Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ivana Vernerová

Diagramy ve středoškolské matematice

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.

Studijní program: Fyzika
obor Učitelství fyziky v kombinaci
s matematikou pro střední školy

2009

Tímto bych ráda poděkovala všem, kteří mi jakkoli pomáhali při psaní této práce. Zejména děkuji vedoucímu doc. RNDr. Oldřichu Odvárkovi, DrSc., za odborné připomínky a pomoc při zpracování tématu a Mgr. Václavu Járovi za pomoc s tvorbou obrázků a grafickou úpravou práce. Děkuji také svým rodičům za tolik potřebnou morální podporu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 5. května 2009 Ivana Vernerová

Obsah

Úvod 5
1 Učebnice matematiky pro střední školy 6
1.1 České učebnice 6
1.2 Německé učebnice 7
2 Podstata Vennových diagramů a jejich tvary 8
2.1 Výroky, výrokové formy a množiny 8
2.2 Klasická podoba Vennových diagramů 9
2.3 Karnaughovy mapy 12
2.4 Carrollovy diagramy 13
3 Úlohy množinového charakteru 15
3.1 Zjednodušení obecného zápisu dané množiny 15
3.2 Určení rovnosti daných podmnožin 17
4 Číselné Vennovy diagramy 22
5 Úlohy z logiky řešené pomocí Vennova diagramu 27
6 Šipkové diagramy 35
7 Stromová struktura 46
8 Grafy 50
8.1 Kartézský součin dvou množin a jeho grafické znázorňování 50
8.2 Uzlový graf 52
8.3 Cesty v uzlových grafech 53
Závěr 55
Seznam použité literatury 56

Název práce: Diagramy ve středoškolské matematice

Autor: Ivana Vernerová

Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.

e-mail vedoucího: `oldrich.odvarko@mff.cuni.cz`

Abstrakt: Diplomová práce pojednává o výskytu diagramů ve středoškolské matematice a jejich využití pro řešení různých problémů. Uvádí několik druhů diagramů, jejich odlišnosti a způsob využití. Zmiňuje také, jak spolu souvisí logika a teorie množin. Práce může sloužit jako podklad učitelům matematiky na středních školách ve výuce semináře z matematiky nebo v zájmovém kroužku zabývajícím se matematikou. Přiloženo je také CD, které obsahuje elektronickou podobu práce.

Klíčová slova: diagram, množina, výrok

Title: Diagrams in the high school mathematics

Author: Ivana Vernerová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.

Supervisor's e-mail address: `oldrich.odvarko@mff.cuni.cz`

Abstract: This dissertation handles about an appearance of diagrams in high school mathematics and their use for solving of different problems. It features several kinds of diagrams, their dissimilarities and their ways of use. It also shows how together cohere logic and set theory. The work can help like a basis for mathematics teachers in high schools, in mathematics seminars or in hobby groups for mathematics. Enclosed is also a CD which includes an electronic form of this work.

Keywords: diagram, set, statement

Úvod

Už malé děti si pomáhají při jednoduchých výpočtech tím, že počítají na svých prstech, a vidí tak znázornění příkladu před svýma očima. Později si ke složitějším úlohám vypomáhají jednoduchými obrázky a různými schématy, které jim mají dopomoci vyřešit problém. Čím postupují v matematice dále, tím složitější úlohy řeší a je třeba je naučit, jak mohou dojít k výsledku bez příliš velké námahy. K tomu nám slouží několik druhů diagramů, se kterými se setkáváme hlavně na střední škole.

Cílem mé diplomové práce je seznámit čtenáře s různými typy diagramů a ukázat jejich možné využití při řešení úloh středoškolské matematiky. Práce zároveň stručně mapuje výskyt diagramů v českých a německých učebnicích matematiky pro střední školy a klade si otázku, zda se tématu dostatečně věnují.

Diplomová práce je rozčleněna do osmi kapitol. V úvodu se zabývám rozborem českých a německých učebnic matematiky. Zjišťuji, jaké diagramy se v nich vyskytují a které jsou naopak z hlediska středoškolské matematiky opomíjeny. Další čtyři kapitoly se obsáhle věnují Vennovým diagramům, jejich různým podobám – Karnaughovým mapám a Carrollovým diagramů. Popisují jejich vlastnosti a konstrukci a pomocí všech tvarů Vennových diagramů jsou řešeny stejné typové úlohy, a to příklady množinového charakteru i logické problémy, čímž se ukazují výhody a nevýhody jejich užití. Šestá kapitola pojednává o šipkových diagramech, pomocí nichž řeším některé logické úlohy z předcházející části práce. Poslední dva oddíly popisují další typy diagramů, jako jsou stromové struktury a uzlové grafy.

Náplň diplomové práce přesahuje středoškolské osnovy, ale práce je sestavena tak, aby mohla sloužit jako doplňkový materiál učiteli matematiky na střední škole pro výuku ve volitelném semináři z matematiky, zájmovém kroužku nebo pro zpestření hodin matematiky.

1 Učebnice matematiky pro střední školy

1.1 České učebnice

Na českém trhu je k dostání řada učebnic matematiky pro různé typy středních škol. Liší se jak rozsahem učiva, tak i hloubkou, do které danou problematiku vysvětlují. Diagramy se v nich ale vyskytují málo: Vennovy diagramy jsou vysvětleny pouze v učebnicích pro gymnázia a o jiných diagramech se v učebnicích nedočteme.

Postupem času se mění učivo i požadavky na probíranou látku. Velká část dříve povinných znalostí se přesouvá mezi rozšiřující učivo, a zůstává tak na vůli učitele, zda své žáky s takovou látkou seznámí. K těmto tématům patří již také kartézský součin, o kterém se v práci zmiňuji v souvislosti s jeho zakreslením do grafu.

Nejpodrobnější řadou učebnic je sada určená pro vyšší ročníky víceletého gymnázia a čtyřletá gymnázia z nakladatelství Prometheus. Jednotlivé knihy obsahují postupně témata: Základní poznatky z matematiky, Rovnice a nerovnice, Planimetrie, Funkce, Goniometrie, Stereometrie, Analytická geometrie, Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika, Posloupnosti a řady, Komplexní čísla a Diferenciální a integrální počet.

Součástí učebnice Základní poznatky z matematiky je kapitola věnovaná množinám, kde se pro řešení příkladů využívají Vennovy diagramy. Předkládány jsou příklady na určení rovnosti množin, ale také slovní úlohy vedoucí k určení počtu prvků konečných množin. Pro řešení logických slovních úloh obsahujících výroky, se však nepoužívají. Vennovy diagramy se objevují také v učebnici Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Diagramy zde pomáhají odvodit vzorec pro pravděpodobnost sjednocení dvou nevylučujících se jevů $P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{B}) - P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$ a ověřit platnost několika dalších vzorců. Jiné typy diagramů se v této řadě učebnic nevyskytují.

Další skupinu učebnic tvoří učebnice určené pro střední odborné školy, učiliště a obchodní akademie. Jejich obsah je proti gymnaziálním učebnicím velice zkrácen a uváděné příklady jsou jednodušší. Vennovy diagramy nezmiňuje ani jedna z nich. Můžeme v nich nalézt operace s množinami, jako jsou sjednocení, průnik, rozdíl množin (v učebnicích Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU, 1. díl; Matematika pro obchodní akademie a střední odborné školy; Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 1. díl; Matematika pro SOŠ a studijní obory středních odborných učilišť).

