UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Fakulta pedagogická

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Čtyři náměty pro středoškolské semináře matematiky

Four Topics for Secondary Mathematics Seminars

Diplomová práce

Autor: Marie Nečasová

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.

Obor: Matematika – pedagogika

Praha 2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem jen ty zdroje informací, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury. Souhlasím s využitím poznatků obsažených v této práci za předpokladu řádné citace.

Zároveň bych ráda poděkovala všem, kteři mi pomáhali a podporovali mne, zejména pak doc. RNDr. Nadě Stehlíkové, Ph.D., vedoucí diplomové práce, která mi vždy ochotně pomohla a poradila.

V Praze dne 8. dubna 2009 Marie Nečasová

Název práce: Čtyři náměty pro středoškolské semináře matematiky
Autor: Marie Nečasová
Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.
Klíčová slova: matematický seminář, Hippokratovy měsíčky, tangram, zlatý řez, Kolumbovo vejce
Abstrakt:
Tato diplomová práce popisuje čtyři méně známá matematická témata, která mohou být součástí matematických seminářů na středních školách, popř. matematických táborů, a to Hippokratovy měsíčky, tangram, zlatý řez a Kolumbovo vejce. Každé téma je zpracováno do didaktického materiálu, který má sloužit jako zdroj informací pro učitele. Dvě z témat byla prakticky vyzkoušena se studenty střední školy, o čemž pojednává jedna z kapitol. Hlavním přínosem práce je příprava a popis pracovních listů, které obsahují sadu vyřešených a okomentovaných úloh. Práce také obsahuje výsledky dotazníku, pomocí něhož byla zjišťována náplň matematických seminářů na řadě středních škol v České republice.

Title: Four topics for secondary mathematics seminars
Author: Marie Nečasová
Department: Department of Mathematics and Mathematical Education
Supervisor: doc. RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.
Keywords: mathematical seminar, Hippocrates lunes, tangram, Golden section, Columbus egg
Abstract:
The diploma thesis describes four less known mathematical topics, which could be part of mathematical seminars at the secondary schools or mathematical camps, namely Hippocrates lunes, Golden section, tangram and Columbus egg. Each topic is elaborated into a didactic material, which should function as a source of information for teachers. Two of the topics were trialled with secondary school students, which is dealt with in one of the chapters. The main part of the thesis focuses on the preparation and description of worksheets, which consist of a set of solved and commented upon tasks. The thesis also contains the results of a questionnaire aimed at finding out the content of mathematical seminars at some secondary schools in the Czech Republic.

Obsah

1. Úvod

K napsání této diplomové práce mne inspiroval matematický seminář na gymnáziu, kde jsem absolvovala svou učitelskou praxi. Učitelka se zde okrajově věnovala historii matematiky a seznamovala studenty s novými tématy např. zlatým řezem, Hippokratovými měsíčky atd. Vzhledem k tomu, že já jsem se s nimi setkala až při studiu na vysoké škole, rozhodla jsem se ve své práci popsat některá méně běžná matematická témata. Vybraná témata by mohla být součástí náplně matematických seminářů na středních školách nebo by mohla být používána v rámci matematických táborů, matematických soustředění nebo kroužků. Některé pak mohou sloužit jen jako motivace žáků ke zkoumání v matematice.“Motivací se vytváří vnitřní citový vztah k předkládanému problému a touze po poznání. Navozuje u žáka potřebu vytvořit si jisté představy k pochopení a řešení problému.“ (Luhan, 1990, s. 95)

Během studia na základní, střední a vysoké škole se setkáváme s velkou řadou různých příkladů a úloh. Od nejjednodušších úprav výrazů, řešení rovnic, řešení slovních úloh, až po složitější výpočty a důkazy vět. Existuje však celá řada zajímavých úloh, se kterými se setkáme až při studiu na vysoké škole, nebo se s nimi nesetkáme vůbec. Je pochopitelné, že ne každý student střední školy[1] je matematicky založený, ale někteří by se matematice rádi věnovali více než jen v běžných hodinách.[2] K tomu slouží matematické semináře. Své znalosti si studenti mohou rozšiřovat i v rámci matematických kroužků, pokud je škola nabízí. Mohou se také účastnit matematických táborů. Právě v těchto seminářích a kroužcích by mohli být seznamováni s netradičními matematickými úlohami. Vždy záleží na samotném učiteli – jak moc je vynalézavý, jak se snaží probírat nové věci a jak moc se drží pouze úloh z učebnic a sbírek. Záleží i na tom, zda učitel dokáže reagovat na zpětnou vazbu od studentů a podle toho rozšiřovat probíranou látku a zařazovat nová témata nebo více opakovat a procvičovat.

Tato diplomová práce by mohla být inspirací pro učitele, čemu se mohou v seminářích věnovat, jak učinit matematiku zábavnější, a tak ji více přiblížit svým studentům. Podklady k danému tématu mohou učitelé nastudovat v materiálu pro učitele, který je součástí práce. Materiál obsahuje i popis pracovního listu, kde jsou jednotlivé úlohy okomentované a vyřešené. Sám učitel se může při studiu témat dozvědět řadu novinek a zajímavostí.

---

[1] V této práci budu pro žáka střední školy používat označení student.

[2] Studenti se zájmem o matematiku se samozřejmě mohou také účastnit různých matematických soutěží. O tom však ve své práci mluvit nebudu, protože se v nich nedá využít mnou zkoumaných témat.

Práce je rozdělena do osmi kapitol. Druhá kapitola se věnuje matematickým seminářům a matematickým táborům. Její součástí jsou i výsledky dotazníku, ve kterém jsem zjišťovala náplň matematických seminářů na středních školách v České republice. Třetí kapitola popisuje realizaci dvou mnou vytvořených pracovních listů v praxi. Získala jsem tak řadu cenných doporučení a poznatků, které jsem zařadila do konečné podoby pracovních listů a do jejich popisu jako komentář pro učitele. Další kapitoly se věnují vždy jednomu určitému matematickému tématu. Obsahují úvodní komentář, materiály vztahující se k danému tématu určené učitelům a popis pracovního listu. Samotný pracovní list je součástí přílohy. Práce je určena pro učitele středních škol a učitele/vedoucí na matematických táborech či soustředěních. Tématy zde uvedenými mohou obohatit své hodiny a rozšířit tak znalosti svých studentů a účastníků táborů.

Ve své práci se věnuji následujícím tématům: Hippokratovy půlměsíčky, Tangram, Zlatý řez a Kolumbovo vejce. Úlohy formulované v pracovních listech se snaží rozvíjet logické myšlení, prostorovou představivost a tvořivost studentů. Do značné míry jsou originální, protože jsem je sestavovala sama.

V závěru práce jsem shrnula, co je přínosem práce a jak budou její výsledky dále použity. Práce obsahuje dále devět příloh. První příloha obsahuje dotazník, kterým jsem zjišťovala náplň matematických seminářů na středních školách. Příloha č. 2 pak předkládá seznam škol, které na dotazník odpověděly. Přílohy č. 3, 4, 8 a 9 obsahují pracovní listy k jednotlivým matematickým tématům. V přílohách č. 5 a 6 jsou popsány ukázky využití tangramu v praxi. Příloha č. 7 obsahuje kopie studentských pracovních listů, které jsem realizovala v praxi.

2. Matematické semináře a tábory

Tato kapitola obsahuje tři části. První část se věnuje matematickým seminářům, které jsou často součástí středoškolské výuky na školách. Seminář si většinou vybírají studenti, kteří mají o matematiku zájem, chtějí se dozvědět něco více nebo chtějí skládat maturitní zkoušku z matematiky. Jsou zde uvedeny výsledky dotazníku, ve kterém jsem zjišťovala náplň matematických seminářů na středních školách.

Druhá část poskytuje informace o některých matematických táborech a soustředěních, na které mohou zájemci o matematiku (převážně středoškolští studenti) jezdit. Poslední část nabízí seznam některých zdrojů, ze kterých mohou učitelé čerpat úlohy do matematických seminářů, do písemných prací a také k maturitní zkoušce. Dalším zdrojem úloh by mohla být i tato diplomová práce, respektive materiály pro učitele, které jsou součástí dalších kapitol.

2.1 Dotazník zjišťující náplň matematických seminářů na středních školách

Vzhledem k zaměření mé diplomové práce jsem se rozhodla zjistit formou dotazníku, jaká je vlastně náplň matematických seminářů na středních školách. Zajímalo mne, jakým tématům se učitelé věnují a zda i těm, která rozebírám ve své diplomové práci. Vytvořila jsem dotazník, který se skládá z 10 otázek, a rozeslala ho prostřednictvím e-mailu na 216 středních škol v celé republice. Kontakty na školy jsem získala prostřednictvím internetového vyhledávače www.seznam.cz. Zde jsem zadala výraz střední školy a vybírala odkazy na školy. Převážně jsem čerpala z internetové stránky <http://www.stredniskolv.eu/> [cit. 2009-01-15]. Zpět jsem obdržela 72 odpovědí, jedná se tedy přibližně o 33 % návratnost rozeslaných dotazníků. Přehled škol, které odpověděly na zaslaný dotazník, je uveden v příloze č. 2.

Dotazník je rozdělen na dvě části. První část dotazníku zjišťuje, o jaký typ střední školy se jedná a zda na škole mají předmět matematický seminář. Druhá část je zaměřena na ty školy, které tento seminář vedou. Zde zjišťuji tři základní informace: 1. kterým ročníkům je seminář určen a kolik let seminář trvá, 2. jakým tématům se v rámci semináře učitelé věnují, 3. zda se věnují tématům, které rozebírám v diplomové práci. Dotazník je uveden v příloze č. 1.

2.1.1 Vyhodnocení dotazníků

V první otázce jsem zjišťovala typ školy. Výsledný vzorek tvoří 72 škol, z toho 78 % jsou všeobecná gymnázia, 11 % gymnázia se zaměřením (čili odborná gymnázia), 7 % integrované školy a 4 % tvoří církevní gymnázia.

Všeobecná gymnázia v současné době nabízejí různou délku studia, uvádím počty v procentech z celkového počtu škol, které mi odpověděly:

- 43 % nabízí 4letou a 8letou formu studia
- 9 % nabízí 4letou a 6letou formu studia
- 4 % nabízí 4letou, 6letou a 8letou formu studia
- 11 % nabízí pouze 4leté studium
- 11 % nabízí pouze 8leté studium

Mezi odbornými gymnázii byla tato:

- sportovní gymnázium se 4letou a 6letou formou studia
- gymnázium se 4letým studiem zaměřené na tělesnou výchovu a všeobecné gymnázium se 6letým studiem zaměřené na tělesnou výchovu
- gymnázium se 4letým studiem zaměřené na humanitní a přírodovědné předměty a programování
- gymnázium se 4letou a 8letou formou studia se zaměřením na matematiku a fyziku,
- gymnázium se 4letou a 8letou formou studia se zaměřením na živé jazyky a tělesnou výchovu
- gymnázium se 4letým studiem zaměřené na matematiku
- gymnázium se 4letým studiem zaměřené na živé jazyky a španělské bilingvní gymnázium šestileté
- gymnázium se 4letým studiem zaměřené na živé jazyky a šestileté bilingvní gymnázium s výukou vybraných předmětů ve francouzském jazyce.

Integrované školy jsou gymnázia spojená s nějakou střední školou, konkrétně v mém vzorku se jedná o školy (v dotaznících nebylo uvedeno, o jakou střední školu se jedná):

- střední škola a gymnázium se 4letým studiem
- střední odborná škola a gymnázium s 8letým studiem
- gymnázium a obchodní akademie

- střední odborná škola a gymnázium se 4letou a 8letou formou studia

Z církevních gymnázií to pak byla:

- církevní gymnázium se 4letou a 6letou formou studia
- církevní gymnázium se 4letým studiem zaměřené na humanitní předměty
- církevní gymnázium se 4letým studiem zaměřené na humanitní předměty a tělesnou výchovu.

Druhá otázka rozdělila oslovené školy na ty, které v rámci svých předmětů nabízejí svým studentům matematický seminář, a ty, které ho nenabízejí. Z došlých odpovědí nabízí 92 % škol svým studentům matematický seminář, zbylých 8 % škol (konkrétně 4 všeobecná gymnázia, 1 církevní gymnázium a 1 integrovaná škola) tento předmět pro své studenty nevypisuje.

Nyní se zaměřím na zpracování těch dotazníků, v nichž bylo uvedeno, že škola matematický seminář svým studentům poskytuje. V mém případě se jedná o 66 škol z různých částí České republiky.

Třetí otázka dotazníku zjišťuje, pro které ročníky je matematický seminář připravován. Vzhledem k tomu, že učitelé mohli uvádět více možností, dospěla jsem k následujícím závěrům:

- 68 % škol nabízí seminář pro 3. a 4. ročníky 4letého studia a věkově odpovídající ročníky víceletého studia[3]
- 17 % škol nabízí seminář pro 2., 3. a 4. ročníky 4letého studia a věkově odpovídající ročníky víceletého studia
- 12 % škol nabízí seminář pouze studentům 4. ročníků 4letého studia a věkově odpovídající ročníky víceletého studia
- 3 % škol nabízí seminář pouze studentům 3. ročníků 4letého studia a věkově odpovídající ročníky víceletého studia.

Na jednom všeobecném gymnáziu nabízejí matematický seminář svým studentům nepovinně již v 1. a 2. ročníku.

[3] Tím je myšleno 7. a 8. ročníky osmiletého studia nebo 5. a 6. ročníky šestiletého studia.

Čtvrtá otázka je zaměřená na délku semináře. Seminář může být jednoletý, dvouletý, některé školy nabízejí i tříletý matematický seminář. Zjistila jsem, že jednoletý seminář může být určen buď pouze pro studenty 3. ročníků, nebo pro studenty 4. ročníků. V některých případech je tento seminář přístupný studentům 3. i 4. ročníků. Vyskytuje se i možnost, že na škole jsou dva jednoleté semináře – jednoletý pro 3. ročníky a jednoletý pro 4. ročníky, nebo jednoletý pro 2. a 3. ročníky a jednoletý pro 4. ročníky. Dvouletý seminář je studentům určen ve 3. a 4. ročnících. Tříletý seminář je pro studenty ve 2., 3. a 4. ročnících. Řada škol má možnost jednoletého (4. ročníky) i dvouletého (3. a 4. ročníky) semináře. Celkové výsledky jsou tyto:

- 41 % škol nabízí jednoletý i dvouletý seminář
- 22 % škol nabízí pouze dvouletý seminář
- 15 % škol nabízí pouze jednoletý seminář
- 15 % škol nabízí dva jednoleté semináře
- 3 % škol nabízí pouze tříletý seminář
- 2 % škol nabízí dvouletý a tříletý seminář[4]
- 2 % škol nabízí jednoletý, dvouletý a tříletý seminář[5]

Poznámka: Je zajímavé, že ani jedno ze dvou gymnázií mého vzorku, která jsou zaměřena na matematiku, nenabízí svým studentům tříletý matematický seminář.

Otázky 5 – 7 se věnují náplni matematických seminářů. Konkrétně mne zajímalo, zda učitelé probírají témata k maturitě, zda probírají a procvičují témata, která běžně probírají v hodinách matematiky, a zda probírají nová témata a nějaké rozšiřující úlohy. Zjistila jsem, že 99 % učitelů se v rámci seminářů věnuje maturitním tématům, prohlubují probíranou látku a zároveň seznamují studenty s novými tématy. Zbývající procento škol se věnuje pouze některé z nabízených možností. Například neprocvičují maturitní témata, protože k tomu slouží předmět nazvaný Cvičení z matematiky, ale prohlubují probíranou látku a probírají nová témata. Jiné naopak maturitní témata procvičují, ale nevěnují se novým tématům.

Nejčastěji byly uváděny tyto maturitní okruhy: diferenciální a integrální počet, rovnice a nerovnice všech typů včetně rovnic a nerovnic s parametrem, komplexní čísla, analytická geometrie, planimetrie, stereometrie, goniometrie, funkce a pravděpodobnost.

[4] Tyto semináře nabízí škola: Gymnázium Václava Beneše Třebízského ve Slaném.
[5] Tyto semináře nabízí škola: Gymnázium Jaroslava Heyrovského, Praha 5.

Okrajově se objevují okruhy: důkazové metody, kombinatorika, statistika, trigonometrie, algebraické výrazy, výroková logika, posloupnosti, množinové pojmy a kuželosečky.

Znalosti jsou v semináři prohlubovány zejména v oblastech: komplexní čísla, rovnice a nerovnice všech typů včetně rovnic a nerovnic s parametrem, stereometrie, funkce, analytická geometrie, goniometrie, diferenciální a integrální počet a pravděpodobnost. Okrajově jsou znalosti procvičovány v oblastech: matice, determinanty, planimetrie, důkazy vět, kombinatorické úlohy s opakováním, slovní úlohy, výroková logika, analytická geometrie v prostoru, trigonometrie, statistika, shodná a podobná zobrazení, stejnolehlost a rovnice vyšších stupňů.

Z hlediska mé práce mne nejvíce zajímalo, jaká nová témata jsou v rámci seminářů probírána, proto se budu těmto odpovědím věnovat podrobněji. Učitelé ve svých odpovědích uváděli následující matematická témata:

- matice a determinanty
- diferenciální a integrální počet
- důkazové metody
- komplexní čísla
- řešení soustavy rovnic Gaussovou eliminační metodou a Cramerovým pravidlem
- homotetie (stejnolehlost)
- shodná zobrazení v prostoru
- nekonečná geometrická řada
- Apolloniovy úlohy[6]
- reciproké rovnice
- iracionální nerovnice
- řešení zábavných matematických problémů, hlavolamy
- zlatý řez
- Hippokratovy měsíčky
- algebraické rovnice vyšších stupňů
- kruhová inverze
- řešení konstrukčních úloh pomocí Cabri Geometry
- teorie grafů

[6] Apolloniovy úlohy: sestrojte kružnici, která se dotýká tří prvků – bod, přímka a kružnice a jejich libovolná kombinace.

- algebraické struktury – grupy
- finanční a pojistná matematika
- fyzikální úlohy s využitím derivací a integrálů
- kvadratické rovnice s komplexními koeficienty
- Hornerovo schéma[7]
- historie matematiky
- Cardanovy vzorce pro řešení kubických rovnic
- funkce cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické[8]
- složitější kombinatorické úlohy
- transformace souřadnicové soustavy
- analytická geometrie v prostoru a ve vyšších dimenzích
- rozklad na parciální zlomky
- goniometrické nerovnice
- výroková logika
- pravděpodobnost a statistika
- limity posloupností a funkcí
- teorie množin
- průběh funkce.

Překvapilo mne, jakým tématům se učitelé na některých středních školách věnují, protože s řadou z nich jsem se seznámila až na vysoké škole.[9] Zhruba polovina škol se nově věnuje maticím a determinantům. Třetina dotázaných škol probírá diferenciální a integrální počet. Zbylá uváděná témata se objevují v odpovědích učitelů méně.

Osmá otázka *Probíráte počítání s maticemi* je trochu specifická, protože se přímo nevztahuje k tématu mé práce. Položila jsem ji proto, že osobně pokládám toto téma za důležité, protože na vysokých školách se znalosti o maticích využívají. V rámci učiva středních škol pomáhají ke zjednodušení řešení soustav rovnic, proto si myslím, že je to jedno z témat, kterým by se semináře nebo běžné hodiny matematiky měly věnovat. Na tuto otázku mi 88 % učitelů odpovědělo, že matice probírají v rámci semináře nebo i běžně

[7] Hornerovo schéma je název algoritmu pro efektivní vyhodnocování polynomů.
[8] Cyklometrické funkce: např. arkus sinus (arcsin x), arkus tangens (arctg x), atd.
Hyperbolické funkce: např. hyperbolický sinus (sinh x), hyperbolický kosinus (cosh x), atd.
Hyperbolometrické funkce: např. hyperbolický arkus sinus (arcsinh x), hyperbolický arkus kosinus (arccosh x), atd.
[9] Na gymnáziu v Ledči nad Sázavou, které jsem navštěvovala, jsme měli dvouletý matematický seminář. Opakovali jsme se k maturitě a probírali i nová témata, například derivace, intergrály, průběh funkce atd.

v hodinách matematiky, záleží na úrovni vědomostí a schopností studentů. Pouze 12 % učitelů se maticemi nezabývá. Jeden z učitelů uvedl, že počítání s maticemi je součástí předmětu výpočetní technika.

Otázky 9 a 10 se vztahují k tématům, které rozebírám v diplomové práci. Jednalo se o otázky: *Zabýváte se úlohami s Hippokratovými půlměsíčky?* a *Zabýváte se zlatým řezem?* Výsledky těchto otázek byly zajímavé. Hippokratovými půlměsíčky se zabývá zhruba 26 % učitelů a zlatému řezu se věnuje přibližně 36 % dotázaných učitelů. Objevily se také odpovědi, že dotazovaní neznají Hippokratovy půlměsíčky – jedná se o 3 % učitelů. Někteří učitelé konstatovali, že v seminářích je málo času na probírání takových témat. Jsou prý rádi, že stihnou zopakovat okruhy k maturitě ve 4. ročníku. Jiní učitelé probírají tato témata nebo okrajově se o nich zmíní v běžných hodinách matematiky. Na některých školách studenti sami vypracovávají seminární práce na tato témata a poté je prezentují svým spolužákům.

2.2 Matematické tábory a matematická soustředění

V úvodu jsem uvedla, že matematické tábory a soustředění představují jednu z možností pro studenty, kteří se více zajímají o matematiku. Matematické tábory a matematická soustředění jsou pořádány pro žáky druhého stupně základních škol a studenty středních škol. Organizátory jsou centra volného času, gymnázia, ale také vysoké školy. Určité typy soustředění jsou určeny pro úspěšné řešitele korespondenčních matematických seminářů.[10]

Níže budou popsány některé matematické tábory a soustředění v České republice. Informace o nich jsem získala převážně na internetových stránkách nebo z e-mailů od pořadatelů táborů.

Letní matematický tábor

Matematický tábor je pro žáky a studenty se zájmem o matematiku.

Věkové určení: žáci od 11 do 15 let.

[10] Korespondenční seminář je matematická soutěž. Princip semináře spočívá v tom, že organizační tým připravuje v několika sériích sadu matematických úloh a problémů. Ty pak rozesílá poštou účastníkům semináře. Řešitelé mají určitou dobu na to, aby se s úlohami vypořádali, své bádání sepsali a zaslali zpět organizátorům. Ti je pečlivě opraví, přidají poučné poznámky, vytvoří vzorová řešení a vše zase pošlou zpět řešiteli společně s další sadou úloh. Tak to jde stále dokola, až proběhne celý ročník a nakonec jsou vyhlášeny výsledky. (Zhouf, 2001)

Organizátor: Centrum volného času Lidická, Brno.[11]

Spádová oblast: Brno a okolí.

První tábor se konal v roce 1995. Každoročně se ho účastní přibližně 20 – 30 dětí. Z matematiky se dělá „všechno možné" – přednášky, matematické hry, testy, kvizy, rébusy, hlavolamy. Jsou volena témata především z algebry a geometrie (samozřejmě přizpůsobené věku dětí).

Matematické soustředění od KoKoSu

Soustředění je učeno pro úspěšné řešitele matematického korespondenčního semináře KoKoS = Koperníkův Korespondenční Seminář.[12]

Věkové určení: žáci 6. – 9. tříd ZŠ a příslušných ročníků víceletých gymnázií.

Organizátor: Gymnázium Mikuláše Koperníka v Bílovci.

KoKoS pořádá soustředění dvakrát do roka – podzimní a jarní týdenní matematické soustředění. Účastní se jej každoročně přibližně 20 – 25 účastníků z 6. až 9. třídy základní školy.

Na každém soustředění se objevují matematické přednášky zaměřené na řešení rovnic – především lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou. Dále kombinatorika a potom drobné nahlédnutí třeba do komplexních čísel, jednoduché derivace – o tom jen zmínka, že něco takového existuje. Na programu soustředění nejsou pouze matematické přednášky, ale i chemické pokusy nebo fyzikální přednášky. Vždy probíhají dvě přednášky najednou, takže si účastník může vybrat tu, která se mu zdá zajímavější. Každé soustředění je jiné než to předchozí. Přednášky probíhají dopoledne ve dvou blocích po 90 minutách a odpoledne se hrají hry a je připraven další program.

Matematicko-fyzikální kurz[13]

Soustředění je určeno pro zájemce o matematiku a fyziku.

Věkové určení: studenti středních škol, převážně ze čtvrtých ročníků, výjimečně i žáci z 9. tříd ZŠ.

Organizátor: Kabinet matematiky a fyziky, Gymnázium Omská, Praha – Vršovice.

Náplní tohoto soustředění jsou především matematické úlohy zaměřené na logiku. Nedílnou součástí je řada matematických her, například matematické pexeso, matematický

---

[11] Zdroj <http://www.luzanky.cz/novyweb/akce/kalendarakci/letak.php?id=25472> [cit. 2009-01-20].

[12] Zdroj <http://kokos.gmk.cz/> [cit. 2009-01-20].

[13] Informace jsem získala od studentky Pedagogické fakulty UK, která se několikrát účastnila tohoto soustředění a v roce 2009 je jedním z organizátorů.

scrabble, Matematico, Unmatematico atd. Účastníci převážně pracují v týmech, samotné rozdělení do týmů probíhá za pomoci matematických hádanek. Počet účastníků se pohybuje v rozmezí mezi 20 – 30 studenty.

Letní soustředění pro mladé fyziky a matematiky[14]

(dříve název Letní matematicko-fyzikální tábor pro středoškoláky)

Soustředění je pro žáky a studenty se zájmem o matematiku a fyziku.

Věkové určení: od 14 do 19 let.

Organizátor: Katedra didaktiky fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze. Vedoucí soustředění jsou studenti a zaměstnanci MFF, ale i zkušení učitelé ze škol.

První letní matematicko-fyzikální tábor se konal v roce 1987. Soustředění trvá dva týdny, koná se vždy mimo Prahu či velká města. Počet účastníků se pohybuje v rozmezí 25 – 35 účastníků. K ubytování jsou využívány objekty škol v přírodě.

Program soustředění je rozdělen na dvě části: odborný a společenský. K hlavním částem odborného programu patří kurzy matematiky a fyziky a přednášky lektorů – předních odborníků MFF UK, AV ČR a odjinud. Kurz matematiky probíhá ve třech variantách, které se liší jak svojí úrovní, tak svým zaměřením. Nejedná se o výklad dané problematiky, ale spíše o řešení problémů, zajímavostí apod. Z matematických témat jsou to například derivace, integrály, diferenciální rovnice, funkce, analytická geometrie, šifrování atd. Těžiště odborného programu spočívá v projektech. Účastníci během tábora zpracovávají vybrané téma z připravené nabídky a pracují při tom ve skupinách po dvou až třech. Projekt může být matematický nebo fyzikální. V rámci projektu se studenti učí sami si organizovat svou práci, spolupracovat s kolegy na společném úkolu. Procvičí si své prezentační schopnosti při prezentaci projektu na závěrečné konferenci na konci tábora. Kurzy matematiky a fyziky jsou prolínány přednáškami lektorů a hrami a aktivitami.

Všechny účastníky čeká na začátku tábora vstupní matematický test, aby organizátoři zjistili, jaké jsou jejich matematické znalosti. Tomu pak mohou přizpůsobit program a poradit dětem, jakou úroveň kurzu matematiky si vybrat. Vždy však záleží na rozhodnutí daného jedince, kam půjde.

Společenský program vychází z principů osobnostně-sociální výchovy a výchovy prožitkem. Jednotlivé hry a aktivity slouží k odreagování. Také se snaží rozvíjet

[14] Zdroj <http://kdf.mff.cuni.cz/tabor> [cit. 2009-01-20].

dovednosti účastníků v různých oblastech – rozvoj schopností spolupracovat, komunikovat, sebehodnotit se atd.

Matematický tábor Pikomat

Tábor je převážně pro úspěšné řešitele korespondenčního semináře Pikomat MFF UK.[15]

Věkové určení: 6. – 9. ročník ZŠ a odpovídající třídy víceletých gymnázií.

Organizátor: studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a příznivci Pikomatu MFF UK.

První tábor se konal v roce 1994. Každoročně se jej účastní 20 – 35 účastníků. Délka tábora je 14 dní. Náplní tábora jsou nejen přednášky z matematiky a i jiných věd, ale pořádají se také různé hry v přírodě. Konají se výlety na zajímavá místa v okolí tábora. Přednášky probíhají dopoledne většinou ve dvou blocích. Z her a akcí jsou to například matematické pexeso, neklasické piškvorky, kvarteto, matboj, kufr, matematický orientační boj a řada dalších. Nabídka témat přednášek je velice různorodá. Většinou skladba přednášek odpovídá i zájmu účastníků – vybírají si z připraveného seznamu.

Uvádím přehled některých témat přednášek na táboře: Historie matematiky, Diofantické a reciproké rovnice, Pappovy úlohy, Derivace, Feuerbachova kružnice, Důkazy, Apolloniovy úlohy, Kruhová inverze, Matematická indukce, Matice, Teoretické řešení střech, Řezy na tělesech, Sférická geometrie, Euklidovské a neeuklidovské konstrukce, Kuželosečky, Platónská tělesa, Zlatý řez, Teorie grafů, Hlavolamy apod.

2.3 Zdroje zajímavých matematických úloh

Cílem mé práce je připravit materiál pro učitele. Hledala jsem tedy zdroje, ze kterých mohou dnes učitelé čerpat zajímavá témata a úlohy do hodin. Uvádím seznam literatury a odkazy na některé internetové stránky.

CALDA, E. *Sbírka řešených úloh: středoškolská matematika pod mikroskopem.* Praha: Prometheus, 2006.

DOBROVOLNÝ, B. *Nové matematické rekreace.* Praha: Práce, 1967. – obsahuje úlohy ze všech oborů matematiky, elementární, ale i velmi složité, jsou zde uváděny cesty k řešení úloh, úlohy mají rozvíjet tvořivé myšlení.

---

[15] Zdroj <http://pikomat.mff.cuni.cz/tabor/> [cit. 2009-01-20].

FRÝZEK, M.; MULLEROVÁ, J. *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy.* Praha: Fortuna, 1992. – obsahuje zajímavé úlohy s tělesy, složitější úlohy na odvozování vztahů.

HERMAN, J.; KUČERA, R.; ŠIMŠA, J. *Metody řešení matematickýh úloh II.* Brno: PřF MU, 2004. – obsahuje složitější kombinatorické úlohy včetně jejich řešení.

KONEČNÝ, M. a kol. *Zajímavé aplikace matematiky.* Brušperk: Nadace Svatoplukovy společnosti Brušperk, 1995. – obsahuje méně známá témata, například magické čtverce, Dirichletův princip, iterace a jejich aplikace, fuzzy logika a její aplikace, algebraické rovnice vyšších řádů atd.

KUŘINA, F. *10 pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR a ALBRA, 1996. – obsahuje několik pohledů na elementární geometrii, řešené úlohy rozvíjející představivost; na konci každé kapitoly jsou poznatky, které přesahují rámec SŠ a vytvářejí tak relativně ucelený pohled na základní geometrické souvislosti.

LARGE, T. *Barevná matematika.* (přeložil z angličtiny L Mikulka) Praha: Albatros, 2005. – kniha obsahuje řadu témat, která lze využít v semináři, například kubické funkce, Hippokratovy měsíčky, zlatý řez, Fibonacciho posloupnost, kvadratura kruhu, Fermatova a Pythagorejská čísla, matematická logika.

MANDELLOVÁ, M. *Logické hádanky a jak je řešit.* Praha: Portál, 2000. – obsahuje úlohy na matematickou logiku.

OPAVA, Z. *Matematika kolem nás.* Praha: Albatros, 1989. – obsahuje nesčetné množství zajímavostí z matematiky, například zlatý řez, Hippokratovy měsíčky, kruhová inverze atd.

PETÁKOVÁ, J. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 1998.

POLÁK, J. *Středoškolská matematika v úlohách, 1. díl.* Praha: Prometheus, 1996.

POLÁK, J. *Středoškolská matematika v úlohách, 2. díl.* Praha: Prometheus, 1999.

SHASHA, D.E. *Kybernetické hlavolamy dr. Ecca.* (přeložil V. Malát) Praha: Mladá fronta, 2005. – obsahuje 36 matematických hádanek, na kterých si studenti procvičí logické myšlení a představivost.

SEDLÁČEK, J. *Nebojte se matematiky.* Praha: SNTL, 1960. – obsahuje matematické hlavolamy a paradoxy, úlohy z teorie grafů, úlohy o mnohoúhelnících.

ŠVRČEK, J. *Sbírka netradičních matematických úloh.* Praha: Prometheus, 2004. – sbírka z algebry, geometrie, kombinatoriky a teorie čísel, u každé úlohy je její řešení.

Řešené příklady z matematiky pro základní školy a osmiletá gymnázia. (Přeložila ze slovenského originálu J. Robová). Praha: ASPI, 2008, 2. rozšířené vydání. – obsahuje úlohy, které vycházejí z reálných situací, úlohy vyžadují prostorovou představivost.

Časopisy řady *Mozkolam* – obsahují informace o matematicích, matematické zajímavosti, hlavolamy, rébusy.

URL: <http://kam.mff.cuni.cz/~sbirka/> [cit. 2009-03-24] – sbírka úloh z matematiky, úlohy na matematickou indukci, kombinační čísla, matice, soustavy rovnic atd.

URL: <http://www.gynome.nmnm.cz/index.php?ln=cz&id=308&cat=a> [cit. 2009-03-24] – sbírka maturitních matematických úloh

3. Praktická realizace dvou témat v praxi

Jak jsem uvedla již v první kapitole, mezi mnou vybranými tématy bylo téma Hippokratovy měsíčky a tangram. Obě témata jsem nejprve zpracovala, tedy vybrala jsem zdroje, na jejichž základě jsem vytvořila základní popis tématu a připravila pracovní listy pro studenty a jejich komentáře pro učitele. Oba pracovní listy jsem pak vyzkoušela nejdříve v pracovní dílně s učiteli středních škol a posléze i se studenty střední školy. Na základě takto získané zpětné vazby jsem následně upravila původní verze pracovních listů a komentáře pro učitele. Do své práce jsem pak zahrnula již opravené verze (viz kapitola 4 a 5), a proto uvádím popis obou zmiňovaných témat až po této kapitole týkající se jejich praktické realizace.

3.1 Pracovní dílna s učiteli

Zpětnou vazbu pro dva z mnou připravených pracovních listů (konkrétně pro téma Hippokratovy měsíčky a tangram) jsem získala v době konference *Dva dny s didaktikou matematiky 2009*, kde jsem spolu s vedoucí práce vedla pracovní dílnu pro učitele střední školy. Dílny se zúčastnilo asi 20 učitelů středních škol (někteří z nich patřili k těm, kteří vyplňovali můj dotazník uvedený v odstavci 2.1). Potvrdilo se mi, že o netradiční témata pro matematické semináře mají zájem a že zejména pracovní listy doplněné komentářem o tématu jsou pro ně vhodné. V průběhu dílny učitelé řešili mnou zadané úlohy a poskytli mi řadu cenných doporučení, která jsem do výsledných pracovních listů zapracovala. Doporučení se týkala zejména formulace úloh, aby byly pro studenty srozumitelné. Některé z poznámek, které učitelé k pracovním listům a jejich zamýšlenému použití měli, jsem následně využila v komentářích pro učitele u jednotlivých úloh.

3.2 Praktická realizace se studenty střední školy

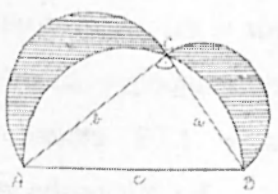
Oba pracovní listy jsem vyzkoušela i přímo se studenty. Navštívila jsem Gymnázium Dr. J. Pekaře v Mladé Boleslavi, ulice Palackého. Realizace proběhla ve dvou vyučovacích hodinách v předmětu *Matematický seminář pro 4. ročníky*. Tento seminář je dvouletý, každý týden dvě hodiny. V semináři paní učitelka opakuje k maturitě, ale snaží se i probírat nová témata (například reciproké rovnice, komplexní čísla, derivace, integrály). Studenti se také v semináři seznamují s programem Cabri Geometry, k němuž má škola zakoupenou licenci. Na zobrazení funkcí používají program Matmat, který je zdarma ke stažení na stránkách <http://www.slunecnice.cz/sw/matmat/> [cit. 2009-03-01]. Formu výuky učitelka střídá – jde o skupinovou práci, samostatnou práci, případně frontální způsob práce, kdy jeden student počítá na tabuli a ostatní do sešitu. Každý druhý seminář píší písemnou práci. Studenti si seminář vybírali hlavně z toho důvodu, že všichni, až na jednoho, chtějí maturovat z matematiky a hlásí se na školy, kde bude matematika potřeba. Lze tedy předpokládat, že mají o matematiku hlubší zájem.

Pracovala jsem se skupinou 16 studentů. Byla přítomna také paní učitelka, která daný předmět vyučuje.[16] Původně jsem chtěla hodiny natáčet na videokameru, ale nepodařilo se mi od školy získat souhlas. Proto jsem požádala přítomnou učitelku, aby si dělala podrobné poznámky, které bych pak mohla využít pro analýzu.

Můj plán experimentu byl takový, že rozdám studentům pracovní listy a společně uděláme první úlohu. Studenti již mají všechny potřebné znalosti k řešení úloh (vzorec pro obsah lichoběžníka, trojúhelníka, půlkruhu, kruhové úseče, čtverce, rovnoběžníka a Pythagorovu větu), proto není třeba dělat žádné úvodní opakování matematických poznatků. U dalších úloh již budou pracovat samostatně nebo ve dvojicích (dám jim na výběr). Já budu přitom nápomocna radami. Pokusím se ale příliš jim neprozradit. Pokud to budu stíhat, udělám si zápis o tom, jak práce probíhala. Své terénní zápisky pak dám dohromady s poznámkami od paní učitelky a celý proces rozeberu. Od studentů si následně okopíruji pracovní listy.[17]

První hodina

První hodina začala v 7:55 ve čtvrtek 26.2.2009. Nejprve jsem studentům rozdala **první pracovní listy – Hippokratovy půlměsíčky** (viz příloha č. 3).[18] Mezitím jsem jim říkala, co to jsou Hippokratovy měsíčky, kdo je vytvořil a jak budeme pracovat s pracovním listem.



Obr. P3.1

Společně jsme se podívali na <u>první úlohu</u>: *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Dokažte, že součet obsahů půlměsíčků sestrojených nad odvěsnami tohoto pravoúhlého trojúhelníka ABC (vyšrafovaná oblast na obrázku P3.1) se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka ABC. Tyto půlměsíčky se nazývají*

[16] Na první hodině se byla ještě podívat jiná paní učitelka, kterou problematika zajímala. Ta mne požádala, abych jí dala jeden pracovní list – Hippokratovy měsíčky, že ho využije ve své třídě. Má tam jednoho studenta, kterého nic moc nebaví nebo má už všechno vyřešené, takže by to pro něj mohlo být zajímavé.
[17] Z okopírovaných řešení jsem vycházela při své analýze a čerpám z nich ukázky uvedené níže.
[18] Pracovní listy jsou uvedeny tučně pro lepší orientaci v textu.

