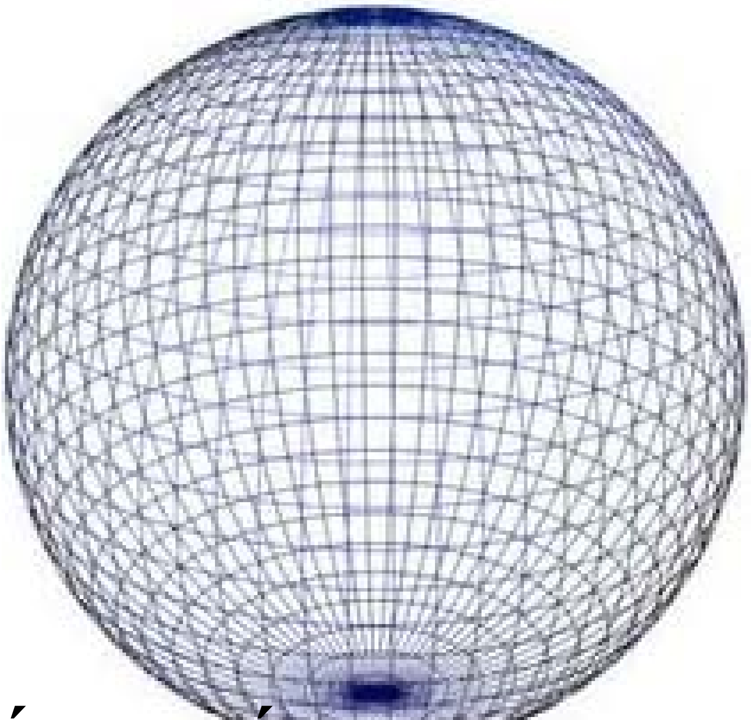
[71] http://www.math.slu.cz/KOS/0405/01teorie.php (k 4.12.2006)

[72] http://www-prod.pen.k12.va.us/Div/Winchester/jhhs/math/les sons/calculus/escher.html (k 31.3.2009)

[73] http://www.vidact.com/cz/clanek.php?id=3050004 (k 4.12.2006)

12 Přílohy

12.1 Příloha 1: Sférická geometrie – Pracovní list Verze 2



SFÉRICKÁ GEOMETRIE

PRACOVNÍ LIST

Kolik společných bodů mohou mít dvě přímky?

Dvě různé přímky protínající se v rovině nebo na kulové ploše mají jeden nebo více společných bodů.

V následujících příkladech:
- Vyšetříte průsečíky dvou přímek v rovině.
- Vyšetříte průsečíky dvou hlavních kružnic na kulové ploše (na kouli).
- Pozorujte a vysvětlete chování rovnoběžných přímek v rovině a na kulové ploše.

Pozn.: ***hlavní kružnice*** = *průnik kulové plochy a roviny, která prochází středem této kulové plochy, neboli* ***taková kružnice na kulové ploše (kouli), jejíž poloměr se rovná poloměru kulové plochy****, a jejíž střed tedy leží ve středu kulové plochy. Např. hlavními kružnicemi na zeměkouli jsou mimo jiné rovník a všechny poledníky.*

Konstrukce v rovině

Krok 1	Narýsujte přímku. Pojmenujte ji *l*.
Krok 2	Narýsujte jinou přímku, která nemá žádný společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *a*.
Krok 3	Narýsujte přímku, která má právě jeden společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *b*.
Krok 4	Narýsujte přímku, která má právě dva společné body s přímkou *l*. Pojmenujte ji *c*.
Krok 5	Narýsujte přímku, která má více než dva společné body s přímkou *l*. Pojmenujte ji *d*.

Vyšetřete

1. Které tyto konstrukce jsou možné v rovině?

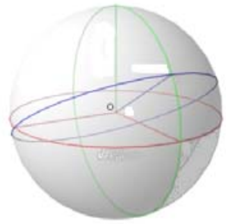
2. Které z vašich přímek jsou rovnoběžné? Proč?

3. Vyšetřete všechny možné způsoby, jak se mohou dvě různé přímky protínat v rovině.

4. ***Odhadněte***:
Budou vaše závěry stejné pro hlavní kružnice na kulové ploše?

Konstrukce na kulové ploše (na kouli)

Na kulové ploše jsou přímky reprezentovány hlavními kružnicemi.
Zopakujte si na předchozí straně, čemu říkáme hlavní kružnice.



příklady hlavních kružnic→

5. Stejné kroky, které jste provedli v rovině, proveďte na kulové ploše (na kouli), jen nahraďte přímky hlavními kružnicemi (pouze načtrněte obrázek). Sledujte, které konstrukce jsou na kulové ploše možné.

Vyšetřete

6. Vyšetřete všechny způsoby, jak se mohou dvě hlavní kružnice protínat na kulové ploše.

7. Mohou být dvě hlavní kružnice někdy rovnoběžné?

Srovnejte rovinu a kulovou plochu

8. Určete, kolik postřehů můžete učinit o průsečíku dvou přímek v rovině a průsečíku dvou hlavních kružnic na kulové ploše (kdy je 0, 1, 2, více průsečíků, …). Zaznamenejte je do srovnávací tabulky. *Přidejte tolik řádek, kolik potřebujete.*

Protnutí dvou přímek

V rovině	**Na kulové ploše**

9. Myslíte, že je protnutí dvou přímek jednodušší v rovině, nebo na kulové ploše? Jaký případ je zajímavější? Proč?

10. Nyní zkuste změnit své argumenty. Uveďte důvody, proč je protnutí dvou přímek jednodušší nebo spletitější (zajímavější) v případě, který jste nevybrali výše.

