Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jakub Tichý

Regularita řešení systémů popisujících zobecněné Newtonovské tekutiny

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Studijní program: Fyzika,
Matematické a počítačové modelování ve fyzice a technice

Chtěl bych poděkovat svému konzultantovi dr. Bulíčkovi. Především bych rád poděkoval dr. Kaplickému za pečlivé a trpělivé vedení práce, za čas, který vedení věnoval a hlavně za dobré rady a cenné připomínky, bez nichž by práce nebyla v takové podobě, v jaké je teď.

Na tomto místě bych také velice rád poděkoval svým rodičům za to, že mě vždy podporovali během mých studijních let.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 16. dubna 2009 Bc. Jakub Tichý

Obsah

Název práce: Regularita řešení systémů popisující zobecněné Newtonovské tekutiny
Autor: Bc. Jakub Tichý
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
e-mail vedoucího: kaplicky@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Zkoumáme vlastnosti řešení systémů nelineárních parciálních diferenciálních rovnic popisující evoluční rovinné proudění jisté třídy zobecněných Newtonovských tekutin zahrnující především různé varianty mocninných modelů. Studujeme problém s hraničními podmínkami dokonalého skluzu. Nelineární eliptický operátor, který se vztahuje k tenzoru napětí, má p-potenciální strukturu. Zaměříme se speciálně na případ $p = 2$. Hlavní část práce se zabývá regularitou druhých prostorových derivací a překonáváním nových obtíží spojených s užitím uvažovaných hraničních podmínek.

Klíčová slova: Zobecněné Newtonovské tekutiny, hraniční podmínka dokonalého skluzu, regularita

Title: Regularity of solutions of systems describing generalized Newtonian fluids
Author: Bc. Jakub Tichý
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: kaplicky@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: We investigate properties of solutions of systems of nonlinear partial differential equations describing evolutionary flow of certain class of generalized Newtonian fluids including in particular various variants of the power-law models. We study the problem with perfect slip boundary conditions. The nonlinear elliptic operator, which is related to the stress tensor, has a $p-$potential structure. We focus especially on the case $p = 2$. The main part of the work deals with regularity of second space derivatives and overcoming new difficulties connected with usage of considered boundary conditions.

Keywords: Generalized Newtonian fluids, perfect slip boundary condition, regularity

Kapitola 1

Úvod

V této práci budeme studovat vlastnosti řešení systémů nelineárních parciálních diferenciálních rovnic popisující nestacionární rovinné proudění jisté třídy zobecněných Newtonovských tekutin zahrnující především různé varianty mocninných modelů. Proudění je popsáno systémem rovnic

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{S}} = -\nabla p + \boldsymbol{f}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{v}\, Q_T \tag{1.1}$$

Rovnice (1.1) uvedeme na tomto místě bez toho, aniž bychom definovali nebo blíže specifikovali jednotlivé členy. V následující sekci nejprve shrneme historii matematického zkoumání systému rovnic (1.1), poté v sekci 1.2 zavedeme značení, ve kterém se částečně ozřejmí, co které členy znamenají. Dále bude následovat kapitola 2, kde stručně nastíníme odvození a význam systému rovnic (1.1) a přesně specifikujeme požadavky na člen $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Tento tenzor napětí má p-potenciální strukturu. Zaměříme se speciálně na případ $p = 2$. Aby byl systém (1.1) dobře uchopitelný, doplníme ho počáteční a hraniční podmínkou. Budeme studovat rovnice (1.1) spolu s hraničními podmínkami dokonalého skluzu.

Třetí kapitola je věnována existenci slabého řešení systému (1.1). Budeme postupovat podobně jako v páté kapitole knihy [25], kde autoři ukazují existenci obecnějšího řešení než je slabé řešení (tzv. řešení v mírách) systému (1.1) spolu s periodickými okrajovými podmínkami pro dimenzi $d \geq 2$ a parametr $p > \frac{2d}{d+2}$.

Hlavní část práce (kapitola 4) se zabývá regularitou řešení $\boldsymbol{u}$. Nejprve se ukáže časová regularita, poté se studuje regularita druhých prostorových derivací $\boldsymbol{u}$. Zde je potřeba překonat nové obtíže spojené s užitím hraničních podmínek dokonalého skluzu. V případě prostorové regularity se standardně postup rozdělí na vnitřní regularitu a regularitu u hranice. Vnitřní regularitou se zabývat nebudeme. Jak je uvedeno níže, jednoduchou modifikací výpočtu provedeného v rámci regularity u hranice dostaneme též výsledky uvnitř oblasti Ω. U hranice nejprve získáme informace o tečných derivacích, informace o normálovém směru poté dostaneme z rovnice (1.1). Máme dvě možnosti, jak postupovat.

První možnost využívá faktu, že pokud je hranice rovná, získáme snadno informace o tečných derivacích. Proto se hranice lokálně narovnává lokální změnou souřadnic. Řešíme potom problém na pěkné oblasti, ale změna souřadnic ovlivní diferenciální operátory a také eliptický člen. Tento postup využívá C. Ebmeyer v článku [2]. Studuje stacionární variantu systému (1.1) ve třech dimenzích spolu s hraničními podmínkami dokonalého skluzu. Předpokládá rovněž $p-$strukturu tenzoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ a zajímá se především o případ $p < 2$. Získává regularitu v Sobolevových prostorech s neceločíselnou derivací a v Nikolského prostorech. Využívá toho, že hraniční podmínky dokonalého skluzu umožňují rozšířit řešení přes rovnou hranici. Formuluje výsledky pro rovnou hranici a v závěru vrací lokální změnou souřadnic rovnou hranici do obecného tvaru. V článku [2] ovšem není zcela průkazné, že výsledky získané pro rovnou hranici platí i pro obecný tvar hranice.

Alternativní metoda ponechává oblast takovou, jaká je a uvažuje derivace v tečném směru k $\partial\Omega$. Vzhledem k tomu, že tyto tečné derivace nekomutují s klasickými derivacemi, objeví se zde další nepříjemné členy, které je potřeba odhadnout. Tato metoda se objevuje v článku [26], kde autoři studují systém (1.1) ve třech dimenzích spolu s homogenní Dirichletovou hraniční podmínkou. Eliptický člen má $p-$potenciální strukturu. Pro případ případ $p > 2$ je zde dokázána existence slabého řešení a pro $p \geq 9/4$ je ukázáno, že slabé řešení je silné a jednoznačné ve třídě všech slabých řešení.

V sekci 4.2 Regularita druhých prostorových derivací budeme postupovat dle metody vyvinuté v článku [26]. Vzhledem k tomu, že uvažujeme jiné hraniční podmínky, vyskytnou se jisté nové problémy. Musíme brát takovou testovací funkci, aby respektovala hraniční podmínky dokonalého skluzu. To zajistíme přidáním dodatečných členů k testovací funkci, tím se však poruší nulovost divergence. To vyřešíme korekcí pomocí Bogovského lemmatu. Tedy je vidět, že postup v [26] bude třeba jistým způsobem modifikovat. Podobný důkaz, jaký předkládáme v sekci 4.2 Regularita druhých prostorových derivací, je proveden v článku [14]. Autoři pracují mimo jiné i s podmínkami dokonalého skluzu. Kombinují regularitu v tečných a normálových směrech. Co se týče tečného směru, důkaz je velice strohý.

Superkvadratický případ ($p > 2$) vyžaduje někdy odlišný přístup než subkvadratický případ ($p < 2$). Dále se tyto dva případy liší tím, jaké fyzikální jevy zachycují. O fyzikální motivaci se stručně zmíníme v sekci 2.5 Formulace problému. Více lze nalézt například v článku [24] nebo v knize [25]. Mohlo by se zdát, že pro $p = 2$ se rovnice (1.1) pouze redukuje na Navier-Stokesovy rovnice a je tedy zbytečné postupovat obecně, když je možno využít jisté výsledky a metody vyvinuté přímo pro Navier-Stokesovy rovnice.

Některé články (např. [12], [13], [14]) ukazují, že pro obecný růst p je výhodné ukázat nejprve existenci a regularitu pro pro $p = 2$ a poté pro $p \neq 2$ udělat kvadratickou aproximaci tenzoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\lambda} := (1 + \lambda|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})|^2)^{\frac{2-p}{2}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})).$$

Následně se provedou odhady pro aproximativní řešení $\boldsymbol{u}^{\lambda}$ příslušející $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\lambda}$ stejnoměrně vzhledem k λ. Využijí se již ukázané odhady pro $p = 2$. Tento postup se zakončí limitním přechodem $\lambda \to 0$. Z toho je zřejmé, že není zbytečné provádět pro $p = 2$ tento obecný postup, ale dokázaná tvrzení pro $p = 2$ otevírají další možnosti studia problému.

1.1 Historie zkoumání problému

Tekutiny tvoří nedílnou součást našeho života. Studium vlastností tekutin z různých úhlů pohledu je tedy velmi přirozené a sahá hluboko do minulosti. Je proto zajímavé, že k matematickému popisu tekutin se přistoupilo relativně pozdě. V roce 1822 navrhl francouzský inženýr C.M.L.H. Navier soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které popisovaly proudění viskózních nestlačitelných tekutin. Fyzikální předpoklady nevypadaly realisticky, a tak tomuto modelu nebyla věnována pozornost. V roce 1945 odvodil G.H. Stokes mnohem rigoróznějším způsobem model lineárně viskózní tekutiny. Dostal stejné rovnice jako Navier. C.W. Oseen [28] byl první, kdo tento problém seriózně matematicky studovat. Na jeho práci navázal J. Leray v článcích [20] [21] z let 1933-1934. Po druhé světové válce německý matematik E. Hopf [8] dále rozšířil výsledky J. Leraye. Na konci šedesátých let vstoupila na scénu O.A. Ladyženská, která se až do své nedávné smrti zabývala Navier-Stokesovými rovnicemi.[1]

[1] Tento odstavec týkající se historie Navier-Stokesových rovnic vznikl zkrácením historického úvodu v [29]. Zde je možno najít plno dalších referencí týkajících se zkoumání Navier-Stokesových rovnic.

Historie matematického zkoumání modelu mocninného typu sahá právě k O. A. Ladyženské. Na své přednášce na Mezinárodním matematickém kongresu v roce 1966 spolu s dalšími navrhovala studovat systém rovnic (1.1) pro růst $p = 4$. Později tyto první výsledky rozšířila a prezentovala v článcích [16], [17] a [18]. Podobné výsledky uveřejnil také Lions [22], který využil jiného postupu. Zatímco Ladyženská odvodila nelineární závislost $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ na $\boldsymbol{D}$ pomocí kinetické teorie, Lions použil nelineární $p-$Laplaceův operátor. Kombinací teorie monotónních operátorů a kompaktnosti oba ukázali existenci slabého řešení mocninného modelu pro $p \geq 1 + \frac{2d}{d+2}$. Využije se $p-$koercivita, podmínka $(p-1)$ růstu a monotonie nelineárního operátoru. Tyto výsledky platí jak pro homogenní Dirichletovy hraniční podmínky, tak pro periodické hraniční podmínky.

Mnoho vynikajících matematiků navazovalo na tyto výsledky a dále je rozšiřovalo. Bylo by možné dále diskutovat o tom, pro jaké hodnoty parametru p a dimenze d $(d = 2, 3)$ je známa jednoznačnost, případně existence silného řešení, existence silného řešení pro malá data nebo lokální existence silného řešení pro libovolná data. V knize [25] lze najít plno referencí a podrobný rozbor toho, co je známo pro různé hodnoty p a kdo se o tyto výsledky prvně zasloužil.

Zmínili jsme některé autory, kteří se zasadili o důkaz existence slabého řešení rovnic typu (1.1). Protože se v naší práci budeme zabývat regularitou řešení, uveďme alespoň krátce několik referencí na články v této oblasti. První, kdo úspěšně ukázal globální $\mathcal{C}^{1,\alpha}-$regularitu řešení (1.1) byl Seregin [32]. Dokázal regularitu řešení pro $p = 2$ za předpokladu omezenosti druhých a třetích derivací potenciálu Φ k tenzoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Za stejných předpokladů na Φ byly tyto výsledky rozšířeny v publikaci [19], kde je ukázáno, že gradient $\boldsymbol{u}$ je dokonce Lipschitzovsky spojitý.

Jiný přístup byl použit v [27]. Zde autoři ukázali, že každé řešení $\boldsymbol{u} : Q_T \mapsto \mathbb{R}^2$ problému

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(\boldsymbol{a}(\nabla \boldsymbol{u})) = 0 \quad \text{v}\, Q_T \tag{1.2}$$

má lokálně Hölderovsky spojitý gradient. Na $\boldsymbol{a}$ byly kladeny podobné požadavky jako na $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ pro $p = 2$. Ukázali nejprve regularitu časové derivace $\boldsymbol{u}$ a poté pro každou časovou hladinu využili stacionární L^q teorii pro (1.2) s časovou derivací $\boldsymbol{u}$ na pravé straně.

Tato metoda byla modifikována a aplikována v článku [13] na rovnici (1.1) pro periodické okrajové podmínky. Autoři zde ukázali, že pro nulovou počáteční podmínku a dostatečně hladkou pravou stranu existuje pro $p \in (4/3, 2]$ řešení $\boldsymbol{u}$, které má Hölderovsky spojitý gradient. Toto řešení je jediné ve třídě slabých řešení splňujících energetickou nerovnost. Spodní hranice na p je zde díky tomu, že rozdíl mezi (1.1) a 1.2 nedovoluje ukázat nejprve regularitu časové derivace, ale je potřeba postupovat současně pro časovou i prostorovou derivaci.[2].

Na závěr této sekce zmiňme bez nároku na úplnost některé významné články týkající se regularity řešení rovnice typu (1.1). V nich lze najít plno dalších zajímavých referencích. Publikace [12] se zabývá dvoudimenzionálním stacionárním problémem s homogenními Dirichletovými hraničními podmínkami, v [14] stejní autoři rozšiřují výsledky pro nehomogenní Dirichletovy hraniční podmínky a podmínky dokonalého skluzu. Evoluční variantu s periodickými hraničními podmínkami studují stejní autoři v [13]. V [11] je studován evoluční problém ve dvou dimenzích s homogenními Dirichletovými hraničními podmínkami, v [9] stacionární varianta problému, tenzor $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ má však nestandardní růst.

1.2 Značení

Nechť T je kladná konstanta. Označme $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$ časový interval, během kterého studujeme proudění tekutiny. Oblast okupovanou tekutinou značíme $\Omega \subset R^d$, kde $d \in \mathbb{N}$. V celé práci budeme předpokládat, že Ω není kruhová oblast. Z teoretického hlediska lze rovnice popisující tekutinu studovat pro obecné d, ale největší praktický význam má $d = 3$ nebo v případě rovinného proudění $d = 2$. V naší práci se zaměříme právě na tento dvoudimenzionální případ. Od teď $d = 2$. Veličiny popisující proudění, například rychlost $\boldsymbol{u}$, tlak π, hustota ϱ jsou funkcemi času a souřadnic. Tedy $f = f(x, t)$, kde $x = (x_1, ..., x_d)$ a $t \in I$ značí čas. Oblast $Q_T = I \times \Omega$, na níž jsou veličiny popisující proudění definovány, se nazývá časoprostorový válec. Tedy

$$Q_T = \{(t, x),\, t \in (0, T),\, x \in \Omega, \} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Pokud je Ω otevřená, potom i Q_T je otevřený.

Běžně se používají dva druhy popisu proudění tekutin, Lagrangeův a Eulerův. Zde použijeme Eulerův, který je založený na určení rychlosti $\boldsymbol{u}(x, t)$ částice tekutiny procházející bodem x v čase t.

[2]Historické souvislosti obsažené v posledních třech odstavcích jsou převzaté z [11]

Nechť $(X(\Omega), \|\cdot\|_{X(\Omega)})$ je Banachův prostor skalárních funkcí definovaných v Ω. Symbolem X^* budeme značit duální prostor k X, tj. prostor všech spojitých lineárních funkcionálů $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$. Nechť $\varphi \in X^*$, $x \in X$. Potom $\langle \varphi, x \rangle_X$ značí hodnotu φ v bodě x, respektive říkáme, že $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ značí dualitu mezi X a X^*. Normu na X definujeme jako

$$\|x\|_X = \sup_{\|\varphi\|_X^* \leq 1} |\langle \varphi, x \rangle_X|,$$

normu na X^* přirozeně

$$\|\varphi\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle \varphi, x \rangle_X|.$$

$X(\Omega)^2$ reprezentuje vektorové funkce, jejichž složky patří do $X(\Omega)$. Podobně $X(\Omega)^{2\times 2}$ značí tenzorové funkce se složkami v $X(\Omega)$. Normu definujeme obdobně jako v případě prostoru skalárních funkcí. Pro přehlednost budeme vektorové a tenzorové funkce značit tlustými písmeny, skalární funkce standardně.[3] Prostor všech symetrických matic druhého řádu označme $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$. Tedy $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym} = \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : B_{ij} = B_{ji},\, i,j = 1,2\}$.

Nechť $p > 1$. Potom $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ standardně značí Lebesgueův prostor. Prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertův, můžeme tedy zavést skalární součin $(\cdot,\cdot)$ následovně: pro $f, g \in L^2(\Omega)$ definujme $(f,g) := \int_\Omega fg \,\mathrm{d}x$. Nechť $p > 1$ a $k \in \mathbb{N}$, potom $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ je obvyklé značení pro Sobolevův prostor. Dále

$$\Big(L^p(I; X(\Omega)), \Big(\int_0^T \|\cdot\|^p_{X(\Omega)} dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)$$

značí Bochnerův prostor. Nebude-li uvedeno jinak, předpokládáme $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřená. Nyní definujme některé prostory funkcí, které dále využijeme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\Omega) &= \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\, \operatorname{supp}\psi \subset \Omega \text{ je kompaktní}\}, \\
W^{1,p}_0(\Omega)^2 &= \overline{\{\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)^2\}}^{\|\cdot\|_{1,p}}, \\
W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)^2 &= \overline{\{\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)^2,\, \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0\}}^{\|\cdot\|_{1,p}},
\end{aligned}$$

[3]Pro bod $x = (x_1, x_2)$ připouštíme nekonzistenci s právě zavedeným značením. Tj. místo abychom psali $\boldsymbol{x}$, budeme psát pouze x, ačkoli se jedná o vektor.

$$
\begin{aligned}
W^{1,p}_{\boldsymbol{n}}(\Omega)^2 &= \{\boldsymbol{\psi} \in W^{1,p}(\Omega)^2,\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \,\mathrm{na}\, \partial\Omega\},\\
W^{1,p}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2 &= \{\boldsymbol{\psi} \in W^{1,p}(\Omega)^2,\ \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0,\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \,\mathrm{na}\, \partial\Omega\},\\
L^{p}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2 &= \overline{\{\boldsymbol{\psi} \in W^{1,p}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2\}}^{\|\cdot\|_p},\\
L^p_0(\Omega) &= \{\psi \in L^p;\ \int_\Omega \psi \,\mathrm{d}x = 0\}.
\end{aligned}
$$

V celé práci budeme velmi často využívat Einsteinovu sumační konvenci, tj. kdekoli se ve výrazu vyskytne dvakrát stejný index, sčítáme přes něj. Např. $u_k n_k n_i = \sum_{k=1}^{2} u_k n_k n_i = [(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}]_i$.

