UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

Pedagogická fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2009 Klára Žáková

UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Výukové a diagnostické možnosti prostředí Sčítací trojúhelníky u žáků na 1. stupni

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Milan Hejný Csc.

Autor diplomové práce: Klára Žáková

Studijní obor: učitelství pro 1.stupeň ZŠ

Forma studia: prezenční

Diplomová práce dokončena: březen 2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval/a samostatně s použitím uvedené literatury.

V Praze dne: 4. 3. 2009 Podpis: ……………………………………………

Mé upřímné poděkování patří panu profesorovi Hejnému za trpělivost, s kterou mi předával své zkušenosti a za jeho velkou teoretickou základnu. Děkuji ale také velice svým spolužačkám-kamarádkám, Fandovi, Honzíkovi a Péťovi, bez kterých by to nešlo.

Anotace:

Kvalitativní výzkum prostředí součtových trojúhelníků založený na experimentu. Zadání parametrů náročnosti úlohy, popis a analýza řešitelských strategií, charakteristika a analýza chyb, reedukační postupy. Zpracování tématu z pohledu výukových a diagnostických možností.
Cílem práce je kvalitativně navýšit význam prostředí součtových trojúhelníků při vyučování aritmetiky na 1. stupni ZŠ.

Anotace v anglickém jazyce:

Qualitative research of the environment of Summing triangles based on an experiment. Exercise´s level parameters determination, description and analysis of solving strategies, characteristics and analysis of mistakes, re-education process. The theme treated from the aspect of didactic and diagnostic potentials.
The purpose of this work is to enhance qualitatively the importance of the environment of Summing triangles in arithmetics for primary schools.

OBSAH :

1. Úvod

Když se řekne „součtový trojúhelník“, drtivá většina nezasvěcené populace si navzdory jisté pochybnosti představí geometrický útvar. Trojúhelník je to ovšem pouze díky tvaru tabulky. Proto tomuto prostředí můžeme říkat také „hrozny“ nebo „pyramidy“, a to podle toho, jestli vrchol trojúhelníkové tabulky směřujeme dolů nebo nahoru. S geometrií nemá tedy toto matematické prostředí nic společného. A jak se k tomuto prostředí staví „zasvěcená“ populace (studentky 4.ročníku oboru Učitelství pro 1.st.ZŠ), se můžeme podívat v příloze. S klidným svědomím mohu konstatovat, že prostředí součtových trojúhelníků skrývá mnohé záludnosti i pro tuto skupinu. Záleží pouze na úrovni obtížnosti, která se v tomto prostředí dá velice bohatě stupňovat. Já jsem ale své zkoumání zaměřila především pro využití na prvním stupni ZŠ. Jak jsem zjistila, není toto prostředí obecně příliš známé, většina dotazovaných se s ním na základní škole nesetkala. Ze 13 dotazovaných spolužaček se jich s tímto typem úloh 8 setkalo až během svého studia na VŠ.

Fakt, že se prostředí označuje několika různými názvy, není podstatný. Důležité je umět využívat možnosti tohoto prostředí. A to byl cíl mé diplomové práce. Jedná se totiž o velice variabilní prostředí, kde od jednoduchého sčítání a odčítání můžeme dojít až k záporným číslům, zlomkům, celým číslům a hledání dalších zákonitostí fungujících v rámci součtového trojúhelníku (dále jen trojúhelník). Záleží pouze na věku, zkušenostech a schopnostech žáků. V kombinaci s dalšími prostředími (např. krokování) může být i zdánlivě jednoduchý trojúhelník místem matematických objevů. Cílem je kultivovat žákův vhled do aritmetiky, učit jej objevovat experimentováním.

Abych pronikla do tajů tohoto prostředí, musela jsem se nejdříve sama seznámit se všemi zákonitostmi a pravidly. Byla to cesta dlouhá, těžká, plná pádů. Problémy, s kterými jsem se musela vypořádat a výsledky mého snažení jsem zachytila ve 2. kapitole. Pozorně jsem také sledovala výpočetní postupy u dvou žáků 2. ročníku. Ti řešili úlohy, které jsem pro ně předem připravila. Závěry, ke kterým jsem v rozborech experimentů došla, byly pro mě často překvapující (3. kapitola). K experimentům s žáky mám písemné povolení od jejich rodičů tyto materiály použít pro svou diplomovou práci. Trojúhelníky jsem využila i pro jednu hodinu matematického kroužku, kde byla žádoucí „zábavná – hravá" forma. Například v prostředí „autobus" to není těžké, žáci mají pocit, že si hrají už jenom z podstaty prostředí. U trojúhelníků to byl už úkol těžší, náročnější na přípravu. Výsledek mého snažení najdete ve 4. kapitole, stejně jako další možnosti tohoto prostředí včetně vyzkoušených a funkčních kaskád připravených k využití v praxi.

Ve své diplomové práci jsem se snažila především o širší využitelnost mých poznatků. Nabízím zde přehled forem zadání úloh, žádoucí práce s nimi, nástrahy a problémy prostředí, možnosti jejich překonání a v neposlední řadě také připravené experimentované kaskády úloh. Přeji si, aby má diplomová práce dobře posloužila především (budoucím) učitelům 1. stupně ZŠ.

2. Teoretický základ

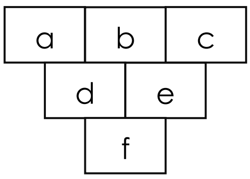
2.1. Didaktická část

2.1.1. Termíny

Součtovým trojúhelníkem rozumíme aritmetické prostředí, soubor oken uspořádaných do tvaru trojúhelníka. Přitom v každém okně je právě jedno číslo a platí základní pravidlo, že pod každými dvěma **sousedními čísly** leží jejich součet.

Podle počtu oken v horní řádce budeme trojúhelníky označovat *3-Δ, 4-Δ, ...*. Je zřejmé, jak vypadá n-Δ pro n = 5, n = 6, ...

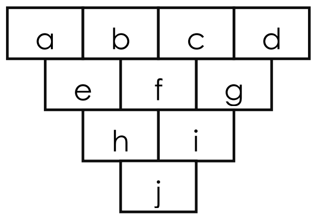
Obecně jsou n-Δ pro n = 3 a n = 4 zapsány pomocí písmen takto (obr.1, obr.2):



Obr. 1

Základní vazby jsou tři:

a + b = d (1)
b + c = e (2)
d + e = f (3)



Obr. 2

Základních vazeb je šest:

a + b = e (4)
b + c = f (5)
c + d = g (6)
e + f = h (7)
f + g = i (8)
h + i = j (9)

Horní řádkou 3-Δ rozumíme trojici čísel a, b, c. Jeho dolním číslem nazveme číslo v okně f. Pro 4-Δ je horní řádkou čtveřice čísel a, b, c, d, dolním číslem je číslo v okně j.

Strukturou n-Δ rozumíme soubor všech zákonitostí, jimž jsou podřízena čísla n-Δ. Pro n = 3 jsou to vazby (1) - (3) a všechny další, z nich plynoucí. Například

$e = f - d$, $a + b + e = f$, ap. Pro $n = 4$ jsou to vazby (4) - (9) a všechny další, z nich plynoucí. Například vztahy $a + d + 3f = h + i = j$, $j - e = 2b + 3c + d$, ap.

Kromě těchto vazeb popisují strukturu 3-Δ také tato tvrzení:

1. Jsou-li $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1)$ a $(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2)$ dva dobré 3-Δ,

pak i $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2, e_1 + e_2, f_1 + f_2)$ je dobrý 3-Δ.

Jinak: součtem dvou 3-Δ dostaneme opět 3-Δ.

2. Jsou-li všechna čísla 3-Δ přirozená, pak aspoň dvě z nich jsou sudá.

Vstupem úlohy nazveme soubor všech známých čísel v n-trojúhelníku.

Výstupem úlohy nazveme soubor všech neznámých čísel, včetně jejich umístění do oken.

Vstup úlohy o n-Δ, tvořený **nezávislou skupinou** n čísel, nazýváme úplným neboli **bazí**. Problematice bazí jsem se věnovala v části „moje matematika". Vstup úlohy tvořený nezávislou skupinou $k < n$ čísel, nazýváme neúplným.

2.1.2. Typy úloh

V prostředí součtových trojúhelníků můžeme úlohy rozdělit takto:

A. Úlohy s úplným vstupem.

1. základní
2. s roztroušeným vstupem
3. nepřímé

B. Úlohy s neúplným vstupem.

1. kombinatorické úlohy
2. úlohy o funkční závislosti

C. Úlohy na vkládání.

1. skoro všechna čísla se rozutekla
2. jedno z utíkajících se ztratilo
3. mezi utíkající se vetřelo jedno falešné

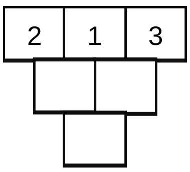
2.1.2.A Úlohy s úplným vstupem (úlohy explicitní)

Ú1: Řešení: d = 2 + 1 = 3, e = 1 + 3 = 4, f = 3 + 4 = 7.

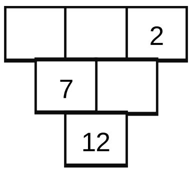
Ú2: Řešení: e = 12 - 7 = 5, b = 5 - 2 = 3, a = 7 - 3 = 4.

Ú3: Řešení nelze najít přímo. Je třeba experimentovat.

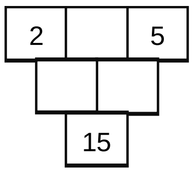
Výsledek b = 4, d = 6, e = 9.



Ú 1



Ú 2



Ú3

Každá z úloh má na vstupu dána tři čísla a připouští právě jedno řešení. Přitom žák třetí třídy umí úlohy 1 a 2 řešit přímo, ale úlohu 3 musí řešit metodou pokus-omyl.

Řekneme, že úloha s úplným vstupem byla řešena **přímou strategií** (explicitně), jestliže nebylo nutno nic hádat a proces řešení měl tři (v případě n=3) resp. šest (v případě n=4) kroků z nichž každý byl sčítáním nebo odečítáním dvou již známých čísel. Úloha, která připouští přímou strategii se nazývá přímá. Jinak mluvíme o úloze (i strategii) nepřímé.

Nastat mohou tedy tyto situace:

1.Vstupem je horní řádka.

2.Vstup je roztroušený. Tím rozumíme, že aspoň jedno číslo vstupu leží mimo horní řádku a úlohu lze řešit pomocí přímé strategie.

3.Vstup je nepřímý. Tím rozumíme, že úloha nemá přímou strategii.

Řešení přímých úloh se vstupem **v horní řádce** je první etapou seznamování se s prostředím součtových trojúhelníků vhodné pro druhé pololetí prvního ročníku. Strategie vychází ze základního pravidla a jsou jeho operacionalizací. Jsou dány instrukcí. „Najdi dvě sousední čísla a sečti je. Součet napiš do okna ležícího uprostřed pod oběma sousedními čísly. To opakuj, dokud je nějaké okno n-trojúhelníka prázdné.“ Žák zaplňuje prázdná okna 4-Δ v pořadí e, f, g, h, i, j. Důvod je nasnadě: je to postup jako při čtení - zleva doprava a shora dolů. Stejně postupují žáci i u n-Δ. Jiné pořadí výpočtu se vyskytuje pouze v době, když se žák prvního ročníku seznamuje s prostředím trojúhelníků. Objeví-li se i později, pak to má obyčejně svoji příčinu. Poté jsou přidány úlohy **s roztroušeným vstupem**. Žáci řešením desítek úloh s čísly stále se zvětšujícími získají vhled do situace a umí se v ní bezpečně orientovat. Diagnostickým znakem úspěšného ukončení této etapy je minimální výskyt chyb strategie.

Druhá etapa poznávání tohoto prostředí začíná s úlohami **nepřímými**. Tím, že již není možné na řešení nasadit až doposud dobře fungující algoritmus, že je nutné experimentovat, zkoušet a hledat, otevírá se nový prostor pro poznávání. Úlohy s nepřímým vstupem vyžadují nepřímý postup a jsou náročnější. Žák, který neovládá jazyk algebry, musí použit strategii **pokus-omyl**. Přesněji řečeno, jde o rozvoj žákových schopností efektivně hledat řešitelskou strategii. Zkouší doplňovat prázdná okna trojúhelníku tak dlouho, až se "trefí". Přitom buď tipuje nějaké číslo horní řádky, nebo začíná rozkladem dolního čísla. Častější bývá cesta druhá. Někdy je to cesta poměrně rychlá, jindy může být cesta rozkladu dolního čísla nešikovná. Je to v případech, kdy mezi dolním číslem a ostatními čísly je značný odstup. Zde se cesta hádání čísla v horní řádce jeví jako efektivnější.

Řešitel znalý jazyka algebry najde řešení lehce pomocí proměnné.

Vývoj metody pokus-omyl:

Proces postupného vylepšování metody pokus-omyl rozdělíme do tří fází. Poznání těchto fází pomůže učiteli diagnostikovat úroveň jednotlivých žáků a napomáhat jejich růstu.

1. Náhodné tipování hledaných čísel.
2. Tipování s vhledem. Žák si všimne, že jeho tip vedl na číslo větší (menší) než bylo třeba a proto následující jeho tip je menší (větší) než byl typ předchozí.
3. **Evidence tabulkou**. Žák si do tabulky zapisuje dvojice tip-výsledek. Tím urychlí hledání. Žák při práci s tabulkou nabývá zkušenost se systemizací souboru dat a objevuje zákonitosti ukryté v prostředí součtových trojúhelníků a zviditelněné tabulkou. Nejdůležitější zákonitostí je "všudypřítomná" linearita. „Když nahoře přidám 10, bude dole o 30 více. Když přidám 1, bude dole o 3 více." Tato znalost, která platí u mnoha dalších úloh, dovolí žákovi hledat rychlá řešení.

Intuitivní poznávání lineární závislosti pomocí tabulky má tři důležité důsledky:

a) je propedeutikou pro neformální poznávání jazyka algebry,
b) je propedeutikou funkčního myšlení a
c) dává žákům nástroj na objevování záporných a racionálních čísel.

Problémy a reedukace

Při seznamování se s jednoduchými úlohami se žáci dopouštějí chyby **dezorientace**. Ta spočívá ve špatném určení sousedních oken.

Pro odstranění chyby použijeme tento reedukační postup: před každým krokem žák nejprve učiteli řekne, které okno doplní a která čísla bude sčítat. Po dvou takto vyřešených úlohách pracuje již žák sám, ale u každého kroku nahlas opakuje "počítám toto číslo; sečtu tato dvě". Reedukaci provádíme s malými čísly, aby energie žáka byla zaměřena na nabytí orientace.

Žáci druhé nebo třetí třídy poprvé setkají s úlohami s roztroušeným vstupem, dopouštějí se kromě dezorientace ještě **záměny operace**. Spočívá v tom, že žák místo odčítání sčítá, nebo naopak. Příčinou chyby není nepozornost žáka, ale jistá setrvačnost. Žák vnímá trojúhelník nikoli jako strukturu, ve které je nutno doplnit scházející prvky, ale jako nácvik na sčítání. Sčítá každá dvě čísla stojící vedle sebe. Nezřídka i dvě čísla, která bezprostředně nesousedí, ale jsou blízká. Další chyba je **strategická**, která je závažnější, protože je důsledkem nepevné znalosti struktury součtového trojúhelníka.

Pro nápravu této chyby funguje **metoda "zlomyslného skřítka"**. Poté, co už žáci ovládají úlohy, kdy vstupem je horní řádka, předloží učitel třídě úlohu s roztroušeným vstupem spolu s tímto příběhem. „Toník dobře vyřešil trojúhelník, který měl za domácí úkol. V noci se však do jeho sešitu vloudil potměšilý skřítek a vygumoval mu tři z napsaných čísel. Toník na to přišel až ve škole a teď pláče. Pomůžete mu najít tři vygumovaná čísla?"

Žáci hledají scházející tři čísla. Když jsou hotovi, vyzve je učitel, aby si řešení zkontrolovali tak, že vyřeší domnělou původní Tondovu úlohu. Tuto úlohu žáci již umí řešit. Ti žáci, kteří chybili, dostanou dva různé trojúhelníky. Který z nich byl ten původní? Žák pochopí, že má v řešení chybu a má návod na to, jak případné další řešení kontrolovat.

Komentář: Zkušenost s hledáním a opravováním chyb ve vlastním myšlení je mimořádně důležitá. Její nabytí je náročné jak intelektuálně tak i citově. Žádný z nás nemá z vlastních chyb radost a lehčí je spokojit se konstatováním "má to být takto", než hledat ve svém myšlení příčinu chyby. Ale právě schopnost umění hledat vlastní chyby, a dokázat se z nich poučit, patří k vysokým lidským kvalitám. Jestliže matematika tuto kvalitu v mladém člověku pěstuje, přispívá významně k jeho osobnostnímu růstu.

2.1.2.B Úlohy s neúplným vstupem (úlohy implicitní)

Úloha je dána vstupem, který tvoří nezávislá skupina **k** < **n** čísel.

V **kombinatorických úlohách** se zaměřujeme na propedeutiku kombinatorického myšlení. Existuje v nich konečný počet řešení a úkolem řešitele je zjistit, kolik jich je. Řešení sama však najít nemusí. Podstatné je, že obor čísel ve kterém pracujeme, je **N**. Pro jiné obory by úlohy neměly smysl.

Počet řešení úlohy zadané neúplným vstupem výrazně závisí na tom, v jakém číselném oboru pracujeme. V oboru přirozených čísel **No** může být počet řešení konečný. V oboru celých čísel **Z** a v oboru racionálních nezáporných čísel $\mathbf{Q}_+$ je tento počet skoro vždy nekonečný. Každá úloha je dána svým vstupem, který pro n = 3 má buď 2, nebo 1 číslo a pro n = 4 má nejvýše 3 čísla. Na první pohled by se mohlo zdát, že úloha s neúplným vstupem nutně připouští více, nebo dokonce nekonečně mnoho řešení. To není pravda. Například když je v n-Δ dáno pouze dolní číslo a to je nula, pak (pracujeme-li v oboru nezáporných čísel) má úloha jediné řešení: všechna čísla trojúhelníka jsou nuly.

Úlohy, které buď vůbec nemají řešení, nebo mají, ale jenom v rozšířeném kontextu, je vhodné zařadit v druhém pololetí třetího ročníku. Například úloha "sestroj ze šesti sirek čtyři trojúhelníky" je v rovině neřešitelná, ale v prostoru má řešení. V tomto věku jsou žáci ochotni připustit, že i polovina, třetina, …jsou právoplatná čísla. Prostředí součtových trojúhelníků je velmi vhodné pro **otevření světa zlomků**. Náročné pojmy je nutné otevírat žákům po kouscích a dlouhodobě. Náročný svět zlomků otevřeme již v prvním ročníku, když spravedlivě dělíme jablko nebo čokoládu na dvě části. Ve třetím ročníku se k pojmu "polovina" můžeme přiblížit, jak ukázáno výše, pomocí n-Δ. V žádném případě nepoužijeme s dětmi slovo „zlomek" a jeho zápis ponecháme na dětech (např. ½ zapíší písmenem *p*, ¼ písmenem *č*, …). První setkání se žáka s úlohou, v níž se na výstupu objeví záporné číslo nebo zlomek bývá odmítavé - "to se nedá řešit". Nepovažují polovinu za číslo. Učitel uvítá, když se najde žák, který tuto myšlenku vysloví a může tak ve třídě proběhnout diskuze, zda ½

číslo je nebo není. Rozhodnutí necháme na dětech. Je možné i to, že polovina třídy zlomky za čísla považovat nebude, druhá polovina ano.
Přístup přes krájení je **sémantický** - je zaměřen na otázku "co to je polovina (něčeho)?". Přístup přes trojúhelníky je **syntaktický** - je zaměřen na otázku "jak se s polovinou zachází?" Syntaktický přístup je výrazně náročnější..
Prostředí nám stejně dobře poslouží také pro otevření světa záporných čísel, přestože záporná čísla se budou učit až v 5.ročníku. Nejlépe to půjde s dětmi, kterým jako propedeutika záporných čísel bylo již dříve nabídnuto prostředí krokování.

V úlohách o **funkční závislosti** je úkolem řešitele v částečně vyplněném trojúhelníku najít funkční závislost čísel ve dvou určených oknech trojúhelníka. Tento typ úloh je zaměřen na propedeutiku funkčního myšlení a je žádoucí postupné rozšiřování číselných oborů $\mathbf{N \to Z}$, $\mathbf{N \to Q_+}$, $\mathbf{N \to Q \to R}$. Je vhodné použít evidenci tabulkou. (viz 1.1.2.a)

Tvrzení:

Jsou-li v 3-Δ čísla a, c, f celá, pak čísla 2b, 2d, 2e jsou též celá.

Jsou-li v 4-Δ čísla a, d, h, i celá, pak i čísla f, j, 3b, 3c, 3e, 3f, 3g jsou celá.

2.1.2.C Úlohy o běžencích

Pokud k úloze rozšířím zadání o doplňovaná čísla, stává se z ní úloha o běžencích. Úloha je tedy v 3-Δ dána jedním nebo dvěmi čísly a souborem m běženců.

Zadání by tedy mohlo znít: „Doplň čísla do čtyř prázdných oken 3-Δ. Přitom víš, že tři z doplňovaných čísel jsou 2, 5, 5. Řešení najde žák zkoušením. (Mohu zadat i všechny 4 běžence nebo také 5 a jeden z nich bude falešný.)
Úloha může mít dvě řešení a ta jsou navzájem souměrná.

Z hodiny matematiky na toto téma vyplynuly termíny, které sami žáci vymysleli. Číslo, které "uteklo" z některého okna n-Δ se nazývá běžencem. Číslo, které setrvalo, se nazývá hrdinou. Když je do souboru běženců připsáno i číslo, které není běžencem, pak se toto číslo (jako prvek souboru běženců), nazývá falešný běženec.

Nastat mohou tedy 3 situace:

1. Soubor běženců je úplný, t.j. m = n - 1.
2. V souboru běženců jeden schází, t.j. m = n - 2.
3. V souboru běženců jeden falešný přebývá, t.j. m = n.

Úlohy o běžencích patří mezi úlohy **vkládací**. Jsou to úlohy, v nichž je dán soubor prvků P a hrací plán H - jakýsi soubor "příhrádek", nebo "místností", nebo "oken", nebo "krabic". Úlohou řešitele je povkládat prvky souboru P do jednotlivých příhrádek plánu H tak, aby byly splněny jisté podmínky. Vkládací úlohy rozvíjejí schopnost žáka **organizovat soubor jevů**. Je to schopnost životně důležitá, pro některá povolání přímo zásadní. Proto ji věnujeme více pozornosti. Pro seznámení se s těmito úlohami je dobré motivovat dramatizací: děti jsou čísla, která utekla z trojúhelníka nakresleného na podlaze. Žáci brzy objeví, že největší utíkající číslo nutno dát vždy dole. Pak můžeme přejít k pohyblivým číslům (na kartičkách) pro snadnou manipulaci.

<u>Problémy a reedukace</u>

Často se zejména druháci dopouštěli chyby **setrvačnosti**. Jde o to, že některé špatně napsané číslo se tak silně vryje do vědomí žáka, že je opakuje při všech dalších pokusech.

Žáci, kteří mají s řešením úloh o běžencích potíže, jsou úspěšné dvě reedukační technologie. První je založena na **materializaci** běženců. Utíkající čísla jsou napsané na lístečcích. Žák s lístečky manipuluje, vkládá je do oken, nic nedopisuje. Výhodou je rychlá možnost změny pozice. Znatelně se sníží chyba setrvačnosti.

Druhá technologie je založena na alternativním nácviku strategie vkládání. Žákům předložíme úlohy na vkládání jiné, více algoritmické. Například žák dostane soubor lístečků, na každém je jedno zvířátko (pes, kočka, slepice) v jedné ze tří barev (červená, zelená, žlutá) a úkolem žáka je uložit lístečky na plánek mající 3 x 3 = 9 oken, přičemž sloupce jsou označeny zvířaty a řádky barvami.