Vyzkoumejte víc

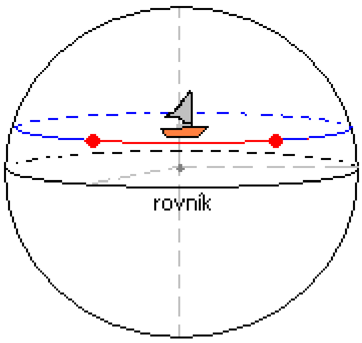
11. Představte si, že by bylo možné, aby pár železničních kolejí vedl kolem celé Země. Mohou tyto železniční koleje představovat rovnoběžné přímky (tedy hlavní kružnice) a proč?

12. Rovnoběžné přímky v rovině jsou od sebe stále stejně vzdálené. Nakreslete na kulové ploše hlavní kružnici. Pak nakreslete další obrazec, který bude ve stále stejné vzdálenosti od hlavní kružnice.

a. Popište tento obrazec.

b. Rozhodněte, zda tento obrazec může být hlavní kružnicí. Proč?

13. Loď cestuje tak, že je stále vzdálena 50 km od rovníku. Vysvětlete, proč necestuje nejpřímější (nejkratší) cestou mezi dvěma body.



14. Euklides byl matematik z antického Řecka, který proslul tím, že jako první uspořádal myšlenky geometrie. Ve svém pojednání nazvaném *Základy* Euklides uvádí soubor geometrických axiomů. Euklidovy axiomy jsou podle něj jasně pravdivá tvrzení, která byl ochoten přijmout bez důkazu. O téměř dva a půl tisíce let později stále zakládáme rovinnou geometrii na Euklidových axiomech. Nicméně jeho poslední axiom, běžně nazývaný postulát o rovnoběžnosti, vždy vyvolával debaty. Zde je jedna z podob Euklidova postulátu o rovnoběžnosti: Je dána přímka a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou.

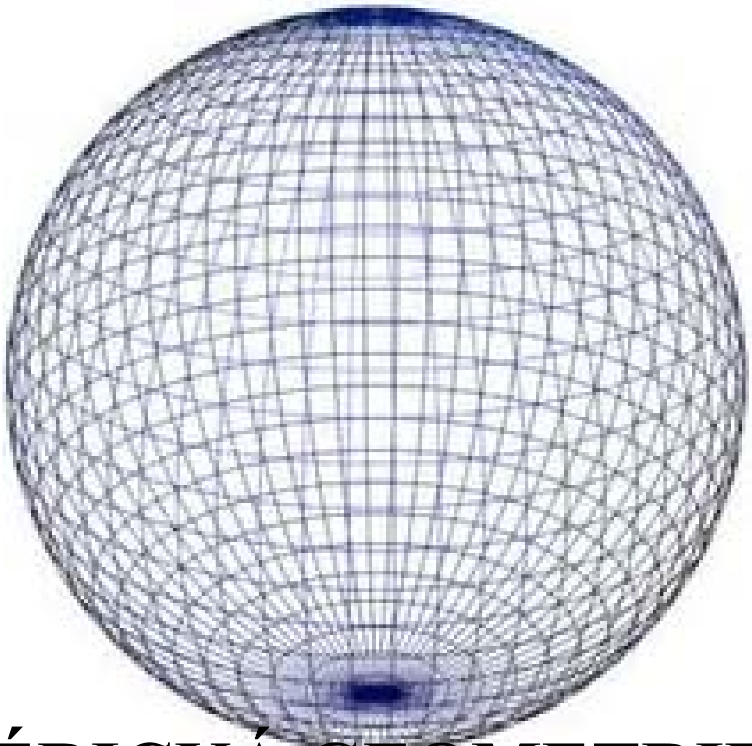
a. Narýsujte přímku a bod, který na přímce neleží. Narýsujte všechny možné rovnoběžky k dané přímce procházející daným bodem. Pomocí vaší kresby vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti platí v rovině.

b. Přepište postulát o rovnoběžnosti pro kulovou plochu nahrazením slova *přímka* za slovo *hlavní kružnice*. Pak proveďte na kulové ploše obdobnou konstrukci jako na rovině. Nyní vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti neplatí na kulové ploše.

c. Napište svůj vlastní postulát o rovnoběžnosti, který bude platný pro geometrii na kulové ploše (sférickou geometrii).

15. Popište všechny způsoby, jak se mohou protínat tři různé hlavní kružnice.

12.2 Příloha 2: Sférická geometrie – Pracovní list Verze 2



SFÉRICKÁ GEOMETRIE

PRACOVNÍ LIST

Kolik společných bodů mohou mít dvě přímky?

Dvě různé přímky protínající se v rovině nebo na kulové ploše mají jeden nebo více společných bodů.

V následujících příkladech:

- Vyšetříte průsečíky dvou přímek v rovině.
- Vyšetříte průsečíky dvou hlavních kružnic na kulové ploše (na kouli).
- Pozorujte a vysvětlete chování rovnoběžných přímek v rovině a na kulové ploše.

Pozn.: ***hlavní kružnice*** = *průnik kulové plochy a roviny, která prochází středem této kulové plochy, neboli* ***taková kružnice na kulové ploše (kouli), jejíž poloměr se rovná poloměru kulové plochy****, a jejíž střed tedy leží ve středu kulové plochy. Např. hlavními kružnicemi na zeměkouli jsou mimo jiné rovník a všechny poledníky.*

Konstrukce v rovině

Krok 1 Narýsujte přímku. Pojmenujte ji *l*.

Krok 2 Narýsujte jinou přímku, která nemá žádný společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *a*.

Krok 3 Narýsujte přímku, která má právě jeden společný bod s přímkou *l*. Pojmenujte ji *b*.

