MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Garik Dohnal

Definovatelné třídy modulů a dekonstrukce kotorzních párů

Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Šaroch Jan, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematické struktury

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Definovatelné třídy modulů a dekonstrukce kotorzních párů

Autor: Garik Dohnal

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Šaroch Jan, Ph.D., katedra algebry

Abstrakt: Cílem této práce bylo dokázat, že definovatelný uzávěr libovolné podtřídy kotorzních modulů uzavřené na direktní sumy sestává ze Σ-kotorzních modulů. Jediný známý důkaz využívá silně kalkulus v derivované kategorii, v této práci jsme se k důkazu pokusili využít pouze prostředků kategorie pravých R-modulů a množinově-teoretických vlastností indexových uspořádání direktních systémů z nich složených. Výsledkem jsou důkazy za dodatečných předpokladů na okruh R, totiž $|R| \leq \aleph_\omega$ nebo $\dim(R) < \aleph_\omega$. Podat důkaz ve stejně obecné situaci, jako je ta, ve které je již známý, se nepovedlo.

Klíčová slova: modul, kotorzní pár, definovatelná třída, dekonstrukce, čistá injektivita

Title: Definable classes of modules and deconstruction of cotorsion pairs

Author: Garik Dohnal

Department: Department of algebra

Supervisor: Mgr. Šaroch Jan, Ph.D., department of algebra

Abstract: The goal of this work was to prove the fact, that definable closure of any subclass of cotorsion modules closed under direct sums consists of Σ-cotorsion modules. The only known proof uses substantially the calculus of derived category, in this work we tried to prove the same, but only by means of a given category of all right R-modules and set-theoretic properties of partial orders indexing direct systems of R-modules. The main results of this work are proved under additional assumptions on the ring R, in particular $|R| \leq \aleph_\omega$ or $\dim(R) < \aleph_\omega$. Attempts to give s proof in the same general situation, where the fact is known to hold, was not successful.

Keywords: module, cotorsion pair, definable class, deconstruction, pure injectivity

Děkuji vedoucímu práce Janu Šarochovi za jeho rady a korekce. Dále děkuji své rodině a ostatním blízkým za jejich podporu.

Obsah

Úvod

Buď R libovolný asociativní okruh a Mod-R kategorie pravých R-modulů. Libovolný Σ-čistě injektivní modul M je izomorfní direktní sumě nerozložitelných Σ-čistě injektivních modulů a tak se vlastnost být Σ-čistě injektivním přenáší na každý prvek $\mathrm{Add}(M)$ – třídy všech direktních sčítanců libovolné direktní sumy kopií M. Direktní sumy jsou čisté podmoduly produktů kopií M, třída $\mathrm{Add}(M)$ je tedy podtřídou definovatelného uzávěru modulu M, který také sestává ze Σ-čistě injektivních modulů, jak plyne následující úvahou:

- Libovolný produkt kopií M je elementárně ekvivalentní direktní sumě kopií M, která je Σ-čistě injektivní z předpokladu a vlastnost být Σ-čistě injektivním je stabilní na elementární ekvivalence. Produkt kopií M je tedy Σ-čistě injektivní také.

- Podle [1, Lemma 2.32] je každý čistý podmodul libovolného Σ-čistě injektivního modulu také Σ-čistě injektivní, tedy speciálně libovolná direktní suma produktů kopií M a z tranzitivity relace být čistým podmodulem také libovolný její čistý podmodul.

- Podle [1, Theorem 2.27] je každá direktní limita systému produktů kopií M jakožto faktor Σ-čistě injektivní direktní sumy podle čistého podmodulu jejím direktním sčítancem, tedy opět Σ-čistě injektivním modulem.

Definovatelný uzávěr M je nejmenší třída obsahující M, která je uzavřená na direktní produkty, direktní limity a čisté podmoduly, přičemž jí lze ekvivalentně zadat jako všechny direktní produkty kopií M, jejich direktní limity a jejich čisté podmoduly, každý z nich podle předchozího Σ-čistě injektivní.

Nadtřídou čistě injektivních modulů je třída kotorzních modulů, jde o pravou třídu kotorzního páru kogenerovaného čistě injektivními moduly.

Otázka, zda je případ Σ-kotorzního modulu C analogický, tedy zda jeho definovatelný uzávěr sestává ze Σ-kotorzních modulů, je již nyní vyřešená a odpověď je ano. Nalézá se v nepublikovaném článku Jana Šťovíčka [2], důkaz je veden přechodem do kategorie komplexů za pomocí prostředků její derivované kategorie.

Na první pohled není nijak zřejmé, zda lze daný modul aproximovat pouze v Mod-R direktním systémem takových vlastností, které by vedly k pozitivní odpovědi jako [2].

K dané otázce existuje ještě starší a nikde nepublikovaný text Jana Šťovíčka [4], využívající pouze prostředky Mod-R a dokazující výše zmíněnou vlastnost za předpokladu $|R| < \aleph_\omega$. Omezení je dáno tím, že tamní zobecnění Eklofova lemmatu, které uskutečňuje indukci podle presentovanosti, nelze použít v případě singulárně presentovaného modulu. Jeho aproximace pomocí pseudofiltrace regulární délky vede k příliš velké generovanosti jejích článků. Tento a také nepublikovaný text Jana Šarocha [5] dokazující případ $|R| = \aleph_\omega$ byl výchozím bodem této práce, jejímž hlavním záměrem je zkoumání možností rozšíření induktivního důkazu pouze v Mod-R i pro singulárně presentované moduly.

V následující kapitole zavedeme pojmy pro uspořádání a pro kategorii pravých R-modulů pro libovolný daný okruh R v míře, s jakou budou potřeba v další kapitole.

Ta vychází nejprve z textu [4]. Dokazovaná Ext-ortogonalita dvou daných modulů se přeloží do vlastností indexového uspořádání direktního systému aproximující jeden z nich pomocí méně presentovaných modulů. Dále využijeme třídní hierarchii z [4] a mašinérii singulární kompaktnosti z [1] k důkazu tvrzení o výše zmiňované inkluzi definovatelného uzávěru Σ-kotorzního modulu za předpokladu pravé $< \aleph_\omega$-noetherovskosti R, která je netriviálním zobecněním $|R| < \aleph_\omega$. Pak podle textu [5] vyřešíme případ $|R| = \aleph_\omega$. Poslední sekce je věnována vlastní autorově analýze klíčového uspořádání, kterou práce po věcné stránce končí. V závěru uvedeme několik otevřených otázek, například po možnosti zobecnění postupu v práci k posunutí předpokladu $|R| < \aleph_{\omega+1}$ na předpoklad $|R| < \aleph_{\omega_1}$. Za závěrem se nachází seznam literatury a index použitých symbolů.

1. Definice základních pojmů a několik odvozených vlastností

1.1 Uspořádání

Ordinální čísla On budou v dalším značené prvními písmeny řecké abecedy. Cn nechť označuje podtřídu kardinálních čísel. Jde o obraz funkce absolutní hodnoty v ZFC $|(-)| : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ definované formulí:

$$|\alpha| = min\{\beta : (\beta \in \mathrm{On}) \wedge (\text{existuje prosté zobrazení } \alpha \to \beta)\}$$

Množinu všech podmnožin dané množiny I budeme značit $\mathfrak{P}(I)$ a množinu podmnožin I kardinality $< \lambda$ symbolem $[I]^{<\lambda}$.

Nechť je $(I, \leq_I)$ uspořádání bez maximálních prvků, $<_I$ jeho ostrá restrikce a λ nekonečný regulární kardinál. Uspořádání I nazveme λ-*úplné*, pokud má každý $<_I$-rostoucí řetězec prvků z I číslovaných ordinálem $\gamma \in \lambda$ v I supremum a množinu $J \subseteq I$ λ-*uzavřenou*, pokud je každé supremum $\leq_I$-řetězce délky $\gamma \in \lambda$ složeného z prvků J prvkem J.

Pro prvky $i \in I$ definujme *horní* množiny $[i, \leq_I) = \{j : j \geq_I i\} \subseteq I$ a analogicky *dolní* množiny $(\leq_I, i] = \{j : j \leq_I i\} \subseteq I$. Horní topologie $\mathcal{T}_{\leq_I} \subseteq \mathfrak{P}(I)$ od uspořádání $\leq_I$ je generovaná horními množinami jako svou bází, otevřené jsou tedy ty množiny $O \subseteq I$, že $\forall o \in O : [o, \leq_I) \subseteq O$.

Vlastnost podmnožiny $H \subseteq I$ být $\leq_I$-*kofinální* je ekvivalentní být *hustá* v horní topologii, tedy $(\forall i \in I)(\exists j \in H)(i \leq_I j)$. Množinu všech takových množin označme $\mathrm{Cf}_{\leq_I} I \subseteq \mathfrak{P}(I)$.

Usměrněnost I, klasicky definována jako existence společné $\leq_I$-horní meze pro každou dvojici i,j z I, lze zadat podmínkou, že je každá bázová horní množina $\leq_I$-kofinální.

Filtr $\mathfrak{F}_I = \{X : (\exists i \in I)([i, \leq_I) \subseteq X)\} \subseteq \mathfrak{P}(I)$ zveme jako I-*asociovaný*, jistě obsahuje celou topologii $\mathcal{T}_{\leq_I}$.

Přechodem k doplňkům dostáváme, že $\mathcal{T}_{\leq_I}$-uzavřené množiny jsou obsažené v duálním ideálu $[\mathfrak{F}_I]^* = \{I \setminus X : X \in \mathfrak{F}_I\}$, který je za předpokladu usměrněnosti $\leq_I$ totožný s ideálem $\mathcal{T}_{\leq_I}$-*nikde hustých* množin $\mathrm{Nwd}_{\leq_I} I$, tedy těch $N \subseteq I$, že $(\forall n \in N)(\exists k \geq_I n) : [k, \leq_I) \cap N = \emptyset$. Jedna inkluze plyne z $[k, \leq_I) \subseteq I \setminus N$ a druhá tak, že pro $n \in I \setminus X$ s $X \in \mathfrak{F}_I$ najdeme k jako společnou $\leq_I$-mez pro n a libovolné l, že $[l, \leq_I) \subseteq X$.

Označme dále jako $\mathrm{Cub}_{\leq_I} I \supseteq \mathfrak{F}_I$ filtr, který generují $\leq_I$-kofinální a I-*uzavřené množiny*, tedy takové, které obsahují suprema, kdykoli tyto existují v I. Množinu nazveme I-*clubem*, pokud je $\leq_I$-kofinální a I-uzavřená, zkráceně *clubem*, pokud bude uspořádání I jasné z kontextu.

Symbol $\mathrm{Stat}_{\leq_I} I$ pro všechny I-*stacionární* množiny, tedy takové, které mají neprázdný průnik s každým prvkem $\mathrm{Cub}_{\leq_I} I$.

$\mathrm{Nst}_{\leq_I} I$ pak ty, že pro každou jednu existuje cub $C \subseteq I$, se kterým má prázdný průnik, tedy $\mathrm{Nst}_{\leq_I} I = [\mathrm{Cub}_{\leq_I} I]^*$.

1.2 Třídy v Mod-R

Symbolem R budeme v dalším značit okruh a Mod-R kategorii složenou z pravých R-modulů.

Produkt $\prod_{i\in I} M_i$ systému modulů $(M_i)_{i\in I}$ existuje se strukturními morfismy $(\pi_i)_{i\in I}$, které mu dávají známou univerzální zobrazovací vlastnost. Pokud připustíme pouze ty prvky produktu, které mají nenulové souřadnice obsažené v množině z duálního ideálu k danému filtru $\mathfrak{F}$ na indexové množině produktu, získáváme podmodul produktu nazývaný $\mathfrak{F}$-*produkt*.

V případě ideálu $[I]^{<\omega}$ je jeho $[[I]^{<\omega}]^*$-produkt direktní suma $\bigoplus_{i\in I} M_i$ existující se strukturními morfismy $(\iota_i)_{i\in I}$, které jí dávají duální univerzální zobrazovací vlastnost k zobrazovací vlastnosti produktu.

Nechť je $(I, \leq_I)$ λ-úplné uspořádání. Direktní systém modulů, značený

$$(M_i,m_{ji} : j \geq_I i \in I) \text{ zkráceně } (M_i,m_{ji})_I$$

na indexovém $(I, \leq_I)$ nazveme λ-*spojitý*, pokud platí $M_{sup_{\alpha\in\gamma}(i_\alpha)} = \varinjlim_{\alpha\in\gamma} M_{i_\alpha}$ pro libovolný $\leq_I$-řetězec $(i_\alpha)_{\alpha\in\gamma} \subseteq I$, kde $\gamma \in \lambda$.

I-*spojitý*, či prostě *spojitý* systém modulů na I znamená spojitý vzhledem k libovolnému supremu libovolného I-řetězce, které se realizuje jako prvek I.

Případ spojité direktní limity, kdy je $(I, \leq_I) = (\sigma, \in)$ nějaký limitní ordinál a $M_0 = 0$ budeme dále nazývat *pseudofiltrace*. Je-li navíc $\mathcal{C}$ taková třída modulů, že $\operatorname{coker}(f_{\alpha+1\alpha})$ leží v $\mathcal{C}$ pro libovolné $\alpha < \sigma$, tak se jedná o $\mathcal{C}$-*pseudofiltraci*.

Pokud $M_0 = 0$, $M_\delta = \bigcup_{\beta\in\delta} M_\beta$ pro $\delta \in \sigma$ limitní a R-morfismy $f_{\beta\alpha}$ jsou monomorfismy, hovoříme o $(M_\alpha,m_{\beta\alpha})_\sigma$ jako o *filtraci* modulu $M_\sigma = \bigcup_{\alpha\in\sigma} M_\alpha$.

S každou direktní limitou je asociována krátká exaktní posloupnost tvaru

$$0 \to K \overset{\subseteq}{\to} \bigoplus_{i\in I} M_i \overset{\varphi}{\to} \varinjlim_I M_i \to 0$$

Následující pozorování shrnuje vlastnosti direktní limity.

Pozorování 1.1. *Nechť je dán direktní systém $\mathcal{M} = (M_i,m_{ji})_I$ a nějaká direktní limita $(\tilde{M},\tilde{m}_j)_J$, kde $\tilde{m}_j : M_j \to \tilde{M}$, $J \subseteq I$ a $\tilde{m}_j = m_{ji}\tilde{m}_i$.*

(a) $\tilde{M}$ je izomorfní direktní limitě $M = \varinjlim_I \mathcal{M}$ právě tehdy, když $ker(\tilde{m}_i) = \bigcup_{j\in[i,\leq_I)} ker(m_{ji})$ pro každé $i \in J$ a $M = \bigcup_{j\in J} im(\tilde{m}_j)$.