Vkládací úlohy dobře diagnostikují míru žákova vhledu do součtových trojúhelníků. Žáci (třetího ročníku), kteří mají dobrý vhled, okamžitě použijí strategii dolního čísla a pak po chvíli dívání se na zadání píší celé řešení. Naproti tomu žáci (třetího i čtvrtého ročníku), kteří do součtových trojúhelníků vhled nemají, experimentují někdy dosti nešikovně. V tomto případě použijeme materializaci běženců.

Komentář: Pro většinu žáků jsou úlohy o běžencích složitější než úlohy s roztroušeným vstupem a pro některé žáky jsou náročnější než úlohy se vstupem nepřímým. Příčina tkví v tom, že není založeno na počítání, ale na organizování souboru dat. To je na úrovni žáka 1. stupně činnost nealgoritmická a pro algoritmické typy žáků tím pádem složitá. Vhodné období pro tyto úlohy je druhé pololetí druhého ročníku.

2.1.3. Cíle prostředí součtových trojúhelníků

Prvním a hlavním cílem řešení úloh je nácvik operace **sčítání** čísel napsaných vedle sebe a **odčítání**. Druhým (vedlejším) cílem je **nabývání vhledu** do prostředí, které je vhodné pro **experimentování**, **zkoumání vztahů, třídění jevů, objevování, odůvodňování** i **tvorbu struktur**.

Význam druhého cíle narůstá pouze s časem. Žák, který se (byť sporadicky) setkává s prostředím n-Δ nabývá zkušenost, kterou bude možné později využít při výkladu a objevování náročných matematických myšlenek. Žákova zkušenost se týká dvou věcí: **jistoty orientace** v prostředí trojúhelníků a **tušení jistých zákonitostí**.

Například:

1. Každý n-Δ můžeme "překlopit kolem svislé osy", t.j. změnit jej na souměrný. Pro n = 3 jde o dvě výměny: a↔c, d↔e. Pro n = 4 jsou výměny čtyři: a↔d, b↔c, e↔g, h↔i.
2. V horní řádce jsou čísla malá a dolní číslo je v trojúhelníku největší.
3. K dolnímu číslu přispívají krajní čísla horní řádky méně, a prostřední čísla více.

Zvědomování tušených zákonitostí

Každý objev, k němuž žák dospěje, je výsledkem dlouhého procesu nabývání a třídění zkušeností. Učitel musí na takový objev trpělivě čekat. Snaha netrpělivého učitele navádět žáky k objevu, nebo dokonce jim část objevu přímo ukázat, ničí to nejcennější, co součtové trojúhelníky žákům nabízí - **rozvoj kognitivních schopností**.

Dílčí cíle seřazené podle plnění chronologicky:

a) procvičování operace sčítání čísel, která nejsou zapsána pod sebou a
b) nabývání vhledu do prostředí součtového trojúhelníka.
c) procvičování operace sčítání i odčítání čísel, která nejsou zapsána pod sebou a
d) otevření pojmu záporné číslo v kontextu strukturálním (ne sémantickém)
e) rozvoj schopnosti experimentovat (tipovat možné řešení, kontrolovat jeho správnost a v případě chyby udělat její analýzu a zvolit nový, nadějnější tip řešení),
f) rozvoj schopnosti experiment organizovat, případně i nějak evidovat,
g) rozvoj schopnosti objevovat, formulovat a ověřovat hypotézy.
h) poznání, že úloha může nemít žádné řešení a že existuje cesta jak to nahlédnout,

i) poznání, že úloha může mít více řešení a že dobrý řešitel je chce najít všechna.

j) otevření pojmů polovina a třetina v kontextu strukturálním (ne sémantickém).

k) nabývání vhledu do kombinatorických situací a

l) rozvoj schopnosti tabulkou evidovat soubor experimentálně získaných údaj;

m) nabývání vhledu do situací obsahující funkční závislost

2.1.4. Využití součtových trojúhelníků ve výuce

Součtové trojúhelníky nechápeme jako tematický celek, ale jako prostředí. Základní úlohy o součtových trojúhelnících používáme nejprve jen jako přitažlivější formu úloh na nácvik operace sčítání. V tomto duchu je možné se základními úlohami seznámit žáky již v druhém pololetí prvního ročníku a to v podstatě bez časové zátěže, protože nácviku sčítání se stejně věnuje mnoho času. Stačí část takového nácviku uskutečnit v prostředí součtových trojúhelníků.
Ve druhém ročníku přidáme úlohy s roztroušeným vstupem. Teď již jistá náročnost na čas vystoupí, protože to chvíli trvá, než se žáci zorientují ve struktuře trojúhelníka. Ale ani tento čas nelze považovat za ztracený. Získáváním orientace v trojúhelnících žáci rozvíjejí svoji schopnost přecházet od procesuálního vidění jevů k vidění **konceptuálnímu**.
Další úlohy pak zařazujeme mimo výuku. Série úloh o součtových trojúhelnících předkládáme žákům jako výzvy k dobrovolné činnosti. Jednou za čas dáme žákům několik zajímavých úloh. Zájemci je řeší a dávají svá řešení učiteli. Ten je opraví a ohodnotí. To všechno probíhá bez jakéhokoli časového nároku na výuku. Naopak, žáci ze svého volného času věnují matematice více, než standardní výuka žádá. Jen když se v některém řešení objeví zajímavá myšlenka, dá učitel prostor autorovi k prezentaci myšlenky i ve vyučování.

Obyčejně je taková situace vstupem do diskuse celé třídy. Ta začíná již tím, že autorova formulace myšlenky bývá nejasná a třída se snaží přijít na to, co jejich spolužák chce říci. V žádném případě však diskuse není ztrátou času. **Třídní diskuze** je velice cenná a přispívá k rozvoji matematického myšlení žáků. A to nejen těch, kteří se aktivně na diskusi podílí, ale i těch, kteří ji jen sledují.

Velikou výhodou takto vedené výuky je to, že ani učitel, ani žáci nejsou tlačeni časem. Každý žák se do práce zapojí podle své vůle a volí si ty typy úloh, které se mu líbí a v náročnosti sobě přiměřené. Míra náročnosti úlohy je dána velikostí čísel vstupu i výstupu, počtem operací a náročností **operací** (přechod přes desítku), náročnost **čísel výstupu** (např. záporná čísla, zlomky) a náročnost **strategie**.

Učitel si nemusí příliš lámat hlavu tím, které typy úloh zveřejní na nástěnce teď, a které až o měsíc. Zde se nemůže dopustit chyby nepřiměřenosti. Učitel nabídne úloh mnoho a žáci si volí ty, které je oslovují. Tím vlastně učitel vidí, které úlohy jak na žáky působí. Běžně se stává, že v jednu dobu se jistý typ úloh stane ve třídě hitem a učitel pak musí vyrábět tucty úloh. Naštěstí v tomto prostředí to není věc těžká.

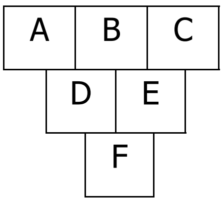
Neklamným znakem zájmu žáků o danou problematiku je to, že oni sami začnou vymýšlet úlohy - ať již jeden pro druhého, nebo, častěji, pro pana učitele. Na způsobu jakým jsou úlohy konstruovány učitel dobře vidí nejen žákův vhled do problematiky, ale i jeho celkovou matematickou vyspělost, kulturu jeho matematického myšlení. Ti žáci, kteří se s prostředím součtových trojúhelníku intimně spřátelí, budou mnohé matematické myšlenky vnímat právě přes toto prostředí. Jako příklad lze uvést porozumění struktuře celých čísel, porozumění pojmu zlomek, porozumění funkční závislosti, nebo porozumění některým kombinatorickým situacím.

2.2. Matematická část

2.2.1. Úvod

Prostředí součtových trojúhelníků jsem znala už ze základní školy. Nepamatuji si na jakýkoliv vztah k těmto úlohám. Nebyly pro mne významné. Vnímala jsem je jako zcela obyčejné úlohy. Když jsem se tímto prostředím začala zajímat kvůli diplomové práci, myslela jsem, že mě nemůže nic překvapit a že na tomto prostředí jistě nenajdu nic zcela závratného. Zkrátka jsem toto prostředí podcenila a vnímala ho jako obyčejné sčítání, odčítání bez vedlejších zákonitostí. A že jsem se mýlila, dokazuji právě v této kapitole, kde popisuji svou vlastní cestu poznávání prostředí součtových trojúhelníků, snažím se charakterizovat problémy s ní spojené a poznatky později aplikovat v experimentech.

2.2.2. Baze v 3-Δ



Začala jsem nejprve zkoumat baze v 3-úrovňovém trojúhelníku, čili 3-Δ. Ten je nejmenší možný, pokud chceme pozorovat vztahy čísel příznačné pro toto prostředí. Otázka tedy zní: Které trojice tvoří bazi? Neorganizovaně jsem kreslila jeden trojúhelník za druhým a náhodně do něj vyznačila nějakou trojici čísel. Vzniklo tak 8 samostatných modelů. S tím bych ale daleko nedošla, ve víceúrovňových trojúhelnících už vůbec ne. Uvědomila jsem si, že nutně potřebuji zvolit systém a na závěr připsala „Musí v tom být systém. Znovu!", podtrhla a začala systematicky. Od pozice a jako prvního čísla hledané baze směrem zleva doprava jsem přiřazovala další dvě čísla (čili abc, abd, abe, abf, …) Byla jsem přesvědčena, že takhle nemohu žádnou bazi minout.

Mé počínání prošlo třemi etapami:

1. V prostředí trojúhelníků se objeví nová otázka. Najít baze.
2. Tvorba několika izolovaných modelů (k číslu a = 3 dopisuji další dvě vhodná čísla) – získání prvních vhledů – potřeba systému.
3. Zvolený systém.

První problém nastal u kombinace acf. Je to baze? Zjistila jsem, že to je baze, ale když jsou čísla a, c, f dána, tak není okamžitě vidět, jak se budou hledat čísla b, d , e. Musí se déle přemýšlet, zkoušet nebo použít jednu neznámou do rovnice, což žák 3. ročníku neumí. Je to tedy úloha implicitní. Jediná v 3- Δ.

Také tady došlo k velkému poznání, že je důležité vymezit obor, pro který úlohu řešíme. Pokud řešíme v oboru přirozených čísel s nulou, nemusí mít tato úloha řešení. V oboru reálných čísel má vždy jedno. Rozhodla jsem se, že se budu soustředit na obor přirozených čísel s nulou.

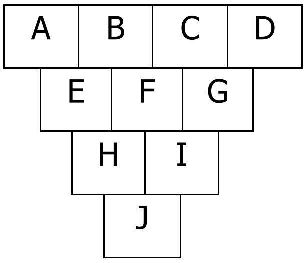
Výsledkem systematického snažení vyjmenovat všechny baze je prvních 10 možností se známým číslem a. Čili trojice abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef. Přecházím na baze, kde nikdy nebude známá a a vždy bude známá na pozici b. Našla jsem 6 bazí: bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef. Následují baze, kde neznám a ani b a vždy znám c. Jsou 3: cde, cdf, cef. A nakonec baze def. Celkem tedy pro 3- Δ existuje 20 bazí (10+6+3+1). Z toho pouze jedna je implicitní.

Komentář:

Chyba: Při konzultaci jsem v této úvaze objevila chybu. Omylem jsem trojici abd považovala za bazi. Jakmile jsem to zjistila, hned mne napadlo, že chyba se bude opakovat i dále. Celkem jsem se dopustila tří chyb. Tři trojice jsem považovala za baze, přestože nebyly. Teď nechápu, jak je možné, že jsem si toho nevšimla hned. Jediným vysvětlením je pro mne situace, kdy jsem problém řešila. Ležela jsem v červenci na louce, slunce pálilo a já se na baze nesoustředila naplno. Jakmile byla při konzultaci tato chyba odhalena, velice mne to překvapilo a byla jsem si jistá, že se ta samá chyba bude opakovat. A taky že ano. Dvakrát. Opravuji tedy své tvrzení z předchozího odstavce. **Pro 3-Δ existuje 17 bazí.**

Vyplývá z toho pro mne ale poučení. Je třeba každý generický model prověřit izolovaným.

2.2.3. Baze v 4-Δ

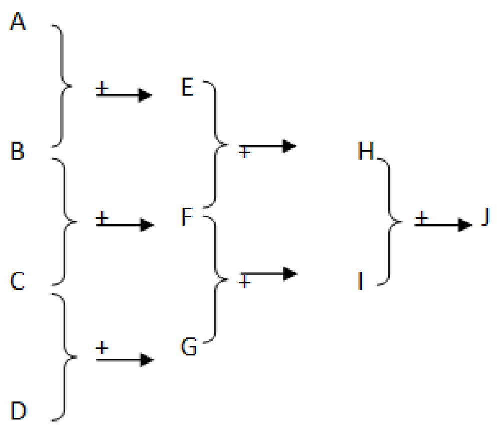


Předpokládám, že každá baze se bude skládat ze 4 čísel. V případě, kdy jich je zadáno méně, úloha má více řešení. Pokud známe více čísel, usnadňujeme práci žákovi – dobré pro začátek práce v tomto prostředí.

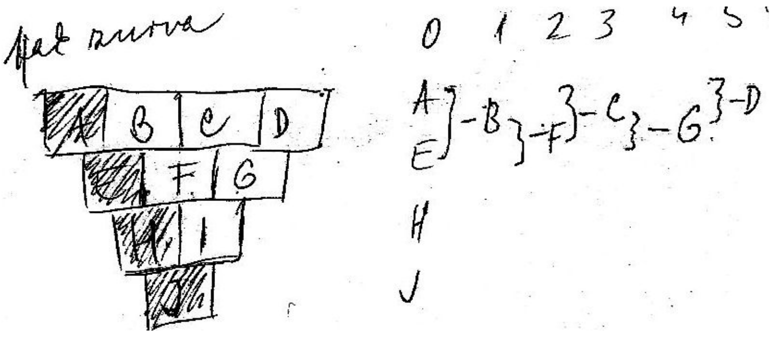
Baze abcd se nabízí hned.

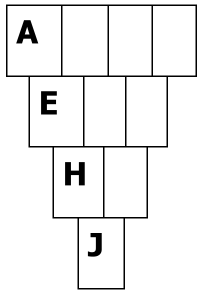
Chyba: Při hledání další jsem ale znejistila, jestli mám u 3-Δ opravdu všechny baze. Není náhodou baze také jenom ab? Nebo ad? Vzápětí zjišťuji, že není a nechápu, jak jsem mohla váhat, když je to přece jasné.

Snažím se o jiný způsob zápisu:



Nejdelší cesta pouze s operací odčítání:





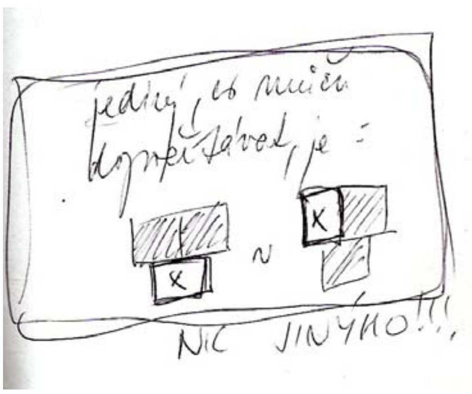
Tento zápis mi ale nevyhovuje, není pro mě přehledný, dále jej nepoužívám. Našla jsem pouze pro zajímavost nejdelší proces se samými minusy. Je to pro bazi aehj. Na konzultaci jsem byla vyzvána, abych našla všechny možné cesty se samými minusy a našla obecný vzorec pro n-Δ. Zde mohu použít poznatků z kombinatoriky a bez většího úskalí jsem po chvíli měla na světě obecný vzorec. Počet bazí, kdy pro výpočet prázdných oken použiji pouze operaci odčítání je : n-Δ = 2 x 3 x 4 x…x n

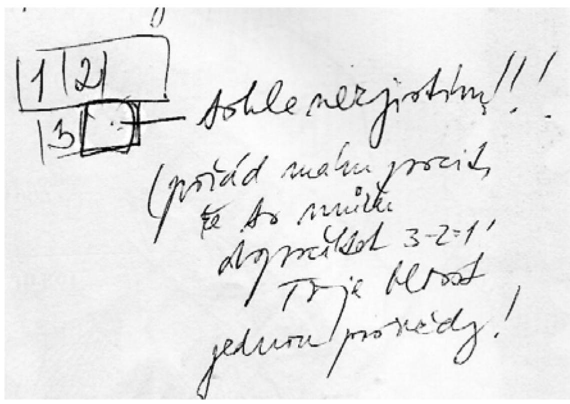
Pro 4-Δ jich je 2x3x4=24 a pro 5-Δ jich je 2x3x4x5=120.

Komentář:

U baze bchi zjišťuji, že dělám velkou chybu, když z b a c dopočítávám kromě f také e a g.

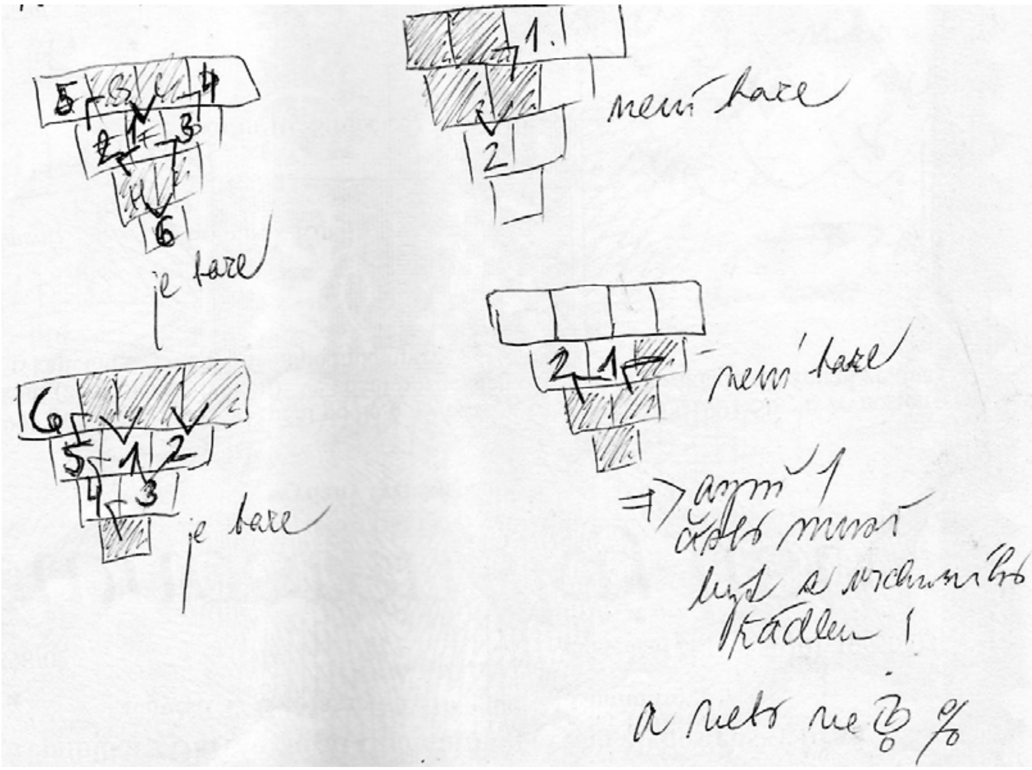
Objev: Jednou provždy si fixuji do hlavy, že toto nedopočítám. Jediné, co mohu dopočítat, jsem si nakreslila takto:



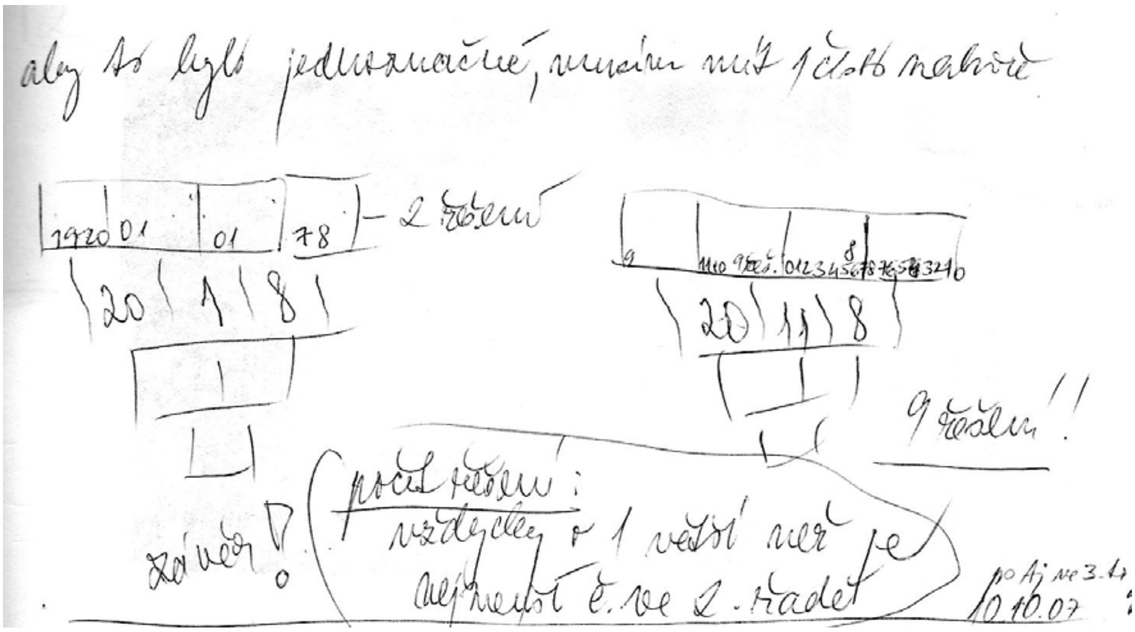


Co tedy baze je a co není? Při hledání odpovědi jsem si nalezla jiný způsob zápisu – pro mě přehlednější a rychlejší. Vyšrafovaná pole jsou známá a čísla znamenají pořadí výpočtů.

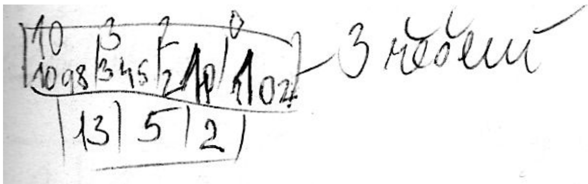
Objev:



Aby úloha měla jen jedno řešení, musím znát alespoň jedno číslo ve vrchním řádku.