Krok 4 Narýsujte přímku, která má právě dva společné body s přímkou *l*. Pojmenujte ji *c*.

Krok 5 Narýsujte přímku, která má více než dva společné body s přímkou *l*. Pojmenujte ji *d*.

Vyšetřete

1. Které tyto konstrukce jsou možné v rovině?

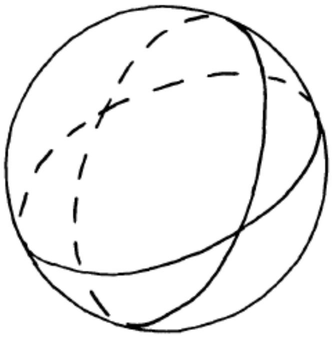
2. Které z vašich přímek jsou rovnoběžné? Proč?

3. Vyšetřete všechny možné způsoby, jak se mohou dvě různé přímky protínat v rovině (poloha přímek, počet průsečíků, …).

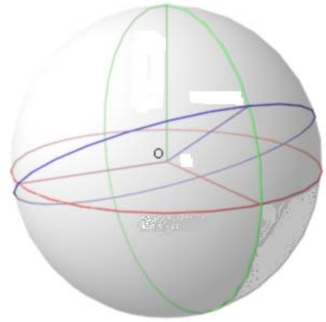
4. ***Odhadněte***:
Budou vaše závěry stejné pro hlavní kružnice na kulové ploše?

Konstrukce na kulové ploše (na kouli)

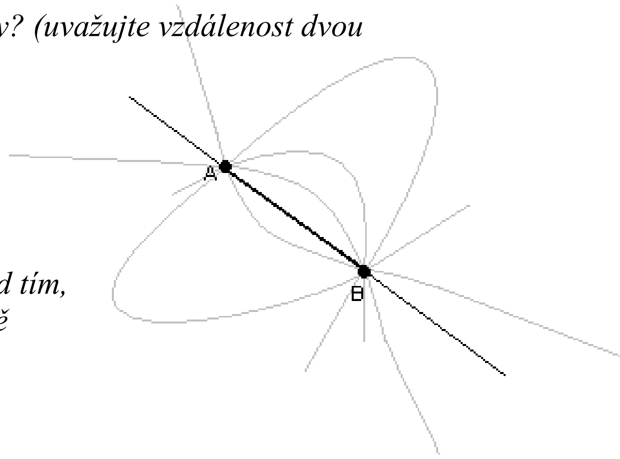
Na kulové ploše jsou přímky reprezentovány hlavními kružnicemi.
Zopakujte si na předchozí straně, čemu říkáme hlavní kružnice.



←příklady hlavních kružnic→



Zopakujte si definici přímky v rovině.
Co můžeme tedy říct o přímce procházející dvěma body? (uvažujte vzdálenost dvou bodů)



....

....

Na základě toho, co jste si zopakovali, se zamyslete nad tím, proč jsou na kulové ploše přímky reprezentovány právě hlavními kružnicemi.
K jakým závěrům jste dospěli?

....

....

Nezapomeňte, že při řešení příkladů na kulové ploše nesmíte povrch koule opustit a uvažovat řešení mimo něj. Představte si, že svá řešení zakreslujete například na míček.

5. Stejné kroky, které jste provedli v rovině, proveďte na kulové ploše (na kouli), jen nahraďte přímky hlavními kružnicemi (načrtněte obrázek na znázorněnou kouli). Sledujte, které konstrukce jsou na kulové ploše možné.

Vyšetřete

6. Vyšetřete všechny způsoby, jak se mohou dvě hlavní kružnice protínat na kulové ploše.

7. Mohou být dvě hlavní kružnice někdy rovnoběžné?

Srovnejte rovinu a kulovou plochu

8. Určete, kolik postřehů můžete učinit o průsečíku dvou různých přímek v rovině a průsečíku dvou různých hlavních kružnic na kulové ploše (poloha a jí odpovídající počet průsečíků, odpovídající názvy přímek v příslušné poloze; kdy 0, 1, 2, více průsečíků, jaké jsou další postřehy, rozdíly, zvláštnosti). Zaznamenejte je do srovnávací tabulky. *Přidejte tolik řádek, kolik potřebujete.*

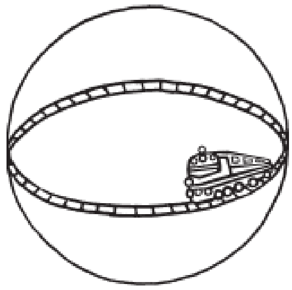
V rovině	**Na kulové ploše**

9. Myslíte, že je protnutí dvou přímek jednodušší v rovině, nebo na kulové ploše? Jaký případ
je zajímavější? Proč?

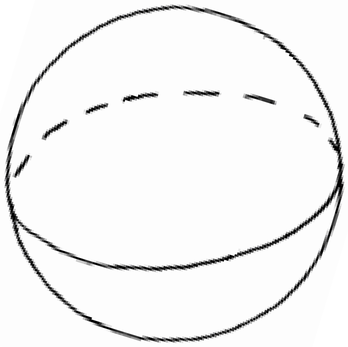
10. Nyní zkuste změnit své argumenty. Uveďte důvody, proč je protnutí dvou přímek jednodušší nebo komplikovanější (či zajímavější) v případě, který jste nevybrali výše.

Vyzkoumejte víc

11. Představte si, že by bylo možné, aby pár železničních kolejí vedl kolem celé Země. Mohou tyto železniční koleje představovat rovnoběžné přímky (tedy hlavní kružnice) a proč?