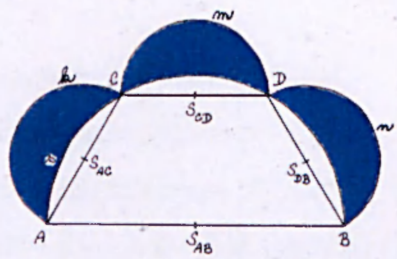
Hippokratovy půlměsíčky, někdy se setkáváme i s označením Hippokratovy měsíčky nebo menisky.

Zeptala jsem se studentů na návrhy řešení. Milan po chvíli přemýšlení řekl: „Spočítáme obsahy půlkružnic nad odvěsnami a sečteme, potom spočítáme obsah nad přeponou a od toho odečteme obsah trojúhelníka, a nakonec od sebe odečteme předchozí výpočty." Myšlenka postupu byla správná, ale zdálo se mi, že většina studentů ji nepochopila. Začala jsem tedy s nimi dělat důkaz na tabuli. Od studentů jsem zjistila vzorec na výpočet obsahu půlkruhu. Studenti si pamatovali vzorec pro obsah kruhu. Řekli, že když budeme potřebovat půlkruh, tak ten vzorec vynásobíme jednou polovinou. Psala jsem výpočty na tabuli a vždy se ptala, co bude následovat. V závěru důkazu jsem nakreslila na tabuli obrázek a barevně označila, jaké části jsme průběžně počítali. Studenti si zapisovali výpočty do pracovních listů, všichni spolupracovali. Někteří již měli úlohu vyřešenou, tak se dívali a kreslili si barevné obrázky, které jsem měla na tabuli. Nalezené řešení odpovídalo vzorovému řešení uvedenému v odstavci 4.1.2.

Po hodině mě paní učitelka upozornila, že by bylo vhodné kreslit obrázky hned od začátku důkazu na tabuli. Sice měli studenti před sebou obrázek v pracovním listu, ale někteří z nich kroky důkazu hned nechápali a pochopili je, až když jsem nakreslila obrázek. Dotazy k první úloze žádné nebyly, zdálo se, že studenti nakonec důkazu porozuměli.

V 8:15 jsme přešli ke <u>druhé úloze</u>: *Sestrojte Hippokratovy půlměsíčky nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka ABC. Délky odvěsen trojúhelníka jsou* $|AC| = 8$ *cm,* $|BC| = 6$ *cm. Vypočítejte součet obsahů těchto půlměsíčků.* Tentokrát už studenti pracovali samostatně. Mohli spolupracovat ve dvojicích. Jen jsem se zeptala, jaká bude velikost třetí strany trojúhelníka *ABC*. Milan opět rychle reagoval – že to bude 10 cm. Zeptala jsem se proč. Jiná studentka odpověděla, že to plyne z Pythagorovy věty. Procházela jsem třídou a pozorovala, jak si studenti počínají. Tato úloha nedělala problémy, pouze jedna studentka špatně vypočítala obsah půlměsíčků. Ukázka jejího řešení je uvedena v příloze č. 7 na obrázku P7.1. Ostatní řešení studentů odpovídala vzorovému řešení uvedenému v odstavci 4.1.4.

Následovala <u>třetí úloha</u>: *Nechť lichoběžník ABCD tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka o straně 6 cm. Nad jeho stranami sestrojíme půlkružnice. Vypočítejte obsah vybarvených Hippokratových měsíčků na obrázku P3.2.*



Obr. P3.2

U této úlohy již problémy nastaly. Studenti pracovali někdy samostatně, ale většinou spolupracovali spontánně ve dvojicích. Všichni nejprve začali počítat obsah lichoběžníka *ABCD*. Někdo hledal vzorec pro výpočet obsahu v tabulkách, jiní přemýšleli, jak obsah spočítat. Někteří si řekli, že když ten lichoběžník je polovina pravidelného šestiúhelníka, tak bude složen ze tří stejných rovnostranných trojúhelníků, takže jim stačí zjistit obsah trojúhelníka a vynásobit třemi. U 4 až 6 studentů jsem narazila na chybné výpočty výšky lichoběžníka: 36 – 9 = 25. Přičítáme-li nebo odečítáme-li číslo devět, tak se druhé číslo na konci liší o číslo jedna – při sčítání se poslední číslice zmenšuje o číslo jedna, při odčítání se o číslo jedna zvětšuje. Domnívám se tedy, že chyba byla v tom, že si špatně uvědomili, zda číslo jedna k číslu šest přidat nebo odebrat, případně tomuto jednoduchému výpočtu nevěnovali pozornost, protože měli na mysli spíše celkovou úlohu.

Obcházela jsem po třídě a zjišťovala, jakou kdo volí strategii pro výpočet obsahu lichoběžníka. Přitom jsem odpovídala na dotazy, například: *Jak mám vypočítat výšku lichoběžníka? Počítám to správně?* Někteří studenti si s obsahem vůbec nevěděli rady, protože neměli s sebou matematické tabulky. V 8:30 jsem všem napsala na tabuli vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníka. Zeptala jsem se, jak se ještě jinak nechá spočítat obsah zadaného lichoběžníka. Milan odpověděl, že obsah můžeme najít jako součet obsahů tří shodných rovnostranných trojúhelníků. Někteří studenti se „chytli za hlavu" a říkali, *no jo vlastně, to je pravda, to mne nenapadlo.*

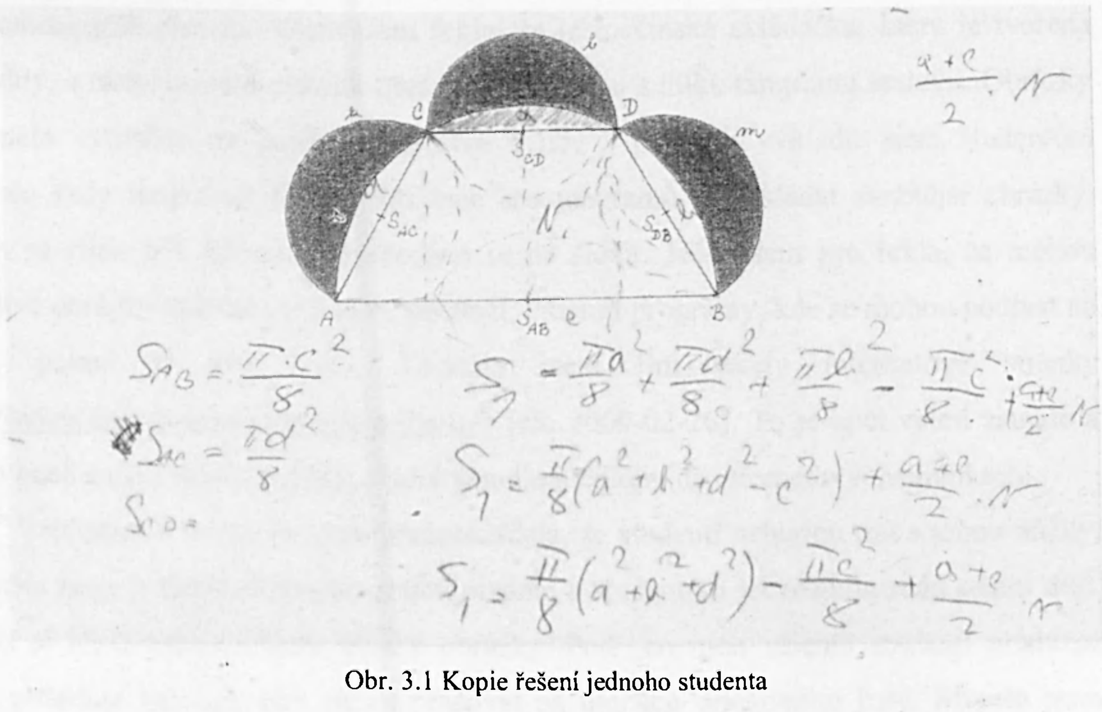
Čtvrtina studentů si pořádně nepřečetla zadání a počítala obecně s proměnnou *a*. Upozornila jsem je, že už mají v zadání konkrétní hodnotu – velikost strany pravidelného šestiúhelníka. Konec první hodiny byl v 8:40.

Druhá hodina

Po přestávce v 8:50 studenti pokračovali v počítání obsahu lichoběžníka ze třetí úlohy. Nyní se to všem už podařilo. Na základě jejich diktátu jsem napsala hodnotu obsahu na tabuli. Narazila jsem ještě na jeden problém: polovina studentů používala kalkulačky a výsledek měla jako desetinné číslo (výpočty v desetinných číslech jsou uvedeny na obrázku P7.1 v příloze č. 7). Řekla jsem jim, že je vhodnější pracovat s odmocninami a číslem π, protože potom snadněji vyřeší poslední úlohu.

Studentka Soňa po výpočtu obsahu lichoběžníka řekla, že už má úlohu vyřešenou, protože určitě bude platit, že obsah lichoběžníka bude stejný jako součet obsahů měsíčků. Ptala jsem se jí, z čeho tak soudí. Studentka odpověděla: „V první úloze platilo, že obsah měsíčků je stejný jako obsah trojúhelníka, tak tady by to mohlo taky platit." Tak jsem ji požádala, aby to opravdu dokázala a vypočítala součet obsahů daných měsíčků. Je vidět, že někteří studenti mají určitá očekávání o tom, jaké úlohy budou dostávat. Zde to vypadalo, že studentka očekává, že úlohy jsou stejného typu a v podstatě procvičují stejnou věc. Se stejným jevem se setkáváme i běžně ve školách, kdy žáci v době, kdy se např. probírá přímá úměrnost, očekávají, že všechny slovní úlohy budou na přímou úměrnost. I chyba zmíněná v dalším odstavci je podobného typu.

Zarazila mne další věc, a to při výpočtu obsahu půlkruhu. Minimálně u šesti studentů jsem se setkala se vzorcem $S = \frac{\pi \cdot a^2}{8}$. Jeden takový příklad je uveden na obrázku 3.1. Ptala jsem se, kde vzali tento vzorec, proč tam mají ve jmenovateli číslo 8. Studenti konstatovali, že se to objevilo v první úloze, tak to prostě opsali. V 8:58 jsem tedy všem vysvětlila,[19] v čem dělají chybu, že musejí vycházet ze vzorce pro výpočet obsah půlkruhu, a tam se vyskytuje polovina. V první úloze jsme přece za poloměr půlkruhu nejdříve dosadili polovinu délky strany trojúhelníka a až po úpravách jsme se dostali k osminám. Takže nemůžeme vzít vzorec s osminou a přímo do něj dosadit poloměr, ale musíme dosazovat za poloměr zadanou hodnotu přímo do vzorce obsahu půlkruhu. Další řešení už nedělalo žádné výrazné problémy. Postupně všichni dospěli ke správnému výpočtu součtu obsahů měsíčků, který odpovídá vzorovému řešení uvedenému v odstavci 4.1.4.



Obr. 3.1 Kopie řešení jednoho studenta

[19] V danou chvíli jsem si neuvědomila, že by tento problém mohl vysvětlit některý student, který počítal správně.

Nakonec jsme řešili čtvrtou úlohu v pracovním listu: *O kolik se liší součet obsahů měsíčků a obsah lichoběžníka ABCD z úlohy 3? Vyjádřete tento rozdíl jako obsah nějakého geometrického útvaru.* Tato úloha nedělala studentům problémy. Řada z nich hned řekla, že se obsahy liší o obsah jednoho půlkruhu nad stranou lichoběžníka. Překvapilo mě, jak rychle reagovali, protože z diskuse učitelů ve výše zmíněné pracovní dílně se mi zdálo, že to pro studenty bude větší problém.

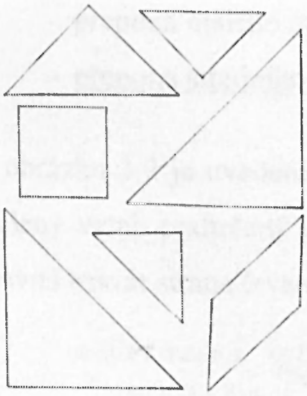
Vzhledem k tomu, že jsem se studentů nezeptala, co by mohlo plynout ze dvou posledních úloh pracovního listu, sdělila jsem jim sama závěr z třetí a čtvrté úlohy. Platí, že součet všech vyšrafovaných částí je stejný jako obsah lichoběžníka. Výsledný obrázek jsem nakreslila na tabuli. Z reakcí studentů bylo vidět, že je to překvapilo.

Ve třídě byl k dispozici počítač, proto jsem studentům na počítači ukázala obrázky měsíčků, včetně jejich dalších variant (viz odstavec 4.1.3). Studentům to připadalo zajímavé. Nakonec jsem jim ukázala obrázek v programu Cabri Geometry, v němž lze pohybovat bodem *C* u trojúhelníka *ABC*. Studenti tak viděli, jak se mění trojúhelník a měsíčky a jejich obsah, což je, soudě z jejich reakcí, zaujalo.

K tomuto tématu nebyly žádné další dotazy, v 9:07 jsme tedy přistoupili ke **druhému pracovnímu listu – tangramu** (viz příloha č. 4). Rozdala jsem studentům pracovní listy a položila otázku, zda tangram někomu něco říká. Jedna studentka se přihlásila a říkala, že je to skládačka, ze které se nechají skládat různé obrázky, v čemž měla samozřejmě pravdu. Všem jsem řekla, že je to čínská skládačka, která je tvořena sedmi díly, a ukázala jsem několik obrázků, které jdou z dílků tangramu sestavit. Obrázky jsem měla vytištěné na papíře z odstavce 5.1.5. V průběhu výkladu jsem studentům rozdávala sady tangramů. Při použití více sad tangramů lze skládat složitější obrázky. Někteří se zdáli být udiveni, co všechno se dá složit. Ještě jsem jim řekla, že mohou jednotlivé obrázky skládat i přímo na počítači. Existují programy, kde se mohou podívat na řešení, pokud si neví rady. Ukázala jsem jim jedny internetové stránky <http://www.smazba.cz/hra/tangram-game/> [cit. 2009-02-26]. To je opět velmi zaujalo a někteří hned začali skládat nějaké obrázky podle předlohy na internetových stránkách.

Vzhledem k tomu, že jsem předpokládala, že studenti nebudou mít s sebou nůžky, vystříhala jsem jednotlivé díly tangramu předem a studentům již rozdala sadu sedmi dílů. Někteří si hned začali skládat nějaké obrázky. Poté, co měli všichni studenti příslušné dílky, požádala jsem je, aby začali pracovat na úlohách pracovního listu. Musela jsem zavřít internetové stránky, aby je to nelákalo dál skládat obrázky tam uvedené.

První úloha: *Na obrázku P4.1 se nacházejí jednotlivé díly tangramu, ze kterého lze složit nesčetné množství obrázků (konvexní geometrické útvary, předměty, zvířata, lidské postavy). Nejprve jednotlivé díly vystřihněte. Následně zjistěte délky všech stran jednotlivých dílů a zjištěné velikosti zapište do pracovního listu. Víte, že jedna strana nejmenšího trojúhelníka má délku $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ (a je libovolné číslo). Řešte obecně s číslem a.*



Obr. P4.1

malý trojúhelník:

střední trojúhelník:

velký trojúhelník:

čtverec:

rovnoběžník:

Najděte vztahy mezi stranami dílů.

Objevily se dotazy studentů, jakou vlastně znají stranu nejmenšího trojúhelníka. Tento dotaz mě vedl k upřesnění zadání této úlohy. Studenti při poměřování délek stran sami přicházeli na to, že jsou trojúhelníky rovnoramenné. Ale řada z nich měla další námitky, jak mají zjistit velikost poslední strany trojúhelníka. Protože si nikdo nevěděl rady, napověděla jsem, že všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé. Potom už bylo vše jasné. Upozornila jsem je, aby pracovali s proměnnou *a*. Většina z nich zapomínala na proměnnou *a*, protože si nepřečetli pozorně zadání úlohy. Studenti jednotlivé díly různě poměřovali mezi sebou a zjišťovali velikosti stran, některé strany dopočítávali pomocí Pythagorovy věty. Všichni postupně dospěli ke správným výsledkům, které odpovídají řešením v odstavci 5.1.7. Dále hledali vztahy mezi jednotlivými stranami dílů. Ukázky z pracovních listů některých studentů[20] jsou zde uvedeny. Studenti uváděli vztahy, které jsou uvedené v odstavci 5.1.7, ale napsali i řadu jiných vztahů (ty jsou v přepsaných ukázkách podtržené a jsou správně).

Václav: - odvěsna malého trojúhelníka = strana čtverce

- přepona malého trojúhelníka = delší strana rovnoběžníka
- <u>dvakrát přepona malého trojúhelníka = přepona velkého trojúhelníka</u>
- přepona středního trojúhelníka = odvěsna velkého trojúhelníka

Hana: - odvěsna malého trojúhelníka = strana čtverce a jedna strana rovnoběžníka

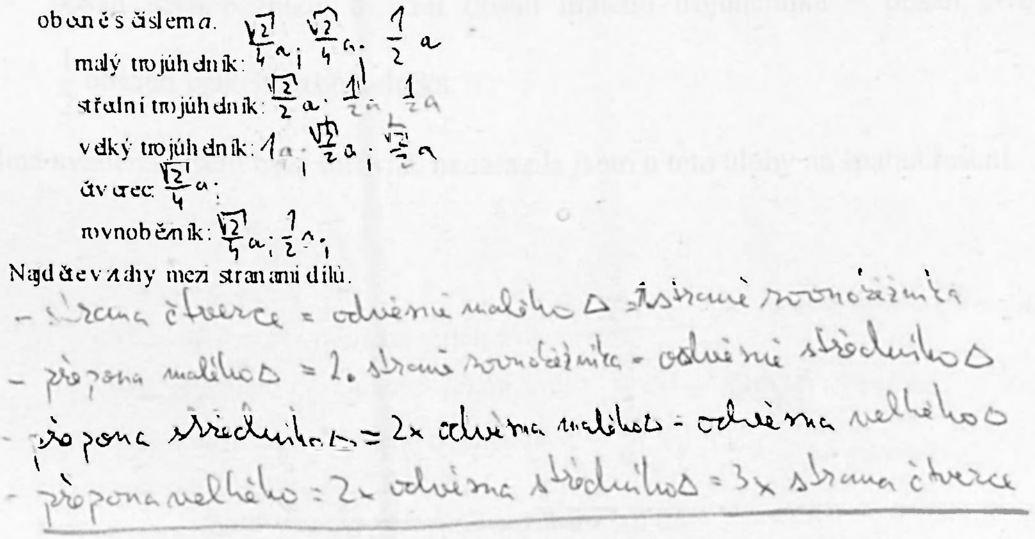
[20] Studenty jsem pojmenovala jmény, aby bylo jasné, které ukázky jsou od stejných studentů. Řešení studentů jsem přepsala na počítači pro lepší přehlednost a čitelnost.

- <u>odvěsna malého trojúhelníka = polovina odvěsny velkého trojúhelníka</u>

David: - strana čtverce = strana malého trojúhelníka

- <u>jedna strana rovnoběžníka = polovina přepony velkého trojúhelníka</u>
- druhá strana rovnoběžníka = odvěsna malého trojúhelníka
- <u>dvakrát odvěsna a dvakrát přepona malého trojúhelníka = odvěsna a přepona velkého trojúhelníka</u>
- přepona malého trojúhelníka = odvěsna středního trojúhelníka
- <u>přepona středního trojúhelníka = dvakrát odvěsna malého trojúhelníka.</u>

Na obrázku 3.2 je uvedena názorná ukázka zpracované úlohy jednoho studenta. Poslední uváděný vztah podtržený červeně není zčásti správně – přepona velkého trojúhelníka se nerovná třikrát strana čtverce.


obecně s číslem a.

malý trojúhelník: $\frac{\sqrt{2}}{4}a$; $\frac{\sqrt{2}}{4}a$; $\frac{1}{2}a$

střední trojúhelník: $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; $\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}a$

velký trojúhelník: $1a$; $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

čtverec: $\frac{\sqrt{2}}{4}a$;

rovnoběžník: $\frac{\sqrt{2}}{4}a$; $\frac{1}{2}a$;

Najděte vztahy mezi stranami dílů.

- strana čtverce = odvěsně malého △ = straně rovnoběžníka
- přepona malého △ = 2. straně rovnoběžníka = odvěsně středního △
- přepona středního △ = 2x odvěsna malého △ = odvěsna velkého △
- přepona velkého = 2x odvěsna středního △ = 3x strana čtverce

Obr. 3.2 Kopie řešení studenta Karla

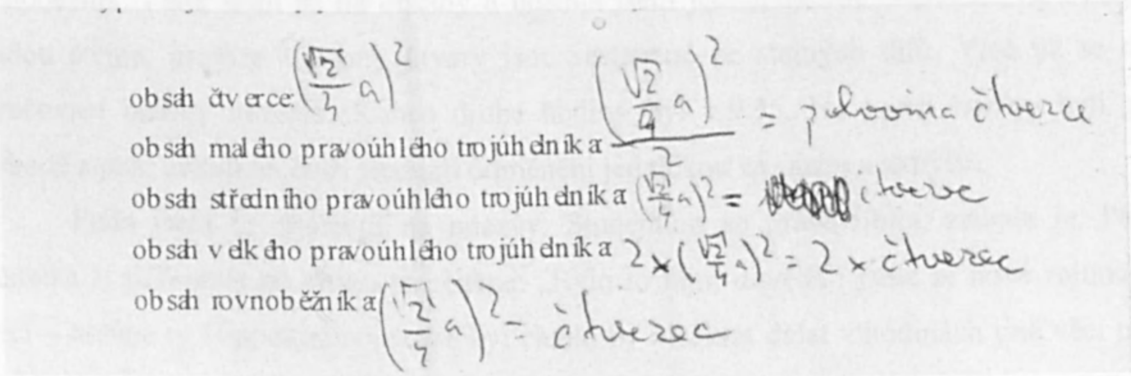
<u>Druhá úloha:</u> *Vypočítejte obsahy jednotlivých dílů skládačky. Jsou mezi obsahy nějaké vztahy?* Obsahy dílů zjišťovali studenti různými způsoby. Někdo postupoval přes vzorečky obsahů, většina ale vycházela z toho, kolikrát se malý trojúhelník vejde do jiných dílů, a z toho určovali obsahy. Obsah malého trojúhelníka zjistili pomocí vzorce. Jeden student vypočítal obsah čtverce, pak zjistil, že malý trojúhelník se tam vejde dvakrát, takže bude mít poloviční obsah. Ostatní obsahy již zjišťoval porovnáváním. Poté studenti hledali vztahy mezi obsahy dílů. Uvádím ukázky z pracovních listů tří studentů, na obrázku 3.3 je opět názorná ukázka řešení úlohy.

Václav: - obsah čtverce: $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2$

- obsah malého pravoúhlého trojúhelníka: polovina čtverce
- obsah středního pravoúhlého trojúhelníka: stejný jako čtverec
- obsah velkého pravoúhlého trojúhelníka: dvakrát čtverec
- obsah rovnoběžníka: čtverec

Hana:
- obsah čtverce: dvakrát obsah malého trojúhelníka = obsah čtverce
- obsah malého pravoúhlého trojúhelníka: $\frac{1}{2}$ obsahu čtverce, středního trojúhelníka, nebo $\frac{1}{4}$ velkého trojúhelníka
- obsah středního pravoúhlého trojúhelníka: = obsah čtverce, dvakrát malý trojúhelník
- obsah velkého pravoúhlého trojúhelníka: dvakrát obsah středního trojúhelníka
- obsah rovnoběžníka: dvakrát obsah malého trojúhelníka = obsah čtverce = $\frac{1}{2}$ obsahu velkého trojúhelníka.

Všechna uváděná řešení byla správně, nenarazila jsem u této úlohy na špatná řešení.


obsah čtverce $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2$

obsah malého pravoúhlého trojúhelníka $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}{2}$ = polovina čtverce

obsah středního pravoúhlého trojúhelníka $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2$ = čtverec

obsah velkého pravoúhlého trojúhelníka $2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2 = 2\times$ čtverec

obsah rovnoběžníka $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2$ = čtverec

Obr. 3.3 Kopie řešení studenta Karla

Ve <u>třetí úloze</u> – *Mají některé útvary skládačky stejný obvod? Pokud ano, uveďte které.* – se moc problémů neobjevilo. Při jejím řešení jsem procházela třídou a zastavila jsem se u dvou chlapců, kteří se o něčem dohadovali. Jeden z nich právě napsal, že čtverec a rovnoběžník mají stejný obvod. Soused mu řekl, že to má špatně a vysvětloval, proč to tak nemůže být. „Čtverec má všechny strany stejně dlouhé, jako je odvěsna malého trojúhelníka. Rovnoběžník má dvě strany jako odvěsna malého trojúhelníka, ale další dvě strany jako přepona malého trojúhelníka, tak je jasné, že nemohou mít stejné obvody." Prvnímu chlapci to došlo už v průběhu vysvětlování druhého chlapce. Pomocí malého trojúhelníka mu druhý chlapec ještě ukázal, že stejné obvody mají rovnoběžník a střední trojúhelník.

Někteří studenti počítali obvody tak, že sčítali délky stran dílů a výsledky porovnávali. V příloze č. 7 na obrázku P7.2 je uvedena ukázka pracovního listu studenta, který postupoval tímto způsobem. Dále tam můžeme vidět, jak tento student řešil i předcházející úlohy.

Studenti pokračovali v řešení dalších úloh. Čtvrtá úloha: *Vystřižené díly se pokuste sestavit nejprve do čtverce a poté do trojúhelníka. Obě uspořádání zakreslete na papír. Nezapomínejte, že vždy musíte použít všech sedm dílů tangramu.* Pátá úloha: *Zkuste ze všech dílků tangramu vytvořit postupně obdélník s jednou stranou dvakrát delší než druhou a lichoběžník s jednou základnou třikrát delší než druhou. Zakreslete je a porovnejte obsahy těchto útvarů. Jaké budou a proč?* Studenti si začali skládat jednotlivé geometrické útvary. Někomu šlo skládání rychleji, někomu pomaleji, spolupracovali ve dvojicích. Čtverec problémy nedělal. Trojúhelník již byl horší. Dva studenti sestavili trojúhelník, použili obě sady dílů a jeden díl jim zůstal. Pousmála jsem se tomu a upozornila je, že je potřeba použít pouze sedmi dílů. Po chvíli se jim podařilo sestavit trojúhelník. Požádala jsem je, ať přesunutím jednoho dílu z trojúhelníka vytvoří obdélník, rovnoběžník a lichoběžník. Ptala jsem se na obsahy a dostala jsem jednoznačnou odpověď, že obsahy budou stejné, protože všechny útvary jsou sestavené ze stejných dílů. Více už se do vyučovací hodiny nevešlo. Konec druhé hodiny byl v 9:35. Na konci hodiny byli po dohodě s paní učitelkou čtyři studenti odměněni jedničkou za snahu a aktivitu.

Ptala jsem se studentů na odezvy. Studentům se práce líbila, zaujala je. Paní učitelka si jich ptala po týdnu na reakce: „Bylo to fajn; dověděli jsme se nové zajímavé věci – hlavně ty Hippokratovy měsíčky; chtělo by vícekrát dělat v hodinách jiné věci než běžné; kdy zase přijede.“ Paní učitelka o tématu Hippokratovy měsíčky dříve neslyšela, takže se dověděla nové věci, zaujalo ji to, určitě prý toto téma využije v dalších letech v hodinách. Zaujalo ji také zpracování tangramu do pracovního listu, který by se podle ní nechal využít i v normálních hodinách matematiky nebo v suplovaných hodinách. Toto téma by se nechalo dělat i s mladšími studenty, jak uvedla.

Paní učitelce jsem také dala k prostudování materiál pro učitele – Hippokratovy měsíčky (odstavec 4.1). Líbilo se jí zpracování tématu v ucelené formě. Hlavně si pochvalovala rozpracování důkazů u jednotlivých Hippokratových měsíčků. Nejdříve jsou uvedeny kroky důkazů a potom jsou jednotlivé kroky rozpracovány. Člověk prý si udělá představu, jak má důkaz vypadat, a pak se lépe soustředí na podrobnosti.

3.3 Závěr

Se skupinou studentů se mi pracovalo velice dobře, studenti se mnou spolupracovali, vzájemně si radili ve dvojicích a pomáhali si. Když něčemu nerozuměli, zeptali se.

Realizace pracovních listů v praxi byla i pro mě cennou zkušeností. Byla přínosem k tomu, že jsem poupravila zadání úloh a některých komentářů v popisu pracovních listů a upřesnila časovou náročnost práce s pracovními listy. Konkrétně šlo o následující změny: U první úlohy o tangramu studenti ze zadání nepochopili, jakou vlastně znají velikost strany trojúhelníka a jak dopočítat poslední stranu. Pozměnila jsem tedy větu *Víte, že jedna strana nejmenšího trojúhelníka ....* na větu *Víte, že jedna odvěsna nejmenšího trojúhelníka ....*[21] Další úprava byla u třetí úlohy o Hippokratových měsíčkách. Vzhledem k tomu, že řada studentů prováděla výpočty v desetinných číslech a špatně by potom přicházeli na řešení čtvrté úlohy, doplnila jsem zadání úlohy o následující větu: *Počítejte s odmocninami a číslem* π. Potvrdila jsem si, jak je důležité srozumitelně formulovat zadání úloh.

V následujících kapitolách budou rozebrána čtyři témata: Hippokratovy půlměsíčky, Tangram, Zlatý řez a Kolumbovo vejce. Každé bude zpracováno stejným způsobem – nejdříve bude téma uvedeno komentářem, jakýmsi motivačním úvodem, který vysvětlí, proč jsem si dané téma vybrala, co se na něm studenti mohou naučit, jak s ním může učitel pracovat. Pak budou popsány materiály pro učitele, které tvoří uzavřený celek a obsahují i popis pracovního listu. Tyto materiály jsou pro učitele zdrojem informací k danému tématu. Předpokládám, že učitel může tento materiál vzít, doplnit pracovním listem z přílohy a použít ve výuce. Proto jsou v této části kapitol uvedeny i zdroje literatury k danému tématu. Může se tedy stát, že se některé informace uvedené v úvodu kapitoly a v materiálu pro učitele do jisté míry opakují.

[21] Je zadána velikost odvěsny, takže by již studenti měli přijít na to, že jsou trojúhelníky pravoúhlé, pokud si pozorně přečtou zadání.

4. Hippokratovy půlměsíčky

V hodinách matematiky se setkáváme s různými úlohami, kde se snažíme vypočítat obsah rovinných útvarů. Často se objevují úlohy typu „převeďte jeden útvar na jiný útvar o stejném obsahu". Například: Obdélník o stranách 3 cm a 5 cm přeměňte na kruh o stejném obsahu. Obdélník o stranách 5 cm a 2,5 cm změňte na trojúhelník, který bude mít stejný obsah.

Velice zřídka nebo vůbec se setkáváme s problémem převoditelnosti rovinných útvarů omezených křivkami na rovinné útvary omezené úsečkami o stejném obsahu. Tímto problémem se zabýval Hippokrates z Chiu. Ukázal, že obsah rovinného útvaru omezeného křivkami, nazývaného měsíčky, se rovná obsahu některého rovinného útvaru. (Folta, 2004, s. 99)

Téma Hippkratových měsíčků mě zaujalo při studiu na vysoké škole. V dotazníku pro učitele jsem zjistila, že se mu v matematických seminářích na středních školách věnuje zhruba 36 % učitelů, kteří odpověděli na dotazník. Proto jsem se snažila poznatky o tomto tématu shrnout a vytvořit ucelený materiál, který obsahuje i sadu vyřešených a okomentovaných úloh.

Materiál pro učitele, který následuje, obsahuje stručný historický komentář věnující se tématu, dále popis několika variant Hippokratových půlměsíčků, důkazy, kde se dokazují rovnosti obsahů rovinných útvarů, a popis pracovního listu pro studenty. Studenti si při řešení navržených úloh rozvinou logické uvažování a procvičí si používání vzorců. Toto téma může být zajímavé nejen pro studenty, ale i pro samotné učitele.

4.1 Materiál pro učitele – Hippokratovy půlměsíčky

Hippokratovy půlměsíčky jsou rovinné útvary omezené dvěma kruhovými oblouky. Tyto půlměsíčky mají stejný obsah jako nějaký mnohoúhelník (většinou se jedná o trojúhelník nebo lichoběžník).

Úlohy týkající se Hippokratových půlměsíčků jsou vlastně důkazové úlohy. V důkazech se převážně využívají vzorce pro výpočet obsahů rovinných útvarů – trojúhelníka, lichoběžníka, půlkruhu, kruhové úseče. Někde se využívá Pythagorova věta nebo goniometrické funkce.

Součástí tohoto materiálu je popis pracovního listu – odstavec 4.1.4. Obsahuje sadu úloh, které jsou vyřešené a okomentované. Samotný pracovní list je uveden v příloze č. 3.

4.1.1 Něco málo z historie

Autorem zmíněných půlměsíčků je **Hippokrates z Chiu,**[22] řecký matematik a filosof, Sokratův mladší současník, byl Eukleidovým předchůdcem. Pokusil se, stejně jako později Eukleides, shrnout soudobé geometrické poznatky v knize Stoicheia (Základy). Z knihy se však zachoval pouze zlomek věnovaný právě měsíčkům, tj. plochám omezeným dvěma kruhovými oblouky, které mají stejný obsah jako nějaký mnohoúhelník. Tyto plochy byly po něm nazvány Hippokratovy menisky. Nesmíme přitom zaměňovat Hippokrata z Chiu se stejnojmenným lékařem, který žil ve zhruba stejné době a je autorem prvního uceleného etického kodexu v lékařství (tzv. Hippokratova přísaha).

Z historického hlediska měly Hippokratovy půlměsíčky význam v souvislosti s úlohou o kvadratuře kruhu.[23] Hippokratovy půlměsíčky se také označují jako Hippokratovy měsíčky či Hippokratovy menisky.

4.1.2 Nejznámější Hippokratovy měsíčky

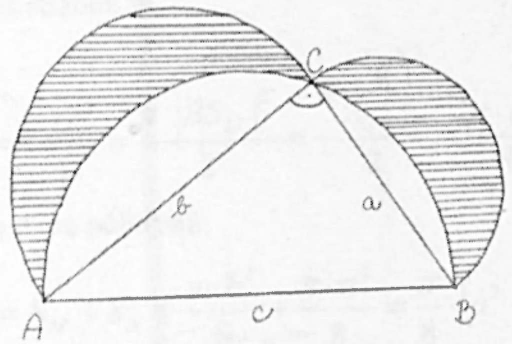
Nejjednoduššími a zároveň nejznámějšími Hippokratovými měsíčky jsou měsíčky, jejichž obsah je stejný jako obsah pravoúhlého trojúhelníka. Pro tyto Hippokratovy půlměsíčky platí:

„Součet obsahů dvou Hippokratových měsíčků, které leží mezi obloukem půlkružnice sestrojené nad přeponou a oblouky kružnic sestrojených nad odvěsnami téhož pravoúhlého trojúhelníka, se rovná obsahu tohoto trojúhelníka.“ (Konforovič, 1989, s. 45) (vyšrafovaná část na obr. 4.1)

Jednodušeji řečeno: Součet obsahů Hippokratových půlměsíčků (vyšrafovaná oblast na obr. 4.1) se rovná obsahu daného pravoúhlého trojúhelníka *ABC*. Obvod měsíčků je tvořen půlkružnicemi, jejichž průměry odpovídají stranám pravoúhlého trojúhelníka *ABC*.

[22] Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. n. l.), Poznatky o něm jsou ze zdrojů: <http://www.geneze.info/imena/osobnosti.htm> [cit. 2008-12-03], <http://www.math.muni.cz/~sisma/olomouc> [cit. 2008-12-03].

[23] Kvadratura kruhu je jedna ze tří nejslavnějších antických konstrukčních úloh. Znění: K danému kruhu zkonstruujte čtverec o stejném obsahu pouze za užití pravítka a kružítka.



Obr. 4.1

Podívejme se na důkaz, že obsah těchto Hippokratových půlměsíčků se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka ABC. V důkazu využijeme vzorce pro obsah trojúhelníka, obsah půlkruhu a Pythagorovu větu.

Pro obsah pravoúhlého trojúhelníka ABC platí:[24] $\underline{S_{\wedge} = \dfrac{ab}{2}}$

Pro obsah půlkruhu platí vzorec: $S = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2}$.

V trojúhelníku ABC dále známe: $|AS_{AB}| = \dfrac{c}{2}$, $|AS_{AC}| = \dfrac{b}{2}$, $|BS_{BC}| = \dfrac{a}{2}$

V důkazu se vychází z obrázku 4.2. Kroky důkazu:

1) Nejprve najdeme obsahy půlkruhů nad stranami AC a BC a sečteme.
2) Poté najdeme obsah půlkruhu nad stranou AB a odečteme od něj obsah trojúhelníka ABC.
3) V závěru od sebe odečteme výsledky z kroku 1) a 2) a získáme součet obsahů Hippokratových půlměsíčků.
4) Zkontrolujeme, zda součet obsahů měsíčků je stejný jako obsah trojúhelníka.

ad 1) Obsah půlkruhu M[25] nad stranou AC:

$$S_M = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot |AS_{AC}|^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot b^2}{8}$$

[24] Výsledky obsahů trojúhelníka nebo lichoběžníka u jednotlivých měsíčků jsou tučně podtrženy, abychom je v materiálu lépe našli. Budeme je potřebovat v závěru důkazů.

[25] Kruh – značí se velkým písmenem, například M, je omezen kružnicí m. Kružnice m a kruh M mají stejný střed a stejný poloměr.

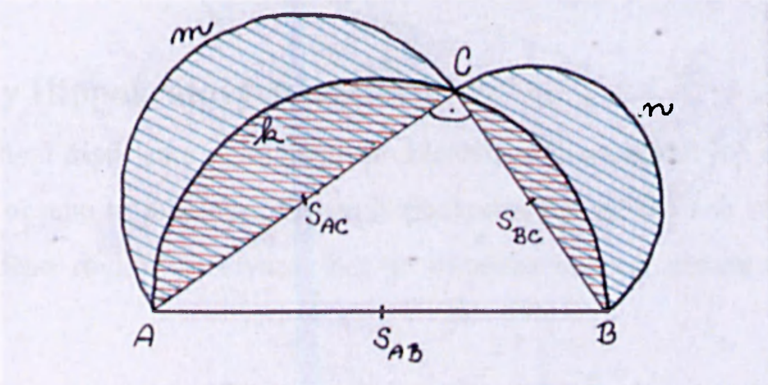
Obsah půlkruhu *N* nad stranou *BC:*

$$S_N = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot |BS_{BC}|^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot a^2}{8}$$

Součet obsahů těchto dvou půlkruhů:

$$S_\alpha = S_M + S_N = \frac{\pi \cdot b^2}{8} + \frac{\pi \cdot a^2}{8} = \frac{\pi}{8} \cdot \left(a^2 + b^2\right) \qquad (1)$$

Získali jsme obsah zeleně vyšrafovaných oblastí na obrázku 4.2.