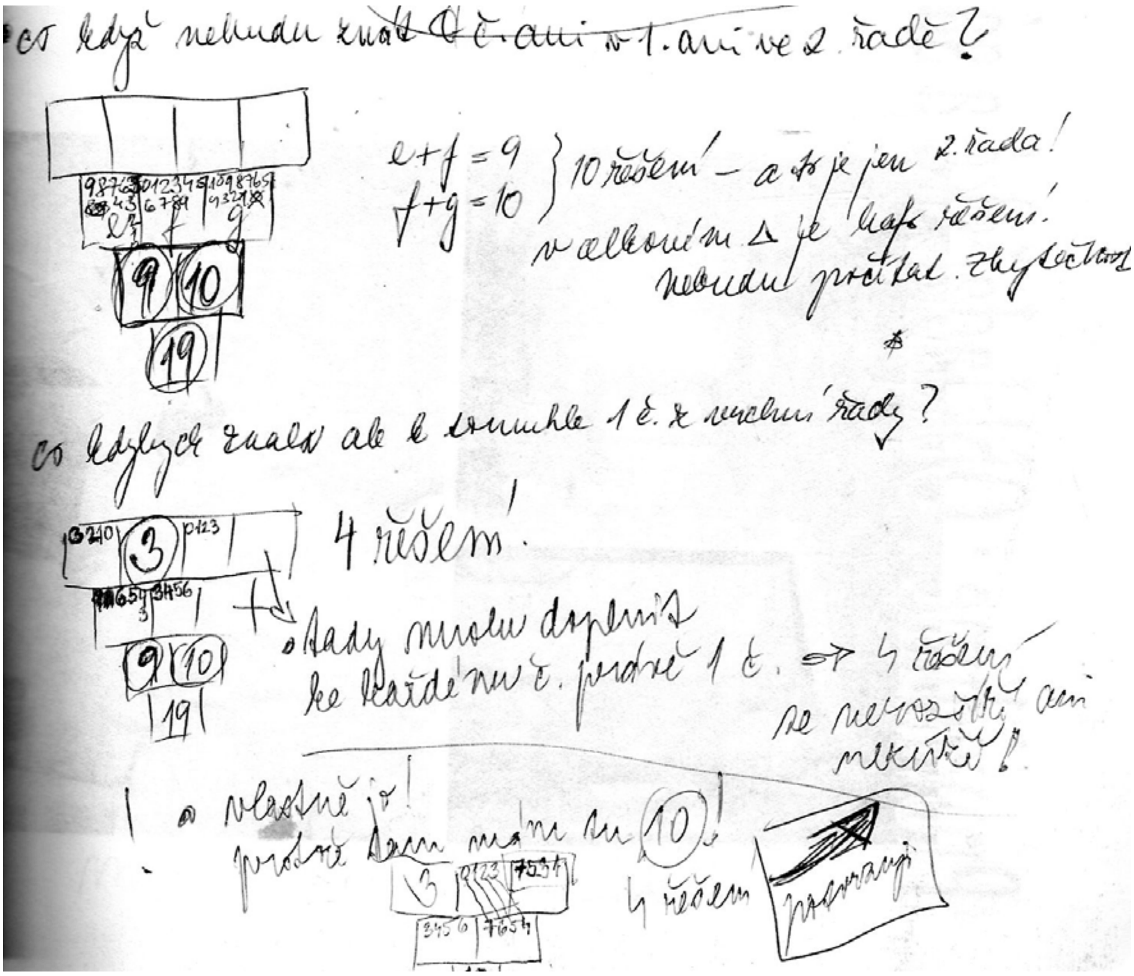
Pro ujištění sama sebe jsem řešila úlohu, kde není zadané ani jedno vrchní číslo:



V 4-Δ v druhém řádku s čísly 20, 1, 8 pak nastávají pro první řádek tyto možnosti: 19, 1, 0, 8 a 20, 0, 1, 7. Ano, potvrdilo se mi tvrzení. Pokud neznám ani jedno číslo ve vrchním řádku, v d ruhém znám všechna a počítám v oboru přirozených čísel **bez nuly**, má úloha **dvě řešení.**

Pokud počítám **s nulou**, má **3 řešení.**

Dále mě zajímalo, jestli je nějaká zákonitost mezi danými čísly ve druhém řádku a počtem řešení. Co když nebudu znát žádné číslo v první ani v druhé řadě? Vymýšlela jsem si tedy vyhraněná zadání a výsledky psala do jednoho políčka:



Objev: 10 řešení jen v druhém řádku… dál jsem nepočítala, ztratila jsem motivaci, není to pro mě důležité. Kdybych znala aspoň jedno číslo v prvním řádku, počet řešení by se omezil. Bylo by o jedno více řešení než je velikost čísla v prvním řádku.

Objev: Počítáme-li v oboru přirozených čísel včetně nuly, počet řešení je vždy o jedno větší než je nejmenší číslo ve druhém řádku.
(Ukázalo se později jako chybné tvrzení – tedy spíše neúplné ***)

Najednou mě začalo trápit, zda jsem neudělala chybu na začátku. Zda opravdu musím znát 4 čísla. Nestačí tři?
Ujištění jsem hledala v konkrétních vymyšlených úlohách. Zde je pár z nich. Způsob zápisu postupu v myšlení jsem zase změnila v dobré víře, že k lepšímu. Psala jsem k doplněným číslům malé číslice, které odpovídají pořadí ve vyplňování.

2	**2**	3 1	
4 2	**5**		
9 3			

Není baze

2 3	2 2	**3**	2 6
4 1	**5**	5 5	
9	10 4		
19			

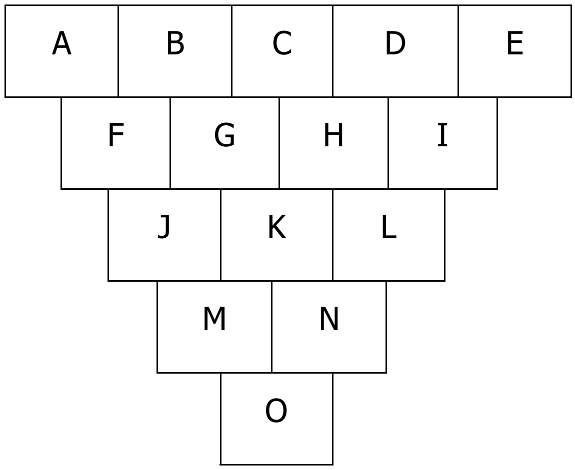
Je baze

4	5 2	**5**	
9 1	**10**		
19			

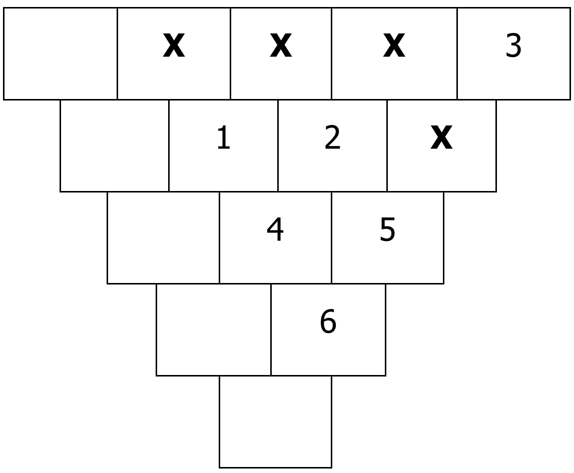
Není baze(5 řešení)

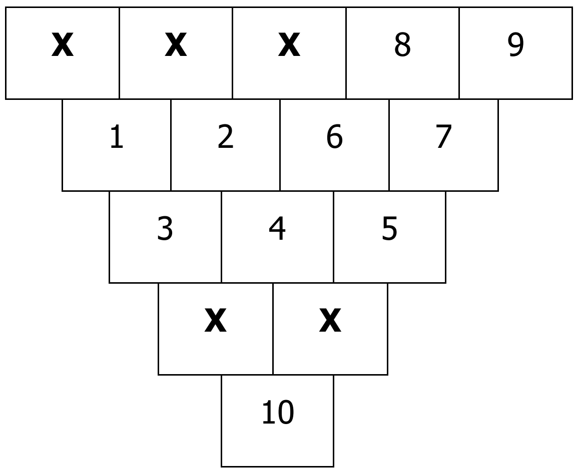
Závěr: Baze v 4-Δ je vždy tvořena ze 4 čísel, z nichž alespoň jedno musí být ve vrchním řádku.

2.2.4. Baze v 5-Δ



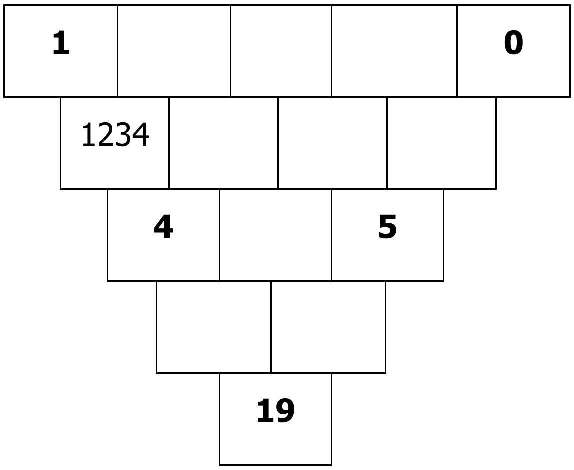
Můj předpoklad je, že baze bude tvořena pěti čísly. X značí zadaná čísla a číslice značí pořadí v jakém byla doplňovaná.





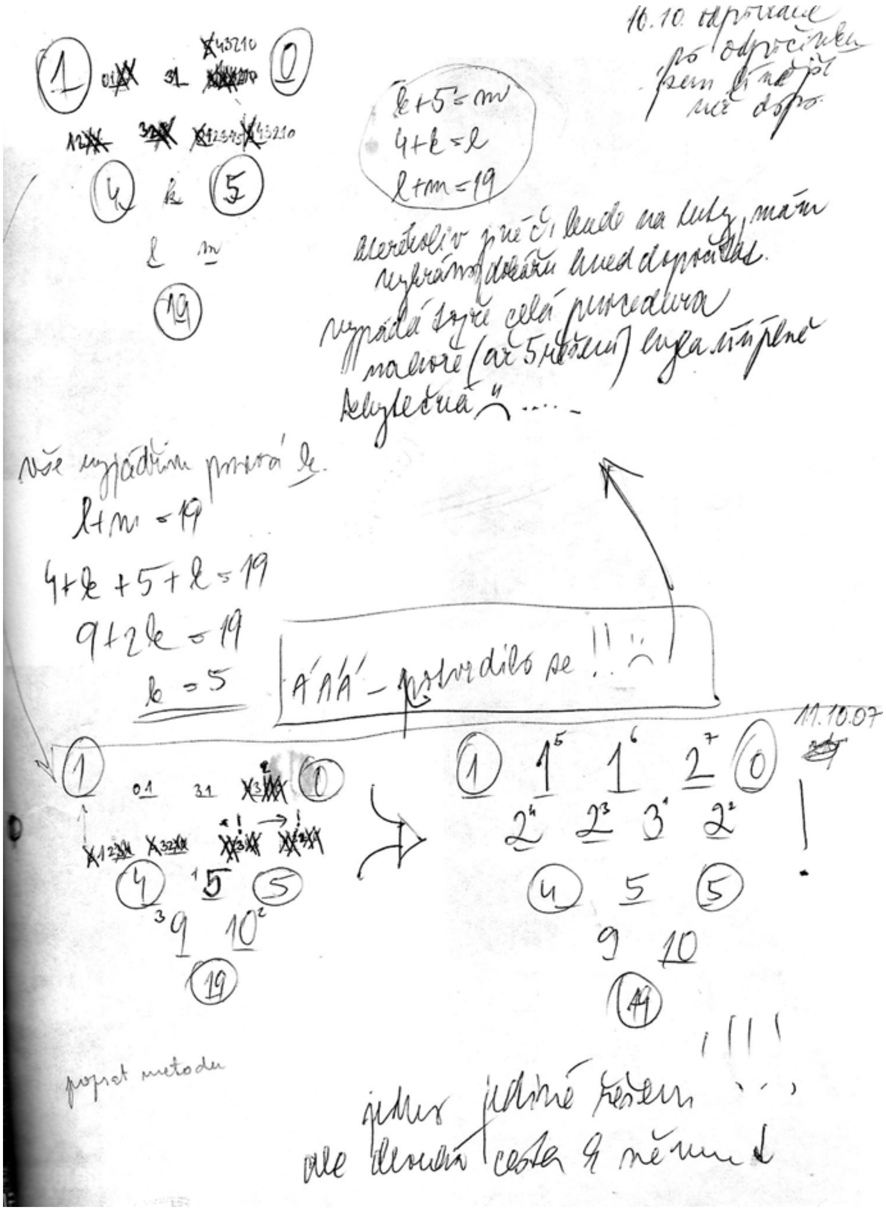
Není baze Je baze

Zajímá mě, jestli opravdu nezáleží na pozici zadaných čísel. Vyberu pozice co nejdále od sebe, jestli to půjde dopočítat… Teď už raději s konkrétními čísly. V této implicitní úloze jsem se potýkala s prozatím nejnáročnějším výpočtem, mnoha problémy a také s chybou.



Začala jsem rozkladem čísla 4, protože je nejmenší.Do políček jsem si psala všechny možnosti. Na pozici F nemůže být 0, protože na pozici A je 1. Když jsem zjistila, že má úloha 4 řešení, dál jsme už nepočítala. Byla jsem v tu chvíli demotivovaná a nevěděla jsem si s úlohou rady.

Když jsem se s úlohou vypořádávala další den, postupovala jsem experimentálně: Na pozice jsem si psala všechny možnosti, které jsem postupně škrtala. Náročné na soustředění a jak se později ukázalo – úplně zbytečné!



Na konzultaci jsem potom dostala tuto reedukační úlohu: Znám ACF. Jak z nich najdu B? Tuto úlohu jsem si přenesla do své tak, že A=4, C=5, F=19 a B=K.

A	B	**C**
F		

Objev: Kterékoliv jedno jediné číslo z dvou vrchních řádků bude jednoznačné, ostatní hned dopočítám. Tady jsem zjistila, že celá procedura (až 5 řešení) byla úplně zbytečná. Vše vyjádřím pomocí K:

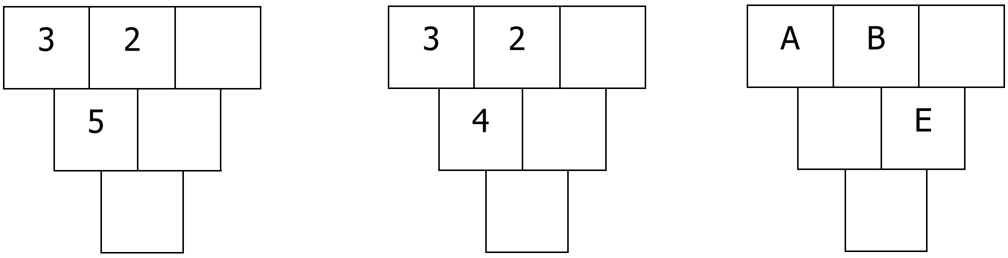
K+5=M	L+M=19
4+K=L	4+K+5+K=19
L+M=19	9+2K=19
	<u>K=5</u>

Když už byla pozice K známá, omezily se možnosti ve vrchních řádcích. Jako první jsem se „proškrtala" k číslu 3 na pozici H. V tu chvíli už úloha byla explicitní.

Finální podoba s čísly podle pořadí doplnění. Jedno jediné řešení, ale dlouhá a bolavá cesta k němu.

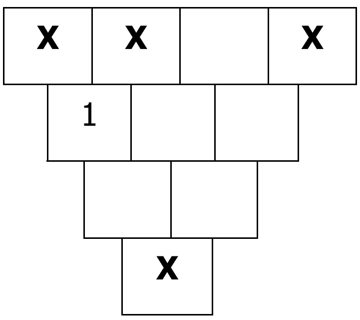
X	5	6	7	**X**
4	3	1	2	
X	**X**	**X**		
X	**X**			
X				

2.2.5. Problém baze z hlediska číselných oborů a vztahy v n-Δ



∞ mnoho řešení v N | žádné řešení v Q | může v No nemít řešení, ale v Z mít řešení

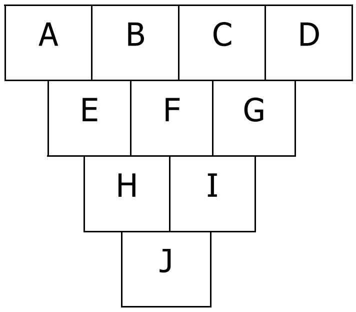
Nyní ale řeším baze pouze z hlediska pozic.
Snažím se najít všechny baze pro 4-Δ, začínám bez systému, takže jsem po chvíli nucena zavést značky, pomocí kterých se v náhodných modelech orientuji, abych na některý nezapomněla.
Za zmínku stojí snad jen pochybnost u této verze, kde tápám, kolik bude mít úloha řešení. Hledám jen takové baze, kde můžu v No najít pouze jedno řešení. Dopouštím se při řešení mnoha chyb. Zde je přesný postup mého myšlenkového pochodu. Z jedné chyby jdu do druhé….
(**X** značí známou a číslice pořadí vyplnění)
***Chyba: Díky této úloze jsem zjistila, že jsem udělala chybu když jsem zjišťovala počet řešení a že moje tvrzení bylo neúplné. Kdyby totiž toto tvrzení platilo, znamenalo by to, že tato úloha má pouze 2 řešení, což je málo. Má jich více. Mohu tedy díky této nalezené chybě upřesnit své tvrzení:



!! Známe-li všechna čísla v druhém řádku !! , v prvním ani jedno a počítáme-li v oboru přirozených čísel včetně nuly, počet řešení je vždy o jedno větší než je nejmenší číslo ve druhém řádku.

Zde počet řešení závisí na tom, kolika způsoby mohu číslo na pozici J rozložit aniž bych porušila vztahy v trojúhelníku. Záleží tedy na velikosti všech známých čísel.

Jen co jsem toto tvrzení chtěla potvrdit na konkrétním příkladu, sesypalo se jak domeček z karet. Opět chyba! Úloha má jediné řešení.



$H=E+F$

$F=B+C$

$I=F+G$

$G=C+D$

$I=J-H$

$F+G=J-H$

$B+C+G=J-H$

$B+C+G=J-E+F$

$B+C+C+D=J-E+B+C$

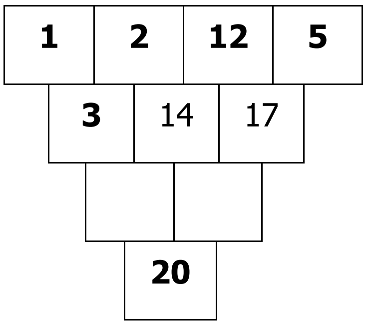
$B+2C+D=J-E+B+C$

$B+C+D=J-E+B$

$C=J-E+B-D-B$

$\underline{\mathbf{C=J-E-D}}$

Na konkrétním příkladu:



$C=J-E-D$

$C=20-3-5$

C=12?????????

Nevychází! Moje tvrzení je opět špatně!!!!!!

Chybu jsem našla rychle. Zapomněla jsem na závorky! Tak tedy znovu:

H=E+F

F=B+C

I=F+G

G=C+D

I=J-H

F+G=J-H

B+C+G=J-H

B+C+G=J-(E+F)

B+C+C+D=J-(E+B+C)

B+2C+D=J-(E+B+C)

B+C+D=J-E-B-C

C=J-E-B-C-B-D

C=J-E-2B-C-D

2C=J-E-2B-D

C=(J-E-2B-D) : 2

Ověření na konkrétním příkladu:

1	**2**	**4**	**5**
3	6	9	
9	15		
20			

C=(20-3-4-5):2

<u>C=4</u>

Zase špatně!!!! Nevychází! Kde je chyba teď? Už mi dochází trpělivost. Co když jen tato úloha nemá řešení? Zkusím ověřit na jiné….Bohužel také bez úspěchu. Vzala jsem to tedy za jiný konec a využila poznatku o závislosti ADFJ. Když znám ADJ, snadno dopočítám F. Jakmile znám F, dopočítám celý trojúhelník.

20 -1-5= 14, 14:3 není N, to znamená, že tato úloha nemá v oboru N řešení.

Zkusím na jiné úloze, o které vím, že řešení má.

42-3=39 39:3=13

2	**5**	8	**1**
7	13	9	
20	22		
42			

Výborně! Konečně!! Úloha má tedy jediné řešení.

To znamená, že je to baze!

Toto pravidlo o závislosti v ADFJ v 4-Δ pro mě znamenalo dlouhou a bolestivou cestu. Dlouho jsem totiž hledala vztah čísel v 5-Δ a troufám si říci, že tam žádný vztah AEKO není. Protože ale úkol zněl jasně, lámala jsem si hlavu a ztrácela sebedůvěru. Až později jsem si všimla, že 4-Δ má také jedno číslo „uprostřed" a vysvitla ve mně naděje, že jsem třeba špatně pochopila zadání. Zkusila jsem tedy najít vztah v 4-Δ a našla jsem ho. Tím pro mě byl úkol splněn a jsem si jistá, že jsem si špatně vyložila zadání. Spíše jsem si ho špatně pamatovala. Když jsem totiž tento problém začala řešit, neměla jsem u sebe zadání a pátrala jsem v paměti. Věděla jsem, že trojúhelník musí mít jedno z políček „uprostřed" a nenapadlo mě, že ho má i 4-Δ. Tím byl problém vyřešen. Že jsem se u toho ale natrápila. Nejtěžší pro mě ale bylo vytvořit takovou kaskádu úloh, která by umožňovala žákům na toto pravidlo přijít. Já jsem věděla, že tam vztah bude, protože jsem dostala zadání úkolu jasně : „Najdi vztah mezi pozicemi ADFJ", ale dítě toto vědět nebude a já ho musím správně zvolenými úlohami navézt tak, aby zákonitost odhalil sám. Sestavila jsem tedy kaskádu, ale nebyla jsem o ní zdaleka přesvědčená. Vyzkoušela jsem ji na bratrovi a jeho přítelkyni a kaskáda se ukázala být nevyhovující. Hledala jsem tedy jiné úlohy, více navádějící. Bylo to pro mne ale velice obtížné. Neuměla jsem se dobře vžít do situace, že o tom pravidlu nevím. Nedokázala jsem se od toho oprostit.

Stejně obtížné pro mě bylo vyřešit úkol kvůli tomu, že došlo k nedorozumění při komunikaci. Já jsem si potom lámala hlavu a nakonec jsem zjistila, že úplně zbytečně. Hledala jsem všechna implicitní zadání úloh pro 3-Δ, 4-Δ, 5-Δ, … A to se ukázalo být téměř nemožné. Pro 3-Δ a 4-Δ to jde, ale pro 5-Δ je asi přes 200 možností, každá se musí vypisovat zvlášť, protože na to neexistuje žádný kombinatorický vzorec. Zajímavé je, že o smyslu zadání jsem začala pochybovat až po dvou dnech snažení. Nicméně jsem v práci pokračovala. Sice nevedla k žádnému výsledku, ale přinesla mi několik poznatků:

3-Δ

Existuje jediné implicitní zadání : ACF

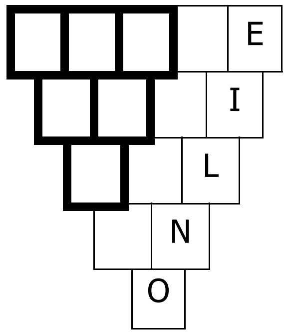
4-Δ

Aby úloha byla implicitní s jediným možným řešením, nesmí spolu sousedit více než 2 čísla. Může AB, AE, ale ne zároveň s GF, GI, IJ nebo HI. Když znám AB, nebudu zadávat jako jedno ze 4 čísel E. To není plnohodnotné, když jeho nalezení je bezprostředně dáno čísly na pozicích AB.

V 4-Δ existuje 26 implicitních zadání.

5-Δ

Jakákoliv 3 čísla budu znát ve vyznačeném trojúhelníku, musím pak znát ještě jedno číslo a to na jedné z těchto pozic: EILNO



Abych získala nadhled pro 4-Δ, musela jsem se chvíli trápit ve větších trojúhelnících. Potom mi připadal 4-Δ mnohem přehlednější a jasnější než předtím.

Aby úloha měla jediné řešení, musím znát alespoň jedno číslo z vrchního řádku.

3. Experimenty

3.1. Experiment Ivetka

3.1.1. Úvod

Experiment jsem provedla osobně, 9.4.08, kamerou natáčela moje spolužačka a kamarádka Jana Herautová. Pro žáka 2.ročníku jsme měla připraveno několik listů s úlohami (viz příloha). Experiment probíhal na ZŠ v Jindřišské ulici v Praze, kde jsme s homogenní variantou připravovali matematický kroužek pro druháky. Jedno dítě jsem si vzala do jiné místnosti, takže přišlo o program tam. Vybrala jsem nejprve Janičku, která ale nebyla pro experiment vhodná. Rušila ji kamera a předváděla se před ní. Nepodařilo se mi ji dostatečně namotivovat. Nevypadlo z ní nic, co bych mohla použít. Jediné, čím mě obohatila bylo to, že po pěti minutách mého snažení a její ignorace přinesla svůj pracovní sešit z matematiky a ukazovala mi v něm samé jedničky. Domnívám se tedy, že její ignorace nebyla v nezájmu o matematiku, ale nejspíše momentálními podmínkami, prostředím. Po deseti minutách jsem experiment s ní vzdala a šla pro jiného žáka. Vybrala jsem Ivetku a udělala jsem dobře. Ivetka je velmi bystrá a hlavně u experimentu mluvila, což pro mne jako pro experimentátora je klíčové. Obě jsme byly v dobré náladě, s Ivetkou jsem před experimentem prohodila pár slov, abych navodila důvěrnou atmosféru. Ivetka je komunikativní a je mi sympatická.