Symbolem $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})$ rozumíme symetrickou část $\nabla\boldsymbol{\psi}$, tj. $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}) \equiv \frac{1}{2}[(\nabla\boldsymbol{\psi}) + (\nabla\boldsymbol{\psi})^\top]$. Neuvedeme-li u $\boldsymbol{D}$ žádný argument, budeme předpokládat, že se jedná a symetrickou část gradientu rychlosti. Tedy $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$.

Kapitola 2

Model

2.1 Rovnice kontinuity

Oblast Ω může obecně záviset na čase. Abychom s tímto faktem mohli lépe pracovat, definujme veličinu zvanou kontrolní objem. Buď $\mathcal{V}(0) \subset \Omega$ objem, který zaujímá část kapaliny v čase $t = 0$, $\mathcal{V}(t)$ značí objem, který zaujímá kapalina v čase $t \in I$. Platí $\mathcal{V}(t) \subset \overline{\mathcal{V}(t)} \subset \Omega$.

Rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování hmotnosti, který říká, že hmotnost m objemu tekutiny $\mathcal{V}(t)$ nezávisí na čase t. Vyjádříme-li hmotnost pomocí hustoty ϱ, dostáváme

$$m(\mathcal{V}(t), t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Nechť $\varrho \in \mathcal{C}^1(Q_T)$ a rychlost $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^1(Q_T)^d$. Zákon zachování hmotnosti lze zaspat v diferenciálním tvaru [1]

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{u}) = 0. \tag{2.2}$$

Uvažujeme-li nestlačitelné proudění homogenní tekutiny, tedy hustota ϱ je konstantní, rovnice kontinuity se redukuje na

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \tag{2.3}$$

[1] Diferenciální vyjádření zákona zachování hmotnosti dostaneme derivací vztahu 2.1 podle času a aplikací tzv. věty o transportu. Ta se používá z toho důvodu, že integrační oblast závisí na čase, a tak nelze použít standardní větu o derivaci integrálu dle parametru. Podrobné odvození lze nalézt například v [4] nebo v [5].

2.2 Pohybové rovnice tekutin

Nyní velmi stručně nastíníme odvození pohybových rovnic, které budou v této práci studovány. Následující postup lze nalézt prakticky v každé učebnici mechaniky tekutin, např. v první kapitole [4] nebo v první kapitole [5].

Pohybové rovnice jsou odvozeny ze zákona zachování hybnosti: Okamžitá změna celkové hybnosti objemu tekutiny tvořeného v každém časovém okamžiku týmiž částicemi a vyplňujícího v čase t objem $\mathcal{V}(t)$ je rovna síle působící na $\mathcal{V}(t)$. Předpokládejme, že $\varrho \in \mathcal{C}^1(Q_T)$ a $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^1(Q_T)^d$. Zákon zachování hybnosti lze zapsat v diferenciálním tvaru následovně[2]:

$$\frac{\partial(\varrho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}. \tag{2.4}$$

Síly v tekutinách lze rozdělit dle jejich charakteru na objemové a plošné. Tedy

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{V}(t)} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \boldsymbol{f}(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \boldsymbol{s}(x,t,\boldsymbol{n}(x))\,\mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

kde $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}(Q_T)^d$ je hustota objemových sil, $\boldsymbol{n}$ je jednotková vnější normála k $\partial\mathcal{V}(t)$ v bodě x a $\boldsymbol{s}(x,\boldsymbol{n}(x),t)$ je vektor napětí, který vyjadřuje působení tekutiny vně oblasti $\mathcal{V}(t)$ v čase t na kontrolní objem $\mathcal{V}(t)$. Předpokládáme, že $\boldsymbol{s} \in \mathcal{C}^1(Q_T \times S_1)^d$, kde S_1 je povrch jednotkové koule se středem v počátku. Abychom mohli upravit integrál vyjadřující plošné síly, využijeme následující větu:

Věta 2.2.1 (Cauchy)**.** *Pokud $\boldsymbol{s}(x,\boldsymbol{n})$ je spojitý v x, pak $\boldsymbol{s}(x,\boldsymbol{n})$ závisí na $\boldsymbol{n}$ lineárně, tj. existuje tensor $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ takový, že $\boldsymbol{s}(x,\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\mathcal{T}}(x)\boldsymbol{n}(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{V}$ a libovolnou normálu $\boldsymbol{n}$.*

Důkaz: Lze najít např. v [7].

Poznámka: Tensor $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ se nazývá (Cauchyho) tensor napětí. Lze ukázat, že tensor napětí $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ je symetrický, právě tehdy když platí zákon zachování momentu hybnosti. Důkaz lze najít v [4],[5] i [7].

Použitím Cauchyho věty a Greenovy věty dostáváme ze vztahů (2.4) a (2.5) pohybové rovnice obecných tekutin ve tvaru:

$$\frac{\partial(\varrho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \varrho \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{T}}. \tag{2.6}$$

[2] K vyjádření diferenciálního tvaru se využívá věta o transportu. Podrobné odvození viz [4], [5] nebo [7].

Vztahy mezi tenzorem napětí a ostatními veličinami popisujícími proudění tekutin jsou charakterizovány tzv. rheologickými rovnicemi tekutin. Nejjednodušší vztah popisující nevazké proudění je

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = -\pi \mathbb{I}, \tag{2.7}$$

kde π je tlak a $\mathbb{I}$ je jednotkový tensor. Tekutinám, kde tensor napětí je dán vztahem (2.7) se říká Eulerovy tekutiny. Vedle tlakových sil působí v tekutinách také třecí síly, které jsou důsledkem vazkosti. Proto uvažujme $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ v obecnějším tvaru

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = -\pi \mathbb{I} + \boldsymbol{\mathcal{T}}'. \tag{2.8}$$

Dosazením do (2.6) dostáváme

$$\frac{\partial(\varrho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \varrho \boldsymbol{f} - \nabla \pi + \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{T}}'. \tag{2.9}$$

Budeme-li předpokládat, že tekutina je homogenní a nestlačitelná, tedy hustota ϱ je konstantní, můžeme proto rovnici hustotou vydělit a dostáváme

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} - \nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{S}}, \tag{2.10}$$

kde $p := \pi/\varrho$ je kinematický tlak a tenzor $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ se liší od $\boldsymbol{\mathcal{T}}'$ pouze o přenásobení hustotou ϱ.

2.3 Nenewtonovské tekutiny

Symetrická část gradientu rychlosti $\boldsymbol{D}$ má význam rychlosti deformace. Uvažujme konstituční vztah pro $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}). \tag{2.11}$$

Tekutina se nazývá newtonovská, pokud $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ závisí na $\boldsymbol{D}$ lineárně. V opačném případě mluvíme o nenewtonovských nebo o zobecněných newtonovských tekutinách. Nejjednodušším příkladem vztahu (2.11) je lineární Stokesův zákon

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2\nu_0 \boldsymbol{D}, \tag{2.12}$$

kde ν_0 je kladná konstanta nazývaná kinematická vazkost. Rovnice (2.10) se poté nazývá Navierova-Stokesova rovnice pro nestlačitelnou tekutinu.

Uvažujme zobecnění Stokesova zákona ve tvaru[3]

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2\nu(|\boldsymbol{D}|^2)\boldsymbol{D}, \tag{2.13}$$

kde $\nu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ je obecně nelineární funkce nazývaná zobecněná vazkost.

Dříve než specifikujeme předpoklady na tenzor $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, uveďme některé konkrétní příklady relace (2.13):

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2\nu_0|\boldsymbol{D}|^{p-2}\boldsymbol{D}, \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2\nu_0(1+|\boldsymbol{D}|^2)^{\frac{p-2}{2}}\boldsymbol{D}, \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2\nu_0(1+|\boldsymbol{D}|)^{p-2}\boldsymbol{D}, \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2\nu_0(1+|\boldsymbol{D}|^{p-2})\boldsymbol{D}, \tag{2.17}$$

kde ν_0 je kladná konstanta. Na první pohled jsou patrné některé společné rysy. Všechny modely (2.14) - (2.17) splňují podmínku $p-$koercivity, tj.

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{D} \geq 2\nu_0\boldsymbol{D}^p \tag{2.18}$$

a mají růst $(p-1)$, tj.

$$|\boldsymbol{\mathcal{S}}| \leq C(1+\boldsymbol{D})^{p-1}, \quad C > 0 \tag{2.19}$$

Pro $p = 2$ se všechny vztahy (2.14) - (2.17) redukují na Stokesův zákon, tj. $\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2\nu_0\boldsymbol{D}$. Dále můžeme k $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ velmi snadno zkonstruovat skalární potenciál $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ následujícím způsobem

$$\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \equiv \nu_0 \int_0^{|\boldsymbol{D}|^2} \nu(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.20}$$

tedy pro $i, j = 1, 2$ platí

$$\mathcal{S}_{ij}(\cdot) = \partial_{ij}\Phi(\cdot) \equiv \frac{\partial\Phi(\cdot)}{\partial D_{ij}}, \qquad \Phi(0) = \partial_{ij}\Phi(0) = 0. \tag{2.21}$$

Navzdory výše uvedeným podobným rysům mají jednotlivé modely (2.14)-(2.17) odlišné asymptotické chování $\nu(s)$ pro $s \to 0+$ nebo $s \to \infty$ (viz obrázky 1.1 a 1.2 v [25]). Z toho je vidět, že třída modelů popisovaná vztahy typu (2.14)-(2.17) je velmi bohatá.

[3]Symbolem $|Du|$ se rozumí obvyklá eukleidovská maticová norma.

Na závěr této sekce krátce shrneme, které vlastnosti je možné popsat užitím uvažovaných konstitutivních vztahů. Model (2.13) zachycuje schopnost tekutiny zesilovat nebo zeslabovat rychlost smyku v jednoduchém smykovém poli (zesilovat, je-li ν rostoucí, zeslabovat, je-li ν klesající funkce). Model ovšem nezachycuje některé další jevy charakteristické pro nenewtonovské tekutiny, jako například přítomnost nenulových rozdílů normálových napětí v jednoduchém smykovém poli, schopnost tekutiny měnit vlastnosti po dosažení aktivačního kritéria, relaxace napětí, schopnost tekutiny vykazovat nelineární creep a protože jsme neuvažovali závislost zobecněné vazkosti na tlaku, tak také schopnost tekutiny zesílit nebo zeslabit tlak v jednoduchém smykovém poli. Na druhou stranu schopnost tekutiny zeslabit rychlost smyku je vykazována značným množstvím materiálů, jako jsou polymery, chemické roztoky, krev, geologické materiály, ledovce aj. Tento model tedy popisuje daleko širší třídu tekutin než klasické Navierovy-Stokesovy rovnice.

2.4 Hraniční podmínky

V této sekci stručně shrneme z článku [24] některé poznatky týkající se hraničních podmínek. V [24] je možné najít podrobnější rozbor, než uvedeme zde.

Hraniční podmínky vyžadují porozumění povahy těles, které jsou odděleny hranicí. Kdybychom uvažovali hranici mezi dvěmi kapalinami, případně mezi kapalinou a plynem, bylo by nutné do hraniční podmínky zahrnout fakt, že zde může docházet k molekulární výměně. Pokud se zaměříme na případ tekutiny a nepropustné pevné hranice, k molekulární výměně nedochází. Nepropustnost hranice je vyjádřena podmínkou $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ na $\partial\Omega$.

Stokes sám navrhnul plno hraničních podmínek. Z DuBuatova experimentu věděl, že pokud proudí voda v trubce pomalu, je tekutina v blízkosti vnitřního povrchu trubky v klidu. V tomto případě se mu zdálo zcela přirozené použít podmínku nulového skluzu ("no-slip condition"), která vyjadřuje přilnavost tekutiny k pevné hranici (tj. $\boldsymbol{u} = 0$ na $\partial\Omega$). Byl si však vědom toho, že pro vyšší rychlosti dochází ke klouzání vody po vnitřním povrchu trubky a tečná síla, která tímto vstupuje do hry, je přímo úměrná druhé mocnině rychlosti. Určení vhodné hraniční podmínky bylo pro Stokese otevřeným problémem.

Bylo vypracováno mnoho návrhů podmínek, jež by měly být aplikovány na hranici mezi kapalinou a nepropustnou pevnou látkou. Nyní krátce shrneme nejčastěji uvažované hraniční podmínky pro kapalinu proudící podél pevné nepropustné hranice. Navier odvodil obecnější variantu hraniční podmínky

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\tau} + K(\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{n})\boldsymbol{\tau} = 0, \quad K \geq 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \times I, \tag{2.22}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je vnější jednotková normála, $\boldsymbol{\tau}$ je tečný vektor a K je obvykle kladná konstanta. Někdy je možné uvažovat K jako funkci $K = K(\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}, |\boldsymbol{D}|^2)$. Pro $K > 0$ se podmínka (2.22) nazývá Navierova podmínka částečného skluzu ("Navier slip boundary condition"). Pokud $K = 0$, redukuje se (2.22) na podmínku nulového skluzu.

Pokud vztah (2.22) upravíme do tvaru $\frac{1}{K}\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{n})_{\boldsymbol{\tau}} = 0$ a pošleme $K \to \infty$, dostáváme

$$(\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{n})\boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times I. \tag{2.23}$$

Tato podmínka bývá často označována jako podmínka dokonalého skluzu ("perfect slip" nebo též "free-stick").

V mnoha případech nás zajímá pouze to, co se děje uvnitř oblasti, v níž uvažujeme proudění tekutiny. Z toho důvodu je pohodlné eliminovat přítomnost hranice a hraničních podmínek. Toho lze dosáhnout dvěma způsoby.

Za prvé je možné předpokládat, že tekutina zaujímá celý n-dimenzionální prostor ($n = 2, 3$) a rychlost zmizí pro $|x| \to \infty$. Zajímáme se tedy o vlastnosti rychlosti a tlaku v libovolném čase $t > 0$ a libovolném bodě $x \in \mathbb{R}^n$.

Za druhé můžeme předpokládat, že pro $T, L \in (0, \infty)$ $u_i, p : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou $L-$periodické v každém směru x_i a platí $\int_\Omega u_i \,\mathrm{d}x = 0$, $\int_\Omega p \,\mathrm{d}x = 0$ $i = 1 \dots n$. V tomto případě je $\Omega = (0, L)^n$. Výhoda tohoto přístupu je v tom, že pracujeme s oblastí s kompaktním uzávěrem.

2.5 Formulace problému

V předchozích sekcích jsme stručně nastínili odvození a význam rovnice kontinuity a pohybových rovnic obecných tekutin. Určili jsme konstituční vztah pro $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Vzali jsme v úvahu zjednodušující předpoklad nestlačitelnosti tekutin. Nikde jsme neuvažovali závislost na teplotě, tedy předpokládali jsme izotermický děj, neuvažovali jsme žádné energetické změny a proto pro popis proudění nemusíme přidávat další termodynamické rovnice jako zákon zachování energie. To je platné pro obecnou dimenzi d. Nyní se zaměříme na rovinné proudění, tj. $d = 2$. Aby byl systém dobře popsán, je potřeba přidat k pohybové rovnici (2.10) a rovnici kontinuity (2.3) hraniční a počáteční podmínku $\boldsymbol{u}(0, x) = \boldsymbol{u}_0$ pro všechna x v Ω.

Abychom mohli aplikovat teorii monotónních operátorů, budeme požadovat splnění jistých předpokladů na tenzor napětí $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Jak bylo zmíněno výše, předpokládáme existenci potenciálu $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2\times 2})$ k tenzoru napětí $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ tak, že je splněno následující:

Nechť existují konstanty $C_1, C_2 > 0$, že pro nějaké $p > 1$ a pro všechny $i, j, k, l = 1, 2$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ platí

$$\mathcal{S}_{ij}(\boldsymbol{A}) = \partial_{ij}\Phi(|\boldsymbol{A}|^2), \quad \Phi(0) = \partial_{ij}\Phi(0) = 0, \tag{P1}$$

$$\partial_{ij}\partial_{kl}\Phi(|\boldsymbol{A}|^2)B_{ij}B_{kl} \geq C_1(1 + |\boldsymbol{A}|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\boldsymbol{B}|^2, \tag{P2}$$

$$|\partial_{ij}\partial_{kl}\Phi(|\boldsymbol{A}|^2)| \leq C_2(1 + |\boldsymbol{A}|^2)^{\frac{p-2}{2}}. \tag{P3}$$

Jak je psáno v [12], můžeme z těchto předpokladů odvodit některé užitečné důsledky pro tenzor $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, které později využijeme. Tyto důsledky jsou shrnuty v následujícím lemmatu.

Lemma 2.5.1. *Nechť $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ a Φ splňují požadavky (P1)-(P3). Pak existují konstanty C_i, $i = 3, 4, 5$ že pro všechny $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ a nějaké $p \in (1, \infty)$ platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \geq C_3\big((1 + |\boldsymbol{A}|^2)^{\frac{p}{2}} - 1\big)|\boldsymbol{A}|, \tag{2.24}$$

$$|\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})| \leq C_4(1 + |\boldsymbol{A}|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\boldsymbol{A}|, \tag{2.25}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{B})] : (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \geq C_5(|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|^2), \tag{2.26}$$

kde $C_5 \equiv C_1 \int_0^1 (1 + |\boldsymbol{B} + s(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})|^2)^{\frac{p-2}{2}}\,\mathrm{d}s$.

Důkaz: Lze nalézt v [25], 5. kapitola, lemma 1.19 a 1.35.