Obr. 4.2

ad 2) Obsah půlkruhu *K* nad stranou *AB:*

$$S_K = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot |AS_{AB}|^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot c^2}{8}$$

Od tohoto obsahu odečteme obsah pravoúhlého trojúhelníka *ABC* a dostaneme obsah červeně vyšrafované oblasti na obrázku 4.2:

$$S_\beta = S_K - S_\Delta = \frac{\pi \cdot c^2}{8} - \frac{ab}{2} = \frac{\pi \cdot c^2 - 4ab}{8} \qquad (2)$$

ad 3) V tomto kroku od sebe odečteme (1) – (2) a dostaneme součet obsahů Hippokratových půlměsíčků S_H. Navíc ještě využijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku *ABC*: $c^2 = a^2 + b^2$.

$$S_H = S_\alpha - S_\beta = \frac{\pi}{8} \cdot \left(a^2 + b^2\right) - \frac{\pi \cdot c^2 - 4ab}{8}$$

$$S_H = \frac{\pi \cdot c^2}{8} - \frac{\pi \cdot c^2 - 4ab}{8} = \frac{\pi \cdot c^2 - \pi \cdot c^2 + 4ab}{8} = \frac{4ab}{8} = \frac{ab}{2}$$

ad 4) Na začátku jsme zjistili, že obsah trojúhelníka ABC je $S_\Delta = \frac{ab}{2}$.

Součet obsahů S_H měsíčků na obrázku 4.1 je $S_H = \frac{ab}{2}$. Obsahy se rovnají. Důkaz je hotový.

Závěr: Součet obsahů Hippokratových půlměsíčků (viz obr. 4.1) sestrojených nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka ABC se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka ABC.

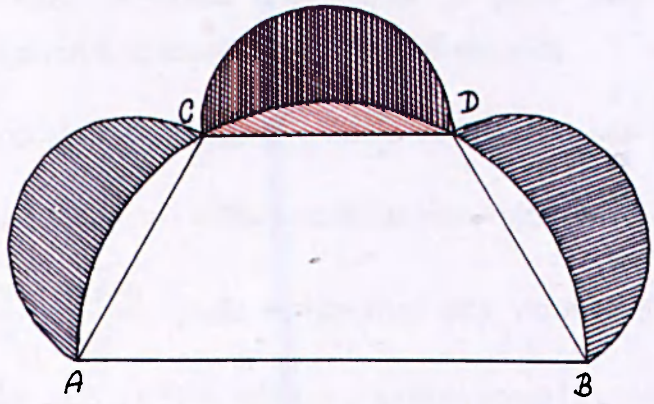
4.1.3 Obměny Hippokratových měsíčků

V předchozí části jsme se věnovali problematice Hippokratových menisků, jejichž obsah se rovná obsahu trojúhelníka. Obsah Hippokratových měsíčků se však může rovnat také obsahu jiného rovinného útvaru. Zde je uvedeno několik obměn měsíčků včetně důkazů.

I. Hippokrates poukázal na to, že také existují měsíčky, jejichž součet obsahů spolu s obsahem určitého půlkruhu lze převést na rovinný útvar.

„Nechť lichoběžník *ABCD* tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka. Nad jeho stranami sestrojíme půlkružnice. Pak se součet obsahů tří stejných měsíčků vytvořených těmito křivkami, zvětšený o obsah půlkruhu nad jednou ze tří stejných stran, rovná obsahu lichoběžníka *ABCD*.“ (Kolman, 1969, s. 105)

Jinak řečeno: Součet obsahů všech vyšrafovaných oblastí se rovná obsahu lichoběžníka $ABCD$, který tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka (viz obr. 4.3).[26]



Obr. 4.3

[26] Červeně je vyšrafován půlkruh, o jehož obsah je zvětšený součet obsahů černě vyšrafovaných měsíčků, abychom získali obsah lichoběžníka.

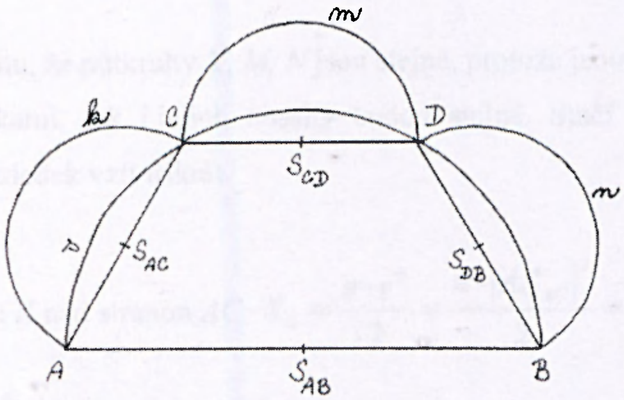
Důkaz bude obdobný jako u předchozího případu. V důkazu se vychází z obrázku 4.4. Využijeme vzorce pro obsah půlkruhu a obsah lichoběžníka, popřípadě vzorce pro obsah trojúhelníka. Pro obsah půlkruhu platí vzorec: $S = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2}$.

Nechť platí (viz obr. 4.4):

$$|AC| = |CD| = |DB| = a\,,\ |AB| = 2a\,,\ |AS_{AB}| = a\,,\ |AS_{AC}| = |CS_{CD}| = |DS_{DB}| = \frac{a}{2}$$

Půlkruhy nad stranami AC, CD a DB postupně označíme písmeny – K, M, N.

Půlkruh nad stranou AB (polovina kružnice opsané šestiúhelníku) bude označen písmenem S.



Obr. 4.4

Nejprve vypočteme obsah lichoběžníka $ABCD$. Lichoběžník v našem případě představuje polovinu pravidelného šestiúhelníka, to znamená, že je tvořen třemi rovnostrannými trojúhelníky o straně délky a. Obsah lichoběžníka můžeme zjistit dvěma způsoby: buď podle vzorce pro obsah lichoběžníka, nebo pomocí vzorce pro obsah trojúhelníka. Platí totiž, že obsah lichoběžníka je stejný jako součet obsahů tří rovnostranných trojúhelníků, ze kterých je lichoběžník sestaven.

Vzorec pro obsah lichoběžníka S_L: $S_L = \dfrac{a+c}{2} \cdot v$, kde $a = |AB|$, $c = |CD|$,

v – výška lichoběžníka (čili je to i výška rovnostranného trojúhelníka ACS_{AB}) a platí

$v = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$ (podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ASC, který tvoří polovinu trojúhelníka ACS_{AB}). Nyní můžeme dopočítat obsah lichoběžníka $ABCD$:

$$S_L = \frac{2a+a}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4}.$$

Kroky důkazu:

1) Nejprve najdeme obsahy půlkruhů nad stranami *AC, CD a DB* a sečteme je.
2) Dále najdeme obsah půlkruhu nad stranou *AB* a od něho odečteme obsah lichoběžníka *ABCD*.
3) Poté od sebe odečteme výsledky z kroku 1) a 2), získáme součet obsahů tří měsíčků nad stranami *AC, CD* a *DB*.
4) V závěru k výsledku z kroku 3) přičteme obsah jednoho půlkruhu z kroku 1). Získáme tak obsah všech vyšrafovaných oblastí na obrázku 4.3.
5) Stačí už jen zkontrolovat, zda součet obsahů vyšrafovaných oblastí je stejný jako obsah lichoběžníka *ABCD*, a důkaz je hotový.

ad 1) Vzhledem k tomu, že půlkruhy *K, M, N* jsou stejné, protože jsou sestrojené nad stejně dlouhými úsečkami, tak i jejich obsahy budou stejné. Stačí najít obsah jednoho z půlkruhů a výsledek vzít třikrát.

Obsah půlkruhu *K* nad stranou *AC*: $S_K = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot |AS_{AC}|^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot a^2}{8}$.

Platí $S_K = S_M = S_N$.

Součet obsahů všech tří půlkruhů *K, M, N*: $S_1 = 3 \cdot S_K = \dfrac{3 \cdot \pi \cdot a^2}{8}$

ad 2) Obsah půlkruhu *S* nad stranou *AB*: $S_S = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot |AS_{AB}|^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot a^2}{2}$.

Od tohoto obsahu odečteme obsah lichoběžníka *ABCD*, který jsme našli dříve, a získáme obsah S_2 tří kruhových úsečí nad stranami *AC, CD* a *DB*:

$$S_2 = S_S - S_L = \frac{\pi \cdot a^2}{2} - \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a^2 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4}.$$

ad 3) Nyní od sebe odečteme výsledky z ad 1) a ad 2).

$$S_3 = S_1 - S_2 = \frac{3 \cdot \pi \cdot a^2}{8} - \frac{2 \cdot \pi \cdot a^2 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4} = \frac{3 \cdot \pi \cdot a^2 - 4 \cdot \pi \cdot a^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{8}$$

$$S_3 = \frac{-\pi \cdot a^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{8}$$

Dostali jsme obsah S_3 všech tří měsíčků černě vyšrafovaných na obrázku 4.3.

ad 4) K výsledku z předchozího kroku přičteme obsah červeně vyšrafovaného půlkruhu S_M (viz obr. 4.3), který jsme našli v kroku ad 1).

$$S_V = S_3 + S_M = \frac{-\pi \cdot a^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{8} + \frac{\pi \cdot a^2}{8} = \frac{-\pi \cdot a^2 + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 + \pi \cdot a^2}{8}$$

$$S_V = \frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{8} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

Získali jsme tak součet obsahů S_V všech vyšrafovaných částí na obrázku 4.3.

ad 5) Podívejme se na výsledek z kroku ad 4) a na obsah lichoběžníka *ABCD*.

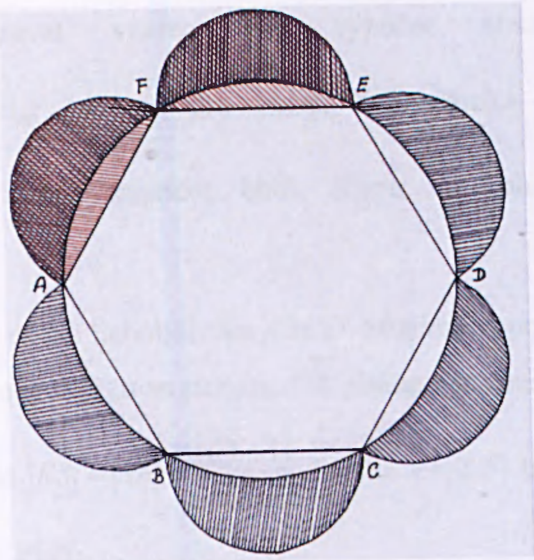
$$S_V = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4} \qquad S_L = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

Vidíme, že se obsahy rovnají. To je konec důkazu.

Závěr: Součet obsahů všech tří měsíčků, zvětšený o obsah půlkruhu sestrojeného nad jednou ze tří stejných stran (viz obr. 4.3), je stejný jako obsah lichoběžníka *ABCD*, který tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka.

II. Hippokratovy měsíčky můžeme zkoumat nejen na lichoběžníku, který tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka, ale také na celém pravidelném šestiúhelníku. Nechť tedy platí: **Je dán pravidelný šestiúhelník *ABCDEF*. Nad všemi jeho stranami sestrojíme půlkružnice. Pak se součet obsahů šesti stejných měsíčků vytvořených těmito křivkami (černě vyšrafované na obrázku 4.5), zvětšený o obsahy dvou půlkruhů nad dvěma ze šesti stejných stran (červeně vyšrafované na obrázku 4.5), rovná obsahu pravidelného šestiúhelníka *ABCDEF*.**

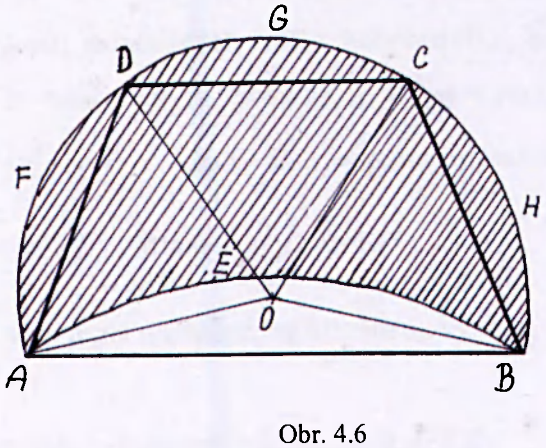
Obsah pravidelného šestiúhelníka o straně a i obsah všech vyšrafovaných oblastí na obrázku 4.5 je $S = \dfrac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{2}$. Důkaz je obdobný jako u lichoběžníka v předchozí úloze, proto zde nebude uváděn.



Obr. 4.5

III. Vedle měsíčku omezeného zvnějšku půlkružnicí uvažoval Hippokrates ještě o jiných měsíčkách. Například o měsíčku, který je zvnějšku omezen kruhovým obloukem větším než půlkružnice.

Sestrojíme lichoběžník *ABCD* se stranami 1, 1, 1, $\sqrt{3}$, opíšeme mu kružnici a nad tětivou $|AB| = \sqrt{3}$ sestrojíme kruhovou úseč *AEB*, která je podobná libovolné ze shodných tří úsečí *AFD, DGC* a *CHB*. Potom platí, že obsah měsíčku *AFDGCHBE* se rovná obsahu lichoběžníka ABCD (Kolman, 1969, s. 104) (viz obr. 4.6)

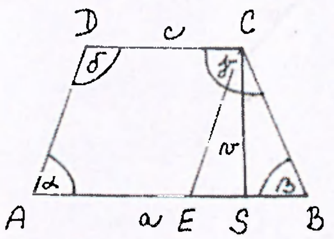


Obr. 4.6

U této úlohy můžeme zkoumat nejen důkaz tvrzení, ale také si zopakovat konstrukci lichoběžníka, když známe velikosti všech jeho stran, či konstrukci $\sqrt{3}$ pomocí pravítka a kružítka. V důkazu budeme pracovat s výpočty s desetinnými čísly.

Budeme potřebovat vzorec pro výpočet obsahu kruhové úseče: $S = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin\alpha$; vzorec pro obsah lichoběžníka a znalosti o používání goniometrických funkcí pro výpočet úhlů. Víme, že platí: $|AD| = |BC| = |CD| = 1$, $|AB| = \sqrt{3}$.

Nejprve najdeme obsah lichoběžníka *ABCD*. Musíme vypočítat výšku lichoběžníka. Sestrojíme-li bodem *C* rovnoběžku se stranou *AD*, získáme rovnoramenný trojúhelník *EBC* (obr. 4.7). Bude platit, že $|ES| = |SB| = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$. Výška $v = |CS|$ trojúhelníka *EBC* je stejná jako výška lichoběžníka. Platí:



Obr. 4.7

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + v^2 \text{ (Pythagorova věta v trojúhelníku } BSC)$$

$$v^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}93$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníka:

$$S_L = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$S_L = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{S_L \doteq 1{,}27}}$$

Ještě zjistíme velikosti jednotlivých úhlů v lichoběžníku, bude se nám to hodit pro další výpočty. Úhly α, β budou stejné, protože se jedná o rovnoramenný lichoběžník. Dále platí: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Úhel β najdeme z trojúhelníka *BSC* (obr. 4.7):

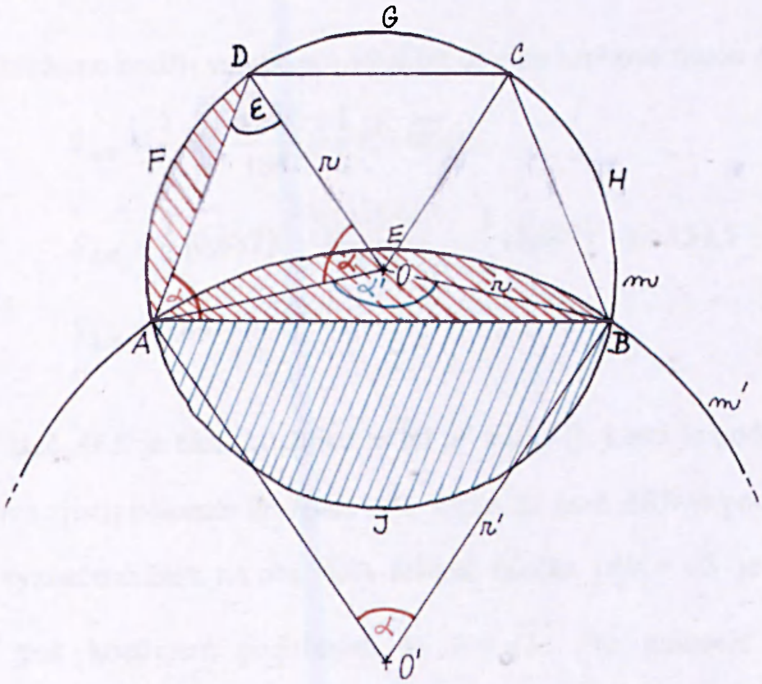
$\sin\beta = \frac{v}{1} \doteq 0{,}93$, $\beta = \alpha = 68{,}5°$. Potom $\delta = \gamma = 111{,}5°$.

Nyní se konečně podíváme na důkaz, ve kterém se vychází z obrázku 4.8.

Kroky důkazu:

1) Zjistíme obsah kružnice *m* opsané lichoběžníku *ABCD.*
2) Vypočítáme obsah kruhové úseče *AJB* pod stranou *AB*, která tvoří část opsané kružnice *m.*
3) Dále zjistíme obsah kruhové úseče *AEB* nad stranou *AB*, která je podobná libovolné ze shodných tří úsečí *AFD, DGC* a *CHB.*

4) V tomto kroku od obsahu kruhu M odečteme obsahy obou kruhových úsečí a získáme námi hledaný obsah vyšrafovaného měsíčku na obrázku 4.6.
5) Stačí už jen zkontrolovat, zda obsah vyšrafovaného měsíčku na obrázku 4.6 je stejný jako obsah lichoběžníka $ABCD$, a důkaz bude hotový.



Obr. 4.8

ad 1) Pro výpočet obsahu kruhu potřebujeme nejdříve zjistit poloměr kružnice $m(O, r = |AO|)$. Víme, že trojúhelníky ADO, DCO a CBO jsou rovnoramenné se základnou o délce 1 a že ramena mají délku poloměru kružnice m. Velikost poloměru r můžeme například vypočítat z trojúhelníka ADO pomocí jedné z goniometrických funkcí.

$$\cos\varepsilon = \cos\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{|AD|}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad \cos 55{,}7° = \frac{\frac{1}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad r \doteq 0{,}887$$

Potom obsah kruhu M: $S_M = \pi \cdot r^2 \doteq 2{,}47$

ad 2) V tomto kroku najdeme obsah kruhové úseče AJB (zeleně vyšrafovaná oblast na obr. 4.8). Poloměr známe, ten je stejný jako poloměr kružnice m. Potřebujeme zjistit velikost úhlu $|\angle AOB| = \alpha'$. Pro tento úhel bude platit: $\alpha' = 360° - 3 \cdot \alpha = 154{,}5°$.

Vycházíme z toho, že $\alpha = |\angle AOD| = |\angle DOC| = |\angle COB|$ a že trojúhelníky *ADO, DCO* a *CBO* jsou rovnoramenné. Velikosti jejich úhlů jsou $\varepsilon = \frac{\delta}{2} = 55{,}7°$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2} = 55{,}7°$ a $\alpha = 68{,}5°$.

Nyní již můžeme použít vzorec pro výpočet obsahu kruhové úseče *AJB:*

$$S_{AJB} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\pi \cdot \alpha'}{180} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin\alpha'$$

$$S_{AJB} = \frac{1}{2}(0{,}887)^2 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 154{,}5}{180} - \frac{1}{2}(0{,}887)^2 \cdot \sin 154{,}5$$

$$S_{AJB} \doteq 0{,}89$$

ad 3) Kruhová úseč *AEB* je částí kružnice $m'(O', r' = |AO'|)$, která je podobná kružnici *m*. Potřebujeme zjistit poloměr kružnice m'. Víme, že úseč *AEB* je podobná úseči *AFD* (červeně vyznačené části na obr. 4.8). Jelikož úsečka $|AB| = \sqrt{3}$ je obrazem úsečky $|AD| = 1$, pak koeficient podobnosti je $k = \sqrt{3}$. Pro poloměr r' bude platit: $r' = k \cdot r = \sqrt{3} \cdot 0{,}887 = 1{,}53$. Úhel *AO'B* bude stejný jako úhel *AOD*, čili $|\angle AOD| = \alpha = 68{,}5°$.

Nyní můžeme použít vzorec pro výpočet obsahu kruhové úseče *AEB:*

$$S_{AEB} = \frac{1}{2}r'^2 \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \frac{1}{2}r'^2 \cdot \sin\alpha$$

$$S_{AEB} = \frac{1}{2}(1{,}53)^2 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 68{,}5}{180} - \frac{1}{2}(1{,}53)^2 \cdot \sin 68{,}5$$

$$S_{AEB} \doteq 0{,}31$$

ad 4) Abychom dostali obsah S' vyšrafované oblasti na obrázku 4.6, musíme od obsahu kruhu *M* odečíst obsahy obou úsečí, které jsme našli v předchozích krocích.

$$S' = S_M - S_{AJB} - S_{AEB}$$

$$S' = 2{,}47 - 0{,}89 - 0{,}31 \doteq 1{,}27$$

Získali jsme tedy obsah S' měsíčku *AFDGCHBE.*

ad 5) Podívejme se na výsledek z kroku ad 4) a na obsah lichoběžníka $ABCD$.

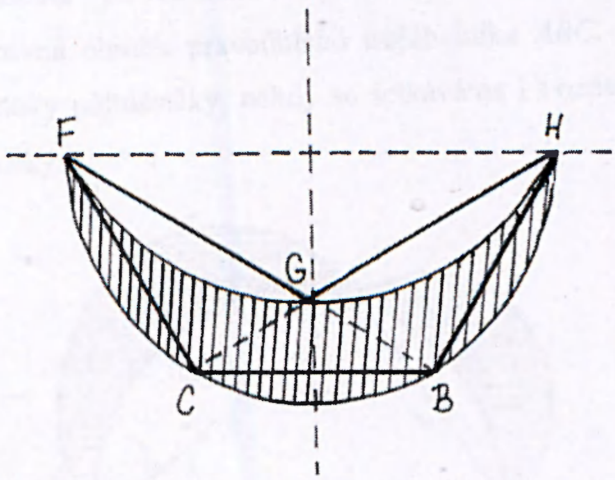
$S_L = 1{,}27$ $\quad S' = 1{,}27$

Vidíme, že obsahy jsou stejné. Důkaz je hotový.

Závěr: Obsah měsíčku $AFDGCHBE$ je stejný jako obsah lichoběžníka $ABCD$ (obr. 4.6).

IV. Další Hippokratův měsíček je stručně zmíněn, jeho důkaz zde není uveden, protože výpočty jsou již dost složité.

Obsah měsíčku (obr. 4.9), který je sevřený dvěma danými oblouky, je stejný jako obsah pětiúhelníka $FCBHG$. Jeden oblouk je část kružnice opsané lichoběžníku $FCBH$. Druhý oblouk je část kružnice opsané trojúhelníku FGH.[27]



Obr. 4.9

4.1.4 Popis pracovního listu[28]

Časová náročnost: dvě vyučovací hodiny.

Pomůcky studentů: psací a rýsovací potřeby, kalkulačka, popřípadě matematické tabulky.

Matematické znalosti studentů: vzorce pro výpočet obsahů rovinných útvarů – trojúhelníka, půlkruhu, lichoběžníka, kruhové úseče (lze použít i matematických tabulek), dále Pythagorova věta, znalosti o goniometrických funkcích.

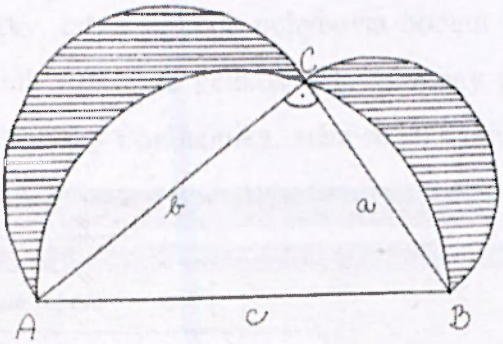
Věkové určení: spíše pro starší studenty – 2., 3., 4. ročník střední školy, jedná se o důkazové úlohy.

[27] Bližší informace o tomto měsíčku jsou v knize (Kolman, 1969, s. 104).
[28] Samotný pracovní list je v příloze č. 3.

Komentář pro učitele: Učitel studentům řekne, co to jsou Hippokratovy půlměsíčky. Pak rozdá pracovní listy a společně se studenty vyřeší první úlohu. Nechá studenty chvíli přemýšlet, jak se bude daný problém řešit. Poté se zeptá, zda má někdo nějaký návrh na řešení. Učitel píše postup důkazu na tabuli, studenti radí jednotlivé kroky. Je dobré kreslit na tabuli příslušné obrázky a nejlépe barevně, aby se studenti dobře orientovali. Je možné také nechat některého ze studentů psát důkaz na tabuli za pomoci ostatních spolužáků. Vždy je důležité se ptát, jestli studenti všemu rozumí a nemá-li někdo nějaký dotaz.

Samozřejmě záleží na učiteli, kolik času chce věnovat danému tématu. Může si vybrat pouze některé úlohy z pracovního listu a ty se studenty udělat. Nebo může některé dát jako domácí úkol.

1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Dokažte, že součet obsahů půlměsíčků sestrojených nad odvěsnami tohoto pravoúhlého trojúhelníka ABC (vyšrafovaná oblast na obrázku 4.10) se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka ABC. Tyto půlměsíčky se nazývají Hippokratovy půlměsíčky, někdy se setkáváme i s označením Hippokratovy měsíčky nebo menisky.

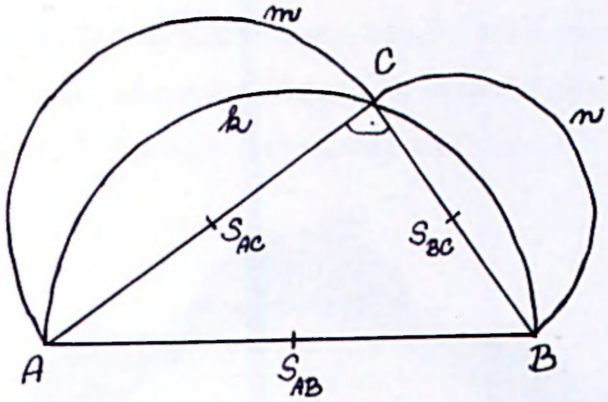


Obr. 4.10

Řešení: Důkaz je uveden v odstavci 4.1.2.

2. Sestrojte Hippokratovy půlměsíčky nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka ABC. Délky odvěsen trojúhelníka jsou $|AC| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm. Vypočítejte součet obsahů těchto půlměsíčků.

Řešení: Zkonstruujeme pravoúhlý trojúhelník ABC. Poté sestrojíme Thaletovu půlkružnici $k(S_{AB}, |AS_{AB}|)$ nad úsečkou AB (viz obr. 4.11). Dále sestrojíme dvě půlkružnice nad odvěsnami daného trojúhelníka ABC, a to půlkružnici nad stranou AC – $m(S_{AC}, |AS_{AC}|)$, a půlkružnici nad stranou BC – $n(S_{BC}, |BS_{BC}|)$. Plochy, které vzniknou mezi půlkružnicemi k, m a k, n, jsou hledané Hippokratovy menisky.

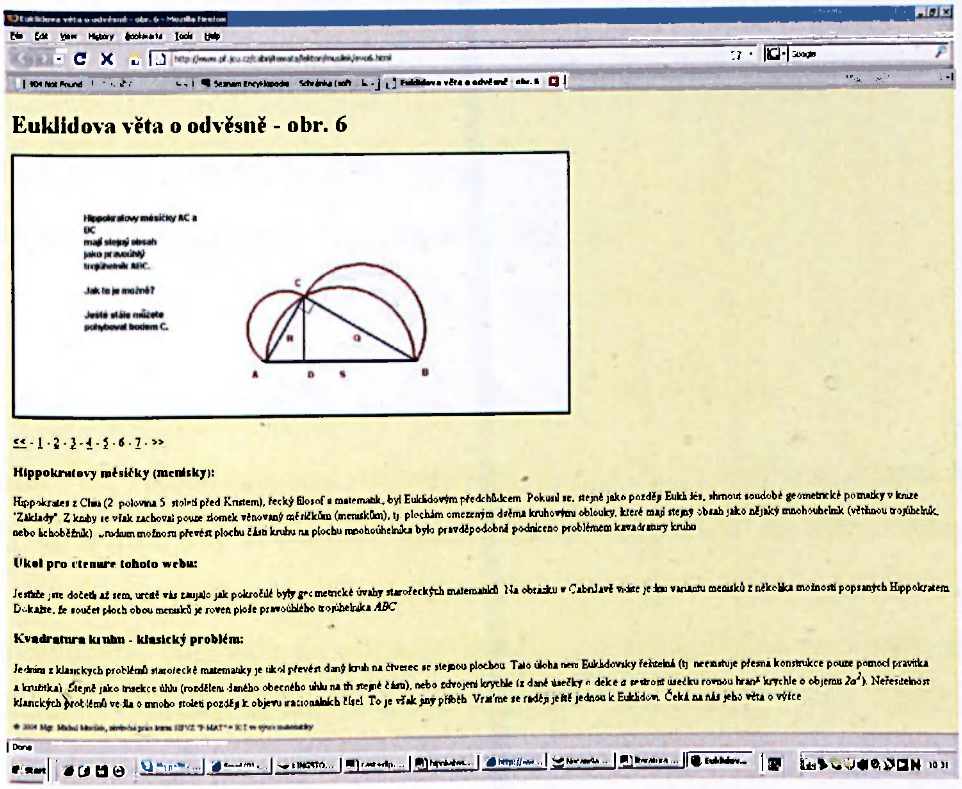


Obr. 4.11

Obsah Hippokratových měsíčků: Z úlohy 1 víme, že součet obsahů měsíčků je stejný jako obsah pravoúhlého trojúhelníka ABC. Stačí tedy vypočítat obsah trojúhelníka:

$$S_H = S_\triangle = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

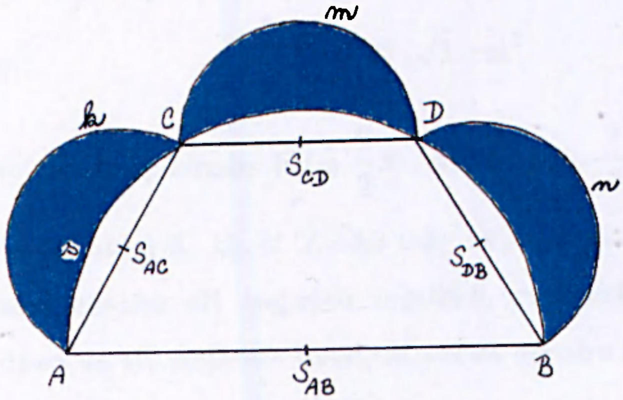
Komentář: Má-li učitel v hodině k dispozici počítač a internet, může studentům ukázat, jak se budou měnit měsíčky, když se bude pohybovat bodem C po Thaletově kružnici. Mění se zároveň trojúhelník ABC, ale velikost jeho přepony je stále stejná. Vzhledem k tomu, že se mění velikost výšky trojúhelníka, mění se jeho obsah a tím i obsah měsíčků.



Obr. 4.12

Názorný obrázek (viz obr. 4.12)[29] nalezneme na internetových stránkách: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/lektori/musilek/evo6.html> [cit. 2008-12-03].

3. Nechť lichoběžník $ABCD$ tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka o straně 6 cm. Nad jeho stranami sestrojíme půlkružnice. Vypočítejte obsah vybarvených Hippokratových měsíčků na obrázku 4.13. Počítejte s odmocninami a číslem π.



Obr. 4.13

Řešení: Obecné řešení této úlohy je uvedeno v odstavci 4.1.3. Stačí dosadit konkrétní hodnotu ze zadání.

Obsah půlkruhu K nad stranou AC: $S_K = \frac{9}{2}\pi$ cm^2.

Obsah půlkruhu S nad stranou AB: $S_S = 18\pi$ cm^2.

Součet obsahů tří půlkruhů K, M, N: $S_1 = S_K + S_M + S_N = \frac{27}{2}\pi$ cm^2.

Obsah lichoběžníka $ABCD$: $S_L = 27 \cdot \sqrt{3}$ cm^2.

Obsah tří kruhových úsečí nad stranami AC, CD a DB:

$$S_2 = S_S - S_L = 18\pi - 27 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Součet obsahů všech tří měsíčků: $S_3 = S_1 - S_2 = 27 \cdot \sqrt{3} - \frac{9}{2}\pi$ cm^2.

Komentář: Tuto úlohu necháme studentům počítat samostatně nebo ve dvojicích. Je dobré studenty upozornit, aby si pozorně přečetli zadání a opravdu počítali s odmocninami a číslem π a nepřeváděli výpočty na desetinná čísla. Lépe potom vyřeší úlohu 4. Učitel obchází studenty, odpovídá na případné dotazy. Pokud si někdo neví rady, poradí mu. Průběžně píše výsledky na tabuli, aby si je mohli studenti kontrolovat. Muže se stát, že

[29] Obrázek je vytvořen v Cabri Geometry.

někdo najde obsah lichoběžníka a bude tvrdit, že má úlohu vyřešenou, protože určitě bude i součet obsahů měsíčků stejný. Je potřeba, aby to opravdu student dokázal.

4. O kolik se liší součet obsahů měsíčků a obsah lichoběžníka *ABCD* z úlohy 3? Vyjádřete tento rozdíl jako obsah nějakého geometrického útvaru.

Řešení: Podívejme se na obsahy měsíčků a lichoběžníka *ABCD* z úlohy 3.

$S_3 = 27 \cdot \sqrt{3} - \frac{9}{2}\pi$ cm^2 $\qquad$ $S_L = 27 \cdot \sqrt{3}$ cm^2

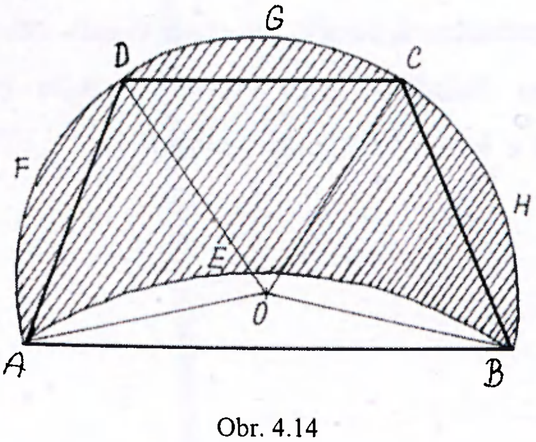
Na první pohled je zřejmé, že se obsahy liší o $\frac{9}{2}\pi$. Ale co je to $\frac{9}{2}\pi$? Jedná se vlastně o obsah jednoho ze tří půlkruhů *K, M, N.* Z toho tedy vyplývá závěr, k němuž by měli studenti dospět: **Součet obsahů tří stejných měsíčků, zvětšený o obsah půlkruhu sestrojeného nad jednou ze tří stejných stran, se rovná obsahu lichoběžníka *ABCD*, který tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka.**

5. Nechť je dán lichoběžník *ABCD*. Velikosti jeho stran jsou $|AD| = |BC| = |CD| = 1$, $|AB| = \sqrt{3}$.

a) Vypočítejte obsah lichoběžníka *ABCD*.

b) Dokažte, že obsah lichoběžníka *ABCD* je stejný jako obsah Hippokratova měsíčku *AFDGCHB* (viz obr. 4.14). Obvod měsíčku tvoří část kružnice opsané lichoběžníku *ABCD* a kruhová úseč *AEB* nad stranou *AB,* která je podobná libovolné ze shodných tří úsečí *AFD, DGC* a *CHB.*

c) Sestrojte zadaný lichoběžník *ABCD.*



Obr. 4.14

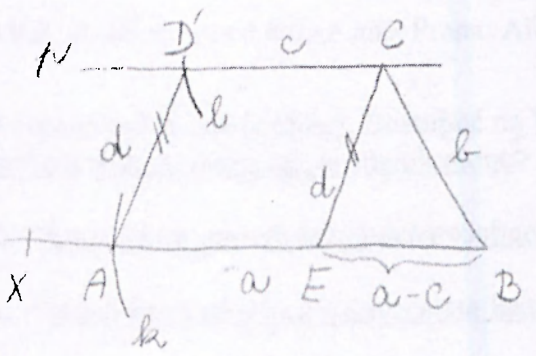
Řešení:

a) Obsah lichoběžníka $ABCD$: $S_L = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \doteq 1{,}27$.

Podrobný výpočet obsahu lichoběžníka je uveden v odstavci 4.1.3

b) Důkaz je uveden v odstavci 4.1.3.

c) Rozbor (obr. 4.15):



Obr. 4.15

Popis konstrukce:

1) $\triangle BCE(sss)$
2) $\mapsto BX, BX \in E$
3) $k, k(B, |AB|)$
4) $A, A \in k \cap \mapsto BX$
5) $p, p \parallel BX, p \in C$
6) $l, l(C, |CD|)$
7) $D, D \in l \cap p$
8) $ABCD$

Komentář: Tato úloha je časově dost náročná. Na procvičení můžeme nechat studenty vypočítat obsah lichoběžníka a zkonstruovat daný lichoběžník. Ale důkaz už je složitější a pracuje se v něm s desetinnými čísly. Tuto úlohu můžeme úplně vynechat nebo použít jen část zadání, případně ji zadat studentům jako samostatnou práci za domácí úkol, která pak může být ohodnocena.

Závěrečný komentář: Učitel může studentům promítnout pomocí dataprojektoru z počítače další obměny Hippokratových měsíčků (viz odstavec 4.1.3 – měsíčky II. a IV.). Je dobré upozornit ještě na jednu věc. Studenti se někdy domnívají, že když pracujeme s oblouky, musí se ve výsledku objevit číslo π. Nicméně vzhledem k tomu, že součet obsahů úsečí je roven vždy nějakému útvaru typu trojúhelník nebo lichoběžník, ve výsledku se π neobjevuje. To je pro studenty někdy překvapivé a učitel by na to mohl upozornit.

3.1.5 Zdroje k tématu

FOLTA, J. *Dějiny matematiky I.*, práce z dějin techniky a přírodních věd. Praha: Národní technické muzeum, 2004, svazek 3.

KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1969.

KONFOROVIČ, A. G. *Významné matematické úlohy*. Praha: SPN, 1989.

LARGE, T. *Barevná matematika*. (přeložil z angličtiny L. Mikulka) Praha: Albatros, 2005.

OPAVA, Z. *Matematika kolem nás*. Praha: Albatros, 1989.

Řecká matematika.doc [online]. Dostupné na WWW: <http://www.math.muni.cz/~sisma/olomouc> [cit. 2008-12-03]

URL: <http://www.geneze.info/jmena/osobnosti.htm> [cit. 2008-12-03]

URL: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/lektori/musilek/evo6.html> [cit. 2008-12-03]

URL: <http://encyklopedie.seznam.cz/heslo/48130-hippokratovy-pulmesicky> [cit. 2008-12-03]

5. Tangram – čínská skládačka

Tangram je stará čínská skládačka, která se již celá staletí těší nehasnoucí popularitě. Hráče všech věkových skupin fascinuje skutečnost, že ze sedmi dílků skládačky lze složit velké množství rozmanitých útvarů.