Protokol experimentu viz. příloha.

3.1.2. Analýza

Analyzuji tu část experimentu, které se věnuji také ve zpracované video nahrávce. Jedná se o část experimentu v časovém úseku od 03:45 do 09:05.

Použiji také jiné části a to za účelem objasnění některých jevů, konkrétně tyto časové úseky experimentu: 10:50-10:55 a 12:12-12:16.

Protokol ke 4.úloze:

Čtvrtá úloha přichází na řadu v dobré náladě, po dobré motivaci, pochvale, obě se smějeme, atmosféra je důvěrná a příjemná. Je to první úloha s roztroušeným vstupem. Do této chvíle si vystačila se sčítáním.

03:45 Předkládám před Ivetku 4.úlohu.

I1: čtyři plus tři je sedm, tři plus ss ss…..(přemýšlí 24s) Co je dvanáctka? Sedm plus….(5s ticho) Pět. Ne! (5 s ticho) Jo! Pětka.

Ex 1: Jak jsi na to přišla?

I2: (sebejistě) Sedm plus pět je dvanáct. Já jsem si nějak spočítala, že sedm plus tři je deset a plus dva je dvanáct. …a to je dva.

Ex2: A to jak jsi přišla na dvojku?

I3: Tři plus dva je pět. (sebejistě)

Ex3: (nevěděla jsem, jak na ni přišla) A tu dvojku jsi tam neměla, tak sis nemohla říct tři plus dva je pět. Tak jak jsi na ni přišla?

I4: Protože pět minus tři je dva, takže tam napíšu dvojku. (přitom tužkou ukazuje na ta čísla)

Analýza projevů I. ve 4. úloze:

03:48 Z první chvíle můžeme poznat, že I. řeší úlohu procesuálně. Ukazuje si tužkou na čísla, která jsou vstupní: 4+3=7. Kdyby řešila konceptuálně, viděla by hned, že jako první musí počítat pozici c. Soustředila by se na ta okna, která jsou potřeba vypočítat.

Její upovídanost je vnější projev, který má 2 vnitřní zákonitosti:

1: Nemá strach z neúspěchu.

2: Kognitivní – pro mnohé (i pro I.) je velkou pomocí, když své myšlení artikulují (graficky nebo akusticky). Odhalují tak své možné chyby.

03:52 Pro lepší orientaci označíme číslo na pozici c písmenem A a na pozici e písmenem B. Přemýšlí, jaké číslo by mohlo být A. Oči jí směřují vpravo nahoru, aby ji čísla na papíře nerušila. Rychlý kmitavý pohyb tužkou a úsměv na tváři nám napovídá, že v jejím myšlení dochází k posunu z procesuálního na konceptuální. V duchu si zkouší dosazovat A, dopočítat B a zkontrolovat. Nevychází jí to. Zajímavé a důležité je to, že nesetrvává v metodě pokus-omyl, ale hledá příčinu selhání. Tzn. Zjištění, že její pokusy krachují na tom, že B+7 není 12, ji vede ke změně strategie. Z procesuální na konceptuální.

Když doplnila pětku, zeptala jsem se jí, jak na to přišla. Zajímalo mne, zda svoje myšlení bude umět vyjádřit. Zda počítala odečítáním nebo dopočítáváním. Jak to zformuluje? Ona sebejistě odpovídá, že sedm plus pět je dvanáct. Mezi řádky čtu její překvapení, že se na to ptám, když je to přece jasné. Její gesta a slovní projev mi pomáhají chápat její postup. Počítala v hlavě 7 a kolik je do 12? 5. Zároveň kontroluje, jestli to vyjde s A. Potom počítá 3 a kolik je 5? Nechápala jsem ale její hlášku: „ Sedm plus tři je deset a plus dva je dvanáct." Moje domněnka je, že aby dopočítala, kolik ji schází do 12, musela jít přes desítku, což ve škole řeší dopočítáním do desítky a následným přičtením zbytku. Myslím, že počítala asi takto: „Do desítky potřebuji tři, do dvanácti ještě dva, takže sečtu dva plus tři a mám pětku. Kontrola: Sedm plus pět je dvanáct. Ano, má to dobře. Na B je určitě pětka." Stejným postupem došla i k A. Už měla zkušenost s výpočtem B a číslo dvě měla už v představě, takže pro ni toto nebyl problém. Navíc už pracovala s malými čísly. Rychle proto doplnila za A dvojku. Tato dvojka ale neměla s předchozí dvojkou nic společného, což jsem nepochopila. Proto jsem se jí znovu zeptala, jak na to přišla. Odpověděla stejně jako předtím, akorát teď už jsem se s její odpovědí nespokojila. Chci to vysvětlit jinak, pořádně. I. nechápe, proč se jí ptám, když je to jasné a už mi to řekla. Došlo mezi námi k nedorozumění. Potom jsem dostala nečekanou odpověď: „Pět MÍNUS tři je dva." To mě překvapilo, protože ještě do této chvíle nepoužila

slovo „mínus", ale dopočítávala. Myslím si, že jde o školní deformaci. Přemýšlela, co CHCI slyšet. Použila formulaci, se kterou by byla spokojená paní učitelka. Zřejmě je na taková odůvodnění zvyklá ze školy.
Je ale znát, že chápe strukturu trojúhelníku, protože počítala odspoda a správně. Přešla od procesuálního ke konceptuálnímu postupu.
05:00 konec této úlohy

Protokol k 5.úloze:

Ivetku jsem mezi úlohami pochválila a povzbudila. Čekala ji totiž kombinatorická úloha s neúplným vstupem.
05:05 Předkládám před Ivetku papír s 5.úlohou. (Že má úloha více řešení, jsem jí neřekla, což se později ukázalo jako velká chyba a příčina Ivetčiny únavy.)
(30 s Ivetka přemýšlí)
05:34 **Ex4**: Co tě napadá?
I5: Teď jsem myslela jako…..mmmm…teď jsem to zapomněla….mmmmm devět plus dva...ne, to by se nevešlo. (5s ticha) Sedm plus dva je devět. No a teď nemůžu přijít na to, kolik by to bylo z tý devítky. (5 s ticho)
Dva a třeba...nevim. To je těžký! Tady by mohlo být deset ještě. Tady je dvojka. Ale to by fakt nešlo, co? (ukazuje na a, c) vepředu….nula. (Uchychtne se, 9s ještě kouká na úlohu, přemýšlí, tužkou si ukazuje na jednotlivá okna a pak říká, co píše) Osm, deset,… (nulu a dvojku píše už bez mluvení)
6:52 Ex5: To je zvláštní, protože já když jsem to počítala, tak jsem tady měla sedmičku.
I6: Sedmičku, jo??
Ex6:Tak jsem to měla špatně?
I7: No Já nevim, mně to takhle přišlo, no.
Ex7: Jo, ono Ti to takhle vychází. Ale jestli by to nešlo nějak jinak, protože mně to taky vycházelo.

I8: Sedm a dva je devět, dva a jedna je tři. To by taky šlo takhle, že sedm plus dva je devět, dva plus jedna je tři, devět plus tři je dvanáct. Mně to ale takhle napadlo.

Ex8: Takže to by taky šlo. Je to taky správně, jak jsem to počítala já?

I9: Hm.

Ex9 : A šlo by to teda ještě nějak jinak vypočítat?

I10: Ještě jinak? (Otočím papír, I. vykulí oči a podle mé instrukce si dopíše 2 a 12 do oken, 40s přemýšlí. Pak píše čísla v tomto pořadí: 5, 3, 7 a 5.) Takhle. (bez emocí)

Ex10: Jo. Taky to jde. (pochvalně) A ještě jinak?

I11: To je těžký!!

Ex11: No, ale jde Ti to, Ivetko, jsi šikovná! Už jsi našla tři!

I12 : (Automaticky bez mého upozorňování dopisuje do dalšího trojúhelníku čísla 2 a 12. Po 20ti s ticha, kdy I. koukala chvíli do papíru a chvíli vpravo nahoru.) Mě nic nenapadá. (nešťastně, unaveně)

Analýza projevů I. v 5. úloze:

Náročnost prvních okamžiků této úlohy tkví v tom, že je úplně jiného typu. Najednou se I. nemá kde „odpíchnout". Proto ta dlouhá pomlka. Přerušila jsem ji, protože jsem se bála, jestli vůbec přemýšlí (nemanipulovala tužkou nad čísly jako předtím). Udělala jsem ale chybu – skočila jsem jí do myšlenky. Této chyby se dopouštím při experimentech opakovaně. Kladu si tak zásadní otázku: „Jak mám poznat, zda přemýšlí nebo lelkuje?"

Na tomto základním jevu se odehrávají dvě myšlenky.

1. Diagnostikovat psychické pochody Ivetky na základě její mimiky a pohybů (pustím si několikrát za sebou video a porovnám chvíle, kdy lelkuje s tímto okamžikem). Má smysl při opakované práci s jedním dítětem, poznatky mohu aplikovat při další práci.

2. Sama musím propracovat lépe neverbální komunikační signály. Pohybem dát najevo svou netrpělivost. Lze využít okamžitě a přirozeně.
Úloha přesahuje její paměť a typ úlohy zvyšuje náročnost. Krátkodobá paměť pracuje impulsivně, existují v ní iradiační chvíle – opak soustředění. Iradiace je specifický projev únavy. Energie byla vynaložena v předchozí úloze také nedorozuměním, takže momentálně schází.
Můžeme se domnívat, že v hlavě jí nakonec proběhne tato myšlenka metakognitivního charakteru: „Možná tam může být něco jiného, ale určitě já to mám správně" a rozjede se.
Na mé přerušení Ivetka naštěstí rychle reaguje, ale po chvíli řekne : "Teď jsem to zapomněla." To vnímám jako znamení toho, že I. vše počítá v hlavě, nic nepíše, dokud si není jistá. V tomto případě její kapacita krátkodobé paměti zřejmě nestačila.
Zjevně počítá nejprve levé křídlo úlohy a teprve potom přizpůsobuje pravé. Čili postup jako při čtení. Ivetka má už do prostředí získaný částečný vhled, proto stále přemýšlí a neztrácí víru v řešení. Neříká, že to nejde, jen že je to těžké. Z jejího výrazu obličeje ve chvíli, kdy ji napadlo dosadit nulu, usuzuji, že nulu považuje za specifické číslo. Neváhá ji ale použít.
Než začne psát, vše si ještě jednou v hlavě přepočítá, jestli to opravdu vyjde. Opět pozorujeme Ivetčinu dobrou paměť. Aritmetika Ivetce nedělá problémy, veškerá energie je vložena do strategie. Nakonec napíše čísla a už si je nemusí kontrolovat, ví, že to je správně.
Když ji ale řeknu, že mně to vyšlo jinak, nezpochybní svoje řešení, ale přepočítá to moje. V této chvíli je velice zajímavé, že po většinu času kouká na mě. Nikoliv do papíru. Opět svědčí o její výborné krátkodobé paměti. Poznatek, že i moje varianta je správná, ji moc nepřekvapuje.
Ve chvíli, kdy po ní chci další řešení, je znát, že to Ivetku nebaví. Statečně se ale pustí do hledání dalšího řešení. Bylo by lepší, kdyby to své původní řešení měla před sebou. Měla jsem prázdné trojúhelníky napsat na jiný papír. Ponaučení pro příště.

Než začne psát, střídavě kouká do papíru, střídavě vpravo nahoru, aby ji čísla na papíře nerušila, protože zadání už měla v paměti.

Tužkou manipuluje nad papírem, ukazuje na jednotlivá okna, z čehož můžeme usuzovat, co právě v hlavě počítá. Vše chová v paměti a až když si je jistá, že to vyjde, začne psát.

Pětku píše jako první velmi nejistě. Začne ji psát pomalu a po prvním tahu se zastaví a dopíše ji jen ve vzduchu. Po 10ti s píše velmi slabounce a nejistě sedmičku a pětku v okně e. Pak docela jistě dopisuje pětku v okně a. Trojku v okně c píše jako poslední, rychle a jistě. Domnívám se (soudě také podle situace v čase 12:12-12:16), že byla oslabena paměť únavou. A jak začala psát pětku (do okna a), znejistila, jestli si to pamatuje dobře a raději se zastavila a doplnila čísla v oknech d, e slabě, protože si nebyla jistá, že je to správně. Když měla napsanou sedmičku a pětku v oknech d, e slabě, překontrolovala si, jestli to vyjde celé a pak už s jistotou dopsala původní nedopsanou pětku v okně a. Trojku v okně c napsala už bez počítání, tu měla v paměti. Jakmile ji dopsala, byla s úlohou hotová, už ji nekontrolovala, byla si jistá. Přesto výsledek neohlašuje s nadšením. Je to nejspíše z nejistoty, obav, co bude dál. Vidí před sebou další nevyplněné trojúhelníky, což v ní budí obavy. Při počítání dalšího řešení se značně zpomalilo tempo a i paměť je výrazně horší. Našla řešení zrcadlově otočené k předchozímu. Přesto, že čísla byla stejná, dlouho jí trvalo, než úlohu zpracovala. Zajímavé je, že ani nevidí, že ta dvě řešení jsou podobná a je si správností posledního řešení velice nejistá – viz 10:50-10:55. Její řešitelský proces postrádá konceptuální vidění (nevidí zrcadlové otočení). Jediným důvodem byla únava, která měla několik příčin. Není zvyklá na úlohy s více řešeními. Velice ji to překvapuje. Je zřejmé, že ve škole s kombinatorickými úlohami nepracují. Kdybychom chtěli tento její nedostatek odstranit, procvičovali bychom s I. kombinatorické úlohy. Hlavním problémem ale bylo moje vedení. Kdybych jí na začátku řekla, že má úloha více řešení, ať jich najde co nejvíce, bylo by to určitě lepší. Takto se jí po každé ptám „šlo by to jinak?" a to Ivetku unavuje, protože je tento způsob zdlouhavý a postrádá spád. Po nalezení třetího řešení je vyčerpaná a moje nabídka, zda chce už skončit, byla vysvobozením a s radostí ji využila. Tomuto problému by přitom šlo zabránit jednoduše. Předcházela by např. tato úloha: Ze dvou modrých a dvou červených kostek postav věž. I. by postavila věž a já bych řekla: „Ano, dobře. Takže červená, modrá, modrá, červená. Jde to i jinak?" Tato úloha by Ivetku nezatížila. Cílem není úlohu dořešit, ale získat zkušenost. Zkoušela by pouze jinak stavět věž a já bych na závěr řekla: „ Vidíš, tak to v matematice je. Úloha může mít i 2, 3, 4, …10 řešení. Kolik řešení má tato úloha?" A teprve v tuto chvíli bych před ní předložila 5. úlohu. Problémy s ní spojené, by neměly nastat.

3.2. Experiment Ivan

3.2.1. Úvod

Experiment jsem provedla osobně, 9.4.08, kamerou natáčela moje spolužačka a kamarádka Sýsa Chaloupková. Experiment probíhal na ZŠ v Jindřišské ulici v Praze, kde jsme s homogenní variantou připravovali matematický kroužek pro druháky. Jedno dítě jsem si vzala do jiné místnosti, takže přišlo o program kroužku. Pro Honzíka, bystrého žáka 2.ročníku, jsem měla připraveno několik listů s úlohami (viz příloha). Honzík chyběl. Proto jsem se rozhodla zrealizovat experiment s Ivanem, jeho spolužákem. Moje předpoklady se nezměnily. Možná jsem byla trochu skeptičtější co se týče úlohy č.5. Ivana jsem namotivovala, takže byl šťastný, že může počítat moje příklady zrovna on, to na něm bylo vidět. A byl odhodlaný zdolat i tu nejtěžší úlohu. Půda pro experiment připravena dobře.

(Úlohy jsem připravovala pro Honzíka, tedy pro konkrétního chlapce, s kterým jsem už jednou na matematickém kroužku pracovala individuálně, protože byl oproti ostatním dětem napřed a potřeboval individuální péči. Prožili jsme spolu jednu hodinu matematiky, kdy já jsem ho motivovala, aby měl stále chuť počítat dál a dál, ikdyž to převyšovalo jeho samotného. Honzíka hodina velice bavila, na moje přání přemýšlel nahlas a ani nechtěl skončit. Rozhodla jsem se proto na tomto základě, že experiment na součtové trojúhelníky zrealizuji s Honzíkem. Na svůj věk je velmi bystrý, trpělivý a rychlý. Proto jsou také tyto úlohy pro „běžného" druháka těžké a nejspíš by ani neměl motivaci je řešit. Obzvláště úlohy č. 3 a 5. Ivan je Honzíkův kamarád, který se k nám v průběhu hodiny přidal. Přestože jeho myšlenkové procesy byly o poznání pomalejší, stále je vysoko nad průměrem třídy.)

3.2.2. Předpoklady

1) s prostředím se velmi rychle seznámí. Všechny úlohy v první fázi budou pro něj explicitní. Jediným oříškem u každé úlohy je zjistit, které číslo mohu doplnit jako první.

2) Zvládne (troufne si) vyplnit první políčko na nejisto? Bude ochotný riskovat nebo řekne, žeto nejde? Přijde na to, že může být více řešení? Předpokládám, že č. 12 rozloží na nějaká čísla (pokus- omyl), která pak bude rozdělovat na 2 a (něco). Dokud mu to nebude pasovat, bude rozkládat č. 12.

Řeknu mu o více řešení. Na kolik jich přijde? Tak na 2?

3) Ovlivní 4. úroveň trojúhelníka odhodlání úlohu počítat?

Opět předpokládám, že úlohu bude řešit metodou pokus- omyl rozkládáním č. 12, s kterým už bude ít zkušenost z předchozí úlohy. To pak bude napasovávat na trojku, to pak na dvojku.Ostatní dopočítá explicitně.Přijde na více řešení? Napadne ho vůbec, že to může mít více řešení – po zkušenosti z předchozí úlohy?

4) Tato úloha pro něj bude velmi jedoduchá. Předpokládám, že nahoru vyplní samé jedničky a pak dopočítá rychle celou úlohu. Složitostí sem úloha nepatří, ale zařadila jsem ji sem schválně rpo spestření.

5) Na první pohled nejjednodušší úloha – jakobychom se vrátili na začátek. Bude to komentovat? Předpokládám, že řekne, že to nemá řešení.Ale možná mě Honzík překvapí. Jsem sama velmi zvědavá.

<u>Příprava experimentu:</u>

Na začátek jsem si kladla za cíl Ivana hodně namotivovat! Můj experiment je dlouhý a náročný, proto motivace bude jedinou hnací silou. Ivan by si měl připadat důležitě, že je vybrán právě on a zároveň by neměl být stresován touto pro něj nezvyklou situací. Je nutné, aby věděl, že to dělá pro mě aže nejde o zkoušení jeho vědomostí. Že je pro mne nejdůležitější postup.

Tento experiment byl můj první v životě. Každou úlohu jsem připravila na samostatný papír, aby ostatní plohy Ivana nerozptylovaly.

3.2.3. Protokol, evidence, komentáře experimentu

Úloha 1a) Ukázala jsem mu 1. papír s úlohami.

Ex01: „Co myslíš, Ivane? Jak tyto úlohy asi fungují? Jaká čísla tady doplníme?"

I01 : „Čtyři, pět, šest" (prstem ukázal na <u>d, e, f</u> pozice, přestože na pozici <u>d</u> už trojka napsaná byla – zajímavé)

Ex02: „Vždyť tady už je ale trojka napsaná" (prstem jsem ukazovala na jednotlivé pozice popořadě: <u>a, b, d</u> ; <u>b, c, e</u> ; <u>d, e, f</u> pomalu, s pomlkami na výsledném čísle)

I02: „Dva plus tři je pět?"

Ex03: „Noo, skvělé!"

I03: „Tři plus pět je osm."

Ex04: „Přesně tak, Ivane! Dobrý!"

Komentář: Stejně ale řešil špatně. Sečetl 2+3 na pozicích b a d, což se ale ukázalo až při úloze b…

Ex05: (Ještě jednou jsem po něm zopakovala, jak tedy počítal) „Jedna plus dva je tři, dva plus tři je pět a tři plus pět je osm. Správně, sedí to, tak pokračujeme dál, jo?"

Úloha 1b) Tady pro mě nastalo překvapení.

I04: (Počítal 10+15 =25, 15+25 =40)

Ex06: (reagovala jsem spontánně, překvapeně, s úsměvem a hned) „Proč?!?"

I05: „No, patnáct plus dvacet pět rovná se čtyřicet."

Ex07: „A proč patnáct plus dvacet pět?"

I06: (Ukázal prstem na ta čísla, která sčítal (b+d=e))

Ex08: „Ukaž mi ještě jednou, jak jsi počítal v úloze a?"

I07: Ivan ukázal opravdu špatně. Ukázal na pozice b+d=e.

Evidence 01:

Ivan počítal 10+15 =25, 15+25 =40. Když jsem po něm chtěla vysvětlení, ukázal na ta čísla, která sčítal špatně. Ukázal na pozice b+d=e. Když jsem to samé chtěla ukázat u úlohy a), chyba se potvrdila. Byla stejná jako v úloze b). Jak se ukázalo, úloha a nebyla pro začítek vůbec vhodná. Opakovala se číslice 3 a to Ivana zmátlo. Příště musím vymyslet takovou úlohu, aby každé číslo bylo jiné a nešla ta čísla po sobě, aby v tom neviděl jiné pravidlo a neodvádělo ho to na špatnou cestu.

Komentář 01:

Řešila jsem, jak mu to mám vysvětlit, aby pochopil, zároveň, abychom tím zbytečně neztráceli čas. Co je pro mě důležitější, aby na pravidlo přišel sám nebo abychom se co nejrychleji dostali k těžším úlohám. Zvítězilo druhé, proto jsem mu řekla sama, jak to je správně.

Ivanova pozornost byla upnutá na číslo 25 nejen proto, že to v předchozí úloze vyšlo i s tímto špatným postupem, ale zřejmě také proto, že to číslo právě doplnil, sám na něj přišel, proto ho chtěl využít i v následujících výpočtech. Upnul se na něj, protože to byl jeho „produkt".

Uvědomila jsem si zákeřnost a nedomyšlenost této úlohy, která jako první má být vzorová, jednoduchá, snadno pochopitelná a bez jakýchkoliv záludností. Nakonec jsem nedorozumění řešila takto: „No, Ivane, to jsem ale taky, viď? Hned na začátek jsem Ti dala takovou ošklivou úlohu, na které to moc nejde pochopit, viď?:) Tak koukej." Ukazovala jsem při tom na ta správná čísla v tomto pořadí beze slov: 2+3=5, 3+5=8 (= gestikulační náznak). Ivan je šikovný a rychle se přes nedorozumění překlenul, kývnul hlavou na znamení porozumění a mohli jsme pokračovat v úloze b.

I08: „Takže patnáct plus jedna rovná se šestnáct, šestnáct plus dvacet pět…."(chvíli přemýšlel) „Padesát jedna."

Ex09: „Jo? Padesát jedna?"

I09: „No!" (s přesvědčením)

Ex10: „Šestnáct plus dvacet pět je padesát jedna?"

I10: „Čtyřicet jedna!"

Ex11: (Pochválila jsem ho.)

Úloha 1c)

Už si bohužel přesně nepamatuji, v jakém pořadí číslice napsal. Ale v kontextu s následujícími úlohami s největší pravděpodobností nejprve napsal 2. Vždycky počítal odshora. (proto pro něj byly úlohy často implicitní). Nejprve chtěl zjistit číslo na pozici c. To je ale náročnější. Musel si v hlavě počítat mezisoučty. Co musím dosadit, abych na e měl pětku?

Pochválila jsem ho, že už to chápe a že je šikovný.

d) Nejprve napsal šestku, pak jedničku, potom až 7.

I11: „Tady musí být šestka!"

Ex12: „Proč?"

I12: „Protože jedna plus šest je sedm."

e) Zkusmo dosazoval první dvě čísla nahlas ale bez psaní a až pak vypočítal 8 – nakonec!