Vlastnost (2.24) zachycuje $p-$koercivitu operátoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, výraz (2.25) jeho růst řádu $(p - 1)$ a ve vztahu (2.26) je zahrnuta monotonie operátoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Nyní můžeme definovat problém, jež bude předmětem studia této práce. Nazvěme jej $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^p$. Nechť $\boldsymbol{f} : Q_T \to \mathbb{R}^2$ a $\boldsymbol{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ jsou dané. Předpokládejme, že tensor $\boldsymbol{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym} \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ splňuje pro nějaké $p \in (1, \infty)$ předpoklady (P1), (P2) a (P3). Zkoumáme vlastnosti rychlosti $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) : Q_T \to \mathbb{R}^2$ a tlaku $p : Q_T \to \mathbb{R}$ řešící systém rovnic:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{S}} = -\nabla p + \boldsymbol{f} \qquad \text{v}\, Q_T, \tag{2.27}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{v}\, Q_T, \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{u}(0, \cdot) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{v}\, \Omega, \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \& \quad (\boldsymbol{\mathcal{S}}\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \qquad \text{na}\, I \times \partial\Omega. \tag{2.30}$$

Kapitola 3

Existence slabého řešení

Na konci druhé kapitoly jsme formulovali problém $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^p$. V této kapitole definujeme slabé řešení problému $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^2$, vyslovíme větu o existenci slabého řešení a dokážeme ji. Omezíme na na případ, kdy v předpokladech problému (P1)-(P3) je $p = 2$.

Definice 3.0.1. *Řekneme, že funkce $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení problému $(NS_{p.slip})^2$, pokud $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}(\overline{I}, L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2) \cap L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)$, $\boldsymbol{u}(0, x) = \boldsymbol{u}_0$ pro všechna x v Ω a slabá formulace*

$$\begin{aligned} \int_I \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle \mathrm{d}t + \int_I \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \\ - \int_I \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_I \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.1}$$

je splněna pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$.

Věta 3.0.1. *Nechť tenzor $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ splňuje předpoklady (P1) - (P3), $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\boldsymbol{u}_0 \in L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$, $\boldsymbol{f} \in L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)$. Pak existuje slabé řešení problému $(NS_{p.slip})^2$.*

Důkaz: Budeme následovat postup použitý v knize [25, kapitola 5, věta 2.17], kde je dokázána existence řešení obecněji formulovaného problému s periodickými okrajovými podmínkami. Existenci slabého řešení dokážeme tak, že zkonstruujeme nejprve přibližné řešení, konkrétně Galerkinovské aproximace, a poté provedeme limitní proces. Důkaz rozdělíme do čtyřech kroků: Galerkinův systém, apriorní odhady, limitní procesy a nabývání počáteční podmínky.

(i) Galerkinův systém

Vezměme si $\{\boldsymbol{w}^k\}_{k=1}^{\infty}$ ortogonální bázi v prostoru $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}$ a zároveň ortogonální bázi prostoru $W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}$. Uvažujme například takovou bázi, která je tvořena vlastními funkcemi Stokesova problému s hraničními podmínkami dokonalého skluzu. Taková báze lze sestrojit bez problémů, pokud Ω není kruhová oblast. Řešící operátor Stokesova problému s hraničními podmínkami dokonalého skluzu je jakožto operátor z $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$ do $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$ kompaktní (kompaktnost se získá vnořením $W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$ do $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$). Vlastní funkce řešícího operátoru lze normovat tak, že tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$. Dále díky regularitě řešení Stokesova problému platí: je-li $\Omega \in \mathcal{C}^2$, pak $\boldsymbol{w}^k \in W^{2,2}(\Omega)^2$ (to by se ukázalo stejně jako regularita druhých prostorových derivací níže). Konstrukce báze prostoru solenoidálních funkcí sestávající z vlastních funkcí eliptického operátoru lze nalézt v dodatku knihy [25]. Dále zaveďme ortogonální spojitý projektor $P^N : L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}} \mapsto H^N$, kde $H^N = \mathrm{span}\{\boldsymbol{w}^1, \dots, \boldsymbol{w}^N\}$, následujícím způsobem:

$$P^N \boldsymbol{u} \equiv \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}^k)\boldsymbol{w}^k. \tag{3.2}$$

Definujme $\boldsymbol{u}^N(t,x) \equiv \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\boldsymbol{w}^k(x)$, kde koeficienty $c_k^N(t)$ řeší Galerkinův systém

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}, \boldsymbol{w}^k \right\rangle + \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}^k)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla \boldsymbol{w}^k\,\mathrm{d}x = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}^k \rangle \\ \boldsymbol{u}^N(0) = \boldsymbol{u}_0^N = P^N \boldsymbol{u}_0 \quad 1 \le k \le N,\end{aligned} \tag{3.3}$$

což lze díky ortonormalitě báze v $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$ přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c_k^N &= \mathcal{G}_k(c_1^N, ..., c_N^N, t), \\ c_k^N(0) &= (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}^k), \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_k(c_1^N, ..., c_2^N, t) \equiv \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_k \rangle - c_r^N c_s^N \int_\Omega w_i^r w_j^s \frac{\partial w_j^k}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \\ - \int_\Omega \mathcal{S}_{ij}(c_l^N \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}^l)) D_{ij}(\boldsymbol{w}^k)\,\mathrm{d}x \qquad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Snadno můžeme nahlédnout, že funkce $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ splňuje Carathéodoryho podmínku, tj. že je měřitelná vzhledem k t, spojitá vzhledem k $\boldsymbol{c^N}$ a že dokážeme najít integrabilní majorantu (viz dodatek, definice A.2.1). To nám zaručuje lokální existenci řešení problému (3.4) na intervalu $(0, T')$ (viz věta A.2.1 v dodatku). Je-li maximální časový interval $(0, T')$, na kterém toto řešení existuje, takový, že $T' < T$, pak nutně $\max |\boldsymbol{c}^N(t)| \to +\infty$ pro $t \to (T')-$ (viz věta A.2.2 v dodatku). Ukážeme, že toto nenastane a proto $T' = T$. V následujícím dokážeme odhad $\|\boldsymbol{u}^N\|_{L^\infty(I, L^2(\Omega)^2)} \leq C$, jehož okamžitým důsledkem je

$$|\boldsymbol{c}^N(t)|^2 \leq C \qquad \forall t \in (0, T). \tag{3.6}$$

Díky spojitosti $\boldsymbol{c}^N$ a stejnoměrné omezenosti (3.6) dostáváme existenci na celém intervalu $(0, T)$.

(ii) Apriorní odhady

Nyní odvodíme apriorní odhady, které shrnuje následující lemma.

Lemma 3.0.2. *Existuje konstanta C závislá na $T, \Omega, \|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^2}$ a $\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(I,(W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)}$, že pro všechna $N = 1, 2, \ldots$ platí:*

$$\|\boldsymbol{u}^N\|_{L^\infty(I, L^2(\Omega)^2)} \leq C, \tag{3.7}$$

$$\|\boldsymbol{u}^N\|_{L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)} \leq C, \tag{3.8}$$

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t} \right\|_{L^2(I,(W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)} \leq C. \tag{3.9}$$

Důkaz:

Abychom dokázali platnost prvních dvou odhadů, vynásobíme Galerkinův systém (3.3) $c_{\boldsymbol{k}}^N(t)$, sečteme a dostaneme:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\boldsymbol{u}^N\|_2^2 + \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N) \, \mathrm{d}x = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^N \rangle. \tag{3.10}$$

V rovnici (3.10) by měl být ještě člen $\int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla \boldsymbol{u}^N \, \mathrm{d}x$, ale ten je roven nule, jak se lze přesvědčit rozepsáním do složek a užitím rovnice kontinuity $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ a okrajové podmínky $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$:

$$\int_\Omega u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_\Omega u_j \frac{\partial |\boldsymbol{u}|^2}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{u}|^2 u_j n_j \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x = 0. \tag{3.11}$$

S využitím růstového předpokladu (2.25) tenzoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ a odhadu pravé strany dostaneme ze vztahu (3.10)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}^N\|_2^2 + C_4\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}\|\boldsymbol{u}^N\|_{1,2}. \tag{3.12}$$

Použijeme Cauchyho nerovnost s $\varepsilon > 0$, Kornovu nerovnost (věta A.1.1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}^N\|_2^2 + C_4\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)\|_2^2 &\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}^2 + \varepsilon\|\boldsymbol{u}^N\|_{1,2}^2 \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}^2 + \frac{\varepsilon}{K_2}(\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)\|_2 + \|\boldsymbol{u}^N\|_2)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}^2 + \frac{4\varepsilon}{K_2}\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)\|_2^2 + \frac{4\varepsilon}{K_2}\|\boldsymbol{u}^N\|_2^2,\end{aligned} \tag{3.13}$$

což můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}^N\|_2^2 + (2C_4 - \frac{8\varepsilon}{K_2})\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)\|_2^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}^2 + \frac{8\varepsilon}{K_2}\|\boldsymbol{u}^N\|_2^2. \tag{3.14}$$

Pokud označíme $\eta(t) := \|\boldsymbol{u}^N(t)\|_2^2$, $\psi(t) := \frac{1}{2\varepsilon}\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}^2$ a $\eta(0) = \|\boldsymbol{u}^N(0)\|_2^2 = \|\boldsymbol{u}_0^N\|_2^2$, tak vztah (3.14) implikuje

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + C\psi(t) \tag{3.15}$$

pro skoro všechny $t \in (0, T)$. Užitím Gronwallovy nerovnosti (věta A.1.3) dostáváme odhad

$$\eta(t) \leq \exp\Big(\int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big(\eta(0) + C_2\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\Big), \quad t \in (0, T), \tag{3.16}$$

a po navrácení do původních proměnných

$$\sup_{t\in(0,T)}\|\boldsymbol{u}^N(t)\|_2^2 \leq C'\Big(\|\boldsymbol{u}_0^N\|_2^2 + C''\int_0^T \|\boldsymbol{f}(s)\|_{-1,2}^2\,\mathrm{d}s\Big) \leq C, \tag{3.17}$$

což je (3.7). Nyní přeintegrujeme vztah (3.14), využijeme Kornovu nerovnost (věta A.1.1), vztah (3.17) a dostáváme

$$\int_0^T \|\boldsymbol{u}^N(\tau)\|_{1,2}^2\,\mathrm{d}\tau \leq C, \tag{3.18}$$

což dokazuje odhad (3.8). Zbývá dokázat poslední odhad (3.9).

Vezměme si $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$, že platí $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(I,W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)} \leq 1$. Potom

$$\begin{aligned}\Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}, P^N \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle = -\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}^N) : \boldsymbol{D}(P^N\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}x - \\ - \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla(P^N\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}x + \langle \boldsymbol{f}, P^N\boldsymbol{\varphi}\rangle.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dále odhadujme

$$\begin{aligned}\Big| \int_I\int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla(P^N\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \Big| \leq \int_I\int_\Omega |\boldsymbol{u}^N|^2 |\nabla(P^N\boldsymbol{\varphi})| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ \leq \int_I \|\boldsymbol{u}^N\|_4^2 \|\nabla(P^N\boldsymbol{\varphi})\|_2 \,\mathrm{d}t \leq C \int_I \|\boldsymbol{u}^N\|_2 \|\boldsymbol{u}^N\|_{1,2} \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_2 \,\mathrm{d}t \leq C,\end{aligned} \tag{3.20}$$

kde v posledním kroku jsme využili interpolační nerovnost (lemma A.28), již dokázané apriorní odhady (3.7) a (3.8) a faktu, že

$$\begin{aligned}\|\nabla(P^N\boldsymbol{\varphi})\|_2^2 = \sum_{k=1}^N |(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{w}^k)|^2 \|\nabla \boldsymbol{w}^k\|_2^2 \leq \\ \leq \sum_{k=1}^\infty |(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{w}^k)|^2 \|\nabla \boldsymbol{w}^k\|_2^2 = \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_2^2.\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}&\Big| \int_I\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) : \boldsymbol{D}(P^N\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \Big| \leq \\ &\leq C_4 \int_I\int_\Omega (1 + |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N|)) |\boldsymbol{D}(P^N\boldsymbol{\varphi})| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\leq C_4 \int_I \|1 + |\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}^N|\|_2 \|\boldsymbol{D}(P^N\boldsymbol{\varphi})\|_2 \,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq C\Big(\int_I \|\nabla(P^N\varphi)\|_2^2 \,\mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{2}} \leq C,\end{aligned} \tag{3.22}$$

kde jsme použili růst $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (2.25), Hölderovu nerovnost a apriorní odhad (3.7).

$$\int_I |\langle \boldsymbol{f}, P^N\boldsymbol{\varphi}\rangle| \,\mathrm{d}t \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(I,(W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)} \|P^N\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(I,W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)} \leq C. \tag{3.23}$$

Protože

$$\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_{L^2(I,(W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(I,W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2),\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(I,W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)}\le 1}} \Big|\int_I \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}\Big\rangle\,\mathrm{d}t\Big|, \tag{3.24}$$

je odhad (3.9) dokázán. ■

(iii) Limitní procesy

Vezměme si Galerkinův systém (3.3) jako na začátku důkazu :

$$\Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t},\boldsymbol{w}^k\Big\rangle + \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}^k)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N\otimes\boldsymbol{u}^N):\nabla\boldsymbol{w}^k\,\mathrm{d}x = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{w}^k\rangle$$
$$\boldsymbol{u}^N(0) = \boldsymbol{u}^N_0 = P^N\boldsymbol{u}_0 \qquad 1\le k\le N,$$

Uvažujme pevné $M\in\mathbb{N}$. První rovnici vynásobíme funkcí $g_k(t)\in\mathcal{D}(I)$, poté sečteme přes k od jedné do M a integrujeme přes časový interval I. Pro $N>M$ dostáváme vztah

$$\begin{aligned}&\int_I\Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t},\boldsymbol{\psi}^M\Big\rangle\,\mathrm{d}t + \int_I\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^M)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\\ &+\int_I\int_\Omega(\boldsymbol{u}^N\otimes\boldsymbol{u}^N):\nabla\boldsymbol{\psi}^M\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_I\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}^M\rangle\,\mathrm{d}t \qquad \forall\boldsymbol{\psi}^M\in\mathcal{M}^M,\end{aligned} \tag{3.25}$$

kde množina $\mathcal{M}^M$ je definovaná takto:

$$\mathcal{M}^M := \{\boldsymbol{\psi}^M;\ \boldsymbol{\psi}^M = \sum_{k=1}^M g_k(t)\boldsymbol{w}^k(x),\ g_k(t)\in\mathcal{D}(I)\}. \tag{3.26}$$

Pokud místo obecné funkce $g_k(t)$ budeme uvažovat $c_k^N(t)$, tak pro $M=N$ ze vztahu (3.25) dostaneme

$$\int_I\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_I\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}^N\rangle\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}^N(T)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_0^N\|_2^2. \tag{3.27}$$

Našim cílem bude nyní ukázat, že pro jedno pevné M přejde vztah (3.25) v limitě pro $N\to\infty$ na

$$\begin{aligned}&\int_I\Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t},\boldsymbol{\psi}^M\Big\rangle\,\mathrm{d}t + \int_I\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^M)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\\ &+\int_I\int_\Omega(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}):\nabla\boldsymbol{\psi}^M\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_I\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}^M\rangle\,\mathrm{d}t \quad \forall\boldsymbol{\psi}^M\in\mathcal{M}^M.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Zamysleme se nejprve nad konvergencí konvektivního členu. Z apriorních odhadů (3.7) a (3.8) plyne existence $\boldsymbol{u}$, že pro všechna $r > 1$

$$\boldsymbol{u}^N \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{slabě ve}\, L^r(I, L^2(\Omega)^2) \cap L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2) \tag{3.29}$$

(alespoň pro vybranou podposloupnost). Abychom mohli dokázat

$$\int_I \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla \boldsymbol{\psi} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \to \int_I \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{\psi} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \tag{3.30}$$

pro všechna $\boldsymbol{\psi} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$, potřebujeme silnou konvergenci

$$\boldsymbol{u}^N \to \boldsymbol{u} \quad \mathrm{v}\, L^2(I, L^4(\Omega)^2). \tag{3.31}$$

Získáme ji pomocí Aubin-Lionsova lemmatu (lemma A.4.1 v dodatku), které použijeme díky kompaktnímu vnoření $W^{1,2}(\Omega)^2 \hookrightarrow\hookrightarrow L^4(\Omega)^2$, pro $X_0 = W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$, $X = L^4(\Omega)^2$, $X_1 = (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*$ a $\alpha, \beta = 2$. Jako důsledek dostáváme vztah (3.31), alespoň pro nějakou podposloupnost, stále značenou $\boldsymbol{u}^N$.

$$\begin{aligned} &\int_I \int_\Omega [(\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) - (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})] : \nabla \boldsymbol{\psi}^M \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_I \int_\Omega [(\boldsymbol{u}^N - \boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{u}^N] : \nabla \boldsymbol{\psi}^M \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \\ &+ \int_I \int_\Omega [\boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{u}^N - \boldsymbol{u})] : \nabla \boldsymbol{\psi}^M \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \equiv I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\le \int_I \|\nabla \boldsymbol{\psi}^M\|_2 \|\boldsymbol{u}^N - \boldsymbol{u}\|_4 \|\boldsymbol{u}^N\|_4 \,\mathrm{d}t \le \\ &\le C \|\nabla \boldsymbol{\psi}^M\|_{L^\infty(I, L^2(\Omega)^{2\times 2})} \|\boldsymbol{u}^N - \boldsymbol{u}\|_{L^2(I, L^4(\Omega)^2)} \to 0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

kde poslední krok je dán díky silné konvergenci (3.31). Integrál I_2 jde k nule díky slabé konvergenci pro $N \to \infty$. Máme tedy

$$\int_I \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla \boldsymbol{\psi}^M \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \to \int_I \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{\psi}^M \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{\psi}^M \in \mathcal{M}^M. \tag{3.34}$$

Nyní uvažujme konvergenci prvního členu rovnice (3.25). Platí

$$\int_I \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}^M\Big)\,\mathrm{d}t = -\int_I \Big(\boldsymbol{u}^N, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^M}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{\psi}^M \in \mathcal{M}^M. \tag{3.35}$$

Díky slabé konvergenci (3.29) okamžitě dostáváme

$$\int_I \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}^M\Big)\,\mathrm{d}t \to -\int_I \Big(\boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^M}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{\psi}^M \in \mathcal{M}^M. \tag{3.36}$$

Zbývá najít limitu pro člen obsahující tenzor $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, tj. chceme ukázat

$$\int_I\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^M)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \to \int_I\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}^M)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{\psi}^M \in \mathcal{M}^M. \tag{3.37}$$

Víme, že $\|\boldsymbol{u}^N\|_{1,2} < C$. S užitím podmínky na růst tenzoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (2.25) dostáváme

$$\|\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N))\|_2 < C, \tag{3.38}$$

a tedy můžeme vybrat podposloupnost, že

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) \rightharpoonup \overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \quad \text{v } L^2(\Omega)^{2\times 2}. \tag{3.39}$$

Doposud se nám povedlo dostat rovnici (3.28) do tvaru

$$\begin{aligned} &\int_I \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}\Big\rangle\,\mathrm{d}t + \int_I\int_\Omega \overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\ &+ \int_I\int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) : \nabla\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_I \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}\rangle\,\mathrm{d}t \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

kde $\mathcal{M} := \{\boldsymbol{\psi};\ \exists M \in \mathbb{N} :\ \boldsymbol{\psi} = \sum_{k=1}^M g_k(t)\boldsymbol{w}^k(x),\ g_k(t) \in \mathcal{D}(I), \forall M \in \mathbb{N}\}$. Protože (3.40) reprezentuje spojitý lineární funkcionál na $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)})$ a $\mathcal{M}$ je hustá v $L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$, existuje jednoznačné spojité rozšíření na $L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$. Máme tedy

$$\begin{aligned} \int_I \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}\Big\rangle\,\mathrm{d}t + \int_I\int_\Omega \overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_I\int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) : \nabla\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\ = \int_I \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\psi}\rangle\,\mathrm{d}t \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Zbývá už jen ověřit, že $\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))$. K tomu využijeme tzv. Mintyho trik (lze nalézt např. v [31]).