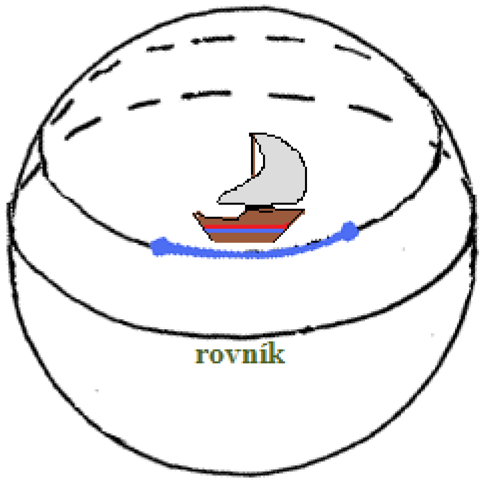
12. Rovnoběžné přímky v rovině jsou od sebe stále stejně vzdálené. Na kulové ploše, kterou vidíte na obrázku, je zakreslena hlavní kružnice. Zakreslete na tuto kulovou plochu další obrazec, který bude ve stále stejné vzdálenosti od hlavní kružnice.



a. Popište tento obrazec.

b. Rozhodněte, zda tento obrazec může být hlavní kružnicí. Proč?

13. Loď cestuje tak, že je stále vzdálena 50 km od rovníku. Vysvětlete, proč necestuje na povrchu Země nejpřímější (nejkratší) cestou mezi dvěma body.



14. Euklides byl matematik z antického Řecka, který proslul tím, že jako první uspořádal myšlenky geometrie. Ve svém pojednání nazvaném *Základy* Euklides uvádí soubor geometrických axiomů. Euklidovy axiomy jsou podle něj jasně pravdivá tvrzení, která byl ochoten přijmout bez důkazu. O téměř dva a půl tisíce let později stále zakládáme rovinnou geometrii na Euklidových axiomech. Nicméně jeho poslední axiom, běžně nazývaný postulát o rovnoběžnosti, vždy vyvolával debaty. Zde je jedna z podob Euklidova postulátu o rovnoběžnosti: Je dána přímka a bod, který na ní neleží. Daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou.

a. Narýsujte přímku a bod, který na přímce neleží. Narýsujte všechny možné rovnoběžky k dané přímce procházející daným bodem. Pomocí vaší kresby vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti platí v rovině.

b. Přepište postulát o rovnoběžnosti pro kulovou plochu nahrazením slova *přímka* za slovo *hlavní kružnice*. Pak proveďte na kulové ploše obdobnou konstrukci jako na rovině. Nyní vysvětlete, proč Euklidův postulát o rovnoběžnosti neplatí na kulové ploše.

c. Napište svůj vlastní postulát o rovnoběžnosti, který bude platný pro geometrii na kulové ploše (sférickou geometrii).

15. Popište všechny způsoby, jak se mohou protínat tři různé hlavní kružnice.

12.3 Příloha 3: Příprava na úvodní hodinu

SFÉRICKÁ GEOMETRIE – ÚVODNÍ HODINA

Téma: Úvod do neeuklidovské geometrie
Typ školy: Střední škola
Ročník: 1. – 4. ročník
Čas výuky: 45 min.
Pomůcky: Model koule, nejlépe průhledný míč s motivem zeměkoule, popř. jakýkoli míč
Glóbus
Atlas světa
Barevné fixy

1) ÚVOD

Žáci budou seznámeni s tématem hodiny

Návodné otázky:

Už jste se setkali s pojmem „neeuklidovská geometrie“, víte, co znamená?

Jak říkáme geometrii, kterou znáte a kterou užíváte již od základní školy? – Kdo formuloval a sepsal její pravidla? Víte něco o Euklidovi?

5 postulátů, na kterých je euklidovská geometrie postavena:

6. Přímou čáru je možné nakreslit z kteréhokoli bodu do kteréhokoli jiného bodu.
7. Konečnou přímou čáru (úsečku) je možné prodloužit na přímku.
8. Je možné nakreslit kruh s libovolným středem a poloměrem.
9. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
10. Jestliže přímka protíná dvě přímky tak, že vnitřní úhly na téže straně jsou menší než dva pravé úhly, pak se tyto dvě přímky, pokud poběží do nekonečna, protnou na stejné straně, na které jsou úhly menší než dva pravé úhly.
    K dané přímce lze vést daným bodem, který na ní neleží, právě jednu rovnoběžku.

Znění postulátů ilustrujeme na tabuli obrázkem

Otázka: Jaký postulát se vám zdá nejméně jasný?

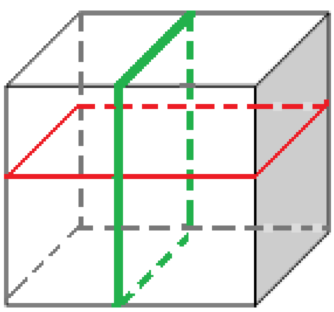
2) HISTORIE

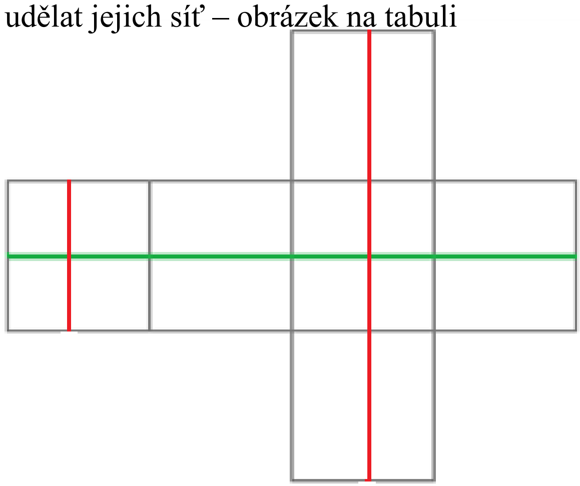
Stručná historie neeuklidovských geometrií → dnešní formulace postulátu → ekvivalence s Pythagorovou větou → Základní jména neeuklidovské geometrie: Gauss, Bolyai, Lobačevskij, Riemann.