I13: „Pět plus čtyři?? Může?"

Ex13: „To záleží, aby Ti to vyšlo tady.“ (prstem jsem ukázala na pozice <u>b, c, e, </u>f)

I14: „Takže devět plus nula, jedna a osm?“

Ex14: „Já nevím, zkus.“

I15: „NE!!! Takže nula a devět? Ne! To je 15…..hmmmmmmm……,..,.. Osm a jedna JO!!! Protože jedna a sedm je osm a osm a devět je sedmnáct.“

<u>Evidence02:</u>

Ivan dosazuje jako první čísla, která chybí v horním řádku. A to i přesto, že tím se pro něj stává úloha implicitní a musí si v hlavě vypočítávat mezisoučty, které si pamatuje. Je to mnohem náročnější na myšlení, než kdyby úlohu počítal odspoda odečítáním.

<u>Komentář 02:</u>

Zajímavé!! To mě nenapadlo! Byla to pro něj nečekaně implicitní úloha. Tyto úlohy nabízí podobný problém, proto Ivan použil stejnou strategii. Vždy začíná doplňovat čísla odshora. Nenapadne ho počítat odspoda odečítáním, natolik do úlohy ještě nepronikl. Přesto se ale domnívám, že už v tom vidí systém, chápe souvislosti, že si vduchu počítá 5-4=1, tady bych potřeboval 7, takže tady bude 6. Napadlo mě, že bych mu mohla vysvětlit, jak to může počítat jednoduše (f-d=e), ale to jsem okamžitě zavrhla, to bych nic nezjistila. To by pro mě neměl experiment žádnou hodnotu.

Začala jsem mít strach z nadcházejících úloh a byla jsem vůči nim dosti skeptická. Nechtěla jsem ho unavit, znechutit mu matematiku. A tak jsem se Ivana zeptala, jestli chce pokračovat, že další úloha je trochu těžší. On byl ale přesvědčen, že CHCE! další a že ho to baví….pokračovali jsme tedy dál. Všechny úlohy z prvního listu počítal Ivan velmi rychle až možná zbrkle, plný energie. Těšil se na těžší, věděl, že tohle je nejjednodušší, pro začátek.

Ukázala jsem mu druhý list s jednou úlohou.

I16: „ooo, jajaj…..8a2 je 10 a 0 je 2. No, takže (teď už začíná psát) 8 a 2 je 10 a 0."

Ex15: „Já to mám jinak" (překvapeně) „ Já tady mám pětku." (ukázala jsem prstem na pozici a) „To mám špatně?"

I17: úlohu si napsal, na pozici a dosadil 5 a dopočítal stejným způsobem jako u úloh předchozích (odshora) „Ne, nemáte! Pět a dva je sedm – no, taky to tak může být."

Ex16: „ A šlo by teda ještě nějak jinak?"

I18: zkusil dosadit na pozici a 7. „Sedm a dva je devět……jooo, to může!! Dva plus jedna je tři …no!!! Taky to jde!!" (šťastně a s úsměvem) „Osmička…to je deset…joooo!! Né, to už mám."

Ex17: „Takže jen tři možnosti a konec? Už to jinak nejde?"

I19: „Nevim, ještě jsem to neřešil. Šets plus dav je osm, dva plus dva…jooo, to vychází! A ještě například tři myslim. P..p…p…trojka, tady je pětka, takže pět a pak dva a pět je sedm a ….je dvanáct! Dva a pět je sedm."

Ex18: „Tak další jsi našel!!:-) A ještě něco bude? Ještě přijdeš na nějaké? Nebo už Tě to neba?"

I20: „Baví!!!" otočil papír, protože se mu tam už nevešel trojúhelník. Jakmile ale neměl před sebou vzor, nevěděl najednou, jak si to má nakreslit… „Jak to bylo?" Papír otočil, prohlédl si to a nakreslil nový trojúhelník. „Potřebuju vědět, co už jsme měli. Osm, pět, sedm, šest, tři…..dva! Dva a dva je čtyři" (2 a 4 psal vedle linky, na linku doplnil až když mu vyšli i mezisoučty počítané vduchu.) Psal tedy v tomto pořadí s komentářem: „Dvojka, čtyřka, , šestka a osmička. No?!“ (s radostí, že našel další s tónem v hlase jako – to nebylo těžké, co bude dál?)

<u>Evidence03:</u>

Všechny úlohy Ivan počítal od pozice <u>a.</u> Když si vedl evidenci, které možnosti už vyčerpal, psal si seznam čísel na pozici <u>a.</u> Zároveň mu ale nedělalo problémy trojúhelníky počítat.

<u>Komentář03:</u>

Ivan si potřebné mezisoučty přepočítává v hlavě, chápe souvislosti v trojúhelníku, ale nedokáže je pojmenovat, zjednodušit si práci. Bylo zajímavé pozorovat, jak si vytvořil svůj vlastní systém, že si začal psát, co už má a že si psal čísla z pozic <u>a.</u> Přikládá jim největší váhu.

Ex19: „Další máš, jo? A nemáš už to?“

I21: „ Ne“

Ex20: „ A myslíš, že je teda ještě nějaké další?“

I22: „ Myslím.“ (a začal si linkovat další trojúhelník)

Ex21: Pochválila jsem ho: „Ty jsi přišel na 6 správných řešení!! Tak zkus ještě nějaké najít, teda. Nebo už Tě to nebaví?“

I23: „hmm, …baví“ (už to ale zdaleka nezní tak přesvědčivě jako předtím) „Tohle dodělám a už…..“

Ex22: „ Už budeš mít zavařenej mozek“ (z legrace)

I24: „Neee, a pak budu dělat tyhlety.“ (ukázal na moje papíry s dalšími úlohami)

Ex23: „ No, takže poslední pokus, jo?‟

I25: „Jo‟

Ex24: „Dobře, tak jo, tak zkus ještě vymyslet‟

I26: „ A pak tady ještě mám dvojku‟ (dopsal 2 do sloupečku s již použitými čísly na pozici a) Přemýšlí nad dalším trojúhelníkem: „Takže takže takže takže…..‟(dlouhá pomlka ticha) „Jedna, tři…..‟ (píše zase vedle linky a zase ticho)

Ex25: „ Říkej mi nahlas, jak přemýšlíš‟

I27: „Že jedna a dva je tři, a dva a …………..sedm je devět, a devět a tři je dvanáct.‟

Ex26: „ Jak jsi hnedka přišel na 7, čoveče? No jooo, máš pravdu.‟

I28: dopisuje čísla na linky.„ Už to mám!‟

Evidence04:

Nepočkala jsem na odpověď Ivana na otázku, jak přišel na 7.

Komentář04:

Moje chyba. Odradila mě chvíle ticha. Příště mu dám čas, aby si mohl urovnat myšlenky a odpověděl. Předpokládám, že by odpověděl, že potřebuje na pozici e číslo 9, proto na pozici c bude 7, aby to dalo tu devítku. Kdybych mu dala prostor, mohl si toto lépe uvědomit a třeba by to byl krok k tomu, aby si uvědomil, že může počítat 12-3 je 9, 9-2 je 7 a úlohy by se pro něj tak staly explicitními.

Pokračování protokolu v příloze.

4. Závěry, výsledky

4.1. Úvod

Zabývala jsem se těmito úlohami poměrně dlouho sama, počítala jsem, zkoumala jsem toto prostředí z různých hledisek, na vlastní kůži jsem zažila neúspěch, problémy, zdánlivě bezvýchodné situace. Pro experimentování jsem se snažila volit vždy takové úlohy, aby mi co nejvíce pomohly proniknout do myšlení dítěte. Zajímalo mne, jestli bude mít problémy s pochopením vztahů v trojúhelníkách, kde narazí, co pro něj bude nejobtížnější a hlavně jakých chyb se dopustí. Já jsem se dopustila spousta chyb a díky nim jsem se vždy posunula dále a prostředí mi bylo díky nim čím dál bližší. Po zrealizování prvního experimentu jsem zjistila, že zadávané úlohy nebyly dobře vybrané. Často odváděly pozornost dítěte jinam než jsem zamýšlela nebo jej mátly. Po všech těchto zkušenostech, úspěších i neúspěších jsem zhotovila takové kaskády úloh, u nichž věřím, že jsou zbaveny co možná nejvíce úskalí a které nám mohou pomoci pochopit dětské myšlení.

Z počátku žáci objevují zákonitosti v trojúhelníku. Základním pravidlem je, že pod každými dvěma sousedními čísly je jejich součet. Tuto prvotní úroveň můžeme zvýšit zvětšením zadaných čísel nebo celých trojúhelníků. Až poté se seznámí s úlohami, kde je třeba experimentovat. Trojúhelníky napomáhají objevu zlomků. Dále je možné nalézt tato pravidla: "když v 3-∆ od dolního čísla odečtu obě krajní horní a z toho vezmu polovinu, mám horní prostřední číslo" nebo „dolní číslo je nejmenší/největší když střední číslo první řádky je nejmenší/největší" nebo „dolní číslo je sudé/liché když součet obou krajních čísel první řádky je číslo sudé/liché". Pomocí trojúhelníků můžeme žáka připravovat také na funkční myšlení, kdy eviduje závislosti mezi čísly do tabulky. Jak je vidět, možností využití nabízí toto prostředí více než dost. Nemůžeme samozřejmě postavit matematiku na prvním stupni na tomto prostředí, to by žáky asi nebavilo a ani by nám nepostačovalo. Nicméně jsem si jistá, že s citem jej vkládat do hodin, je přínosné, ačkoliv by se na první pohled mohlo zdát, že toto prostředí je již přežitkem.

4.2. Kaskáda I.

První kaskáda je zaměřená na vztahy v trojúhelníku. Od explicitních 3-Δ přes implicitní 4-Δ a 5-Δ s více řešeními až po úlohy s řešením pouze v oboru celých čísel. Není zaměřeno na počítání s velkými čísly. Cílem je zkoumat pouze orientaci v tomto prostředí, nikoliv zdatnost v početních operacích.

1) Cílem prvních pěti úloh je seznámit se s prostředím. Volím proto jednoduché explicitní úlohy.

V první úloze je dosazená i pětka, která by se dala jednoduše dopočítat. Je tam doplněná jako vzor, jestli žákovi samotnému dojde, jaké pravidlo v trojúhelníku asi bude fungovat. Kdyby na to nemohl přijít, můžu dosadit další číslo, když ani pak ne, tak doplním další….

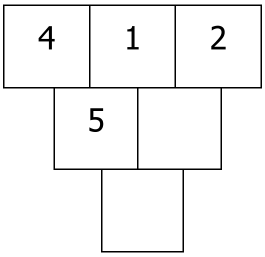
V druhé úloze stačí pouze sčítání vždy sousedních čísel. Nejjednodušší varianta. Na první pohled zřejmé, jak postupovat.

V třetí úloze poprvé žák musí odečítat. Předpokládám, že žák bude postupovat odspoda. Čili 12-7=5, 5-3=2. Jestli se toto očekávání naplnění nebo ne, bude zřejmě záviset na zkušenostech jednotlivců. Někomu může trvat delší dobu proniknout do tohoto prostředí.

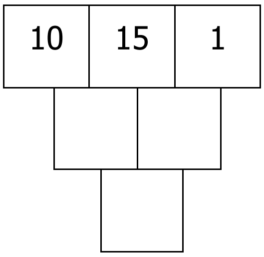
Čtvrtá úloha vyžaduje stejný myšlenkový proces jako úloha třetí, je však trochu těžší, protože ke zdárnému cíli žák musí udělat více kroků. Na rozdíl od třetí úlohy ale může začít odshora. Čili 5-4=1, 12-5=7 a nakonec 7-1=6. Nebo může počítat 12-5=7, 5-4=1, 7-1=6. Jestli bude žák postupovat tak nebo tak, je jedno, myslím, že to nic neurčuje a půjde o náhodu, kde začne.

V páté úloze předpokládám jedinou možnost postupu. 17-9=8, 8-7=1, 9-1=8.

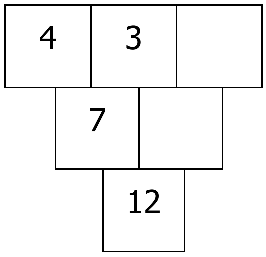
Všechny tyto předpoklady budou platit jen v případě, že úlohy budou pro žáka explicitní. Pokud budou pro něj implicitní, všechny tyto předpoklady jsou liché a žák bude čísla dosazovat metodou pokus - omyl. V takovém případě nevyvodím žádné závěry a vrátím se k úlohám nejjednodušším (typ první a druhé úlohy) a budu procvičovat tak dlouho, dokud se nestanou explicitními. Až když pro žáka budou všechny tyto úlohy explicitní, mohu pokračovat dál. Dříve to nemá smysl.



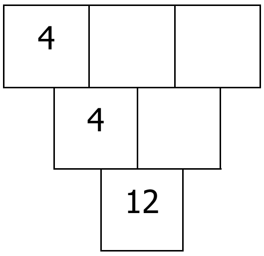
1



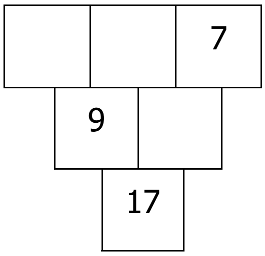
2



3



4



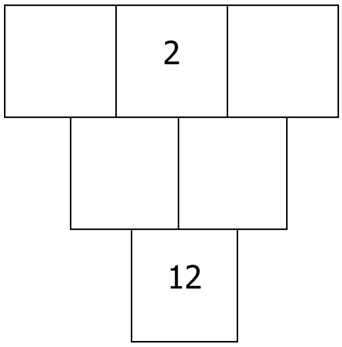
5

2) V druhé fázi se žák seznámí

s implicitní úlohou, která má více řešení.

V součtovém trojúhelníku zná pouze dvě čísla.

Počítá zatím bez nuly.



řešení:

7	2	1
9	3	
12		

5	2	3
7	5	
12		

4	2	4
6	6	
12		

6	2	2
8	4	
12		

Jestli jsou to všechna řešení zjistí tak, že si najde všechny rozklady čísla 12.

12: 6+6, 5+7, 4+8, 3+9, 2+10, 1+11. Potom zjistí, že rozklady 10+2 a 11+1 této úloze nevyhovují, protože číslo 2 a 1 už dále nemůže rozkládat na 2+? . Opět bez použití nuly.

Dále může každé z těchto možných řešení zrcadlově otočit a získá tak další správné řešení. Protože nám na pořadí ve složitějších úlohách záleží, budu takové dvě řešení (která jsou jen zrcadlově otočená) považovat za různá. Úloha má tedy 8 řešení v oboru přirozených čísel bez nuly.

Protože nepočítáme podle dohody s nulou, přicházíme o některá řešení, ale cílem této úlohy nebylo získat úplně všechna řešení (mohli bychom zahrnout i čísla celá, …), nýbrž pochopit, jak se dají řešit implicitní úlohy. A že nemusí existovat vždy jen jediné řešení. Jediné řešení existuje pouze v případě, když jsou zadaná 3 čísla ze 6.

3) Složitost úlohy spočívá v její velikosti. Úloha je opět implicitní. Předpokládám, že tato úloha bude dělat trochu problémy a žák začne doplňovat metodou pokus- omyl. Proto jsem doplnila na místo F číslo 3 a tím omezila počet možných čísel na místě C na pouhá 4 čísla. Proto jsou 4 možná řešení. Není však cílem této úlohy hledat všechna řešení. Úspěchem bude i jedno.

			2
	3		
12			

řešení:

1	2	1	2
3	3	3	
6	6		
12			

1	1	2	2
2	3	4	
5	7		
12			

1	3	0	2
4	3	2	
7	5		
12			

1	0	3	2
1	3	5	
4	8		
12			

4) Pro kontrolu, jestli žák pochopil princip součtového trojúhelníku jsem zařadila tuto úlohu, která se liší od ostatních tím, že není zadané jediné číslo.

S nulou v této úloze nepočítáme. Úloha by tak mohla ztratit význam, pokud použití nuly žáka napadne…

Otázka zní: Jaké nejmenší číslo může být na místě otazníku (počítáme-li v oboru přirozených čísel bez nuly)?

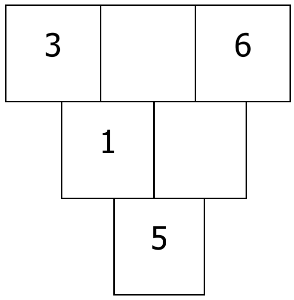
řešení:

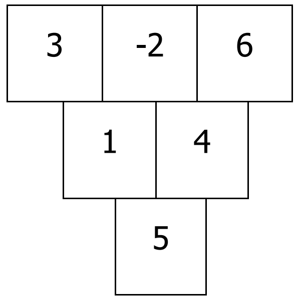
?			

1	1	1	1
2	2	2	
4	4		
8			

5) Pátá úloha je „nadstandartní“, protože má řešení pouze v oboru celých čísel. Zajímá mne, jak bude žák na úlohu reagovat. Jaká slova použije pro vyjádření svého výsledku.

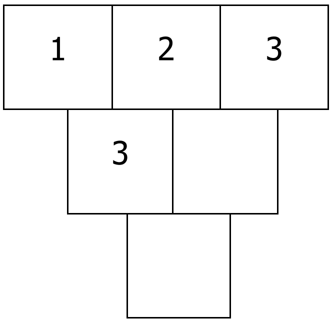
řešení:

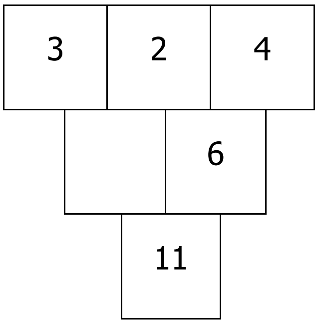


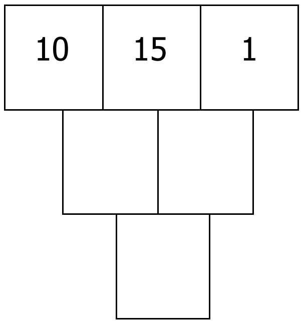


4.3. Kaskáda II

Kaskáda úloh je vytvořena pro zábavnou vyučovací jednotku. Experimentovala jsem ji na kroužku matematiky pro 12 dětí. Organizačně měl experiment tu výhodu, že každé dítě mělo u sebe moji spolužačku, která zapisovala postup jeho řešení úloh a za každé správné heslo mu dala lísteček s písmenkem. Správné heslo vždy končilo na písmeno A. Pokud byly dvě možná řešení, i v nabídce byla dvě hesla končící na písmeno A. Když se lístečky správně poskládaly, daly dohromady slovo, které odhalilo, kde je skrytý poklad. Po správném vypočítání všech úloh mělo dítě 11 indicií, hra končí nalezením pokladu. Já jsem byla „vědma“, která jim mohla pomoci. Tuto pomoc ale mohl každý žák využít pouze 3x. Za každou návštěvu jsem jim udělala na ruku čáru fixem, což mělo motivační funkci. Kaskáda se ale dá, myslím, využít i v běžné vyučovací jednotce. Je vytvořena pro žáky druhého ročníku. V příloze č.2 naleznete řešení dvou žáků s popisy postupu, které vypracovaly „jejich experimentátorky“. Tyto experimenty nejsou dále analyzovány, jsou jen možným zdrojem pro další výzkum.



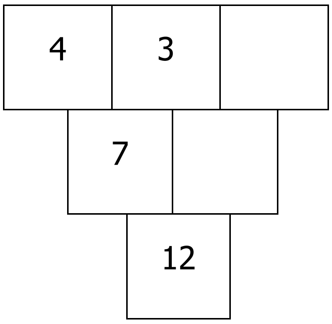


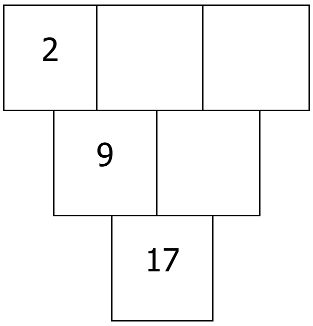


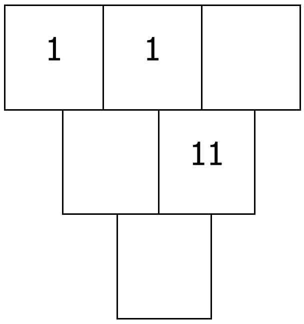
Potřebuješ znát nejmenší a největší číslo, které jsi doplnil. Jaká to jsou?

4 a 31 = kůň 5 a 51 = potok 5 a 41 = voda

Pošeptej svému rádci správné heslo.

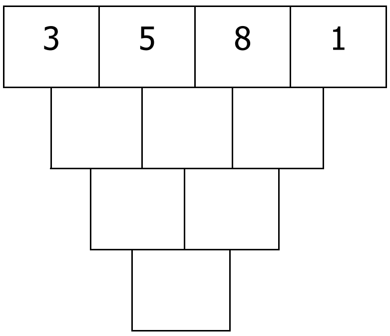


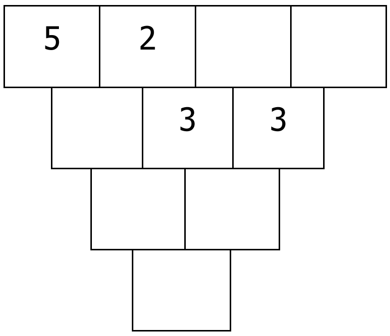




Kolik sudých čísel jsi musel doplnit?

3 = přítel 4 = alka 6= znamení. Pošeptej svému rádci další tajné heslo.





KOLIK SUDÝCH ČÍSEL JSI DOPLNIL?

6=HRADBA 7 = OHEŇ 8=LED Pošeptej svému rádci další tajné heslo.

		6	
	11		
	19		
36			

7	2		
	9		
	22		

KOLIK ČÍSEL VĚTŠÍCH NEŽ 10 JSI DOPLNIL?

2 = PODZEMÍ 4= ODVAHA 6= ERB Pošeptej svému rádci další tajné heslo.

18	3	4	15
*			

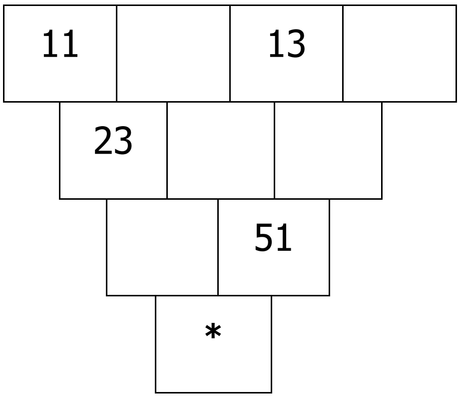
15	3	4	18
*			

15	4	3	18
*			

18	15	4	3
*			

KOLIK POLÍČEK S HVĚZDIČKOU MÁ V SOBĚ STEJNÉ ČÍSLO?

2 = KAT 3 = MAPA 4 = TAJNÉ CHODBY

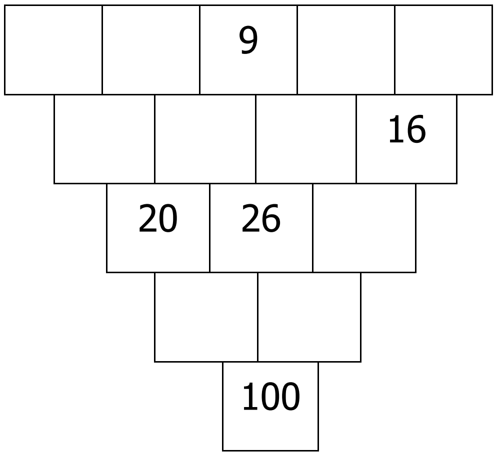


JAKÉ ČÍSLO JE NA MÍSTĚ HVĚZDIČKY?