Protože $\boldsymbol{u} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$, můžeme rovnici (3.41) místo libovolného $\boldsymbol{\psi} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$ testovat řešením $\boldsymbol{u}$. Po úpravě dostaneme

$$\int_I \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}(T)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}_0\|_2^2. \tag{3.42}$$

Z vlastnosti tenzoru $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (2.26) využijeme monotonii:

$$[\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{B})] : (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}) \geq 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{N\to\infty} \int_I \int_\Omega [\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) - \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}))] : [\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N) - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \\
&= \limsup_{N\to\infty} \int_I \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \int_I \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \\
&- \int_I \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})) : [\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \equiv I_1 - I_2 - I_3.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Za I_1 dosadíme z (3.27):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \limsup_{N\to\infty} \Big(\int_I \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^N \rangle \,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}^N(T)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}_0^N\|_2^2 \Big) \\
&\leq \int_I \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}(T)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}_0\|_2^2,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

kde nerovnost plyne ze slabé zdola polospojitosti normy. Porovnáním s (3.42) dostáváme

$$I_1 \leq \int_I \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{3.45}$$

Vztah (3.43) přejde na tvar

$$0 \leq \int_I \int_\Omega [\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} - \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}))][\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{3.46}$$

Nyní položme $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u} \pm \lambda \boldsymbol{z}$, $\lambda > 0$, $\boldsymbol{z} \in \mathcal{D}(-\infty, 0, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$.

$$0 \leq \int_I \int_\Omega [\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} - \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u} \pm \lambda \boldsymbol{z}))] \boldsymbol{D}(\mp \lambda \boldsymbol{z}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{3.47}$$

Proveďme limitu $\lambda \to 0$ (což lze provést, např. díky Lebesgueově větě, viz věta A.5.1)

$$0 \le \mp \int_I \int_\Omega [\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} - \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))]\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t, \tag{3.48}$$

z čehož plyne

$$\int_I \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_I \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{D}(-\infty, 0, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2), \tag{3.49}$$

čímž je limitní proces hotov.

Z apriorních odhadů (3.8) a (3.9) víme, že

$$\boldsymbol{u} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2), \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*). \tag{3.50}$$

Protože $W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}$ je hustě vnořeno do $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}$, můžeme využít větu A.4.4 a dostáváme

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}(\overline{I}, L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2). \tag{3.51}$$

(iv) Nabývání počáteční podmínky

Vztah (3.51) dává existenci $\hat{\boldsymbol{u}} \in L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$ tak, že $\lim_{t\to 0^+} \|\boldsymbol{u}(t) - \hat{\boldsymbol{u}}\|_2 = 0$. Je potřeba ověřit, že $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_0$.

Vezměme si Galerkinův systém a přeintegrujme jej přes časový interval $(0, t)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \boldsymbol{u}^N(t) \cdot \boldsymbol{w}^k \,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}^k) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \int_0^t \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla \boldsymbol{w}^k \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}^k \rangle \,\mathrm{d}\tau + \int_\Omega P^N \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{w}^k \,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.52}$$

kde první a poslední člen jsme dostali provedením časové integrace ve členu $\int_0^t \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N(t)}{\partial t}, \boldsymbol{w}^k \right\rangle \mathrm{d}\tau$. Nyní provedeme limitu $N \to \infty$ (z limitního procesu provedeného výše už víme, že v žádném členu nenastane problém). Máme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{w}^k \,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}^k) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \int_0^t \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{w}^k \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}^k \rangle \,\mathrm{d}\tau + \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{w}^k \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Nyní pošleme $t \to 0^+$. Druhý, třetí a čtvrtý člen v (3.53) jdou k 0 pro $t \to 0^+$ díky absolutní spojitosti integrálu. Dostáváme

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{w}^k \, \mathrm{d}x \to \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{w}^k \, \mathrm{d}x \quad \text{pro}\, t \to 0^+ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.54}$$

Protože $\boldsymbol{w}^k$ je báze $W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}$, která je hustá v $L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}$, dostáváme

$$\boldsymbol{u}(t) \rightharpoonup \boldsymbol{u}_0 \quad \text{v}\, L^2_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2 \text{ pro}\, t \to 0^+. \tag{3.55}$$

Z jednoznačnosti limity máme $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_0$, tj. platí

$$\lim_{t \to 0} \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_0\|_2^2 = 0. \tag{3.56}$$

Tímto je důkaz existence slabého řešení problému $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^2$ hotov.

■

Kapitola 4

Regularita

4.1 Časová regularita

Z apriorního odhadu (3.9) víme, že $\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t} \in L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)$. Pokud budeme mít lepší pravou stranu, tj. pokud budeme vědět, že časová derivace funkce $\boldsymbol{f}$ leží v prostoru $L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)$, tak dokážeme tento odhad vylepšit. Navíc získáme odhad na druhé časové derivace řešení $\boldsymbol{u}$.

Věta 4.1.1. *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 3.0.1 *o existenci slabého řešení problému* $(NS_{p.slip})^2$. *Nechť* $\boldsymbol{u}$ *je slabé řešení konstruované v této větě. Předpokládejme navíc, že* $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} \in L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)$ *a* $\boldsymbol{u}_0 \in W^{2,2}(\Omega)^2 \cap W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$. *Potom*

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^\infty(I, L^2(\Omega)^2) \cap L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*). \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \in L^2(I, (W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*). \tag{4.2}$$

Důkaz:

Vyjdeme z Galerkinova systému jako v důkazu věty 3.0.1. Víme

$$\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}, \boldsymbol{w}^k \right\rangle + \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N)) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}^k)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N) : \nabla \boldsymbol{w}^k\,\mathrm{d}x = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}^k \rangle.$$

Je vidět, že derivovat podle času lze. Po proderivování podle času, vynásobení

$\frac{d}{dt}c_k^N$ a sečtení dostáváme

$$\Big\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^N}{\partial t^2}, \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t} \Big\rangle + \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{S}_{ij}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N))}{\partial D_{kl}} D_{ij}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big) D_{kl}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}x - \\ - \int_\Omega \Big[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N)\Big] \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\rangle. \tag{4.3}$$

Na druhý člen (4.3) můžeme použít předpoklad (P2) pro $p = 2$, třetí člen můžeme upravit:

$$\int_\Omega \Big[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N)\Big] \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}.\nabla\Big)\boldsymbol{u}^N \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \\ + \int_\Omega (\boldsymbol{u}^N.\nabla)\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\,\mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

kde $\int_\Omega (\boldsymbol{u}^N.\nabla)\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\,\mathrm{d}x = 0$, což lze snadno nahlédnout užitím stejných úprav (viz 3.11) jako u podobného členu v apriorních odhadech. Máme tedy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2^2 + C_1\int_\Omega \Big|\boldsymbol{D}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big)\Big|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}.\nabla\Big)\boldsymbol{u}^N\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\,\mathrm{d}x \le \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\rangle, \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2^2 + C_1\Big\|\boldsymbol{D}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big)\Big\|_2^2 \le \Big\|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\Big\|_{-1,2}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_{1,2} + \Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_4^2\|\nabla \boldsymbol{u}^N\|_2. \tag{4.6}$$

Na poslední člen použijeme interpolační nerovnost (A.28), využijeme apriorní odhad (3.8), dále využijeme Cauchyho nerovnost a Kornovu nerovnost:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2^2 + C_1\Big\|\boldsymbol{D}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big)\Big\|_2^2 \le \\ \le \frac{1}{2\varepsilon}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\Big\|_{-1,2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_{1,2}^2 + C\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_{1,2}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2\|\nabla \boldsymbol{u}^N\|_2 \le \\ \le \frac{1}{2\varepsilon}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\Big\|_{-1,2}^2 + \frac{\varepsilon}{K_2^2}\Big(\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2 + \Big\|\boldsymbol{D}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big)\Big\|_2\Big)^2 + \frac{C^2}{2\varepsilon}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2^2\|\nabla \boldsymbol{u}^N\|_2^2. \tag{4.7}$$

Pokud využijeme vztah $(a+b)^2 \le 4a^2 + 4b^2$ na druhý člen na pravé straně, tak po úpravě dostáváme:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2^2 + (C_1 - \frac{4\varepsilon}{K_2^2})\Big\|\boldsymbol{D}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big)\Big\|_2^2 \leq \\ \leq \frac{1}{2\varepsilon}\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\Big\|_{-1,2}^2 + \Big(\frac{C^2}{2\varepsilon} + \frac{4\varepsilon}{K_2^2}\Big)(\|\nabla \boldsymbol{u}^N\|_2^2 + 1)\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big\|_2^2,\end{aligned} \tag{4.8}$$

což má podobnou strukturu jako výraz (3.14), z kterého jsme vycházeli při dokazování prvních dvou apriorních odhadů. Chceme stejně jako dříve použít Gronwallovu nerovnost (věta A.1.3). Abychom jí na tomto místě mohli použít, potřebujeme znát $\big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}(0)\big\|_2^2$. Víme, že je konečná, neboť

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}(0)\Big\|_2^2 = \int_\Omega \Big|\sum_{k=1}^N \frac{\mathrm{d}c_k^N}{\mathrm{d}t}(0)\boldsymbol{w}^k\Big|^2 \,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^N \Big|\frac{\mathrm{d}c_k^N}{\mathrm{d}t}(0)\Big|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^N |\mathcal{G}_k(c_1^N, \ldots, c_N^N, 0)|^2 \leq \sum_{k=1}^N \langle \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_0^N)) + \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_0^N \otimes \boldsymbol{u}_0^N), \boldsymbol{w}^k\rangle^2 \\ &\leq C(\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_0^N))\|_2^2 + \|\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_0^N \otimes \boldsymbol{u}_0^N)\|_2^2) \\ &\leq C(\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_0^N\|_{2,2}^2) \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_0\|_{2,2}^2) < +\infty,\end{aligned} \tag{4.9}$$

kde jsme využili omezenosti projekce $P^N : W^{2,2}(\Omega)^2 \cap W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2 \mapsto H^N$, která je stejnoměrná vzhledem k N, viz [25, Lemma 4.26]. Můžeme tedy opět použít Gronwallovu nerovnost (věta A.1.3) a následně integrací vztahu (4.8) a užitím Kornovy nerovnosti (věta A.1.1) dostáváme

$$\sup_{t\in(0,T)} \Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N(t)}{\partial t}\Big\|_2^2 + C'\int_0^T \Big\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^N(\tau)}{\partial t}\Big\|_{1,2}^2 \,\mathrm{d}\tau \leq C, \tag{4.10}$$

což spolu s limitním přechodem dává (4.1).

Abychom ověřili platnost (4.2), proderivujeme Galerkinův systém (3.3) podle času a místo $\boldsymbol{w}^k$ vezměme $P^N\boldsymbol{\varphi}$, kde $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)$ jsou takové, že $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(I,W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)} \leq 1$. Máme

$$\begin{aligned}&\Big\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^N}{\partial t^2}, \boldsymbol{\varphi}\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^N}{\partial t^2}, P^N\boldsymbol{\varphi}\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}, P^N\boldsymbol{\varphi}\Big\rangle - \\ &- \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{S}_{ij}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^N))}{\partial D_{kl}} D_{ij}(P^N\boldsymbol{\varphi}) D_{kl}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^N}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \Big[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\boldsymbol{u}^N \otimes \boldsymbol{u}^N)\Big] P^N\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.11}$$

V odhadu členů na pravé straně (4.11) budeme postupovat stejně jako v případě odhadu apriorního odhadu (3.9) a jeho vylepšení (4.1). Dostáváme

$$\left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^N}{\partial t^2}\right\|_{L^2(I,(W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)^*)} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in L^2(I,W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2),\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(I,W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2)}\leq 1}} \left|\int_I \left\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^N}{\partial t^2}, \boldsymbol{\varphi}\right\rangle \mathrm{d}t\right| \leq C, \tag{4.12}$$

což spolu s limitním přechodem dává (4.2).

Limitní přechod by probíhal stejným způsobem jako v případě existenční věty, proto jej zde nebudeme opakovat.

■

4.2 Regularita druhých prostorových derivací

Cílem této sekce bude dokázat omezenost druhých prostorových derivací řešení $\boldsymbol{u}$.

Věta 4.2.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega \in \mathcal{C}^3$ a jsou splněny předpoklady věty* 4.1.1. *Potom pro každé slabé řešení $\boldsymbol{u}$ konstruované jako ve větě* 3.0.1 *platí*

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(I, W^{2,2}(\Omega)^2). \tag{4.13}$$

Důkaz

Ukázali jsme, že platí (4.1)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^\infty(I, L^2(\Omega)^2) \cap L^2(I, W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2).$$

Díky tomu můžeme vzít jedno pevné $t \in (0,T)$, časovou derivaci řešení přesunout na pravou stranu, definovat $\hat{\boldsymbol{f}} := \boldsymbol{f} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$ a nahlížet na problém jako na stacionární. Toto je možné provést pro s.v. $t \in (0,T)$. S užitím výsledků lemmatu 4.2.1 (formulováno níže), které nám dává $\boldsymbol{u} \in W^{2,2}(\Omega)^2$ pro stacionární problém, dostáváme

$$\sup_{t\in I} \|\nabla^2 \boldsymbol{u}\|_2 \leq C, \tag{4.14}$$

což dává platnost (4.13). ■

Formulujme nyní stacionární problém, který označíme $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^2_{\mathrm{stac}}$.

Nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je daná. Předpokládejme, že tensor $\boldsymbol{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym} \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ splňuje pro $p = 2$ předpoklady (P1), (P2) a (P3). Zkoumáme vlastnosti rychlosti $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ a tlaku $p : \Omega \to \mathbb{R}$ řešící systém rovnic:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{S}} = -\nabla p + \boldsymbol{f} \qquad \text{v}\,\Omega \tag{4.15}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{v}\,\Omega \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ \&\ (\boldsymbol{\mathcal{S}}\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \qquad \text{na}\,\partial\Omega. \tag{4.17}$$

Definice 4.2.1. *Řekneme, že funkce $\boldsymbol{u}$ je slabé řešení problému $(NS_{p.slip})^2_{stac}$, pokud $\boldsymbol{u} \in W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$ a slabá formulace*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x - \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \tag{4.18}$$

je splněna pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega)^2$.

K důkazu věty 4.2.1 zbývá formulovat a dokázat lemma o omezenosti druhých prostorových derivací $\boldsymbol{u}$ pro stacionární problém $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^2_{\mathrm{stac}}$.

Lemma 4.2.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^3$, $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^2$. Nechť jsou splněny předpoklady (*P1*)-(*P3*) pro $p = 2$. Potom pro každé slabé řešení $\boldsymbol{u}$ problému $(NS_{p.slip})^2_{stac}$ konstruované jako ve větě* 3.0.1 *platí*

$$\boldsymbol{u} \in W^{2,2}(\Omega)^2. \tag{4.19}$$

Důkaz: Budeme postupovat podle článku [26], kde je dokázána regularita řešení systému rovnic, který je velmi podobný $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^p$. Autoři zde pracují s evolučním problémem ve třech dimenzích a uvažují homogenní Dirichletovy okrajové podmínky. Zajímají se o situaci $p \geq 2$.

Obvyklým způsobem je třeba důkaz rozdělit na vnitřní regularitu a regularitu u hranice. V případě regularity u hranice budeme postupovat odlišně v tečném a normálovém směru. Užijeme metodu tečných diferencí, která je detailně popsaná právě ve 3. kapitole článku [26]. Výpočet provedený v tomto článku modifikujeme s přihlédnutím k charakteru našeho problému. Fakt, že zkoumáme stacionární situaci a jsme pouze ve dvou dimenzích, umožní zjednodušit některé kroky. Můžeme aplikovat znalosti a metody, které jsou použity např. v článcích [9] nebo [14]. Hlavní rozdíl oproti [26] je v tom, že musíme věnovat zvýšenou pozornost hraničním podmínkám. Navierovy podmínky dokonalého skluzu nedovolují stejně přímočarý postup jako homogenní Dirichletovy podmínky. Předně je potřeba zvolit testovací funkci s ohledem na tyto hraniční podmínky. Dále je v průběhu výpočtu třeba uvažovat jisté korekce, abychom měli stále testovací funkce s nulovou divergencí. Díky tomu se výpočet prodlouží. V případě normálového směru postupujeme zcela v souladu s [26], jen s ohledem na to, že jsme ve dvou dimenzích. Hlavní idea spočívá ve využití znalostí získaných z tečného směru a dopočítání zbývajících informací z rovnice (4.15). Stejné modifikace, jaké budeme provádět zde, byly již použity například v článcích [12] a [14]. V článku [14] je proveden podobný důkaz, jako předkládáme zde. Autoři pracují s nehomogenními Dirichletovými hraničními podmínkami i podmínkami dokonalého skluzu. Regularitu dávají dohromady z tečných a normálových směrů. Co se týče tečného směru, důkaz je velice stručný. My zde provedeme detailní rozbor.