(b) Pokud jsou zobrazení $(\tilde{m}_j)_{j\in J}$ ve skutečnosti shodná se strukturními morfismy m_j, tak je podmínka na jádra v (a) dána rovností

$\bigcup_{j\in[i,\leq_I)\cap J} ker(m_{ji}) = \bigcup_{j\in[i,\leq_I)} ker(m_{ji})$ pro každé $i \in J$.

Důkaz. Převzato z [1, Lemma 2.2 a 2.3]. □

Buďte $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ libovolné třídy pravých R-modulů. $\operatorname{Ker}(\mathcal{C})$ znamená v dalším třídu všech podmodulů modulů z $\mathcal{C}$, $\operatorname{Im}(\mathcal{C})$ třídu obrazů modulů z $\mathcal{C}$.

$\prod(\mathcal{C})$ třídu produktů modulů z $\mathcal{C}$ a analogicky pro ostatní konstrukce, přičemž pro $\mathfrak{F}$-produkt použijeme symbol $\sum_{\mathfrak{F}}(\mathcal{C})$. Symbol $\operatorname{Gen}_\kappa(\mathcal{C})$ pro κ-generované moduly z $\mathcal{C}$ a $\operatorname{Pres}_\kappa(\mathcal{C})$ pro κ-presentované moduly z $\mathcal{C}$, tedy faktory κ-generovaných volných modulů podle κ-generovaných podmodulů.

Pozorování 1.2. *(a) Buď κ libovolné nekonečné kardinální číslo. Každý κ-presentovaný modul je direktní limitou konečně presentovaných modulů na indexové množině I mohutnosti κ.*

(b) Pro každou direktní limitu X od usměrněného systému $(X_i,x_{ji})_I$ existuje pseudofiltrace $(X_\alpha,x_{\beta\alpha})_{cf(|I|)}$, jejíž je X direktní limitou.

(c) Pro libovolnou třídu $\mathcal{C}$ platí:

$\mathcal{C} = \prod(\mathcal{C}) \wedge \mathcal{C} = \varinjlim_{(On,\hookrightarrow)}(\mathcal{C}) \Rightarrow \sum_{\mathfrak{F}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

Důkaz. (a) Podle [1, Lemma 2.5] je libovolný modul direktní limitou konečně presentovaných modulů.

Omezení kardinality direktního systému vyplývá z [3, Lemma 1.1], přičemž se v daném lemmatu klade $\lambda = \omega$ a $X = Y = \kappa$ následkem čehož sestává tamější direktní systém z $|[\kappa]^{<\omega}| \cdot |[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$ konečně presentovaných modulů.

Opačná inkluze $\subseteq$ plyne z faktu, že faktor κ-presentovaného modulu podle κ-generovaného podmodulu je κ-presentovaný, což krátká exaktní posloupnost presentující direktní limitu jako faktor direktní sumy splňuje, jádro jsoucí $|I| \cdot |I| \cdot \omega = \kappa$-generované, direktní suma κ-presentovaná.

(b) [1, Lemma 2.14].

(c) Každý $\mathfrak{F}$-produkt je usměrněným sjednocením produktů na množinách v duálním ideálu $\mathfrak{F}^*$, tedy prvkem $\varinjlim_{\mathfrak{F}^*,\hookrightarrow}(\prod(\mathcal{C}))$ a použije se předchozí bod, který redukuje indexovou množinu uspořádání na prvek třídy On.

□

Každý pravý modul M lze presentovat pomocí krátké exaktní posloupnosti tvaru

$$0 \to \ker(\pi) \xrightarrow{i} R^{(I)} \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

ke které se váže následující definice.

Definice 1.3. (1) $\mathrm{Ext}^1_R(X_R,M_R) = \mathrm{Hom}_R(X_R,M_R)/\mathrm{im}(\mathrm{Hom}_R(X_R,\pi))$.

$\mathrm{Ext}^1_R(M_R,X_R) = \mathrm{Hom}_R(\ker(\pi),X_R)/\mathrm{im}(\mathrm{Hom}_R(i,X_R))$.

(2) Pro danou třídu $\mathcal{C} \subseteq$ Mod-R definujme

$$\mathcal{C}^\perp = \{B : \mathrm{Ext}^1_R(C,B) = 0 \text{ pro } \forall C \in \mathcal{C}\}$$

a analogicky ${}^\perp\mathcal{C}$ jako ty $B \in$ Mod-R, pro které $\mathrm{Ext}^1_R(B,\mathcal{C}) = 0$.

(3) S třídou modulů $\mathcal{C}$ asociujme třídu morfismů $\uparrow_{(-,\mathcal{C})}$ jako takových f, že $\mathrm{Hom}(f,C)$ je epimorfismus pro každý modul $C \in \mathcal{C}$.

Duálně $f \in \uparrow_{(\mathcal{C},-)}$, pokud je $\mathrm{Hom}(C,f)$ epimorfismus pro každý modul $C \in \mathcal{C}$.

(4) Pro libovolnou třídu $\mathcal{C}$ definujme třídy modulů

$${}^\triangle\mathcal{C} = \{X : \forall f \in \uparrow_{(-,\mathcal{C})}: \mathrm{Hom}(f,X) \text{ je epimorfismus } \}$$

$$\mathcal{C}^\triangle = \{X : \forall f \in \uparrow_{(\mathcal{C},-)}: \mathrm{Hom}(X,f) \text{ je epimorfismus } \}$$

Označme si $\mathrm{Ker}_{\oplus}(\mathcal{C})$ třídu všech direktních sčítanců modulů z $\mathcal{C}$ s konvencí $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Ker}_{\oplus}(\mathcal{C})$ danou identitami a nulovými morfismy. Známé třídy jsou *projektivní moduly* $\mathcal{P}_0 = {}^{\perp}\text{Mod-}R$ a *injektivní moduly* $\mathcal{I}_0 = \text{Mod-}R^{\perp}$.

Morfismus $f \in \uparrow_{(-,\mathcal{C})}$ budeme nazývat (kontravariantně) $\mathcal{C}$-*čistý*.

V této práci využijeme pouze kontravariantní symboly $\uparrow_{(-,\mathcal{C})}$ a ${}^{\triangle}\mathcal{C}$. Jejich jednoduché vlastnosti jsou:

Pozorování 1.4. *Nechť jsou $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ libovolné třídy modulů.*

(a) Vlastnosti $\uparrow_{(-,\mathcal{C})}$

(a1) $\uparrow_{(-,\mathcal{C})} = \uparrow_{(-,Ker_{\oplus}(\mathcal{C}))} = \uparrow_{(-,\prod(\mathcal{C}))} = \uparrow_{(-,{}^{\triangle}\mathcal{C})}$

(a2) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \uparrow_{(-,\mathcal{C})} \supseteq \uparrow_{(-,\mathcal{D})}$

(b) Vlastnosti ${}^{\triangle}\mathcal{C}$

(b1) $\mathcal{C} \subseteq {}^{\triangle}\mathcal{C} = Ker_{\oplus}({}^{\triangle}\mathcal{C}) = \prod({}^{\triangle}\mathcal{C}) = {}^{\triangle}({}^{\triangle}\mathcal{C})$

(b2) Pro $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ *je* ${}^{\triangle}\mathcal{C} \subseteq {}^{\triangle}\mathcal{D}$.

Důkaz. Z definice. □

V zavedené notaci definujme další třídy morfismů a modulů, totiž ty o kterých padla zmínka v úvodu.

Čistý epimorfismus $\twoheadrightarrow_*$ je morfismus náležící $\uparrow_{(\mathrm{Pres}_{<\omega}(\text{Mod-}R),-)}$.

Čistý monomorfismus $A \xrightarrow{i} B$ je monomorfismus, že $B \xrightarrow{\pi_{B/\mathrm{im}(i)}} B/\mathrm{im}(i)$ je čistý epimorfismus. Krátká exaktní posloupnost složená z čistého epimorfismu a tedy také čistého monomorfismu, ze nazývá *čistě exaktní*.

Třída *čistě injektivních* modulů $\mathcal{PI}$ je definována jako všechny moduly E, že $\mathrm{Hom}(i,E)$ je surjektivní pro libovolný čistý monomorfismus i a duálně třída $\mathcal{PP}$ *čistě projektivních* modulů. Další třídou modulů jsou *ploché* moduly $\mathcal{FL} = {}^{\perp}\mathcal{PI}$ a *kotorzní* moduly $\mathcal{EC} = \mathcal{FL}^{\perp}$.

Označme $\mathrm{Ker}_*(\mathcal{C})$ všechny čisté podmoduly modulů z $\mathcal{C}$ a $\mathrm{Im}_*(\mathcal{C})$ všechny čistě-epimorfní obrazy modulů z $\mathcal{C}$. Třídu $\mathcal{C}$ nazveme *definovatelnou*, pokud:

$$\mathcal{C} = \prod(\mathcal{C}) \wedge \mathcal{C} = \varinjlim(\mathcal{C}) \wedge \mathcal{C} = \mathrm{Ker}_*(\mathcal{C})$$

Definovatelný uzávěr $\overline{\mathcal{C}}^{\mathrm{def}}$ je průnik všech definovatelných tříd obsahujících $\mathcal{C}$, tedy nejmenší definovatelná třída obsahující $\mathcal{C}$.

Pozorování 1.5. *(a) Krátké exaktní posloupnosti tvaru*

$$0 \to K \xrightarrow{\subseteq} \bigoplus_{i \in I} M_i \xrightarrow{\pi} \varinjlim_{I} M_i \to 0$$

a také

$$0 \to \sum_{\mathfrak{F}} X \xrightarrow{\subseteq} \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\pi} \prod_{i \in I} X_i / \sum_{\mathfrak{F}} X \to 0$$

jsou čistě exaktní pro libovolný filtr a libovolný systém modulů.

Tedy $\varinjlim(\mathcal{C}) \subseteq Im_*(\bigoplus(\mathcal{C})) \subseteq Im_*(Ker_*(\prod(\mathcal{C}))$.

(b) $Im_*(Ker_*(\prod(\mathcal{C}))) = Ker_*(Im_*(\prod(\mathcal{C}))) = \overline{\mathcal{C}}^{def}$.

(c) *Každý nekonečný κ-presentovaný plochý modul F je direktní limita systému konečně generovaných volných modulů, velikost jeho indexové množiny omezená κ.*

Důkaz. (a) V prvním případě se morfismy z konečně presentovaného F do limity faktorizují přes nějaký $M_j \xrightarrow{f_j} \varinjlim_I M_i$ a ve druhém se použije ekvivalentní charakterizace čistoty přes elementární ekvivalenci ve formuli řešitelnosti konečného systému rovnic [1, Lemma 2.19], která díky uzavřenosti filtru na konečné průniky platí.

(b) Inkluze $\subseteq$ první rovnosti pro $D \in \mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C}))$, tedy $D \hookrightarrow_* \prod_{i\in I} C_i$, a krátkou čistě exaktní posloupnost $E \hookrightarrow_* D \twoheadrightarrow_* A$ plyne z exaktní posloupnosti $A \hookrightarrow_* \prod_{i\in I} C_i/E \twoheadrightarrow_* \prod_{i\in I} C_i/D$, oba faktory produktu jsoucí jeho čistými obrazy. Naopak se postupuje analogicky.

Inkluze $\supseteq$ druhé rovnosti plyne z [1, Lemma 6.9], podle které je definovatelná třída uzavřená na čisté obrazy svých prvků. K důkazu opačná inkluze stačí nahlédnout, že $\mathrm{Im}_*(\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})))$ je definovatelná. Uzavřenost na čisté podmoduly a direktní limity plyne z bodu (a) tohoto pozorování a již dokázané první rovnosti tohoto bodu. Uzavřenost na produkty plyne z inkluzí $\prod(\mathrm{Im}_*(\mathcal{C})) \subseteq \mathrm{Im}_*(\prod(\mathcal{C}))$ a $\prod(\mathrm{Ker}_*(\mathcal{C})) \subseteq \mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C}))$, tyto jsou důsledkem faktu, že systém krátkých čistě exaktních posloupností $(A_i \hookrightarrow_* C_i \twoheadrightarrow_* B_i)_{i\in I}$ vede ke krátké exaktní posloupnosti produktů $\prod_I A_i \hookrightarrow \prod_I C_i \twoheadrightarrow \prod_I B_i$ s morfismy zadanými univerzální zobrazovací vlastností, díky které je tato krátká exaktní posloupnost produktů také čistě exaktní.

(c) Důkaz provedeme v elementárních krocích.

1. F je podle pozorování 1.2(a) limitou direktního systému S konečně presentovaných modulů na indexové množině mohutnosti $\leq \kappa$. Podle [1, Corollary 2.22] je F direktní limitou konečně generovaných volných modulů v direktním systému $(F_i, f_{ji})_I$.

   Systém S se faktorizuje přes systém na I jako usměrněný podsystém $(J, \leq_I) \subseteq (I, \leq_I)$ velikosti $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$, že $\bigcup_{j\in J} \mathrm{im}(f_j) = F$ a levý krajní prvek krátké exaktní posloupnosti

   $$0 \to L \hookrightarrow \varinjlim_{j\in J} F_j \xrightarrow{\pi_F} F \to 0$$

   je κ-generovaný, jde totiž o čisté jádro epimorfismu mezi κ-presentovanými moduly.

2. Prezentujeme-li L jako faktor $R^{(\kappa)}$, tak $R^{(\kappa)} \xrightarrow{\phi} \varinjlim_{j\in J} F_j$ už není prosté, ale zato můžeme použít univerzální zobrazovací vlastnost volného modulu, která dává faktorizaci $\psi : R^{(\kappa)} \to \bigoplus_{j\in J} F_j$, která komutuje s čistým epimorfismem $\varphi : \bigoplus_{j\in J} F_j \twoheadrightarrow \varinjlim_{j\in J} F_j$. κ generátorů $R^{(\kappa)}$ označme jako $\{r_\alpha : \alpha \in \kappa\}$.