Menší než 80= KÁMEN

Menší než 90= HNĚV

Menší než 100= ZRADA



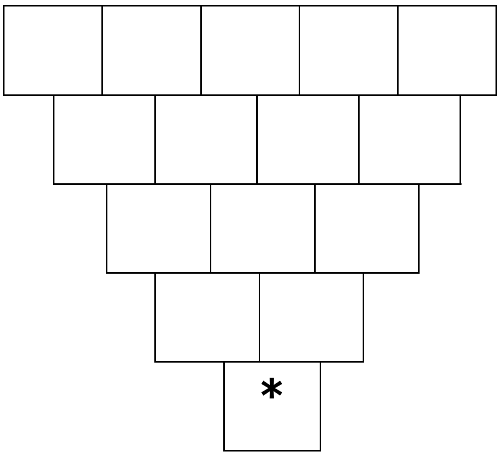
KOLIK ČÍSEL MÁ NA MÍSTĚ JEDNOTEK SUDÉ ČÍSLO?

5= VRBA 9= HRAD 7= POTOK

Čeká Tě tajný úkol. Buď nenápadný a tichý ať se neprozradíš. Dělej, že jdeš na záchod. Jdi na chodbu a vezmi si tam jeden vzkaz. (Vzkaz obsahoval jeden prázdný trojúhelník, pouze v jednom políčku byla *. Dále sadu 15 čísel. Úkolem bylo poskládat čísla do trojúhelníku tak, aby byla zachována všechna pravidla. Tuto úlohu lze zařadit kdykoliv pro odreagování.)

KTERÉ ČÍSLO JE NA POLÍČKU S *?

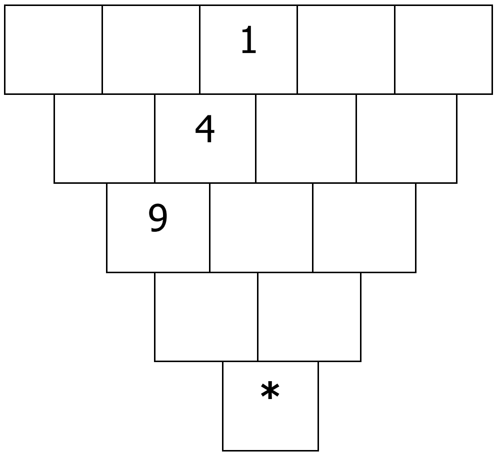
6= BROD 10= LÁSKA 15= STATEČNOST



JAKÉ NEJMENŠÍ ČÍSLO MŮŽE BÝT NA MÍSTĚ HVĚZDIČKY?

MENŠÍ NEŽ 18 = STEZKA

18 A VÍCE = KRÁL



JAKÉ NEJMENŠÍ ČÍSLO MŮŽE BÝT NA MÍSTĚ HVĚZDIČKY?

20=LÁVKA 25= PÝCHA

VĚTŠÍ NEŽ 30=POKLA

5. Sebereflexe

V červnu roku 2007 jsem přemýšlela o své diplomové práci. Matematika mi je od dětství velmi blízká díky mému tatínkovi a za celý můj dosavadní život se na tom nic nezměnilo, takže o katedře jsem neměla nejmenší pochybnosti. Rozhodovala jsem se podle člověka, který by ji vedl. Pan profesor Hejný byl jasná volba. Byl a je pro mě velkou autoritou. Odborníkem ve svém oboru na slovo vzatý. Velmi si ho vážím a uznávám. Když jsem si k němu šla „zamluvit místo", byla jsem poslední, koho ještě přijal za svého diplomanta pro náš ročník. Téma jsem dostala přiděleno. Součtové trojúhelníky. Neměla jsem moc jasnou představu o tom, jak se na takové téma dá napsat diplomová práce. Byla jsem v rozpacích. A však s postupem času jsem s překvapením zjistila, že celé téma ani neobsáhnu, že je velmi podnětné. Cesta, kterou jsem prošla během posledního uplynulého roku při zpracovávání zadaného tématu, byla často velmi trnitá, plná neúspěchů. Velice mě ale obohatila, protože nalézání vlastních chyb mě posouvalo dál nejrychleji. Vůbec objevení chyby znamenalo radostný krok vpřed. Nikdy bych do tohoto prostředí nepronikla natolik, kdybych přijímala všechny poznatky bez vlastní cesty hledání. Ovšem zásah z vnějšku v podobě komentářů a připomínek pana profesora Hejného byl nutný. Směroval mou cestu hledání, abych došla šťastně k cíli. Jeho způsob navigace byl ale natolik profesionální, že jsem nikdy neměla pocit, že by mě svým zásahem ochudil o proces nalézání. Nikdy mi neřekl je to tak a tak. Jeho reakcí často byla reedukační úloha nebo otázka, nikoliv imperativ. Tím jsem se od něj naučila mnohé pro svou dráhu učitelky i matky. V naší komunikaci jsme narazili i na nedorozumění, kdy jsem například velice dlouho řešila zadanou úlohu bez úspěchu, abych při další konzultaci zjistila, že moje úsilí bylo zbytečné. Kolik papírů jsem ale popsala!

(Snažila jsem se nalézt všechny možné implicitní baze v n-Δ, což je zřejmě nemožné. Já jsem ale věřila, že chyba je ve mně, že postupuji asi špatně a stále jsem se snažila přijít věci na kloub. Když jsem se trápila řešením více dní, ztratila jsem motivaci hledat dál a vzdala jsem to. Na konzultaci jsem zjistila, že jsme si nerozuměli.)

Taková rizika už komunikace dvou lidí obnáší. Nutno říci, že každá konzultace byla přínosem. Pomáhalo mi povídání na toto téma s kýmkoliv. I s nezasvěceným člověkem, protože jeho otázky mě také posouvaly dál. Zanedlouho jsem totiž nebyla schopná podívat se na problém z odstupem. Byla jsem v něm ponořená natolik, že mi jednoduché otázky např. mých bratří pomáhaly vracet se „nohama na zem" a připomínat si cíl mé práce.

Musela jsem se naučit vést experiment, protokolovat ho a analyzovat, což bylo vůbec nejtěžší. Do té doby jsem se totiž nikdy o přemýšlení dětí nezajímala tak podrobně. Často jsem byla bezradná. Říkala jsem si:"Jak mám vědět, proč to dítě dělá zrovna to a ne ono a co tím já mám zjistit?" Nebo: „Přemýšlí ještě nebo už chytá lelky?" Zjistila jsem, že sice umím pracovat s hlasem, motivovat žáka, ale že mám nedostatky v neverbální komunikaci. Pod vedením pana profesora jsem vlastně objevovala sama sebe. Zjistila jsem také, že abych mohla říci, že v hlavě žáka právě probíhá určitý proces, nestačí mi načíst knihy. Je potřeba mnoho a mnoho zkušeností. Díky zpracovávání této diplomové práce jsem nějaké zkušenosti získala. Zdaleka mi ale nestačí k tomu, abych dokázala bezpečně analyzovat reakce dítěte. To je záležitost dlouhodobá a vyžaduje trpělivost a vůli na sobě pracovat. Teď už to alespoň vím. A ještě jedna velká zkušenost: Kdybych někdy měla chuť svému žákovi při nedostatku trpělivosti říct: „Vždyť je to jasné, Ty to nevidíš?" a budu si myslet, že je hloupý, připomenu si své neúspěchy na cestě poznání.

6. Použitá literatura

Hejný, M., Jirotková D., Slezáková-Kratochvílová, S. Matematika I/1. díl: Pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2007

Hejný, M., Jirotková D., Slezáková-Kratochvílová, S. Matematika I/2. díl: Pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2007

Hejný, M., Jirotková D., Slezáková-Kratochvílová, S. Matematika: příručka učitele pro 1. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2007

Gray, E.M., Tall, D.O. Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. In Journal for Research in Mathematics Education, 25 No. No. 2 (Mar., 1994)

Hejný, M., Hejná, M.: Součtové trojúhelníky. Praha: Raabe, 1998

Materiály z přednášek Prof. M. Hejného

7. Přílohy

7.1. Příloha 1: Protokol experimentu „Ivetka“

Ex1: (Před dívku kladu obrázek 1) Koukni se na tohle. Viděla jsi někdy něco podobného?

I1: (Dívka otočí obrázek vzhůru nohama a je ve tvaru pyramidy) Když někdo vítězí, tak jakože tohle jsou ty…

Ex2: Když se koukneš na ta čísla, co tě u toho napadá?

I2: Srovnat je. Jako jedna, dvě, tři, čtyři, pět, šest, sedm,

Ex3: A mají nějakou souvislost takhle jak jsou?

I3: Hmmmmmm (10 vteřin ticho, přemýšlí)

Ex4: Se na ně podívej, co tam je za čísla.

I4: No, souvisí jako to, no. Že jsou podle toho jako jedna, dvě, tři, čtyři, pět, ale ještě tam chybí nějaká čísla do devítky

Ex5: (Ukáži prstem vždy na ta 3 čísla, která spolu souvisí. Dívka mlčí.)

I5: (po devíti vteřinách s úsměvem) Nepochopila.

Ex6: Tyhle dvě čísla mají něco společného s tímto.

I6: Jako tři plus dva je pět, jedna plus tři je čtyři. Jak jste to říkala?

Ex7: Tak zkus na to přijít.

I7: Jo! (vítězně) Třeba tři a dva je pět, čtyři plus pět je devět, jo! Takže jedna plus tři je čtyři, tři plus dva je pět, pět plus čtyři je devět. (vždy na čísla, která vyslovovala, ťukala prstem)

Ex8: Hm, platí to, viď? No, tak jo. (pochvalně)

02:05 první úloha - bez problému . Při vysvětlování, jak na to přišla mi zopakuje všechno, nejen 2+3 je 5, ale i ostatní výpočty v celém trojúhelníku.
02:33 2. Úloha bez problému – opět při vysvětlování počítá úplně vše, ne jen to, co je nutné.

03:08 3. Úloha – trvá déle, ale to je tím, že musí počítat s většími čísly. Začíná nejmenšími čísly: 1+16 je 17, přestože to není na začátku trojúhelníku, kde se nabízí začít. Největší problém 26 + 16…napíše chybně 31 s komentářem "teda myslím, no".

03:45 4. Úloha

I8: čtyři plus tři je sedm, tři plus ss ss…..(přemýšlí 24s) Co je dvanáctka? Sedm plus….(5s ticho) Pět. Ne! (5 s ticho) Jo! Pětka.

Ex 9: Jak jsi na to přišla?

I: (sebejistě) Sedm plus pět je dvanáct. Já jsem si nějak spočítala, že sedm plus tři je deset a plus dva je dvanáct. …a to je dva.

Ex10: A to jak jsi přišla na dvojku?

I11: Tři plus dva je pět. (sebejistě)

Ex12: (nevěděla jsem, jak na ni přišla) A tu dvojku jsi tam neměla, tak sis nemohla říct tři plus dva je pět. Tak jak jsi na ni přišla?

I12: Protože pět minus tři je dva, takže tam napíšu dvojku.

Komentář:

V tomto úseku došlo k nedorozumění, které mi v tu chvíli nedošlo. To jsem zjistila až při rozboru záznamu.

05:05 5. Úloha- zrada - úloha s více řešeními

(30 s přemýšlí)

05:34   Ex13: Co tě napadá?

I13: Teď jsem myslela jako…..mmmm…teď jsem to zapomněla….mmmmm 9+2..ne, to by se nevešlo. (5s ticha) 7+2 je 9. no a teď nemůžu přijít na to, kolik by to bylo z tý devítky. (5 s ticho)

2 a třeba...nevim. To je těžký! Tady by mohlo být deset ještě. Tady je dvojka. Ale to by fakt nešlo, co? (ukazuje na a, c) vepředu….nula. (Uchychtne se, 9s ještě kouká na úlohu, přemýšlí a píše 8, 10, 0, 2.)

6:52 Ex14: To je zvláštní, protože já když jsem to počítala, tak jsem tady měla sedmičku.

I14: sedmičku, jo??

Ex15:Tak jsem to měla špatně?

I15: No Já nevim, mně to takhle přišlo, no.

Ex16: Jo, ono Ti to takhle vychází. Ale jestli by to nešlo nějak jinak, protože mně to taky vycházelo.

I16: 7a2 je 9, 2 a 1 je tři. To by taky šlo takhle, že 7plus2 je 2 plus 1 je tři 9+3 je 12. Mně to ale takhle napadlo.

Ex17: Takže to by taky šlo. Je to taky správně, jak jsem to počítala já?

I17: hm.

Ex18 : A šlo by to teda ještě nějak jinak vypočítat?

I18: ještě jinak? (Otočím papír, podle mé instrukce si dopíše 2 a 12 do oken, 40s přemýšlí. Pak píše 5, 3, 7 a 5.) Takhle. (bez emocí)

(Pětku píše jako první velmi nejistě. Začne ji psát pomalu a po prvním tahu se zastaví a dopíše ji jen ve vzduchu. Tužkou jezdí nad papírem, ukazuje na jednotlivá okna, z čehož můžeme usuzovat, co právě v hlavě počítá. Po 10ti s píše velmi slabounce a nejistě sedmičku a pětku v okně e. Pak docela jistě dopisuje pětku v okně a. Trojku v okně c píše jako poslední, energicky a jistě.)

Ex19: Jo. Taky to jde. (pochvalně) A ještě jinak?

I19: To je těžký!!

Ex20: No, ale jde Ti to, Ivetko, jsi šikovná! Už jsi našla tři!

I20 : (Automaticky bez mého upozorňování dopisuje do dalšího trojúhelníku čísla 2 a 12. Po 20ti s ticha, kdy I. Koukala chvíli do papíru a chvíli vpravo nahoru, aby ji papír nerušil, protože zadání už měla v paměti.) Mě nic nenapadá. (nešťastně, unaveně)

Nakonec na to přišla. Následovalo čtvrté řešení – stejné jako předchozí, ale zrcadlově otočené. Tento úsek už neprotokoluji, protože není zajímavý.

Moje postřehy letmo (exp. Ivetka celý):

01:04 „jsem nepochopila" – zbytečné nechat ji, měla jsem jí to říct, nejde o nic. Akorát plýtvám její energií

01:46

02:15 ?? proč si ukazuje na všechna čísla? Všechno kontroluje

02:48 Zas si ukazovala!

03:07 už ne, jde rovnou k výpočtu chybějícího – posun v myšlení od začátku (když tam nebylo co počítat) k pozici bce – zajímavé

03:51

03:54 – zase počítá vypočítané

04:20

04:37 nedorozumění

05:00 nakonec řekla, co jsem chtěla slyšet

05:15-05:40 dlouho ticho. Neví? Měla jsem ji přerušovat?

06:20 zajímavé, že nepíše, jen uchovává v hlavě

06:40 už má v hlavě – dobrá paměť – píše na čisto

07:05

07:36 zase v hlavě – dobrá paměť – silná v aritmetice

08:48 taky nad papírem – její myšlenky – zase paměť

10:14 to samé, ale zrcadlově

10:21 „já to celý úplně zapomněla!" Jde ji to znatelně pomaleji než ten předtím

11:18 „Nic mě nenapadá"= jsem unavená a nebaví mě to!

11:58 unavená, už nepřemýšlí, jen kouká

12:41 až po dlouhé době koukání…únava

13:44 moje chyba – radím

14:00 skvělý zápis – lomítko

15:27 dojde až nahoru, vyhýbá se, mínus nechává nakonec

16:09 zoufalá, už hledá jiné strategie, opomíjí pravidla trojúhelníku – nechce se vzdát všech výpočtů předtím?

17:00 obdivuji – počítá znovu! Je trpělivá!

19:02 nafixovaná na c . nehodlá se jí vzdát – přizpůsobuje se jí

19:33 vysvobození

20:20 už mozek mimo provoz – už jsem neměla dávat. Tato úloha by nemohla následovat, pokud by předtím přišla na mínus

22:00 error – to jsem už přehnala!

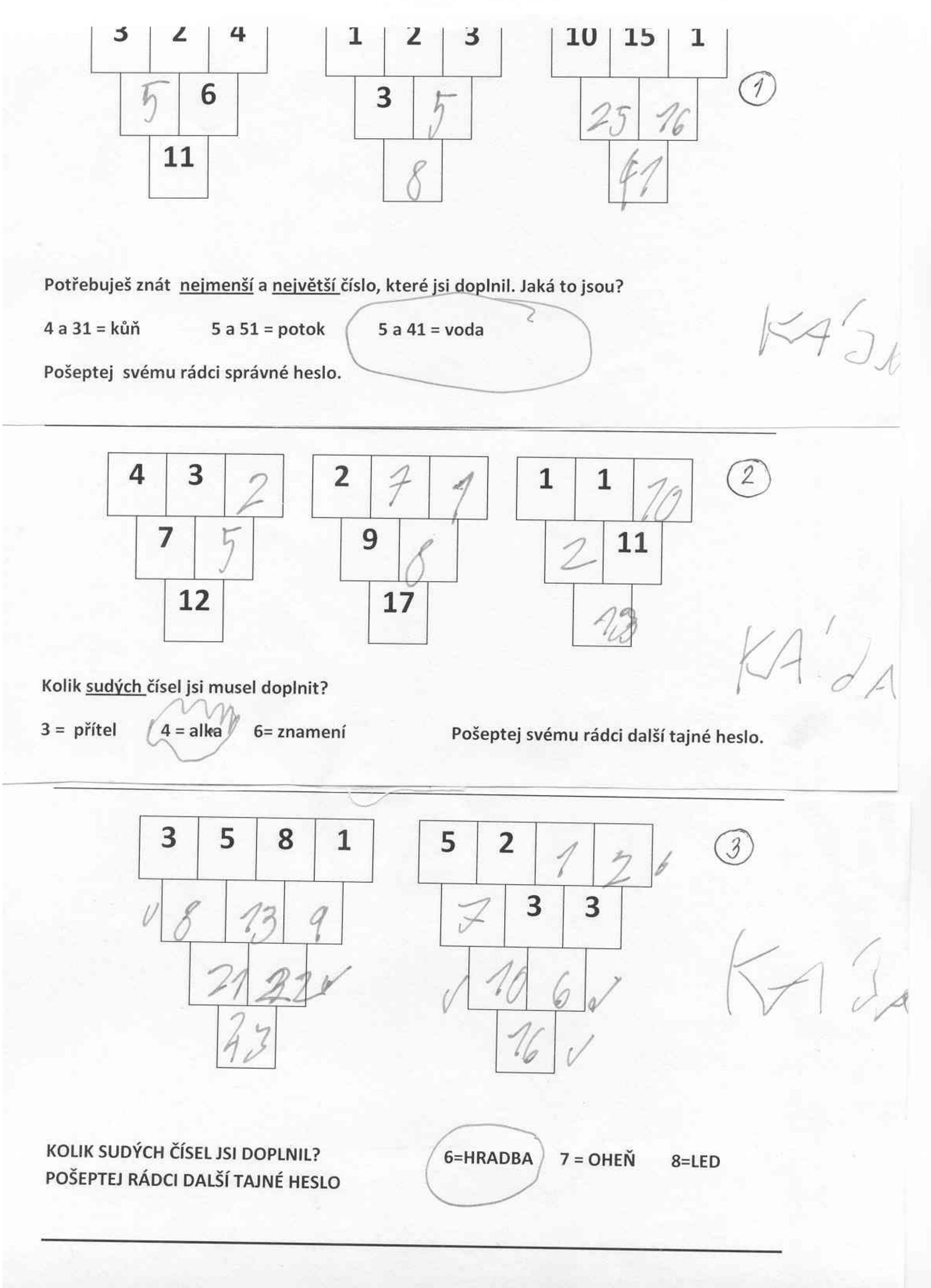
22:53 přetím na to přišla a teď najednou ne

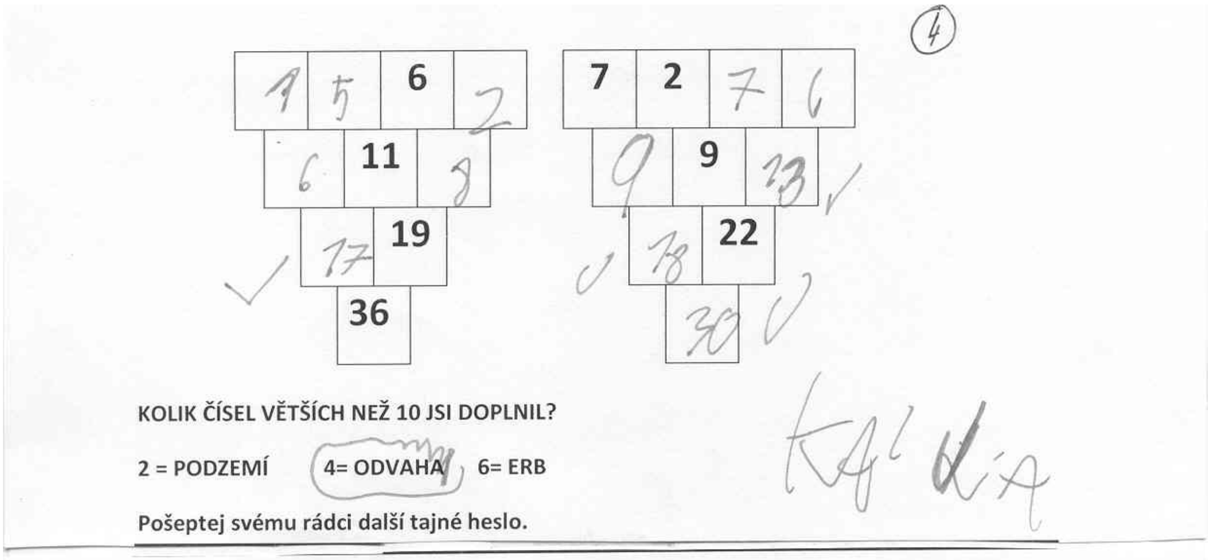
23:16 překvapení, že není unavená!!!

24:38 jaktože najednou píše nulu?? Proč nejsou všude?

7.2. Příloha 2: Řešení kaskády II s popisem postupu

Kája i Honza jsou žáky 2.ročníku ZŠ Vodičkova. Řešení této kaskády bylo obsahem jednoho kroužku matematiky. K jednomu přikládám i originální zápis postupu řešení (sepsaný mou spolužačkou).




4

1	5	6	2
6	11	8	
17	19		
36			

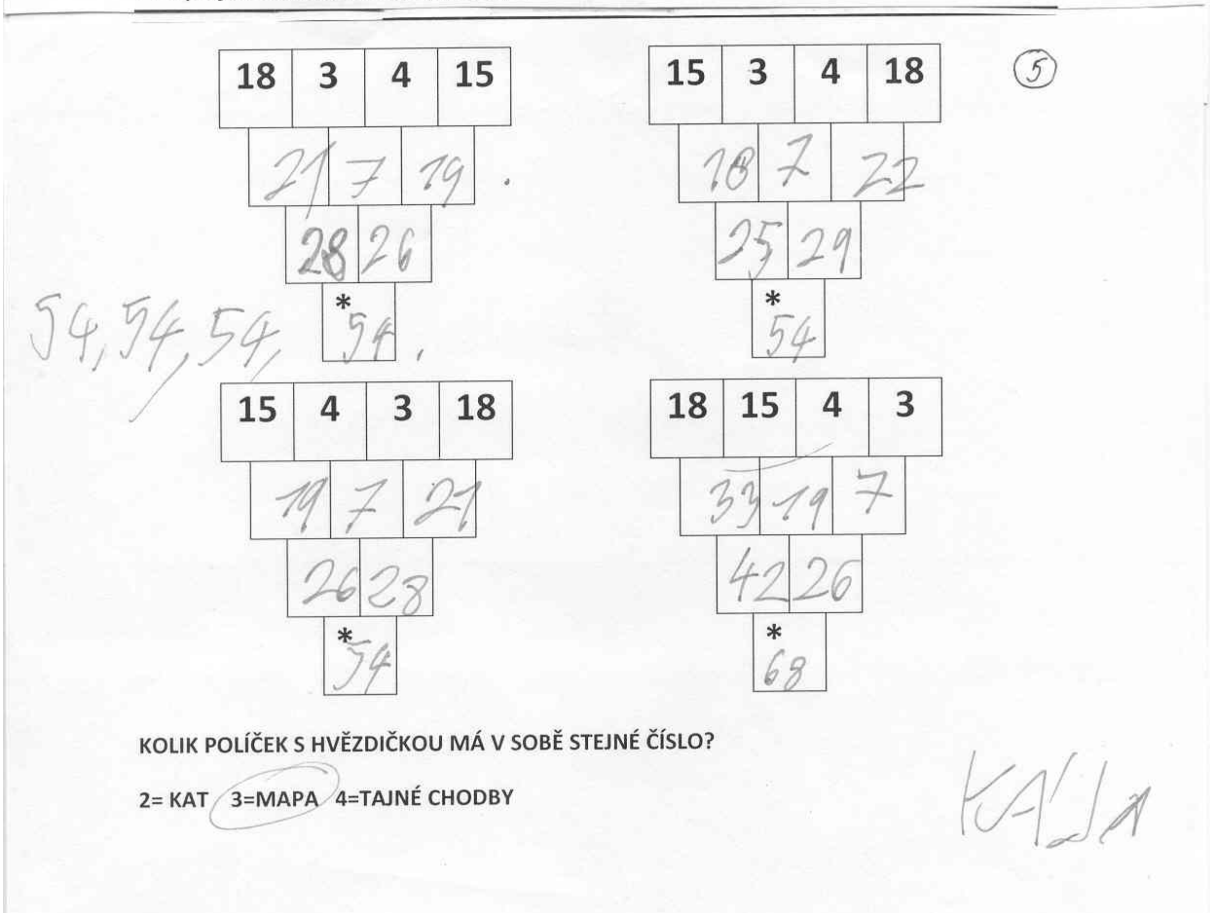
7	2	7	6
9	9	13	
18	22		
30			

KOLIK ČÍSEL VĚTŠÍCH NEŽ 10 JSI DOPLNIL?