Vnitřní regularitou se zabývat nebudeme. Jak je napsáno v poznámce na konci této sekce, následující výpočet lze velmi snadno upravit a zjednodušit pro případ vnitřní regularity. Budeme se věnovat tedy pouze regularitě u hranice a začneme nejprve tečným směrem.

(i) Tečný směr

Jak je uvedeno v dodatku Popis hranice, existují systémy množin V^l, $V^l_{\frac{h_0}{2}}$ a $V^l_{h_0}$, $V^l_{h_0} \subset V^l_{\frac{h_0}{2}} \subset V^l$, $l = 1 \dots k$, pokrývající hranici $\partial\Omega$. Budeme pracovat na množinách $\Omega_{h_0} := V^l_{\frac{h_0}{2}} \cap \Omega$. Vezměme jedno pevné l, pro něž budeme provádět následující výpočty. Pro přehlednost tento index nebudeme uvádět. Definujme seřezávací funkci $\xi_l(x) \in \mathcal{D}(V^l_{\frac{h_0}{2}})$ následovně:

$$\xi(x) \begin{cases} = 1 \quad x \in V^l_{h_0} \\ \in (0,1) \quad x \in V^l_{\frac{h_0}{2}} \setminus V^l_{h_0} \\ = 0 \in \mathbb{R}^2 \setminus V^l_{\frac{h_0}{2}}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Rovněž seřezávací funkce $\xi_l(x)$ závisí na množině $V^l_{\frac{h_0}{2}}$ ($\operatorname{supp} \xi_l(x) \subset V^l_{\frac{h_0}{2}}$). I zde budeme psát $\xi(x)$ místo $\xi_l(x)$. Stejně tak jako $a(x_1)$ místo $a_l(x_1)$. Funkce a popisující hranici závisí vždy pouze na první složce, tj. na x_1 repsektive y_1. Proto zde tento argument uvádět nebudeme.

Vyjdeme ze slabé formulace (viz definice 4.18)

$$\int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\psi}(y))\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega_{h_0}} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(y)\cdot\boldsymbol{\psi}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{f}(y)\cdot\boldsymbol{\psi}(y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.21}$$

která je splněna pro $\boldsymbol{\psi} \in W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega_{h_0})^2$, $\operatorname{supp} \boldsymbol{\psi} \subset V_{\frac{h_0}{2}}$. Cílem je nyní odvodit identitu, ve které by se vyskytovaly diference jednotlivých členů rovnice (4.15). Abychom toho dosáhli, potřebovali bychom otestovat místo $\boldsymbol{\psi}(y)$ funkcí $\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)$. Tato funkce ovšem neleží ve $W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega_{h_0})^2$, protože $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \neq 0$ ani $\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$ na $\partial\Omega_{h_0}$. Z toho důvodu je nutné provést následující korekci:

$$\boldsymbol{\varphi}_{kor}(y) := \boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) - (\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{n}(y) + \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y), \tag{4.22}$$

kde $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y)$ je řešením (viz Bogovského lemma A.4.5 v dodatku)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y) = \operatorname{div}[-\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) + (\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{n}(y)] \quad \text{v}\,\Omega_{h_0}, \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y) = 0 \quad \text{na}\,\partial\Omega_{h_0}. \tag{4.24}$$

Vztah (4.23) můžeme blíže specifikovat

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}} = &- (\Delta^{-}a')\partial_2\varphi_1 - (\Delta^{-}a')a'\partial_1\varphi_1 + [1 - (\Delta^{-}a)'a'](\Delta^{-}a')\partial_2\varphi_1 + \\ &+ (\Delta^{-}a')^2\partial_2\varphi_2 - [a''(\Delta^{-}a') + a'(\Delta^{-}a'')]\varphi_1.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Protože je splněna podmínka kompatibility

$$\int_{\partial\Omega_{h_0}} [-\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) + (\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{n}(y)] \cdot \boldsymbol{n}(y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{4.26}$$

tak dle lemmatu A.4.5 platí odhad

$$\|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}\|^r_{1,r} \leq Ch^r \|\boldsymbol{\varphi}\|^r_{1,r}. \tag{4.27}$$

Díky $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y)$ platí $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_{kor}(y) = 0$ a snadno též můžeme nahlédnout, že $\boldsymbol{\varphi}_{kor}(y) \cdot \boldsymbol{n}(y) = 0$ na $\partial\Omega$. Tedy $\boldsymbol{\varphi}_{kor}(y)$ je dobrá testovací funkce. Po dosazení

$\boldsymbol{\varphi}_{kor}(y)$ do (4.18) dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y))\,\mathrm{d}y - \\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : [(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y))\Delta^{-}\boldsymbol{n}(y)) \otimes \boldsymbol{n}(y)]\,\mathrm{d}y - \\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : [(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)\boldsymbol{D}(\Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))) \otimes \boldsymbol{n}(y)]\,\mathrm{d}y - \\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : (\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{D}(\boldsymbol{n}(y))\,\mathrm{d}y + \\
&+ \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y))\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega_{h_0}} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(y)\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)\,\mathrm{d}y - \\
&- \int_{\Omega_{h_0}} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(y)(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)\cdot\Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{n}(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega_{h_0}} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(y)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{f}(y)\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)\,\mathrm{d}y - \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{f}(y)(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)\cdot\Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{n}(y)\,\mathrm{d}y + \\
&+ \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{f}(y)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

V prvním členu (4.28) se vyskytuje derivace složené funkce $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}(y)))$. My bychom potřebovali $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)$. K úpravě tohoto členu využijeme lemma (A.3.3) z dodatku. Dostáváme

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}(y))) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}(y)) + \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\boldsymbol{n}}(x) \otimes_S (\Delta^{-}\nabla a).$$

V některých členech použijeme substituci $y = Tx$ (Z dodatku víme, že $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, protože Jakobián zobrazení T i T^{-1} je rovný jedné.), položíme

$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\psi}(y)$ a odečteme (4.21) od výsledné rovnice a dostáváme identitu

$$
\begin{aligned}
0 = &\int_{\Omega_{h_0}} \Delta^{+}\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(x) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}(x))\,\mathrm{d}x +\\
&+ \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(Tx) : \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{n}}(x) \otimes_S (\Delta^{-}\nabla a)\right] \mathrm{d}x -\\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : [(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y))\Delta^{-}\boldsymbol{n}(y)) \otimes \boldsymbol{n}(y)]\,\mathrm{d}y -\\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : [(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y)\boldsymbol{D}(\Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))) \otimes \boldsymbol{n}(y)]\,\mathrm{d}y -\\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : (\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{D}(\boldsymbol{n}(y))\,\mathrm{d}y +\\
&+ \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(y) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y))\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega_{h_0}} \Delta^{+}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x -\\
&- \int_{\Omega_{h_0}} (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}(y)(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{n}(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega_{h_0}} (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}(y)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y)\,\mathrm{d}y -\\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \Delta^{+}\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{f}(y)(\boldsymbol{\varphi}(T^{-1}y) \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{n}(y))\boldsymbol{n}(y)\,\mathrm{d}y -\\
&- \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{f}(y)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}(y)\,\mathrm{d}y \equiv \mathcal{A}_1 + \cdots - \mathcal{A}_{12}
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

platnou pro testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega_{h_0})^2$, $\operatorname{supp} \boldsymbol{\varphi} \subset V_{\frac{h_0}{2}}$. Pokud za $\boldsymbol{\varphi}$ zvolíme funkci

$$
\frac{1}{h^2}\Delta^{+}\boldsymbol{u}(x)\xi^2(x) + \frac{1}{h^2}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}(x)\xi^2(x) = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2, \tag{4.30}
$$

kde $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}(x) := (\boldsymbol{u}(Tx) \cdot \Delta^{+}\boldsymbol{n}(x))\boldsymbol{n}(x)$, snadno nahlédneme, že je splněna podmínka $(\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ na $\partial\Omega_{h_0}$. Ovšem obecně neplatí, že $\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2) = 0$. Proto podobně jako výše zavedeme korekci $\boldsymbol{z} \in W^{1,2}_{\boldsymbol{n},\mathrm{div}}(\Omega_{h_0})^2$, která je definovaná jako řešení problému (viz Bogovského lemma A.4.5)

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{z} = \operatorname{div}(-\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2) \qquad \text{v } \Omega_{h_0} \tag{4.31}
$$

$$
\boldsymbol{z} = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega_{h_0}. \tag{4.32}
$$

Chování na hranici je nyní opět v pořádku, neboť

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial\Omega_{h_0}} \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_{h_0}} \operatorname{div}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_{h_0}} \operatorname{div}(-\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2)\,\mathrm{d}x = \\
= -\int_{\partial\Omega_{h_0}} (\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Z Bogovského lemmatu A.4.5 víme, že pro funkci $\boldsymbol{z}$ platí následující odhad:

$$
\|\boldsymbol{z}\|_{1,r}^r \leq C\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2)\|_r^r. \tag{4.34}
$$

Po úpravě:

$$
\|\boldsymbol{z}\|_{1,r}^r \leq \frac{C}{h^r}\|\boldsymbol{u}\|_{1,r}^r + \frac{C}{h^r}\|\nabla\xi\|_\infty^r\|\boldsymbol{u}\|_{1,r}^r. \tag{4.35}
$$

Uvažujeme tedy testovací funkci ve tvaru $\boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2 + \boldsymbol{z}$. Se znalostí (4.30) a (4.35) můžeme nyní dostat odhad na $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}$:

$$
\|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}\|_{1,r}^r \leq K\Big(\Big\|\frac{\nabla\Delta^-\boldsymbol{u}}{h}\xi\Big\|_r^r + \|\boldsymbol{u}\|_{1,r}^r + \|\nabla\xi\|_\infty^r\|\boldsymbol{u}\|_{1,r}^r\Big). \tag{4.36}
$$

Pro větší přehlednost budeme v následujících výpočtech uvádět $\boldsymbol{u}$ místo $\boldsymbol{u}(x)$ (stejně tak i u ostatních funkcí). V případě výskytu argumentů Tx nebo $T^{-1}x$ je vypíšeme podrobně, pokud to bude mít vliv na další postup. Dále konstanta C, která se vyskytuje v odhadech, není všude stejná, může se lišit odhad od odhadu. Pro větší přehlednost budeme explicitně uvádět pouze výskyt konstant z předpokladů (P1)-(P3), tj. budeme sledovat konstanty C_i, $i = 1, \ldots, 4$. Ostatní méně zajímavé konstanty jako například C_n, $C(r)$, $C(\varepsilon)$ sdružíme pod jednu obecnou konstantu $C = C(a, \varepsilon, r)$. Pokud budeme chtít zdůraznit, že se konstanty liší, užijeme v odhadech např. C', C''. Z důvodů, jež ozřejmíme později nebudeme výraz $\|\nabla\xi\|_\infty$ zahrnovat do obecné konstanty C.

Odhadujme:

$$
\mathcal{A}_1 = \int_{\Omega_{h_0}}\int_0^1 \partial_{ij}\mathcal{S}_{kl}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) + \lambda\Delta^+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))\Delta^+D_{ij}(\boldsymbol{u})D_{kl}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}x. \tag{4.37}
$$

S užitím lemmatu A.3.3 dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 = &\int_{\Omega_{h_0}}\int_0^1 \partial_{ij}\mathcal{S}_{kl}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})+\lambda\Delta^{+}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))[D_{ij}(\Delta^{+}\boldsymbol{u})-\\
&-\big((\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u})(Tx)\otimes_S \Delta^{+}\nabla a\big)_{ij}]D_{kl}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}x=\\
&=\int_{\Omega_{h_0}}\int_0^1 \partial_{ij}\mathcal{S}_{kl}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})+\lambda\Delta^{+}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))D_{ij}(\Delta^{+}\boldsymbol{u})D_{kl}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}x-\\
&-\int_{\Omega_{h_0}}\int_0^1 \partial_{ij}\mathcal{S}_{kl}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})+\lambda\Delta^{+}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))\big((\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u})(Tx)\otimes_S \Delta^{+}\nabla a\big)_{ij}D_{kl}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}x\\
&\equiv \mathcal{A}_{1.1}-\mathcal{A}_{1.2},
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{1.1} = \frac{1}{h^2}&\int_{\Omega_{h_0}}\int_0^1 \partial_{ij}\mathcal{S}_{kl}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})+\lambda\Delta^{+}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))D_{ij}(\Delta^{+}\boldsymbol{u})\big[D_{kl}(\Delta^{+}\boldsymbol{u})\xi^2(x)+\\
&+2[\Delta^{+}\boldsymbol{u}]_k\xi\frac{\partial\xi}{\partial x_l}+D_{kl}(\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}})\xi^2+[\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_k\xi\frac{\partial\xi}{\partial x_l}+D_{kl}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x\big]\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}x\\
&\equiv \mathcal{B}_1+\cdots+\mathcal{B}_5.
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

S užitím předpokladu (P2) a lemmatu A.4.2 můžeme člen $\mathcal{B}_1$ odhadnout následovně:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &\geq \frac{2C_1}{h^2}\int_{\Omega_{h_0}}|\boldsymbol{D}(\Delta^{+}\boldsymbol{u})|^2\xi^2\,\mathrm{d}x\geq\\
&\geq 2C_1C_0\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x-2C_1C_{01}\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Na druhý člen $\mathcal{B}_2$ využijeme předpoklad (P3) a Cauchyho nerovnost s $\varepsilon>0$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_2| \leq \frac{2C_2}{h^2}&\int_{\Omega_{h_0}}|\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}|\xi|\Delta^{+}\boldsymbol{u}||\nabla\xi|\,\mathrm{d}x\leq \varepsilon C_2^2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x+\\
+C&\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x\leq \varepsilon C_2^2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x+C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^4+C\|\nabla\xi\|_\infty^4.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Ve třetím členu $\mathcal{B}_3$ využijeme následující:

$$
\begin{aligned}
D_{ij}(\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\{u_k(Tx)[\Delta^{+}\boldsymbol{n}]_k n_i(x)\} = \\
&= \frac{\partial u_k(Tx)}{\partial x_j}[\Delta^{+}\boldsymbol{n}]_k n_i(x) + u_k(Tx)\frac{\partial[\Delta^{+}\boldsymbol{n}]}{\partial x_j} n_i(x) + u_k(Tx)[\Delta^{+}\boldsymbol{n}]\frac{\partial n_i(x)}{\partial x_j}.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Jak je uvedeno v lemmatu A.3.2, můžeme velikost gradientu normály nebo i velikost diference gradientu normály odhadnou pomocí konstanty C_n, kterou zahrneme do obecné konstanty C.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_3| &\le \frac{C_2}{h^2}\Big|\int_{\Omega_{h_0}} D_{ij}(\Delta^{+}\boldsymbol{u})D_{ij}(\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}})\xi^2\,\mathrm{d}x\Big| \le \\
&\le C_2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|(|\nabla\boldsymbol{u}|C_n + |\boldsymbol{u}|C_n + |\boldsymbol{u}|C_n^2)\xi^2\,\mathrm{d}x \\
&\le 3\varepsilon C_2^2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x + C\int_{\Omega_{h_0}}|\nabla\boldsymbol{u}|^2\xi^2\,\mathrm{d}x + C\int_{\Omega_{h_0}}|\boldsymbol{u}|^2\xi^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_4| &\le \frac{2C_2}{h^2}\int_{\Omega_{h_0}}|\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}|\xi|\nabla\xi|\,\mathrm{d}x \le \\
&\le C_2^2\varepsilon\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x + C\int_{\Omega_{h_0}}|\boldsymbol{u}|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x \le \\
&\le C_2^2\varepsilon\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x + C\|\nabla\xi\|_\infty^4 + C\|\boldsymbol{u}\|_2^4,
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_5| \le C_2\int_{\Omega_{h_0}} D_{ij}(\Delta^{+}\boldsymbol{u})D_{ij}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x \le \varepsilon C_2^2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\mathrm{d}x + C\int_{\Omega_{h_0}} h^2|\nabla\boldsymbol{z}|^2 \le \\
\varepsilon C_2^2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\mathrm{d}x + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + C\|\nabla\xi\|_\infty^4 + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Na člen $\mathcal{A}_{1.2}$ využijeme předpoklad (P3) a dále upravujeme obdobně jako v předchozích členech.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{1.2}| = | \int_{\Omega_{h_0}} \int_0^1 \partial_{ij} \mathcal{S}_{kl}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) + \lambda \Delta^+ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) \\
\big((\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u})(Tx) \otimes_S \Delta^+ \nabla a\big)_{ij} D_{kl}(\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}x| \leq \\
\leq \frac{C_2}{h^2} | \int_{\Omega_{h_0}} \big((\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u})(Tx) \otimes_S \Delta^+ \nabla a\big)_{ij} \big[D_{ij}(\Delta^+ \boldsymbol{u}) \xi^2 + 2[\Delta^+ \boldsymbol{u}]_i \xi \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \\
+ D_{ij}(\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}) \xi^2 + [\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_i \xi \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + D_{ji}(\boldsymbol{z})\big] \,\mathrm{d}x| \equiv \mathcal{B}_6 + \cdots + \mathcal{B}_{10}.
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

S užitím lemmatu A.3.2 a odhadu (4.35) na korekci $\boldsymbol{z}$ máme

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_6| \leq C_2 \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}| C_n \Big| \frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h} \Big| \xi^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x + \\
+ \varepsilon C_2^2 \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_7| \leq C_2 \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}| C_n \Big| \frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h} \Big| \xi |\nabla \xi| \,\mathrm{d}x \leq C \|\nabla \xi\|_\infty^2 \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}x + \\
+ C_2^2 C \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x \leq C \|\nabla \xi\|_\infty^4 + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^4 + C_2^2 C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

$$
|\mathcal{B}_8| \leq C_2 \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}| C_n (|\nabla \boldsymbol{u}| C_n + |\boldsymbol{u}| C_n + |\boldsymbol{u}| C_n^2) \xi^2 \,\mathrm{d}x \leq C_2^2 C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2, \tag{4.49}
$$

$$
|\mathcal{B}_9| \leq C_2 \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}| C_n |\boldsymbol{u}| C_n \xi |\nabla \xi| \,\mathrm{d}x \leq C_2^2 C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C \|\nabla \xi\|_\infty^4, \tag{4.50}
$$

Na člen $\mathcal{B}_{10}$ použijeme (4.35).