3. Nyní J obohatíme o κ prvků z I, Označme si $J_0 = J$ a dále uvažujme $\psi(r_\alpha)$. Obraz každého generátoru zasáhne pouze konečně mnoho souřadnic J, v I pro ně existuje horní mez j_α a protože $\pi_F\psi(r_\alpha) = 0$, existuje k_α, že $r_\alpha \in \ker(f_{k_\alpha j_\alpha})$.

   Položme $J_1 = J_0 \cup \{k_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, její mohutnost je stále κ.

4. Definujme zobrazení $\mu : [J_1]^{<\omega} \setminus \emptyset \to I$ indukcí $\mu(\{j\}) = j$ a je-li $k \in [J_1]^{<\omega}$ taková, že pro každou $o \subsetneq k$ je μ již definované, položme $\mu(k) = i$ že $\forall o \subsetneq k : \mu(o) < i$, takové i z usměrněnosti jistě existuje. Označme dále $\overline{J_1} = J_1 \cup \operatorname{im}(\mu)$, stále jde o podmnožinu I velikosti κ, která je navíc usměrněná.

5. Suma obrazů dává stále F, proceduru lze opakovat a získat usměrněnou $\overline{J_2}$ opět velikosti κ. Položme $J_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \overline{J_n}$, jistě jde o usměrněný podsystém I velikosti κ.

6. Nyní stačí ukázat, že $\varinjlim_{J_\omega} F_j = F$, k čemuž použijeme pozorování 1.1(b), podmínka na obrazy je splněná již v případě J a podmínka na jádra se přeloží jako $\bigcup_{j\in[i,\leq_I)} \ker(f_{ji}) = \bigcup_{j\in[i,\leq_I)\cap J_\omega} \ker(f_{ji})$.

   Inkluze $\supseteq$ je triviální. Naopak, nechť je $f_i(x) = 0_F$ pro nějaký $x \in F_i$ a $i \in J_\omega$.

   Uvažujme nejprve $i \in J$, pak $x = l \in L$. Toto l je konečná kombinace r_α, díky čemuž existuje $k \in \overline{J_1}$ horní mez odvozených k_α, že $l \in \ker(f_{ki})$, tedy pro $k \in [i, \leq_I) \cap J_\omega$.

   Pro každé další $i \in J_\omega$ existuje n že $i \in \overline{J_n}$ jehož jádro je analogicky vyřešeno pomocí $\overline{J_{n+1}}$, čímž je důkaz hotov.

□

Poslední sada pojmů se týká aproximací daného modulu $M \in$ Mod-R pomocí nějaké třídy $\mathcal{C}$. Libovolná kodoména monomorfismu m, jehož kojádro je v $\mathcal{C}$, se v dalším nazývá *extenze* (domény m) podle $\mathcal{C}$. Symbol $\operatorname{Aut}(M)$ označuje R-*automorfismy*, tedy morfismy, které lze invertovat z obou stran.

Definice 1.6. (1) Morfismus $C \xrightarrow{e} M$ se nazve $\mathcal{C}$-*předpokrytí*, pokud $e \in\uparrow_{(\mathcal{C},-)}$, duálně, tedy $M \xrightarrow{i} C$, že $i \in\uparrow_{(-,\mathcal{C})}$, se definuje $\mathcal{C}$-*předobal.*

(2) Minimální verze, totiž $\mathcal{C}$-pokrytí a $\mathcal{C}$-obal, musí navíc splňovat dodatečnou podmínku: $\operatorname{Hom}^{-1}(C,e)(e) \subseteq \operatorname{Aut}(C)$.

(3) $\mathcal{C}$ je *předpokrývající* (pokrývající), pokud má (minimální) $\mathcal{C}$-předpokrytí každý modul a duálně pro $\mathcal{C}$-(před)obaly.

(4) *Speciální* $\mathcal{C}$-předpokrytí e vyžaduje surjektivitu e a $\ker(e) \in \mathcal{C}^\perp$. Pro *speciální* $\mathcal{C}$-předobal i je duálně potřeba injektivita a $\operatorname{coker}(i) \in {}^\perp\mathcal{C}$.

(5) $\mathcal{C}$ nazveme *resolvující*, pokud obsahuje projektivní moduly, je uzavřená na extenze svých prvků podle svých prvků a jádra epimorfismů mezi prvky v ní obsažených. Duálně *koresolvující* – obsahuje injektivní moduly a je uzavřená na extenze svých prvků podle svých prvků a kojádra monomorfismů mezi prvky v ní obsažených.

(6) $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ nazveme *kotorzní pár*, pokud platí $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{B}$ a ${}^\perp\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Kotorzní pár nazveme *dědičný*, pokud je jeho levá třída resolvující, ekvivalentně jeho pravá třída koresolvující.

Podmínka obsáhnutí $\mathcal{P}_0$ respektive $\mathcal{I}_0$ znamená surjektivitu $\mathcal{C}$-(před)pokrytí, respektive injektivitu $\mathcal{C}$-(před)obalů. Na závěr této kapitoly zmíníme další známé vlastnosti výše definovaných pojmů.

Fakt 1.7. *(a) $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{PI} \subseteq \mathcal{EC}$ jsou obalující.*

$\mathcal{FL}$ je resolvující, $\mathcal{EC}$ je koresolvující, třída plochých modulů je uzavřená na čisté faktor-moduly a tedy i čisté podmoduly.

(b) Pro každý dědičný kotorzní pár $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ platí:

$$\varinjlim_{On,\hookrightarrow} (\mathcal{B}) = \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{B} = (Pres_\omega(\mathcal{A}))^\perp \;\&\; \overline{\mathcal{B}}^{def} = \mathcal{B}$$

Důkaz. (a) [1, sekce 5].

(b) [3, Theorem 3.5], kde se uzávěrová podmínka na limity použije přeneseně jako uzavřenost na $\mathfrak{F}$-produkty, přičemž v důkazu se používá pouze uzavřenost na $\mathfrak{F}_I$-produkty.

□

Obrazy $\mathcal{C}$-obalů daného modulu M pro třídy $\mathcal{C}$ z bodu (a) značíme $E(M)$, $PE(M)$ a $CE(M)$.

2. Podmínky na danou třídu $\mathcal{C}$ vedoucí k omezení definovatelného uzávěru této třídy za pomocí Ext-odvozených tříd

Tato kapitola vychází nejprve z nepublikovaného textu [4], ve kterém autor dokázal inkluzi $\overline{\mathcal{C}}^{\text{def}} \subseteq \mathcal{EC}$ pro libovolnou $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$ splňující $\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC}$ a to nad okruhy R mohutnosti $< \aleph_\omega$.

Cílem této kapitoly je zobecnit postup tohoto důkazu pouze v kategorii pravých modulů nad daným okruhem R, a poskytnout částečný důkaz

$$\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC} \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}^{\text{def}} \subseteq \mathcal{EC}$$

Totiž pro případ okruhů kardinality $\leq \aleph_\omega$ nebo $\dim(R) < \aleph_\omega$.

2.1 Ext direktních limit a indukce pod $\aleph_\omega$

Mějme fixovaný okruh R a třídu $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$. Podle pozorování 1.5(b) s využitím koresoluce jader a tranzitivity relace být čistým podmodulem můžeme celý problém zredukovat na zkoumání situace $K \in \text{Ker}_*(\prod \mathcal{C})$ s cílem dokázat $K \in \mathcal{EC}$.

Čisté podmoduly produktů jsou mimo jiné také všechny $\mathfrak{F}$-produkty, speciálněji všechny $\mathfrak{F}_I$-produkty.

$\mathcal{EC}$-uzavřenost $\mathcal{C}$ na všechny čisté podmoduly produktů budeme dokazovat z předpokladu uzavřenosti na direktní sumy.

Omezili-li bychom se pro začátek na případ od jednoho modulu $C \in \mathcal{EC}$ odvozené $\mathcal{C} = \text{Add}(C) = \text{Ker}_\oplus(\bigoplus(C))$, tak platí $\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC}$ už za předpokladu, že C je Σ-kotorzní modul – každá direktní suma elementů $\mathcal{C}$ je direktním sčítancem dostatečně velké sumy kopií C.

Třídu $\mathcal{A}$ nazveme *κ-dekonstruovatelnou*, pokud je každý modul $A \in \mathcal{A}$ limitou $\text{Pres}_{<\kappa}(\mathcal{A})$-filtrace.

Následující lemma se zabývá možnostmi omezení presentovanosti modulů v induktivním důkazu pravé Ext-ortogonality vůči $\mathcal{FL}$ a obecnější dekonstruovatelné třídě. V podstatě jde o důsledky Eklofova lemmatu [1, Lemma 6.2].

Lemma 2.1. *Uvažujeme pouze nekonečné okruhy. Tehdy platí:*

(a) $|F| \leq |R| \Rightarrow F$ *je* $|R|$*-presentovaý*

(b) $D \in \mathcal{EC} \Leftrightarrow [\forall F \in \mathcal{FL} : |F| \leq |R| \Rightarrow Ext^1_R(F,D) = 0]$

(c) Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^\perp$*, kde* $\mathcal{A}$ *je* κ*-dekonstruovatelná levá třída dědičného kotorzního páru, tak*

$$Ker_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq Pres_{<\kappa}(\mathcal{A})^\perp \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}^{def} \subseteq \mathcal{A}^\perp$$

Důkaz. (a) Snadné.

(b) Jedna implikace je triviální, opačnou dokazujeme pro zafixovaný modul D indukcí podle kardinality plochého modulu F, se kterým se má vynulovat v Extu. F můžeme předpokládat takový, že $|F| > max\{|R|,\aleph_0\}$. Použijeme [1, Lemma 6.17], které říká, že F má filtraci z čistých podmodulů, jejíž následnické faktory jsou ploché moduly kardinality $< |F|$ a z předpokladu zleva Ext-ortogonální vůči D, jde tedy o ${}^\perp D$-filtraci a [1, Lemma 6.2] dává $F \in {}^\perp D$.

(c) Eklofovo lemma, definice a koresoluce.

□

Morfismus $f : A \to B$ nazveme *$\mathcal{C}$-morfismem*, pokud je $\mathrm{coker}(f) \in \mathcal{C}$.

Pro moduly C,D definujme $\mathrm{Rej}_D(C) = \bigcap_{f\in\mathrm{Hom}(C,D)} \ker(f) \leq C$. Další lemma, převzaté ze [4], dává do souvislosti pojem ${}^\perp\mathcal{C}$-morfismu a $\mathcal{C}$-čistého morfismu.

Lemma 2.2. *Pro zafixovanou dvojici modulů s R-morfismem $M \xrightarrow{f} N$ a modul X platí:*

$$[\ ker(f) \leq Rej_X(M)\ \wedge\ coker(f) \in {}^\perp X\ ] \Rightarrow [f \in \uparrow_{(-,X)}]$$

$$[\ f \in \uparrow_{(-,X)}\ \ \wedge\ N \in {}^\perp X\ ] \Rightarrow [\ ker(f) \leq Rej_X(M)\ \wedge\ coker(f) \in {}^\perp X\ ]$$

Důkaz. První podmínka levé strany první implikace je ekvivalentní faktorizaci každého zobrazení $M \xrightarrow{g} D$ přes $\mathrm{im}(f)$ a druhá implikuje surjektivitu $\mathrm{Hom}(i,D)$, kde i je inkluze $\mathrm{im}(f) \xrightarrow{i} N$.

Druhá implikace plyne $\mathrm{Hom}(-,D)$-přechodem od krátké exaktní posloupnosti

$$0 \to \mathrm{im}(f) \xrightarrow{i} N \to \mathrm{coker}(f) \to 0$$

k dlouhé exaktní posloupnosti

$$\mathrm{Hom}(N,D) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{im}(f),D) \xrightarrow{0} \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{coker}(f),D) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(N,D) = 0$$

□

Pro obecnou třídu $\mathcal{C}$ tedy platí, že každý ${}^\perp\mathcal{C}$-monomorfismus je $\mathcal{C}$-čistý.

Zobecnění předchozího lemmatu je tématem následujícího pozorování, kvůli kterému musíme nejprve zavést specifikaci notace, totiž ${}^\triangle({}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})$ pro moduly X, že $\mathrm{Hom}(f,X)$ je surjektivní vzhledem k $A \xrightarrow{f} B$ s $f \in \uparrow_{(-,\mathcal{C})}$, $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$.

Pro libovolné třídy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$ zaveďme symbol $\mathrm{Im}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ jako třídu obrazů modulů z $\mathcal{C}$ podle morfismů, jejichž jádro náleží $\mathcal{A}$.

Pozorování 2.3. *Buď κ libovolný nekonečný kardinál, $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$ libovolné třídy modulů.*

(a) $Coker[Gen_\kappa(Mod\text{-}R), \uparrow_{(-,\mathcal{C})}, Pres_\kappa({}^\perp\mathcal{C})] \subseteq Pres_\kappa({}^\perp\mathcal{C})$

(b) $Ker({}^\triangle\mathcal{C}) \cap (Pres_\kappa({}^\perp\mathcal{C}))^\perp \subseteq {}^\triangle({}^{Pres_\kappa({}^\perp\mathcal{C})}_{Gen_\kappa(Mod\text{-}R)}\mathcal{C})$

(c) $Im_{\mathcal{A}^\perp}({}^\triangle\mathcal{C}) \subseteq {}^\triangle({}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})$

Důkaz. (a) Faktor κ-presentovaného modulu podle κ-generovaného podmodulu je κ-presentovaný a použije se předchozí lemma.

(b) Pro $K \hookrightarrow D$ a M libovolný je jistě $\mathrm{Rej}_D(M) \leq \mathrm{Rej}_K(M)$, dokazovaná inkluze pak plyne použitím lemmatu 2.2 a předchozího bodu.

(c) V situaci $D \in {}^{\triangle}\mathcal{C}$ uvažujeme krátkou exaktní posloupnost $0 \to \ker(\pi_E) \to D \xrightarrow{\pi_E} E \to 0$ a morfismus $M \xrightarrow{m} E$ určený k faktorizaci podle $M \xrightarrow{f} N$ s M daným indexem, tedy $M \in \mathcal{A}$.

Předpokládáme $\mathrm{Ext}^1_R(M,\ker(\pi_E)) = 0$ z čehož plyne faktorizace $m' : M \to D$ a z $D \in {}^{\triangle}\mathcal{C}$ plyne existence $n : N \to D$, kterou stačí prodloužit na $\pi_E n$, protože $\pi_E n f = \pi_E m' = m$.