2 = PODZEMÍ 4= ODVAHA 6= ERB

Pošeptej svému rádci další tajné heslo.

KAĹKA


5

18	3	4	15
21	7	19	
28	26		
* 54			

15	3	4	18
18	7	22	
25	29		
* 54			

54, 54, 54,

15	4	3	18
19	7	21	
26	28		
* 54			

18	15	4	3
33	19	7	
42	26		
* 68			

KOLIK POLÍČEK S HVĚZDIČKOU MÁ V SOBĚ STEJNÉ ČÍSLO?

2= KAT 3=MAPA 4=TAJNÉ CHODBY

KAĹKA


6

1	5	6	2
6	11	8	
17	19		
36			

KAĹKA

KOLIK ČÍSEL MÁ NA MÍSTĚ JEDNOTEK SUDÉ ČÍSLO?

5= VRBA 9= HRAD 7= POTOK

5 | 1 | 3 | 8
6 | 4 | 11
10 | 15
25

(CHOBORDEC)

|Sylva – Kája|

1) 5
5, 8
25, 16, 41 — 1. pokus

2) 5, 2

8, 7, 1

10, 2, 13

3) 8, 9, 13, 21, 22, 43 — zatrhává si, které použá pro otázku

1, 2, 7, 10, 6, 16 — zatrhává čísla větší než 10

4) 5, 8, 2, 14, 6, 1

9, 7, 18, 30, 13, 6 — automaticky vypočítá

5) • 19, 7, 21, 28, 26, 54
• 18, 4, 22, 25, 29, 54
↳ koukne se vedle → 18+3=21, taky tady bude 22

vedle si zapisuje výsledky

• 19, 7 ot. Proč je tady taky 7? (sám pro sebe se ptá
všude budou stejná č. – říká, ale řeší dál

21, 26, 28, 54

• 7 19 33, 26, koukla na hvězdičku → tady bude jiný číslo! To je divný, když všude jsou stejný
→ hledá jestli nemá chybu → dopočítá → její odpověď: všude nejsou stejná č.
ot. proč si své pův. rozhodnutí změnil? Nevím. Přemýšlí.
→ „Protože v 1. řadě jsou čísla překrozená na krajích. V posledním překrozená jinak"

6) 5 8 2 hledá v předchozích → nejdeš si na jednou
řešil sensotyp Δ → podle něj opíše

nerozumí otázce → jde za vědmou / nerozumí co se slovem jednotky

7) jedno jsem mu řekla → 1 (má jí uhádnout

|3, 4, 5 6|, |8, 10, 11|, 15 * 25

očekávané obrázek
→ kůže co v tom vidí

otočíme kraj, jak je zvyklí

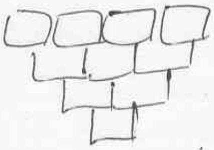
2

□ 1

10 11 8

4 6 5 3

6, 4, 10, 5, 11, 5, 3, 8, 15



číslo, které držím, nemusí být na *
málo ~~čísla~~ času ⇒ 1 mu dám

~~[illegible]~~ ⇒ stále čísla překazuje až mu dojde, že nejnižší čí

zajímavé, že ~~a~~ slovo staví jako matematické kombinace
→ zkouší spolu všechna písmena (nepřemýšlí nad obsahem)

sedmý trval nejdéle, ostatní dělal okamžitě.
→ omlouvám se, že jsem časy zapomněla psát :)

1 5

~~4~~	~~2~~	6	2
6	11	8	
17	19		
36			

7	2	7	6
9	9	13	
18	22		
40			

Honza

KOLIK ČÍSEL VĚTŠÍCH NEŽ 10 JSI DOPLNIL?

2 = PODZEMÍ 4= ODVAHA 6= ERB

Pošeptej svému rádci další tajné heslo.

18	3	4	15
21	7	19	
28	26		
* 54			

15	3	4	18
18	7	22	
25	29		
* 54			

15	4	3	18
19	7	21	
26	28		
* 54			

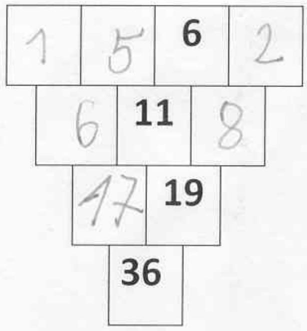
18	15	4	3
33	19	7	
52	26		
* 78			

Honza

KOLIK POLÍČEK S HVĚZDIČKOU MÁ V SOBĚ STEJNÉ ČÍSLO?

2= KAT 3=MAPA 4=TAJNÉ CHODBY

6.



Honza

KOLIK ČÍSEL MÁ NA MÍSTĚ JEDNOTEK SUDÉ ČÍSLO?

5= VRBA 9= HRAD 7= POTOK

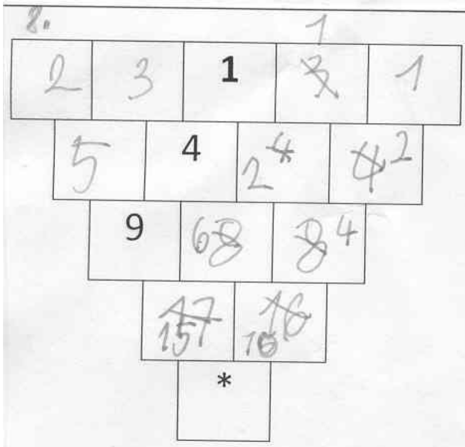
7.

Čeká Tě tajný úkol. Buď nenápadný a tichý ať se neprozradíš. Dělej, že jdeš na záchod. Jdi na chodbu a vezmi si tam jeden vzkaz.

KTERÉ ČÍSLO JE NA POLÍČKU S *?

6= BROD 13= LÁSKA 15= STATEČNOST

8.

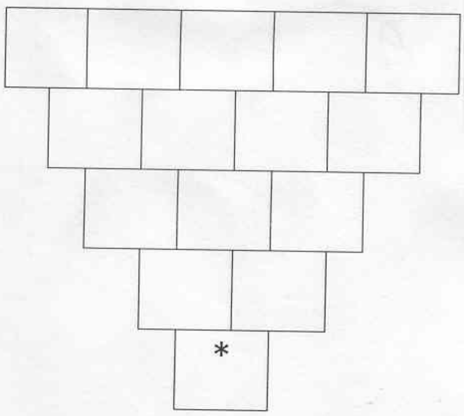


Honza

JAKÉ NEJMENŠÍ ČÍSLO MŮŽE BÝT NA MÍSTĚ HVĚZDIČKY?

20=LÁVKA ~~28~~ 25! = PÝCHA VĚTŠÍ NEŽ 30=POKLAD

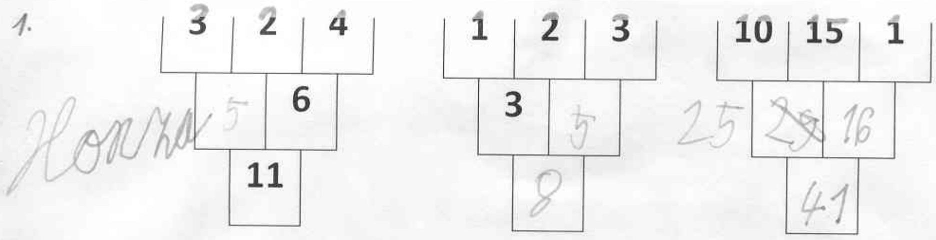
9.



JAKÉ NEJMENŠÍ ČÍSLO MŮŽE BÝT NA MÍSTĚ HVĚZDIČKY?

MENŠÍ NEŽ 18 = STEZKA 18 A VÍCE = KRÁL

1.

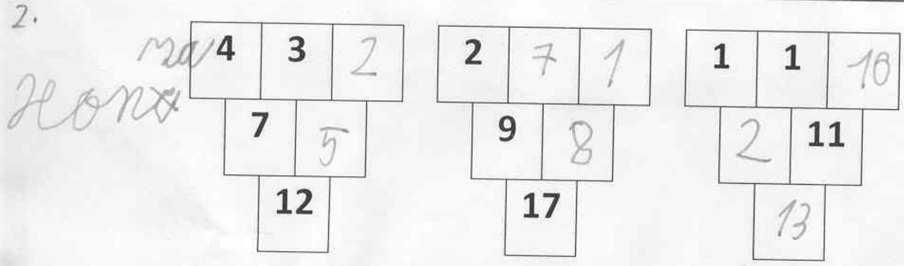


Potřebuješ znát nejmenší a největší číslo, které jsi doplnil. Jaká to jsou?

4 a 31 = kůň   5 a 51 = potok   5 a 41 = voda

Pošeptej svému rádci správné heslo.

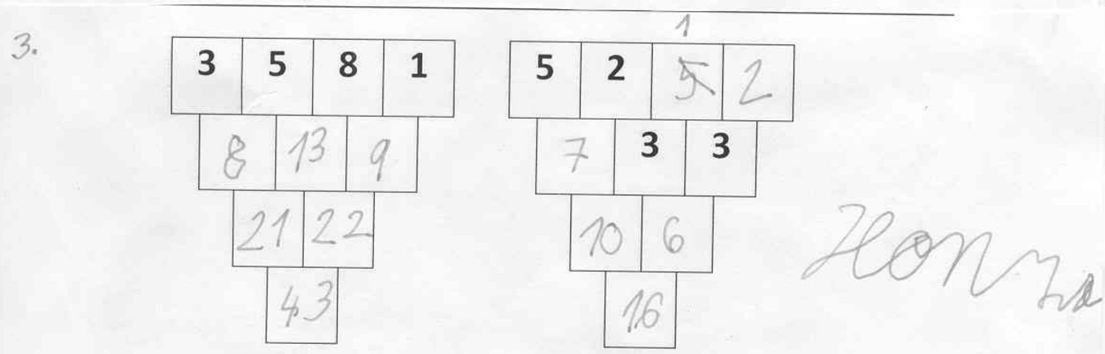
2.



Kolik sudých čísel jsi musel doplnit?

3 = přítel   4 = alka   6= znamení   Pošeptej svému rádci další tajné heslo.

3.



KOLIK SUDÝCH ČÍSEL JSI DOPLNIL?   6=HRADBA   7 = OHEŇ   8=LED
POŠEPTEJ RÁDCI DALŠÍ TAJNÉ HESLO

7.3. Příloha 3: Součtové trojúhelníky a studentky Pedf

Součtové trojúhelníky jsem předložila i svým spolužačkám. Zajímal mě jejich pohled na toto prostředí očima budoucích učitelek.

7.3.1. Průzkum

Tyto listy jsem dala k vyplnění třinácti svým spolužačkám v rámci kurzu „Matematická homogenní varianta“ na naší pedagogické fakultě. Cílem bylo zjistit, co o součtových trojúhelnících ví, kde se s nimi seznámily a jak jsou připravené je použít v praxi. Výsledky byly často velice zajímavé, ale dále je neanalyzuji, jsou pouze možným podnětem k dalšímu potencionálnímu výzkumu. Jako ukázku přikládám 3 vypracované soubory listů.

Součtové trojúhelníky

homogenní varianta 16.4.08

x Tento typ úloh znáš ze : ☐ZŠ ☒VŠ

x Považuješ ho tak jak ho znáš za kreativní a přínosné matematické prostředí? ano - ne

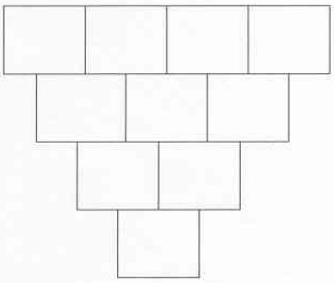
x Co potřebuješ umět, abys mohla počítat takové úlohy? sčítat, orientaci v číslech

V políčku, které doplníte jako 1., udělejte, prosím vás, tečku.

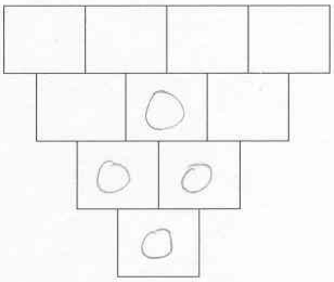
U všech úloh počítejte v oboru přirozených čísel bez nuly!!

1. Kolik nejméně potřebuješ znát čísel, abys dokázala jednoznačně vyřešit úlohu? (tzn. jediné řešení) Zakroužkuj:

1 2 3 4 5 6 7



2. Zakroužkuj ta 4 políčka, která bys chtěla mít v zadání úlohy jako zadaná.



3. Který typ úloh Ti je sympatičtější? A B

A

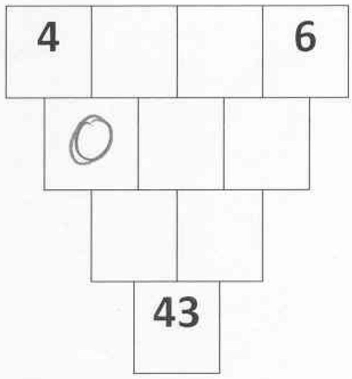
1 5 9 3
6 14 12
20 26
46

B

33
21 12
14 7 5
9 5 2 3

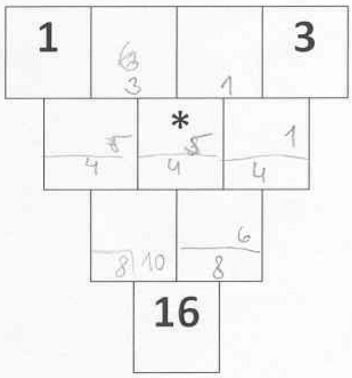
1

4. Zakroužkuj políčko, které bys ještě chtěla znát, aby se Ti úloha počítala co nejlépe.

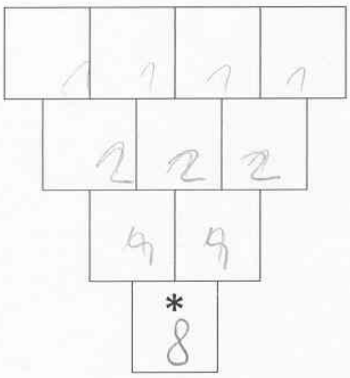


5. Urči rozmezí čísel, která je možné doplnit do políčka s *, aby úloha měla jediné řešení.

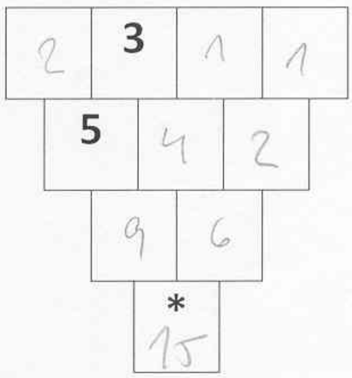
4



6. Jaké nejmenší číslo může být na místě *?



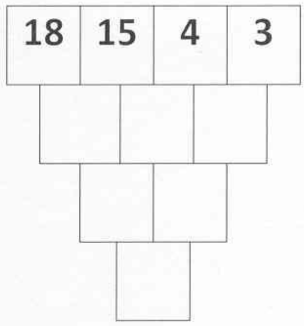
7. A tady?



Kolik času Ti tato úloha zabrala?≐ 10 second

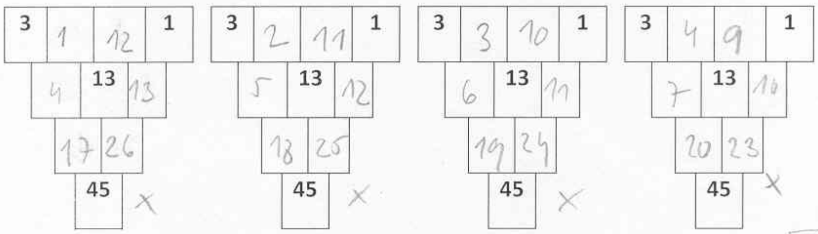
Kolik tato? 20 second

(1)



8. Záleží na pořadí horních čísel? ano – ne

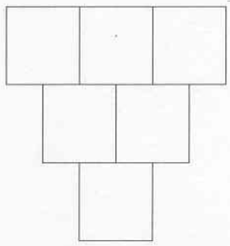
Odhadni, u kterých úloh bude poslední číslo stejné. Nedoplňuj čísla, jen zaškrtni :



Teď už do políček můžeš psát. Pod ○ napiš poslední číslo. Překvapil Tě výsledek? ano - ne

9. Kolik má úloha řešení? Ø

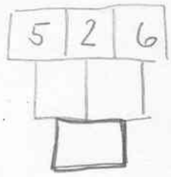
Kolik času Ti to zabralo? MNOHO ! 10 min



13 < 1 / 12

řekla bych, že podle počtu políček má 4 řeš.! -> HAHA, to už tady bylo NEMÁ ŘEŠENÍ !

10. Vymysli vstupní úlohu žákovi 1. třídy, který zná prostředí jen teoreticky.



Vypočítej pyramidu a napiš, jaké číslo bude v tučném rámečku

(1)

11. Přiděl čísla 1-6 k úlohám tak, jak bys je dávala žákům popořadě. (1=nejjednodušší)

(2.)
1 | 2 | 3
3 | 5
8

(1.)
3 | 2 | 4
5 | 6
11

(6.)
5 | 2 | 3
7 | 5
12

(4.)
4 | 3 | 2
7 | 5
12

(5.)
7 | 3 | 1
10 | 4
14

(3.)
10 | 15 | 1
25 | 16
41

12. Vypočítej a napiš, kolik má podle Tebe úloha řešení: 4

| 2 |
| |
12

| 2 |
| |
12

| 2 |
| |
12

4 | 2 | 4
6 | 6
12

2 | 2 | 6
4 | 8
12

1 | 2 | 7
3 | 9
12

5 | 2 | 3
7 | 5
12

• Pokud se řešení upočítá to, že převrátíme či prohodíme čísla. To by jich bylo víc.

• Pokud by se řešení počítalo i prohození, tak má tato úloha 7 řešení, přesně tolik je tam kroužků → haha, to je vtipné a nápadité! :)

1

13. Vypočítej:

zde by musela být + 0, pak to dle mě nemá řešení!

1	1	1	6
2	2	7	
3	9		
12			

14. Vypočítej:

1	2	1	2
3	3	3	
6			
12			

Napiš do políček čísla, která odpovídají pořadí doplnění do úlohy. (1-7)

4	2	1	X
5	X	3	
6	7		
X			

15 Doplněním tří políček vytvoř úlohu, která nebude mít řešení.

	7	4	
12			

-> ani zde se nemůže použít 0!

Součtové trojúhelníky

homogenní varianta 16.4.08

x Tento typ úloh znáš ze : ☐ZŠ ☒VŠ

x Považuješ ho, tak jak ho znáš, za kreativní a přínosné matematické prostředí? ano - ne

x Co potřebuješ umět, abys mohla počítat takové úlohy? sčítat, odčítat, logicky uvažovat

V políčku, které doplníte jako 1., udělejte, prosím vás, tečku.

U všech úloh počítejte v oboru přirozených čísel bez nuly!!

1. Kolik nejméně potřebuješ znát čísel, abys dokázala jednoznačně vyřešit úlohu? (tzn. jediné řešení) Zakroužkuj:

1 2 3 4 5 6 7

3 7

1	2	3	4
3	5	7	
8	13		
21			

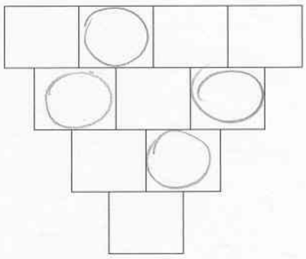
3 1 3 6

4	4	9

8 13

21

2. Zakroužkuj ta 4 políčka, která bys chtěla mít v zadání úlohy jako zadaná.



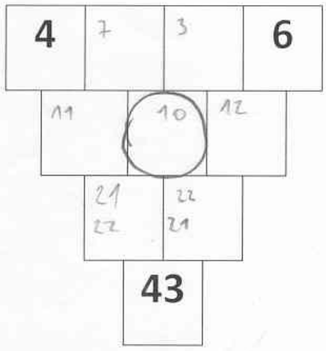
3. Který typ úloh Ti je sympatičtější? A B

1	5	9	3
6	14	12	
20	26		
46			

33			
21	12		
14	7	5	
6	9	2	3

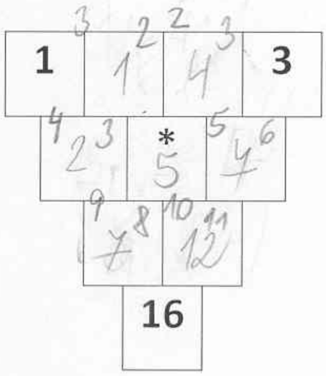
4. Zakroužkuj políčko, které bys ještě chtěla znát, aby se Ti úloha počítala co nejlépe.

1



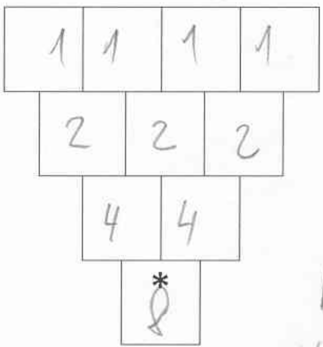
5. Urči rozmezí čísel, která je možné doplnit do políčka s *, aby úloha měla jediné řešení.

YEN 4 –



1223
345
79
16

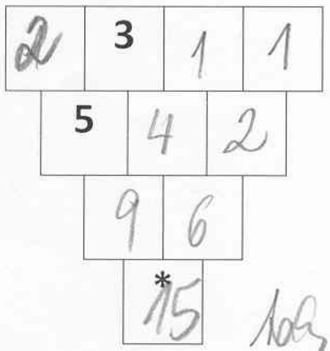
6. Jaké nejmenší číslo může být na místě *? 8



PAR VTEŘIN

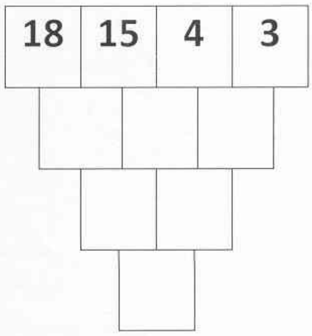
Kolik času Ti tato úloha zabrala?................

7. A tady?



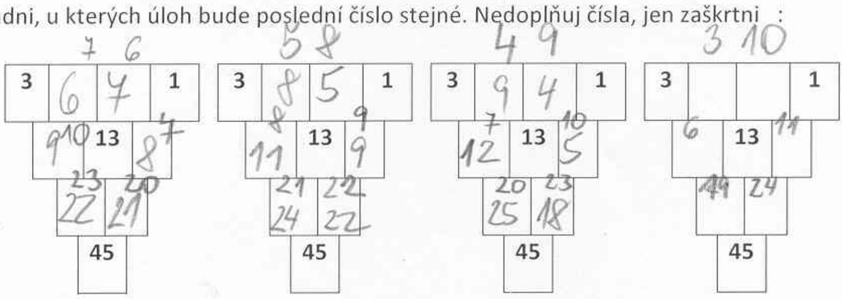
taky pár vteřin

Kolik tato?..