I když většina učebnic se o existenci Vennových diagramů ani nezmiňuje, ve sbírkách úloh příklady, které využívají tyto diagramy, najdeme. Sbírek úloh z matematiky je na našem trhu mnoho – některé se zaměřují pouze na jednu oblast matematiky, jiné obsahují příklady týkající se celé středoškolské látky. Sbírka Řešené příklady z matematiky pro střední školy z nakladatelství ASPI obsahuje celou kapitolu věnovanou příkladům řešených pomocí Vennových diagramů (číselné Vennovy diagramy a slovní úlohy). V publikaci Odmaturuj z matematiky 3 se vyskytují úlohy na zjednodušení zápisu množin a dokázání rovnosti množin. Například Sbírka testových úloh k maturitě z matematiky však žádné příklady, které by se daly řešit pomocí diagramů, neobsahuje. V souvislosti s blížící se státní maturitou z matematiky byla vydána Sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky rozdělená na nižší a vyšší obtížnost. Doporučuje ji Centrum pro reformu maturitní zkoušky, ale ani v jedné z obtížností nenalezneme žádné příklady na diagramy.

Speciální skupinu tvoří knihy, které nejsou přímo určeny pro výuku matematiky, ale spíše pro zábavu nebo volný čas, popřípadě pro oživení látky netypickými úlohami. Jednou z nich je Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem, která obsahuje kapitolu věnovanou Vennovým diagramům, kde nalezneme několik řešených příkladů. Autoři zde zmiňují také Karnaughovy mapy. Starší publikace Žádné obavy z matematiky – Pomoc středoškolákům používá Vennovy diagramy k řešení slovních úloh a zjednodušování zápisu množin.

1.2 Německé učebnice

Prostudovala jsem dvě řady německých učebnic Mathematic heute a Mathematic plus. V publikaci Mathematic heute Gymnasium (Schuljahr 6.) jsem nalezla množinové digramy znázorňující sjednocení, průnik a rozdíl množin. Všechny typy jsou ilustrovány na konkrétních příkladech. V části o dělitelnosti se objevují také uzlové grafy, kterým se autoři českých učebnic nevěnují vůbec.Nejsou ani v knihách, jež matematiku v Čechách popularizují.

V knize Mathematic plus Gymnasium (Klasse 10) jsou uvedeny úlohy řešené pomocí stromové struktury. V českých učebnicích pro střední školy ani ve sbírkách jsem zmínky o stromové struktuře nenalezla.

2 Podstata Vennových diagramů a jejich tvary

2.1 Výroky, výrokové formy a množiny

Výrok je tvrzení, které má smysl a zároveň má smysl se ptát, zda je pravdivé, nebo nepravdivé. Spojováním výroků se vytváří výroky složené. Budeme je tvořit pomocí těchto logických spojek: $\wedge$ (čteme „a“), $\vee$ (čteme „nebo“), $\Rightarrow$ (čteme „jestliže“ před prvním ze spojovaných výroků, „pak“ před druhým spojovaným výrokem), $\Leftrightarrow$ (čteme „právě tehdy, když“) a $\neg$ (čteme „ne“). Poslední znak se nepoužívá ke spojování dvou výroků, ale stojí vždy před jediným výrokem a takový výrok neguje (popírá). Výroky, které neobsahují žádné logické spojky, se nazývají jednoduché výroky.

Značení:

- znaky pro označení výroků (A, B, C,…) neboli znaky pro výrokové proměnné,
- logické spojky $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.

Výrokové formule jsou libovolné posloupnosti těchto znaků. Označujeme je znaky φ, ψ, χ,…

Formule $\neg\varphi$ nazýváme negace φ, $\varphi \wedge \psi$ konjunkce φ a ψ, $\varphi \vee \psi$ disjunkce φ a ψ, $\varphi \Rightarrow \psi$ implikace φ a ψ, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ ekvivalence φ a ψ.

Výrokové formule můžeme chápat jako označení pro výroky. Dosadíme-li do libovolné formule φ za výrokové proměnné konkrétní výroky, vznikne opět výrok a danou formuli lze považovat za zápis daného výroku.

Zavedeme si znaky pro pravdivost: 1 znak pro pravdu, 0 pro nepravdu. Každé výrokové proměnné lze přiřadit právě jeden z těchto znaků – pravdivostní hodnotu (Ph). $\mathrm{Ph}(\varphi)=1$ znamená, že výrok označený formulí φ je pravdivý. $\mathrm{Ph}(\varphi)=0$ znamená, že výrok označený formulí φ je nepravdivý. Pravdivostní hodnoty formulí $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\varphi \Leftrightarrow \psi$ závisí na pravdivostních hodnotách formulí φ a ψ tak, jak je znázorněno v Tab. 1.

Tab. 1: Tabulka pravdivostních hodnot výroků a výrokových formulí

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Množinou rozumíme určité souhrny matematických objektů, skupiny věcí, osob a podobně. Nejčastěji pracujeme s množinami, které jsou dány:

- výčtem všech objektů, které jsou prvky množiny,
- udáním výrokové formule, jejíž obor pravdivosti je uvažovaná množina,
- množinovými operacemi s jinými množinami.

Výrokové formule a množiny spolu úzce souvisejí. Každé výrokové formuli φ přiřazujeme tři důležité soubory předmětů:

- obor proměnné – soubor všech předmětů, které chceme dosazovat za výrokovou proměnnou,
- definiční obor výrokové formule – souhrn všech předmětů z oboru, které nám po dosazení do formule φ mění danou formuli ve výrok,
- obor pravdivosti výrokové formule – souhrn všech předmětů z oboru proměnné, které mění φ v pravdivý výrok.

Budeme pracovat pouze s příklady, kdy tyto obory jsou množinami.

2.2 Klasická podoba Vennových diagramů

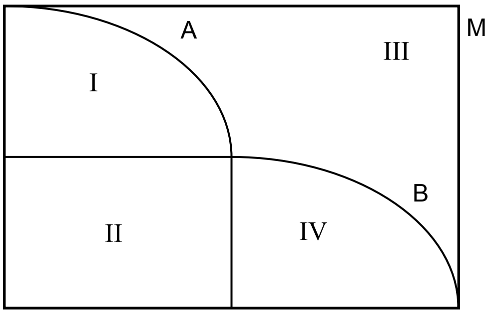
Vennovy diagramy jsou grafickým znázorněním některých základních množinových situací. Množiny znázorňujeme pomocí uzavřených čar, které vytvářejí pole diagramu. Principem diagramů je zakreslení všech množin tak, aby se v diagramu objevila pole představující všechny možné průniky daných množin. Pro n množin získáme 2^n polí, kde jedno pole vždy představuje průnik doplňků všech n množin, tedy množinu prvků, které nejsou součástí žádné z daných množin.

Mějme množiny A, B. Množinové operace jsou definovány pomocí výrokových forem $x \in \mathsf{A}$, $x \in \mathsf{B}$, $x \notin \mathsf{A}$, $x \notin \mathsf{B}$. Je-li M množinou všech objektů, o kterých uvažujeme (tzv. základní množinou), potom:

- doplněk A' množiny A v množině M zapíšeme jako $\mathsf{A}' = \{x \in \mathsf{M}; x \notin \mathsf{A}\}$,
- sjednocení množin A, B jako $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{M}; x \in \mathsf{A} \vee x \in \mathsf{B}\}$,
- průnik množin A, B jako $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{M}; x \in \mathsf{A} \wedge x \in \mathsf{B}\}$.

Označíme-li ve Vennově diagramu pro dvě podmnožiny základní množiny M jednotlivá pole diagramu, zjistíme snadno, které množiny každé pole znázorňuje (Obr. 1).

Na Obr. 2, resp. Obr. 3, je znázorněn Vennův diagram pro tři, resp. čtyři, podmnožiny základní množiny M. Vennovy diagramy znázorňující nízký počet množin nejčastěji zakreslujeme pomocí konvexních množin v rovině. Pro čtyři množiny už nemůžeme použít znázornění pomocí kruhů, vhodnější jsou oválné oblasti.