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{10}| \leq C_2 \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}| C_n h |\nabla \boldsymbol{z}| \,\mathrm{d}x \leq \frac{C_n^2}{2} \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{C_2^2 h^2}{2} \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{z}|^2 \,\mathrm{d}x \leq \\
\leq C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + C_2^2 C \|\nabla \xi\|_\infty^4 + C_2^2 C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4,
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_2| &= |\int_{\Omega_{h_0}} \mathcal{S}_{kl}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}))(Tx)\big((\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\varphi})(x)\otimes_S \Delta^{+}\nabla a\big)_{kl}\,\mathrm{d}x| = \\
&= |\int_{\Omega_{h_0}}\int_0^1 \partial_{ij}\mathcal{S}_{kl}(\lambda\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})(Tx))D_{ij}(\boldsymbol{u})(Tx)\big((\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\varphi})(x)\otimes_S \Delta^{+}\nabla a\big)_{ij}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}x| \\
&\le C_2\int_{\Omega_{h_0}} |\nabla\boldsymbol{u}|\Big|\nabla\Big(\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\xi^2 + \frac{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}}{h}\xi^2 + h\boldsymbol{z}\Big)C_n\Big|\,\mathrm{d}x \le \\
&\le C_2\int_{\Omega_{h_0}} |\nabla\boldsymbol{u}|\Big(\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|\xi^2 + \Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|2\xi\nabla\xi + |\nabla\boldsymbol{u}|C_n\xi^2 + |\boldsymbol{u}|C_n\xi^2 + \\
&+ |\boldsymbol{u}|C_n^2\xi^2 + |\boldsymbol{u}|C_n 2\xi\nabla\xi + h\nabla\boldsymbol{z}\Big)C_n\,\mathrm{d}x \le C_2^2\varepsilon\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x + \\
&+ C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C\|\nabla\xi\|_\infty^4,
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_3| &\le C_2|\int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{D}\Big[\frac{1}{h^2}\Delta^{-}\boldsymbol{u}\xi^2(T^{-1}y) + \frac{1}{h^2}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}(T^{-1}y)\xi^2(T^{-1}y) + \boldsymbol{z}\Big] \\
&(\Delta^{-}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}y| \le C_2\int_{\Omega_{h_0}} |\nabla\boldsymbol{u}|\Big[\frac{\nabla\Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h}\xi^2 + \frac{\Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h}2\xi\nabla\xi + \nabla\boldsymbol{u}\frac{\Delta^{-}\boldsymbol{n}}{h}\boldsymbol{n}\xi^2 + \\
&+ \boldsymbol{u}\frac{\nabla\Delta^{-}\boldsymbol{n}}{h}\boldsymbol{n}\xi^2 + \boldsymbol{u}\frac{\Delta^{-}\boldsymbol{n}}{h}\nabla\boldsymbol{n}\xi^2 + \boldsymbol{u}\frac{\Delta^{-}\boldsymbol{n}}{h}\boldsymbol{n}2\xi\nabla\xi + h\nabla\boldsymbol{z}\Big]C_n\,\mathrm{d}y \le \\
&\le \varepsilon C_2^2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}y + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + \|\nabla\xi\|_\infty^4,
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{A}_4| + |\mathcal{A}_5| \le C_2|\int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})(y)\Big[\frac{1}{h^2}\Delta^{-}\boldsymbol{u}\xi^2(T^{-1}y) + \frac{1}{h^2}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}(T^{-1}y)\xi^2(T^{-1}y) + \boldsymbol{z}\Big] \\
&\Big(\nabla(\Delta^{-}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + (\Delta^{-}\boldsymbol{n})\nabla\boldsymbol{n}\Big)\,\mathrm{d}y| \le \varepsilon C_2^2\int_{\Omega_{h_0}}\Big|\frac{\nabla\Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}y + C_2^2 C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + \\
&+ C\|\nabla\xi\|_\infty^4 + C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4.
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

V následujícím členu využijeme odhad na $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}$ (4.36):

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_6| &\le C_2 \Big| \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}) \,\mathrm{d}y \Big| \le C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + C_2^2 \varepsilon \|\nabla \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}\|_2^2 \le \\
&\le C\|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + C_2^2 \varepsilon K \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\nabla \Delta^{-} \boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}y + C_2^2 \varepsilon K \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + \\
&+ C_2^2 \varepsilon K \|\nabla \xi\|_\infty^4 + C_2^2 \varepsilon K \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 .
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

U členu $\mathcal{A}_7$ vypíšeme argumenty, aby byl názornější postup.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_7 &= \int_{\Omega_{h_0}} \Big[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(Tx) - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \Big] \varphi_i(x) \,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{\Omega_{h_0}} \Big(u_j(Tx) \Big[\frac{\partial u_i(Tx)}{\partial x_j} - \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}(Tx) \otimes_S (\Delta^{+} \nabla a) \Big)_{ij} \Big] - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \pm \\
&\pm u_j(x) \frac{\partial u_i(Tx)}{\partial x_j} \Big) \varphi_i(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_{h_0}} \Big([\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_j(x) \frac{\partial u_i(Tx)}{\partial x_j} + \\
&+ u_j(x) \frac{\partial [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_i(x)}{\partial x_j} \Big) \varphi_i(x) \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_{h_0}} u_j(Tx) \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}(Tx) \otimes_S (\Delta^{+} \nabla a) \Big)_{ij} \varphi_i \,\mathrm{d}x \\
&\equiv \mathcal{A}_{7.1} - \mathcal{A}_{7.2} .
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{7.1} &= \int_{\Omega_{h_0}} \Big([\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_j \frac{\partial u_i(Tx)}{\partial x_j} + u_j(x) \frac{\partial [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_i}{\partial x_j} \Big) \varphi_i(x) \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_j \frac{\partial u_i(Tx)}{\partial x_j} [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_i \xi^2(x) \,\mathrm{d}x + \\
&+ \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_j \frac{\partial u_i(Tx)}{\partial x_j} [\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_i \xi^2(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{h_0}} [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_j \frac{\partial u_i(Tx)}{\partial x_j} z_i \,\mathrm{d}x + \\
&+ \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} u_j(x) \frac{\partial [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_i}{\partial x_j} [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_i \xi^2(x) \,\mathrm{d}x + \\
&+ \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} u_j(x) \frac{\partial [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_i}{\partial x_j} [\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_i \xi^2(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{h_0}} u_j(x) \frac{\partial [\Delta^{+} \boldsymbol{u}]_i}{\partial x_j} z_i \,\mathrm{d}x \equiv \\
&\equiv \mathcal{B}_{11} + \cdots + \mathcal{B}_{16} ,
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

Na člen $\mathcal{B}_{11}$ použijeme Cauchyho nerovnost s $\varepsilon > 0$ a interpolační nerovnost (A.28). Dostáváme

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{11}| &\le \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 |\nabla \boldsymbol{u}| \xi^2 \,\mathrm{d}x \le \varepsilon \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^4 \xi^4 \,\mathrm{d}x + C \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}x \le \\
&\le \varepsilon C \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x \int_{\Omega_{h_0}} \Big(\Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big| \xi + \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big| |\nabla \xi| \Big)^2 \,\mathrm{d}x + \\
&+ C \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}x \le \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^8 + C \|\nabla \xi\|_\infty^4 + \\
&+ \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

U členu $\mathcal{B}_{12}$ postupujeme podobně jako v předchozím případě, použijeme opět Cauchyho nerovnost s $\varepsilon > 0$ interpolační nerovnost (A.28) a vnoření $W^{1,2} \hookrightarrow\hookrightarrow L^4$.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{12}| &\le \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big| |\nabla \boldsymbol{u}| |\boldsymbol{u}| C_n \xi^2 \,\mathrm{d}x \le \varepsilon \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^4 \xi^4 \,\mathrm{d}x + C \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^4 \,\mathrm{d}x + \\
&+ C \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x \le \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^8 + C \|\nabla \xi\|_\infty^4 + \\
&+ \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x + C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{13}| &\le \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big| |\nabla \boldsymbol{u}| h \boldsymbol{z} \,\mathrm{d}x \le \varepsilon \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^4 \,\mathrm{d}x + C h^4 \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{z}^4 \,\mathrm{d}x + \\
&+ C \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}x \le \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^4 + \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \,\mathrm{d}x + \\
&+ C h^4 \|\boldsymbol{z}\|_{1,2}^2 \|\boldsymbol{z}\|_2^2 + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \le \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \,\mathrm{d}x + \\
&+ C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + C \|\nabla \xi\|_\infty^8 + C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^8,
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{14}| &\leq \frac{2}{h^2}\int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}||\Delta^{+}\boldsymbol{u}|^2\xi|\nabla\xi|\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \varepsilon\int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^4\,\mathrm{d}x + C\int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^2\xi^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \varepsilon C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^4 + \varepsilon C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2\int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\,\mathrm{d}x + C\|\nabla\xi\|_\infty^4 + C\|\boldsymbol{u}\|_2^4,
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{15}| &\leq \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}(x)|\Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big||\boldsymbol{u}(Tx)|C_n\xi^2\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \varepsilon\int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\xi^2\,\mathrm{d}x + C\int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^4\xi^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Člen $\mathcal{B}_{16}$ integrujeme per partes, využijeme $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ a dále postupujeme jako v předešlých členech.

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{16}| &\leq \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|\Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big||h\nabla\boldsymbol{z}| \leq \\
&\leq C\int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^4\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^4\,\mathrm{d}x + Ch^2\int_{\Omega_{h_0}} |\nabla\boldsymbol{z}|^2\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + \varepsilon C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2\int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2\,\mathrm{d}x + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + C\|\nabla\xi\|_\infty^4,
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{7.2} &= \frac{1}{h^2}\int_{\Omega_{h_0}} u_j(Tx)\Big(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}}(Tx)\otimes_S(\Delta^{+}\nabla a)\Big)_{ij}[(\Delta^{+}\boldsymbol{u})_i\xi^2 + [\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_i\xi^2 + z_i]\,\mathrm{d}x \\
&\equiv \mathcal{B}_{17} + \mathcal{B}_{18} + \mathcal{B}_{19}.
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

U členu $\mathcal{B}_{17}$ provedeme podobné úpravy jako u $\mathcal{B}_{11}$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{17}| \leq & \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}||\nabla \boldsymbol{u}| C_n \Big| \frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h} \Big| \xi^2 \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h} \Big|^4 \xi^4 \,\mathrm{d}x + \\
& + C \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \xi^2 + C \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^4 \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\nabla \Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x + \\
& + C \|\nabla \xi\|_\infty^4 + \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^8 + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4,
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

$$
|\mathcal{B}_{18}| \leq C_n^2 \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^2 |\nabla \boldsymbol{u}| \xi^2 \,\mathrm{d}x \leq C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2,
\tag{4.66}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{19}| \leq & C_n \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}||\nabla \boldsymbol{u}||h\boldsymbol{z}| \,\mathrm{d}x \leq C \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^4 \,\mathrm{d}x + C \int_{\Omega_{h_0}} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}x + \\
& + \varepsilon h^4 \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{z}|^4 \,\mathrm{d}x \leq C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C \|\nabla \xi\|_\infty^8 + C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^8.
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_8 = & \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{u} [\frac{1}{h^2} \Delta^{-}\boldsymbol{u} \xi^2 (T^{-1}y) + \frac{1}{h^2} \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}} (T^{-1}y) \xi^2 (T^{-1}y) + \boldsymbol{z}] (\Delta^{-}\boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}y \\
& \equiv \mathcal{B}_{20} + \mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22}.
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Následující člen odhadneme stejně jako $\mathcal{B}_{12}$. Tedy

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{20}| \leq & C \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}||\nabla \boldsymbol{u}| \Big| \frac{\Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h} \Big| \xi^2 \,\mathrm{d}y \leq \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^8 + C \|\nabla \xi\|_\infty^4 + \\
& + \varepsilon C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\nabla \Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}y + C \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

$$
|\mathcal{B}_{21}| \leq \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}|^2 |\nabla \boldsymbol{u}| C_n \xi^2 C_n \,\mathrm{d}y \leq C (\|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4),
\tag{4.70}
$$

$$
|\mathcal{B}_{22}| \leq C \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{u}||\nabla \boldsymbol{u}| h \boldsymbol{z} C_n \,\mathrm{d}y \leq C (\|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + \|\nabla \xi\|_\infty^8 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^8).
\tag{4.71}
$$

Zde využijeme odhad na $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}$ (4.36)

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_9| &\leq \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2 \|\boldsymbol{u}\|_4 \|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}\|_4 \leq \varepsilon \|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}\|_{1,2}^2 + C\|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \|\boldsymbol{u}\|_4^2 \leq \\ &\leq \varepsilon K \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla \Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}y + \varepsilon K \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + +\varepsilon K \|\nabla \xi\|_\infty^4 + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Další člen identity (4.29) si vyjádříme v ekvivalentní podobě

$$\mathcal{A}_{10} = \int_{\Omega_{h_0}} \Delta^{+}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_{h_0}} \boldsymbol{f} \cdot \Delta^{-}\boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x. \tag{4.73}$$

Po dosazení testovací funkce a přičtení a odečtení výrazů

$$\frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} f_i [\Delta^{-}\boldsymbol{u}]_i \xi^2 \,\mathrm{d}x, \ \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} f_i [\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_i \xi^2 (T^{-1}x) \,\mathrm{d}x$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{10} &= \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} f_i [\Delta^{+}\boldsymbol{u} - \Delta^{-}\boldsymbol{u}]_i \xi^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} f_i [\Delta^{-}\boldsymbol{u}]_i [\xi^2 - \xi^2(T^{-1}x)] \,\mathrm{d}x - \\ &- \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} f_i [\Delta^{+}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_i \xi^2 (T^{-1}x) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{h_0}} f_i [\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{u}}]_i [\xi^2 - \xi^2(T^{-1}x)] \,\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{\Omega_{h_0}} f_i [\Delta^{-}\boldsymbol{z}]_i \equiv \mathcal{B}_{23} + \cdots + \mathcal{B}_{27}.\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$|\mathcal{B}_{23}| \leq C \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{f}|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x + \varepsilon \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla \Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x, \tag{4.75}$$

$$|\mathcal{B}_{24}| \leq C\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + C\|\nabla \xi\|_\infty^4 + C\|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^4, \tag{4.76}$$

$$|\mathcal{B}_{25}| \leq \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{f}| C_n \Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big| \xi^2 \leq \varepsilon \int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x + C \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{f}|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x, \tag{4.77}$$

$$|\mathcal{B}_{26}| \leq C\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + C\|\nabla \xi\|_\infty^4 + C\|\boldsymbol{u}\|_2^4, \tag{4.78}$$

$$|\mathcal{B}_{27}| \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \frac{h^2}{2}\|\nabla \boldsymbol{z}\|_2^2 \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + \|\nabla \xi\|_\infty^4 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4). \tag{4.79}$$

$$\mathcal{A}_{11} \leq \int_{\Omega_{h_0}} |\boldsymbol{f}| \Big(\Big| \frac{\Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h} \Big| \xi^2 + |\boldsymbol{u}| C_n \xi^2 + \boldsymbol{z} \Big) C_n \,\mathrm{d}y \leq \\ \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + \|\nabla\xi\|_\infty^4 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4). \tag{4.80}$$

$$\mathcal{A}_{12} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \varepsilon\|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\varphi}}\|_2^2 \leq C\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + \varepsilon K \Big(\int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\nabla\Delta^{-}\boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}y + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + \\ + \|\nabla\xi\|_\infty^4 + \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 \Big). \tag{4.81}$$

Dáme-li výše provedené výpočty dohromady, máme

$$\Big[2C_1C_0 - \varepsilon\big(4 + C_2^2(9+K) + 2K + 5C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2\big) \Big] \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x \leq \\ \leq \varepsilon(C_2^2 + 2C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_2^2) \int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h} \Big|^2 \,\mathrm{d}x + C\|\boldsymbol{f}\|_2^2 + C(C_2^2+1)\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^2 + \\ + C(C_1^2 + C_2^2 + 1)\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^4 + C\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}^8 + C(C_2^2+1)\|\nabla\xi\|_\infty^4 + C\|\nabla\xi\|_\infty^8. \tag{4.82}$$

Protože $\varepsilon > 0$ můžeme volit libovolně, jistě najdeme takové, že levá strana výrazu (4.82) zůstane kladná. Z prvního apriorního odhadu (3.8) víme, že $\|\boldsymbol{u}\|_{1,2} < C$.