Obr. 5.1. Zdroj (*Mozkolam*, č. 16)

Tangram je druh skládačky, která díky své zvláštnosti dokáže zaujmout lidi různých profesí a zálib. Matematici v ní spatřují nevyčerpatelný zdroj geometrických vztahů. Učitelé používají tuto skládačku jako didaktickou pomůcku. Sběratelé sbírají různé verze hlavolamu vyrobené z nejrůznějších materiálů, jako jsou dřevo nebo slonovina, a také historické knihy o tangramu. Není těžké si tangram vlastnoručně vyrobit, stačí vystřihnout příslušné díly z papíru. Příznivci počítačů mají k dispozici jak počítačové programy věnované této skládačce, tak nesčetné množství internetových stránek.

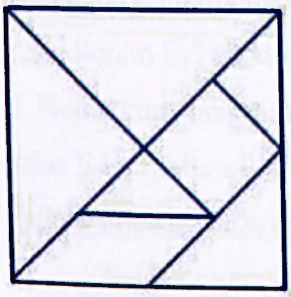
Sestavováním různých obrazců podle předlohy si procvičíme svoji představivost, smysl a cit pro geometrické obrazce a jejich vlastnosti. Tangram je vlastně čtverec, rozdělený na sedm částí (obr. 5.1), z nichž lze sestavovat různé geometrické obrazce, obecně známé předměty, zvířata a lidské postavy v charakteristických postaveních (pro každou úlohu je však vždy nutno použít všech sedmi částí). Způsob rozdělení čtverce tangramu na části, které jsou k tomuto účelu vhodné, je patrně jeden z nejlepších možných. Proto také tangram přetrvává tisíciletí.

Tangram mne zaujal svou velkou využitelností v matematice a tím, že si ho každý může sám vyrobit. Proto jej zpracovávám ve své práci. Tangram můžeme využít hned několikrát. Nechá se matematicky zkoumat, můžeme ho použít jako didaktickou pomůcku při vyučování, jako motivační prvek v hodinách nebo na táborech. V matematice můžeme zkoumat délky a obsahy jednotlivých dílů tangramu a využít ho k dokazování platnosti Pythagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník. Vzhledem k tomu, že můžeme z tangramu sestavovat konvexní geometrické útvary, lze jej použít k přetváření jednoho geometrického útvaru na jiný geometrický útvar o stejném obsahu.[30] To vše je rozpracováno v odstavci 5.1. Kapitola obsahuje i sadu vyřešených a okomentovaných úloh.

[30] Rešení konvexních útvarů na obrázcích v odstavci 5.1.4 jsem sestavovala sama.

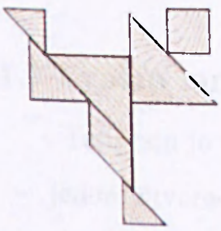
5.1 Materiál pro učitele – Tangram

Tangram je stará čínská skládačka, která díky své zvláštnosti dokáže zaujmout lidi různých profesí a zálib. Matematici v ní spatřují nevyčerpatelný zdroj geometrických vztahů. Učitelé používají tuto skládačku jako didaktickou pomůcku.



Obr. 5.2

Jedná se vlastně o čtverec, rozdělený promyšleným způsobem na sedm částí (obr. 5.2). Z těchto dílů lze sestavit nespočetné množství různých obrázků – konvexní geometrické útvary, předměty, zvířata, lidské postavy (viz obr. 5.3). Pro každý obrázek je vždy nutno použít všech sedm dílů. A jak můžeme pomocí tangramu rozvíjet tvořivost v matematice u svých studentů? Pomocí tangramu studenti poznají vztahy mezi geometrickými útvary, objeví zábavné způsoby práce a společně se svými spolužáky mohou vytvářet dynamické obrazce. Není těžké si tangram vlastnoručně vyrobit, stačí vystřihnout příslušné díly z papíru, nejlépe z tvrdého papíru pro snazší manipulaci.



Obr. 5.3

Součástí tohoto materiálu je popis pracovního listu – odstavec 5.1.7. Obsahuje sadu úloh, které jsou vyřešené a okomentované. Samotný pracovní list je uveden v příloze č. 4.

5.1.1 Něco málo z historie[31]

Odkud pochází tangram?

Dle jedné pověsti jistý čínský císař požádal, aby pro něj zhotovili rozměrnou skleněnou tabuli. Při dopravě do paláce se tabule s velmi jemnou strukturou rozbila. Všechny však velmi překvapila skutečnost, že se tabule neroztříštila na mnoho drobných kousků, ale na sedm geometrických útvarů s ideálními tvary. Když se je pokoušeli seskládat dohromady, ukázalo se, že to lze udělat mnoha různými způsoby. Když dorazili do paláce, předvedli císaři skleněnou tabuli sestavenou z dílů jako zvláštní druh hlavolamu. Císaři se tento dárek velmi zalíbil.

Tangram byl tedy vymyšlen v Číně někdy mezi roky 1796 a 1801. V Číně se tento mechanický hlavolam nazýval „chi chiao ťu“, což volně přeloženo znamená „důmyslná

[31] Text o historii je čerpán z časopisu (*Mozkolam*, č. 16., s. 13 – 14). V časopise *Mozkolam* nejsou uváděni autoři, proto je odkazováno přímo na název časopisu a jeho číslo.

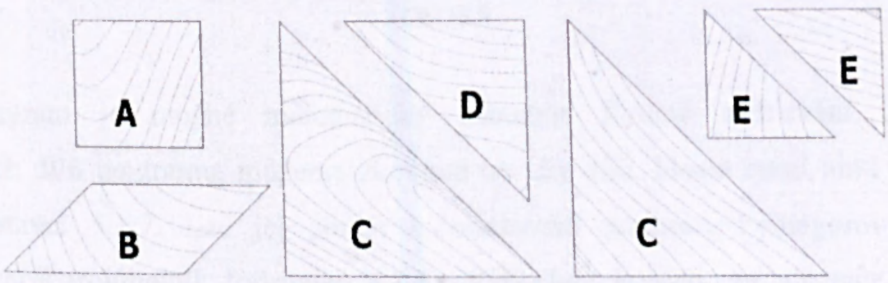
sedmidílná skládačka“. Nejstarší známá publikace o tangramu pochází z Číny z roku 1813. Do naší doby se zachovaly pouze pozdější publikace z roku 1815. Již tehdy se skládačka těšila značné oblibě. Na začátku roku 1817 se hra objevila v Evropě a poté se dostala do Spojených Států. Sám Napoleon si s ním krátil dlouhou chvíli ve vyhnanství na ostrově Sv. Heleny, jak uvádějí jeho životopisci. Od této chvíle rostla jeho popularita ještě rychleji. Zanedlouho byl trh doslova zaplaven jak knížkami na toto téma, tak i různými verzemi hry. K fanouškům tangramu patřily mimo jiné takové celebrity jako spisovatelé Lewis Carrol nebo Edgar Allan Poe.

Odkud pochází název tangram?

Jedna z verzí spojuje tangram s národem obývajícím břehy čínské řeky Tanky. Obyvatelé této oblasti byli známými obchodníky, zabývajícími se mimo jiné obchodováním i s opiem. Podle další verze pochází název od starého anglického slova „tamgram“ označujícího hlavolam.

5.1.2 Využití tangramu v matematice

Tangram je vlastně čtverec, který se skládá ze sedmi dílků (nazývaných tany). Jsou to – jeden čtverec, jeden rovnoběžník, dva stejné velké trojúhelníky, jeden střední trojúhelník a dva stejné malé trojúhelníky (viz obr. 5.4). Všechny trojúhelníky jsou rovnoramenné a pravoúhlé.

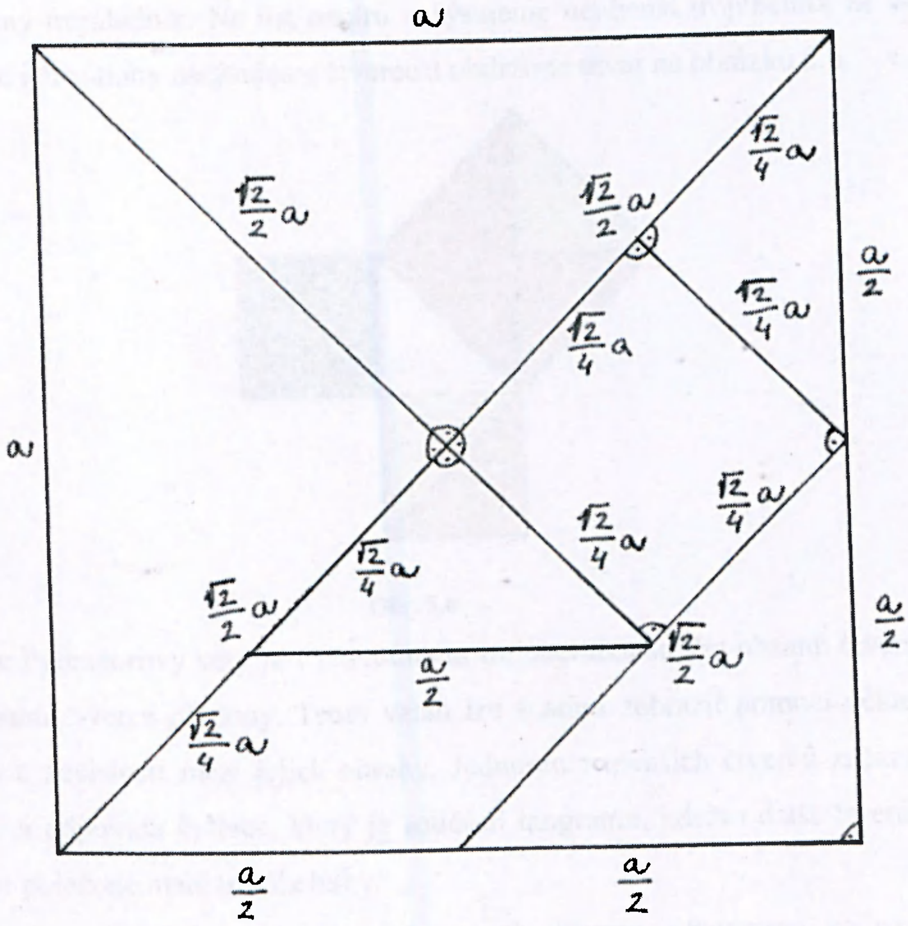


Obr. 5.4. Zdroj (*Mozkolam*, č. 16, s. 13)

Když si zkusíme narýsovat všechny dílky do čtverce o velikosti strany a, můžeme pak lehce zjistit velikosti stran jednotlivých útvarů (dílů tangramu) – viz obr. 5.5. Podívejme se ještě na velikosti úhlů v dílech tangramu:

- čtverec má čtyři úhly, z nichž každý má 90°
- rovnoběžník má dva úhly po 45° a dva po 135°

- všech pět trojúhelníků jsou rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, tedy každý má jeden úhel 90° a dva úhly 45°.



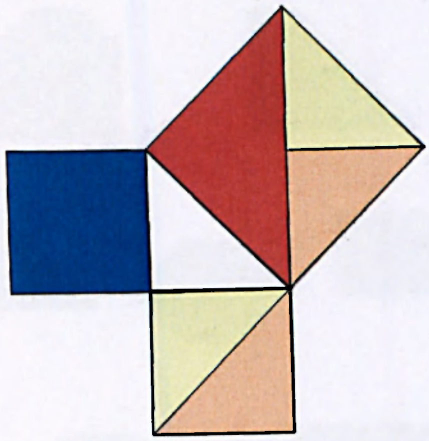
Obr. 5.5

Tangram je možné matematicky zkoumat. Kromě zjišťování délek stran jednotlivých dílů tangramu, můžeme zkoumat obsahy dílů, hledat mezi nimi závislosti – více v odstavci 5.1.7. Lze jej použít k dokazování platnosti Pythagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník (odstavec 5.1.3). Vzhledem k tomu, že můžeme z tangramu sestavit konvexní geometrické útvary, lze jej použít k přetváření jednoho geometrického útvaru na jiný geometrický útvar o stejném obsahu – o tom v odstavci 5.1.4.

Tangram můžeme také využít jako motivační prvek v hodině. Můžeme zadat studentům sadu úloh na samostatnou práci. Kdo bude mít hotovo, může si vzít hlavolam a hrát si a ostatní mohou v klidu řešit dál. Studenti mohou dostat díly tangramu vytištěné na papíře a mohou si je vystříhat a sestavovat obrázky.

5.1.3 Tangram a Pythagorova věta

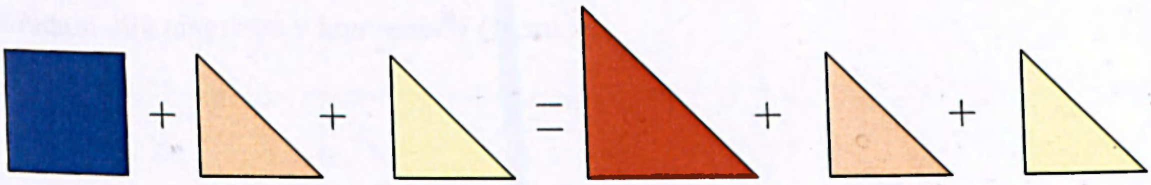
Pomocí tangramu lze velmi snadno znázornit platnost Pythagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník. Na list papíru narýsujeme nejmenší trojúhelník ze skládačky. Poté u každé jeho strany narýsujeme čtverec a obdržíme útvar na obrázku 5.6.



Obr. 5.6

Dle Pythagorovy věty je v pravoúhlém trojúhelníku součet obsahů čtverců odvěsen roven obsahu čtverce přepony. Tento vztah lze snadno zobrazit pomocí některých dílků skládačky a závislostí mezi jejich obsahy. Jednomu z menších čtverců znázorněných na obrázku 5.6 odpovídá čtverec, který je součástí tangramu, kdežto další čtverec tvoří dva vedle sebe položené malé trojúhelníky.

V odstavci 5.1.7 se dozvíme, že obsah čtverce z tangramu se rovná obsahu středního trojúhelníka. Takže obsah dvou čtverců vyznačených odvěsnami bude stejně velký jako obsah středního a dvou malých trojúhelníků z tangramu (obr. 5.7). Je tedy zcela zřejmé, že součet čtverců odvěsen je roven čtverci přepony, přesně podle Pythagorovy věty.

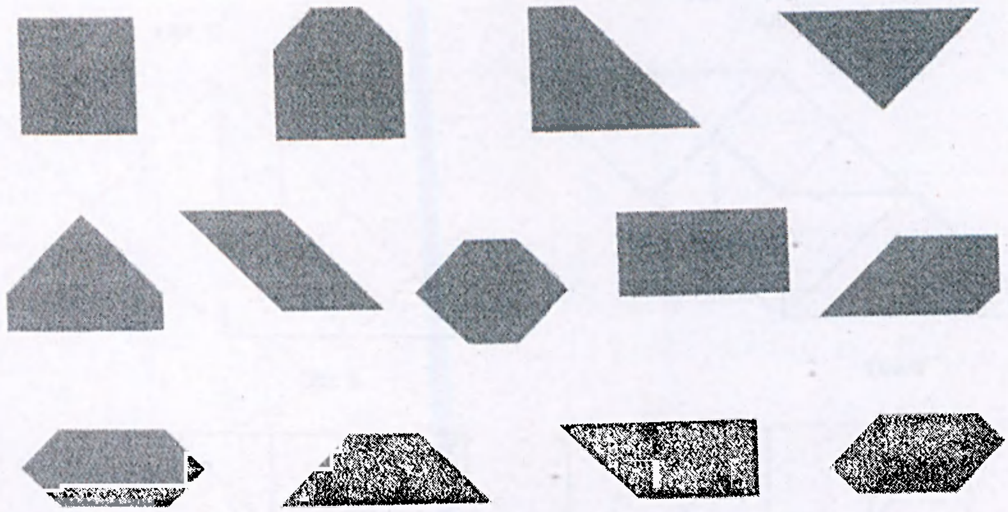


Obr. 5.7

Podobným způsobem lze znázornit platnost Pythagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník na středním a velkém trojúhelníku z tangramu. Tyto případy jsou uvedeny v příloze č. 5.

5.1.4 Tangram a konvexní geometrické útvary

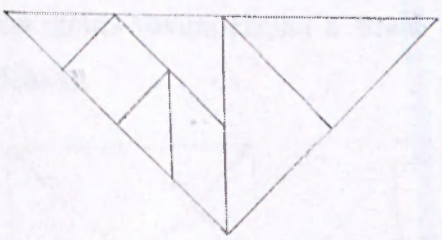
Na obrázku 5.2 na straně 51 jsme viděli díly tangramu poskládané do čtverce. Ale čtverec není jediný geometrický útvar, do kterého jde tangram sestavit. Celkem z něj lze složit 13 konvexních geometrických útvarů[32] (viz obr. 5.8).



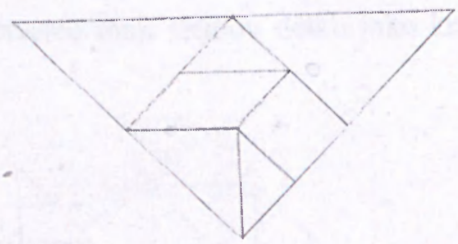
Obr. 5.8. Zdroj (*Mozkolam*, č. 16, s. 16)

Jedná se o konvexní čtyřúhelníky (čtverec, obdélník, rovnoběžník resp. kosodélník, rovnoramenný lichoběžník, pravoúhlý lichoběžník – dvakrát), pravoúhlý trojúhelník a dále dva konvexní pětiúhelníky a čtyři konvexní šestiúhelníky.

Na obrázcích A – S dole jsou uvedena uspořádání dílů tangramu v jednotlivých geometrických útvarech. Jednotlivé díly k sobě musí těsně přiléhat. Lze si povšimnout, že u některých útvarů stačí přesunout jeden díl a získáme jiný útvar. To platí pro trojúhelník, lichoběžník, rovnoběžník a obdélník. Právě tyto útvary lze složit dvěma způsoby, jak ukazují obrázky A – H. Jeden útvar – pravoúhlý lichoběžník je možné složit i třemi způsoby, viz obr. Q, R a S. Je samozřejmé, že mohou existovat ještě jiné varianty uspořádání dílů tangramu v konvexních útvarech.

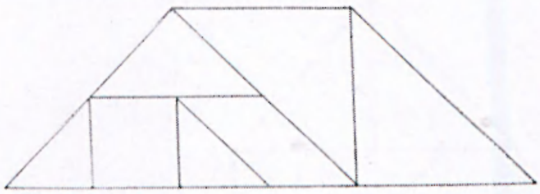


Obr. A

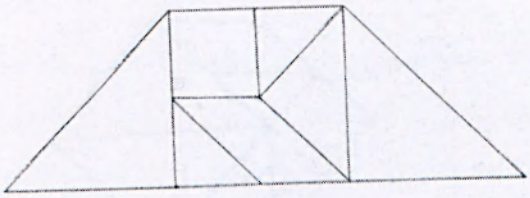


Obr. B

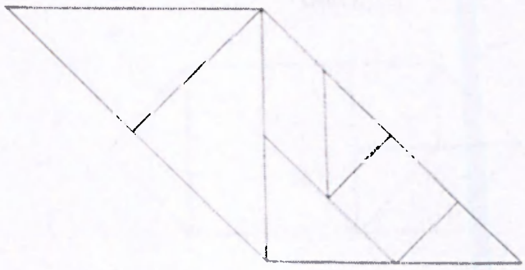
[32] V roce 1942 dokázali dva čínští matematici – Fu Tsiang Wang a Chuan-Chih Hsiung – že z dílků tangramu lze složit pouze 13 konvexních útvarů. Výsledky svých pokusů publikovali ve 49. ročníku *American Mathematical Monthly* (*Mozkolam*, č. 16, s. 16).



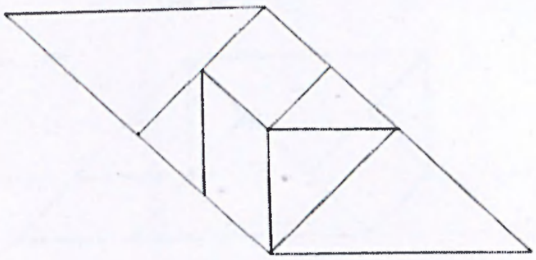
Obr. C



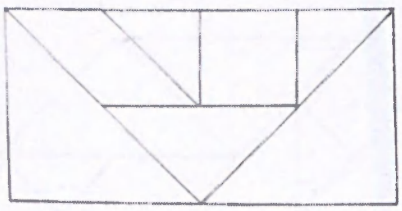
Obr. D



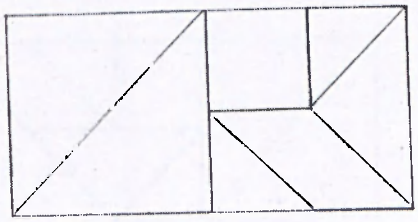
Obr. E



Obr. F



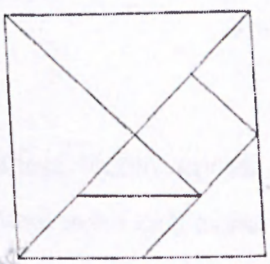
Obr. G



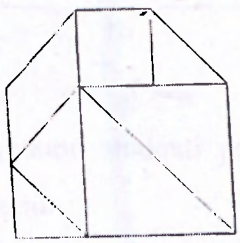
Obr. H

Po sestavení jednotlivých útvarů a zjištění velikostí stran těchto útvarů je patrné, že mezi stranami útvarů existují určité vztahy, např.:

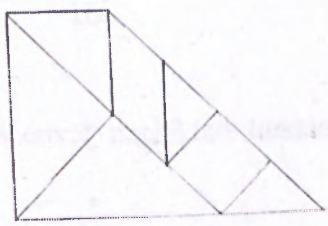
- obdélník má jednu stranu dvakrát delší než druhou
- lichoběžník má jednu základnu třikrát delší než druhou základnu, platí pro lichoběžníky na obrázcích C, D, K, pro druhý pravoúhlý lichoběžník to neplatí (obr. Q, S)
- přepona trojúhelníka má stejnou délku jako jedna strana obdélníka
- odvěsna trojúhelníka má stejnou délku jako jedna strana rovnoběžníka
- druhá strana rovnoběžníka a strana čtverce mají stejnou délku jako kratší strana obdélníka



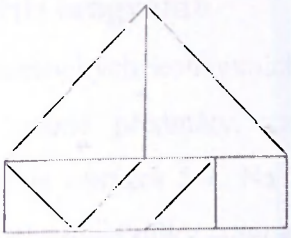
Obr. I



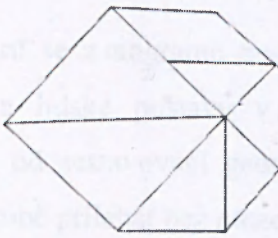
Obr. J



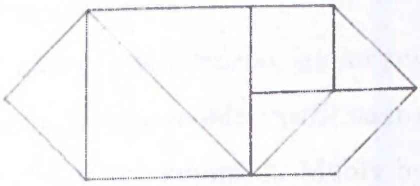
Obr. K



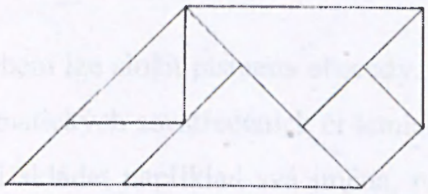
Obr. L



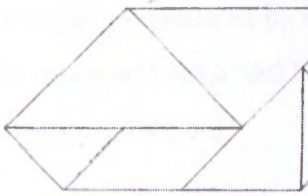
Obr. M



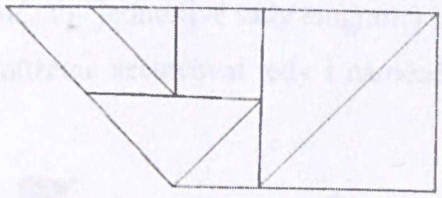
Obr. N



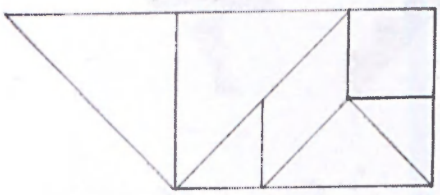
Obr. O



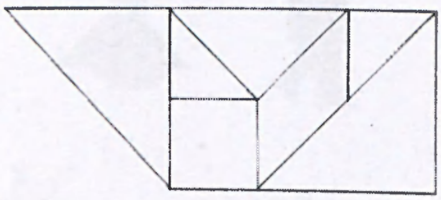
Obr. P



Obr. Q



Obr. R



Obr. S

Obsah všech sestavených konvexních útvarů bude samozřejmě pro všechny stejný, protože útvary jsou poskládané ze stejných dílů. Obsah můžeme zjistit tak, že sečteme obsahy jednotlivých dílů tangramu nebo vypočítáme obsah některého z konvexních útvarů. Obsah všech konvexních útvarů, které můžeme sestavit z dílů tangramu, je:

$$S = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{8}a^2$$

$$S = \frac{(1+1+2+4+4+2+2)}{16}a^2 = \frac{16}{16}a^2$$

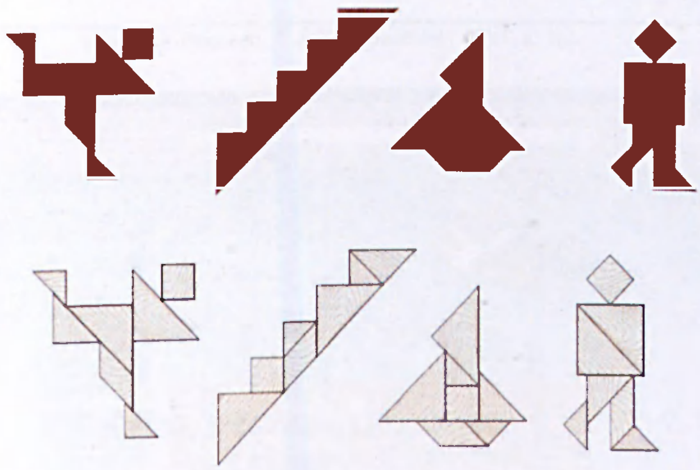
$$S = a^2$$

Pomocí těchto útvarů si mohou studenti procvičovat například hledání obvodů daných útvarů nebo zjišťování obsahů.

5.1.5 Další využití tangramu

Vedle geometrických konvexních útvarů se z tangramu nechají sestavit písmena abecedy, obecně známé předměty, zvířata a lidské postavy v různých postaveních. Názornou ukázkou je obrázek 5.9. Na rozdíl od sestavování geometrických útvarů při sestavování obrázků nemusí dílky tangramu k sobě přiléhat bez mezer, nemusí se shodovat délky přikládaných částí. Jde spíše o to, aby obrázek poskládaný z dílů byl srozumitelný a často i překvapující.

V příloze č. 6 je uvedeno, jakým způsobem lze složit písmena abecedy. V praxi by se toto skládání písmen mohlo využít na matematických soustředěních či letních táborech. Děti by pracovaly ve skupinách. Mohly by si skládat například svá jména, názvy měst, zvířat, rostlin atd. K dispozici by měly předlohu toho, jak mají písmena vypadat. Dále mohou mít několik sad tangramů a bude platit, že z každé sady mohou sestavit právě jedno písmeno. Pro lepší přehlednost by bylo vhodné, aby jednotlivé sady tangramů byly barevně odlišeny. Použitím několika sad tangramů můžeme sestavovat tedy i náročnější obrazce, například obrázky 5.10 a 5.11.



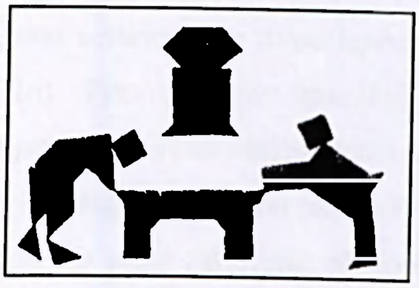
Obr. 5.9 – běžící postava, schody, loď a stojící postava. Zdroj (*Mozkolam*, č. 16)

Existuje celá řada internetových stránek, kde nalezneme předlohy, podle kterých můžeme skládat obrázky. Setkáme se zde také s počítačovými programy, které se skládačce věnují.[33] Podle předlohy pak můžeme skládat obrázky lidí, zvířat a předmětů přímo v počítači.[34] Pokud si nevíme rady, máme možnost se podívat, jak jsou jednotlivé díly tangramu v obrázku poskládané. Počítačových programů by se nechalo v praxi využít opět jako motivačního prvku. Bude-li mít učitel ve třídě k dispozici počítače, mohou

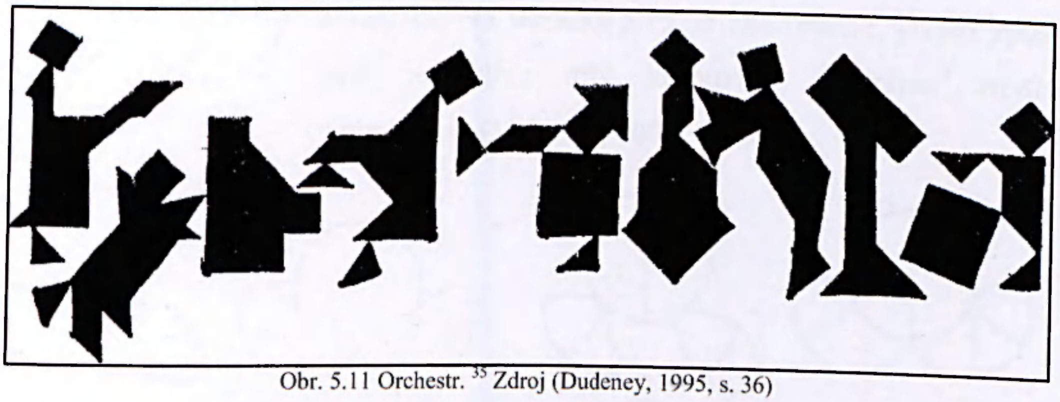
[33] Počítačové programy nalezneme například na stránkách: <http://www.bosounohou.cz/tangram/> [cit. 2009-02-12] nebo <http://www.smazba.cz/hra/tangram-game/> [cit. 2009-02-12] (viz obr. 5.12).

[34] ZŠ Rokytnice pořádá korespondenční seminář ve skládání hlavolamu. Více na stránkách <http://www.vsetin.zsrokytnice.cz/m_tangram.php> [cit. 2009-02-12].

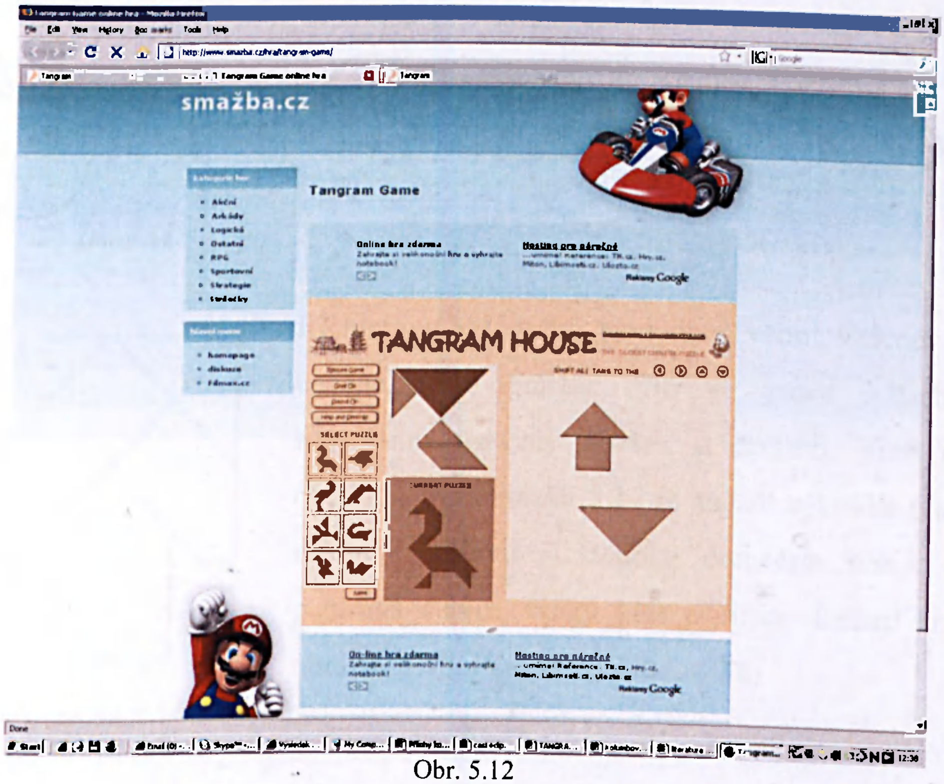
studenti po skončení samostatné práce vytvářet obrázky na počítači. Rozvíjí to jejich představivost a fantazii.



Obr. 5.10 Partie kulečníku. Zdroj (Dudeney, 1995, s. 35)



Obr. 5.11 Orchestr.[35] Zdroj (Dudeney, 1995, s. 36)

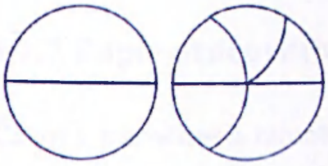


Obr. 5.12

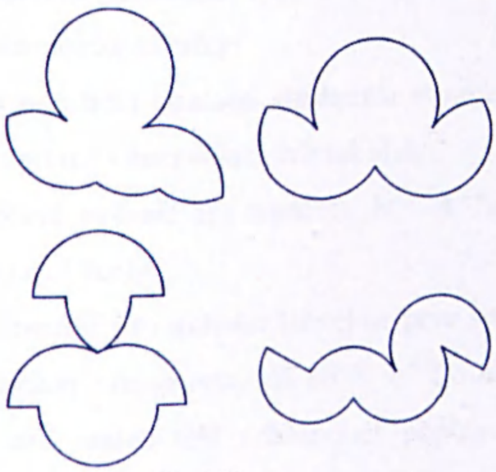
[35] Obrázek nazvaný Orchestr má pojmenované jednotlivé členy: dirigent, klavírista, malý tlustý kornetista, levák hrající na basu v realistické poloze a bubeník v impozantním postavení. Dále je tam pes za klavírem.

5.1.6 Obměny čtvercového tangramu

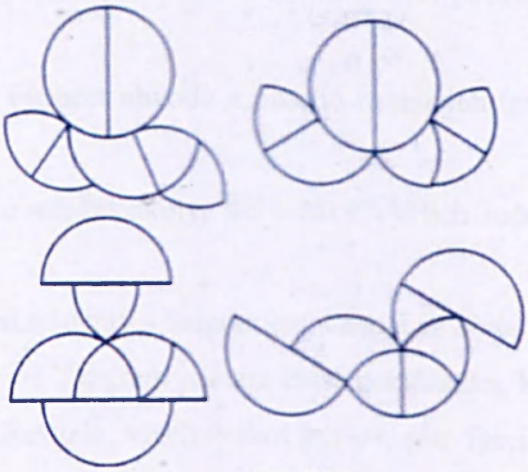
Kromě tradičního čtvercového tangramu existuje řada jeho obměn. Jedná se například o oválnou verzi, nazývanou Kolumbovo vejce, která je popsána v kapitole 7. Další variantou je kruhový tangram sestavený ze dvou kruhových ploch (obr. 5.13) či Richterovy skládačky[36] (obr. 5.16). Tyto tangramy umožňují skládat velké množství rozličných útvarů. Některé z nich jsou uvedeny na následujících obrázcích včetně řešení. Obrazce, které vzniknou z kruhového tangramu, nejsou na rozdíl od čtvercového tangramu hranaté, ale ladně zakřivené. Možnosti zachycené na obrázku 5.14 mají i své názvy, a to hlemýžď, květ lotosu, mandarin a housenka. Na obrázku 5.15 je znázorněno, jakým způsobem jsou jednotlivé díly kruhového tangramu uspořádány v obrázcích. (Vejmola, 2007, s. 35)



Obr. 5.13

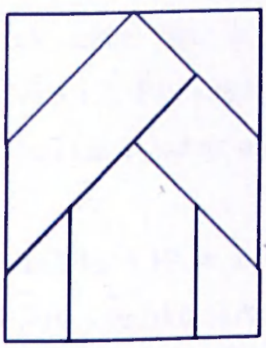


Obr. 5.14



Obr. 5.15

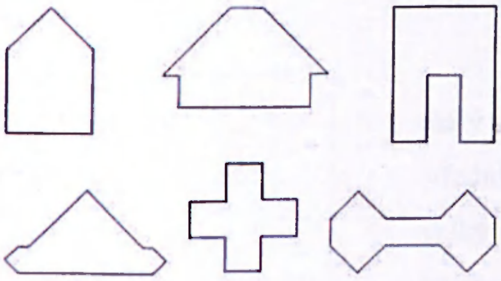
Richterovy skládačky jsou dnes velmi vzácné a vysoce ceněné. Na obrázku 5.16 je jeden z Richterových hlavolamů nazvaný Křížek a způsob, jímž rozděluje obdélník. Na obrázku 5.17 je zadání několika tvarů, které můžeme sestavit – stodola, domeček, brána vítězství, papírová čepice, řecký kříž a činka. Řešení znázorňuje obrázek 5.18. (Vejmola, 2007, s. 36)



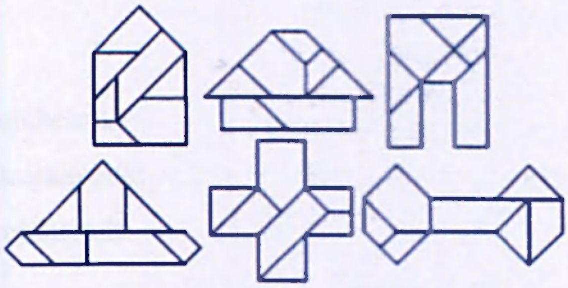
Obr. 5.16

---

36 Richterovy skládačky vyráběla firma F. A. Richtera. U nás se prodávaly ještě před druhou světovou válkou. Vyráběly se z barevné kameniny.



Obr. 5.17



Obr. 5.18

5.1.7 Popis pracovního listu[37]

Časová náročnost: minimálně dvě vyučovací hodiny. Záleží na tom, zda bude učitel chtít udělat vše v rámci hodiny nebo ponechá určitou část k domácímu zpracování.

Pomůcky studentů: rýsovací a psací potřeby, nůžky, čtvrtka o velikosti A4, popřípadě matematické tabulky.

Matematické znalosti studentů: vzorce pro výpočet obvodů a obsahů rovinných útvarů (lze použít i matematických tabulek).

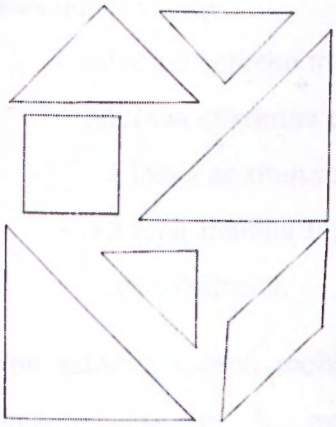
Věkové určení: pro studenty 1. – 4. ročníku střední školy, ale i žáky vyšších ročníků základní školy.

Komentář pro učitele: Učitel nejprve seznámí studenty s tangramem a zeptá se *Slyšel jste už někdo o tangramu, víte co to je? Co něm víte?* Tangram je stará čínská skládačka, která se celá staletí těší nehasnoucí popularitě. Řešitele všech věkových skupin fascinuje skutečnost, že ze sedmi dílů skládačky lze složit velké množství rozmanitých útvarů. Učitel ukáže například obrázky z odstavce 5.1.5.