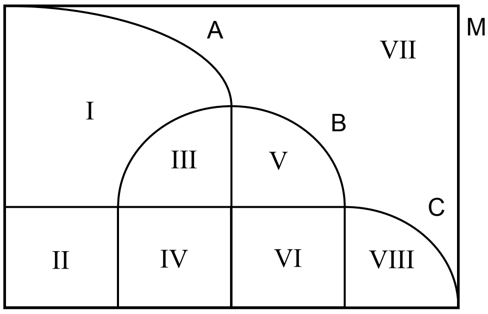
I $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' = \{x \in \mathsf{M}; x \in \mathsf{A} \wedge x \notin \mathsf{B}\}$

II $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{M}; x \in \mathsf{A} \wedge x \in \mathsf{B}\}$

III $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' = \{x \in \mathsf{M}; x \notin \mathsf{A} \wedge x \notin \mathsf{B}\}$

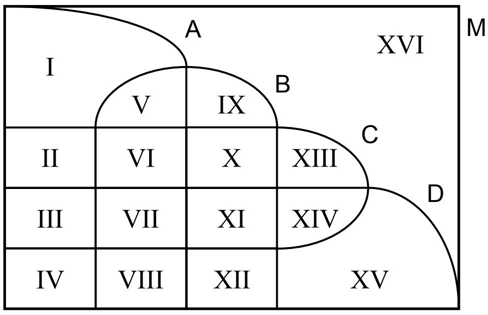
IV $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{M}; x \notin \mathsf{A} \wedge x \in \mathsf{B}\}$

Obr. 1: Vennův diagram pro dvě podmnožiny obecné množiny M.



I $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$
II $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}$
III $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}'$
IV $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$
V $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}'$
VI $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$
VII $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$
VIII $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}$

Obr. 2: Vennův diagram pro tři podmnožiny obecné množiny M.



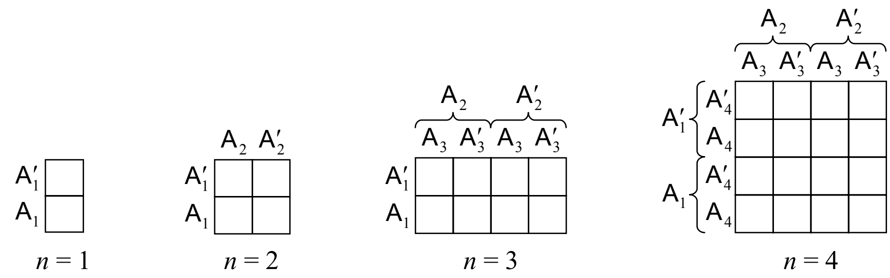
I $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}'$
II $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}'$
III $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}$
IV $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}$
V $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}'$
VI $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}'$
VII $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}$
VIII $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}$

IX $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}'$
X $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}'$
XI $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}$
XII $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}$

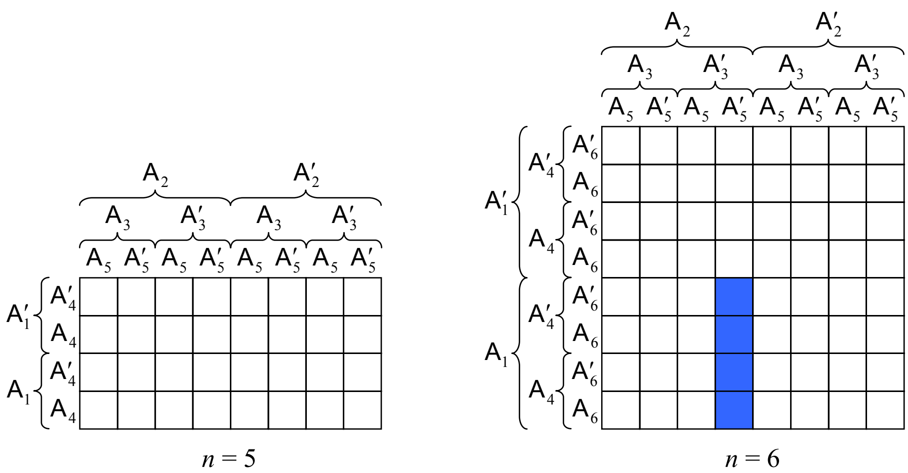
XIII $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}'$
XIV $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C} \cap \mathsf{D}$
XV $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}$
XVI $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}' \cap \mathsf{D}'$

Obr. 3: Vennův diagram pro čtyři podmnožiny obecné množiny M.

Názornost Vennových diagramů v rovině se pro zvyšující se n zmenšuje. Pro větší n je proto výhodnější používat tabulky (Obr. 4), které se skládají z 2^n oblastí (čtverečků) tzv. Vennovy tabulky pro n množin. Vennova tabulka pro 6 množin (Obr. 5) obsahuje 64 čtverečků. O každém čtverečku můžeme jednoznačně rozhodnout, zda znázorňuje část některé z daných množin nebo její doplněk. V obrázku jsou označeny množiny písmeny A_1 až A_n, doplněk k i-té množině je označen A'_i. Budeme-li např. v tabulce sestrojené pro $n = 6$ hledat oblast $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}'_3 \cap \mathsf{A}'_5$, nalezneme nejprve svorku, která vyznačuje pole množiny A_1, potom svorku označující A_2, dále pole patřící A'_3 a nakonec najdeme A'_5. Hledáme průnik těchto polí, který je v tabulce označen modrou barvou. Některé množiny nemusí být zakresleny souvisle, ale jsou rozděleny na více částí. Např. pro $n = 5$ je v Obr. 5 je rozděleno pole odpovídající množině A_3 na dvě části.

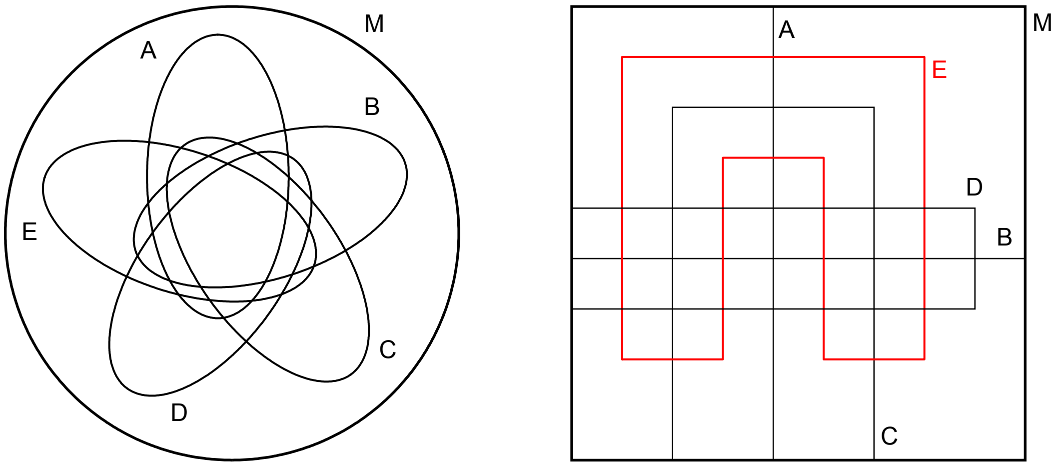


Obr. 4: Vennovy tabulky pro $n \in \{1,2,3,4\}$.



Obr. 5: Vennovy tabulky pro $n \in \{5,6\}$.