□

Nyní se obrátíme k tomu, co může pro neprosté direktní systémy představovat zobecnění ${}^{\perp}\mathcal{C}$-filtrací. Buď $M_\kappa = \varinjlim_\kappa (M_\alpha, m_{\beta\alpha})_\kappa$ modul dané pseudofiltrace. Definujme restrikci uspořádání pseudofiltrace κ od M_κ relativně k třídě $\mathcal{C}$ jako

$$\alpha \leq_{\mathcal{C}} \beta \Leftrightarrow m_{\beta\alpha} \in \uparrow_{(-,\mathcal{C})}$$

Analogicky lze definovat $\leq_{\mathcal{C}}$ od I-spojitého direktního systému I.

Buď $(M_i, m_{ji})_I$ nějaký direktní systém. Množinu $J \subseteq I$ nazveme $\mathcal{C}$-*čistou*, pokud $j \leq_I j' \Rightarrow j \leq_{\mathcal{C}} j'$ pro $j,j' \in J$ libovolné.

Každá ${}^{\perp}\mathcal{C}$-filtrace je z lemmatu 2.2 $\mathcal{C}$-čistý club, podle kterého to v případě filtrací, jejichž články jsou prvky ${}^{\perp}\mathcal{C}$ platí také naopak, $\mathcal{C}$-čistá filtrace složená z článků náležících ${}^{\perp}\mathcal{C}$ je ${}^{\perp}\mathcal{C}$-filtrace.

Co se týká dodatečných vlastností tohoto uspořádání, tak přirozená strana skládání morfismů dává $\alpha \leq_{\mathcal{C}} \gamma \Rightarrow \forall \beta \in [\alpha,\gamma] : \alpha \leq_{\mathcal{C}} \beta$ – tuto vlastnost uspořádání dále označujeme jako IC vlastnost, či zkrátka IC.

S výše zavedenými pojmy můžeme konečně vyslovit připravované zobecnění Eklofova lemmatu vystihující vztah Extu direktní limity a existence $\mathcal{C}$-čisté podmnožiny indexové množiny jejího uspořádání, která je v něm uzavřená a neomezená. Lemma rozdělíme do dvou.

Lemma 2.4. *Buď $\mathcal{C}$ daná třída a buď M_κ limita pseudofiltrace $(M_\alpha, m_{\beta\alpha})_\kappa$ pro κ libovolný limitní ordinál a $M_\alpha \in {}^{\perp}\mathcal{C}$ pro každé $\alpha \in \kappa$. Pak platí:*

(a) $M_\kappa \in {}^{\perp}C$ právě tehdy, když pro každou kolekci zobrazení

$$\{(M_\alpha \xrightarrow{g_{\beta\alpha}} C)_{\alpha<\beta\in\kappa} : (\forall \alpha,\beta,\gamma \in \kappa)(\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow g_{\gamma\alpha} = g_{\beta\alpha} + g_{\gamma\beta} m_{\beta\alpha})\}$$

existuje redukce

$$\{(M_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} C)_{\alpha\in\kappa} : (\forall \alpha,\beta \in \kappa)(\alpha < \beta \Rightarrow g_\alpha = g_{\beta\alpha} + g_\beta m_{\beta\alpha})\}$$

(b) Existuje-li $\mathcal{C}$-čistá množina X, že $X \in Cub_{\in}\kappa$, pak $M_\kappa \in {}^{\perp}\mathcal{C}$.

Důkaz. (a) [2, Lemma 5.1].

(b) Použije se kritérium (a) pro každý jednotlivý modul $C \in \mathcal{C}$. Nejprve restringujeme pseudofiltraci na existující $\mathcal{C}$-čistý club, výsledkem je pseudofiltrace se stále stejnou limitou. Mějme nyní zadanou kolekci zobrazení $(g_{\beta\alpha})_{\alpha<\beta\in\kappa}$. Redukci na $(g_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ provedeme indukcí.

<u>Dno</u>: Nejprve $g_0 = 0$.

<u>Násl</u>: Je-li g_α definováno, tak uvažujme $g_\alpha - g_{\alpha+1\alpha} : M_\alpha \to C$, který se faktorizuje podle $m_{\alpha+1\alpha}$ jako $g_{\alpha+1}$.

<u>Lim</u>: S již definovanými $g_\alpha : \alpha \in \delta$ dává g_δ univerzální zobrazovací vlastnost direktní limity.

□

Druhé lemma převzaté ze [2] a [3] se zabývá opačnou situací, tedy jaké podmínky na direktní systém vedou k existenci $\mathcal{C}$-čistých množin v Cubu jeho indexového uspořádání.

Lemma 2.5. *Buď $\mathcal{C}$ daná třída modulů a κ nespočetný regulární.*

(a) Je-li M_κ direktní limita dané pseudofiltrace na $(\kappa, \in)$ jejíž všechny články $M_\alpha : \alpha \in \kappa$ jsou méně jak κ-generované a spolu se svou direktní limitou splňují

$$(\forall \alpha \leq \kappa) : M_\alpha \in {}^\perp(\bigoplus(\mathcal{C}))$$

pak v $Cub_\in \kappa$ existuje $\mathcal{C}$-čistá množina.

(b) Je-li M_I limita direktního systému na indexovém uspořádání $(I, \leq)$, že direktní systém $(M_i, m_{ji})_I$ je složený z $<\kappa$-generovaných modulů a $M_I \in {}^\perp\mathcal{C}$, pak splnění podmínky

$$\sum_{\mathfrak{F}_I}(\mathcal{C}) \in M_I^\perp \wedge I \text{ je } \kappa\text{-spojitý}$$

také implikuje existenci $\mathcal{C}$-čisté množiny v $Cub_{\leq_I} I$.

Důkaz. (a) Jde o [2, Proposition 5.2], důkaz projdeme v několika krocích:

<u>1</u>. Buď $\kappa_A \subseteq \kappa$ indexová množina domén svědků, které nelze faktorizovat podél $m_{\alpha+1\alpha}$ a definujme kolekci morfismů $(M_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} C_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ jako daného svědka, je-li $\alpha \in \kappa_A$, a jako 0 jinak.

<u>2</u>. Pro každé $\alpha \in \kappa$ zkonstruujeme indukcí kolekci morfismů

$$(M_\alpha \xrightarrow{g_{\beta\alpha}} \bigoplus_{\nu<\beta} C_\nu)_{\alpha+1\leq\beta\leq\kappa}$$

<u>Dno</u>: Nejprve $g_{\alpha+1\alpha} = \iota^{\alpha+1}_{C_\alpha} h_\alpha$, kde $\iota^{\alpha+1}_{C_\alpha} : C_\alpha \to \bigoplus_{\nu<\alpha+1} C_\nu$ je kanonická inkluze do dané direktní sumy.

<u>Násl</u>: Je-li $g_{\beta\alpha}$ definováno pro všechny $\alpha < \beta = \gamma$, pak je $g_{\gamma+1\gamma}$ dáno jako na dně a pro ostatní $\alpha < \beta$ položme $g_{\gamma+1\alpha} = g_{\gamma\alpha} + h_{\gamma+1} f_{\gamma+1\alpha}$.

<u>Lim</u>: S již definovanými $g_{\beta\alpha} : \beta \in \delta$ limitní dává $g_{\delta\alpha}$ bod (a) tohoto lemmatu, totiž jako redukci $(g_{\beta\alpha})_{\beta\in\delta} : M_\alpha \to \bigoplus_{\nu<\beta} C_\nu \hookrightarrow \bigoplus_{\beta<\delta} C_\beta$ na $(g_\alpha)_{\alpha\in\delta}$, které dávají požadované $g_{\delta\beta} = g_\beta$ pro každé $\alpha \leq \beta < \delta$.

Morfismy jsou tedy definované tak, že $g_{\gamma\alpha} = g_{\beta\alpha} + g_{\gamma\beta} f_{\beta\alpha}$ pro každou trojici $\alpha < \beta < \gamma < \kappa$, díky čemuž získáme redukcí v M_κ také $(g_{\kappa\alpha})_{\alpha\in\kappa}$.

3. Uvažme podmnožinu κ danou předpisem:

$$X = \{\lambda < \kappa : (\forall \alpha \in \lambda)(\mathrm{im}(g_{\kappa\alpha}) \subseteq \bigoplus_{\nu<\lambda} C_\nu)\}$$

Díky $< \kappa$-generovanosti každého M_α je X κ-kofinální a uzavřenost na sjednocení plyne z definice, tedy $\varinjlim_{\in}(X) \subseteq X$ je club sestávající z limitních ordinálů. Uvažujme $\delta \in \varinjlim_{\in}(X) \cap \kappa_A$, které existuje, pokud je κ_A stacionární. Odvodíme-li z jeho existence spor, dostaneme, že κ_A je nestacionární v κ, tedy že v κ existuje $\mathcal{C}$-čistý cub.

4. Nejprve ukážeme, že $\pi_\delta g_{\kappa\delta} = 0$ pro $\bigoplus_\kappa C_\alpha \xrightarrow{\pi_\delta} C_\delta \to 0$ kanonickou projekci. Buď tedy $y \in M_\delta$ libovolný. Ze spojitosti a usměrněnosti jistě existuje $\beta < \delta$ a $x \in M_\beta$, že $y = f_{\delta\beta}(x)$. Z konstrukce máme po prodloužení projekcí π_δ rovnost $\pi_\delta g_{\kappa\beta}(x) = \pi_\delta g_{\delta\beta}(x) + \pi_\delta g_{\kappa\delta} f_{\delta\beta}(x)$, přičemž $\pi_\delta g_{\kappa\beta}(x) = 0$ protože $\beta < \delta \in X$ a $\pi_\delta g_{\delta\beta}(x) = 0$ protože obraz $g_{\delta\beta}$ leží v $\bigoplus_{\nu<\delta} C_\nu$. Z toho již dokazovaná identita $\pi_\delta g_{\kappa\delta} = 0$ plyne.
   Dále platí $0 = \pi_\delta g_{\kappa\delta} = \pi_\delta g_{\delta+1\delta} + \pi_\delta g_{\kappa\delta+1} f_{\delta+1\delta} = h_\delta + \pi_\delta g_{\kappa\delta+1} f_{\delta+1\delta}$ a tedy $h_\delta = -\pi_\delta g_{\kappa\delta+1} f_{\delta+1\delta}$, což je spor s definicí h_δ jako svědka $\delta \not<_{\mathcal{C}} \delta + 1$.

(b) Jde o [3, Lemma 2.3].

□

Jak bylo řečeno v úvodu kapitoly, naším cílem je důkaz $\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{FL}^\perp$ pro třídu modulů $\mathcal{C}$, že $\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC}$. Důkaz povede indukcí podle presentovanosti, dno tvořené spočetnou úrovni zajišťuje následující lemma.

Lemma 2.6. *Pro $\mathcal{C}$ libovolnou třídu modulů platí*

$$\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow Ker_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq (Pres_\omega(^\perp\mathcal{C}))^\perp$$

Důkaz. Z [3, Proposition 2.7].

□

Uzávěrová podmínka předchozího lemmatu na spočetné úrovni presentovanosti splývá s požadavkem $\mathfrak{F}_I$-uzavřenosti – asociovaný filtr je totožný s filtrem doplňků konečných množin.

Vrátíme-li se k možnosti induktivního použití pozorování 2.3 je zřejmé, že pro K podmodul produktu modulů z $\mathcal{C}$ bychom chtěli $K \in (\mathrm{Pres}_{<\kappa}(^\perp\mathcal{C}))^\perp$, což je silnější, než z případné indukce vzešlé náležení $K \in (\mathrm{Pres}_{<\kappa}(\mathcal{FL}))^\perp$.

V textu [4] autor tento zádrhel obešel pomocí definice hierarchie tříd rozšiřujících třídu $\mathcal{FL}$. V této práci budeme postupovat stejně. Pro κ libovolné kardinální číslo a $\mathcal{C}$ danou třídu kotorzních modulů definujme postupné rozšíření třídy $\mathcal{FL}$ indukcí:

(0) $\mathcal{G}_0^\kappa = \mathrm{Pres}_\kappa(\mathcal{FL})$

(1) $\mathcal{G}_i^\kappa = \mathrm{Coker}[\mathcal{G}_{i-1}^\kappa, \uparrow_{(-,\mathcal{C})}, \mathcal{G}_{i-1}^\kappa]$

(2) $\mathcal{G}^\kappa = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{G}_i^\kappa$

(3) $\mathcal{G}^{<\lambda} = \bigcup_{\kappa\in\lambda} \mathcal{G}^\kappa$ pro $\lambda > \kappa$ a $\mathcal{G}_\mathcal{C} = \bigcup_{\kappa\in\mathrm{Cn}} \mathcal{G}^\kappa$

$\mathcal{G}^{<\kappa}$ je složená z $<\kappa$-presentovaných modulů, induktivním použitím pozorování 2.3(a) dostáváme, že $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{G}^\kappa,\mathcal{C}) = 0$ pro κ libovolný a třídy jsou vzhledem k inkluzi ve vztahu $\mathcal{FL} \subseteq \mathcal{G}_\mathcal{C} \subseteq {}^\perp\mathcal{C}$.

Lemma 2.2 se pro K podmodul produktu modulů z $\mathcal{C}$ vzhledem k hierarchii přeloží jako

$$(\dagger) : K \in (\mathcal{G}^{<\kappa})^\perp \Rightarrow K \in {}^\triangle({}^{\mathcal{G}^{<\kappa}}_{\mathcal{G}^{<\kappa}}\mathcal{C})$$

V textu [4] jde o lemma 10. Další lemma, také převzaté ze [4], ukazuje, že v hierarchii $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ se zrcadlí vlastnost $\mathrm{Pres}_\kappa(\mathcal{FL}) = \varinjlim_\kappa \mathrm{Pres}_{<\kappa}(\mathcal{FL})$.

Lemma 2.7. *Nechť je $\kappa \geq \omega$ regulární kardinál.*

(a) Nechť jsou $(M_\alpha,m_{\beta\alpha})_\kappa$ a $(N_\alpha,n_{\beta\alpha})_\kappa$ dvě spojité pseudofiltrace. Označme si jejich direktní limity jako M_κ a N_κ.