3) NEEUKLIDOVSKÝ PROSTOR

Prostor, který matematici objevili a v němž 5. postulát neplatí, je zakřivený prostor, který nelze rozvinout do roviny =>

ne každý zakřivený prostor je neeuklidovský, můžete rýsovat na povrch krychle, hranolu, kužele a platí tam zákony euklidovské geometrie – Přijdete na to, proč? – jsou to tělesa, která lze do roviny rozvinout – udělat jejich síť – obrázek na tabuli



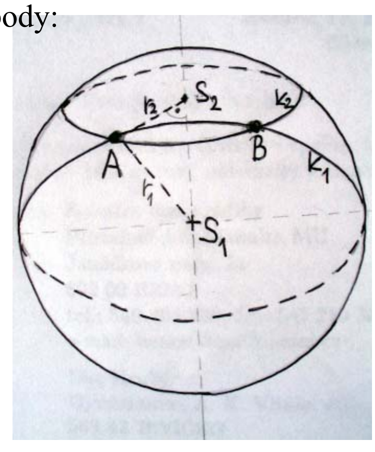


=> Když něco nakreslím na zohýbaný papír (ukázat), válec, ... = euklidovská geometrie
=> **Neeuklidovská geometrie = geometrie zakřiveného prostoru, který nelze rozvinout do roviny**
Otázka: Znáte těleso, jehož síť narýsovat nedokážeme? => povrch koule neboli sféra (geometrie kulového povrchu = sférická geometrie) je jedním z prostorů, kde 5. postulát neplatí, a vaším úkolem bude zjistit, co tedy o rovnoběžnosti přímek na povrchu koule můžeme říci.
Je zvláštní, že trvalo tak dlouho, než matematici objevili, že 5. postulát neplatí zrovna na povrchu koule, když žijeme na planetě, která je kulatá => ve velkých měřítkách tedy v našem světě neplatí zákony všechny euklidovské geometrie.

4) HLAVNÍ KRUŽNICE
K tomu, abychom zjistili, jak to tedy s rovnoběžností na kouli je, musíme zjistit, jaký útvar na povrchu koule reprezentuje přímku:
Návodné otázky:
Jáký tvar má trajektorie člověka, který jde po rovině stále rovně? – Přímka - *obrázek na tabuli*
Kam dojde člověk, který se bude pohybovat stále rovně po povrchu zeměkoule? Jaký útvar tímto pohybem na povrchu zeměkoule opíše? – Dojde na stejné místo, opíše kružnici - *Žáci kreslí na své modely, učitel na míč*
Načrtněte na kouli (model zeměkoule) trajektorii člověka, který jde stále rovně, když:
1) Jeho výchozí poloha je na rovníku
2) Jeho výchozí poloha je na pólu
3) Jeho výchozí poloha je mimo rovník a póly
- *Žáci kreslí na své modely a ukazují na glóbusu; v bodě 3) na glóbusu vybereme město ležící na některé rovnoběžce*
- Trajektorií je kružnice, která má střed ve středu koule a poloměr rovný poloměru koule = hlavní kružnice
=> zdá se, že přímku na kouli reprezentuje hlavní kružnice, ale je tomu opravdu tak?
Definice přímky jako nejkratší spojnice dvou bodů:
V rovině jsou dány dva body A a B. Spojte tyto body nejkratší možnou spojnicí. Jaký útvar spojnice představuje? – Úsečka – *obrázek na tabuli* - Prodlužte spojnici na obě strany do nekonečna. Jaký útvar představuje teď? – Přímka – *obrázek*
=> Abychom mohli rozhodnout o tom, že hlavní kružnice skutečně na kouli reprezentuje přímku, musíme zjistit, jestli je opravdu nejkratší spojnicí dvou bodů:

Tak, jako lze v rovině každými dvěma body proložit přímku, lze vést na kouli každými dvěma body hlavní kružnici. Tak jako je přímka (respektive její část – úsečka ohraničená body) nejkratší spojnicí mezi dvěma body v rovině, je hlavní kružnice (respektive kratší část jejího oblouku ohraničeného body) nejkratší spojnicí mezi dvěma body na kulové ploše. Proč tomu tak je si ukážeme na obrázku:

Nakreslíme na kouli hlavní kružnice a jinou kružnice, která má s hlavní kružnicí dva společné body:



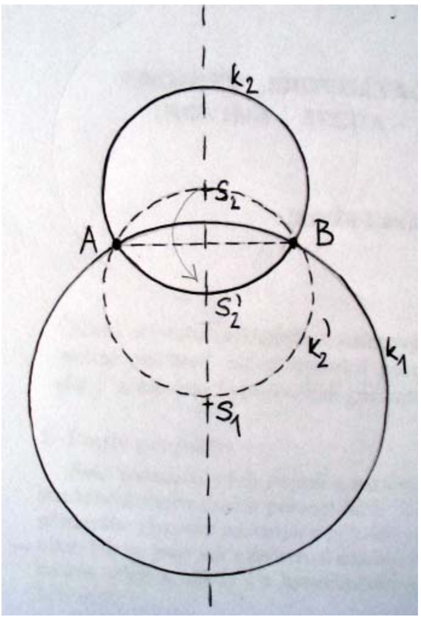
- *Učitel kreslí na model koule*

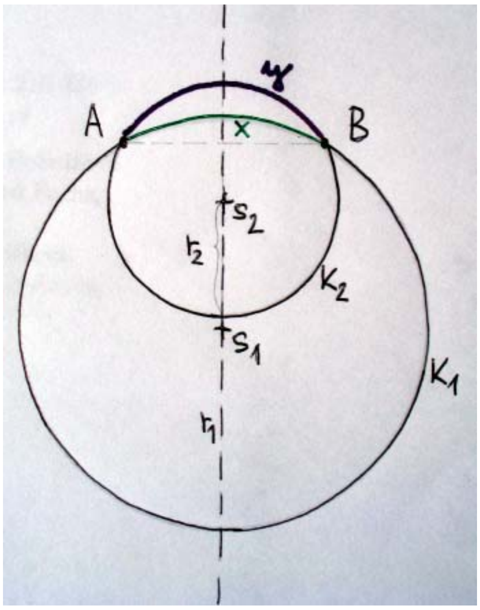
$r_1 > r_2$ - poloměr kružnice k_1 (hlavní kružnice) je větší než poloměr kružnice k_2

Máme tedy dány dvě kružnice, jejichž poloměry se nerovnají a které mají společné dva body:

Otázka: Jak mohu dokázat, že vzdálenost x je menší než vzdálenost y?
Provedeme řezy koulí rovinami obsahujícími kružnice a sklopíme do jedné roviny, kružnici k_2 pak ještě překlopíme (zobrazíme v osové souměrnosti s osou AB) :

- *Obrázek na tabuli:*





Z obrázku je patrné, že délka x části oblouku kružnice k_1 je kratší než délka y části oblouku kružnice k_2.

Můžeme vyvodit závěr: Máme dány dvě kružnice, jejichž poloměry se nerovnají a které mají společné dva body A, B. Pak část oblouku AB kružnice s menším poloměrem bude vždy větší než část oblouku AB kružnice s větším poloměrem. Vždy uvažujeme kratší části oblouku, které body A a B na kružnicích ohraničují.

Hlavní kružnice je kružnice s největším možným poloměrem, kterou můžeme na kulové ploše narýsovat, jelikož její poloměr se rovná poloměru kulové plochy. Jakákoli jiná než hlavní kružnice na povrchu koule tedy musí mít menší poloměr než kružnice hlavní. Proto je nejkratší spojnicí dvou bodů na kulové ploše kratší část oblouku hlavní kružnice, kterou těmito body proložíme.

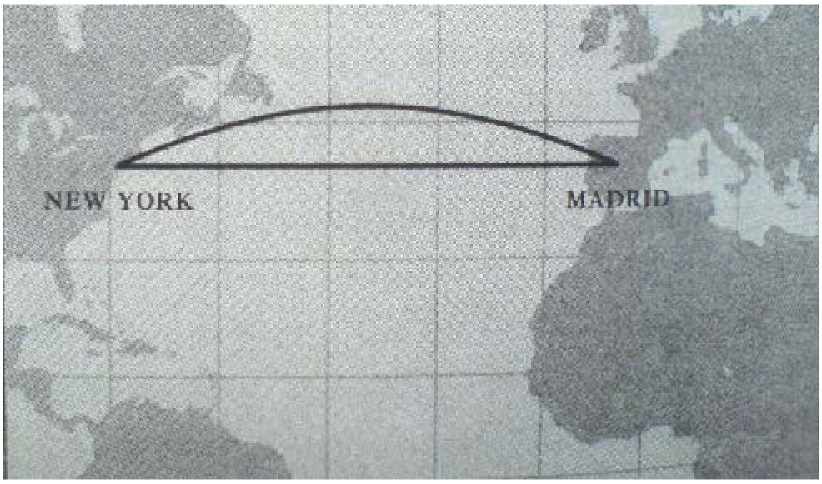
=> hlavní kružnice na povrchu koule reprezentuje přímku

5) ZAJÍMAVOSTI, ÚLOHY

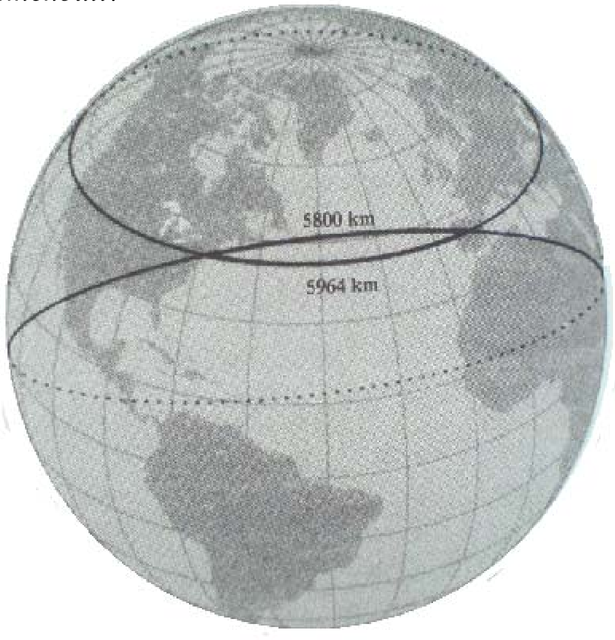
Najděte na mapě světa New York a Madrid a vyznačte mezi nimi nejkratší vzdálenost.
Najděte New York a Madrid na glóbu a opište nejkratší vzdálenost, na základě toho, co již víte.