Z Vennova diagramu můžeme sestrojit tabulku a naopak také z tabulky můžeme sestrojit diagram, rozhodující v těchto přechodech je počet množin *n*. Do $n = 4$ nenastane žádný problém. Pro $n \geq 5$ může Vennův diagram obsahovat také množiny zakreslené pomocí nekonvexních útvarů a tabulka bude mnohem přehlednější. Vennovy tabulky můžeme nakreslit pro libovolné *n*, ale u diagramů to není dokázané. Na Obr. 6 je srovnání Vennova diagramu pro 5 množin zakresleného pomocí konvexních a nekonvexních útvarů. Množina E v pravém diagramu (vyznačena červeně) již musí být zakreslena jako nekonvexní útvar, jinak bychom nezískali všechny možné průniky daných množin.



Obr. 6: Vennův diagram pro pět podmnožin základní množiny M **.**

2.3 Karnaughovy mapy

Karnaughovy mapy se používají hlavně v elektrotechnice, ale lze je využít i pro znázornění množin. Oblast mapy je rozdělena na jednotlivé čtverce. Každé množině jsou přiřazeny dvě oblasti o stejném počtu čtverců. V jedné oblasti se prvky množiny vyskytují a druhá odpovídá jejímu doplňku.

Oblast mapy je rozdělena na 2^n čtverečků, které vznikly při vhodném rozdělení základního čtverce nebo obdélníku, který představuje základní množinu. „*n*“ udává počet množin. Oblasti mapy, ve kterých se daná množina vyskytuje, jsou naznačeny svorkami po krajích mapy. V podstatě přiřazujeme jednotlivým čtverečkům „vlastnost“, zda se tam daná množina nachází, či nikoli (čtvereček by odpovídal doplňku množiny). Pokud Karnaughovu mapu použijeme pro znázornění množin, je její zakreslení podobné s Vennovou tabulkou a při její konstrukci postupujeme obdobně jako při konstrukci Vennových tabulek.

Karnaughovy mapy budeme tedy používat pro znázornění množin a jejich vztahů. Pro n sudé (sudý počet množin) se rozdělí množiny na dvě stejné skupiny po $\frac{n}{2}$ množinách. Zakreslíme si základní oblast – čtverec, který obsahuje $2^{\frac{n}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}$ čtverečků. Např. pro $n = 4$ bude mít mapa $2^{\frac{n}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} = 4 \times 4 = 16$ čtverečků. Pro n liché již nedostaneme čtverec, ale obdélník. Jedna z možností, jak zjistit počet čtverečků na jeho stranách je rozdělit počet množin na dvě části s počtem $\frac{n-1}{2}$ a $\frac{n+1}{2}$. Tato čísla nám udají tvar obdélníku. Např. pro $n = 5$ bude mít mapa $2^{\frac{n+1}{2}} \times 2^{\frac{n-1}{2}} = 8 \times 4 = 32$ čtverečků. Každému z 2^n čtverečků je pak přiřazeno, která množina se v něm vyskytuje a která tam má doplněk. Žádná z množin v mapě nemůže být privilegovaná, takže každé připadne stejný počet čtverečků (polí). Čtverečky odpovídající jedné množině nemusí tvořit souvislou plochu.

Jedna z největších předností Karnaughových map spočívá v tom, že čtverečky, které reprezentují množiny, nejsou privilegované svým tvarem oproti doplňkům, jako je tomu u obvyklých Vennových diagramů. Tato skutečnost je hlavním důvodem širšího uplatnění Karnaughových map hlavně v elektrotechnice.

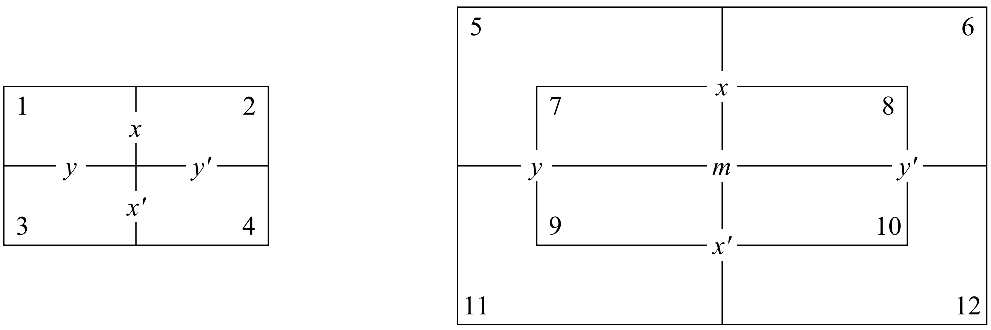
Výhody a nevýhody této metody řešení

Vennovy diagramy a Karnaughovy mapy mají mnoho společného. Karnaughovy mapy jsou v podstatě druhem Vennova diagramu – tabulky. O omezenosti metody, jak využívat Vennovy diagramy jsme již mluvili na začátku kapitoly. Se zvyšujícím se počtem množin se jejich názornost ztrácí a diagram se stává nepřehledným. Tabulky jsou přehledné i pro vysoký počet množin. Pouze se nesmíme splést v počtu oblastí a jejich označení. Touto metodou můžeme řešit různé příklady o množinách, počtu jejích prvků, příklady související s výroky a výrokovou logikou, které se nejčastěji řeší pomocí tabulek pravdivostních hodnot (zde neuvádím).

2.4 Carrollovy diagramy

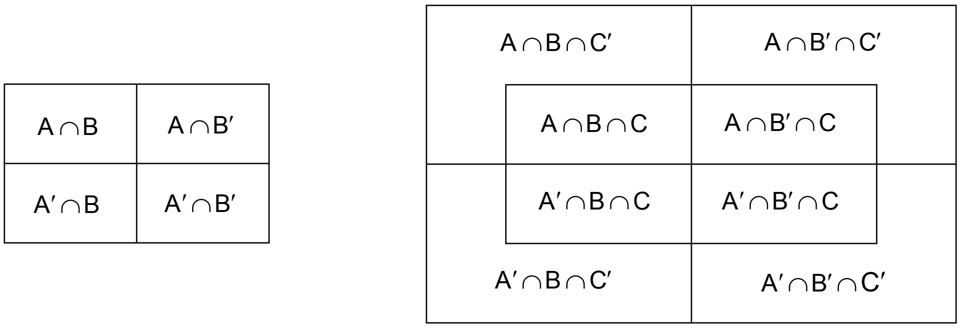
Diagramy, se kterými pracuje Lewis Carroll v knize Logika hrou, se dají také považovat za jistý druh Vennova diagramu. Carroll je používá ke znázornění výroků typu: „některá *x* jsou *y*“, „žádné *x* není *y*“ a „všechna *x* jsou *y*“.

Jednotlivé oblasti na Obr. 7 označené čísly 5, 6, 7, 8 představují vlastnosti xy, xy', $x'y$ a $x'y'$. Při znázorňování výroků na těchto diagramech se do jeho částí vypisují čísla 1 a 0 (číselné Vennovy tabulky). Číslo 1 znamená, že v části se nachází alespoň jeden prvek, číslo 0, že se v ní nenachází prvek žádný.



Obr. 7: Carollův diagram pro dvě a tři vlastnosti.

Tyto diagramy by se mohly využívat nejen ke znázornění výroků tohoto typu. Mohli bychom vlastnost *x* přiřadit nějaké množině A, vlastnost *y* množině B, vlastnost *m* množině C. Diagram na Obr. 7 (vlevo), by se pak dal považovat za Vennův diagram pro dvě množiny A, B, na Obr. 7 (vpravo) za Vennův diagram pro tři množiny A, B, C. Oblasti označené čísly 1, 2, 3, 4 by po řadě odpovídaly ve Vennově diagramu oblastem $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A' \cap B'$. Oblasti označené čísly 5–12 by po řadě odpovídaly oblastem $A \cap B \cap C'$, $A \cap B' \cap C'$, $A \cap B \cap C$, $A \cap B' \cap C$, $A' \cap B \cap C$, $A' \cap B' \cap C$, $A' \cap B \cap C'$, $A' \cap B' \cap C'$ (Obr. 8).