Vidíme tedy, že celý postup selhává na tom, že v prvním integrálu na pravé straně v (4.82) chybí seřezávací funkce $\xi(x)$. Musíme proto celý postup modifikovat. Vezměme $h \in (0, h_0/2)$ pevně. Tedy na Ω_h je definovaný výraz $\frac{\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u}}{h}$. Fixujme r, R tak, že $0 < r < R < h_0/2$ a $x_0 \in \partial\Omega_{h_0}$. Nechť $\xi(x) \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0))$ a nabývá hodnot

$$\xi(x) \begin{cases} = 1 & x \in B_r(x_0) \\ \in (0,1) & x \in B_R(x_0) \setminus B_r(x_0) \\ = 0 \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R(x_0). \end{cases} \tag{4.83}$$

Jistě můžeme zvolit seřezávací funkci ξ tak, aby $C(C_2^2+1)\|\nabla\xi\|_\infty^4 \leq A(R-r)^{-\alpha}$ pro nějaké $A, \alpha > 0$ a $C\|\nabla\xi\|_\infty^8 \leq B$. Dále definujme $\Omega^r := B_r(x_0) \cap \Omega$ pro $x_0 \in \partial\Omega_{h_0}$. Nyní zopakujeme výše uvedené odhady jednotlivých členů identity (4.29), tentokráte pro oblast Ω^R místo Ω_{h_0}. V tomto výpočtu budou všechny uvedené konstanty nezávislé na r, R, h. Aplikujeme lemma A.5.1 z dodatku pro

$$f(r) := \sup_{x \in \Omega_{h_0}} \int_{\Omega^r} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \mathrm{d}x,$$

Protože platí již zmiňovaný vztah $C(C_2^2+1)\|\nabla\xi\|_\infty^4 \le A(R-r)^{-\alpha}$, $A, \alpha > 0$, $C\|\nabla\xi\|_\infty^8 \le B$, tak dokážeme splnit předpoklad lemmatu A.5.1

$$\int_{\Omega^r} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \mathrm{d}x \le \varepsilon \int_{\Omega^R} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \mathrm{d}x + A(R-r)^{-\alpha} + B \qquad (4.84)$$
$$\forall x_0 \in \Omega_{h_0} \ \ \forall 0 < r < R < h_0/2.$$

Tedy dle lemmatu A.5.1 máme

$$\int_{\Omega^r} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \mathrm{d}x \le c[A(R-r)^{-\alpha} + B] \quad \forall x_0 \in \Omega_{h_0} \quad \forall 0 < r < R < h_0/2, \qquad (4.85)$$

kde konstanty A, B závisí pouze na normě $\boldsymbol{f}$ v $L^2(\Omega)^2$ a normě $\boldsymbol{u}$ ve $W^{1,2}(\Omega)^2$. Stejně tak celá pravá strana (4.82) nyní závisí pouze na $\|\boldsymbol{f}\|_2$ a $\|\boldsymbol{u}\|_{1,2}$. Po úpravě

$$\int_{\Omega_{h_0}} \Big|\frac{\nabla \Delta^+ \boldsymbol{u}}{h}\Big|^2 \mathrm{d}x \le C(\|\boldsymbol{f}\|_2, \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}). \qquad (4.86)$$

Díky (A.18) a (A.19) dostáváme

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \Big|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial \tau}\Big|^2 \mathrm{d}x \le C(\|\boldsymbol{f}\|_2, \|\boldsymbol{u}\|_{1,2}). \qquad (4.87)$$

Poznámka: V případě vnitřní regularity, nechť $V \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$ a $\mathrm{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega) = h_0 > 0$. Nechť $\boldsymbol{e}^r, r = 1, 2$ je báze souřadného systému v $\mathbb{R}^2$. Pro $h \in (0, h_0)$ definujme zobrazení $T : \Omega_0 \to \Omega$ následujícím předpisem:

$$T : x \mapsto x + h\boldsymbol{e}^r, \qquad r = 1, 2. \qquad (4.88)$$

Z výše uvedeného je vidět, že v případě vnitřní regularity a regularity u hranice v tečném směru můžeme postupovat velmi podobně. Testovací funkce bude mít jednodušší tvar a odhady jednotlivých členů identity (4.29) budou velmi podobné, v mnoha případech početně méně náročné.

(ii) Normálový směr

Budeme postupovat podle [26], kde je problém normálového směru řešen ve třech dimenzích pro evoluční variantu. Tento výpočet je rovněž užit v článcích [12] a [14], kde je výpočet proveden pro stacionární dvoudimenzionální problém.

Abychom odhadli celý $\nabla^2 \boldsymbol{u}$, stačí se zaměřit díky (4.87) na $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$ a $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$. Druhý člen může být vyjádřen přímo z podmínky $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ (po aplikaci $\frac{\partial}{\partial x_2}$)

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{4.89}$$

Informaci o $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$ získáme z rovnice (4.15). Formální aplikací[1] operátoru curl

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{g} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \quad \text{pro}\, \boldsymbol{g} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2 \tag{4.90}$$

z rovnice (4.15) vypadne tlak. Dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \partial_{21} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \partial_{22} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2) - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \partial_{11} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2) - \\ &- \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \partial_{12} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2) + \frac{\partial}{\partial x_1} [u_k \frac{\partial u_2}{\partial x_k}] - \frac{\partial}{\partial x_2} [u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k}] - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Položme $G \equiv \frac{\partial}{\partial x_2} \partial_{12} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2)$. Platí

$$\|\xi G\|_{-1,2} \leq C \|\partial_{12} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2)\|_2 \leq C \|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\|_2 \leq C. \tag{4.92}$$

Dále, díky (P3)

$$\Big\| \frac{\partial}{\partial x_1} (\xi G) \Big\|_{-1,2} \leq \Big\| \frac{\partial}{\partial x_1} \partial_{12} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \Big\|_2 \leq C + C' \sum_{i=1}^{2} \Big\| \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_1 \partial x_i} \Big\|_2. \tag{4.93}$$

Z rovnice (4.91) dostáváme

$$\begin{aligned} \Big\| \frac{\partial}{\partial x_2} (\xi G) \Big\|_{-1,2} \leq C \Big(&\Big\| \frac{\partial}{\partial x_1} (\partial_{21} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2) + \partial_{22} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2) - \partial_{11} \Phi(|\boldsymbol{D}|^2)) \Big\|_2 + \\ &+ \Big\| u_k \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} \Big\|_2 + \|\boldsymbol{f}\|_2 \Big). \end{aligned} \tag{4.94}$$

[1] Postup je založen na testování rovnice (4.15) funkcí $\operatorname{rot} \boldsymbol{g}$. Výsledek je stejný, tj. dostaneme rovnici (4.91) ve smyslu distribucí.

Nyní můžeme aplikovat Nečasovu větu o negativních normách (viz věta A.4.2 v dodatku) abychom dostali

$$\|\xi G\|_2 \leq C(\|\xi G\|_{-1,2} + \|\nabla \xi G\|_{-1,2}) \leq C + C' \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_1 \partial x_i} \right\|_2. \tag{4.95}$$

Z definice G a symetrie $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) = \partial_{11}\partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \frac{\partial}{\partial x_2} D_{11}(\boldsymbol{u}) + \partial_{22}\partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \frac{\partial}{\partial x_2} D_{22}(\boldsymbol{u}) + \\ + 2\partial_{12}\partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \frac{\partial}{\partial x_2} D_{12}(\boldsymbol{u}). \end{aligned} \tag{4.96}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} \partial_{12}\partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \frac{\partial D_{12}(\boldsymbol{u})}{\partial x_2} = \frac{G}{2} - \frac{1}{2}\partial_{11}\partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \frac{\partial D_{11}(\boldsymbol{u})}{\partial x_2} - \\ - \frac{1}{2}\partial_{22}\partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \frac{\partial D_{22}(\boldsymbol{u})}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Užijeme-li toho, že $D_{12}(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2}) = \frac{\partial^2 \partial u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}$, dále díky předpokladu (P2) víme, že $\partial_{12}\partial_{12}\Phi(|\boldsymbol{D}|^2) \geq 2C_1$. Pokud poslední člen (4.97) upravíme pomocí (4.89), tak z (4.95) a z (4.97) dostaneme

$$\left\| \xi \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right\|_2 \leq C + C' \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_1 \partial x_i} \right\|_2. \tag{4.98}$$

Díky vnitřní regularitě víme, že pravá strana (4.98) je konečná. Abychom mohli využít výsledky vnitřní regularity, provedeme celý postup pro normálový směr na otevřené množině $\mathcal{U}$, kde $\overline{\mathcal{U}} \subset V_{h_0}$. Protože odhady, které takto dostaneme, nezávisí na $\mathcal{U}$, lze při vhodné volbě $\mathcal{U}$ udělat limitní přechod na celé V_{h_0}.

Ze vztahu (4.98) užitím definice tečné derivace, vztahu (4.87) a (4.89) odvodíme

$$\sum_{i=1}^{2} \left\| \xi \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} \right\|_2 \leq C + \left\| \frac{\partial \nabla \boldsymbol{u}}{\partial \tau} \right\|_2 + \hat{C} \sup_{x_1 \in (-\alpha, \alpha)} |(a(x_1))'| \sum_{i=1}^{2} \left\| \xi \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} \right\|_2. \tag{4.99}$$

Zvolíme- li α tak, že

$$\hat{C} \max_{l} \sup_{x_1 \in (-\alpha,\alpha)} |a'(x_1)| \leq \frac{1}{2}, \tag{4.100}$$

můžeme potom poslední člen v (4.99) přesunout na levou stranu a máme

$$\left\| \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} \right\|_2 \leq C, \tag{4.101}$$

čímž je normálový směr hotov. Spolu s tečným směrem a vnitřní regularitou tedy dostáváme, že $\boldsymbol{u} \in W^{2,2}(\Omega)$. ■

4.3 Rekonstrukce tlaku

Díky právě dokázanému lemmatu 4.2.1 víme, že rovnice (4.15) je splněna skoro všude. To nám umožní jednoduchým způsobem zrekonstruovat tlak.

Doposud jsme se zabývali slabou formulací problému (ať už stacionárního $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^2_{\mathrm{stac}}$ nebo evolučního $(\mathrm{NS}_{\mathrm{p.slip}})^2$) ve které se nevyskytoval tlak, protože jsme uvažovali testovací funkce z prostoru s nulovou divergencí. Nyní nás zajímá otázka, zda existuje tlak $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, že

$$\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle + \int_\Omega \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi}) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x + \langle \nabla p, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$
$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ a s.v. } t \in (0,T). \tag{4.102}$$

Z De Rhamova lemmatu (lemma A.4.6) víme, že pravou stranu rovnice

$$\nabla p = \boldsymbol{f} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{S}} - \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) \tag{4.103}$$

můžeme napsat ve tvaru gradientu. Protože z dříve dokázaného víme, že $\boldsymbol{u} \in L^\infty(I, W^{2,2}(\Omega)^2)$ a $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^\infty(I, L^2(\Omega)^2)$, tak rovnice (4.103) je splněna skoro všude a její pravá strana leží v $L^2(\Omega)^2$. Použijeme li Poincarého nerovnost A.1.2 s dodatečným předpokladem $\int_\Omega p \,\mathrm{d}x = 0$, dostáváme, že existuje tlak $p \in W^{1,2}(\Omega)$ pro s.v. t, tedy $p \in L^\infty(I, W^{1,2}(\Omega))$, $\int_\Omega p \,\mathrm{d}x = 0$.

Dodatek A

Přehled použité teorie

A.1 Přehled nerovností

Tvrzení A.1.1 (Youngova nerovnost)**.** *Nechť* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Pak*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b > 0, \tag{A.1}$$

$$ab \le \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad a, b, \varepsilon > 0, \quad C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}. \tag{A.2}$$

Poznámka: Pro $p = q = 2$ *se nerovnost nazývá Cauchyho (zde můžeme brát* $a, b \in \mathbb{R}$*).*

Tvrzení A.1.2 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť* $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Pokud* $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, *pak platí*

$$\int_\Omega |uv| \, \mathrm{d}x = \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{A.3}$$

Věta A.1.1 (Kornova nerovnost)**.** *Nechť* $p \in (1, \infty)$. *Pak existuje kladná konstanta* $K_p = K_p(p, \Omega)$, *že* $\forall \boldsymbol{u} \in W^{1,p}(\Omega)^d$ *platí:*

$$K_p \|\boldsymbol{u}\|_{1,p} \le \|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\|_p + \|\boldsymbol{u}\|_p. \tag{A.4}$$

Poznámka: Pokud $\boldsymbol{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)^d$, *platí dokonce* $K_p \|\boldsymbol{u}\|_{1,p} \le \|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\|_p$.

Věta A.1.2 (Poincarého nerovnost)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je oblast s Lipschitzovskou hranicí. Nechť* $p \in [1, \infty)$. *Pak existuje konstanta* C *závislá pouze na* p, n *a* Ω *tak, že platí*

$$\|f\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\Big(\|\nabla f\|^p_{L^p(\Omega)} + \Big| \int_\Omega f \, \mathrm{d}x \Big|^p \Big) \quad \forall f \in W^{1,p}(\Omega). \tag{A.5}$$

Věta A.1.3 (Gronwallova nerovnost)**.** *Nechť* $\eta(\cdot)$ *je nezáporná absolutně spojitá funkce na* $[0,T]$*, která splňuje pro s.v.* t *diferenciální rovnici*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \tag{A.6}$$

kde $\phi(t)$, $\psi(t) \in L^1((0,T))$ *jsou nezáporné funkce na* $[0,T]$*. Pak*

$$\eta(t) \leq \exp\Big(\int_0^t \phi(s)ds\Big)\Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\Big] \tag{A.7}$$

pro všechna $0 \leq t \leq T$*.*

Důkaz: Lze nalézt v [3].

A.2 Řešení ODR

Definice A.2.1 (Carathéodoryho podmínka)**.** *Uvažujme* $\boldsymbol{c} : I_\delta \equiv (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^d$ *a funkci* $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{c}(t)) : I_\delta \times K \to \mathbb{R}^d$*, kde* $K \equiv \{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d; |\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_0| < \Delta\}$ *pro nějaké* Δ*. Řekneme, že funkce* $\boldsymbol{F}$ *splňuje Carathéodoryho podmínku, pokud*

- $t \to F_i(t, \boldsymbol{c})$ *je měřitelná pro všechna* $i = 1 \ldots d$ *a pro všechna* $\boldsymbol{c} \in K$
- $\boldsymbol{c} \to F_i(t, \boldsymbol{c})$ *je spojitá pro skoro všechna* $t \in I_\delta$
- *Existuje integrabilní funkce* $G : I_\delta \to \mathbb{R}$*, že*

$$|F_i(t, \boldsymbol{c})| \leq G(t) \quad \forall (t, \boldsymbol{c}) \in I_\delta \times K \quad \forall i = 1 \ldots d$$

Věta A.2.1. *Nechť* $\boldsymbol{F}$ *splňuje Carathéodoryho podmínku. Pak existuje* $\delta' \in (0, \delta)$ *a spojitá funkce* $\boldsymbol{c} : I_{\delta'} \to \mathbb{R}^d$*, že*

- $\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}$ *existuje pro skoro všechna* $t \in I_{\delta'}$
- $\boldsymbol{c}$ *řeší problém*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{c}(t) &= \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{c}(t)) \quad t \in I_{\delta'} \\ \boldsymbol{c}(t_0) &= \boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{A.8}$$

Definice A.2.2. *Nechť* $\boldsymbol{c}_1 : I_{\delta_1} \mapsto \mathbb{R}^n$ *a* $\boldsymbol{c}_2 : I_{\delta_2} \mapsto \mathbb{R}^n$ *jsou řešení problému* (A.8)*. Budeme psát* $\boldsymbol{c}_1 \leq \boldsymbol{c}_2$*, jestliže* $I_{\delta_1} \subset I_{\delta_2}$ *a* $\boldsymbol{c}_1(t) = \boldsymbol{c}_2(t)$ *pro* $t \in I_{\delta_1}$*. Řešení* $\boldsymbol{c}_1$ *problému* A.8 *se nazývá maximální, jestliže z podmínek*

- $\boldsymbol{c}_2$ *je řešení* A.8
- $\boldsymbol{c}_1 \leq \boldsymbol{c}_2$

plyne $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2$*.*

Věta A.2.2 (O utíkání z kompaktu)**.** *Nechť* $\boldsymbol{c} : \overline{I}_\delta \mapsto \mathbb{R}^n$ *je maximální řešení problému* A.8*. Buď* $A \subset I_\delta \times K$*,* A *kompaktní. Pak existuje* $\delta' > 0$ *tak, že* $\delta' < \delta$ *a* $(\boldsymbol{c}(t), t) \notin A$ *pro* $t \in \overline{I}_\delta \backslash I_{\delta'}$*.*

DŮKAZ: Lze nalézt v [15].

A.3 Popis hranice

Obecný popis hranice oblasti typu $\mathcal{C}^{k,\mu}$ lze nalézt například v [3] nebo [30], konkrétní popis blízký našemu případu v [14] nebo [9].

Nechť je hranice $\partial\Omega$ lokálně popsaná $\mathcal{C}^3$ zobrazeními $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in \mathbb{N}$ splňujícími $a_l'(0) = 0$. V příslušejícím $l-$tém souřadném systému předpokládáme, že pro pevné kladné α a $x_1 \in (-\alpha, \alpha)$ platí

$$a(x_1) \in W^{3,\infty}((-\alpha, \alpha)), \tag{i}$$

$$(x_1, x_2) \in \partial\Omega \Leftrightarrow x_2 = a_l(x_1), \tag{ii}$$

$$V_+^l = \{(x_1, x_2);\, x_1 \in (-\alpha, \alpha),\, x_2 \in (a_l(x_1), a_l(x_1) + \alpha)\} \subset \Omega, \tag{iii}$$

$$V_-^l = \{(x_1, x_2);\, x_1 \in (-\alpha, \alpha),\, x_2 \in (a_l(x_1) - \alpha, a_l(x_1))\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}. \tag{iv}$$

Dále definujme

$$V^l := \{(x_1, x_2);\, x_1 \in (-\alpha, \alpha),\, x_2 \in (a_l(x_1) - \alpha, a_l(x_1) + \alpha)\}.$$

Pro dané $\alpha > 0$ existuje systém V^l, $l = 1, \ldots, k$ pokrývající hranici $\partial\Omega$. Existuje $h_0 > 0$ tak, že lze zvolit konečný systém množin $V_{h_0}^l$, jejichž sjednocení pokrývá $\partial\Omega$ a platí $V_{h_0}^l \subset V^l$ a $\mathrm{dist}(\partial V_{h_0}^l, \partial V^l) \geq h_0$. Dále uvažujme systém množin $V_{\frac{h_0}{2}}^l$, že $V_{h_0}^l \subset V_{\frac{h_0}{2}}^l \subset V^l$, $l = 1, \ldots, k$ a $\mathrm{dist}(\partial V_{\frac{h_0}{2}}^l, \partial V_{h_0}^l) = \frac{h_0}{2}$. Lze vybrat otevřenou hladkou množinu V^0, že dokážeme pokrýt celou oblast Ω:

$$\Omega \subset \bigcup_{l=0}^{k} V_{h_0}^l \subset \bigcup_{l=0}^{k} V_{\frac{h_0}{2}}^l \subset \bigcup_{l=0}^{k} V^l.$$

Definujme $\Omega^l_{h_0} := V^l_{\frac{h_0}{2}} \cap \Omega$. Vezměme pevné l a pro přehlednost tento index ve výpočtech neuvádějme.