Je-li $(M_\alpha,m_{\beta\alpha})_\kappa$ složená z $<\kappa$-presentovaných modulů, pak pro každý morfismus $M_\kappa \xrightarrow{f} N_\kappa$ existuje ostře rostoucí spojité zobrazení $i : \kappa \to \kappa$ a morfismus direktních systémů

$$(u_\alpha)_{\alpha\leq\kappa} : (M_\alpha,m_{\beta\alpha})_\kappa \to (N_{i(\alpha)},n_{i(\beta)i(\alpha)})_\kappa$$

splňující $u_\kappa = f$.

(b) Buď $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$ třída splňující $\bigoplus(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Pro každý $F \in \mathcal{G}_i^\kappa$ existuje spojitá pseudofiltrace $(F_\alpha,f_{\beta\alpha})_\kappa \subseteq \mathcal{G}_i^{<\kappa}$, jejíž je F limitou.

Důkaz. (a) Přímočará indukce.

(b) Dokazujeme indukcí. Pro $i = 0$ jde o pozorování 1.4(c).

Pro $j = i+1$ je $F \in \mathcal{G}_{i+1}^\kappa$ kojádro $\mathcal{C}$-čistého morfismu $f : G \to H$ dvou $\leq \kappa$-presentovaných modulů, které jsou limitami daných pseudofiltrací z předpokladu.

Podle bodu (a) tohoto lemmatu mezi nimi existuje morfismus $(u_\alpha)_{\alpha\leq\kappa}$, že $u_\kappa = f$. Podle lemmatu 2.5(a) existuje v pseudofiltraci modulu G $\mathcal{C}$-čistá uzavřené neomezené množina $\kappa_G \subseteq \kappa$.

Přechodem k jí zadané podpseudofiltraci dostáváme, že strukturní morfismy $g_\alpha : G_\alpha \to G$ pro $\alpha \in \kappa_G$ jsou také $\mathcal{C}$-čisté.

u_κ je $\mathcal{C}$-čistý a z IC tak dostáváme, že i u_α je $\mathcal{C}$-čistý, což vzhledem k jeho doméně a kodoméně znamená $\mathrm{coker}(u_\alpha) \in \mathcal{G}_i^{<\kappa}$ a $(\mathrm{coker}(u_\alpha))_{\alpha\in\kappa}$ je požadovaná $\mathcal{G}^{<\kappa}$-pseudofiltrace modulu F.

□

Nyní můžeme vyslovit první tvrzení o uzávěrových vlastnostech dané třídy $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$ uzavřené na direktní sumy. Důkaz bude veden indukcí, ve které se zádrhelu se singulárně presentovanou úrovní vyhneme dodatečným předpokladem $\aleph_\omega$-dekonstruovatelnosti $\mathcal{FL}$.

Tvrzení 2.8. *Nechť je Mod-R taková, že $\mathcal{FL}$ je $\aleph_\omega$-dekonstruovatelná a nechť je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$ libovolná. Pak platí implikace:*

$$\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC} \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}^{def} \subseteq \Sigma\text{-}\mathcal{EC}$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme do elementárních kroků.

1. Podle lemmatu 2.1 stačí s třídou $\mathcal{C}' = \bigoplus(\mathcal{C})$ dokázat, že libovolný $D \in \mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C}'))$ je zprava ext-ortogonální vzhledem k plochým modulům presentovanosti $< \aleph_\omega$. Hierarchie $\mathcal{G}$ uvažujeme odvozené od $\mathcal{C}'$.

2. Pro ω tvrzení platí z lemmatu 2.6, podle kterého $D \in (\mathrm{Pres}_\omega(^\perp\mathcal{C}'))^\perp$, což podle pozorování 2.3(a) znamená, že $D \in (\mathcal{G}^\omega)^\perp$. Dál se dokazuje indukcí podle horního indexu hierarchie $\mathcal{G}$.

3. Buď κ regulární a předpokládáme $D \in (\mathcal{G}^{<\kappa})^\perp$. Z (†) je $D \in {}^\triangle({}^{\mathcal{G}^{<\kappa}}_{\mathcal{G}^{<\kappa}}\mathcal{C}')$.

   Předchozí lemma 2.7(b) říká, že každý $F \in \mathcal{G}^\kappa$ je limitou pseudofiltrace $(F_\alpha, f_{\beta\alpha})_\kappa$ složené z prvků $\mathcal{G}^{<\kappa}$. Víme, že $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{G}^\kappa, \mathcal{C}') = 0$ a podle lemmatu 2.5(a) v pseudofiltraci existuje $\mathcal{C}'$-čistá uzavřená neomezená množina, která je díky $D \in {}^\triangle({}^{\mathcal{G}^{<\kappa}}_{\mathcal{G}^{<\kappa}}\mathcal{C}')$ také $\{D\}$-čistá. Lemma 2.4(b) dává $F \in {}^\perp D$ a tedy $D \in (\mathcal{G}^\kappa)^\perp$.

$\aleph_\omega$-dekonstruovatelnost třídy $\mathcal{FL}$ znamená, že je každý plochý modul direktní limitou $\mathrm{Pres}_{<\aleph_\omega}(\mathcal{FL})$-filtrace, z čehož použitím Eklofova lemmatu tvrzení plyne. □

K alternativnímu důkazu právě dokázaného lze využít ještě jiný předpoklad, totiž $\dim(R) < \aleph_\omega$, tedy že existuje $\kappa < \aleph_\omega$, že každý pravý ideál R je nejvýše κ-generovaný. Nejprve jeden důsledek této vlastnosti R.

Lemma 2.9. *Je-li $\dim(R) = \kappa$, je $\sum_{\mathfrak{F}_I}(\mathcal{I}_0) \subseteq \mathcal{I}_0$ pro libovolný κ^+-spojitý direktní systém na κ^+-úplném uspořádání $(I, \leq_I)$.*

Důkaz. Chceme ukázat, že daný modul $E = \sum_{\mathfrak{F}_I} X_i$ je injektivní, k čemuž využijeme Baerovo kritérium, podle kterého stačí injektivitu E dokázat vzhledem k $L \leq R$ pro L libovolný pravý ideál R. Buď tedy $h : L \to E$ libovolný morfismus. O L víme, že je κ-generovaný a stejně tak jeho obraz $\mathrm{im}(h) = \langle B \rangle_E \leq E$, kde $|B| \leq \kappa$. Definujme funkci $z : \prod_{i \in I} X_i \to \mathfrak{P}(I)$ předpisem $(x_i)_{i\in I} \mapsto \{i : x_i = 0\}$. Množina $A_L = \bigcap_{b \in B} z(b) \in \mathfrak{P}(I)$ je díky κ^+-uzavřenosti $(I, \leq_I)$ stále prvkem $\mathfrak{F}_I$ a produkt $E_L = \prod_{j \in I \setminus A_L} X_j$, jehož je $\mathrm{im}(h)$ podmodulem, je tak stále podmodulem modulu E.

Jakožto produkt injektivních je E_L také injektivní a složení $i_{\mathrm{im}(h)}h : L \to \mathrm{im}(h) \hookrightarrow E_L$ se faktorizuje podél $L \leq R$ jako $\bar{h} : R \to E_L$. Nyní stačí využít inkluzi $m_L : E_L \leq E$ a faktorizaci $h' : R \to E$ položit jako $m_L\bar{h}$. □

Singulárním kardinálům se za předpokladu $\dim(R) = \kappa$ v indukci již nevyhneme, k jejich překonání bude díky předpokladu použitelná věta o singulární kompaktnosti.

Fakt 2.10. *Nechť je R libovolný okruh, $\varkappa$ singulární a $\mu < \varkappa$ libovolný nekonečný kardinál. Buď dále M $\varkappa$-generovaný modul a $\mathcal{A}$ třída μ-presentovaných modulů. Existuje-li pro libovolné regulární $\mu < \lambda < \varkappa$ systém $\mathcal{S}_\lambda$ tvořený $< \lambda$-generovanými $\mathcal{A}$-filtrovanými podmoduly modulu M, pro který platí, že:*

- *$\mathcal{S}_\lambda$ je λ-spojitý.*
- $(\forall X \in [M]^{<\lambda})(\exists S \in \mathcal{S}_\lambda) : (X \subseteq S)$

Pak je $\mathcal{A}$-filtrovaný také modul M.

Důkaz. Převzato z [1, Theorem 7.29]. □

A nyní již můžeme přikročit k tvrzení samému.

Tvrzení 2.11. *Nechť je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$ libovolná. Je-li dim$(R) < \aleph_\omega$, pak platí*

$$\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC} \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}^{def} \subseteq \Sigma\text{-}\mathcal{EC}$$

Důkaz. Označme si $\mu = \dim(R)^+$ a jako výše položme $\mathcal{C}' = \bigoplus(\mathcal{C})$. Chceme dokázat, že libovolný $D \in \mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C}'))$ je zprava Ext-ortogonální vzhledem ke všem plochým modulům. Buď D daný čistý podmodul produktu modulů z $\mathcal{C}'$, hierarchie $\mathcal{G}$ uvažujeme odvozené od $\mathcal{C}'$. Postupem jako v předchozím tvrzení můžeme předpokládat $D \in (\mathcal{G}^\mu)^\perp$. Dokážeme-li, že pro každé $\kappa > \mu$ je každý modul $F \in \mathcal{G}^\kappa$ direktním sjednocením $\mathcal{G}^\mu$-filtrace, je tato z předpokladu $D \in (\mathcal{G}^\mu)^\perp$ také ${}^\perp D$-filtrace a z Eklofova lemmatu pak plyne $F \in {}^\perp D$.

Dále tedy postupujeme indukci podle $\kappa > \mu$, kterou rozdělíme podle případů na singulární a regulární. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $\kappa > \mu$ je pro všechny moduly z $\mathcal{G}^{<\kappa}$ výše uvedená vlastnost již dokázaná a uvažujme $F \in \mathcal{G}^\kappa$ libovolný.

1. Buď nejprve κ regulární a $F \in \mathcal{G}_i^\kappa$ pro $i \in \omega$ libovolné. Z lematu 2.7(b) existuje pro F pseudofiltrace $(F_\alpha, f_{\beta\alpha})_\kappa$ složená z prvků $\mathcal{G}_i^{<\kappa}$, takže položíme-li v předchozím lemmatu $(I, \leq_I) = (\kappa, \in)$, dostáváme, že $\mathfrak{F}_\kappa$-produkt $\sum_{\mathfrak{F}_\kappa}(\{E(F_\alpha) : \alpha \in \kappa\}) \in \mathcal{I}_0$ a lemma 2.5(b) s $\mathcal{C} = \{E(F_\alpha) : \alpha \in \kappa\}$ a $M_I = F$ dává $\{E(F_\alpha) : \alpha \in \kappa\}$-čistou množinu v $\mathrm{Cub}_\in \kappa$. Faktorizace monomorfismů injektivních obalů $F_\alpha \xrightarrow{e_\alpha} E(F_\alpha)$ přes $f_\alpha : F_\alpha \to F$ znamená, že f_α musí být monomorfismy a tak můžeme předpokládat, že $(F_\alpha, f_{\beta\alpha})_\kappa$ je filtrace. Lemma 2.5(a) s $M_\kappa = F$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ dává existenci ${}^\perp\mathcal{C}'$-čisté podfiltrace $(F_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\kappa_0}$.

   Z lemmatu 2.2 vyplývá, že kojádra strukturních $\mathcal{C}'$-čistých monomorfismů jsou jakožto $<\kappa$-presentované moduly prvky $\mathcal{G}_{i+1}^{<\kappa}$ a tedy $\mathcal{G}^\mu$-filtrované z předpokladu. Zbývá zajistit, aby byly μ-presentované, což lze zařídit induktivním zjemněním každého článku $\alpha < \beta$ pro $\alpha \in \kappa_0$ a $\beta = min\{\kappa_0 \setminus \alpha\}$. O každém kojádru F_β / F_α již víme, že má $\mathcal{G}^\mu$-filtraci, označme si její moduly jako $(G_\gamma)_{\alpha \in \lambda}$. Každý z nich je izomorfní G'_γ / F_α, kde G'_γ je podmodul F_β a G_0 jakožto 0 odpovídá samotnému F_α. Z těchto podmodulů lze vytvořit zjemnění mezi F_α a F_β, stačí položit $F_{\alpha+\gamma} = G'_\gamma$ a nakonec $F_{\alpha+\lambda} = F_\beta$. Výsledkem je přečíslování a zjemnění původní podfiltrace na takovou, jejíž kojádra jsou již v $\mathcal{G}^\mu$, protože platí $G'_{\gamma+1}/G'_\gamma \simeq G_{\gamma+1}/G_\gamma$. Tím je důkaz pro κ regulární hotov.

2. Buď tedy κ singulární, označme si ho $\varkappa$ a uvažujme nejprve modul $F \in \mathcal{G}_0^\varkappa = \mathrm{Pres}_\varkappa(\mathcal{FL})$. Podle pozorování 1.5(c) je F direktní limitou systému konečně generovaných volných modulů na indexové množině $(I, \leq_I)$ kardinality $\varkappa$. Libovolná direktní limita každého podsystému na $\leq_I$-usměrněné indexové $X \in [I]^{<\varkappa}$ je podle pozorování 1.5(a), uzavřenosti $\bigoplus(\mathcal{FL}) = \mathcal{FL}$ a faktu 1.7(a) stále plochý modul náležící $\mathcal{G}^{<\varkappa}$ a z předpokladu tedy $\mathcal{G}^\mu$-filtrovaný.

Nyní použijeme větu o singulární kompaktnosti ve formě faktu 2.10 před tímto tvrzením s dosazením $\mathcal{A} = \mathcal{G}^\mu$, $\varkappa = \varkappa$ a $\mu = \mu$, ověřme jeho předpoklady – buď tedy $\mu < \lambda < \varkappa$ libovolný regulární. Uvažujme nejprve λ-spojitý usměrněný systém na club-podmnožině, označme jí $I^{<\lambda}$, v λ-úplném uspořádání $([I]^{<\lambda}, \subseteq)$. Aplikací lemmatu 2.9 můžeme stejně jako v regulárním kroku předpokládat, že existuje $S_\lambda \in \mathrm{Cub}_{\subseteq} I^{<\lambda}$ taková, že strukturní morfismy odvozeného systému modulů $(F_s)_{s \in S_\lambda}$ jsou prosté, jde tedy o $< \lambda$-generované ploché podmoduly modulu F, které jsou $\mathcal{G}^\mu$-filtrované z předpokladu, předpoklad faktu 2.10 je tak volbou $\mathcal{S}_\lambda = (F_s)_{s \in S_\lambda}$ splněn z λ-spojitosti, která platí po přechodu od cub-podmnožiny ke clubu, který jí generuje.