Obr. 8: Carollův diagram pro dvě a tři množiny.

Výhody a nevýhody této metody řešení

Tento diagram si vymyslel Lewis Carroll pro řešení sylogismů a k tomuto účelu se tedy výborně hodí. Snadno z něj podle jeho návodu můžeme vyčíst závěry sylogismů. Diagram můžeme použít jako Vennův diagram pro dvě nebo tři množiny (malý nebo velký obdélník). Někomu se může zdát toto zakreslení přehlednější a může mu dát přednost. Práci si neulehčí ani neztíží, protože diagramy jsou rovnocenné. Jediné omezení těchto diagramů spočívá v tom, že je můžeme zakreslit maximálně pro tři množiny. Pokud bychom měli čtyři množiny, musíme vybrat jinou metodu (Vennův diagram nebo tabulku, příp. Karnaughovu mapu).

3 Úlohy množinového charakteru

3.1 Zjednodušení obecného zápisu dané množiny

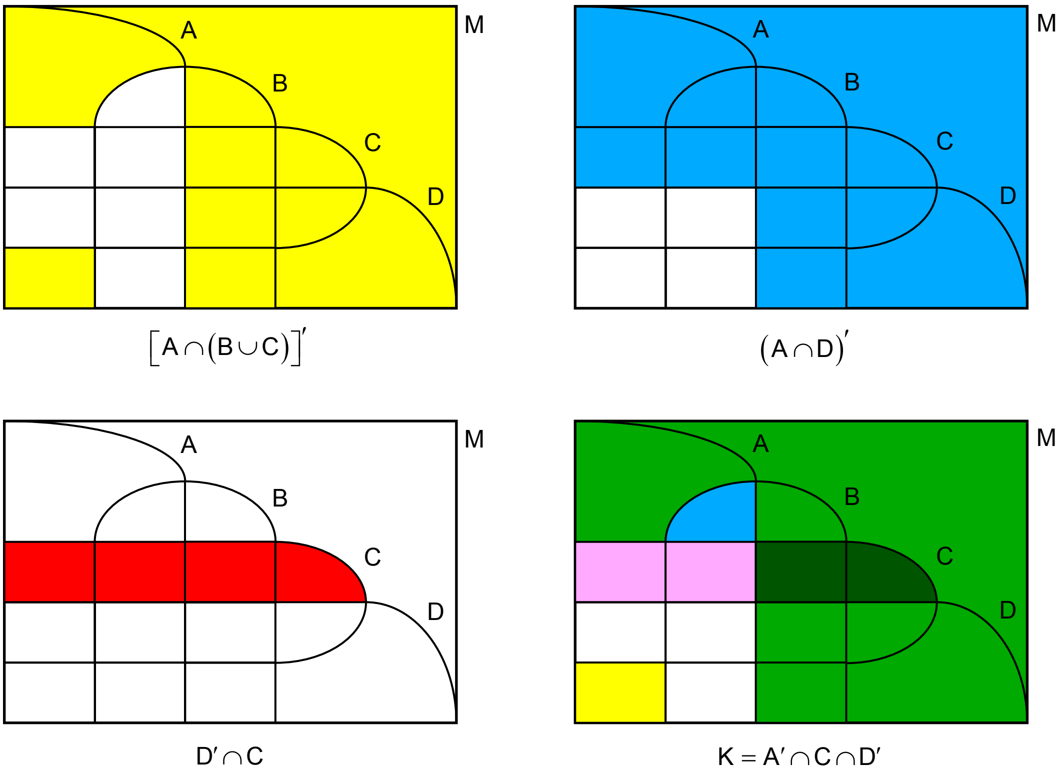
Příklad 3.1a[1]

Zjednodušte zápis množiny $K = \left[A \cap (B \cup C)\right]' \cap (A \cap D)' \cap (D' \cap C)$, kde A, B, C, D jsou podmnožiny základní množiny M.

Tento příklad vyřešíme nejprve pomocí Vennova diagramu (Obr. 9), a pak pomocí Karnaughovy mapy.

a) Vennovy diagramy

Znázorníme si nejprve zvlášť jednotlivé části množiny K a následně jejich průnik.



Obr. 9: Řešení příkladu 3.1 pomocí Vennova diagramu.

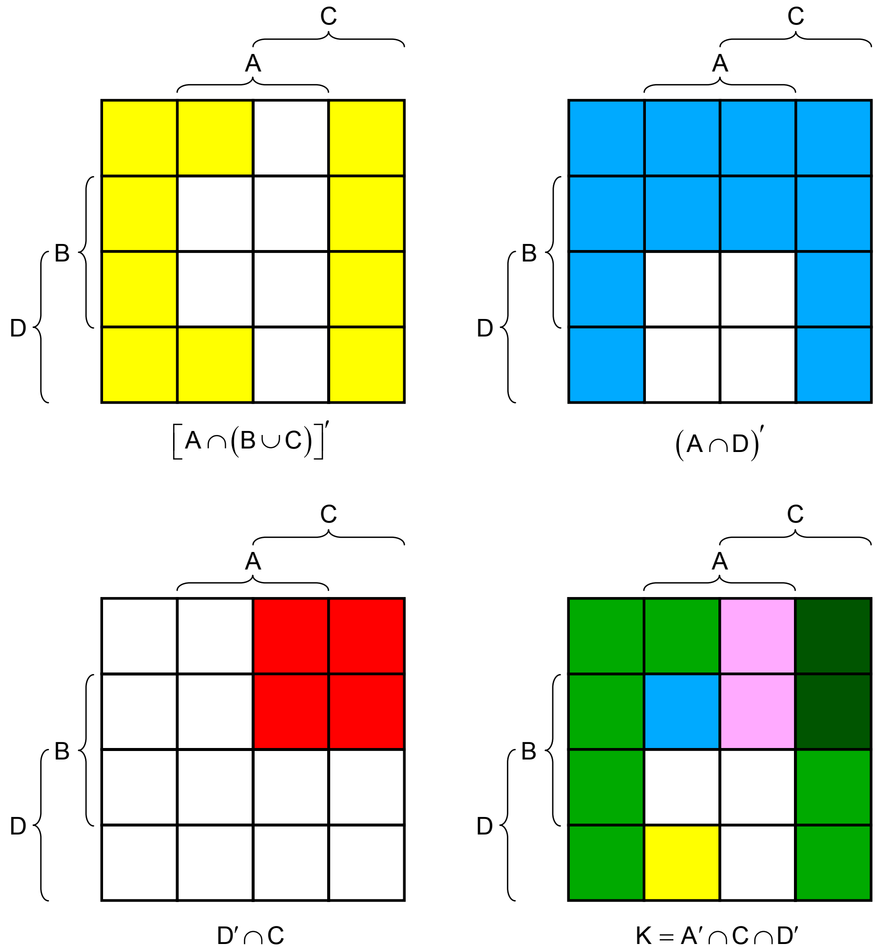
Na posledním obrázku je znázorněn průnik všech tří předchozích množin, ze kterých se skládá množina K. Barvy v průniku jsme zvolili jako při malířském míchání barev (žlutá a modrá nám dají zelenou atd.). Řešením je tmavě zelená oblast, která nám zjednodušila původní zápis množiny K pouze na $A' \cap C \cap D'$.

---

[1] Převzato z [1].

b) Karnaughovy mapy

Zadaný příklad budeme řešit ještě jednou pomocí Karnaughovy mapy (Obr. 10). Pro lepší porovnání diagramů s mapami jsou použity stejné barvy pro jednotlivé dílčí množiny. Lze nahlédnout, že vždy musí být vybarven stejný počet oblastí v obrázcích, které si odpovídají. Pokud by tomu tak nebylo, naznačovala by situace chybu v jednom z postupů. Výsledek je znázorněn opět tmavě zelenou barvou na posledním obrázku.