Vnější normála[1] k $\partial\Omega$ je definována jako

$$\boldsymbol{n} = (-a'(x_1), 1).$$

Tečnou derivaci na V zavedeme následujícím způsobem

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1} + a'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Nechť $h \in (0, h_0)$, definujme zobrazení $T : \Omega_{h_0} \mapsto V$ následujícím předpisem:

$$T : x \mapsto (x_1 + h, x_2 + a(x_1 + h) - a(x_1)) = (y_1, y_2). \tag{A.9}$$

Potom inverzní zobrazení T^{-1} je dáno

$$T^{-1} : y \mapsto (y_1 - h, y_2 + a(y_1 - h) - a(y_1)) = (x_1, x_2). \tag{A.10}$$

S užitím právě definovaného zobrazení T zaveďme pro větší přehlednost značení pro diference

$$\Delta^{+}\boldsymbol{g}(x) := \boldsymbol{g}(Tx) - \boldsymbol{g}(x), \tag{A.11}$$
$$\Delta^{-}\boldsymbol{g}(x) := \boldsymbol{g}(x) - \boldsymbol{g}(T^{-1}x). \tag{A.12}$$

V případě, že budeme pracovat se skalární funkcí $a(x_1)$, budeme vektorem $\nabla a(x_1)$ rozumět vektor $(a'(x_1), 0)$. Posunutím T se zde rozumí pouze restrikce T na první složku, tím pádem i označení $\Delta^{+}a$ bude mít význam rozdílu posunutí funkce a ve směru x_1 a funkce a v bodě x_1. Tedy

$$\Delta^{+}a(x_1) = a(x_1 + h) - a(x_1). \tag{A.13}$$

Obdobně pro $\Delta^{-}a$. Platí

$$\left(\frac{\partial T_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\Delta^{+}a(x_1))' & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.14}$$

[1] Obecně se nejedná o jednotkový vektor. Ve všech výpočtech budeme k $\boldsymbol{n}$ přistupovat, jako by se jednalo v jednotkovou normálu. Konstanta, kterou by se $\boldsymbol{n}$ muselo normalizovat, nemá na provedené výpočty vliv, respektive lze zahrnout do obecné konstanty vyskytující se v odhadech.

$$\Big(\frac{\partial T_i^{-1}(y)}{\partial y_j}\Big)_{i,j=1,2} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ (\Delta^{-} a(y_1))' & 1 \end{array} \right). \tag{A.15}$$

Obě matice (A.14) a (A.15) mají determinant rovný 1. Tečnou derivaci funkce g můžeme pomocí zobrazení T zapsat jako

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^{+} g}{h}. \tag{A.16}$$

Následující lemma popisuje vztah mezi diferencí a gradientem, respektive mezi diferencí a derivací v tečném směru (viz [26]):

Lemma A.3.1. *Nechť $p > 1$. Potom pro všechna $g \in W^{1,p}_{\boldsymbol{n}}(\Omega)$ platí*

$$\int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\Delta^{+} g}{h} \Big|^p \, \mathrm{d}x \leq c(a) \|\nabla g\|_p^p. \tag{A.17}$$

Dále je-li $g \in L^p(\Omega)$ a pokud pro všechny $h \in (0, h_0)$ platí

$$\int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\Delta^{+} g}{h} \Big|^p \, \mathrm{d}x \leq C, \tag{A.18}$$

potom $\frac{\partial g}{\partial \tau}$ existuje ve smyslu distribucí a

$$\int_{\Omega_{h_0}} \Big| \frac{\partial g}{\partial \tau} \Big|^p \, \mathrm{d}x \leq C. \tag{A.19}$$

Důkaz: Lze nalézt v [26].

Následující lemma usnadňuje práci s normálou $\boldsymbol{n}$ v odhadech.

Lemma A.3.2. *Nechť $\boldsymbol{n}(x) = (-a'(x_1), 1)$ je vnější normála k $\partial\Omega$ v bodě $x \in \partial\Omega$, $\Omega \in \mathcal{C}^3$. Potom existuje konstanta C_n, že pro všechna $h \in (0, h_0)$ platí:*

$$\Big\| \frac{\Delta^{\pm} a}{h} \Big\|_{3,\infty} \leq C_n, \tag{A.20}$$

Důkaz: Zřejmý z (A.17) a vlastností funkce $a(x_1)$.

Lemma A.3.3. *Nechť* $\operatorname{supp}\boldsymbol{u} \subset \operatorname{supp}\xi$. *Pak*

$$\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{u}(Tx)) &= (\nabla\boldsymbol{u})(Tx) + (\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u})(Tx) \otimes \Delta^{+}\nabla a, && \text{(A.21)}\\
\nabla\Delta^{+}\boldsymbol{u} &= \Delta^{+}\nabla\boldsymbol{u} + (\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u})(Tx) \otimes \Delta^{+}\nabla a, && \text{(A.22)}\\
\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}(Tx)) &= (\boldsymbol{D}\boldsymbol{u})(Tx) + (\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u})(Tx) \otimes_S \Delta^{+}\nabla a, && \text{(A.23)}\\
\boldsymbol{D}\Delta^{+}\boldsymbol{u} &= \Delta^{+}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} + (\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u})(Tx) \otimes_S \Delta^{+}\nabla a, && \text{(A.24)}\\
\operatorname{div}\Delta^{+}\boldsymbol{u} &= \Delta^{+}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + (\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u})(Tx)\Delta^{+}\nabla a, && \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

kde symbolem $\boldsymbol{u} \otimes_S \boldsymbol{v}$ *rozumíme* $\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^T)$ *a jak už bylo zmíněno výše* $\nabla a = (a', 0)$.

Toto lemma lze nalézt v [10].

A.4 Prostory funkcí

Lemma A.4.1 (Aubin-Lions)**.** *Nechť* $1 < \alpha, \beta < +\infty$. *Nechť* X *je Banachův prostor a* X_0, X_1 *jsou separabilní a reflexivní Banachovy prostory a nechť* $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$. *Potom platí*

$$\{v \in L^{\alpha}(I, X_0), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{\beta}(I, X_1)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\alpha}(I, X). \tag{A.26}$$

Důkaz: Lze nalézt v [29].

Věta A.4.1. *Nechť* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $f \in W^{1,s}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$.
a) Je-li $s < d$, *potom* $f \in L^r(\Omega)$, $r < \frac{ds}{d-s}$ *a pro* $q < r < \frac{ds}{d-s}$ *existuje* $C_I = C_I(\Omega, d, s, q, r)$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_r &\le C_I \|f\|_{1,s}^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad \alpha \in [0,1],\\
\frac{1}{r} &= \alpha\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{d}\Big) + (1-\alpha)\frac{1}{q}.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

b) Je-li $s = d$, *potom lze brát v* (A.27) $q \le r < \infty$ *a* $r \le \infty$ *pro* $s > d$.

Speciálně pro $d = 2, r = 4, s = q = 2$ *je* $\alpha = \frac{1}{2}$, *tj. existuje* $C_I = C_I(d)$: $\forall u \in W^{1,2}(\Omega)$:

$$\|u\|_4 \le C_I \|u\|_{1,2}^{1/2} \|u\|_2^{1/2}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2. \tag{A.28}$$

Důkaz: Lze nalézt v [29].

Věta A.4.2 (Nečasova věta o negativních normách)**.** *Nechť $p \in (1, \infty)$ a nechť $\boldsymbol{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)^d$. Potom existuje konstanta c, že platí*

$$c\|\boldsymbol{u}\|_p \leq \|\boldsymbol{u}\|_{-1,p} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{-1,p}. \tag{A.29}$$

DŮKAZ: Lze nalézt např. v [25].

Lemma A.4.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblast třídy $\mathcal{C}^1$ a nechť $\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(\Omega)^d$, $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Potom*

$$\int_\Omega |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x \geq C_0 \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \xi^2 \,\mathrm{d}x - C_{01} \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 |\nabla \xi|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{A.30}$$

DŮKAZ: Lze nalézt v [26].

Lemma A.4.3. *Nechť $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Pak $\boldsymbol{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ právě tehdy, když $\boldsymbol{u}$ má reprezentanta $\bar{\boldsymbol{u}}$, který je absolutně spojitý na skoro všech úsečkách v Ω rovnoběžných se souřadnými osami a jehož klasické parciální derivace patří do $L^p(\Omega)$.*

DŮKAZ: Lze nalézt například v [33].

Lemma A.4.4. *Nechť $X(\Omega)^d$ a $Y(\Omega)^d$ jsou dva Hilbertovy prostory, $(X(\Omega)^d)^*$ a $(Y(\Omega)^d)^*$ jsou příslušné duální prostory. Nechť $X \hookrightarrow Y$ hustě. Nechť $\boldsymbol{u} \in L^p(I, X(\Omega)^d)$, $\boldsymbol{u}' \in L^{p'}(I, (X(\Omega)^d)^*)$. Potom $\boldsymbol{u}$ je rovno s.v. na $(0, T)$ spojité funkci z $[0, T]$ do Y. Navíc*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\boldsymbol{u}\|_Y^2 = 2\langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u} \rangle_X \qquad v\,\mathcal{D}(I). \tag{A.31}$$

DŮKAZ: Lze nalézt v [29].

Lemma A.4.5 (Bogovského lemma)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Nechť $m \geq 0$, $q \in (1, \infty)$ a $f \in W_0^{m,q}(\Omega)$ splňuje podmínku kompatibility*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0. \tag{A.32}$$

Potom existuje $\boldsymbol{u} \in W_0^{m+1,q}(\Omega)^2$ řešící

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = f \quad v\,\Omega \tag{A.33}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad na\ \partial\Omega. \tag{A.34}$$

Navíc, existuje konstanta C nezávislá na f, že platí

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{m,q} \leq C\|f\|_{m,q}. \tag{A.35}$$

Máme-li $\boldsymbol{g} \in W^{1,q}(\Omega)^2$ takové, že $f = \operatorname{div} \boldsymbol{g}$ a je splněna podmínka kompatibility

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}x = 0, \tag{A.36}$$

pak také

$$\|\boldsymbol{u}\|_q \leq C\|\boldsymbol{g}\|_q. \tag{A.37}$$

Důkaz: Obecnější důkaz (pro nehomogenní Dirichletovu hraniční podmínku) lze nalézt v [1] nebo například v [6].

Lemma A.4.6 (De Rhamovo lemma)**.** *Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^d$ a $\boldsymbol{f}$ distribuce na $\mathcal{D}'(\Omega)^d$ splňující $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$*

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle = 0. \tag{A.38}$$

Pak existuje distribuce p v $\mathcal{D}'(\Omega)$, že $\boldsymbol{f} = \nabla p$.

Toto lemma lze nalézt například v [1].

A.5 Ostatní

Věta A.5.1 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť $u_k \subset L^1(\Omega)$ je posloupnost konvergující skoro všude k nějakému u a platí $|u_k(x)| \leq v(x)$ pro nějaké $v \in L^1(\Omega)$. Potom $u \in L^1(\Omega)$ a $\lim_{k\to\infty} \int_A u_k(x) \, \mathrm{d}x = \int_A u(x) \, \mathrm{d}x$ pro libovolné $A \subset \Omega$ měřitelné.*

Důkaz: Lze nalézt například v [23].

Lemma A.5.1. *Nechť $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ je omezená. Předpokládejme, že existují konstanty $A, B, \alpha > -1$ a $\varepsilon \in (0, 1)$, že*

$$f(r) \leq \varepsilon f(R) + A(R - r)^{-\alpha} + B \qquad \forall a \leq r \leq R \leq b. \tag{A.39}$$

Pak existuje kladná konstanta $c = c(\alpha, \varepsilon)$, že platí

$$f(r) \leq c[A(R - r)^{-\alpha} + B] \qquad \forall a \leq r \leq R \leq b. \tag{A.40}$$

DŮKAZ: Volme $r \in [a,b)$ a hledejme δ_i tak, že $R = r + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$. Dle předpokladu víme, že platí

$$\begin{aligned} f(r) &\le \varepsilon f(r+\delta_1) + A\delta_1^{-\alpha} + B \le \varepsilon[\varepsilon f(r+\delta_1+\delta_2) + A\delta_2^{-\alpha} + B] + A\delta_1^{-\alpha} + B = \\ &= \varepsilon^2 f(r+\delta_1+\delta_2) + A(\delta_1^{-\alpha} + \varepsilon\delta_2^{-\alpha}) + B(1+\varepsilon) \\ &\le \varepsilon^k f(r + \sum_{i=1}^{k} \delta_i) + \frac{A}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{k} \delta_i^{-\alpha}\varepsilon^i + \frac{B}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^i \equiv RHS. \end{aligned} \tag{A.41}$$

Pro k jdoucí do nekonečna máme

$$f(r) \le \lim_{k\to\infty} RHS = \frac{A}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{-\alpha}\varepsilon^i + \frac{B}{1-\varepsilon}. \tag{A.42}$$

Pokud za δ_i vezmeme:

$$\delta_i := \varepsilon^{\frac{i}{\alpha+1}} \frac{1-\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}}(R-r) = \left(\varepsilon^{\frac{i-1}{\alpha+1}} - \varepsilon^{\frac{i}{\alpha+1}}\right)(R-r), \qquad \alpha > -1, \tag{A.43}$$

pak platí vztah

$$R = r + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i. \tag{A.44}$$

Pokud (A.43) dosadíme do (A.42), dostáváme

$$\begin{aligned} f(r) &\le \frac{A}{\varepsilon}(R-r)^{-\alpha}\Big(\frac{1-\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}}\Big)^{-\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{-\alpha i}{\alpha+1}+i} + \frac{B}{1-\varepsilon} = \\ &= \frac{A}{\varepsilon}(R-r)^{-\alpha}\Big(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}}{1-\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}}\Big)^{\alpha+1} + \frac{B}{1-\varepsilon} = \\ &= A(R-r)^{-\alpha}\big(1-\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}\big)^{-\alpha-1} + \frac{B}{1-\varepsilon} \le \\ &\le c(\varepsilon,\alpha)[A(R-r)^{-\alpha} + B], \end{aligned} \tag{A.45}$$

kde $c(\varepsilon,\alpha) = \max\left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \big(1-\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+1}}\big)^{-\alpha-1}\right)$.

■

Literatura

[1] Armouche, C., Girault, V.: *Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension*, Czechoslovak Math. J. **44** (1994), no.119, 109-140.

[2] Ebmeyer, C.: *Regularity in Sobolev spaces of steady flows of fluids with shear-dependent viscosity,* Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 29, Issue 14, 1687 - 1707.

[3] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[4] Feistauer, M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific & technical, Harlow, 1993.

[5] Felcman, J.: *Matematické Modelování ve Fyzice 1*, KNM PRESS, Praha, 2007.

[6] Galdi, G.P.: *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations I*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. **38**, Springer Verlag, New York, 1994.

[7] Gurtin, M. E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.

[8] Hopf, E.: *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Gleichungen*, Math. Nachrichten **4** (1951), 213-231.

[9] Kaplický, P.: *Regularity of Flow of Anisotropic Fluid*, J. Math. Fluid Mech. **10** (2008), 71-88.

[10] Kaplický, P.: *Boundary regularity of shear thickening flow*, 2006.

[11] Kaplický, P.: *Regularity of flows of a non-Newtonian fluid subject to Dirichlet boundary conditions*, Journal for Analysis and its Applications, **24**, no. 3 (2005), 467–486.

[12] Kaplický, P., Málek, J. and Stará, J.: *$C^{1,\alpha}$-solutions to a class of nonlinear fluids in two dimensions - stationary Dirichlet problem.* Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **259** (1999), 89-121.

[13] Kaplický, P., Málek, J. and Stará, J.: *Global-in-time Hölder continuity of the velocity gradients for fluids with shear-dependent viscosities.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 9 (2002), 175-195.

[14] Kaplický, P., Málek, J. and Stará, J.: *On Global existence of smooth two-dimensional steady flows for a class of non-Newtonian fluids under various boundary conditions.* In: Applied nonlinear analysis. New York: Kluwer/Plenum 1999, 213-229.

[15] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1970.

[16] Ladyzhenskaya, O.A.: *On some new equations describing dynamics of incompressible fluids and on global solvability of boundary value problems to these equations*, Trudy Steklov's Math. Institute Vol. 102 (1967), 85-104.

[17] Ladyzhenskaya, O.A.: *On some modifications of the Navier-Stokes equations for large gradients of velocity*, Zapiski Naukhnych Seminarov LOMI Vol. 7 (1968), 126-154.

[18] Ladyzhenskaya, O.A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach Science Publishers, New-York - London - Paris, 1969.

[19] Ladyzhenskaya, O.A., Seregin, G.A.: *On regularity of solutions to two-dimensional equations of the dynamics of fluid with nonlinear viscosity*, Zap. Nauchn. Sem. Pt. Odel. Mat. Inst. **259** (1999), 145-166.

[20] Leray, J.: *Étude de diverses équations non linéaires et de quelques problemes de l'hydrodynamique*, Journ. de Math. **12**, No. 2 (1933), 1-82.

[21] Leray, J.: *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., **63** (1934) 193-248.

[22] Lions, J.L.: *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[23] Lukeš, J., Malý, J.: *Míra a integrál*, Karolinum, Praha, 2002.

[24] Málek, J., Rajagopal, K., R.: *Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of its generalizations* In Evolutionary equations. Voll. II, Handb. Differ. Equ., pp. 371-459. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.

[25] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M. and Růžička, M.: *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs,* Vol. 13 of Applied Mathematics and Mathematical Computation. Chapman & Hall, London, 1996.

[26] Málek, J., Nečas, J. and Růžička, M.: *On a weak solution to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case* $p \geq 2$. Adv. Differential Equations 6 (2001), 257-302.

[27] Nečas, J., Šverák, V.: *On regularity of solutions of nonlinear parabolic systems.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 18 (1991) (4), 1-11.

[28] Oseen, C. W.: *Neuere Methoden in der Hydrodynamik*, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H., 1927.

[29] Pokorný, M.: *Navier-Stokesovy rovnice*, učební elektronický text MFF UK, http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/NS.pdf

[30] Rokyta, M., John, O., Málek, J., Pokorný, M., Stará, J.: *Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic*, učební elektronický text MFF UK, http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/skripta-pdr/

[31] Roubíček, T.: *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications* (Intl.Ser.Numer.Math **153**, pp.i-xviii,1-405.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2005.

[32] Seregin, G.A.: *The flow of the two-dimensional generalized Newtonian fluid*, Algebra and Analysis **9**(1) (1997), 163-196. (English translation St. Petersburg Math. Journal **9**(1998).)

[33] Ziemer,W.P.: *Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Function of Bounded Variation*, Graduate Text in Mathematics 120, Springer-Verlag 1989.