3. Uvažujme dále situaci $F \in \mathcal{G}^{\varkappa}_{i+1}$, buď λ libovolný regulární kardinál, že $\mu^+ \leq \lambda < \varkappa$ a předpokládejme, že pro $j \leq i$ je tvrzení již dokázané a navíc platí, že každý modul z $\mathcal{G}^{\varkappa}_i$ je direktním sjednocením λ-spojitého direktního systému složeného z modulů náležících $\mathcal{G}^{<\lambda}$, pro $i = 0$ to plyne z uzavřenosti plochých modulů na limity a pro $i > 0$ tuto vlastnost zajistíme na konci indukčního kroku $i - 1 \to i$.

   O modulu F z definice víme, že je kojádrem morfismu $f : G \to H$, kde $f \in \uparrow_{(-,\mathcal{C}')}$ a $G, H \in \mathcal{G}^{\varkappa}_i$ a o modulech G, H předpokládáme, že jsou direktními sjednoceními λ-spojitých direktních systémů složených z modulů náležících $\mathcal{G}^{<\lambda}$. Označme si λ-úplná indexová uspořádání těchto systémů jako $I^{<\lambda}_G, I^{<\lambda}_H$.

   Modul G je z indukčního předpokladu také $\mathcal{G}^\mu$-filtrovaný. Uvažujeme-li libovolný $Q \in \sum_{\mathfrak{F}_{I^{<\lambda}_G}}(\mathcal{C}')$ jakožto čistý podmodul $\prod(\mathcal{C}')$, důsledkem indukčního předpokladu je $Q \in (\mathcal{G}^{<\varkappa})^\perp$ a Eklofovo lemma použité na $\mathcal{G}^\mu$-filtraci dává $Q \in G^\perp$. Díky tomu můžeme použít lemma 2.5(b) s $I = I^{<\lambda}_G$, $M_I = G$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, získáváme tak $\mathcal{C}'$-čistou množinu v $\mathrm{Cub}_{\leq_{I^{<\lambda}_G}} I^{<\lambda}_G$. Restrikcí na club můžeme tedy předpokládat, že strukturní monomorfismy systému na $I^{<\lambda}_G$ jsou $\mathcal{C}'$-čisté.

   Zbývá ověřit předpoklad věty o singulární kompaktnosti pro F a λ. Pro $i \in I^{<\lambda}_G$ libovolné uvažujme modul G_i a strukturní $\mathcal{C}'$-čistý monomorfismus $g_i : G_i \to G$. Složení $f_i = f g_i$ je $\mathcal{C}'$-čisté, G_i je $< \lambda$-presentovaný a direktní systém na $I^{<\lambda}_H$ je λ-spojitý, existuje tedy $j \in I^{<\lambda}_H$ a modul $H_j \hookrightarrow H$, že $\mathrm{im}(f g_i) \subseteq H_j$. Označme si $J_i = \{j \in I^{<\lambda}_H : \mathrm{im}(f g_i) \subseteq H_j\}$ a $f^j_i : G_i \to H_j$ restrikci f_i, která je s f_i totožná až na kodoménu.

   Pro $j \in J_i$ libovolné je každý morfismus f^j_i také $\mathcal{C}'$-čistý a oba moduly G_i, H_j náleží $\mathcal{G}^{<\lambda}$, tedy i $\mathrm{coker}(f^j_i) \in \mathcal{G}^{<\lambda}$. Moduly z

$$\mathcal{I}^{<\lambda}_F = \{\mathrm{coker}(f^j_i) : i \in I^{<\lambda}_G \wedge j \in J_i\}$$

   jsou z předpokladu $\mathcal{G}^\mu$-filtrované a spolu s přirozenými faktorizacemi strukturních morfismů systémů na $I^{<\lambda}_G, I^{<\lambda}_H$ vytvářejí direktní systém, jehož limitou je F a který je λ-spojitý, protože λ-spojité jsou oba direktní systémy na množinách $I^{<\lambda}_G, I^{<\lambda}_H$. Díky lemmatu 2.9 najdeme v $\mathcal{I}^{<\lambda}_F$ λ-spojitý a $\mathcal{I}^{<\lambda}_F$-kofinální podsystém tvořený přímo podmoduly F a tento lze použít jako $\mathcal{S}_\lambda$.

Protože bylo λ libovolné a našli jsme λ-spojitý systém $\mathcal{S}_\lambda \subseteq \mathcal{G}^{<\lambda}$ jehož je F direktním sjednocením, je důkaz $\mathcal{G}^\mu$-filtrace F podle věty o singulární kompaktnosti hotov.

$\square$

Důsledek 2.12. *Je-li třída $\mathcal{FL}$ $\aleph_\omega$-dekonstruovatelná nebo dim$(R) < \aleph_\omega$, pak platí implikace:*

$$X \in \Sigma\text{-}\mathcal{EC} \Rightarrow \overline{\{X\}}^{def} \subseteq \Sigma\text{-}\mathcal{EC}$$

Důkaz. Plyne z tvrzení výše s třídou $\mathcal{C} = \mathrm{Add}(X)$, složené ze Σ-kotorzních modulů. $\square$

Předpoklad $\dim(R) < \aleph_\omega$ je slabší, než $|R| < \aleph_\omega$, příkladem je okruh polynomů o $\lambda < \aleph_\omega$ neznámých nad tělesem mohutnosti $\geq \aleph_\omega$.

V další sekci se budeme věnovat první úrovni singulárně presentovaných plochých modulů v rámci Mod-R bez dalších předpokladů na okruh R.

2.2 Indukce do $\aleph_\omega$

Vycházejíce z nepublikovaného textu [5] zavedeme v této sekci potřebné pojmy odvozené od singulárně $\varkappa$-presentovaného plochého modulu F a to do té míry, aby s nimi šlo překonat $\aleph_\omega$.

Uspořádání, které využijeme k aproximaci F, je $([\varkappa]^{<\varkappa}, \subseteq)$, označme si pro další jako $\mathcal{W}$.

$\varkappa$-presentovaný plochý modul F si fixujme stejným postupem jako v pozorování 1.5(c), tedy jako limitu konečně presentovaných volných modulů na usměrněné uspořádané množině $(I, \leq_I) := (J_\omega, \leq_{J_\omega})$, kde mohutnost J_ω a tedy také I je právě $\varkappa$.

Fixujme si dále $\mathcal{W} = [I]^{<|I|}$ přirozeně uspořádanou $\subseteq$ a třídu $\mathcal{C}$. O každé $X \in \mathcal{W}$, tedy $X \subseteq I$, můžeme BÚNO předpokládat, že je $\leq_I$-usměrněná.

Pokud by nějaká z nich nebyla, lze definovat funkci $\mu : [I]^{<|I|} \to [I]^{<|I|}$ že $\mu(X)$ je nějaká $\leq_I$-usměrněná nadmnožina X stejné mohutnosti. Pokud je množina X $\leq_I$-usměrněná, pokládáme $\mu(X) = X$. Zobrazení μ je tedy identitou na sjednoceních $\subseteq$-řetězců $\leq_I$-usměrněných množin.

Jinými slovy, im(μ) je club v $([I]^{<|I|}, \subseteq)$, který můžeme ztotožnit s $\mathcal{W}$. Pokud bychom potřebovali rozlišovat $\mathcal{W}$ vzhledem k plochému modulu, od kterého je odvozené, označíme ho $\mathcal{W}_F$.

Definice 2.13. (Funktor $\mathcal{F}$ a $\preceq_\mathcal{C}$-uspořádání $\mathcal{W}$)

(1) Definujme funktor $\mathcal{F} : (\mathcal{W}, \subseteq) \to (\mathrm{Pres}_{<\varkappa}(\mathcal{FL}), \to)_{\text{Mod-}R}$. Pro množinu $X \in \mathcal{W}$ buď

$$\mathcal{F}(X) := \varinjlim_{l \in X} (F_l, f_{kl})_{k \in [l, \leq_I) \cap X}$$

Inkluze se přenášejí na morfismy jednoduše z univerzální zobrazovací vlastnosti.

(2) Uspořádání inkluzí lze omezit podobně jako $\leq$ na $\leq_{\mathcal{C}}$, tuto relativizaci označme $\preceq_{\mathcal{C}}$, je tedy zadaná podmínkou $\mathcal{F}(Y \supset X) \in\uparrow_{(-,\mathcal{C})}$.

Protože jde o limity plochých modulů, jsou moduly $\mathcal{F}(X)$ také ploché a protože jde o limity konečně presentovaných, jsou moduly $\mathcal{F}(X)$ $|X|$-presentované.

Překonání spočetné kofinality bude možné zejména proto, že pseudofiltrace v takovém případě neobsahuje limitní body.

Nejprve přeložíme indukční předpoklad do existence jistých podsystémů $\mathcal{C}$-volných množin ve $\mathcal{W}$.

Lemma 2.14. *Uvažujme F direktní limitu systému na indexové $\mathcal{W}$ definovanou výše a předpokládejme nejprve $\sum_{\mathfrak{F}_I}^{<\varkappa}(\mathcal{C}) \subseteq \{\mathcal{F}(X) : X \in \mathcal{W}\}^{\perp}$. Pak pro každé $X \in \mathcal{W}$ a každý regulární nespočetný kardinál $\lambda \leq |X|$ existuje systém $X(\lambda) \subseteq [X]^{<\lambda}$ následujících vlastností:*

(a) $(\forall Y \in X(\lambda))(Y \preceq_{\mathcal{C}} X)$

(b) $\bigcup X(\lambda) = X$

(c) $X(\lambda)$ *je nahoru usměrněný.*

(d) $X(\lambda)$ *je λ-uzavřený.*

V případě předpokladu $\bigoplus^{<\varkappa}(\mathcal{C}) \subseteq \{\mathcal{F}(X) : X \in \mathcal{W}\}^{\perp}$ existuje výše popsaný systém jen pro $\lambda = |X|$ regulární.

Důkaz. Plochý Modul $\mathcal{F}(X) = G$ je direktní limitou λ-spojitého direktního systému $(G_i,g_i)_I$ sestávajícího z ¡λ-presentovaných modulů $\subseteq \mathrm{Im}(\mathcal{F})$. Aplikujeme-li lemma 2.5(b) dostáváme $\mathcal{C}$-čistou $I' \subseteq I$, která je $\leq_I$-clubem, tedy $g_{i'} \in\uparrow_{(-,\mathcal{C})}$ pro každé $i' \in I'$. $\mathcal{F}$ je prosté zobrazení, definujme tedy $X(\lambda) = \mathcal{F}^{-1}[G_i : i \in I']$ a všechny body zřejmě platí.

V případě podmínky s direktní sumou použijeme lemma 2.5(a) – vzhledem k předpokládané regularitě $|X|$ jde o limitu $< |X|$-generovaných modulů z množiny $\mathcal{F}[[X]^{<|X|} \cap \mathcal{W}]$ z předpokladu náležící $^{\perp}\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$-předobraz $\mathcal{C}$-čisté pseudofiltrace je onen výše popsaný systém. □

Podmínka na Ext-ortogonalitu je v případě $\varkappa$ singulární kardinál splněná pro $\sum_{\mathfrak{F}_I}$ i $\bigoplus$ na libovolné indexové množině za předpokladu v indukci pod $\varkappa$ dokázané inkluze $\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq \mathrm{Pres}_{<\varkappa}(\mathcal{FL})^{\perp}$, proto můžeme předpokládat bohatší systémy i kdybychom předpokladu $\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq \mathrm{Pres}_{<\varkappa}(\mathcal{FL})^{\perp}$ dosáhli za pomoci $\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$.

Následující lemma, inspirované textem [5], platí bez ohledu na typ systému a tvoří hlavní východisko dalších úvah stran vlastností $(\mathcal{W}, \preceq_{\mathcal{C}})$.

Lemma 2.15. *Pro každou množinu $X \in \mathcal{W} \cap [\varkappa]^{\geq\omega}$ existuje nadmnožina $Y \supseteq X$ stejné mohutnosti, že $[Y, \subseteq) \cap [\varkappa]^{|Y|} = [Y, \preceq_{\mathcal{C}}) \cap [\varkappa]^{|Y|}$.*

Důkaz. Označme $\lambda = |X| \geq \omega$. Pro $N \in [\varkappa]^{\lambda} \cup \{\emptyset\}$ definujeme N-Shelahovu hru délky ω. Hrají dva hráči, I a II.

I začíná a volí prvky $X_n \in [N, \subseteq) \cap [\varkappa]^{\leq\lambda}$, II odpovídá $N_n \in [X_n, \subseteq) \cap [\varkappa]^{\lambda}$ a vítězí, pokud se mu podaří pokaždé odpovědět $N_n \in [N_{n-1}, \preceq_{\mathcal{C}})$, kde $N_{-1} = N$, jinak (po konečně tazích) vítězí hráč I.

Označme $\mathcal{N}$ množinu těch N, pro které neexistuje vyhrávající strategie hráče I v N-Shelahově hře. Pokud by $\mathcal{N}$ obsahovala nějakou množinu $N \supseteq X$, jsme hotoví, protože pro každou volbu $Y \supseteq N$ existuje odpověď $N_1 \supseteq Y$, že $N_1 \succeq N$ a z IC plyne $Y \succeq_{\mathcal{C}} N$.

Ukážeme-li $\emptyset \in \mathcal{N}$, pak $\mathcal{N} \cap [X, \subseteq) \neq \emptyset$, protože jinak by hráč I mohl volit $X_0 = X$ a na každé volbě II by vyhrál, což by byl spor s $\emptyset \in \mathcal{N}$.

Zbývá dokázat $\emptyset \in \mathcal{N}$, což uděláme sporem, nechť je tedy s nějaká vyhrávající strategie pro I, tedy funkce $s : [[\varkappa]^\lambda]^{<\omega} \to [\varkappa]^\lambda$ reakcí na n-tice zahrané II. ($s(\emptyset)$ je první tah I). Indukcí zkonstruujeme řetězec $p = (M_\alpha)_{\alpha \in \lambda^+}$, postupujme následně:

<u>Dno</u>: $M_0 = \emptyset$.