Obr. 10: Řešení příkladu 3.1 pomocí Karnaughovy mapy.

Tip k řešení

U této úlohy záleží pouze na řešiteli, zda se lépe orientuje ve Vennově diagramu, nebo v Karnaughově mapě. Řešení jsou v podstatě rovnocenná.

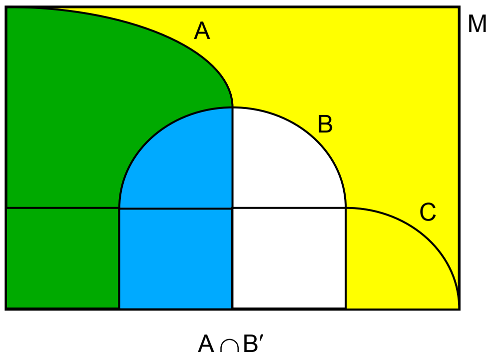
3.2 Určení rovnosti daných podmnožin

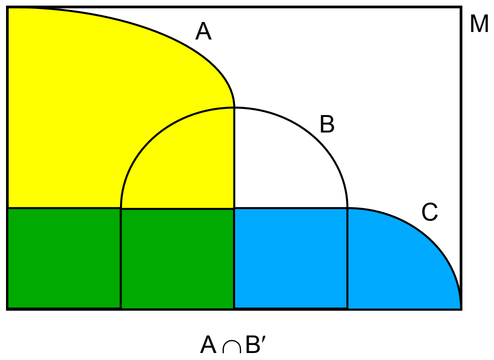
Příklad 3.2a

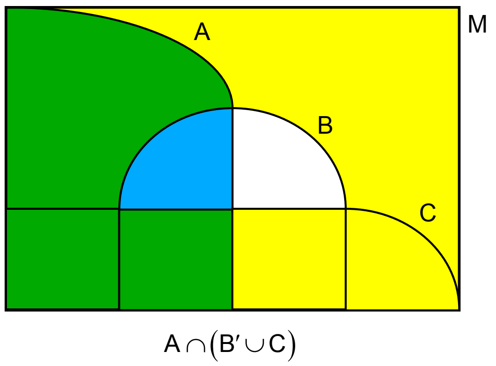
Zjistěte, zda platí: $(A \cap B') \cup (A \cap C) = A \cap (B' \cup C)$, kde A, B, C, jsou podmnožiny základní množiny M.

Vyřešíme nejprve pomocí Vennova diagramu (Obr. 11), potom pomocí Karnaughovy mapy a také pomocí Carrollova diagramu.

a) Vennův diagram







Sjednocením zelených oblastí na prvních dvou obrázcích získáme levou stranu rovnosti.

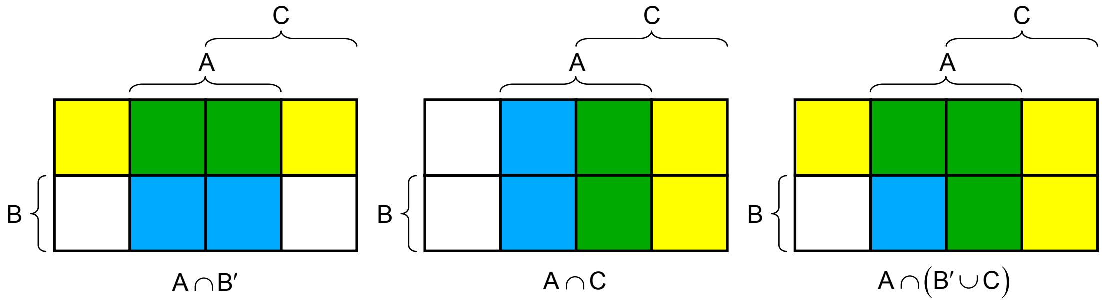
Na třetím obrázku je zelenou barvou znázorněna pravá strana rovnosti.

Obě zelené oblasti jsou stejné, tedy rovnost platí.

Obr. 11: Řešení příkladu 3.2a pomocí Vennova diagramu.

b) Karnaughova mapa

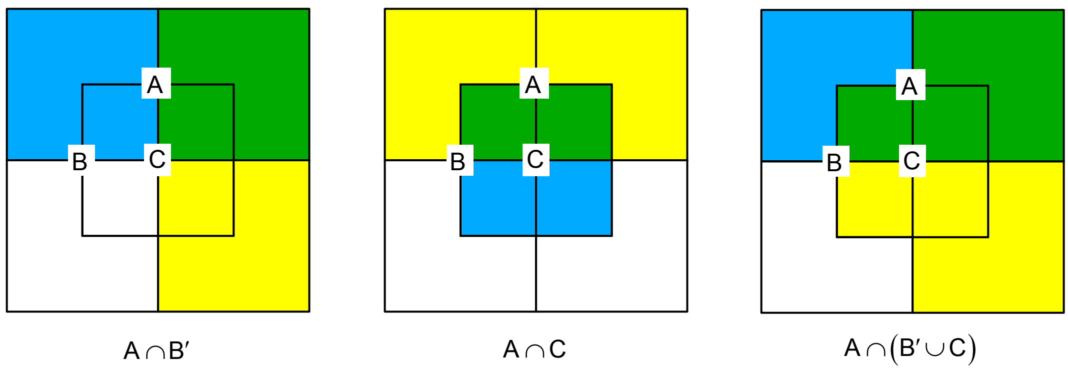
Pro lepší porovnání diagramů s mapami jsou použity znovu stejné barvy pro odpovídající si množiny. Počet polí téže barvy je v každé mapě (Obr. 12) shodný s počtem polí v příslušném Vennově diagramemu v předcházejícím řešení. Výsledek vyšel oběma způsoby stejný. Vyřešení téhož příkladu dvěma způsoby může sloužit jako kontrola správnosti řešení. Nesmíme ovšem v obou postupech udělat stejnou chybu.



Obr. 12: Řešení příkladu 3.2a pomocí Karnaughovy mapy.

c) Carrollův diagram

Znovu jsou použity stejné barvy pro odpovídající si množiny. Počet polí téže barvy je v každém diagramu shodný s počty polí v příslušných diagramech v předcházejících řešeních.



Obr. 13: Řešení příkladu 3.2a pomocí Carrollova diagramu.

Tip k řešení

U této úlohy záleží pouze na řešiteli, zda se lépe orientuje ve Vennově diagramu, Carrollově diagramu nebo v Karnaughově mapě. Řešení jsou stejně náročná.

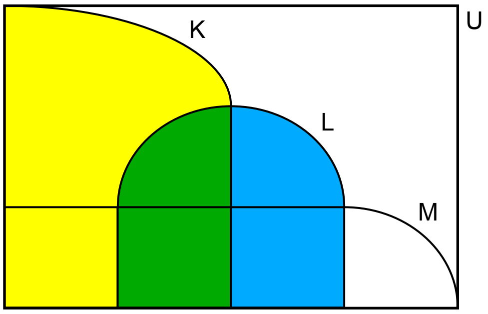
Příklad 3.2b

Určete, zda pro libovolné podmnožiny K, L, M základní množiny U platí rovnost: $(K \cap L) \cup (L' \cap M) \cup (K' \cap M') = (K \cup L' \cup M') \cap (K' \cup L \cup M)$

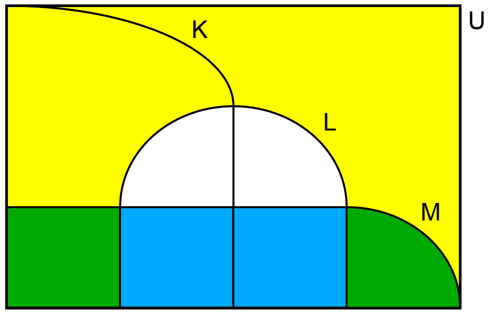
Příklad vyřešíme nejprve pomocí Vennova diagramu, potom pomocí Karnaughovy mapy a také pomocí Carrollova diagramu.

a) Vennův diagram

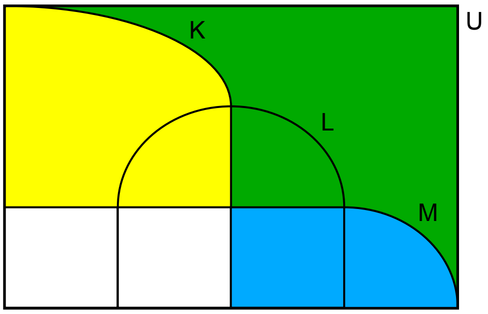
Levá strana rovnosti je složena z jednodušších částí než pravá. Při jejich zobrazení odpovídá jedna barva (žlutá nebo modrá) vždy jedné množině a jejich průnik (závěr) je vyznačen zelenou barvou, jako při míchání barev (Obr. 14).