Učitel může říci, k čemu všemu se může tangramu využívat, viz informace v odstavci 5.1.2. Pak rozdá studentům pracovní listy a nechá je pracovat na první úloze. Prochází třídou a sleduje počínání studentů.

1. Na obrázku 5.19 se nacházejí jednotlivé díly tangramu, ze kterého lze složit nesčetné množství obrázků (konvexní geometrické útvary, předměty, zvířata, lidské postavy). Nejprve jednotlivé díly vystřihněte. Následně zjistěte délky všech stran jednotlivých dílů a zapište je do pracovního listu. Víte, že jedna odvěsna nejmenšího trojúhelníka má délku $\frac{\sqrt{2}}{4}a$. Řešte obecně s číslem a.

[37] Samotný pracovní list je v příloze č. 4..



malý trojúhelník:

střední trojúhelník:

velký trojúhelník:

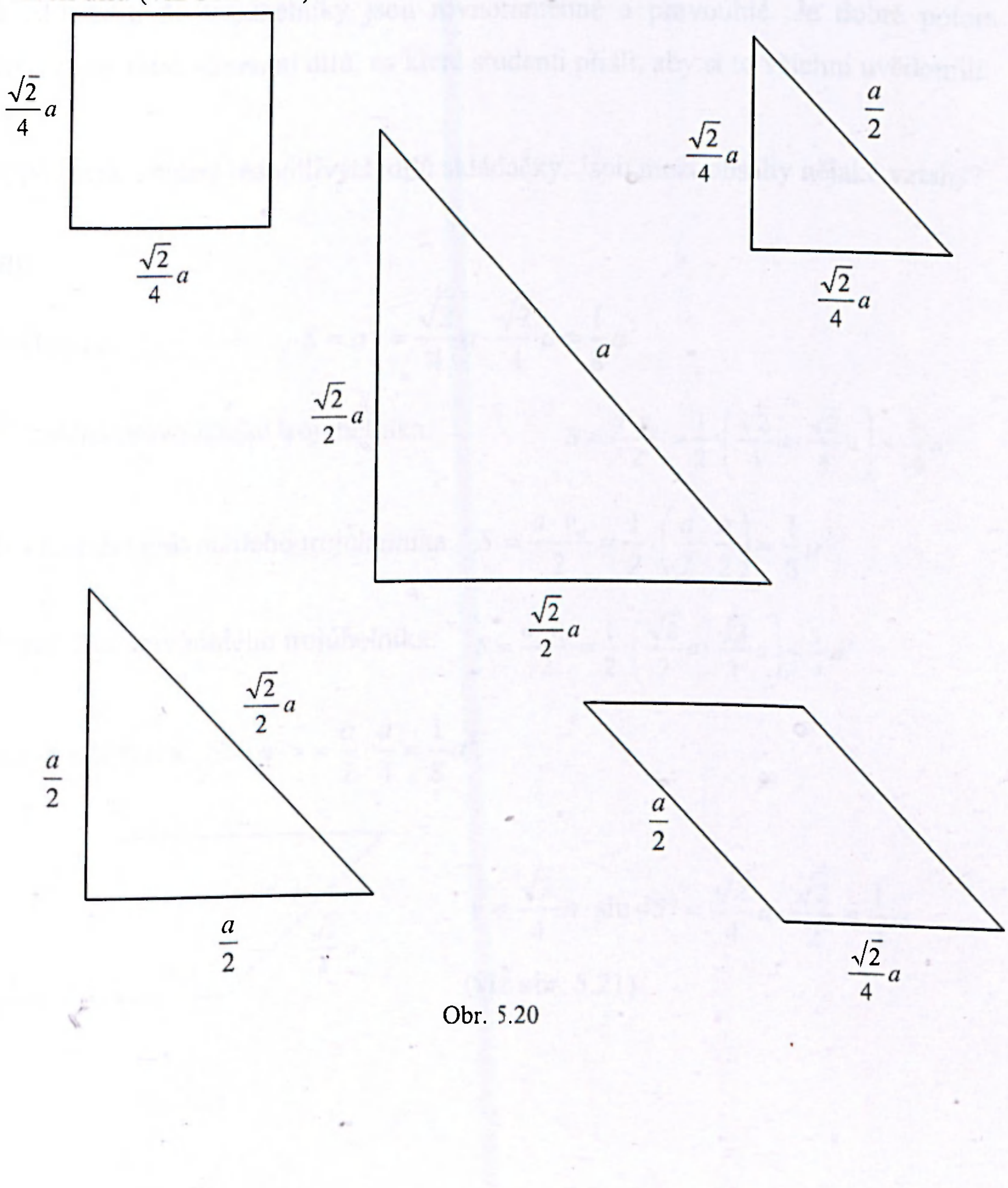
čtverec:

rovnoběžník:

Najděte vztahy mezi stranami dílů.

Obr. 5.19

Řešení: Manipulací s vystřihanými díly tangramu lehce zjistíme velikosti jednotlivých stran všech dílů (viz obr. 5.20).



Obr. 5.20

Ze zjištěných délek stran jednotlivých dílů tangramu můžeme odvodit například následující vztahy:

- odvěsna velkého trojúhelníka má stejnou délku jako přepona středního trojúhelníka,
- odvěsna středního trojúhelníka má stejnou délku jako přepona malého trojúhelníka a jedna ze stran rovnoběžníka,
- odvěsna malého trojúhelníka má stejnou délku jako strana čtverce a druhá strana rovnoběžníka.

Komentář: Studenti mohou pracovat ve dvojicích nebo ve skupinách. Učitel by měl upozornit na to, že mají studenti zjišťovat délky stran obecně s proměnnou a. Poměřováním stran dílů by studenti měli přicházet na to, že trojúhelníky jsou rovnoramenné. Je-li zadána odvěsna, měli by si studenti uvědomit, že trojúhelníky jsou pravoúhlé. Učitel se může studentů zeptat, jaké jsou trojúhelníky. Pokud by nikdo nevěděl, může zdůraznit, že trojúhelníky jsou rovnoramenné a pravoúhlé. Je dobré potom říci některé vztahy mezi stranami dílů, na které studenti přišli, aby si to všichni uvědomili.

2. Vypočítejte obsahy jednotlivých dílů skládačky. Jsou mezi obsahy nějaké vztahy?

<u>Řešení:</u>

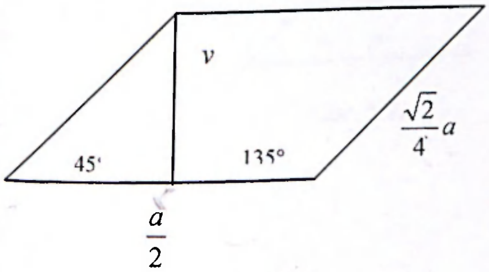
Obsah čtverce: $S = a^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{1}{8}a^2$

Obsah malého pravoúhlého trojúhelníka: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}a\right) = \frac{1}{16}a^2$

Obsah středního pravoúhlého trojúhelníka: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{8}a^2$

Obsah velkého pravoúhlého trojúhelníka: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{1}{4}a^2$

Obsah rovnoběžníka: $S = a \cdot v = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{8}a^2$



Obr. 5.21

$$v = \frac{\sqrt{2}}{4}a \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}a$$

(viz obr. 5.21)

Z obsahů, které jsme vypočítali, můžeme odvodit například následující vztahy mezi obsahy dílů:

- obsah velkého trojúhelníka je dvakrát větší než obsah středního trojúhelníka a čtyřikrát větší než obsah malého trojúhelníka
- středně velké útvary – trojúhelník, čtverec a rovnoběžník – mají stejné obsahy
- obsah středního trojúhelníka je dvakrát větší než obsah malého trojúhelníka

Komentář: U této úlohy přicházejí studenti na obsahy dílů různými způsoby, jak bylo ověřeno v praxi (viz kapitola 3). Někteří studenti používají vzorců pro výpočet obsahů útvarů. Jiní vychází z toho, kolikrát se nejmenší trojúhelník vejde do ostatních dílů, a z toho pak odvozují obsahy. Někdo kombinuje oba způsoby práce. Pokud bychom chtěli procvičovat výpočty obsahů útvarů pomocí vzorců, museli bychom jim to výhradně říci.

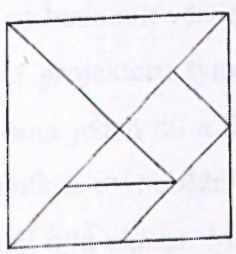
3. Mají některé útvary skládačky stejný obvod? Pokud ano, uveďte které a jaký mají obvod.

Odpověď: Ano. Jedná se o rovnoběžník a střední trojúhelník ze skládačky. Jejich obvod je

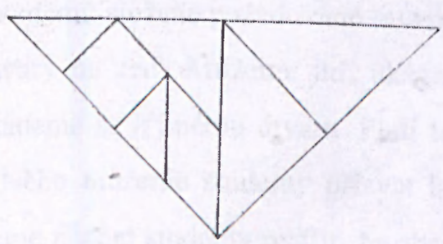
$$o = a + \frac{\sqrt{2}}{2}a\,.$$

4. Vystřižené díly se pokuste sestavit nejprve do čtverce a poté do trojúhelníka. Obě uspořádání zakreslete na papír. Nezapomínejte, že vždy musíte použít všech sedm dílů tangramu.

Řešení: Je uvedeno uspořádání dílů ve čtverci (obr. 5.22) a jedno z možných řešení, jak se nechají dílky tangramu složit do trojúhelníka (obr. 5.23).



Obr. 5.22

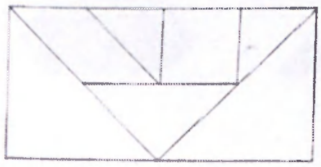


Obr. 5.23

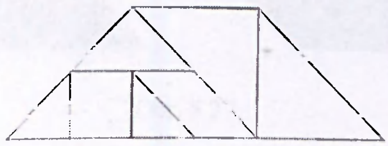
Komentář: Učitel zdůrazní, že pro sestavení každého obrázku je vždy nutno použít všech sedmi dílů. Můžeme potom studenty upozornit na to, že přesunutím dvou dílů ze čtverce se dostaneme k jednomu uspořádání dílů v trojúhelníku.

5. Zkuste ze všech dílů tangramu vytvořit postupně obdélník s jednou stranou dvakrát delší než druhou a lichoběžník s jednou základnou třikrát delší než druhou. Zakreslete je a porovnejte obsahy těchto útvarů. Jaké budou a proč?

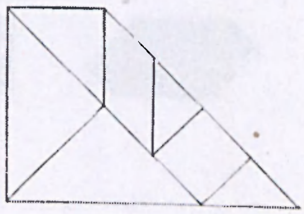
__Řešení:__ Je uvedeno jedno z možných řešení pro složení obdélníka (obr. 5.24) a dvě různá řešení pro složení lichoběžníka (obr. 5.25 a 5.26).



Obr. 5.24



Obr. 5.25



Obr. 5.26

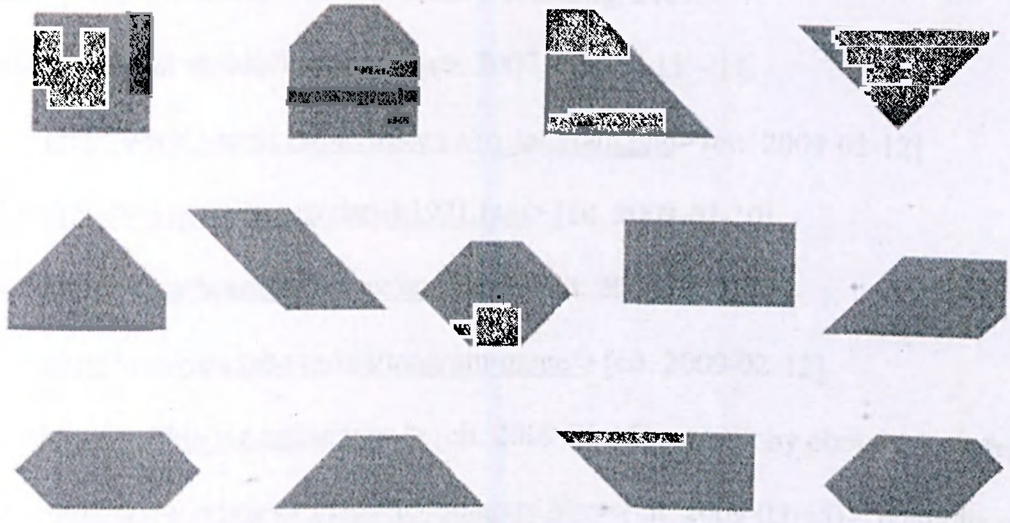
Obsahy těchto útvarů budou stejné, protože jsou složené ze stejných dílů. Obsah je: $S = a^2$. To je vidět už z toho, že všech sedm dílků lze složit do čtverce o straně a. Případně to můžeme dokázat i tím, že najdeme obsah obdélníka a obsah lichoběžníka pomocí vzorce.

Obsah obdélníka: $S = a \cdot b = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \sqrt{2} a = a^2$

Obsah lichoběžníka: $S = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} a \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = a^2$

Komentář: Poté, co bude mít většina studentů složené požadované útvary, bylo by vhodné promítnout pomocí projektoru tyto útvary na zeď. Můžeme jim ukázat, že u některých útvarů stačí přesunout jeden díl a dostaneme se k jinému útvaru. Platí to pro trojúhelník, lichoběžník, obdélník a rovnoběžník. Nebo můžeme studenty přizvat k jednomu stolu a tam jim přesunování dílů ukázat. Můžeme nechat studenty ověřit, že obsahy útvarů budou stejné za použití vzorců pro výpočet obsahů útvarů.

6. Pokuste se složit některé z konvexních útvarů podle předlohy (viz obr. 5.27). Čtverec, trojúhelník, obdélník a lichoběžník jste už skládali v předchozích úlohách. Najdete nějaké vztahy mezi stranami uvedených útvarů?



Obr. 5.27

Řešení: Jednotlivé útvary jsou vyřešené v odstavci 5.1.4. Stejně jako existují závislosti mezi stranami jednotlivých dílů tangramu, existují také závislosti mezi stranami těchto konvexních útvarů. Například:

- obdélník má jednu stranu dvakrát delší než druhou
- lichoběžník má dolní stranu třikrát delší než horní stranu
- přepona trojúhelníka má stejnou délku jako jedna strana obdélníka
- odvěsna trojúhelníka má stejnou délku jako jedna strana rovnoběžníka
- druhá strana rovnoběžníka a strana čtverce mají stejnou délku jako kratší strana obdélníka

Komentář: Při skládání těchto konvexních útvarů stačí také kombinovat velikosti stran, které již známe z první úlohy, a hned vidíme, co se k sobě hodí a co ne. Je tedy dobré, když si na jednotlivé vystřižené díly napíšeme velikosti stran.

Můžeme ještě studentům za domácí úkol dát úlohu: sestavte co nejzajímavější a nejoriginálnější obrázek poskládaný z dílů tangramu.

5.1.8 Zdroje k tématu

DUDENEY, H. E. *Matematické hlavolamy a hříčky*. Praha: Olympia, 1995.

VEJMOLA, S. *Hlavolamy*. Praha: Grada Publishing, 2007.

Tangram – čínská skládačka. *Mozkolam*, 2007, č.16, s. 13 – 16.

URL: <http://www.vsetin.zsrokytnice.cz/m_tangram.php> [cit. 2009-02-12]

URL: <http://www.rodina.cz/clanek1921.htm> [cit. 2009-02-10]

URL: <http://www.bosounohou.cz/tangram/> [cit. 2009-02-12]

URL: <http://www.smazba.cz/hra/tangram-game/> [cit. 2009-02-12]

URL: <http://petrkle.wz.cz/tangram/> [cit. 2009-03-15] – předlohy obrázků i s řešením

URL: <http://www.e-hracky.cz/udelej/tangram.htm> [cit. 2009-03-15] – předlohy obrázků

6. Zlatý řez

"Geometrie má dva poklady:
Pythagorovu větu a zlatý řez.
První má cenu zlata,
druhý připomíná spíše drahocenný kámen."

Johannes Kepler[38]

Pythagorova věta je všeobecně známá a žáci ji poznají již na základní škole. Pojem zlatého řezu už tak známý není. Někdo se s ním seznámí na střední škole, někdo až na vysoké škole a někdo vůbec. Přesto máme zlatý řez všichni denně před očima. Se zlatým řezem se setkáváme v přírodě, aniž bychom si to uvědomovali. Připadá nám zcela přirozený. Tohoto poměru se využívá také v obrazech, fotografii, plastické chirurgii, stavebnictví a v dalších odvětvích, kde je kladen důraz mimo jiné na estetiku.

Zlatý řez (latinsky *sectio aurea*) je velmi zajímavá matematická konstanta, která lidstvo po staletí fascinuje svou všeobecností a harmonií. Zlatý řez je nejčastěji vnímán jako ideální poměr mezi dvěma úsečkami. Můžeme se setkat i s označením *zlatý poměr*, *zlaté číslo* nebo *zlatá proporce*.

Co tedy je zlatý řez? Zlatým řezem se rozumí rozdělení úsečky na dvě části, jejichž délky jsou v konkrétním poměru. Přesněji řečeno, poměr délky větší části takto rozdělené úsečky ku délce menší části je stejný jako poměr délky celé úsečky ku délce větší části. Tento poměr je konstantní pro všechny úsečky (nezáleží na jejich původní délce) a nazývá se zlaté číslo. Značí se písmenem φ a jeho hodnota je přibližně $\varphi \doteq 1{,}61803$.

Toto téma jsem převážně zpracovávala ze dvou zdrojů.[39] Jedná se o diplomovou a bakalářskou práci, první se zabývá využitím zlatého řezu a druhá zlatým řezem v matematice. Vybrala jsem podle mého názoru nejdůležitější informace k tomuto tématu a obohatila jej o vyřešené a okomentované úlohy, v nichž se studenti seznámí se zlatým řezem. Naučí se vypočítat jeho hodnotu, konstruovat jej a využívat ho pro konstrukci některých rovinných útvarů. Studenti mohou zjišťovat poměr zlatého řezu i na vlastním těle, což pro ně může být velice zajímavé. Tím můžeme ukázat propojenost matematiky a přírody.

[38] Zdroj <http://cs.wikipedia.org/wiki/Zlalý_řez>[cit. 2009-03-05].
[39] Zdroje <http://www.volny.cz/zlaty.rez> [cit. 2009-03-01] a (Chmelíková, 2006).

6.1 Materiál pro učitele – Zlatý řez

Zlatý řez je velmi zajímavá matematická konstanta. Je nejčastěji vnímán jako ideální poměr mezi dvěma úsečkami. Můžeme se setkat i s označením *zlatý poměr*, *zlaté číslo* nebo *zlatá proporce*.

Zlatým řezem se rozumí rozdělení úsečky na dvě části, jejichž délky jsou v konkrétním poměru. Přesněji řečeno, poměr délky větší části takto rozdělené úsečky ku délce menší části je stejný, jako poměr délky celé úsečky ku délce větší části. Tento poměr je konstantní pro všechny úsečky (nezáleží na jejich původní délce) a nazývá se zlaté číslo. Značí se písmenem φ a jeho hodnota je přibližně $\varphi = 1{,}61803$.

Se zlatým poměrem se setkáváme každodenně všude kolem nás, aniž bychom si to uvědomovali. Připadá nám zcela přirozený, a má to i své odůvodnění. „Tato skutečnost souvisí s činností mozku. Přesněji s tím, že při pozorování předmětů obsahujících poměry zlatého řezu vyvolávají vzniklé mozkové elektrické signály mimořádně příznivou informační rezonanci." (Opava, 1989, s. 269) Někdo se s ním seznámí na střední škole, někdo až na vysoké škole a někteří vůbec. A přitom na tělech živočichů, rostlin, schránkách mořských korýšů …. tam všude můžeme najít zlatý poměr. Dokonce i proporce lidského těla jsou mnohokrát v poměru zlatého řezu. Tohoto poměru se využívá také v obrazech, fotografii, plastické chirurgii, stavebnictví a v dalších odvětvích, kde je kladen důraz mimo jiné na estetiku. Toto téma může být pro studenty velice zajímavé, protože i sami na sobě mohou zjišťovat poměry zlatého řezu, a tak uvidět příklad propojenosti matematiky a okolního světa.

Součástí tohoto materiálu je popis pracovního listu – odstavec 6.1.4. Obsahuje sadu úloh, které jsou vyřešené a okomentované. Samotný pracovní list je uveden v příloze č. 8.

6.1.1 Něco málo z historie[40]

Zlatý řez má velmi dlouhou historii. Údajně ho měli používat již staří Egypťané při stavbě pyramid. První písemné zmínky pak pocházejí z antiky od Eukleida,[41] který ve svých *Základech* uvádí následující úlohu: „Rozdělte danou úsečku na dvě nestejné části tak, aby čtverec sestrojený nad větší částí měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna

[40] Většina informací o historii je čerpána z práce (Chmelíková, 2006, s. 6–7).

[41] Eukleides (asi 340–287 př.n.l.) – je jedním z nejznámějších matematiků starověku, jeho hlavním dílem jsou *Základy*, 13 knih (šest knih o planimetrii, čtyři o aritmetice, tři o stereometrii), ve kterých shrnul poznatky tehdejších matematiků a filosofů. Přes 2000 let sloužily jako učebnice geometrie. Více o Eukleidových Základech v knize (Vopěnka, 1989).

strana má délku menší části a druhá má délku celé úsečky." Řešením této úlohy je rozdělení dané úsečky v poměru zlatého řezu. (Konforovič, 1989, s. 54)

Zlatého řezu se hodně využívá také v renesanci. Najdeme jej na obrazech, v architektuře a v designu (hudební nástroje). Leonardo da Vinci považoval zlatý řez za ideál krásy a harmonie a hojně jej využíval ve svých malbách. Tehdejší matematici zlatý poměr nazývali dokonce „božským poměrem".

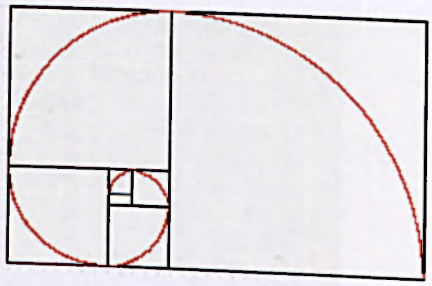
Názvů „zlatý řez" a „zlatý poměr" se začalo používat až v 19. století. Zlatý řez se nejčastěji značí řeckým písmenem φ *(fí)* na památku řeckého sochaře Feidia (asi 490–430 př.n.l.). Mezi jeho díly najdeme i sochu Dia Olympského, která byla považována za jeden ze sedmi divů světa. Podle některých zdrojů se však označení φ zavedlo spíše na počest Leonarda Pisánského zvaného Fibonacci.[42]

6.1.2 Využití zlatého řezu

Jak je zmíněno v úvodu, zlatý řez se využívá v řadě odvětvích, v malířství, sochařství, architektuře, při fotografování. V hojné míře se vyskytuje v přírodě a samozřejmě jej můžeme zkoumat v matematice. Podívejme se na některé konkrétní příklady ze světa kolem nás.

Zlatý řez v přírodě

Projevem zlatého řezu v přírodě je například uspořádání semen slunečnice nebo smrkové šišky, ananas, jadřinec u jablka atd. Dalším projevem je logaritmická spirála (obr. 6.1), která nemění tvar a roste stejně do délky i do šířky. O této spirále je zmíněno v odstavci 6.1.3. Jejím projevem je růst neživých částí živého tvora. Mohou to být vlasy, nehty, zobáky, zuby, rohy, parohy nebo schránky měkkýšů (viz obr. 6.2).

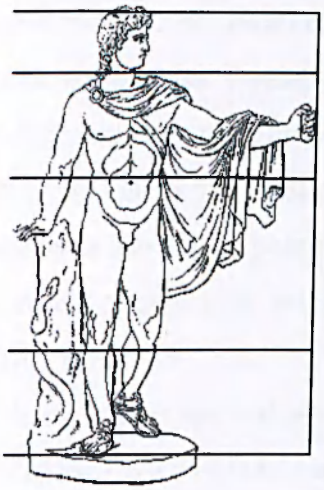


Obr. 6.1

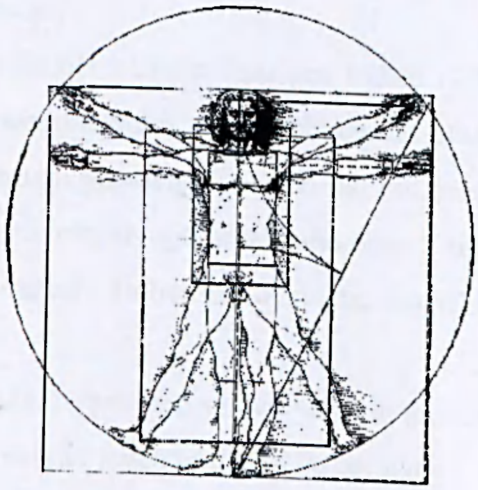
Obr. 6.2

[42] Leonardo Fibonacci (asi 1170–1240 n.l.), italský matematik. Je po něm pojmenována Fibonacciho posloupnost, která se zlatým řezem úzce souvisí. Zdroj <http://www.volny.cz/zlaty.rez> [cit. 2009-03-01].

Se zlatým řezem se můžeme setkat také na lidském těle. Filozofové zabývající se estetikou našli na lidském těle zlatý řez v poměru délek nad pasem a pod pasem.[43] Tyto části těla můžeme znovu rozdělit na dvě části v poměru 0,618 : 1. Hranicemi jsou další dvě zúžení na lidském těle: krk a noha těsně pod kolenem (obr. 6.3). Známý je také Ondřejův kříž (obr. 6.4).

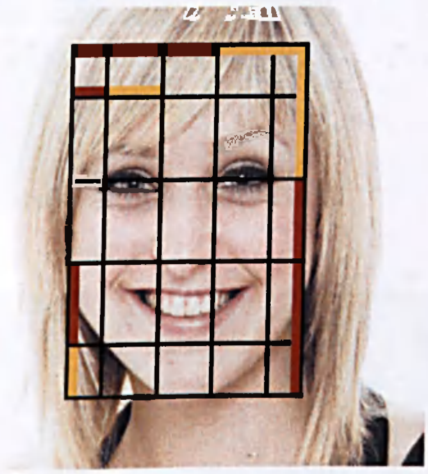


Obr. 6.3

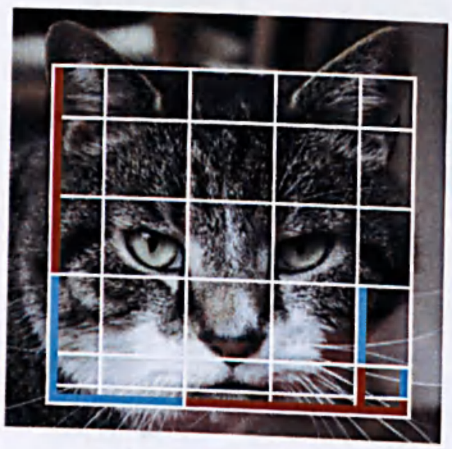


Obr. 6.4[44]

Zlatý řez můžeme hledat také nejen v obličeji člověka (obr. 6.5), ale i obličeji zvířat (obr. 6.6). Na obrázku 6.5 můžeme najít zlatý řez mezi délkami červených a žlutých úseček. Jejich poměr je přibližně 1,618. Obdobně toto platí v obrázcích 6.6 (poměr červených a modrých úseček), 6.7, 6.9 a 6.12 (poměr červených a žlutých úseček).



Obr. 6.5[45]



Obr. 6.6

[43] Stupeň krásy určité postavy můžeme spatřovat v tom, jak dalece se její proporce blíží k průměrným proporcím. Jedinců s průměrnými proporcemi je však poměrně málo a u většiny lidí hodnoty kolísají kolem tohoto průměru. Zdroj <http://www.volny.cz/zlatv.rez> [cit. 2009-03-01].

[44] Autorem je Leonardo da Vinci. Obdélníky mají strany v poměru zlatého řezu. Ve stejném poměru jsou umístěny na lidské ruce kotníky a zápěstní kloub. Zdroj (Kos, 1996, s. 140).

[45] Obrázky 6.5, 6.6, 6.7, 6.9 a 6.12 jsou převzaty ze zdroje <http://voho.cz/zlaty-rez/> [cit. 2009-03-01]. Bohužel na těchto stránkách nejsou uváděny původní prameny, kdo obrázky se zakreslením zlatého řezu vytvořil. Původní autory obrázků se mi nepodařilo dohledat.

Zlatý řez v umění[46]

Díky tomu, že známe zlatý poměr z přírody, vnímáme jej instinktivně jako krásný. Jsme na něj prostě zvyklí. Proto má zlatý řez široké využití v kompozici, designu, fotografii a architektuře. Najdeme jej například na obrazech Leonarda da Vinciho – Dáma s hranostajem (obr. 6.7), Portrét Beatrice de Este (obr. 6.8) nebo Poslední večeře Páně (obr. 6.9). Umělci zlatý řez používají často i neúmyslně.

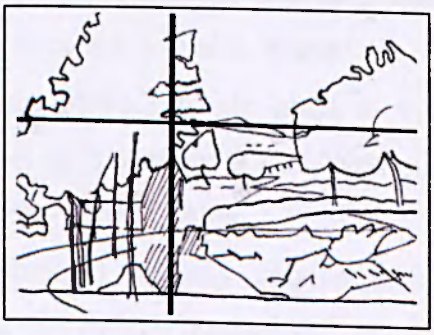
Při tvorbě obrazových formátů se používá poměr zlatého řezu pro výšku i šířku rámu. Se zlatým řezem se setkáváme i při umisťování hlavního motivu obrazu do plochy formátu. Esteticky mnohem účinnější je umístění mimo geometrický střed, do tzv. středu optického, který bývá dán užitím poměru zlatého řezu nebo dvojitého zlatého řezu. S tímto kompozičním řešením se často setkáváme v obrazech Bohumila Kubišty, například v obraze Žně (obr. 6.10).

Malíř však obraz nejspíše složitě neproměřuje, nýbrž se nechává vést citem, který mu určuje poměry rozměrů v obraze, vztahy částí k celku i jejich umístění do formátu.

Obr. 6.7

Obr. 6.8[47]

Obr. 6.9

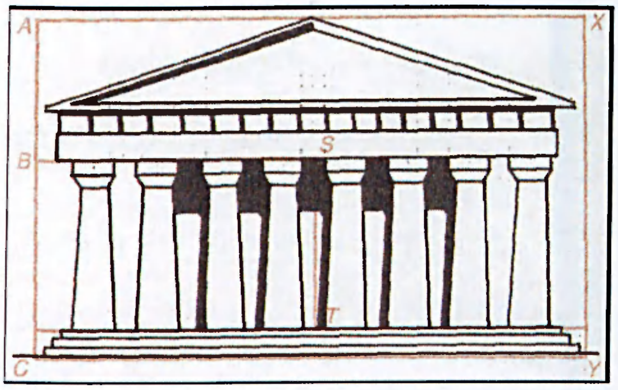


Obr. 6.10[48]

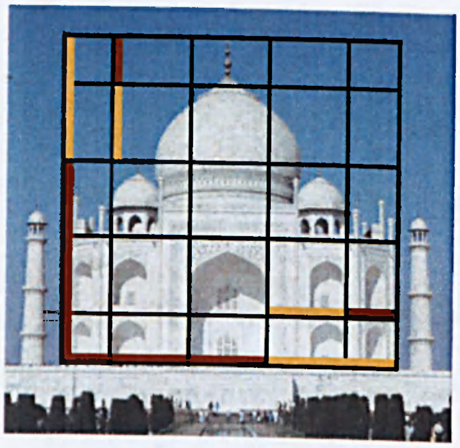
[46] Informace jsou získány ze zdroje <http://www.volny.cz/zlaty.rez> [cit. 2009-03-01].
[47] Zdroj <www.amadeo.sk> [cit. 2009-03-01].
[48] Olejomalba. Horizont je umístěn ve zlatém řezu výšky formátu, osa stodoly na svislici, která dělí šířku formátu ve zlatém řezu. Zdroj (Hron, 1989, s. 115).

Zlatý řez v architektuře

Zlaté číslo se používá v architektuře velmi dlouho. Objevuje se již na stavbách v antice. Využívá se například základny ve tvaru zlatého obdélníka, okna a dveře se rozmisťují dle zlatého poměru apod. Kromě Eukleida se v antice zlatým řezem zabýval i Phidias,[49] který postavil známý athénský Panthenón na Akropoli (obr. 6.11). Na obrázku 6.11 se zlatému číslu blíží poměry délek $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|XY|}{|CY|} = \frac{|ST|}{|SB|}$ a jiné poměry. (Opava, 1989, s. 270) Proporce ve zlatém poměru můžeme najít téměř na všech významných stavbách po celém světě. Například pyramida v Gize, chrám Notre-Dame v Paříži nebo Tadž Mahal (obr. 6.12) a řada dalších.



Obr. 6.11.


Obr. 6.12

6.1.3 Zlatý řez a matematika

Zdálo by se, že v oblasti lidské činnosti matematika a umění stojí na protilehlých pólech, nebo že se někdy až vylučují. Ale i v matematice je kus umění. Matematik Sobolev napsal: „Skutečným matematikem je ten, kdo nejen úlohu řeší, ale snaží se vyřešit ji pěkně."[50] O vztahu matematiky a umění svědčí i to, že mnozí vynikající výtvarníci byli výbornými matematiky, např. Leonardo da Vinci nebo Albrecht Dürer.

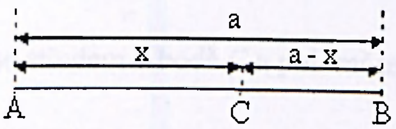
V následujícím textu se podíváme na odvození hodnoty zlatého čísla, jeho vlastností, konstrukci zlatého řezu a výskyt tohoto jevu v rovinné geometrii.

[49] Postavil jej Phidias – 5. st. př.n.l., sochař, malíř, zlatník a architekt.
[50] Zdroj <http://www.volny.cz/zlaty.rez> [cit. 2009-03-01].

Hodnota zlatého čísla a jeho vlastnosti

Jak již bylo zmíněno v úvodu, rozdělíme-li libovolnou úsečku na dvě nestejně dlouhé části tak, že poměr délky celé úsečky ku délce větší části je stejný jako poměr délky větší části úsečky ku délce menší části, je tato úsečka rozdělena tzv. „zlatým řezem". To znamená: Nechť je dána úsečka AB o velikosti a. Určíme na ní bod C tak, že platí:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, kde $x = |AC|$ a $a - x = |CB|$ (viz obr.6.13). Potom řekneme, že jsme úsečku AB rozdělili bodem C v *poměru zlatého řezu*. Tento poměr označíme písmenem φ. Číslo φ se nazývá *zlaté číslo*.



Obr. 6.13

Hodnotu zlatého čísla můžeme velice snadno určit. Zvolme velikost úsečky $a = 1$ a dosaďme do rovnice zlatého řezu: $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$. Po úpravě řešíme kvadratickou rovnici $x^2 + x - 1 = 0$. Získáme dva kořeny $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}61803$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Druhý kořen je záporný, proto nám nevyhovuje, neboť x je délka úsečky. Nyní už jen dopočítáme zlatý poměr

$$\varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803.$$

Závěr: Číslo φ je iracionální číslo, nelze jej tedy zapsat konečným počtem číslic. Jeho přibližná hodnota je 1,61803.

Nyní již známe konkrétní hodnotu zlatého čísla, podívejme se ještě na dvě jeho zajímavé vlastnosti. Jenom pro úplnost, označíme-li převrácenou hodnotu čísla x_2 symbolem φ', pak $\varphi' = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, což je přibližně $-0{,}61803$.

Při označení zavedeném výše platí:

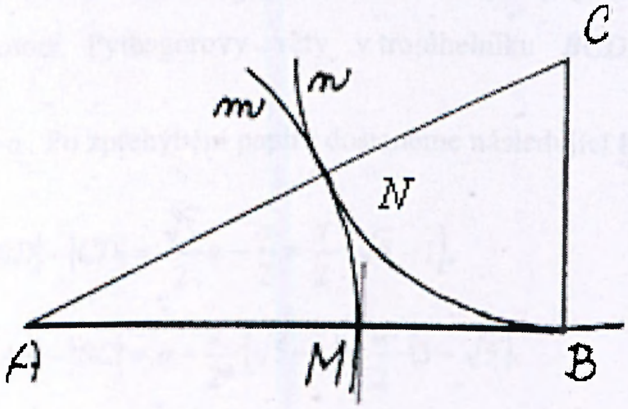
a) $\varphi \cdot \varphi' = -1$

b) φ je jediné kladné číslo, které zmenšené o jedničku, dává svou převrácenou hodnotu $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Konstrukce zlatého řezu

Zlatý řez můžeme zkonstruovat několika způsoby. Jedna z možných geometrických konstrukcí zlatého řezu se nazývá _Herónova konstrukce_[51] (viz obr. 6.14).

1. Sestrojíme úsečku AB, kterou chceme rozdělit zlatým řezem.
2. Z bodu B vztyčíme kolmici o délce poloviny $|AB|$.
3. Konec kolmice označíme jako bod C, tedy $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$.
4. Sestrojíme trojúhelník ABC.
5. Sestrojíme kružnici n se středem v bodě C a poloměrem $|BC|$.
6. Průnik kružnice n a úsečky AC označíme jako bod N.
7. Sestrojíme kružnici m se středem v bodě A a poloměrem $|AN|$.
8. Průnik kružnice m a úsečky AB označíme jako bod M.
9. Délky úseček AB a AM jsou navzájem ve zlatém poměru.



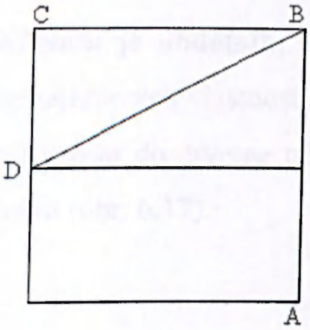
Obr. 6.14

Výpočtem můžeme zlatý řez úsečky sestrojit tak, že délku úsečky vynásobíme číslem $x \doteq 0{,}618$. Můžeme se o tom přesvědčit na libovolné úsečce AB. Nejprve sestrojíme bod C, který rozdělí úsečku AB ve zlatém řezu, a změříme velikost úsečky AC. Když délku úsečky AB vynásobíme hodnotou 0,618, měla by nám vyjít délka úsečky AC.

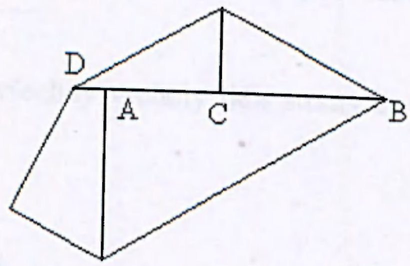
[51] Čerpáno ze zdroje (Chmelíková 2006, s. 10).