<u>Násl</u>: Nechť jsou $(M_\alpha)_{\alpha \in \beta+1}$ definované. Definujme $\mathcal{S} \subseteq [\beta]^{<\omega}$ jako množinu všech n-tic konečných $\preceq_{\mathcal{C}}$-řetězců v $(M_\alpha)_{\alpha \in \beta+1}$. Jejich počet je omezen $|\beta|^{<\omega} \leq \lambda$ a tak $|\bigcup_{r \in \mathcal{S}} s(r)| \leq \lambda$. Položme $M_{\beta+1} = \bigcup_{r \in \mathcal{S}} s(r) \cup M_\beta$.

<u>Lim</u>: Pro δ limitní položme $M_\delta = \bigcup_{\alpha \in \delta} M_\alpha$.

Uvažujme nyní $M = \bigcup_{\alpha \in \lambda^+} M_\alpha$, tedy $|M| = \lambda^+$. Pokud by $P = M(\lambda^+) \cap p$ byla v λ^+ kofinální, jistě lze s porazit výběrem jejích prvků. Proč je tedy množina P v p kofinální? Buď M_{α_0} libovolný prvek p. Lze ho pokrýt $\leq \lambda$ množinami z $M(\lambda^+)$. Částečná sjednocení z nich udělají $\preceq_{\mathcal{C}}$-řetězec, jehož sjednocení S_0 je stále v $M(\lambda^+)$ a obsahuje M_α. Kofinalita p je ovšem λ^+, proto existuje $M_{\alpha_1} \supseteq S_0$, proceduru opakujeme a získáváme $S_{n-1} \subseteq M_{\alpha_n} \subseteq S_n \in M(\lambda^+)$ pro $n \in \omega$. Nyní stačí položit $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n = \bigcup_{n \in \omega} M_{\alpha_n}$, což je jistě prvek jak p, tak $M(\lambda^+)$, čímž je důkaz hotov.

□

A $\subseteq$-absolutní dotažení úvahy předchozího lemmatu, kde už budou bohatší systémy potřeba.

Lemma 2.16. *(Nasycení)*

$$(\forall X \in \mathcal{W} \cap [\varkappa]^{\geq \omega})(\exists N \supseteq X) : N \in \mathcal{W} \cap [\varkappa]^{|X|} \ \wedge \ [N, \subseteq) = [N, \preceq_{\mathcal{C}})$$

Důkaz. Mějme libovolnou $M \supseteq N_X \supseteq X$, kde N_X je libovolný prvek $\mathcal{N} \cap [X, \subseteq)$ existující z předchozího lemmatu. Dále pokračujme indukcí podle kardinality, můžeme tedy předpokládat, že M má větší mohutnost, než N_X a že pro všechny množiny z $[N_X, \subseteq) \cap [\varkappa]^{<|M|}$ bylo tvrzení dokázané. Tehdy stačí uvažovat systém $M(|N_X|^+)$ a pokrýt N_X pomocí $|N_X|$ množin z $M(|N_X|^+)$. jejich sjednocení, označme ho S, je tedy v $M(|N_X|^+)$ také a $|S| < |M|$ a tak $N_X \preceq_{\mathcal{C}} S \preceq_{\mathcal{C}} M$. □

Množiny vznikající lemmatem 2.15 budeme i dále označovat jako $\mathcal{N}$. Je zřejmé, že jde o $\mathcal{C}$-čistou množinu náležící $\mathrm{Cf}_{\subseteq}(\mathcal{W})$ a že můžeme definovat *nasycení* relativně k $\mathcal{N}$ jako zobrazení $n_{\mathcal{N}} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ že $n_{\mathcal{N}} \upharpoonright \mathcal{N} = id_{\mathcal{W}}$ a které ostatním X přiřazuje $\subseteq$-prvek $\mathcal{N}$ stejné mohutnosti, jako má X.

Tvrzení 2.17. *Buď $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$. Pro singulární $\varkappa$ spočetné kofinality platí induktivní formule:*

$$Ker_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq Pres_{<\varkappa}(\mathcal{FL})^\perp \Rightarrow Ker_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq Pres_\varkappa(\mathcal{FL})^\perp$$

Důkaz. Buď $\varkappa$ singulární spočetné kofinality, máme k dispozici spočetný skeleton $(\kappa_n)_{n\in\omega} \nearrow \varkappa$. Z indukčního předpokladu předpokládáme na $\mathcal{W}_F$ od F libovolného plochého $\varkappa$-presentovaného modulu strukturu danou lemmaty 2.14 až 2.16, tedy $\subseteq$-kofinální množinu nasycených množin $\mathcal{N}$. Předpoklad na $\bigoplus$ či $\sum_{\mathfrak{F}_I}$ nepotřebujeme, protože pro účely výše zmíněných lemmat stačí indukční předpoklad.

Buď $N_0 = n_{\mathcal{N}}(\kappa_0)$ a předpokládejme $\kappa_{k-1} \le |N_k| \le \kappa_k$ a $N_k \in \mathcal{N}$ $\forall k \le n$ hotové. Položme opět prostě $N_{n+1} = n_{\mathcal{N}}(\kappa_{n+1} \cup N_n)$. Výsledkem je triviálně uzavřená $\mathcal{C}$-volná množina $\subseteq$-kofinální v $([\varkappa]^{<\omega}, \subseteq)$, její direktní limita je tedy F. Z předpokladu spolu s (†) plyne, že tato je také $\{D\}$-volná pro $D \in \mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C}))$ libovolný, z čehož podle lemmatu 2.4(b) první formule tvrzení plyne.

$\square$

V poslední sekci této kapitoly se budeme věnovat podrobnějšímu zkoumání množinově-kombinatorických vlastností uspořádání $(\mathcal{W}, \preceq)$.

2.3 Vlastnosti uspořádání $\mathcal{W}$ na úrovni $\varkappa$

Nejprve se pokusíme využít zobecnění kombinatoriky stacionárních množin, kdy místo $(I, \le)$ ve tvaru $(\kappa, \in)$ s κ regulárním uvažujeme $(I, \le)$ ve tvaru $([A]^{<\kappa}, \subseteq)$ s κ regulárním a $|A| \ge \kappa$, pro $A = \varkappa$ jde o jednotlivé hladiny jejichž sjednocením vzniká $\mathcal{W}$.

Nabízí se přirozená otázka, jak moc se zobecňuje Fodorovo lemma z klasické situace. Následující odpověď pro náš případ pochází z [6].

Fakt 2.18. *Buď κ nespočetný regulární a A, že $|A| \ge \kappa$.*

Pro $S \in Stat_{\subseteq}[A]^{<\kappa}$ a $f : S \to A$, že $f(s) \in s$ pro každý $s \in S \setminus \{\emptyset\}$ existuje $a \in A$ a stacionární $T \subseteq S$, že $f(t) = a$ pro každý $t \in T$.

Důkaz. Převzato z [6, Exercise 25.2(c)]. $\square$

K účelu podrobnějšího zachycení nejprve obecných vlastností $\mathcal{W}$, které by později mohly mít algebraické důsledky, položme pro $X \subseteq \varkappa$ libovolnou

$$\mathrm{Cf}_{\in} X = \{\mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{P}(X) : (\forall \alpha \in X)(\exists Y \in \mathcal{Y})(\alpha \in Y)\}$$

a dále pro $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$ libovolnou

$$\bar{\mathcal{A}} = \{X \in \mathcal{W} : (\mathfrak{P}(X) \setminus \{X\}) \cap \mathcal{A} \in \mathrm{Cf}_{\in} X\}$$

Symbol $\varinjlim^{\mathcal{W}}(\mathcal{A})$ nechť označuje všechna sjednocení $\subseteq$-řetězců složených z prvků $\mathcal{A}$, sjednocení náležící $\mathcal{W}$.

První pozorování se týká některých na $\preceq_{\mathcal{C}}$ nezávislých vztahů mezi definovanými pojmy. Symbolem $\mathrm{reg}(\varkappa)$ označujeme regulární kardinály $< \varkappa$.

Pozorování 2.19. *Vlastnosti* $(\mathcal{W}, \subseteq)$

(a) Pro $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$ libovolnou platí $\varinjlim^{\mathcal{W}}(\bar{\mathcal{A}}) \subseteq \bar{\mathcal{A}}$

(b) Je-li dále $\lambda \in reg(\varkappa)$, pak je

$$\mathcal{A} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \notin Cf_{\in}\varkappa \Rightarrow \bar{\mathcal{A}} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \notin Cf_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$$

a naopak

$$\mathcal{A} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in Cf_{\in}\varkappa \Rightarrow \bar{\mathcal{A}} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in Cub_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$$

(c) *Je-li $\mathcal{W} = \mathcal{N} \sqcup \mathcal{H}$ libovolný rozklad na dvě disjunktní množiny, pak předpoklad*

$$\{\lambda : \bar{\mathcal{H}} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in Nst_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}\} \cap reg(\varkappa) \in Cf_{\in}\varkappa$$

implikuje jednak $\mathcal{N} \in Cub_{\subseteq}\mathcal{W}$ a také $\mathcal{N} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in Cub_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$ pro každé $cf(\varkappa) < \lambda \in reg(\varkappa)$.

Důkaz. (a) Uvažujme libovolný $\subseteq$-řetězec $(r_\alpha)_{\alpha\in\gamma} \subseteq [\varkappa]^{<\lambda}$, jehož sjednocení je prvkem $\mathcal{W}$ a nějaký prvek $\beta \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} r_\alpha$. Tento je z definice prvkem nějakého r_ζ pro $\zeta < \gamma$ a $r_\zeta \in \bar{\mathcal{A}}$, tedy existuje $A \in \mathcal{A}$, že $\beta \in A \subset r_\zeta \subset \bigcup_{\alpha\in\gamma} r_\alpha$.

(b) Existuje-li $\beta \in \varkappa$, že $\{X \in [\varkappa]^{<\lambda} : \beta \in X\} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, je to právě množina $\{X : \beta \in X\} = [\{\beta\}, \subseteq)$, která je $\subseteq$-cubem ve $[\varkappa]^{<\lambda}$ a která dosvědčuje $\subseteq$-omezenost $\bar{\mathcal{A}} \cap [\varkappa]^{<\lambda}$.

Druhou implikaci dokážeme sporem. Předpoklad $\bar{\mathcal{A}} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \notin \mathrm{Cub}_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$ znamená, že množina $[\varkappa]^{<\lambda} \setminus \bar{\mathcal{A}} \in \mathrm{Stat}_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$ a z Fodorova lemmatu plyne existence $\gamma_0 \in \varkappa$ a stacionární $\mathcal{S} \subseteq [\varkappa]^{<\lambda} \setminus \bar{\mathcal{A}}$ že $\forall S \in \mathcal{S}$ je $\gamma_0 \in S$, ale $[\{\gamma_0\}, \subseteq) \cap (\subseteq, S) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, takže pokud by existoval prvek $A \in \mathcal{A} \cap [\varkappa]^{<\lambda}$, že $\gamma_0 \in A$, je $[A, \subseteq) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, což je spor.

(c) Předpoklad uvedené implikace je podle bodu (b) ekvivalentní předpokladu existence kofinální množiny regulárních $(\lambda_i)_{i\in cf(\varkappa)} \nearrow \varkappa$ spolu s množinou $\Gamma = \{\gamma_{\lambda_i} : i \in cf(\varkappa)\} \in \mathcal{W}$, že pro $\forall H \in [\{\gamma_{\lambda_i}\}, \subseteq) \cap \mathcal{H}$ platí $|H| \geq \lambda_i$. Z toho plyne, že $\subseteq$-clubem ve $\mathcal{W}$ $\subseteq$-pod $\mathcal{N}$ je $[\Gamma, \subseteq)$, protože $[\Gamma, \subseteq) \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Díky $|\Gamma| \leq cf(\varkappa)$ platí také relativní verze.

□

V posledním na $\preceq_C$ nezávislém pozorování se podíváme na dokazatelnost $\mathcal{N} \in \mathrm{Cub}_{\subseteq}\mathcal{W}$ ještě z trochu jiné perspektivy.

K tomu účelu si označme *Fréchetův filtr* na $cf(\varkappa)$ jako $\mathfrak{F}_{cf(\varkappa)}$. V názvosloví z první kapitoly se jedná o $cf(\varkappa)$-asociovaný filtr na $(cf(\varkappa), \in)$. Fixujme si posloupnost regulárních $\kappa_i \nearrow \varkappa$ a uvažujme produkt $(\prod_{i<cf(\varkappa)} \kappa_i, \leq)$ uspořádaný $f \leq g \Leftrightarrow \{i : f(i) \leq g(i)\} = cf(\varkappa)$. Toto uspořádání lze relativizovat vzhledem k libovolnému filtru F rozšiřujícímu $\mathfrak{F}_{cf(\varkappa)}$ jako $f \leq_F g \Leftrightarrow \{i : f(i) \leq g(i)\} \in F$.

Definujme $\iota_{-} : \mathcal{W} \to \prod_{i<cf(\varkappa)} \kappa_i$ předpisem

$$\iota_X(i) = \begin{cases} \lambda_i \text{ že } \lambda_i & \text{pokud } X \cap \kappa_i = \kappa_i \\ sup\{X \cap \kappa_i\} & \text{pokud } cf(X \cap \kappa_i) < \kappa_i \\ min\{\kappa_i \setminus X\} & \text{pokud } (X \cap \kappa_i \text{ je kofinální v } \kappa_i) \wedge (\kappa_i \setminus X \neq \emptyset) \end{cases}$$

Pozorování 2.20. *Nechť jsou $\mathcal{N} \in Cf_{\subseteq}\mathcal{W}$ a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{W} \setminus \mathcal{N}$ libovolné. Existuje-li filtr $F \supseteq \mathfrak{F}_{cf(\varkappa)}$ a funkce $b \in \prod_{i<cf(\varkappa)} \kappa_i$, že*

$$(\forall N \in \mathcal{N})(\forall H \in (\subseteq, N) \cap \mathcal{H}) : (\iota_H <_F b)$$

pak je $\mathcal{W} \setminus \mathcal{H} \in Cub_{\subseteq}\mathcal{W}$.