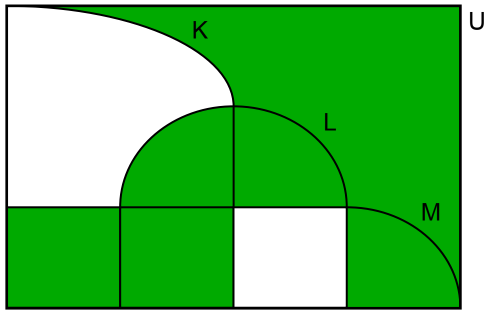
K ∩ L



L′ ∩ M



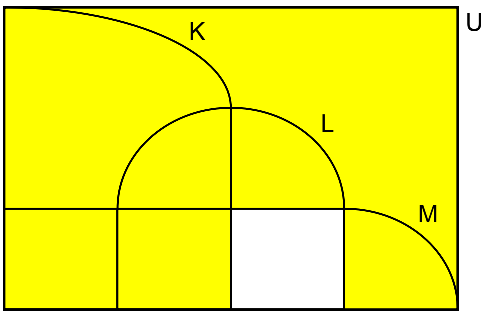
K′ ∩ M′



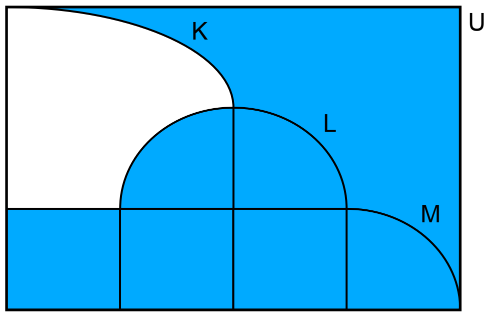
levá strana rovnosti

Obr. 14: Řešení příkladu 3.2b pomocí Vennova diagramu (levá strana rovnosti).

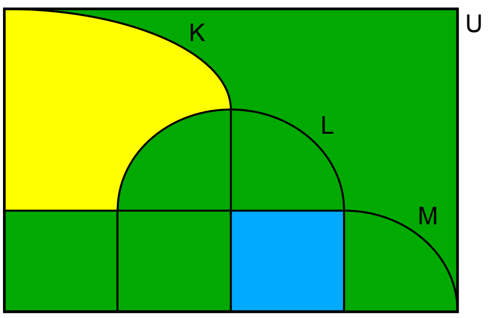
Sjednocením zelených ploch z prvních třech obrázků dostaneme levou část rovnosti znázorněnou na čtvrtém obrázku také zeleně.



K ∪ L′ ∪ M′



K′ ∪ L ∪ M



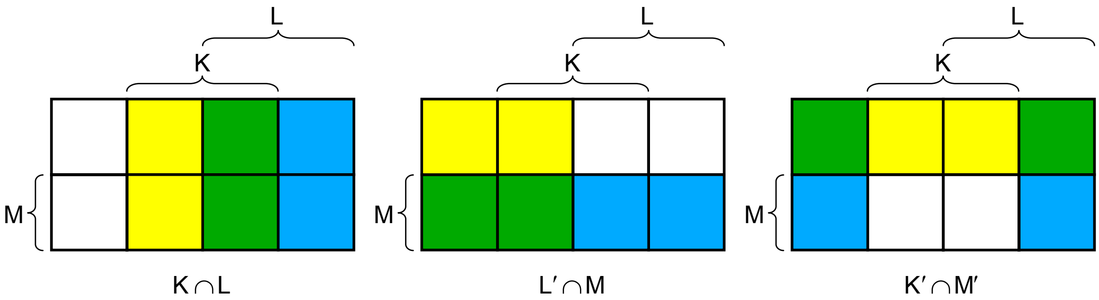
pravá strana rovnosti

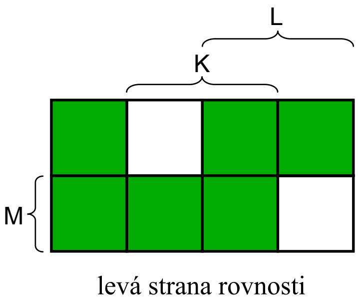
Průnikem žluté a modré oblasti z dalších dvou obrázků dostaneme pravou stranu rovnosti zvýrazněnou zelenou barvou na posledním obrázku.

Porovnáním zelených oblastí dokážeme, že rovnost platí.

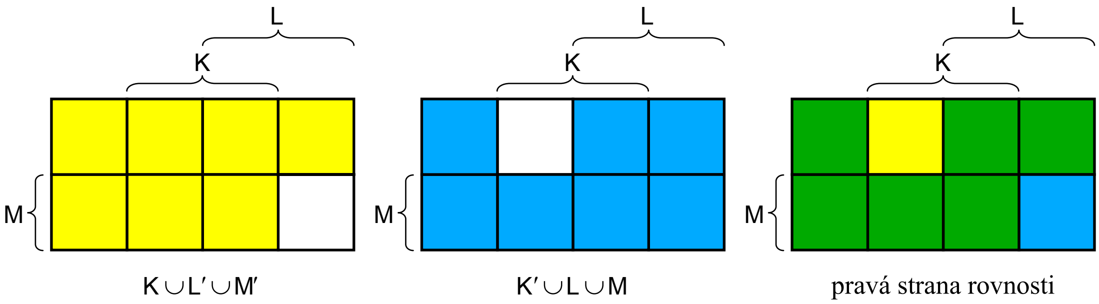
Obr. 15: Řešení příkladu 3.2b pomocí Vennova diagramu (pravá strana rovnosti)

b) Karnaughova mapa





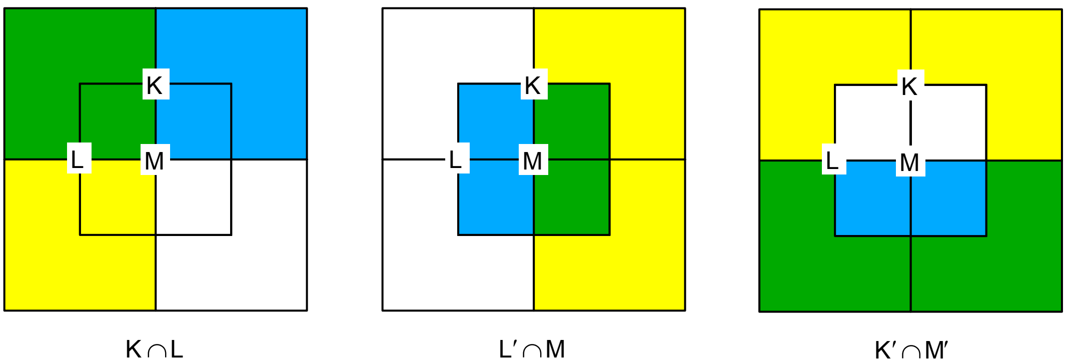
Pro lepší porovnání diagramů s mapami jsou použity opět stejné barvy pro odpovídající si množiny (Obr. 16). Počet polí téže barvy je v každé mapě shodný s počtem polí v příslušném Vennově diagramu v předchozím řešení.