Konstrukce „přehýbáním papíru"[52]

Pro tuto konstrukci potřebujeme pouze kousek papíru, ze kterého si na začátku vystřihneme čtverec se stranou *AB*. Čtverec přeložíme na půl a rozložíme. Střed strany protější ke straně *AB* označíme *D*, druhý krajní bod úhlopříčky z bodu *A* označíme *C*. Dále přehneme papír podle úsečky *BD* a opět ho rozložíme (obr. 6.15).



Obr. 6.15



Obr. 6.16

Potom vezmeme bod *C* a přiložíme jej na přehyb *BD*. Úsečka *CD* splyne s částí úsečky *BD*, poloha bodu *D* se nezměnila. Přiložíme vrchol *A* opět na přehyb *BD*. Úsečka *AB* splyne s částí úsečky *BD*, poloha bodu *B* se nezměnila (obr. 6.16). Bod *C* dělí úsečku *AB* ve zlatém řezu tak, že úsečka *BC* je větším dílem úsečky *AB*.

Lehce můžeme ověřit, zda délky úseček *AC* a *BC* splňují podmínky zlatého řezu. Nechť $|AB| = a$. Pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku *BCD* zjistíme velikost úsečky *BD*: $|BD| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Po zpřehýbání papíru dostaneme následující hodnoty:

$$|BC| = |BD| - |CD| = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right),$$

$$|AC| = |AB| - |BC| = a - \frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right) = \frac{a}{2}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right).$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{\frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{\frac{a}{2}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

Tím jsme dokázali, že úsečky *AC* a *BC* jsou v poměru zlatého řezu.

[52] Čerpáno ze zdroje (Chmelíková, 2006, s. 15).

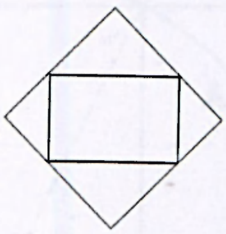
Zlaté číslo a rovinné útvary

Již jsme se dověděli, jak zlatý řez sestrojit a vypočítat. Nyní se podíváme na výskyt zlatého řezu v některých pravidelných mnohoúhelnících.

I. Zlatý obdélník

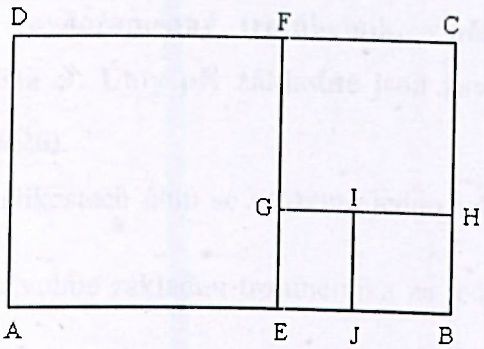
Zlatý obdélník je obdélník, jehož strany jsou v poměru zlatého řezu. Zlatý obdélník má řadu zajímavých vlastností.

a) Můžeme ho vepsat do čtverce tak, že jeho všechny vrcholy dělí strany čtverce ve zlatém poměru (obr. 6.17).



Obr. 6.17

b) Oddělíme-li od zlatého obdélníka *ABCD* čtverec *AEFD*, bude zbývající část opět zlatým obdélníkem. Jestliže od obdélníka *EBCF* oddělíme čtverec *GHCF*, zbytek bude opět zlatým obdélníkem *EBHG* atd. (obr. 6.18). Koeficient podobnosti zlatých obdélníků je roven $1/\varphi$. Platí $|EF| = \frac{1}{\varphi}|AB|$.



Obr. 6.18

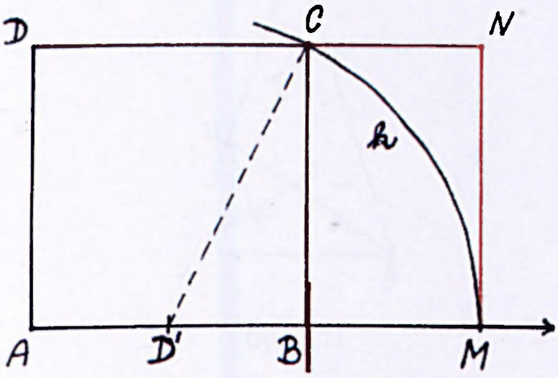
Konstrukce zlatého obdélníka[53]

Jak vyplývá z druhé vlastnosti, tak každý zlatý obdélník lze rozdělit na čtverec a další zlatý obdélník. Zlatý obdélník můžeme tedy zkonstruovat ze čtverce následujícím způsobem (obr. 6.19): Platí, že strana čtverce je stejně dlouhá jako kratší strana obdélníka.

---

[53] Čerpáno ze zdroje (Chmelíková, 2006, s. 20).

1. Sestrojíme čtverec $ABCD$, který budeme rozšiřovat na zlatý obdélník.
2. Úsečku AB prodloužíme na polopřímku.
3. V polovině úsečky AB sestrojíme bod D'.
4. Sestrojíme kružnici k se středem D' a poloměrem $|CD'|$.
5. Průnik kružnice k a polopřímky AB označíme jako bod M.
6. Obdélník $AMND$ je zlatým obdélníkem.
7. Délky úseček AM a MN jsou ve zlatém poměru.
8. Délky úseček AM a AB jsou ve zlatém poměru.

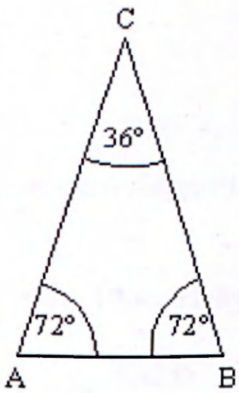


Obr. 6.19

Tuto konstrukci využijeme, pokud budeme znát velikost kratší strany zlatého obdélníka.

II. Zlatý trojúhelník

Zlatý trojúhelník je rovnoramenný trojúhelník, v němž je poměr délky ramene a základny roven číslu φ. Úhly při základně jsou rovny $72°$ a úhel při hlavním vrcholu je $36°$ (obr. 6.20).



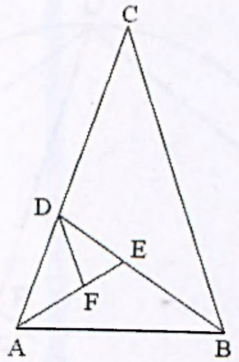
Obr. 6.20

O velikostech úhlů se můžeme jednoduše přesvědčit. Platí, že $\frac{|AC|}{|AB|} = \varphi$. Zvolme základnu trojúhelníka za jednotku délky. Aby byl trojúhelník zlatý, musí být ramena dlouhá $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Rozdělíme-li trojúhelník výškou k základně na dva pravoúhlé trojúhelníky a úhel při základně označíme α, pak bude platit:

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$ Odtud $\alpha = 72°$.

Jelikož součet úhlů v trojúhelníku je 180° a úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné, je snadné dopočítat velikosti zbývajících úhlů.

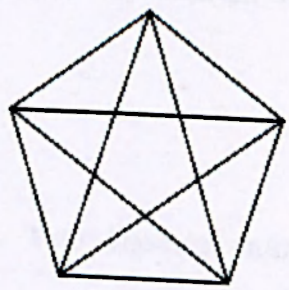
Podobně jako u obdélníka můžeme do zlatého trojúhelníka vepisovat další trojúhelníky, které budou opět zlaté. Vepíšeme-li do trojúhelníka ABC rovnoramenný trojúhelník s ramenem AB, bude nový trojúhelník DAB opět zlatý. Trojúhelník DAB je totiž rovnoramenný se základnou AD a jeho ramena svírají se základnou úhly $72°$. Tento postup můžeme mnohonásobně opakovat (obr. 6.21).



Obr. 6.21

III. Zlatý řez v pětiúhelníku[54]

Každý jistě zná pravidelný pětiúhelník. Jedná se o mnohoúhelník, který jako jediný má stejný počet stran a úhlopříček (obr. 6.22). Je to mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů, jehož strany i úhlopříčky lze nakreslit jedním tahem. Konstrukcí pravidelného pětiúhelníka se zabýval například Eukleides.



Obr. 6.22

Zlatý řez se v pravidelném pětiúhelníku vyskytuje hned několikrát. Uvedeme si některé vlastnosti pětiúhelníka související se zlatým řezem.

a) Úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se protínají v poměru zlatého řezu.

Každá úhlopříčka v pětiúhelníku daný pětiúhelník rozdělí na rovnoramenný lichoběžník a rovnoramenný trojúhelník s úhly 36° při základně. Sestrojíme-li

[54] Čerpáno ze zdrojů (Chmelíková, 2006 s. 23) a <http://www.volny.cz/zlaty.rez> [cit. 2009-03-01].

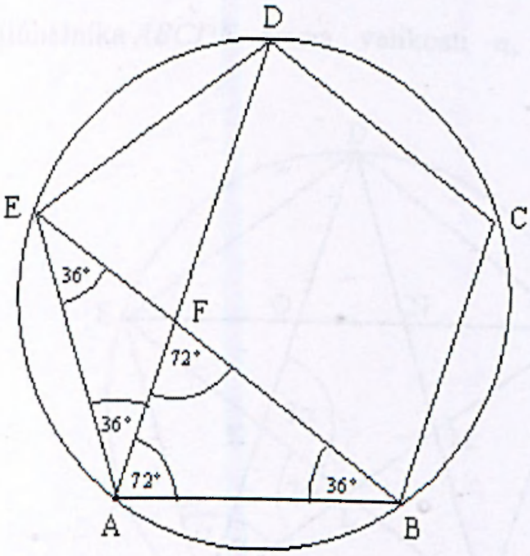
v pětiúhelníku $ABCDE$ úhlopříčky AD a BE, pak jsou trojúhelníky ABE a AFE podobné (obr. 6.23). Platí následující vztahy:

$$|BE|:|AB| = |AE|:|AF|$$

$$|AB| = |BF| = |AE|$$

$$|AF| = |EF|$$

$$|BE|:|BF| = |BF|:|EF| = \varphi$$



Obr. 6.23

Úsečka BF je větší díl úhlopříčky dělené zlatým řezem. Můžeme tedy sestrojit stranu pravidelného pětiúhelníka, je-li dána úhlopříčka.

b) Poměr délek úhlopříčky a strany pětiúhelníka je zlatý.

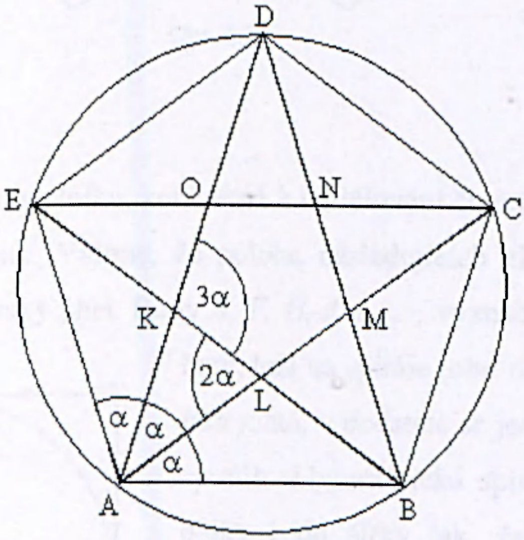
Poměr $|BE|:|AB| = \varphi$ vyplývá z předchozích výpočtů. Tuto vlastnost můžeme dokázat ještě jiným způsobem. Trojúhelník ABD z předchozí vlastnosti (obr. 6.23) je zlatý (podle velikostí vnitřních úhlů), tedy poměr délek úhlopříčky a strany pětiúhelníka je roven zlatému číslu.

c) Jestliže sestrojíme všechny úhlopříčky tohoto pravidelného pětiúhelníka dostaneme pěticípou hvězdu, uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník (viz obr. 6.24). Platí, že průsečíky úhlopříček pravidelného pětiúhelníka *ABCDE* jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníka *KLMNO*. Poměr stran pětiúhelníků je roven φ^2.

Podle věty o obvodovém úhlu dělí úhlopříčky každý vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníka na tři shodné úhly.[55] Velikost každého z nich označme $\alpha = 36°$. Trojúhelník AKL je rovnoramenný, jeho vnitřní úhly u vrcholů K a L jsou shodné a měří $72° = 2\alpha$. Potom i vnitřní úhly pětiúhelníka $LMNO$ u vrcholů K a L jsou shodné a měří $108° = (180° - 72°) = 3\alpha$. Samozřejmě platí:

$$\Delta EOK \cong \Delta AKL \cong \Delta BLM \cong \Delta CMN \cong \Delta DNO.$$

Pětiúhelník $KLMNO$ je pravidelný. Označme délky jeho stran písmenem x. Je-li délka strany původního pětiúhelníka $ABCDE$ rovna velikosti a, platí: $|AE| = |AO| = a$, $|AK| = |DO| = a - x$.



Obr. 6.24

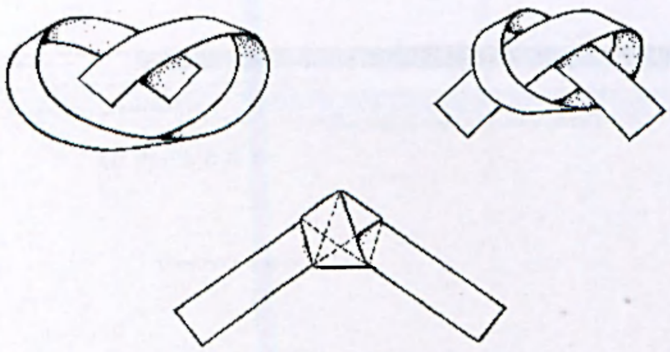
Trojúhelník EOA je zlatý, platí pro něj zlatý poměr: $\frac{|AO|}{|EO|} = \varphi$. Dále potom platí:

$\varphi = \frac{|AO|}{|EO|} = \frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|AO|}{|AK|} = \frac{|AO|}{|AO| - |KO|} = \frac{a}{a - x}$, odtud $\frac{1}{\varphi} = \frac{a - x}{a} = 1 - \frac{x}{a}$. Úpravou a použitím vlastnosti pro zlaté číslo $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ dostaneme $\frac{a}{x} = \frac{|AE|}{|KO|} = \frac{\varphi}{\varphi - 1} = \varphi^2$. To jsme chtěli dokázat.

---

[55] Velikost vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníka je $108°$. Pětiúhelník můžeme totiž rozdělit na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu opsané kružnice. Základny jsou strany pětiúhelníka a ramena mají délku rovnou poloměru kružnice opsané. Tyto trojúhelníky potom mají při vrcholu úhel o velikosti $72°$ a při základnách úhly $54°$.

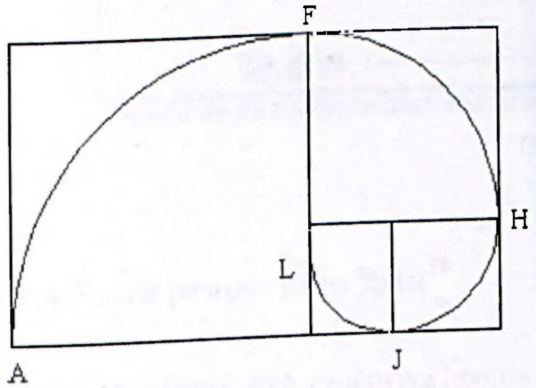
Zajímavost: S pravidelným pětiúhelníkem se můžeme setkat i při zavazování obyčejných tkaniček u bot. Sledujme uvázání uzlu na proužku papíru (obr. 6.25). Sestrojíme přesný pětiúhelník, na jehož průsvitu vidíme pěticípou hvězdu.[56]



Obr. 6.25

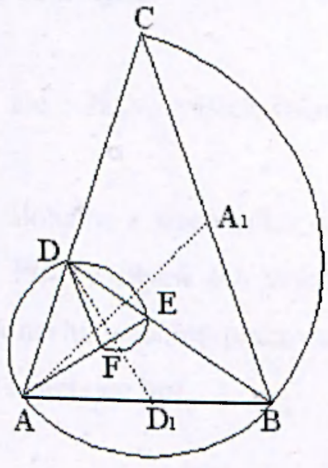
Zlatá spirála[57]

Vraťme se ke zlatému obdélníku, konkrétně k oddělování čtverce od obdélníka tak, že vznikne nový zlatý obdélník. Vidíme, že poloha následujících zlatých obdélníků se mění, obdélníky se otáčejí o pravý úhel. Body *A, F, H, J, L, ...*, vyznačující postupně zlaté řezy, leží na spirále (obr. 6.26). Této spirále se říká zlatá, v podstatě se jedná o logaritmickou spirálu. Logaritmická spirála roste stejně do délky i do šířky tak, že zachovává tvar a poměr částí. Skutečná spirála se nedotýká stran čtverců, ale protíná je pod velmi malým úhlem. Tuto spirálu nalezneme například na schránkách měkkýšů (viz obr. 6.2 na straně 70).



Obr. 6.26

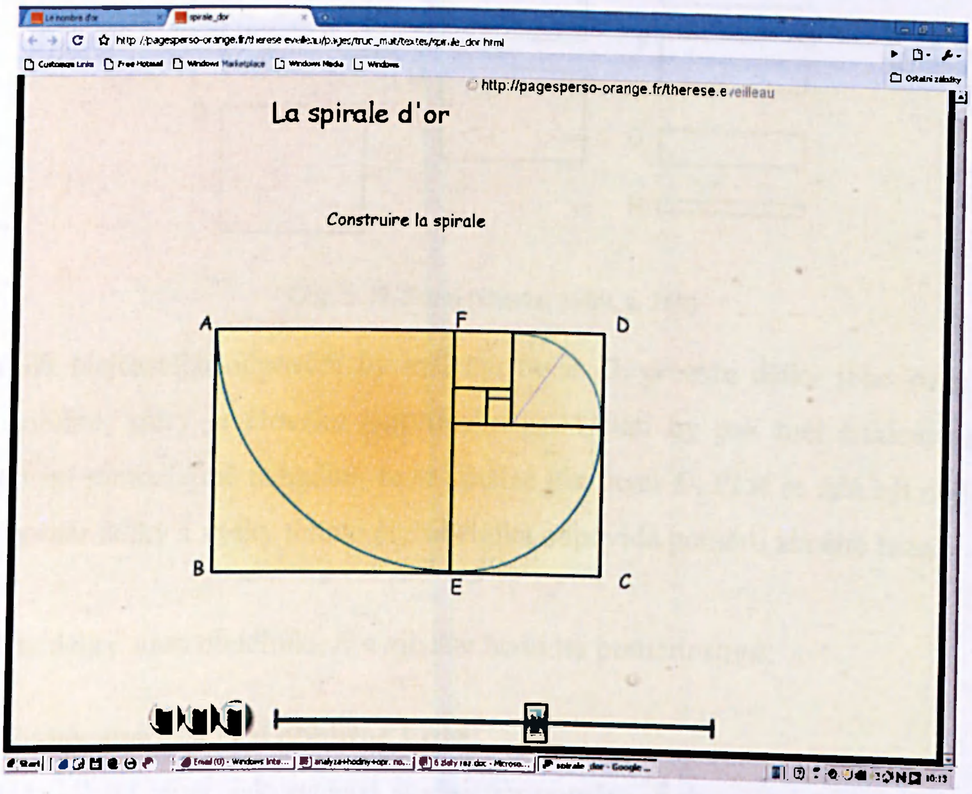
Zlatou spirálu lze vkreslit i do zlatého trojúhelníka – pro získání bodů spirály využijeme postupné vpisování menších zlatých trojúhelníků. Vrcholy zlatých trojúhelníků leží na spirále, která má střed v průsečíku těžnic AA_1 a DD_1 (obr. 6.27).



Obr. 5.27

56 Zdroj <http://www.volny.cz/zlaty.rez> [cit. 2009-03-01]
57 Čerpáno ze zdroje (Chmelíková, 2006, s. 22)

Postupné vykreslování logaritmické spirály v obdélníku můžeme sledovat na obrázku 6.28 na internetových stránkách:
<http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/rectangle_dor.htm> [cit. 2009-03-31].



Obr. 6.28

6.1.4 Popis pracovního listu[58]

Časová náročnost: dvě vyučovací hodiny.

Pomůcky studentů: psací a rýsovací potřeby, kalkulačka, metr do dvojice.

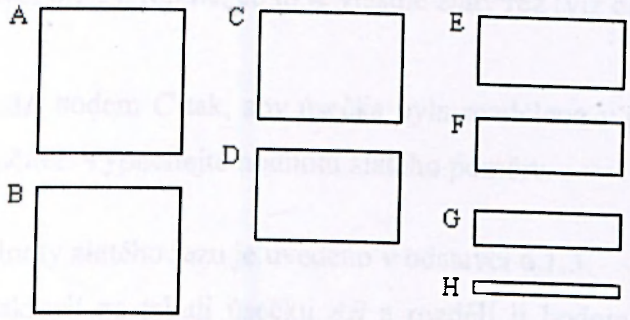
Matematické znalosti studentů: řešení kvadratických rovnic.

Věkové určení: pro studenty 1. - 4. ročníku střední školy, ale i žáky vyšších ročníků základní školy.

Komentář pro učitele: Učitel bude svůj výklad prokládat úlohami z pracovního listu. Položí studentům otázku: *Říká vám něco pojem zlatý řez? Víte, v jakých odvětvích se objevuje?* Po této úvodní diskusi, učitel rozdá pracovní listy a nechá studenty pracovat na první úloze. Po chvíli se zeptá (formou hlasování), který útvar se nejvíce líbí.

[58] Samotný pracovní list je v příloze č. 8..

1. Prohlédněte si obrázek 6.29 s osmi čtyřúhelníky a vyberte ten, který se Vám nejvíce líbí.



Obr. 6.29. Zdroj (Opava, 1989, s. 269)

Komentář: Nejčastější odpovědí by měl být útvar *D*, protože délky jeho stran jsou ve zlatém poměru, který je člověku nejpřirozenější. Učitel by pak měl studenty seznámit s tím, že není samozřejmě náhodou, že se většině líbí útvar *D*. Proč se zdá být nejlíbivější? Protože poměr délky a výšky tohoto čtyřúhelníka odpovídá poměru zlatého řezu.

2. Změřte délky stran obdélníka *D* a zjistěte hodnotu poměru stran.

<u>Řešení:</u> Poměr stran vychází přibližně 1,618.

Komentář: Učitel zjistí, jak vychází studentům poměry. Řekne jim, že i na lidském těle lze najít tento zlatý poměr a nechá je pracovat na další úloze ve dvojicích.

3. Ve dvojicích si vzájemně změřte požadované délky a doplňte do tabulky 6.1. Vypočítejte poměry a porovnejte výsledky v celé třídě.

Výška člověka:	Chodidla – pas:	Poměr:
Pas – chodidla:	Pas – hlava:	Poměr:
Krk – pas:	Krk – hlava:	Poměr:
Kolena – pas:	Kolena – chodidla:	Poměr:

Tab. 6.1

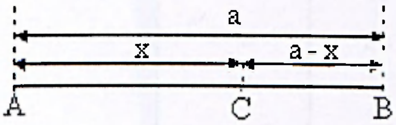
Komentář: Poměry by měly vycházet přibližně stejně, a to 1,618. Zde může učitel s nadsázkou říci, že krásu lze měřit tím, jak hodně se blíží hodnoty ke zlatému řezu.

Po této aktivitě učitel ukáže studentům několik obrázků, kde se objevuje zlatý řez (například obrázky uvedené v materiálu pro učitele nebo, je-li k dispozici internet, obrázky shromážděné v odstavci 6.1.2). Řekne, co to je vlastně zlatý řez (viz odstavec 6.1).

4. Rozdělte úsečku AB bodem C tak, aby úsečka byla rozdělena v poměru zlatého řezu, který vám řekne učitel. Vypočítejte hodnotu zlatého poměru.

<u>Řešení:</u> Nalezení hodnoty zlatého řezu je uvedeno v odstavci 6.1.3.

Komentář: Učitel nakreslí na tabuli úsečku AB a rozdělí ji bodem C. Označí písmeny jednotlivé části úsečky podle obrázku 6.30.



Obr. 6.30

Učitel studentům ukáže pouze poměr délek $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ a zbytek studenti dopočítávají jako samostatnou práci při hodině. Studenti vyřeší kvadratickou rovnici. Učitel potom ukáže, jak se dopočítá hodnota zlatého řezu, a řekne, že zlaté číslo se označuje písmenem φ. Učitel může ukázat přibližnou hodnotu zlatého řezu jako zajímavost, že je to iracionální číslo:

1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526046
281890244970720720418939113748475408807538689175212663 38…

Po výpočtu hodnoty zlatého řezu, učitel ukáže konstrukci zlatého řezu na úsečce na tabuli. Studenti dávají pozor a píší si postup do sešitu nebo pracovního listu. Je možné také se studenty vyzkoušet nalezení bodu C pomocí konstrukce přehýbání papíru. Potřebné informace jsou uvedeny v odstavci 6.1.3. Poté následuje řešení další úlohy.

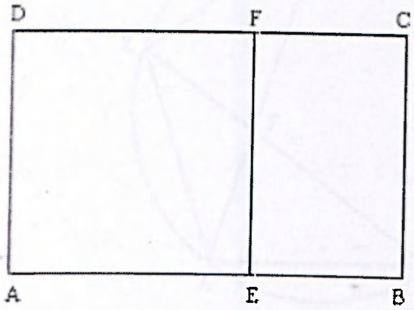
5. Narýsujte si libovolnou úsečku AB a rozdělte ji ve zlatém poměru.

Komentář: Následuje samostatná práce studentů. Další úlohy se zabývají zlatým obdélníkem, zlatým trojúhelníkem a zlatým řezem v pětiúhelníku. Záleží na učiteli, kolik času chce věnovat zlatému řezu.

Úloha 6 se týká zlatého obdélníka. Učitel řekne, co to je zlatý obdélník a jak se nechá zkonstruovat ze čtverce (tedy známe-li kratší stranu obdélníka). Kreslí obrázky na tabuli a píše postup konstrukce. Vše ponechá na tabuli. Může studentům říci i další vlastnosti zlatého obdélníka. Potřebné informace jsou uvedeny v odstavci 6.1.3. Učitel zadá studentům, ať si zkusí vyřešit úlohu 6. Nechá jim chvíli na rozmyšlenou, a když si nebudou studenti vědět rady, trochu jim napoví.

6. Narýsujte obdélník se stranami v poměru zlatého řezu, jehož delší strana bude mít velikost 6 cm. Změřte velikost jeho kratší strany a ověřte zlatý poměr.

Řešení: Pro sestrojení obdélníka využijeme následující konstrukce (viz obr. 6.31):



Obr. 6.31

1. Sestrojíme úsečku AB.
2. Zkonstruujeme bod E tak, aby dělil úsečku AB ve zlatém poměru – pomocí Herónovy konstrukce.
3. Sestrojíme čtverec $AEFD$.
4. Čtverec rozšíříme na zlatý obdélník $ABCD$.

Velikost kratší strany by měla být přibližně 3,71 cm.

Komentář: V odstavci 6.1.3. – zlatý obdélník jsme se seznámili s konstrukcí zlatého obdélníka, pokud byla zadána velikost kratší strany. Zde je zadána velikost delší strany. Vyjdeme z výše uvedené konstrukce. Nejprve necháme studenty přemýšlet, jak by se to nechalo řešit. Můžeme jim napovědět a provádět konstrukci náčrtkem na tabuli. Studenti ověří, zda platí zlatý poměr. Poté studenti pokračují v řešení další úlohy

7. Narýsujte libovolný rovnoramenný trojúhelník s vnitřními úhly $36°$, $72°$, $72°$. Změřte délky stran a ověřte, jakému číslu se rovná jejich poměr.

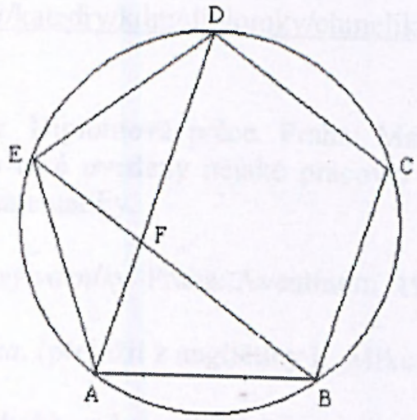
Komentář: Studenti sestrojují trojúhelník. Učitel se zeptá na poměr stran, většině by mělo vycházet přibližně 1,618, tedy zlatý poměr. Učitel řekne, že trojúhelník s těmito vnitřními úhly se nazývá zlatý trojúhelník. Může ukázat vlastnosti trojúhelníka, které jsou uvedeny v odstavci 6.1.3.

8. Narýsujte pravidelný pětiúhelník *ABCDE*, jestliže délka jeho úhlopříčky je 10 cm.

Řešení:

Popis konstrukce:

1) narýsujeme úhlopříčku o velikosti 10 cm, např. úhlopříčku EB (vycházíme z obrázku 6.32)



Obr. 6.32

2) nalezneme bod F tak, že F dělí úsečku EB v poměru zlatého řezu, úsečka BF je větší část úsečky, použijeme Herónovu konstrukci
3) z vlastnosti zlatého řezu v pětiúhelníku platí: $|FB| = |BA| = |EA|$
4) sestrojíme trojúhelník EBA
5) trojúhelníku EBA opíšeme kružnici
6) na sestrojené kružnici leží zbývající vrcholy pravidelného pětiúhelníka, platí: $|BA| = |EA| = |BC| = |CD| = |DE|$

Komentář: Učitel řekne, že zlatý řez se objevuje nejen v obdélníku, trojúhelníku, ale můžeme ho najít také v pravidelném pětiúhelníku, a to hned několikrát. Načrtne obrázek a vysvětlí na něm jednu vlastnost v pětiúhelníku – průsečík dvou úhlopříček dělí každou z nich ve zlatém poměru. Ukáže, jaké platí vztahy – vše je rozpracováno v odstavci 6.1.3. Této vlastnosti využijeme v této úloze. Známe úhlopříčku a pomocí zlatého řezu z ní umíme najít stranu pravidelného pětiúhelníka. Z toho vlastně plyne další tvrzení, že poměr délek úhlopříčky a strany pětiúhelníka je zlatý.

Na sestrojeném pětiúhelníku můžeme nechat studenty ověřit další vlastnost. Sestrojíme-li všechny úhlopříčky v pětiúhelníku, vytvoří nám pěticípou hvězdu, uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník. Platí, že poměr stran původního a nového pětiúhelníka je druhá mocnina zlatého čísla.

6.1.5 Zdroje k tématu

GHYKA, M. C. *Zlaté číslo.* Praha: Dokořán a Argon, 2008.

HRON, J. *Jak namalovat krajinu.* Praha: SPN, 1989.

CHMELÍKOVÁ, V. *Zlatý řez.* Bakalářská práce. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006. Dostupné na WWW: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/chmelikovabp/Zlaty_rez.pdf>[cit. 2009-02-25]

CHMELÍKOVÁ, V. *Zlatý řez.* Diplomová práce. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2008. – v této práci jsou také uvedeny nějaké pracovní listy související se zlatým řezem použitelné v hodinách matematiky.

KOS, J. *Anatomie člověka pro výtvarníky.* Praha: Aventinum, 1996.

LARGE, T. *Barevná matematika.* (přeložil z angličtiny L. Mikulka) Praha: Albatros, 2005.

LIVIO, M. *Zlatý řez.* Praha: Dokořán a Argo, 2006.

OPAVA, Z. *Matematika kolem nás.* Praha: Albatros, 1989

VOPĚNKA, P. *Rozpravy s geometrií.* Praha: Panorama, 1989.

Učebnice zmiňující se o zlatém řezu – zdroj (Chmelíková, 2008, s. 91–105):

DVOŘÁK, J. *Maturitní otázky z matematiky, II. Díl.* Praha: Lexikografie, 1934, s. 46, 49, 74.

HAVELKA, J. *Geometrie pro ústavy učitelské, díl II. (pro III.–IV. ročník).* Praha: Československá grafická unie, 1922, s. 47–48, 71–73.

HOLUBÁŘ, J.; VOJTĚCH, J. *Geometrie pro V. třídu středních škol.* Praha: JČMF, 1947, cvičení 178–184.

MAŠKA, O. *Matematika v úlohách, III. díl.* Brno: Dědictví Havlíčkovo, 1930, s. 102, 148–150.

MAŠKA, O. *Přehled matematiky, II. díl.* Edice Školní příručky Dědictví Havlíčkovo, Brno: Barvič & Novotný, 1936, s. 11.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2005, s. 447–448.

POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Praha: Prometheus, 2001, s. 119.

STRNAD, A. *Geometrie pro vyšší školy reálné, díl II.* Praha: nakladatel F. Kytka, 1903, s. 9, 55.

STRNAD, A.; RAŠÍN, K. *Geometrie pro vyšší reálky, díl II. pro V. třídu.* Praha: 1912, s. 18–20, 83.

VOJTĚCH, J. *Geometrie pro IV. a V. třídu SŠ.* Praha: JČMF, 1924, s. 109–110, 111–112.

Internetové zdroje:

URL: <http://www.volny.cz/zlaty.rez/> [cit. 2009-03-01]

URL: <http://voho.cz/zlaty-rez/> [cit. 2009-03-01]

URL: <www.amadeo.sk> [cit. 2009-03-01]

URL: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Zlatý_řez> [cit. 2009-03-05]

URL: <http://www.youtube.com/watch?v=085KSvOVb-U&feature=related> [cit. 2009-03-31] – na těchto stránkách nalezneme video ukázek zlatého řezu na člověku

URL: <http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/rectangle_dor.htm> [cit. 2009-03-31] – na těchto stránkách nalezneme vykreslování logaritmické spirály

URL: <http://likovna-kultura.ufzg.hr/miro5.htm> [cit. 2009-03-31]

URL: <http://www.typomil.com/kompozice/zlaty-rez.htm> [cit. 2009-03-31]

URL:<http://www.fotografovani.cz/art/fozak_df/rom_comp8_rules4.html> [cit. 2009-03-31]

7. Kolumbovo vejce

V páté kapitole jsem se věnovala klasickému tangramu, který tvoří sedm dílů. Zde se zmíním o oválné verzi tangramu, který je složen z devíti dílů. Jedná se o tzv. Kolumbovo vejce (obr. 7.1). Slovní spojení Kolumbovo vejce vzniklo na základě anekdoty týkající se slavného cestovatele Kryštofa Kolumba.[59] Slovní spojení „Kolumbovo vejce" často používáme k označení úkolu nebo problému, který se zdá být těžký a složitý, ale ve skutečnosti je jeho řešení jednoduché.

Obr. 7.1. Zdroj (*Mozkolam*, č. 6)

Na této skládačce můžeme rozvíjet svou představivost a tvořivost. Lze také zkoumat geometrické vztahy mezi jednotlivými částmi skládačky, jak je uvedeno v odstavci 7.1.2. Výhodou je, že si každý může tuto skládačku sám vyrobit třeba jen z tvrdého papíru. Součástí materiálu pro učitele je i sada vyřešených a okomentovaných úloh, které může učitel využít ve svých hodinách.

7.1 Materiál pro učitele – Kolumbovo vejce

Kolumbovo vejce je skládačka, která je obměnou klasického tangramu (ten je složen ze sedmi dílů). Je rozdělena na devět dílů (obr. 7.2). Na této skládačce si mohou studenti rozvíjet svou představivost a tvořivost. Mohou také objevovat geometrické vztahy mezi díly tohoto tangramu.

Obr. 7.2

Tato skládačka vděčí za svůj rafinovaný název populární anekdotě spojené se slavným cestovatelem Kryštofem Kolumbem.[60] „Dle této pověsti uspořádal španělský kardinál Pedro González do Mendoza hostinu na počest Kryštofa Kolumba zanedlouho po jeho návratu z první cesty do Ameriky. Během večeře jeden z hostů hlasitě pronesl, že Kolumbovy zásluhy jsou bezvýznamné, protože každý mohl učinit totéž. Když to slyšel velký cestovatel, velmi se rozzlobil a hodil spolustolovníkům výzvu. Úkol byl

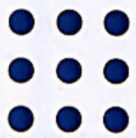
---

[59] Anekdota o Kryštofu Kolumbovi je uvedena v odstavci 7.1.

[60] Kryštof Kolumbus (1451 – 1506), slavný italský mořeplavec, objevitel Ameriky.

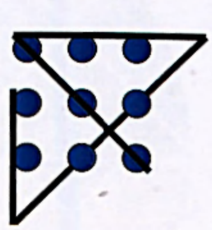
postavit vejce na špičku bez podepření. Po četných neúspěšných pokusech učiněných spolustolovníky a prohlášeních, že je to nemožné, se Kolumbus zvedl, uchopil vejce a udeřil s ním o stůl, čímž lehce nakřápl špičku a vejce postavil. Dokázal, že tento úkol lze splnit. Po tomto řešení se ihned ozvaly hlasy, že toto mohl udělat každý. Kolumbus odpověděl, že pokud někdo ví, jak danou věc provést, pak je skutečně všechno snadné. Popularita této anekdoty je tak velká, že dnes lze najít různé pomníky věnované právě Kolumbovu vejci. Dan Piet Hein, autor hlavolamů, vytvořil skutečná Kolumbova vejce. Jsou to tělesa s mírně oválným tvarem, která lze postavit na špičku. Jelikož jsou mírně zploštělá, není třeba používat žádné triky pro jejich postavení na špičku.“ (*Mozkolam,*[61] č. 6, s. 13)

Slovní spojení „Kolumbovo vejce“ používáme k označení úkolu nebo problému, který se zdá být těžký a složitý, ale ve skutečnosti je jeho řešení velmi jednoduché. Podívejme se na jednu úlohu, označovanou jako Kolumbovo vejce: „Tuto úlohu sestavil americký tvůrce hádanek Sam Loyd. Devět bodů na obrázku 7.3 spojte navzájem jedním tahem, aniž byste přitom špičku tužky oddálili od papíru. Tah tužkou tvoří čtyři úsečky, tužka smí změnit svůj směr pouze třikrát. Má tato úloha řešení?“ (Hemme, 2007, s.10)



Obr. 7.3

Podobně jako u Kolumbova vejce, které je zapotřebí postavit na špičku, je nutné přistupovat i k hlavolamu Sama Loyda s „otevřenou myslí“: většina lidí vychází z toho, že se čára musí nutně lámat ve vyznačených bodech. To ale Loyd vůbec nepožadoval. Trik spočívá v tom, že zlom spojovací čáry leží mimo dané body. Není ani nikde požadováno, aby čára procházela středy daných bodů (obr. 7.4).



Obr. 7.4

Další úlohy podobného typu nalezneme například v knize (Hemme, 2007).

[61] V časopise *Mozkolam* nejsou uváděni autoři, proto je odkazováno přímo na název časopisu a jeho číslo.

Součástí tohoto materiálu je popis pracovního listu – odstavec 7.1.4, který obsahuje několik vyřešených a okomentovaných úloh. Samotný pracovní list je uveden v příloze č. 9.

7.1.1 Něco málo z historie

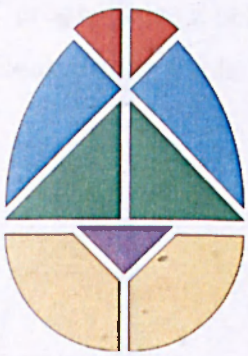
Již jsme se dověděli, že název Kolumbovo vejce vznikl na základě anekdoty o Kryštofu Kolumbovi. Samotná skládačka Kolumbovo vejce se poprvé objevila v roce 1893 společně s návrhy 95 různých obrazců, které lze složit z devíti dílků tohoto tangramu. (*Mozkolam*, č. 6, s. 13)

7.1.2 Kolumbovo vejce v matematice

Kolumbovo vejce, někdy také nazývané jako magické vejce, umožňuje skládání obrazců z omezeného počtu dílů, v tomto případě devíti dílů. Oproti klasickému tangramu obsahuje Kolumbovo vejce díly se zaoblenými okraji, což umožňuje skládání jiných obrazců než z dílů klasického tangramu. Složené obrazce se zdají být jemnější.