Důkaz. Obraz b je prvkem $[\varkappa]^{cf(\varkappa)}$ a množina $[\mathrm{im}(b), \subseteq) \subseteq \mathcal{W}\setminus\mathcal{H}$, protože $\mathrm{im}(b) \subseteq X$ implikuje $\iota_{\mathrm{im}(b)} \leq \iota_X$ a tedy také $\iota_{\mathrm{im}(b)} \leq_F \iota_X$. Z $\subseteq$-kofinality $\mathcal{N}$ existuje $\mathcal{N} \ni N \supseteq X$ a z předpokladu $\iota_H <_F \iota_{\mathrm{im}(b)}$ pro $H \in (\subseteq, N) \cap \mathcal{H}$ libovolné a tak $X \notin \mathcal{H}$. □

V obou pozorováních jsme ve skutečnosti dokázali silnější vlastnost, totiž $\mathcal{H} \notin \mathrm{Cf}_{\subseteq}\mathcal{W}$, což může vést k podezření, že dané předpoklady jsou zbytečně silné.

Vraťme se proto raději k uspořádání $\preceq_{\mathcal{C}}$, které od teď zkracujeme na $\preceq$. Právě toto uspořádání rozestupuje množinu $\mathcal{W}$ od daného $\varkappa$-presentovaného plochého modulu F do dvou disjunktních podmnožin – nasycené části $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{W}$ a jeho doplňku $\mathcal{H} = \mathcal{W} \setminus \mathcal{N}$.

Na první pohled je zřejmá implikace $\mathcal{N} \in \mathrm{Cub}_{\subseteq}\mathcal{W} \Rightarrow \mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \in F^{\perp}$, ale zatím víme pouze $\mathcal{N} \in \mathrm{Cf}_{\subseteq}\mathcal{W}$. V dalším pozorování se proto zaměříme na vlastnosti $\mathcal{H}$ a $\mathcal{N}$.

Pozorování 2.21. *Vlastnosti* $(\mathcal{W}, \preceq)$

(a) Pro každou $H \in \mathcal{H}$ *platí* $[H, \preceq) \subseteq \mathcal{H}$

(b) Pro každou $N \in \mathcal{N}$ *platí* $(\preceq, N] \subseteq \mathcal{N}$.

(c) $\mathcal{N} \subseteq \bar{\mathcal{N}}$

(d) Každý $\subseteq$*-spojitý* $\preceq$*-řetězec, jehož sjednocení je* $\varkappa$*, musí být složen pouze z prvků* $\mathcal{N}$.

Důkaz. (a) $\preceq$-nadmnožiny H musí být v $\mathcal{H}$, protože v případě $H \preceq N \in \mathcal{N}$ a G libovolnou, že $H \subseteq G$, existuje množina $M \supseteq G$, že $N \preceq M \in \mathcal{N}$. Z tranzitivity $H \preceq M$ a z IC $H \preceq G$. G byla libovolná, což je spor s $[H, \preceq) \neq [H, \subseteq)$.

(b) Plyne z (a).

(c) Plyne z existence pokrývajících systémů $N(\lambda)$ spolu s bodem (b).

(d) Pro každý prvek X v daném řetězci platí, že jeho strukturní morfismus $\mathcal{F}(\varkappa \supset X)$ je $\mathcal{C}$-čistý a předsložení s $\mathcal{F}(\varkappa \supset Y)$ dává, že každý $\mathcal{F}(Y \supset X)$ je také $\mathcal{C}$-čistý, tedy $[X, \subseteq) = [X, \preceq)$ a tak $X \in \mathcal{N}$.

$\square$

Vraťme se nyní k algebraické stránce věci, nejprve k notaci. Pro každou $X \in \mathcal{W}$ je dána surjekce $\bigoplus_{i \in X} F_i \xrightarrow{\pi_X} \mathcal{F}(X)$ a libovolný prvek $x \in \mathcal{F}(X)$ má π_X-předobraz v nějaké konečné direktní sumě modulů z $(F_i)_{i \in X}$. Z usměrněnosti I a X plyne, že existuje horní mez v podobě singletonu $j \in X$, že $x = \pi_X(y)$, kde $y \in F_j$.

Funktorialita $\mathcal{F}$ pro $y \in \bigoplus_X F_i$ znamená, že

$$\mathcal{F}(Y \supset X)\pi_X(y) = \pi_Y \iota_{YX}(y)$$

kde $\iota_{YX} : \bigoplus_X F_i \to \bigoplus_Y F_i$ je zobrazení indukované identitami na $i \in X$. Ztotožníme-li $\mathcal{F}(\varkappa)$ s původním F, jsou $\mathcal{F}(\varkappa \supset X)$ dané strukturní morfismy $\mathcal{F}(X) \to F$.

Tvrzení 2.22. *Buď* $(\mathcal{W}, \preceq)$ *dáno singulárně* $\varkappa$*-presentovaným modulem.*

(a) $\bar{\mathcal{N}} \in \mathit{Cub}_{\subseteq}\mathcal{W}$ *a* $\bar{\mathcal{N}} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in \mathit{Cub}_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$ *pro* $\lambda \in \mathit{reg}(\varkappa)$ *libovolné.*

(b) Pro každou $X \in \bar{\mathcal{N}}$ *platí* $\mathit{ker}(\mathcal{F}(\varkappa \supseteq X)) \leq \mathit{Rej}_{\mathcal{C}}\mathcal{F}(X)$.

(c) $\forall \lambda \in reg(\varkappa)$ *je* $\mathcal{N} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in Stat_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$.

Důkaz. (a) Že je $\bar{\mathcal{N}} \in \mathrm{Cub}_{\subseteq}\mathcal{W}$ plyne z $\subseteq$-kofinality $\mathcal{N}$ a pozorování 2.19(a). Druhý výrok plyne z $\mathcal{N} \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in \mathrm{Cf}_{\subseteq}[\varkappa]^{<\lambda}$ a pozorování 2.19(b).

(b) Algebraickou vlastnost dokazujeme sporem, předpokládáme tedy existenci $C \in \mathcal{C}$ a $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{c} C$, že $\ker(\mathcal{F}(\varkappa \supset X)) = \bigcup_{Y \in [X, \subseteq)} \ker(\mathcal{F}(Y \supset X))$ obsahuje prvek $x \neq 0_{\mathcal{F}(X)}$, který není v kernelu morfismu c, existuje tedy $Y \supset X$, že $x \in \ker(Y \supset X)$. Z poznámek před tvrzením plyne, že existuje $j \in X$, že $x = \pi_X(y)$ pro $y \in F_j$. Z definice existuje $\mathcal{N} \ni N \subset X$ obsahující j a z $\mathcal{F}(X \supset N)\pi_N(y) = \pi_X \iota_{XN}(y)$ plyne, že $\pi_N(y) \neq 0_{\mathcal{F}(N)}$ a dále $\pi_N(y) \notin \ker(c\mathcal{F}(X \supset N))$, ale $\pi_N(y) \in \ker(\mathcal{F}(Y \supset N))$, což je spor s $N \preceq Y$, konkrétně s lemmatem 2.2.

(c) Buď $\mathcal{D}$ libovolný BÚNO $\subseteq$-club v $[\varkappa]^{<\lambda}$. Indukcí pro $\alpha \in \lambda$ definujme alternující řetězec $D_0 \subseteq n_{\mathcal{N}}(D_0) \subseteq D_1 \subseteq ...$, že $D_\alpha \in \mathcal{D}$ a $D_\alpha \subsetneqq D_{\alpha+1}$. Protože je $\mathcal{D}$ club, tak můžeme vzít v limitních bodech sjednocení $D_\delta = \bigcup_{\alpha \in \delta} D_\alpha$ a stále jde o prvky $\mathcal{D}$. V potenci sjednocení celého řetězce, označme ho S, existuje z lemmatu 2.14 systém $S(\lambda)$, který je $\mathcal{C}$-čistý club v $[S]^{<\lambda}$ a ten musí mít s řetězcem $(D_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$ neprázdný průnik, označme ho D_δ. Protože je $D_\delta \preceq S$, je také $D_\delta \preceq n_{\mathcal{N}}(D_\delta) \subseteq D_{\delta+1} \subseteq S$ a tedy $D_\delta \in \mathcal{N}$ podle pozorování 2.21(b), čímž je důkaz bodu (c) hotov.

□

Obraťme se nyní k hierarchii $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$. Libovolný $G \in \mathcal{G}^{\varkappa}$ lze aproximovat direktním systémem na indexové $\mathcal{W}_G$, s tím, že na rozdíl od speciálního případu $F \in \mathcal{G}_0^{\varkappa}$ již není zřejmé, že pro $X \in \mathcal{W}_G$ platí $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{G}^{<\varkappa}$. Z předpokladu $\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq G^{\perp}$ je skrz lemma 2.5(b) dokazatelné pouze $\mathcal{N}_G \cap [\varkappa]^{<\lambda} \in \mathrm{Cub}_{\subseteq}(\mathcal{W}_G \cap [\varkappa]^{<\lambda})$ pro $\lambda \in \mathrm{reg}(\varkappa)$ libovolné. K přímočarému umožnění indukce podle dolního indexu $\mathcal{G}_i^{\varkappa}$ by byl potřeba silnější předpoklad.

Tvrzení 2.23. *Pokud pro singulární $\varkappa$ spočetné kofinality a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{EC}$ libovolnou platí formule:*

$$(\forall G \in \mathcal{G}^{\varkappa})(Ker_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq G^{\perp} \Rightarrow \mathcal{N}_G \in Cub_{\subseteq}\mathcal{W}_G)$$

pak platí také

$$Ker_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq (\mathcal{G}^{<\varkappa})^{\perp} \Rightarrow Ker_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq (\mathcal{G}^{\varkappa})^{\perp}$$

Důkaz. Pro $\mathcal{G}_0^{\varkappa}$ jde o tvrzení 2.17. Uvažujme danou dvojici $G,H \in \mathcal{G}_{i-1}^{\varkappa}$ a $F \in \mathcal{G}_i^{\varkappa}$, že $G \xrightarrow{f} H \twoheadrightarrow F = \mathrm{coker}(f)$. Z předpokladu lze modul G aproximovat přímo $\mathcal{N}_G$ z čehož plyne, že direktní systém částečných kojader f, jehož je F limitou, je díky $\mathcal{C}$-čistotě f a $\mathcal{F}_G(\varkappa \supset X)$ pro $X \in \mathcal{N}_G$ libovolné tvořen moduly z $\mathcal{G}^{<\varkappa}$, což umožňuje aplikaci lemmatu 2.5 k důkazu lemmat 2.14 až 2.16 i pro direktní systém částečných kojader f a jako v tvrzení 2.17 dostáváme $\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq F^{\perp}$. □

Závěr

Původním záměrem práce bylo prodloužení induktivního argumentu v důkaze $\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{EC}$ za předpokladu $\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC}$ i v případech singulárně presentovaných plochých modulů za pomoci kombinatorických vlastností indexové množiny $(\mathcal{W}, \preceq)$. Negace existence pro indukci klíčového $\subseteq$-spojitého $\preceq$-řetězce ale vedla pouze k důsledkům typu $\mathcal{H} \in \mathrm{Cf}_{\preceq}\mathcal{W}$, přičemž $\mathrm{Cf}_{\preceq}\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Cf}_{\subseteq}\mathcal{W}$, tedy také $|\mathcal{H}| \geq \varkappa^+$. Tyto vlastnosti autor ke sporu dál nedovedl. Méně ambiciózním cílem by byl důkaz toho, že pro hierarchii $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ platí induktivní formule

$$\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq (\mathcal{G}^{<\varkappa})^{\perp} \Rightarrow \mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq (\mathcal{G}^{\varkappa})^{\perp}$$

alespoň pro $\varkappa$ spočetné kofinality. Pokus dokázat to indukcí podle dolního indexu hierarchie postupem jako v tvrzení 2.17, které zakládá úroveň $i = 0$, narazil na problém s kompatibilitou jednotlivých hladin $< \lambda$-presentovaných modulů v direktním systému z částečných kojader $G \xrightarrow{f} H \twoheadrightarrow F \in \mathcal{G}^{\varkappa}_{i+1}$, který se autorovi nepodařilo překonat. Jednotlivé úrovně $\mathcal{W}_F$ jsou cuby v $[\varkappa]^{<\lambda^+}$ indexující moduly z $\mathcal{G}^{<\lambda^+}$, zádrhel je v pseudofiltracích složených z prvků jedné úrovně $[\varkappa]^{<\lambda^+}$, jejichž direktní limity jsou λ^+-presentované a u kterých tak již není zaručené, že jsou prvky $\mathcal{G}^{\lambda^+}$, jen to, že se jejich strukturní morfismus do F přes nějaký prvek $\mathcal{G}^{\lambda^+}$ faktorizuje, tedy že pro dané λ^+-velké sjednocení $M \in \mathcal{W}_F$ existuje stejně velká $N \supset M$, pro kterou lze použít lemma 2.14 k důkazu existence systému $N(\lambda^+)$. V důkazu lemmatu 2.15 v situaci $|X| = \lambda$ ale potřebujeme, aby systém lemmatu 2.14 existoval na výsledném sjednocení M, protože jinak není $\subseteq$-alternace řetězců $(M_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ a $(S_n)_{n\in\omega} \subseteq N(\lambda^+)$ zaručena, postačující podmínkou je existence N, že $\mathcal{F}(N) \in \mathcal{G}^{\lambda^+}$ a $[M]^{<\lambda^+} \cap N(\lambda^+) \in \mathrm{Cf}_{\subseteq}[M]^{<\lambda^+}$.

Místo původního záměru se tak za předpokladu $\bigoplus(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{EC}$ v práci povedlo dokázat $\mathrm{Ker}_*(\prod(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{EC}$ pouze pro okruhy s dodatečnou vlastností, díky které se lze problémové indukci přes singulárně presentovanou úroveň vyhnout, nebo k jejímu překonání použít tradiční nástroje.

Literatura

[1] R.Göbel, J.Trlifaj, *Approximations and endomorphism algebras of modules*, 2nd edition, volume 41 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, 2012.

[2] J.Šťovíček, *Sigma-cotorsion modules and definability*, rukopis, 2011.

[3] J.Šaroch, J.Šťovíček, *The countable telescope conjecture for module categories*, Advances in Mathematics **219**(3):1002–1036, 2008.

[4] J.Šťovíček, *Sigma-cotorsion modules over rings of cardinality* $< \aleph_\omega$, rukopis, 2006.

[5] J.Šaroch, *Problém týkající se singulární kompaktnosti*, rukopis, 2007.

[6] A.Kanamori, *The higher infinite*, 2nd edition, Springer Monographs in Mathematics ISSN 1439-7382, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

Index použitých symbolů

Následuje seznam symbolů použité notace spolu s číslem stránky, kde je symbol definován.