~~8.~~ Záleží na pořadí horních čísel? ano – ne

Odhadni, u kterých úloh bude poslední číslo stejné. Nedoplňuj čísla, jen zaškrtni :

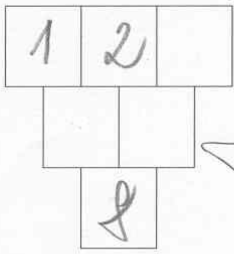


2 11
3 11 2 1
14 13 13
27 46
43

Teď už do políček můžeš psát. Pod ○ napiš poslední číslo. Překvapil Tě výsledek? ano - ne

9. Kolik má úloha řešení? ∅

Kolik času Ti to zabralo? 3 min.



10. Vymysli vstupní úlohu žákovi 1. třídy, který zná prostředí jen teoreticky.

3 1 12 1
4 13 13
17 26
43

3 12 1 1
15 13 2
28 15
43

11. Přiděl čísla 1-6 k úlohám tak, jak bys je dávala žákům popořadě. (1=nejjednodušší)

(3)
1 2 3
3 5
8

(1)
3 2 4
5 6
11

(6)
_ 2 _
_ _
12

(4)
4 3 2
7 5
12

(5)
7 3 1
10 4
14

(2)
10 15 1
25 16
41

12. Vypočítej a napiš, kolik má podle Tebe úloha řešení: 4

1 2 7
3 9
12

2 2 6
4 8
12

3 2 5
5 7
12

4 2 4
6 6
12

_ 2 _
_ _
12

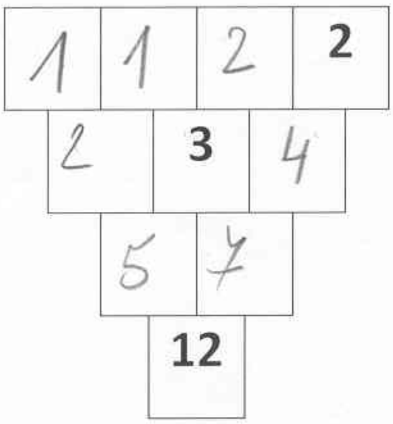
_ 2 _
_ _
12

_ 2 _
_ _
12

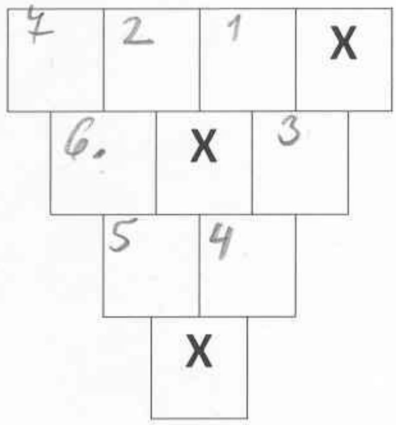
~~13. Vypočítej:~~

nelze

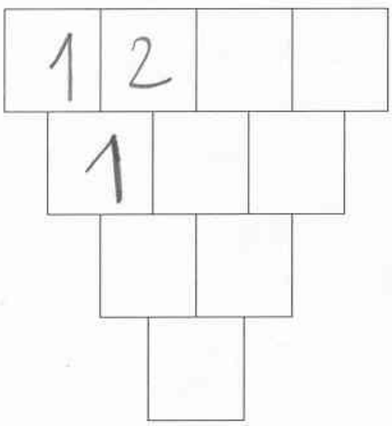
14. Vypočítej:



Napiš do políček čísla, která odpovídají pořadí doplnění do úlohy. (1-7)



15 Doplněním tří políček vytvoř úlohu, která nebude mít řešení.



Součtové trojúhelníky

homogenní varianta 16.4.08

x Tento typ úloh znáš ze : ☐ZŠ ☒VŠ

x Považuješ ho tak jak ho znáš za kreativní a přínosné matematické prostředí? ano - ne

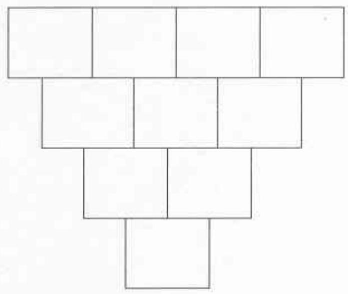
x Co potřebuješ umět, abys mohla počítat takové úlohy? sčítat, odčítat

V políčku, které doplníte jako 1., udělejte, prosím vás, tečku.

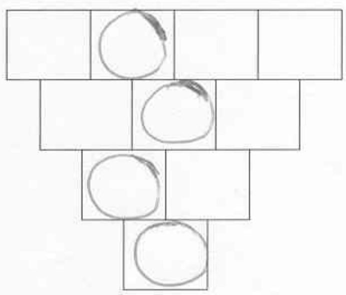
U všech úloh počítejte v oboru přirozených čísel bez nuly!!

1. Kolik nejméně potřebuješ znát čísel, abys dokázala jednoznačně vyřešit úlohu? (tzn. jediné řešení) Zakroužkuj:

1 2 3 4 5 6 7



2. Zakroužkuj ta 4 políčka, která bys chtěla mít v zadání úlohy jako zadaná.

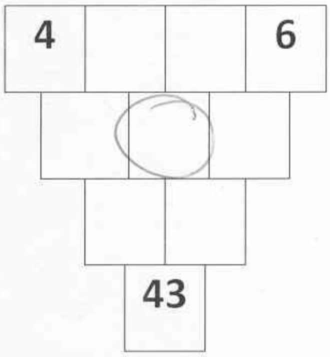


3. Který typ úloh Ti je sympatičtější? A B

1	5	9	3
6	14	12	
20	26		
46			

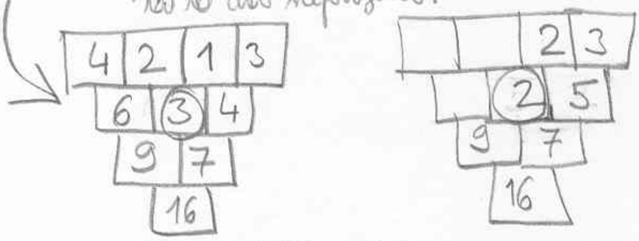
33			
21	12		
14	7	5	
9	5	2	3

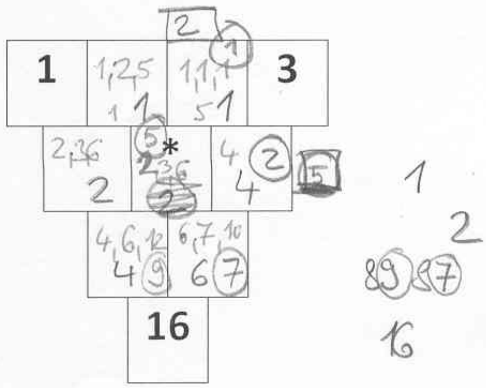
4. Zakroužkuj políčko, které bys ještě chtěla znát, aby se Ti úloha počítala co nejlépe.



5. Urči rozmezí čísel, která je možné doplnit do políčka s *, aby úloha měla jediné řešení.

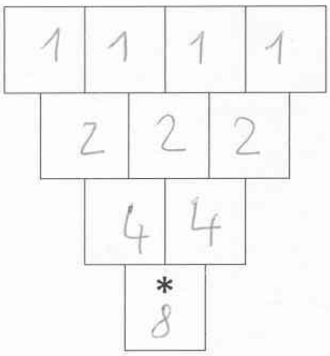
na to ani nepřijdu.



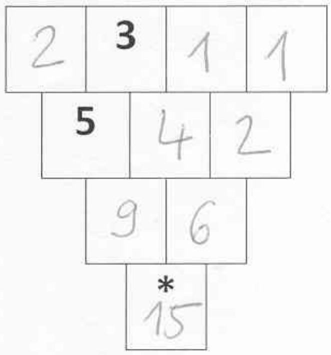


15 minut

6. Jaké nejmenší číslo může být na místě *?



7. A tady?

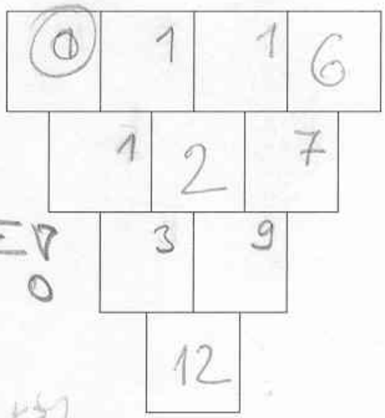


Kolik času Ti tato úloha zabrala? 15 s

Kolik tato? 20 s

(ale už vím, jak se to dělá.)

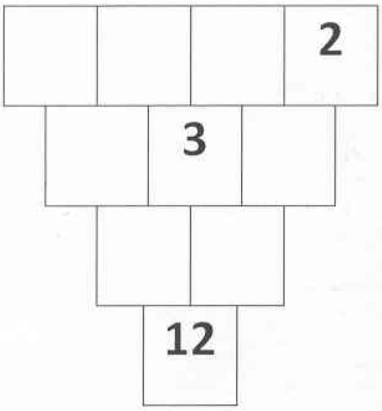
13. ~~Vypočítej~~:



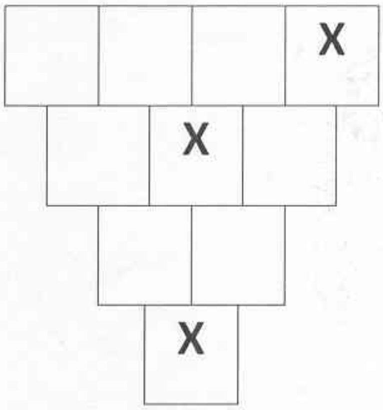
To prostě
bez nuly NEJDE!

(už nebaví - musí dodat kž)

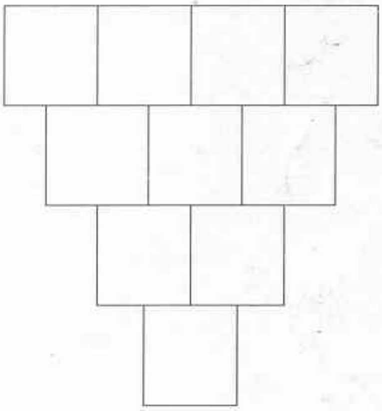
14. Vypočítej:



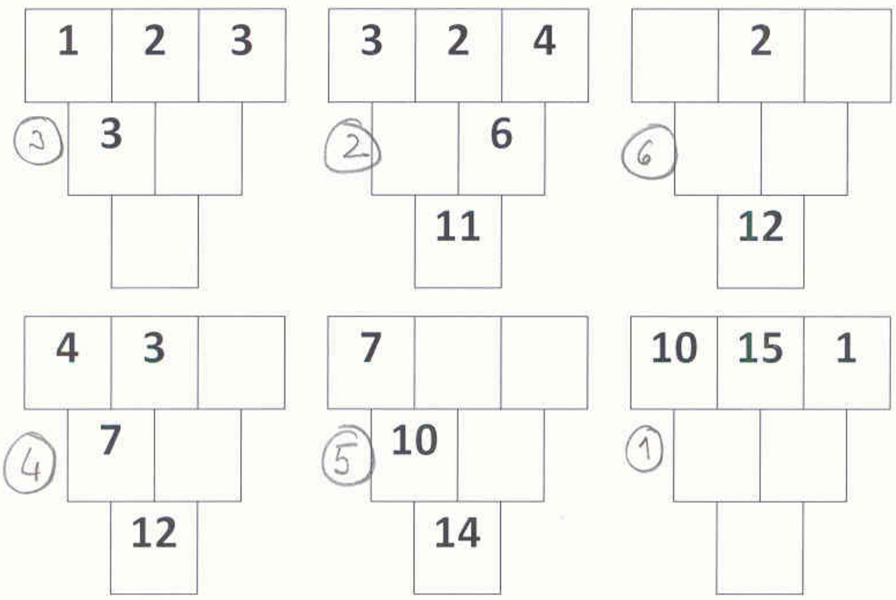
Napiš do políček čísla, která odpovídají pořadí doplnění do úlohy. (1-7)



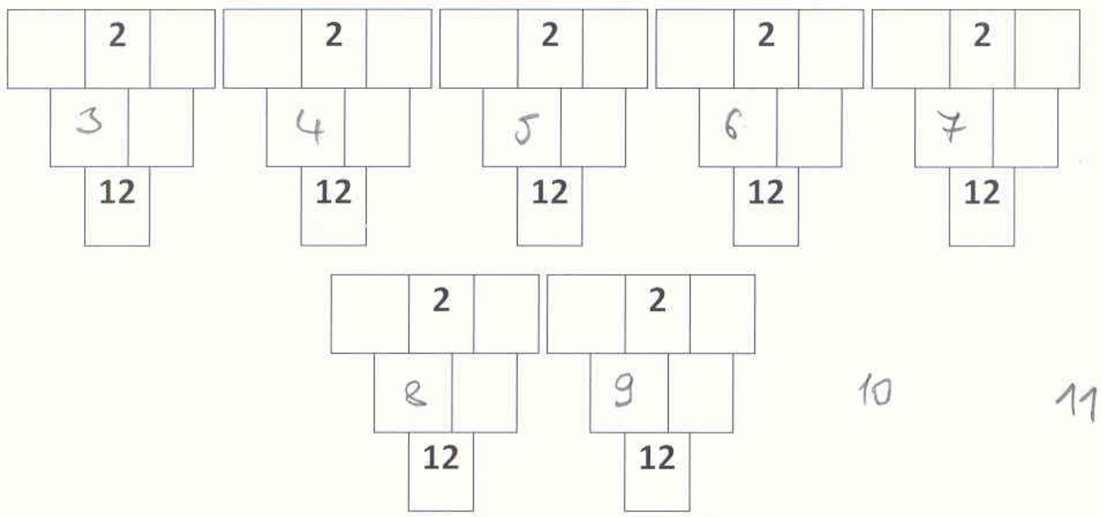
15 Doplněním tří políček vytvoř úlohu, která nebude mít řešení.

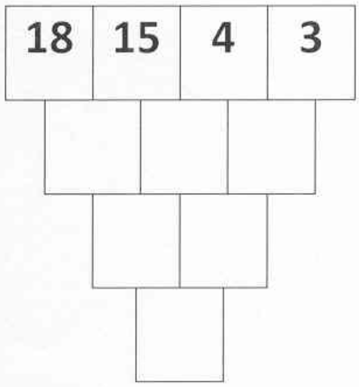


11. Přiděl čísla 1-6 k úlohám tak, jak bys je dávala žákům popořadě. (1=nejjednodušší)



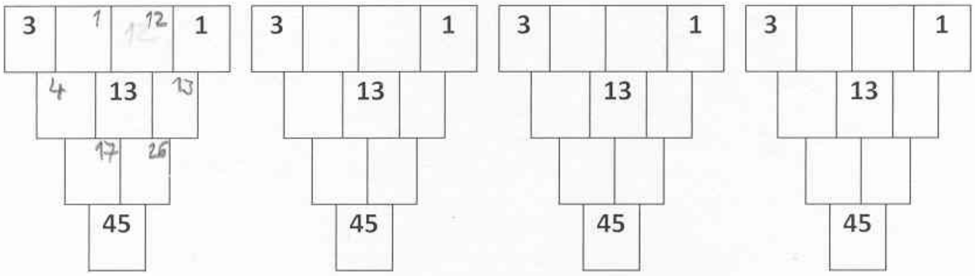
12. Vypočítej a napiš, kolik má podle Tebe úloha řešení: 9





8. Záleží na pořadí horních čísel? ano – ne

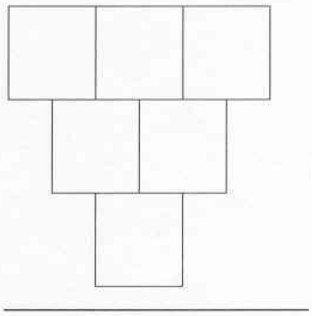
Odhadni, u kterých úloh bude poslední číslo stejné. Nedoplňuj čísla, jen zaškrtni :



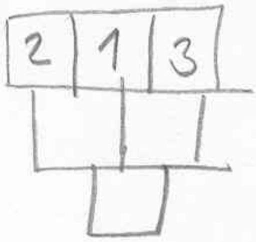
Teď už do políček ~~můžeš psát.~~ Pod ◯ napiš poslední číslo. Překvapil Tě výsledek? ano - ne

9. Kolik má úloha řešení?______

Kolik času Ti to zabralo?_______

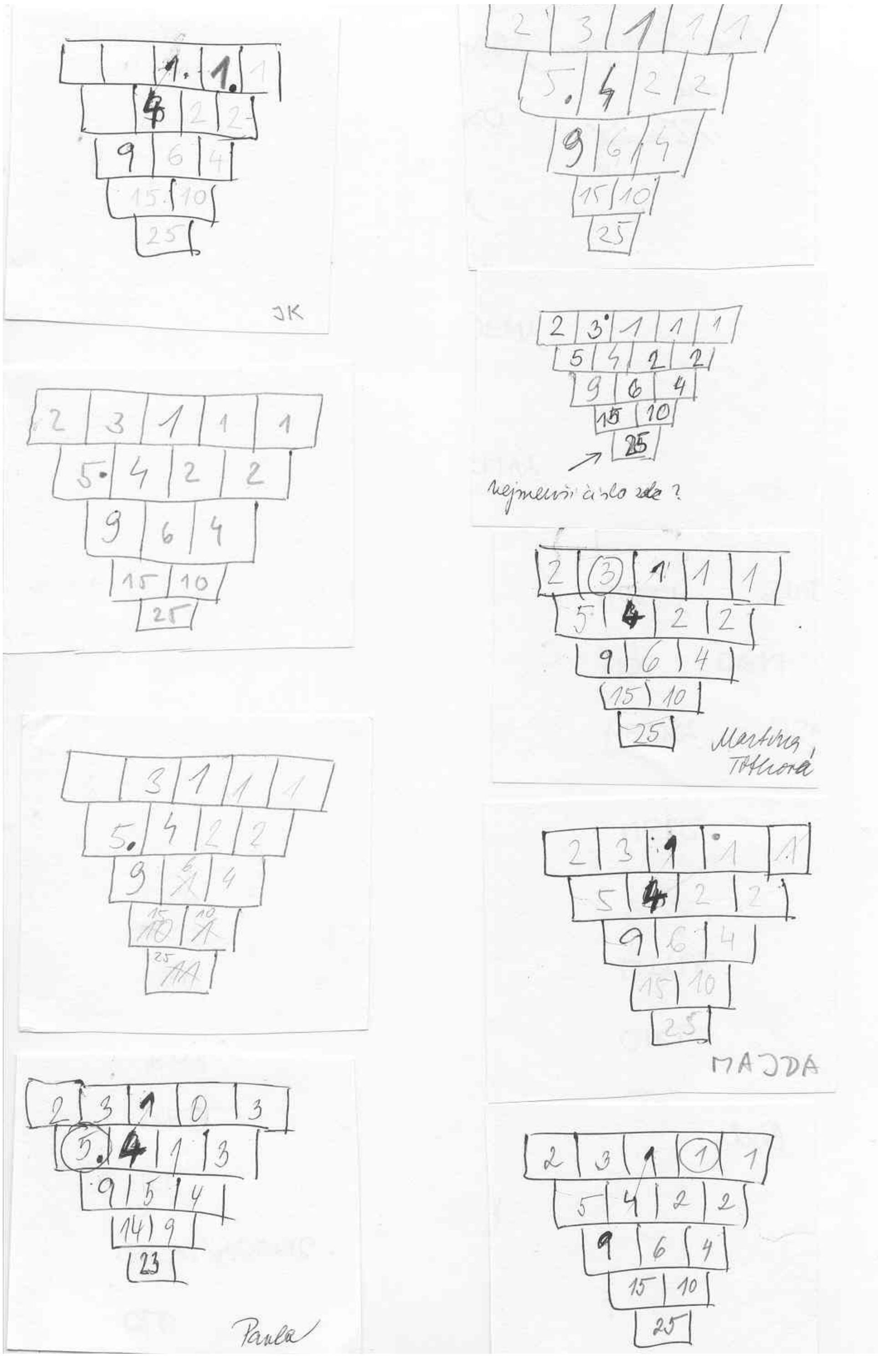


10. Vymysli vstupní úlohu žákovi 1. třídy, který zná prostředí jen teoreticky.



7.3.2. Úloha „ c,g,j “

Ukázka řešení jedné a té samé úlohy několika mými spolužačkami ve 4. ročníku oboru Učitelství pro 1.st.ZŠ. Zadání znělo: Jaké nejmenší číslo může být ve spodním okně? V políčku, kde doplnily číslo jako první, udělaly tečku. Nejvíce mě zajímalo, jestli budou mít potřebu vyplňovat i políčka a, b, f, která jsou pro výsledek zcela zbytečná.



7.4. Příloha 4: Experiment z pohledu kameramana a rádce

Když jsem stála za kamerou při experimentu Majdy, nebyl mi bohužel průběh Majdiny práce lhostejný, protože nejsem profesionál a nesoustředila jsem se tolik na kvalitu natáčení jako na to, co Majda s Ivetkou říkají, dělají. Byla jsem tam ale od toho, abych pořídila použitelný videozáznam, takže jsem myslela na správné držení kamery, aby se mi netřásla ruka, … a řešila jsem tyto otázky a hlavně jsem věděla, že nemůžu Majdě do experimentu vstupovat. Ale v jedné části experimentu jsem se nemohla ubránit a na Majdu jsme reagovala. Zřejmě mě ovlivnila také skutečnost, že jsem předtím Majdě říkala, ať Ivetce nic neprozrazuje, ať ji nechá i bez komentáře chybovat, že cílem není ji to naučit, ale zjistit její myšlenkové pochody, tudíž chyby jsou naopak vítány. Majda tedy začala experiment v prostředí „Výstaviště“ tím, že ji nechala samotnou přijít na to, co se tam aasi odehrává, jak toto prostředí funguje. Ivetka ale na nic nepřišla a Majda to zkoušela na jiné úloze, kombinovala je, snažila se všemožně a velice šikovně Ivetce pomoci, aby na to přišla sama. Ivetka ale pořád nic a když už tato situace trvala asi 10 minut, měla jsem pocit, že jsou obě dvě už z toho unavené a je nejvyšší čas Ivetce prostředí představit. Přece jen náš cíl je jiný a unavovat Ivetku tímto je škoda, protože už pak nebude mít energie na počítání kaskády úloh, což nás zajímá nejvíc. V té chvíli mi zkrátka bylo líto Majdy a říkala vyčítala jsem si, že jsem to Majdě řekla asi špatně, že to bere moc doslov mou radu, ať nic neprozrazuje. Proto jsem řešila, zda mám do experimentu nějakým způsobem vstoupit. Nakonec jsem ani nevypínala kameru a Majdě jsem posunky a výraznou artikulací naznačila, aby už jí to řekla. Majda to pochopila a Ivetce prostředí představila. Řekla jí, že to políčka jsou jako místnosti, ….Na Ivetce bylo vidět, že byl nejvyšší čas. Ulevilo se jí a myslím, že byla opravdu ráda:-)

Školitelský pohled na situaci:

Prof.Hejný si neuvědomil jednu věc. Když nám dává k experimentu instrukci, abychom dítěti nic neprozrazovali a že cílem je poznat jeho myšlení nikoliv ho učit, bereme z nedostatku zkušeností tuto instrukci doslova. V experimentu se snažíme tento požadavek dodržet, přestože nám samotným je to často nepříjemné a cítíme potřebu dítěti vysvětlovat.
Na základě této zkušenosti si školitel uvědomil naši omezenost. Teď už bude vždy dodávat, že pokud je pro dítě během experimentu dlouhé ticho a cítíme, že je dítě bezradné a frustrované, je nutné zakročit.