Kolumbovo vejce se skládá ze tří dílů s rovnými stranami a ze šesti dílů, které mají jednu stranu zaoblenou a další strany rovné. Jednotlivé díly jsou geometrické útvary (obr. 7.5):

- dva rovnoramenné trojúhelníky s jednou zaoblenou stranou (červené díly)
- dva pravoúhlé trojúhelníky s jednou zaoblenou stranou (modré díly)
- dva velké pravoúhlé trojúhelníky (zelené díly)
- malý pravoúhlý trojúhelník (fialový díl)
- dva lichoběžníky s jednou zaoblenou stranou (žluté díly)



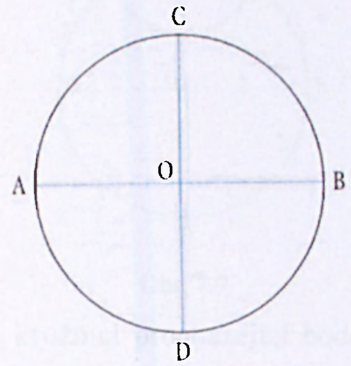
Obr. 7.5. Zdroj (*Mozkolam*, č. 6, s. 14)[62]

---

[62] Existuje také obměna Kolumbova vejce, v níž je nejmenší pravoúhlý trojúhelník (fialový díl na obrázku 7.5) dvoudílný. Je zřejmé, že čím více dílů má skládačka, tím existuje větší množství obrazců, které z ní lze poskládat.

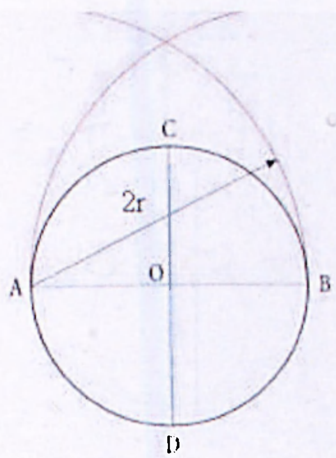
Mezi díly, z nichž je tento tangram sestaven, platí různé geometrické závislosti. Tyto závislosti lze vyčíst i ze samotné konstrukce Kolumbova vejce, kterou lze rozdělit na pět kroků.

1. Narýsujeme kružnici s libovolným poloměrem *r* a středem v bodě *O*. Vyznačíme si kolmé průměry kružnice a získáme body *A, B, C* a *D* (obr. 7.6).



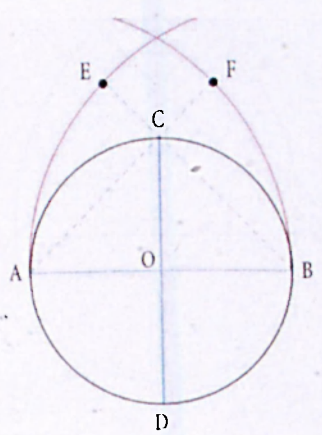
Obr. 7.6

2. Z bodů *A* a *B* narýsujeme dva oblouky, každý s poloměrem *2r* (obr. 7.7).



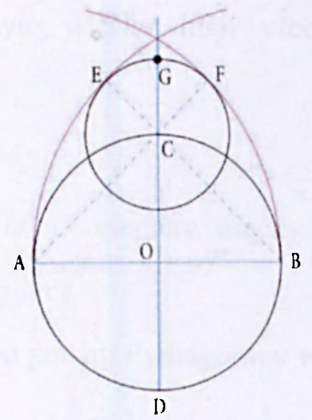
Obr. 7.7

3. Přímka spojující body *A* a *C* protíná jeden z oblouků v bodě *F*. Přímka procházející body *B* a *C* protíná druhý oblouk v bodě *E* (obr. 7.8).



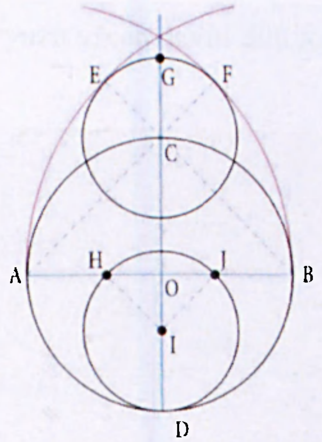
Obr. 7.8

4. Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě C, která prochází body E a F. Získáme bod G jako průsečík této kružnice a přímky procházející body C a D (obr. 7.9).



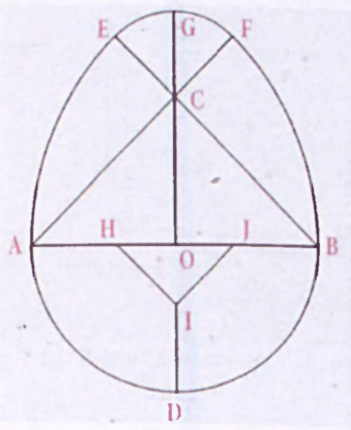
Obr. 7.9

5. Narýsujeme ještě jednu kružnici procházející bodem D, poloměr této kružnice je stejný jako poloměr předchozí kružnice. Tato kružnice má střed v bodě I a protíná úsečku AB v bodech H a J (obr. 7.10).



Obr. 7.10

Po spojení všech získaných bodů obdržíme devět dílů, které tvoří danou skládačku (obr. 7.11).



Obr. 7.11

Ze způsobu, kterým je sestaven oválný tangram, lze odvodit geometrické závislost mezi délkami dílů:

$|AB| = |AF| = |BE|$ – protože tyto úsečky mají všechny velikost $2r$, což vyplývá z konstrukce

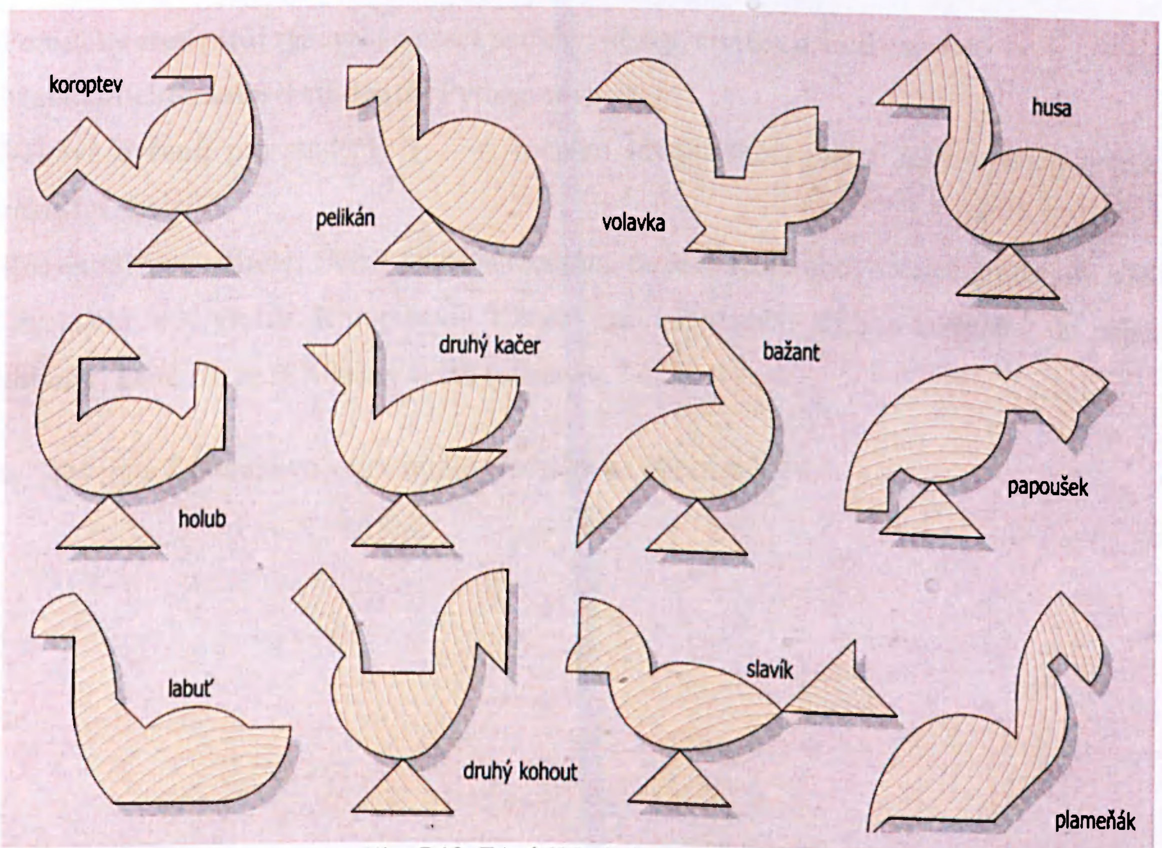
$|CF| = |AB| - |AC|$

$|CF| = |CE| = |CG| = |HI| = |ID| = |IJ|$ – všechny úsečky tvoří poloměry malých kružnic sestrojených v pátém kroku konstrukce

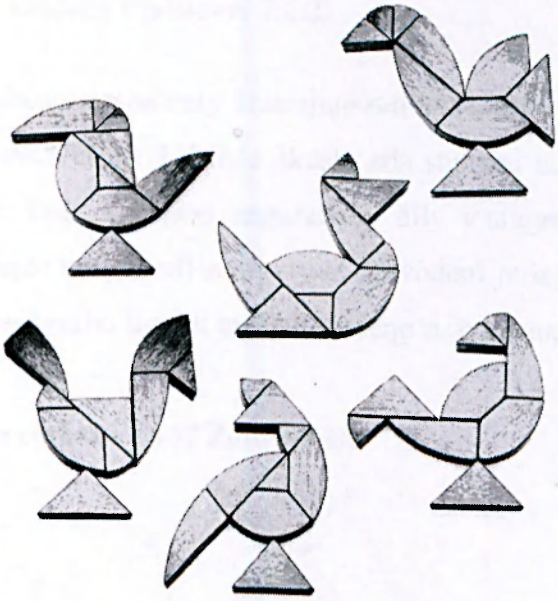
$|ID| = |AH| = |JB|$ – lze dokázat za použití Pythagorovy věty (viz odstavec 7.1.4).

7.1.3 Využití Kolumbova vejce

Dílů oválného tangramu můžeme využít ke skládání různých obrázků. Nejčastěji se objevují obrázky ptáků. Na obrázku 7.12 a 7.13 je uvedeno několik obrázků včetně některých řešení. Vždy se musí využít všech devíti dílů Kolumbova vejce.



Obr. 7.12. Zdroj (*Mozkolam*, č. 6, s. 15)



Obr. 7.13. Zdroj (*Mozkolam*, č. 6, s. 16)

7.1.4 Popis pracovního listu[63]

Časová náročnost: jedna až dvě vyučovací hodiny.

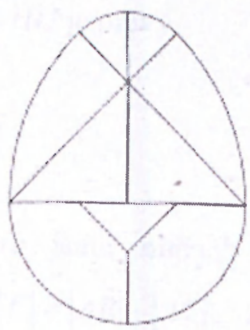
Pomůcky studentů: rýsovací a psací potřeby, nůžky, čtvrtka o velikosti A4.

Matematické znalosti studentů: Pythagorova věta.

Věkové určení: pro studenty 1. – 4. ročníku střední školy, ale i žáky vyšších ročníků základní školy.

Komentář pro učitele: Učitel řekne studentům, co je to Kolumbovo vejce, může jim sdělit i anekdotu o Kryštofu Kolumbovi. Ukáže jim uspořádání dílů v tangramu a nějaké obrázky, které lze ze skládačky složit (odstavec 7.1.3).

1. Sestrojte Kolumbovo vejce podle předlohy na obrázku 7.14.



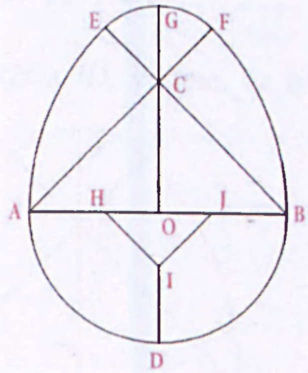
Obr. 7.14

[63] Samotný pracovní list je v příloze č. 9.

Řešení: Konstrukce je uvedena v odstavci 7.1.2.

Komentář: Učitel společně se studenty sestrojuje tuto skládačku po jednotlivých krocích, které jsou uvedeny v odstavci 7.1.2. Může zkusit, zda studenti nepřijdou na nějaké kroky konstrukce sami, když vědí, jak jsou uspořádány díly v tangramu. Je vhodné, aby si studenti Kolumbovo vejce narýsovali na čtvrtku. Důvodem je lepší manipulace s díly po jejich vystřižení. Do pracovního listu si mohou studenti psát postup konstrukce.

2. Jaký je úhel ACB na obrázku 7.15? Zdůvodněte.



Obr. 7.15[64]

Odpověď: Úhel ACB je pravý, protože bod C leží na Thaletově kružnici procházející body A, B.

3. Dokažte, že trojúhelník HIJ je pravoúhlý.

Řešení: Víme, že trojúhelník ACB je pravoúhlý. Úhel ECF je také pravý, protože je to vrcholový úhel k úhlu ACB. Vzhledem k tomu, že úsečka EC je rovnoběžná s HI a úsečka CF je rovnoběžná s JI a úsečky CE a CF svírají pravý úhel, potom i úsečky HI a IJ svírají pravý úhel. Z toho vyplývá, že úhel HIJ je pravý.

4. Dokažte početně, že $|AH| = |ID|$.

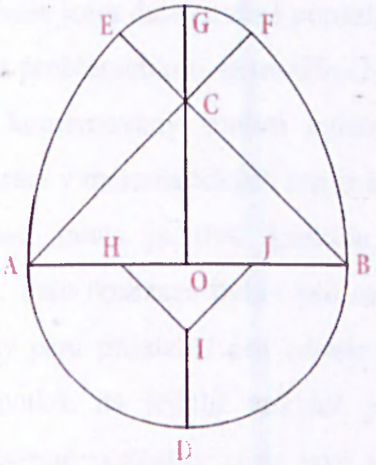
Řešení: Využijeme vztahů, které jsme objevili v první úloze. Víme, že platí: $|ID| = |CF| = |HI| = |IJ| = |CE|$ a $|CF| = |AB| - |AC|$. Z konstrukce víme, že $|AB| = 2r$. Trojúhelník ACB je pravoúhlý a rovnoramenný, můžeme pomocí Pythagorovy věty

[64] Obrázek je stejný jako obrázek, ke kterému dospějeme při konstrukci Kolumbova vejce.

vypočítat velikost úsečky AC: $|AC| = \sqrt{2} \cdot r$. Dopočítáme velikost úsečky CF: $|CF| = 2r - \sqrt{2} \cdot r = r \cdot (2 - \sqrt{2}) = |ID|$.

Velikost úsečky AH můžeme vypočítat jako: $|AH| = \frac{1}{2}(|AB| - |HJ|)$. Potřebujeme tedy vypočítat velikost úsečky HJ, ale víme, že trojúhelník HIJ je pravoúhlý (z úlohy 3) a známe velikosti HI a IJ. Opět použijeme Pythagorovu větu a zjistíme, že $|HJ| = 2r \cdot (\sqrt{2} - 1)$. Nakonec můžeme dopočítat velikost úsečky AH: $|AH| = \frac{1}{2}(2r - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r + 2r) = 2r - \sqrt{2} \cdot r = r \cdot (2 - \sqrt{2})$.

Porovnáme-li velikosti úseček AH a ID, vidíme, že tyto úsečky jsou shodné. Důkaz je hotový.



Komentář: V této úloze si studenti procvičí Pythagorovu větu a dokazování vztahů. Studenti si nakonec vystřihnou jednotlivé díly tangramu z papíru a mohou skládat obrazce.

7.1.5 Zdroje k tématu

HEMME, H. *Kolumbovo vejce a jiné záludné hříčky.* Praha: Albatros, 2007.

Kolumbovo vejce – Oválný tangram. *Mozkolam* č. 6, s. 13 – 16.

URL:<http://www.meredit.cz/content/view/1042/75/> [cit. 2009-03-30]

URL:<http://cs.wikipedia.org/wiki/Kolumbovo_vejce> [cit. 2009-03-30]

8. Závěr

Ve své práci jsem se věnovala problematice matematických seminářů na středních školách. Pomocí dotazníku[65] jsem zjišťovala informace o náplni těchto seminářů na některých středních školách, zpravidla gymnáziích. Ukázalo se, že učitelé se snaží kromě prohlubování matematických témat k maturitě využívat i na středních školách méně tradiční matematická témata, například kruhovou inverzi, teorii grafů, Hornerovo schéma, důkazové metody. Zjistila jsem, že 88 % dotazovaných učitelů probírá také počítání s maticemi, které se ve značné míře používají na různých typech vysokých škol. Z dotazníků také vyplynulo, že tématy Hippokratovy měsíčky a zlatý řez se zabývá přibližně 30 % dotázaných učitelů.

V teoretické kapitole jsem dále stručně popsala problematiku matematických táborů a soustředění, protože s problematikou netradičních matematických témat úzce souvisí. Nakonec jsem uvedla komentovaný souhrn existujících zdrojů, které mohou učitelé matematiky využít pro práci v matematických seminářích.

Důležitou součástí práce je třetí kapitola, která pojednává o realizaci dvou pracovních listů v praxi. Tato realizace byla i pro mě cennou zkušeností, protože jsem si ověřila, že pracovní listy jsou přijatelné pro učitele i použitelné se studenty, a současně jsem získala řadu poznatků, na jejichž základě jsem upravila zadání několika úloh v pracovních listech. Získané poznatky jsem také použila v některých komentářích pro učitele v popisech pracovních listů. Uvědomila jsem si také, jak je důležité správně a srozumitelně formulovat zadání úloh.

Jádro práce tvoří kapitoly 4 – 7, kde jsem shrnula informace o čtyřech méně častých matematických tématech, a to Hippokratových měsíčkách, zlatém řezu, tangramu a Kolumbovu vejci. Nebylo mým cílem podat úplný popis těchto témat, protože ten lze najít v mnoha zdrojích. Spíše mi šlo o výběr toho podstatného, co by mohlo učitele střední školy zajímat a co by mohl potřebovat, pokud by se rozhodl téma v matematickém semináři použít. Každé téma jsem opatřila řadou odkazů, v nichž se lze dočíst další podrobnosti. Odkazy mohou sloužit i jako zdroj pro případné seminární práce studentů.

Každé téma jsem kromě popisu obohatila o důkazy tvrzení v něm uvedených (zpravidla vlastní důkazy) a některé vlastní obrázky. Dále jsem vytvořila a okomentovala

[65] Zjištění z mnou realizovaného dotazníku o náplni matematických seminářů na středních školách o tom, jak moc se učitelé věnují zlatému řezu, bude použito do knihy o zlatém řezu určené pro učitele základní a střední školy doktorandky V. Chmelíková z Matematicko-fyzikální fakulty UK.

úlohy, které jsem upravila do podoby pracovního listu pro studenty. Přínosem mé práce jsou tedy především pracovní listy a jejich popisy v jednotlivých materiálech pro učitele.

Materiály pro učitele tvoří uzavřený celek včetně literatury k danému tématu. Tyto materiály budou umístěny na internetových stránkách www.suma.jčmf.cz, kde si je mohou učitelé stáhnout a pracovní listy použít v hodinách.

Literatura

DUDENEY, H. E. *Matematické hlavolamy a hříčky*. Praha: Olympia, 1995.

FOLTA, J. *Dějiny matematiky I., práce z dějin techniky a přírodních věd*. Praha: Národní technické muzeum, 2004, svazek 3.

HEMME, H. *Kolumbovo vejce a jiné záludné hříčky*. Praha: Albatros, 2007.

HRON, J. *Jak namalovat krajinu*. Praha: SPN, 1989.

CHMELÍKOVÁ, V. *Zlatý řez*. Bakalářská práce. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006. Dostupné na WWW: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/chmelikovabp/Zlaty_rez.pdf>[cit. 2009-02-25]

KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1969.

KONFOROVIČ, A. G. *Významné matematické úlohy*. Praha: SPN, 1989.

KOS, J. *Anatomie člověka pro výtvarníky*. Praha: Aventinum, 1996.

LUHAN, E. *Didaktika matematiky I.* České Budějovice: Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, 1990.

OPAVA, Z. *Matematika kolem nás*. Praha: Albatros, 1989.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 1995.

VEJMOLA, S. *Hlavolamy*. Praha: Grada Publishing, 2007.

VOPĚNKA, P. *Rozpravy s geometrií*. Praha: Panorama, 1989.

ZHOUF, J. *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice*. Doktorská práce. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2001.

Kolumbovo vejce – Oválný tangram. *Mozkolam*, 2007, č. 6, s. 13 – 16.

Tangram – čínská skládačka. *Mozkolam*, 2007, č. 16, s. 13 – 16.

Internetové zdroje

URL[66]: <http://www.vsetin.zsrokytnice.cz/m_tangram.php> [cit. 2009-02-12] – kapitola 5

URL: <http://www.rodina.cz/clanek1921.htm> [cit. 2009-02-10] – kapitola 5

URL: <http://www.bosounohou.cz/tangram/> [cit. 2009-02-12] – kapitola 5

URL: <http://www.smazba.cz/hra/tangram-game/> [cit. 2009-02-12] – kapitola 5

URL: <http://www.geneze.info/jmena/osobnosti.htm> [cit. 2008-12-03] – kapitola 4

URL: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/lektori/musilek/evo6.html> [cit. 2008-12-03] – kapitola 4

URL: <http://encyklopedie.seznam.cz/heslo/48130-hippokratovy-pulmesicky> [cit. 2008-12-03] – kapitola 4

URL: <http://www.volny.cz/zlaty.rez> [cit. 2009-03-01] – kapitola 6

URL: <http://voho.cz/zlaty-rez/> [cit. 2009-03-01] – kapitola 6

URL: <www.amadeo.sk> [cit. 2009-03-01] – kapitola 6

URL: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Zlatý_řez> [cit. 2009-03-05] – kapitola 6

URL:
<http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/rectangle_dor.htm>
[cit. 2009-03-31] – kapitola 6

Řecká matematika.doc [online]. Dostupné na WWW:
<http://www.math.muni.cz/~sisma/olomouc> [cit. 2008-12-03] – kapitola 4

Letní matematický tábor. Dostupné na WWW:
<http://www.luzanky.cz/novyweb/akce/kalendarakci/letak.php?id=25472> [cit. 2009-01-20]

Letní soustředění pro matematiky a fyziky. Dostupné na WWW:
<http://kdf.mff.cuni.cz/tabor> [cit. 2009-01-20]

Matematické soustředění od KoKoSu. Dostupné na WWW:
<http://kokos.gmk.cz/> [cit. 2009-01-20]

Matematický tábor Pikomat. Dostupné na WWW:
<http://pikomat.mff.cuni.cz/tabor/> [cit. 2009-01-20]

URL: <http://www.stredniskoly.eu/> [cit. 2009-01-15]

---

[66] URL je zkratka anglického výrazu Unique Resource Locator = jednoznačné určení zroje.

PŘÍLOHY

Příloha č. 1 Dotazník

Příloha č. 2 Přehled škol, které odpověděly na dotazník

Příloha č. 3 Pracovní list – Hippokratovy půlměsíčky

Příloha č. 4 Pracovní list – Tangram

Příloha č. 5 Tangram a Pythagorova věta

Příloha č. 6 Písmena abecedy z tangramu

Příloha č. 7 Kopie studentských řešení

Příloha č. 8 Pracovní list – Zlatý řez

Příloha č. 9 Pracovní list – Kolumbovo vejce

Příloha č. 1
DOTAZNÍK

Dobrý den vážení učitelé,

do rukou se Vám dostává dotazník, jehož cílem je zjistit náplň matematických seminářů na středních školách. Dotazník je anonymní a zjištěné údaje budou zpracovány do diplomové práce. V mé diplomové práci se snažím popsat některé úlohy (např. Hippokratovy půlměsíčky, zlatý řez atd.), které by se nechaly dělat na matematických seminářích. Prosím o zodpovězení několika otázek. Své odpovědi tučně zvýrazněte nebo napište kurzívou. Děkuji za Vaši pomoc a ochotu.

Studentka PedF UK

1) Jaký typ školy jste?

- Gymnázium všeobecné 4- leté
- Gymnázium všeobecné 6-leté
- Gymnázium všeobecné 8-leté
- Střední odborná škola
- Gymnázium se zaměřením na ………………… a kolikaleté ………
- Gymnázium církevní
- Jiná škola

2) Máte na Vaší škole předmět Matematický seminář či Seminář z matematiky?

- Ano
- Ne

Pokud jste na předchozí otázku odpověděli ANO, vyplňte prosím následující otázky.

3) Pro které ročníky je matematický seminář připravován? (možnost více odpovědí)

a) 1. ročník
b) 2. ročník
c) 3. ročník
d) 4. ročník
e) jiný ročník

4) Matematický seminář na Vaší škole je

a) jednoletý
b) dvouletý
c) jednoletý i dvouletý

5) Probíráte zde témata k maturitě? Která?

6) Probíráte a procvičujete některá témata, která běžně probíráte v hodinách matematiky, více do hloubky? Která?

7) Probíráte nějaká nová témata, která se běžně v hodinách matematiky neprobírají, nějaké rozšiřující úlohy? Které?

8) Probíráte počítání s maticemi?

9) Zabýváte se úlohami s Hippokratovými půlměsíčky (= obsah půlměsíčků sestrojených nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka je stejný jako obsah trojúhelníka)?

- Ano
- Ne
- Neznám

10) Zabýváte se zlatým řezem?

- Ano
- Ne

Případné komentáře:

Děkuji za Vaši spolupráci při vyplnění dotazníku.

Příloha č. 2

Přehled škol,[1] které odpověděly na zaslaný dotazník

1. Gymnázium Ostrava-Zábřeh, Volgogradská 6a – http://www.gyvolgova.cz
2. Biskupské gymnázium, Letovice, Tyršova 336 – http://www.bigyletovice.cz/
3. Gymnázium Praha 4, Na Vítězné pláni 1160 – http://www.gvp.cz/
4. Gymnázium Děčín, Komenského náměstí 4 – http://www.gymnaziumdc.cz/
5. Sportovní gymnázium Ludvíka Daňka, Brno, Botanická 70 – http://www.sweb.cz/sgbrno/
6. Podkrušnohorské gymnázium, Most, Tř. ČSA 1530 – http://www.gymmost.cz/
7. Gymnázium Česká Třebová, Tyršovo nám. 970 – http://www.gymnct.cz/
8. Gymnázium a Střední odborná škola Jaroměř, Lužická 423 – http://www.goajaro.cz/
9. Gymnázium Václava Hlavatého, Louny, Poděbradova 661 – http://www.glouny.cz/
10. Gymnázium Sázavská, Praha 2, Sázavská 5 – http://www.sazavska.cz/
11. Gymnázium a Střední odborná škola, Orlová-Lutyně, Masarykova tř. 1313 – http://www.gym-orlova.cz/
12. Gymnázium Karla Čapka, Dobříš, Školní 1530 – http://www.gymkc.cz/
13. Gymnázium Trhové Sviny, Školní 995 – http://www.gymtrhovesviny.cz/
14. Gymnázium Hladnov, Slezská Ostrava, Hladnovská 35 – http://www.hladnov.cz/
15. Gymnázium Dvůr Králové nad Labem, nám. Odboje 304 – http://www.gym-dk.cz/
16. Gymnázium Rumburk, Komenského 10 – http://www.gymrumburk.cz
17. ZŠ a městské osmileté gymnázium Bruntál, Školní 2 – http://www.zsamog.bruntal.cz/
18. Arcibiskupské gymnázium, Kroměříž, Pilařova 3 – http://www.agkm.cz/
19. Gymnázium Postupická, Praha 4, Postupická 3150 – http://www.postupicka.cz/cz/postupicka/
20. Gymnázium Havlíčkův Brod, Štáflova 2063 – http://www.ghb.cz/
21. Gymnázium, Ústí nad Labem, Jateční 22 – http://www.gymjat.cz/
22. Gymnázium Pierra de Coubertina, Tábor, nám. Františka Křižíka 860 – http://www.gymta.cz/
23. Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669 – http://www.gym669ova.cz/
24. Gymnázium Jana Blahoslava, Přerov, Denisova 3 – http://www.gjb-spgs.cz/
25. Gymnázium Praha 10, Přípotoční 1337 – http://www.gsgpraha.cz/
26. Gymnázium Dr. Josefa Pekaře, Mladá Boleslav, Palackého 211 – http://www.pekargmb.cz/
27. Gymnázium T.G. Masaryka, Zastávka, U Školy 39 – http://www.gzastavka.cz/
28. Gymnázium Olomouc, Čajkovského 9 – http://www.gcajkol.cz/index1.php
29. Gymnázium Špitálská, Praha 9, Špitálská 2 – http://www.gymspit.cz/
30. Gymnázium Bílina, Břežánská 9 – http://www.gymbilina.cz/
31. Gymnázium Krnov, Smetanův okruh 2 – http://www.gymnasiumkrnov.cz/
32. Gymnázium Praha 6, Arabská 14 – http://www.gyarab.cz/
33. Gymnázium Teplice, Čs. dobrovolců 11 – http://www.gymtce.cz/
34. Malostranské gymnázium Praha 1, Josefská 7 – http://www.gymjosefska.cz
35. Gymnázium Jaroslava Heyrovského, Praha 5, Mezi Školami 2475 – http://www.gymjh.cz/cs/
36. Gymnázium Čelákovice, J.A. Komenského 414 – http://www.gymnacel.cz/

[1] Stránky škol byly prohlíženy dne 15.1.2009.

37. Gymnázium Otrokovice, Tř. Spojenců 907 – http://www.gyotr.cz/
38. Gymnázium Jevíčko, A.K. Vitáka 452 – http://www.gymjev.cz/
39. Akademické gymnázium Štěpánská, Praha 1, Štěpánská 22 – http://www.agstepanska.cz/cs/site/intro.htm
40. Gymnázium Františka Palackého, Neratovice, Masarykova 450 – http://www.gfp.cz/
41. Gymnázium J.V.Jirsíka, České Budějovice, Fráni Šrámka 23 – http://www.gjvj.cz/
42. Gymnázium K. V. Raise, Hlinsko, Adámkova tř. 55 – http://www.gymhlinsko.cz/
43. Gymnázium Christiana Dopplera, Praha 5, Zborovská 45 – http://www.gchd.cz/
44. Gymnázium Praha 6, Nad Alejí 1952 – http://www.alej.cz/
45. Gymnázium Václava Beneše Třebízského, Slaný, Smetanovo náměstí 1310 – http://www.gymslany.cz/
46. Klvaňovo gymnázium, Kyjov, Komenského 549 – http://www.gymkyjov.cz/
47. Gymnázium Praha 4, Konstantinova 1500 – http://www.gymnazium-opatov.cz/
48. Gymnázium Frenštát pod Radoštěm, Martinská čtvrť 1172 – http://www.freng.cz/
49. Gymnázium Žďár nad Sázavou, Neumannova 2 – http://www.gymzr.cz/
50. Gymnázium Uničov, Gymnazijní 257 – http://www.gymun.cz/
51. Gymnázium Nad Štolou, Praha 7, Nad Štolou 1 – http://www.gymstola.cz
52. Gymnázium Český Krumlov, Chvalšinská 112 – http://www.gymck.cz/
53. Gymnázium a Obchodní akademie, Chodov, Smetanova 738 – http://www.volweb.cz/oachodov/
54. Gymnázium Nový Jičín, Palackého 50 – http://www.gnj.cz
55. Gymnázium Vlašim, Tylova 271 – http://www.gymvla.cz/
56. Gymnázium Roudnice nad Labem, Havlíčkova 175 – http://www.gym-rce.cz/
57. Gymnázium a Střední odborná škola, Hostinné, Horská 309 – http://www.gymhost.cz/
58. Gymnázium Kladno, nám. E. Beneše 1573 – http://www.gymnasiumkladno.cz/
59. Gymnázium Čakovice, Praha 9, nám. 25. března 100 – http://www.gymcak.cz/cz/main.php
60. Gymnázium Globe, Brno, Bzenecká 23 – http://www.sssbrno.cz/gl/index.htm
61. Gymnázium Svitavy, Sokolovská 1638 – http://www.gy.svitavy.cz/
62. Gymnázium Benešov, Husova 470 – http://www.gbn.cz/phprs/
63. Gymnázium Václava Hraběte, Hořovice, Jiráskova 617 – http://www.gvh.cz/
64. Gymnázium Ostrava - Zábřeh, Středoškolská 2854 – http://www.chemgym.cz/
65. Gymnázium Mikulov, Komenského 7 – http://www.gymik.cz/
66. Gymnázium Hády, Brno – Líšeň, Horníkova 1 – http://www.gymnaziumhady.cz/

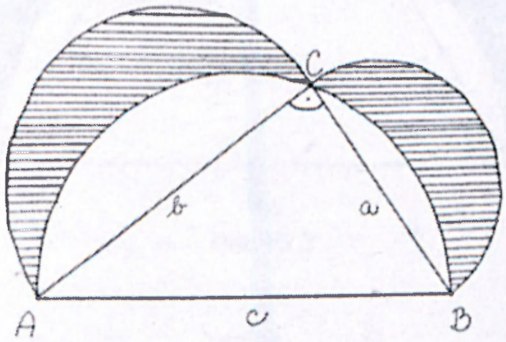
Školy, kde se seminář nevyučuje:

67. Gymnázium Havířov – Prostřední Suchá, Kapitána Jasioka 50 – http://www.stredniskola-sucha.cz
68. EKO Gymnázium, Poděbrady, Na Hrázi 64 – http://www.ekopodebrady.cz/ekogymnazium/
69. Gymnázium Nový Bor, Wolkerova 316 – http://glassschool.cz/cs/
70. Soukromé gymnázium Josefa Škvoreckého, Praha 2, Legerova 5 – http://www.sgjsvos.cz
71. Církevní gymnázium Německého řádu, Olomouc, Nešverova 693 – http://www.cgnr.cz/
72. Soukromé gymnázium COGNOS, Praha 7, Ovenecká 9 – http://www.gymnaziumcognos.cz/

Příloha č. 3

Pracovní list – Hippokratovy půlměsíčky

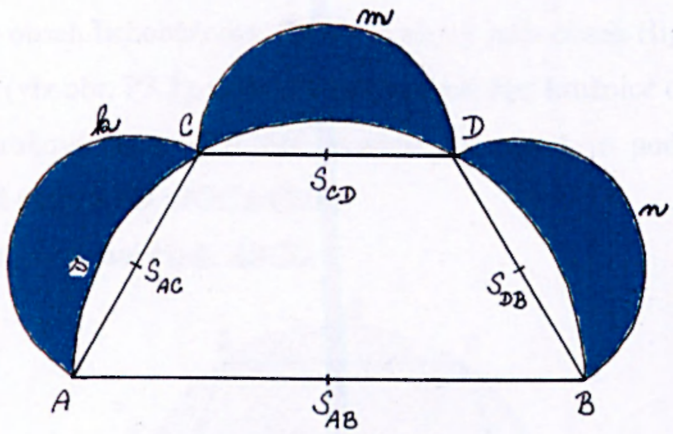
1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Dokažte, že součet obsahů půlměsíčků sestrojených nad odvěsnami tohoto pravoúhlého trojúhelníka ABC (vyšrafovaná oblast na obrázku P3.1) se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka ABC. Tyto půlměsíčky se nazývají Hippokratovy půlměsíčky, někdy se setkáváme i s označením Hippokratovy měsíčky nebo menisky.



Obr. P3.1

2. Sestrojte Hippokratovy půlměsíčky nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka ABC. Délky odvěsen trojúhelníka jsou – $|AC| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm. Vypočítejte součet obsahů těchto půlměsíčků.

3. Nechť lichoběžník *ABCD* tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka o straně 6 cm. Nad jeho stranami sestrojíme půlkružnice. Vypočítejte obsah vybarvených Hippokratových měsíčků na obrázku P3.2. Počítejte s odmocninami a číslem π.



Obr. P3.2

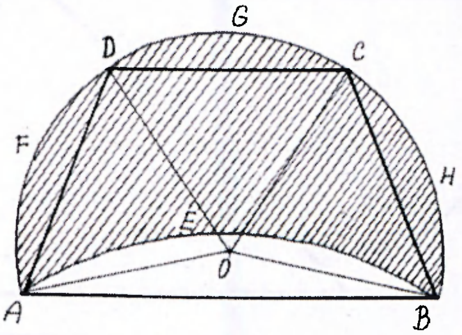
4. O kolik se liší součet obsahů měsíčků a obsah lichoběžníka *ABCD* z úlohy 3? Vyjádřete tento rozdíl jako obsah nějakého geometrického útvaru.

5. Nechť je dán lichoběžník *ABCD*. Velikosti jeho stran jsou $|AD| = |BC| = |CD| = 1$, $|AB| = \sqrt{3}$.

a) Vypočítejte obsah lichoběžníka *ABCD*.

b) Dokažte, že obsah lichoběžníka *ABCD* je stejný jako obsah Hippokratova měsíčku *AFDGCHB* (viz obr. P3.3). Obvod měsíčku tvoří část kružnice opsané lichoběžníku *ABCD* a kruhová úseč *AEB* nad stranou *AB*, která je podobná libovolné ze shodných tří úsečí *AFD*, *DGC* a *CHB*.

c) Sestrojte zadaný lichoběžník *ABCD*.