Jak vypadá situace na mapě?:

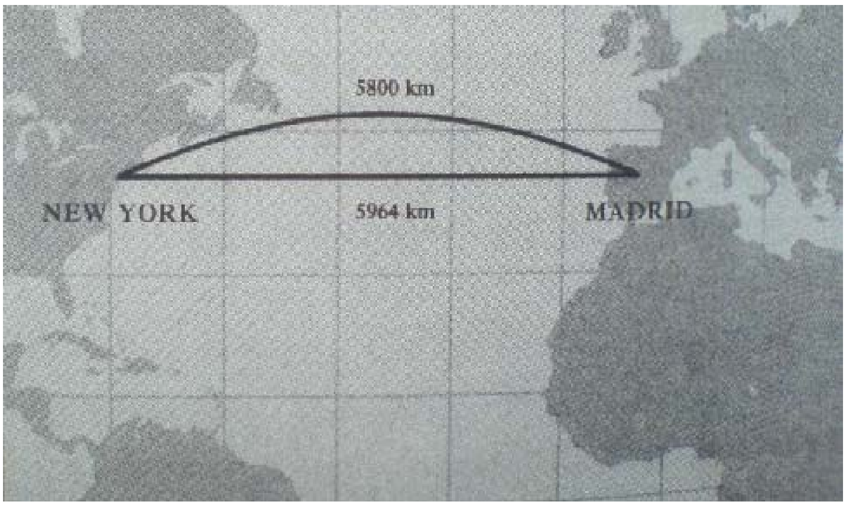
Která ze dvou cest z New Yorku do Madridu vyznačených na obrázku je ve kratší?



Takto bychom spojili dva body v atlasu světa, ale jak situace vypadá ve skutečnosti na zeměkouli?



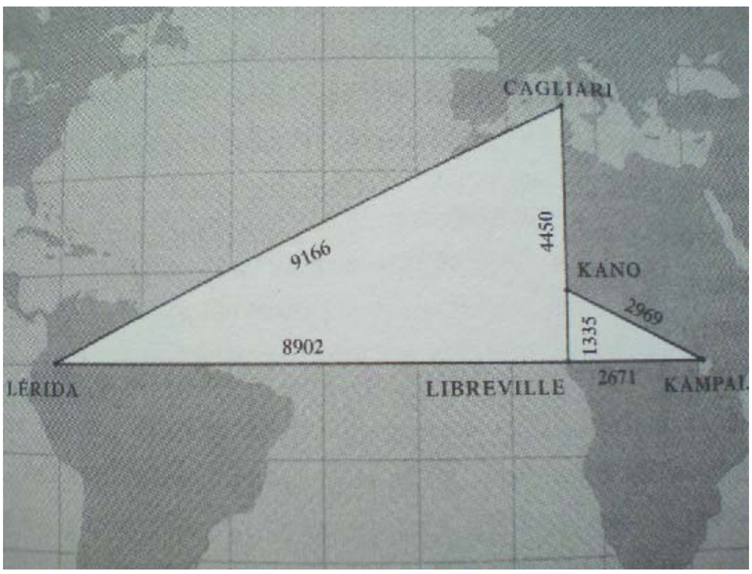
Ve skutečnosti křivkám opravdu odpovídají tyto vzdálenosti:



Pokud bychom se tedy chtěli plavit v co nejkratším čase z New Yorku do Madridu, musíme tedy plout nejdříve směrem na severovýchod, pak se pozvolna stočit víc na jih a nakonec na jihovýchod. Jedná se o stejnou křivku, po níž by se pohybovala nerušeně se kutálející bowlingová koule nebo po níž při migraci letí někteří chytří ptáci jako kulík hnědokřídlý nebo koliha aljašská, tedy o část oblouku hlavní kružnice, která prochází danými dvěma body – zde New Yorkem a Madridem. [14]

Jak to, že situace v na mapě vypadá jinak? – Mapa se snaží kouli rozvinout do roviny, ale my už víme, že to nejde, proto je skutečnost na mapě deformovaná a vzdálenosti zkreslené.

Řekli jsme si, že 5. postulát je ekvivalentní s Pythagorovou větou, podíváme se tedy, jak to na zeměkouli vypadá s pravoúhlými trojúhelníky:



Na mapě je vyznačeno město Libreville v Gabunu ležící na nultém poledníku a 09° východní délky: je součástí vrcholu pravoúhlého trojúhelníku. Když se přesunete o 12 stupňů na sever, přibližně so míst, kde se nachází Kano v Nigerii a o 24 stupňů na východ do Kampaly v Ugandě, vytvoříte odvěsny tohoto trojůhelníku. Jedním ze základních teorémů euklidovské geometrie je Pythagorova věta.

Kdybyste mezi těmito městy cestovali nejkratší možnou cestou, naměřili byste tyto vzdálenosti:

Kampala – Libreville:	*2671 km*
Libreville – Kano:	*1335 km*
Kano – Kampalla:	*2 969 km*

Část studenů ověří součet čtverců nad odvěsnami (8 910 446 km^2), část čtverec nad přeponou (8 814 961 km^2).

Nyní se podíváme na mnohem větší trojúhelník tvořený městy Libreville, italským Cagliari ležícím na 39° stupních severní šířky a Léridou v Kolumbii na 71° západní délky:

Vzdálenosti, které byste naměřili:

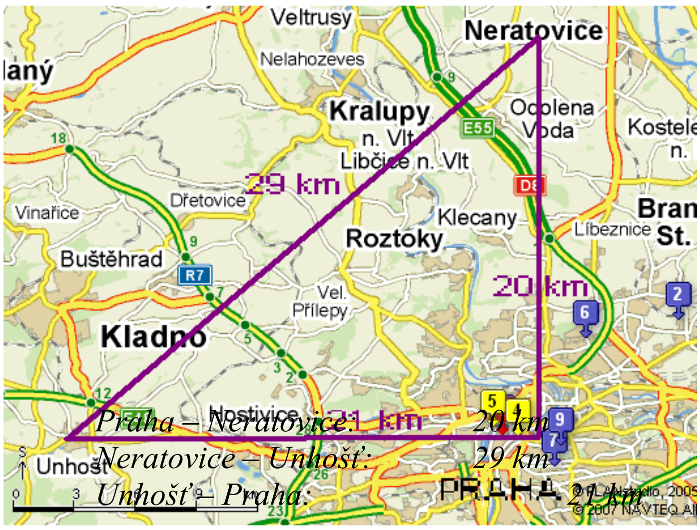
Libreville – Lérida	*8 902 km*
Lérida – Cagliari	*9 199 km*
Cagliari – Libreville	*4 450 km*

Nyní opět ověřte součet čtverců nad odvěsnami (99 048 104 km^2) a nad přeponou (84 015 556 km^2).

Odchylka je tentokrát tedy mnohem větší.

=> vidíme, že na povrchu zeměkoule, pohybujeme-li se v obrovských vzdálenostech, Pythagorova věta neplatí. Čím větší jsou vzdálenosti, tím větší je i odchylka od pravidel Pythagorovy věty.

Pokud však nebudete chtít cestovat po celém světě, spokojíte se pouze s okolím Prahy a uskutečníte z centra hlavního města výlet do Neratovic, z Neratovic se zajedete podívat do Unhoště a pak se vrátíte zpět do centra, naměříte tyto vzálenosti:



Praha – Neratovice:	*20 km*
Neratovice – Unhošť:	*29 km*
Unhošť – Praha:	*21 km*

Jak to vypadá nyní se součtem čtverců nad odvěsnami (841km^2) a nad přeponou (841km^2)?

Pro poměrně malé trojúhelníky tedy Pythagorova věta platí. Je to tím, že krátké vzdálenosti na zemském povrchu se zdají být v rovině. Čím je však trojúhelník na Zemi větší, tím větší je i odchylka.

Ze skutečnosti, že v pravoúhlém trojúhelníku na povrchu koule je součet čtverců nad odvěsnami menší než součet čtverců nad přeponou, vyplývá, že součet úhlů ve sférickém trojúhelníku je větší než 180°.

[14]

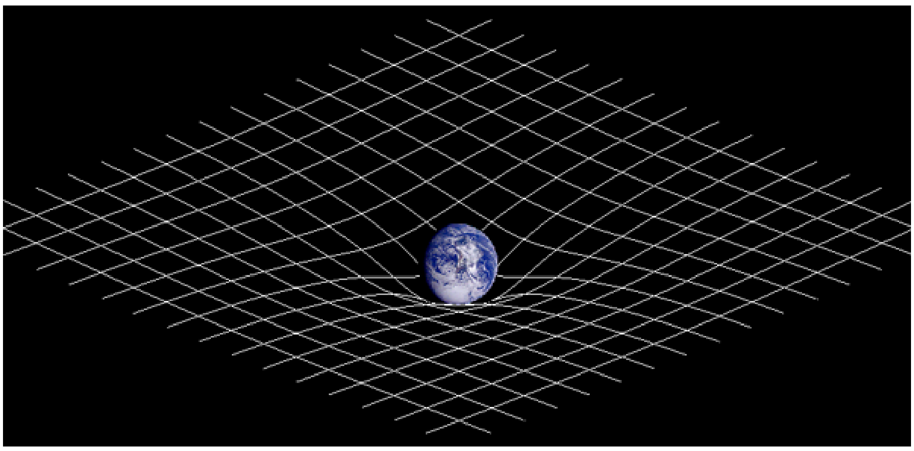
Na kouli můžeme dokonce narýsovat trojúhelník, jenž má tři pravé úhly – *obrázek: načrtneme na model rovník, a nultý a 90. poledník – vznikne tak trojúhelník se součtem vnitřních úhlů 270º.*

Ve sférické geometrii v důsledku jejích zákonitostí vznikají různé paradoxy:

Vezměte si obruč o poloměru 1m. Když tuto obruč roztočíte kolem pasu, nacházíte se uvnitř ní? Zdá se evidentní, že ano. Pokud tuto obruč položíte na zem a stoupnete si doprostřed, jste stále uvnitř, že? Když zvětšíte poloměr obruče na 2 kilometry, bude už opravdu velká, ale s porovnání s planetou je stále mnohem menší. Stále tedy můžete tvrdit, že se ocitáte uvnitř obruče. Co když ale zvětšíte její poloměr na 6400 km a ona tak teď obepíná planetu stejně jako rovník? Už začnete pochybovat, jestli jste stále ještě uvnitř, nebo vně, není to tak? Když budete poloměr obruče pomyslně dál zvětšovat, tedy oddalovat od sebe její obvod, obruč se začne ve skutečnosti smršťovat. Nakonec bude vypadat stejně jako na začátku, s poloměrem 1m, její střed se však bude nacházet daleko od vás. Jako byste stáli mimo ni. Jak se lze dostat zevnitř ven pouhým zvětšováním obruče? Pojmy „za“, „před“, „uvnitř“ a „vně“ zde ztrácejí na jednoduchosti. Takové rozpory jsou pro sférický prostor charakteristické. [14]

Kde můžeme poznatky z neeuklidovské geometrii využít? - V geografii, astronomii, fyzice, technických vědách, umění, designu, stavitelství a architektuře

Využil je i Einstein ve své teorii relativity – zjistil totiž, že i prostor kolem Země je vlivem hmotnosti planety zakřivený – *viz obrázek*:



=> důsledek: Kdyby Země byla menší (s obvodem rovníku např. pouhých 100 km), ale zachovala si svou hmotnost, při jasném dni bychom si viděli na záda

Upozorníme studenty, že:
- v řešení úloh z pracovního listu není možné opustit povrch koule – *studenti si mohou představit, že řešení zakreslují na průhlednou kouli, tu si pak postaví před sebe a kreslí do listu jako model.*
- je dobré řešení nejprve zakreslovat na kouli a pak teprve do pracovního listu