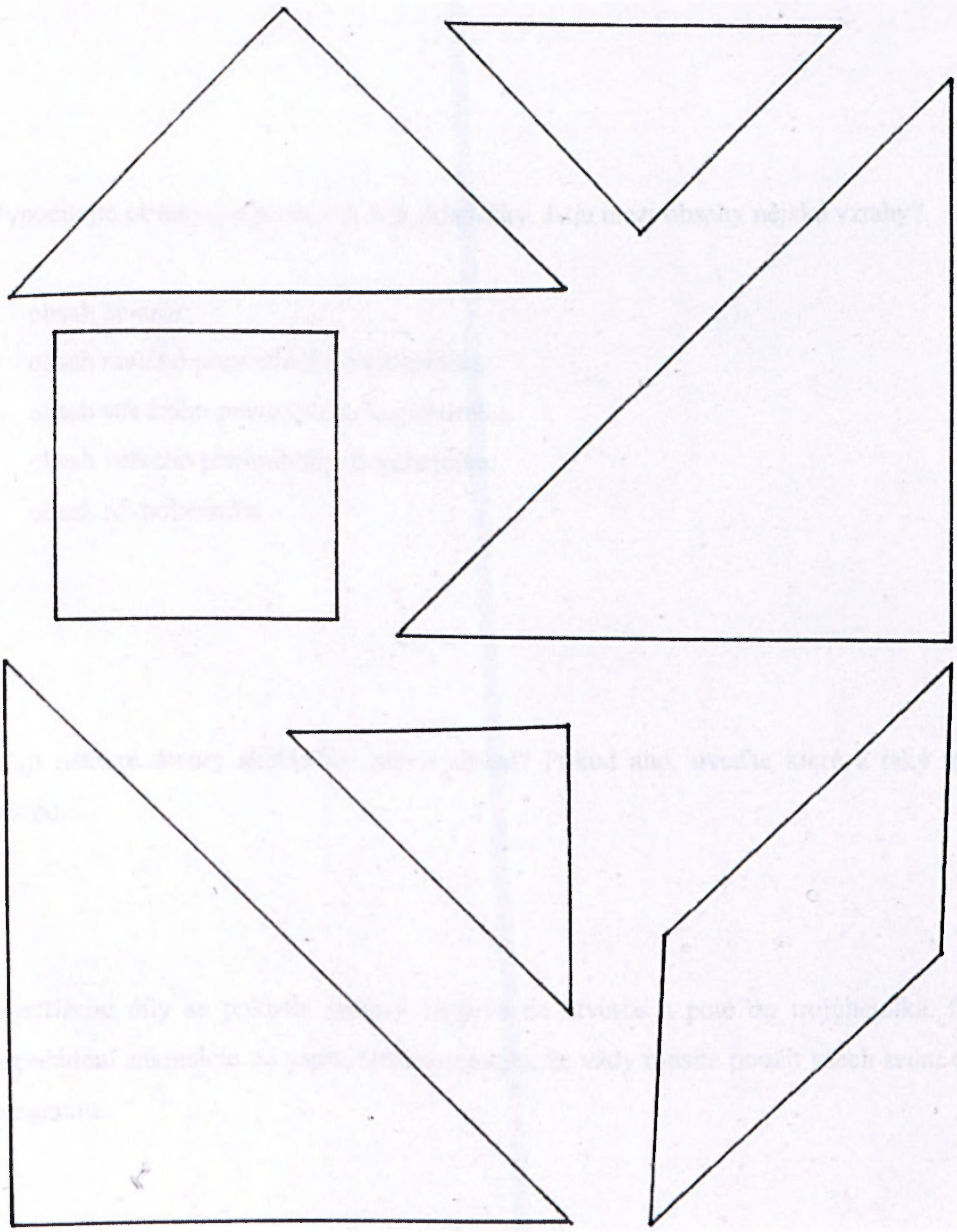


Obr. P3.3

Příloha č. 4

Pracovní list – Tangram

1. Na obrázku P4.1 se nacházejí jednotlivé díly tangramu, ze kterého lze složit nesčetné množství obrázků (konvexní geometrické útvary, předměty, zvířata, lidské postavy). Nejprve jednotlivé díly vystřihněte. Následně zjistěte délky všech stran jednotlivých dílů a zapište je do pracovního listu. Víte, že jedna odvěsna nejmenšího trojúhelníka má délku $\frac{\sqrt{2}}{4}a$. Řešte obecně s číslem a.



Obr. P4.1

malý trojúhelník:

střední trojúhelník:

velký trojúhelník:

čtverec:

rovnoběžník:

Najděte vztahy mezi stranami dílů.

2. Vypočítejte obsahy jednotlivých dílů skládačky. Jsou mezi obsahy nějaké vztahy?

obsah čtverce:

obsah malého pravoúhlého trojúhelníka:

obsah středního pravoúhlého trojúhelníka:

obsah velkého pravoúhlého trojúhelníka:

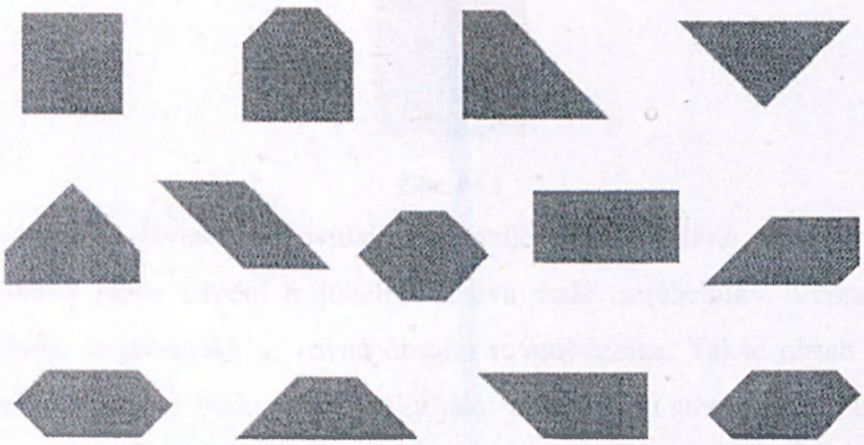
obsah rovnoběžníka:

3. Mají některé útvary skládačky stejný obvod? Pokud ano, uveďte které a jaký mají obvod.

4. Vystřižené díly se pokuste sestavit nejprve do čtverce a poté do trojúhelníka. Obě uspořádání zakreslete na papír. Nezapomínejte, že vždy musíte použít všech sedm dílů tangramu.

5. Zkuste ze všech dílků tangramu vytvořit postupně obdélník s jednou stranou dvakrát delší než druhou a lichoběžník s jednou základnou třikrát delší než druhou. Zakreslete je a porovnejte obsahy těchto útvarů. Jaké budou a proč?

6. Pokuste se složit některé z konvexních útvarů podle předlohy (obr. P4.2). Čtverec, trojúhelník, obdélník a lichoběžník jste už skládali v předchozích příkladech. Najdete nějaké vztahy mezi stranami některých útvarů?

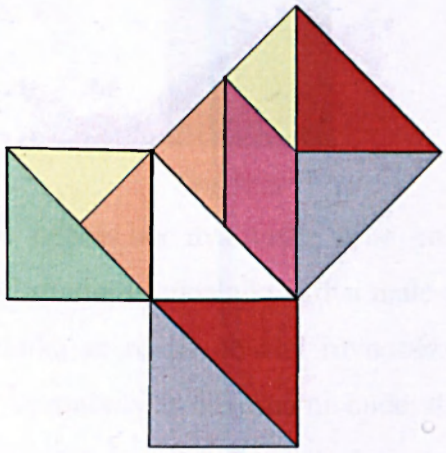


Obr. P4.2

Příloha č. 5
Tangram a Pythagorova věta

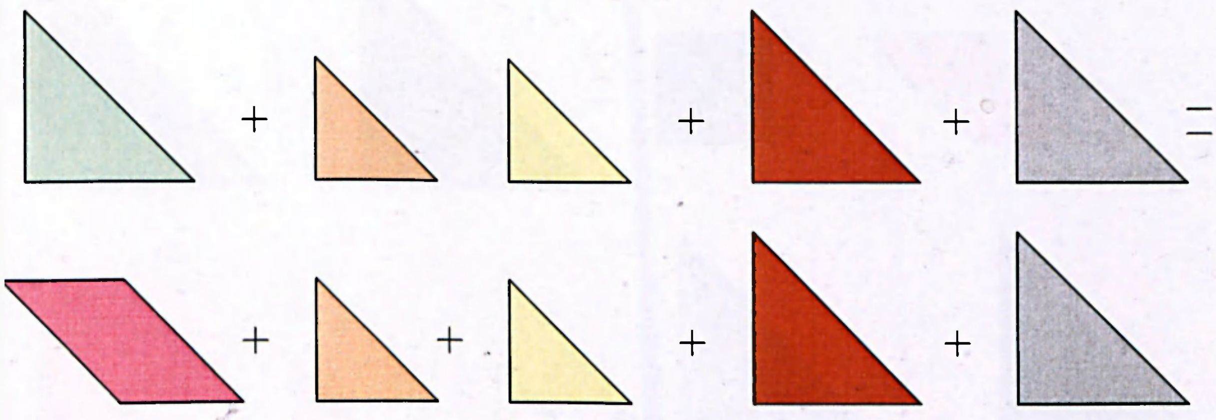
V odstavci 5.1.3 byla ukázána platnost Pythagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník pomocí malého trojúhelníka z tangramu. Podobným způsobem lze znázornit platnost Pythagorovy věty pro rovnoramenný trojúhelník pomocí středního a velkého trojúhelníka z tangramu.

Tedy opět narýsujeme tentokrát střední trojúhelník ze skládačky. Narýsujeme čtverce a zkusíme, které útvary z tangramu lze poskládat do čtverců (obr. P5.1).



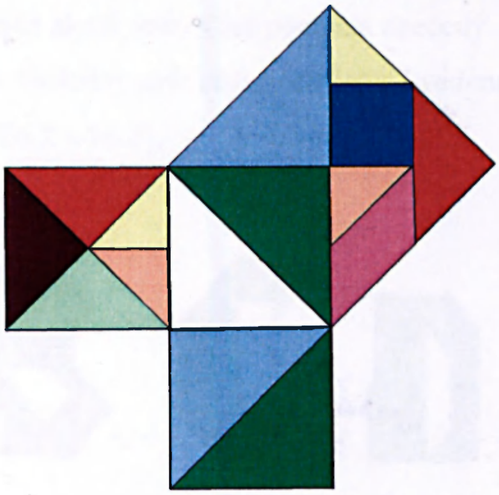
Obr. P5.1

Jednomu z menších čtverců odpovídají dva vedle sebe položené střední trojúhelníky a druhému čtverci jeden střední trojúhelník a dva malé trojúhelníky. Vzpomeňme si, že obsah středního trojúhelníka se rovná obsahu rovnoběžníka. Takže obsah dvou čtverců vyznačených odvěsnami bude stejně velký jako obsah dvou středních trojúhelníků, dvou malých trojúhelníků a obsah rovnoběžníka (obr. P5.2). Opět je tedy zcela zřejmé, že součet čtverců odvěsen je roven čtverci přepony, přesně podle Pythagorovy věty.



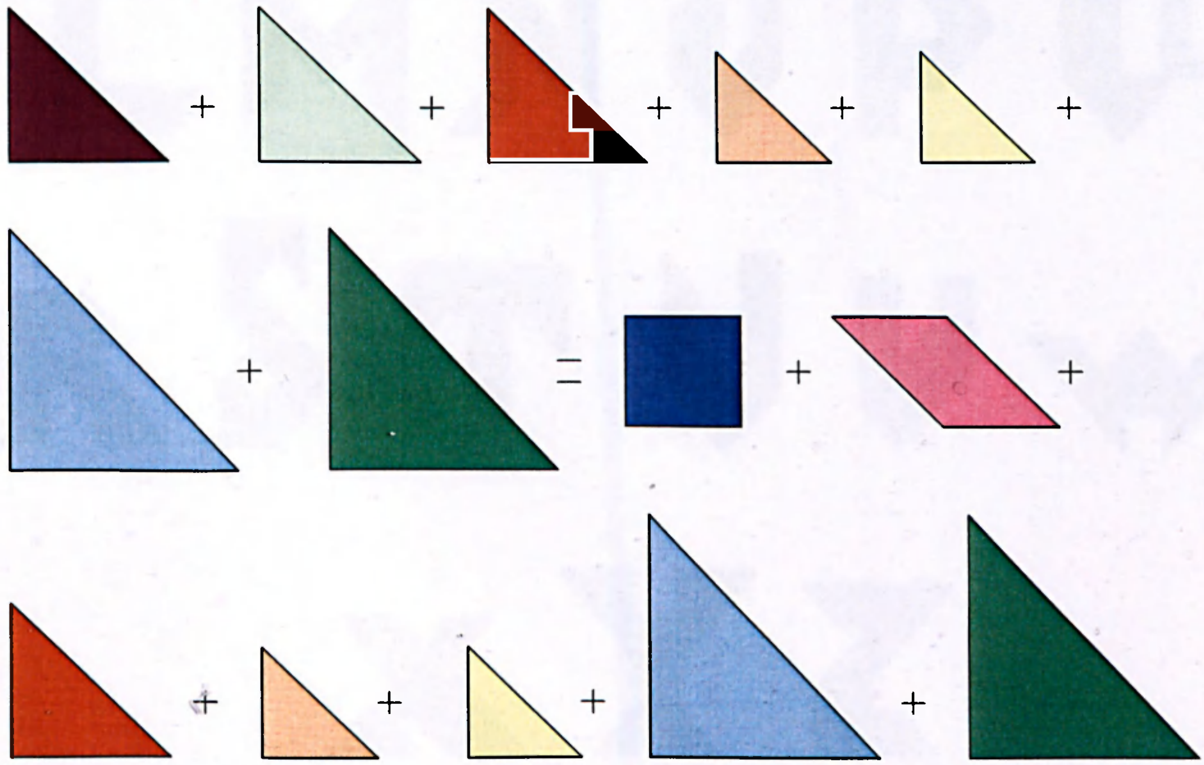
Obr. P5.2

A jak to bude vypadat pro velký trojúhelník? Narýsujeme velký trojúhelník a k němu příslušné čtverce a jejich rozdělení na díly (obr. P5.3).



Obr. P5.3

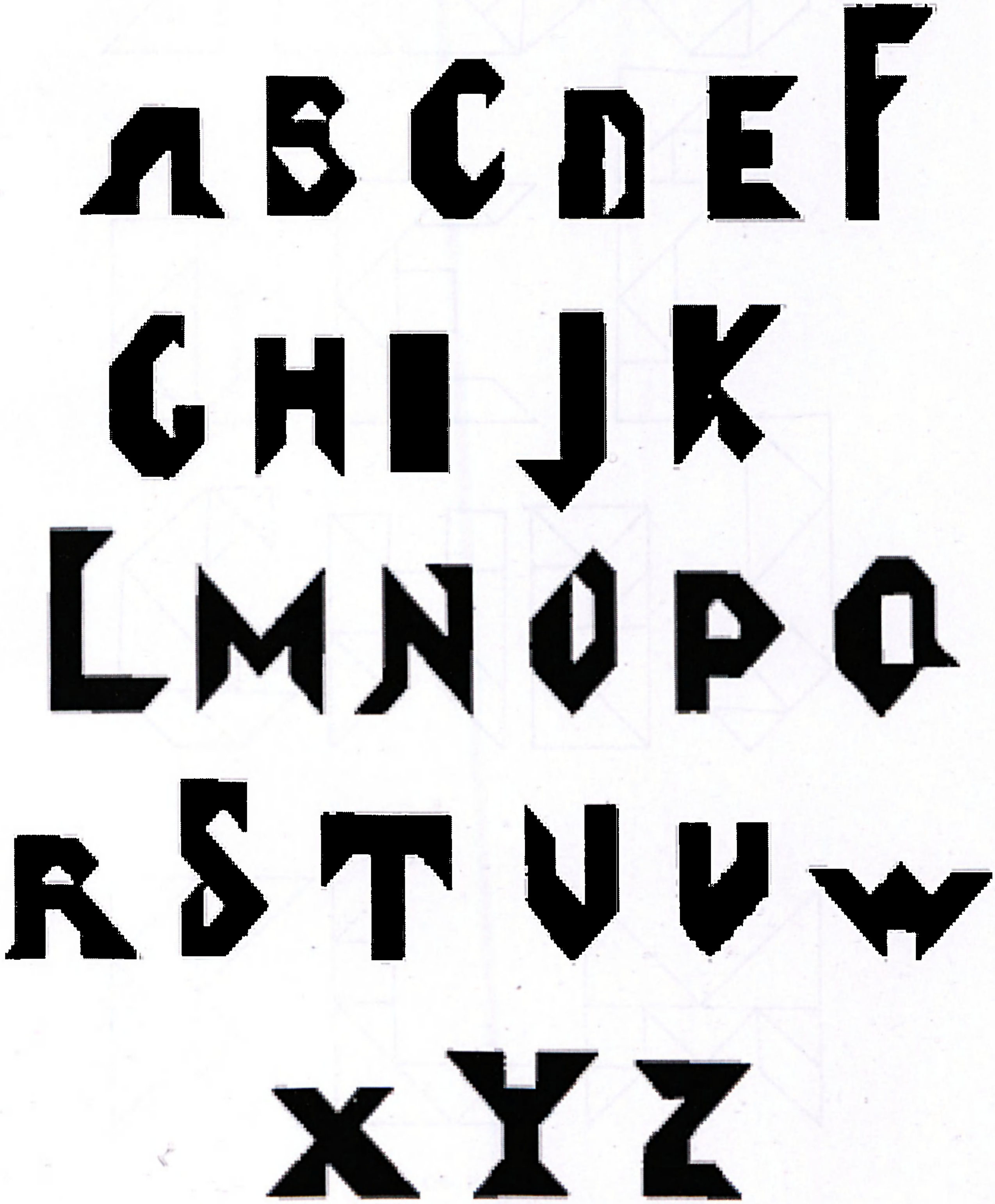
Jednomu z menších čtverců odpovídají dva vedle sebe položené velké trojúhelníky a druhému čtverci například tři střední trojúhelníky a dva malé trojúhelníky. Vzpomeňme si, že obsah středního trojúhelníka se rovná obsahu rovnoběžníka a také obsahu čtverce. Takže obsah dvou čtverců vyznačených odvěsnami bude stejně velký jako obsah dvou velkých trojúhelníků, dvou malých trojúhelníků, jednoho středního trojúhelníka, čtverce a rovnoběžníka (obr. P5.4). Opět je tedy zcela zřejmé, že součet čtverců odvěsen je roven čtverci přepony, přesně podle Pythagorovy věty.



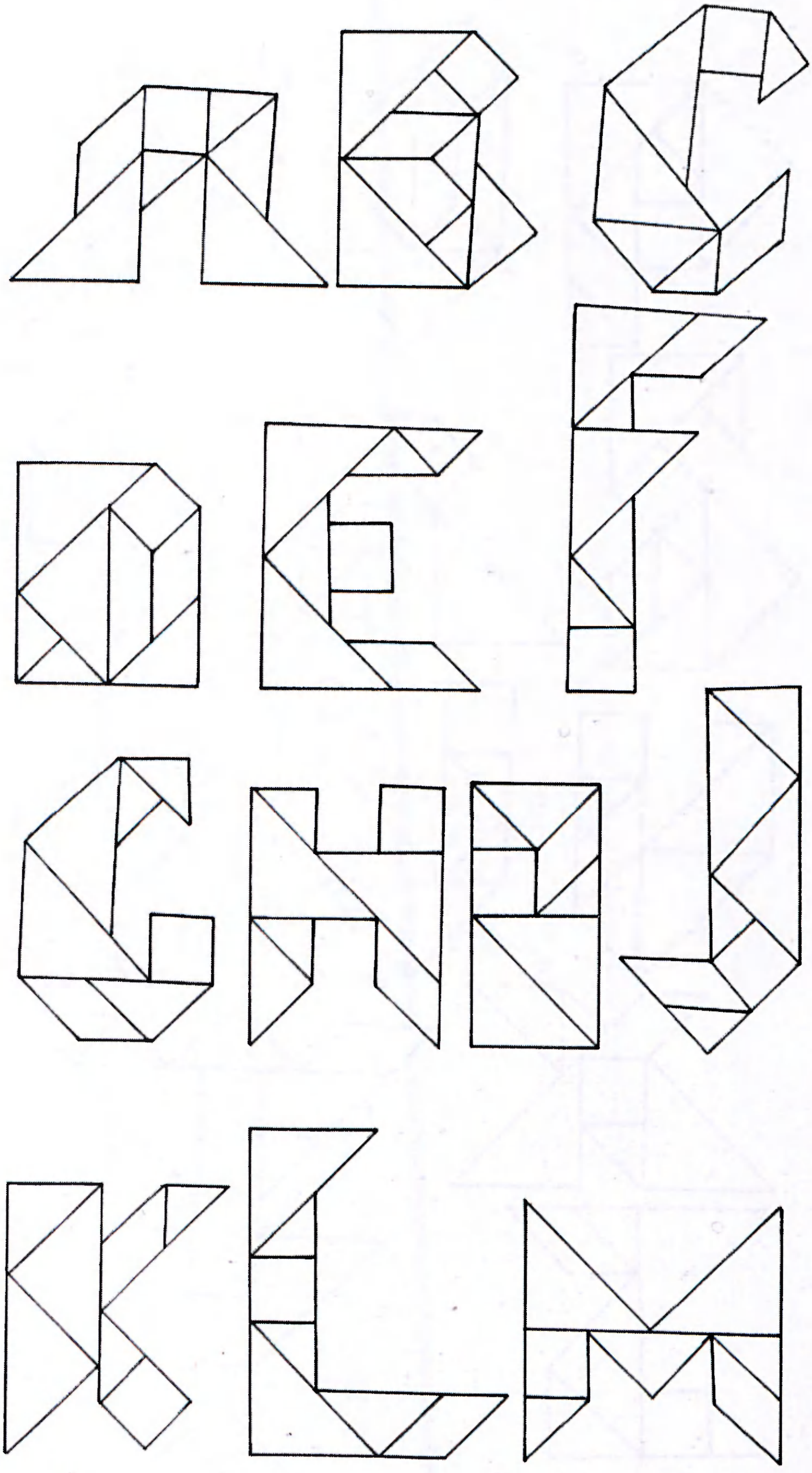
Obr. P5.4

Příloha č. 6
Písmena abecedy z tangramu

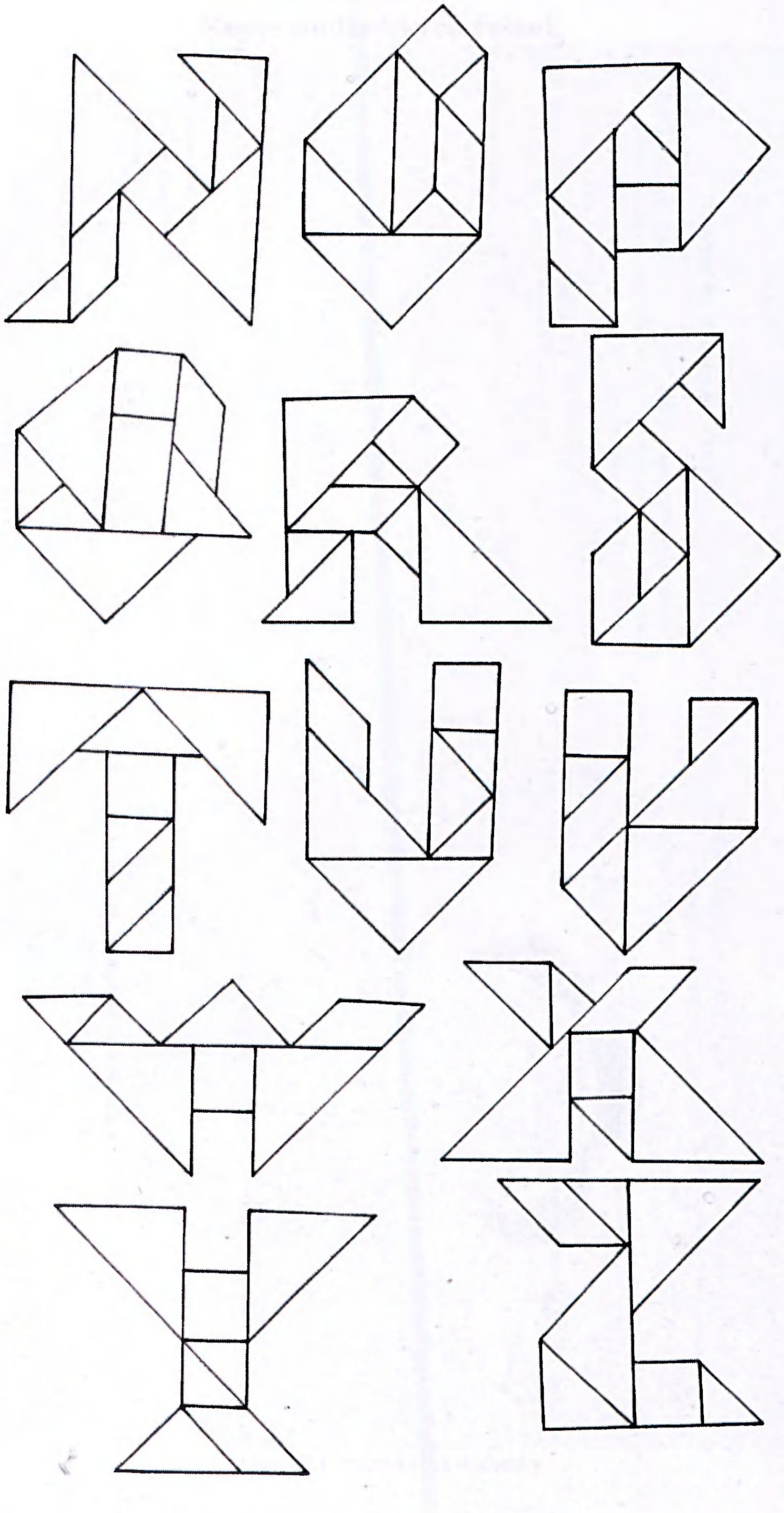
Z dílů tangramu je možné také složit jednotlivá písmena abecedy. Zde je uvedena předloha písmen (viz obr. P6.1), na následujících stránkách jsou uvedena uspořádání dílů, mnou složená, v písmenech (obr. P6.2 a P6.3).



Obr. P6.1. Zdroj <http://www.rodina.cz/clanek1921.htm> [cit. 2009-02-10]

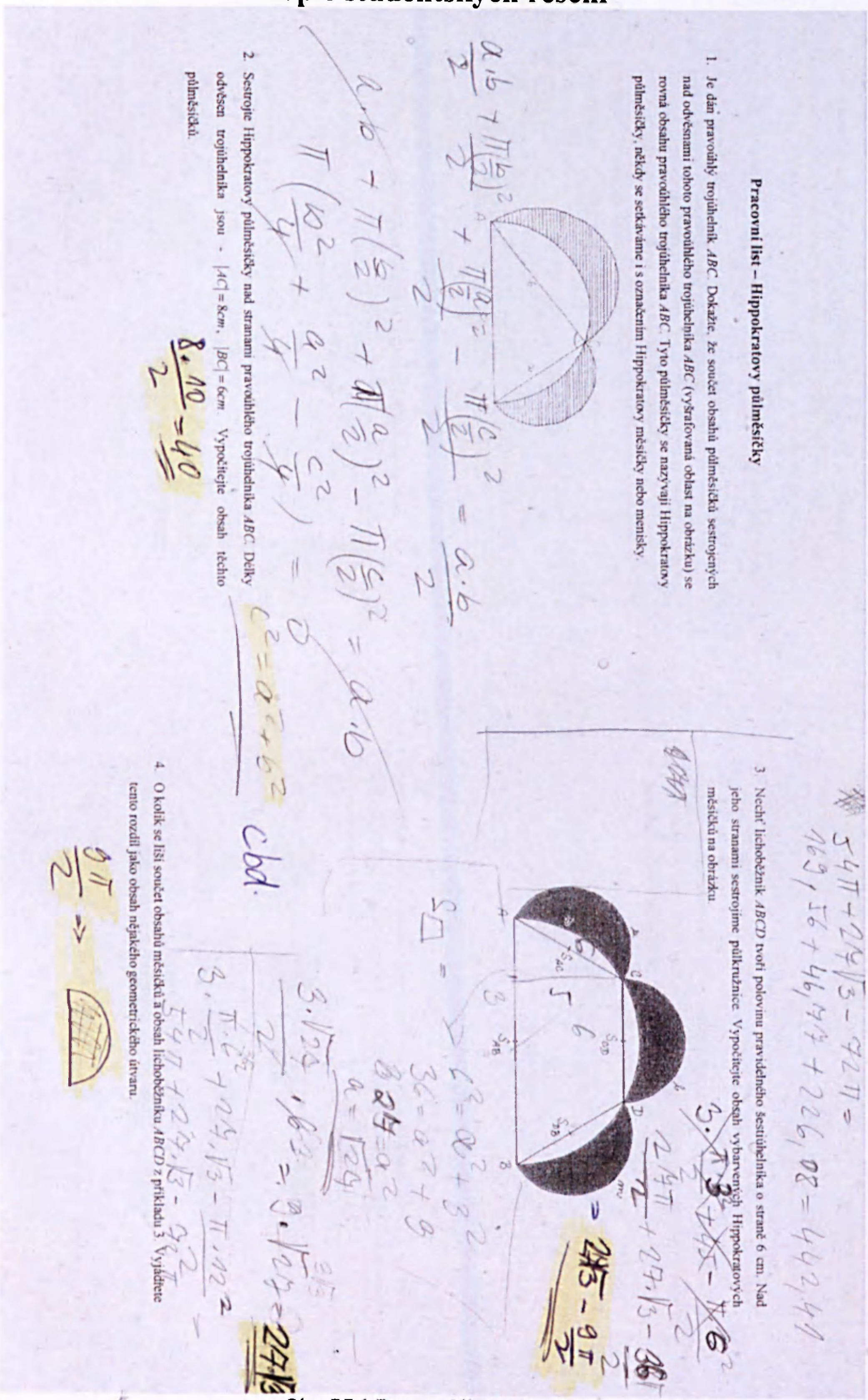


Obr. P6.2



Obr. P6.3

Příloha č. 7
Kopie studentských řešení[2]



Pracovní list – Hippokratovy půlměsíčky

1. Je dán pravoúhlý trojúhelník *ABC*. Dokažte, že součet obsahů půlměsíčků sestrojených nad odvěsnami tohoto pravoúhlého trojúhelníka *ABC* (vyšrafovaná oblast na obrázku) se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka *ABC*. Tyto půlměsíčky se nazývají Hippokratovy půlměsíčky, někdy se setkáváme i s označením Hippokratovy měsíčky nebo menisky.

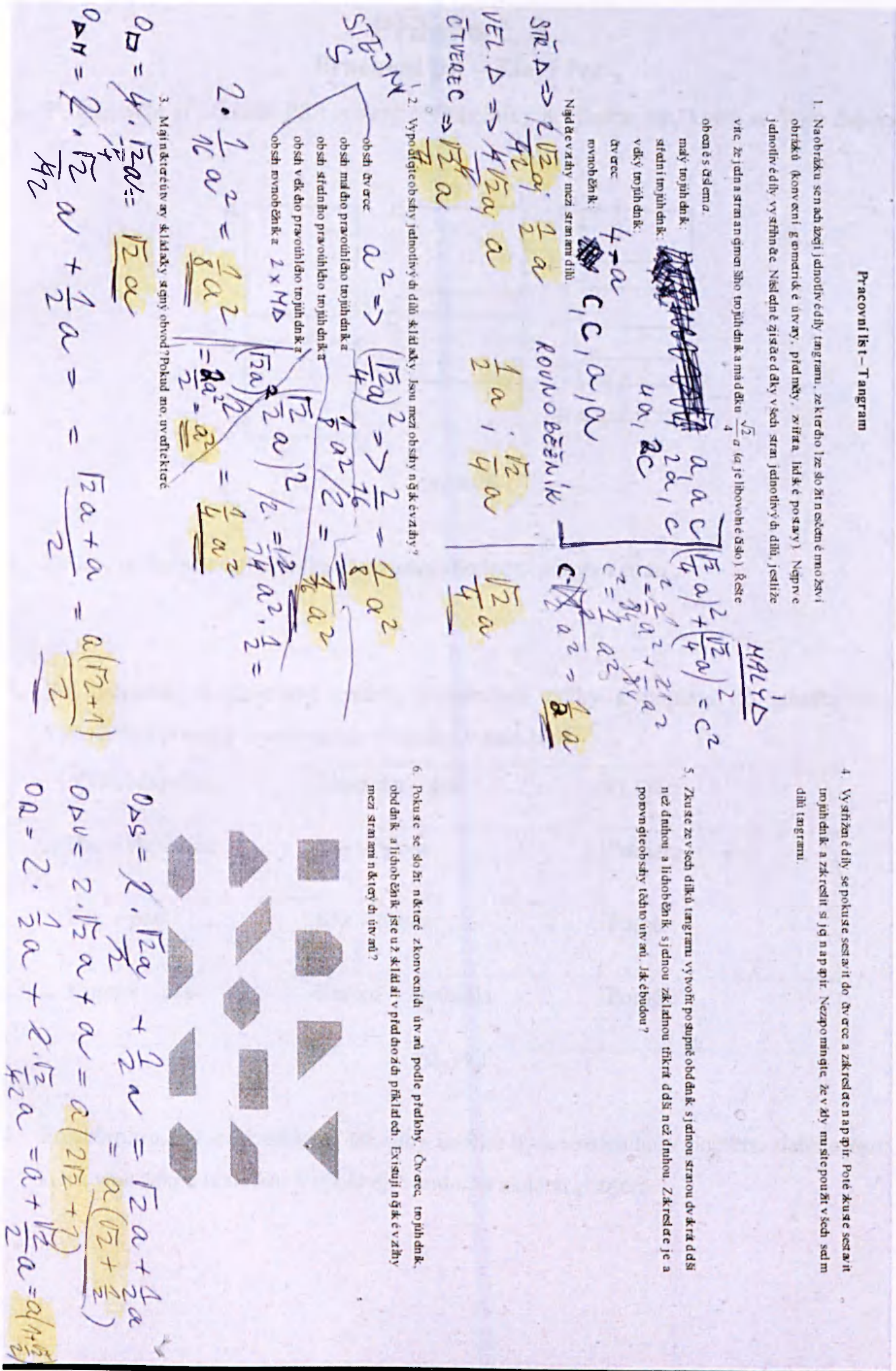
2. Sestrojte Hippokratovy půlměsíčky nad stranami pravoúhlého trojúhelníka *ABC*. Délky odvěsen trojúhelníka jsou - $|AC| = 8cm$, $|BC| = 6cm$. Vypočítejte obsah těchto půlměsíčků.

3. Nechť lichoběžník *ABCD* tvoří polovinu pravidelného šestiúhelníka o straně 6 cm. Nad jeho stranami sestrojíme půlkružnice. Vypočítejte obsah vybarvených Hippokratových měsíčků na obrázku.

4. O kolik se liší součet obsahů měsíčků a obsah lichoběžníku *ABCD* z příkladu 3. Vyjádřete tento rozdíl jako obsah nějakého geometrického útvaru.

Obr. P7.1 Pracovní list studentky

[2] Někteří studenti si žlutě zvýraznili výsledky jednotlivých úloh.



Pracovní list – Tangram

1. Na obrázku se nacházejí jednotlivé díly tangramu, ze kterého lze složit nesčetné množství obrázků (konvexní geometrické útvary, předměty, zvířata, lidské postavy). Nejprve jednotlivé díly vystřihněte. Následně zjistěte délky všech stran jednotlivých dílů, jestliže víte, že jedna strana nejmenšího trojúhelníka má délku $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ (a je libovolné číslo). Řešte obecně s číslem a.
   - malý trojúhelník:
   - střední trojúhelník:
   - velký trojúhelník:
   - čtverec:
   - rovnoběžník:

   Najděte vztahy mezi stranami dílů.

2. Vypočítejte obsahy jednotlivých dílů skládačky. Jsou mezi obsahy nějaké vztahy?
   - obsah čtverce
   - obsah malého pravoúhlého trojúhelníka
   - obsah středního pravoúhlého trojúhelníka
   - obsah velkého pravoúhlého trojúhelníka
   - obsah rovnoběžníka

3. Mají některé útvary skládačky stejný obvod? Pokud ano, uveďte které.

4. Vystřižené díly se pokuste sestavit do čtverce a zakreslete na papír. Poté zkuste sestavit trojúhelník a zakreslit si jej na papír. Nezapomeňte, že vždy musíte použít všech sedm dílů tangramu.

5. Zkuste ze všech dílků tangramu vytvořit postupně obdélník s jednou stranou dvakrát delší než druhou a lichoběžník s jednou základnou třikrát delší než druhou. Zakreslete je a porovnejte obsahy těchto útvarů. Jaké budou?

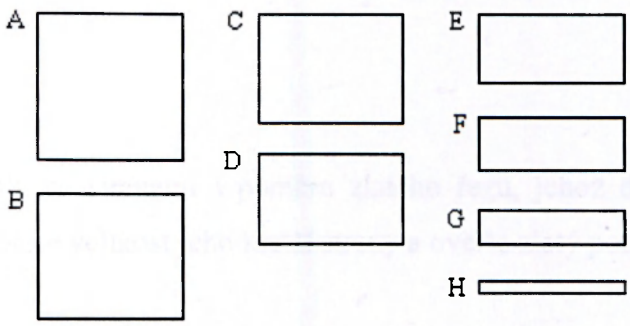
6. Pokuste se složit některé z konvexních útvarů podle předlohy. Čtverec, trojúhelník, obdélník a lichoběžník jste už skládali v předchozích příkladech. Existují nějaké vztahy mezi stranami některých útvarů?

Obr. P7.2 Pracovní list studenta

Příloha č. 8

Pracovní list – Zlatý řez

1. Prohlédněte si obrázek P8.1 s osmi čtyřúhelníky a vyberte ten, který se Vám nejvíce líbí.



Obr. P8.1

2. Změřte délky stran obdélníka *D* a zjistěte hodnotu poměru stran.

3. Ve dvojicích si vzájemně změřte požadované délky a doplňte do tabulky P8.1. Vypočítejte poměry a porovnejte výsledky v celé třídě.

Výška člověka:	Chodidla – pas:	Poměr:
Pas – chodidla:	Pas – hlava:	Poměr:
Krk – pas:	Krk – hlava:	Poměr:
Kolena – pas:	Kolena – chodidla:	Poměr:

Tab. P8.1

4. Rozdělte úsečku *AB* bodem *C* tak, aby úsečka byla rozdělena v poměru zlatého řezu, který vám řekne učitelka. Vypočítejte hodnotu zlatého poměru.

5. Narýsujte si libovolnou úsečku AB a rozdělte ji ve zlatém poměru.

6. Narýsujte obdélník se stranami v poměru zlatého řezu, jehož delší strana bude mít velikost 6 cm. Změřte velikost jeho kratší strany a ověřte zlatý poměr.

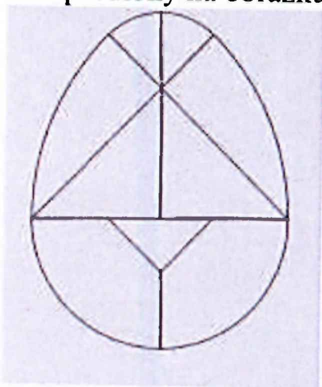
7. Narýsujte libovolný rovnoramenný trojúhelník s vnitřními úhly $36°$, $72°$, $72°$. Změřte délky stran a ověřte, jakému číslu se rovná jejich poměr.

8. Narýsujte pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, jestliže délka jeho úhlopříčky je 10 cm.

Příloha č. 9

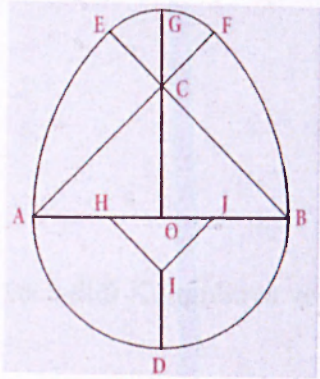
Pracovní list – Kolumbovo vejce

1. Sestrojte Kolumbovo vejce podle předlohy na obrázku P9.1.



Obr. P9.1

2. Jaký je úhel *ACB* na obrázku P9.2? Zdůvodněte.



Obr. P9.2

3. Dokažte, že trojúhelník HIJ je pravoúhlý.

4. Dokažte početně, že $|AH| = |ID|$.

5. Vytvořte nějaké obrázky ze všech dílů Kolumbova vejce.