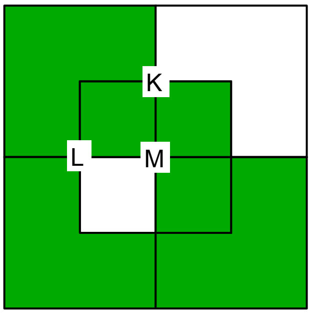
Obr. 16: Řešení příkladu 3.2b pomocí Karnaughovy mapy.

c) Carrollův diagram

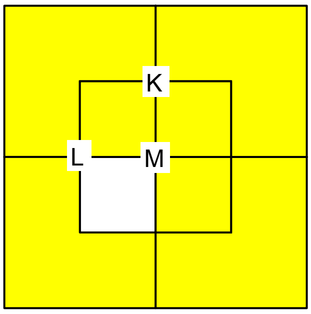
Znovu jsou použity stejné barvy pro odpovídající si množiny. Počet polí téže barvy je v jednotlivých diagramech shodný s počty polí v příslušných diagramech v předcházejících řešeních.



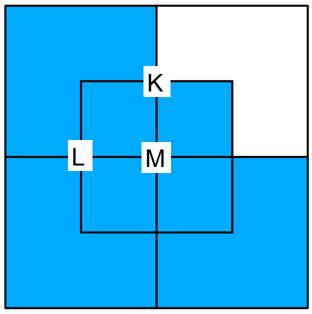
Obr. 17: Řešení příkladu 3.2b pomocí Karnaughovy mapy.



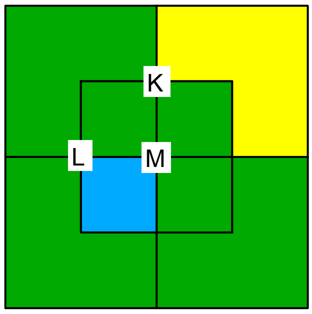
levá strana rovnosti



$K \cup L' \cup M'$



$K' \cup L \cup M$



pravá strana rovnosti

Obr. 18: Řešení příkladu 3.2b pomocí Karnaughovy mapy (dokončení).

Tip k řešení

U této úlohy záleží jen na řešiteli, zda se lépe orientuje ve Vennově diagramu, Carrollově diagramu nebo v Karnaughově mapě. Řešení jsou stejně náročná.

4 Číselné Vennovy diagramy

Dalším typem úlohy, který se dá řešit pomocí Vennova diagramu, jsou slovní úlohy požadující určení počtu prvků konečných množin.

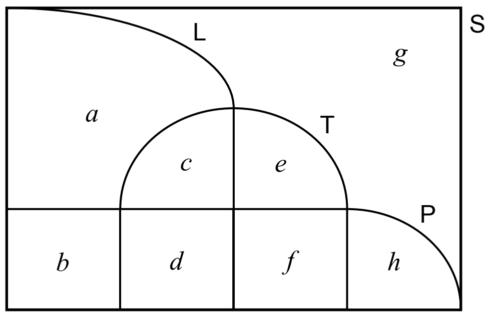
Příklad 4a

Do 1. ročníku na gymnáziu v Hradišti chodí 32 studentů. Většina z nich aktivně sportuje. Nejoblíbenější sporty jsou plavání, tenis a lyžování. Na plavání nebo tenis chodí 23 studentů. Pouze tenis hrají 2 studenti a 4 studenti nedělají žádný z těchto sportů. 17 dětí lyžuje. Studenti, kteří k lyžování ještě hrají tenis, jsou 4. Studentů, kteří plavou, ale nelyžují, je 9. Právě dva sporty dělá 12 studentů a všechny tři sporty dělají 3 studenti. Kolik studentů pouze lyžuje? Kolik studentů plave a zároveň hraje tenis?

a) Vennův diagram

Příklad vyřešíme užitím Vennova diagramu pro tři množiny. Zvolíme si základní množinu všech studentů 1. ročníku a označíme ji S. Označme dále

- L množinu všech studentů 1. ročníku, kteří lyžují,
- T množinu všech studentů 1. ročníku, kteří hrají tenis,
- P množinu všech studentů 1. ročníku, kteří plavou.



Obr. 19: Řešení příkladu 4a pomocí Vennova diagramu.

Každé políčko Vennova diagramu označíme po řadě písmeny *a* až *h* (Obr. 19). Ty nám označují zatím neznámý počet prvků jednotlivých částí daných množin. Čteme pečlivě text úlohy a vyjádříme všechny údaje pomocí těchto neznámých. Dostaneme následující soustavu rovnic. Některé neznámé můžeme určit rovnou z textu (*d*, *e*, *g*) a zakreslit je do diagramu. Máme tedy jen 5 neznámých. Nalevo uvádím celé rovnice bez dosazení za neznámé, které již známe ze zadání, vpravo potom po dosazení, které soustavu zjednodušilo.

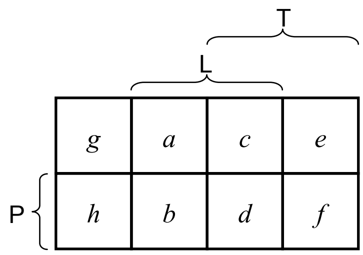
$$
\begin{array}{rr}
d=3 & d=3 \\
e=2 & e=2 \\
g=4 & g=4 \\
a+b+c+d+e+f+g+h=32 & a+b+c+f+h=23 \\
b+d+c+e+f+h=23 & b+c+f+h=18 \\
a+b+c+d=17 & a+b+c=14 \\
f+h=9 & f+h=9 \\
c+d=4 & c=1 \\
b+c+f=12 & b+c+f=12
\end{array}
$$

Vyřešením této soustavy rovnic získáme údaje potřebné pro odpovědi na zadané otázky. Potřebujeme tedy neznámé a (kolik studentů pouze lyžuje) a $d+f$ (kolik studentů plave a zároveň hraje tenis).

Po vyřešení těchto rovnic získáme $a=5$, $b=8$, $c=1$, $d=3$, $e=2$, $f=3$, $g=4$, $h=6$. Odpovědi na otázky zní: Pouze lyžování se věnuje 5 studentů. Šest studentů plave a zároveň hraje tenis.

b) Karnaughova mapa

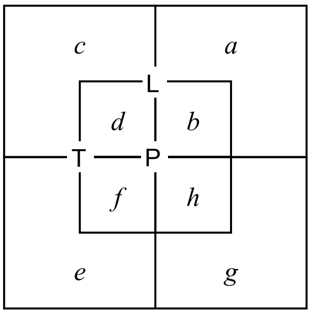
Příklad můžeme řešit pomocí Karnaughovy mapy. Jednotlivé oblasti jsou označeny písmeny *a* až *h* (Obr. 20). Mají stejný význam jako ve Vennově diagramu na začátku příkladu. Oblasti označené stejnými písmeny si v diagramech vzájemně odpovídají (pro lepší porovnání). Daný příklad by se pak převedl na řešení stejných rovnic, které vyplynuly z Vennova diagramu, proto je znovu neuvádím.



Obr. 20: Řešení příkladu 4a pomocí Karnaughovy mapy.

c) Carrollův diagram

Příklad můžeme zakreslit táké do Carrollova diagramu. Jednotlivé oblasti jsou opět označeny písmeny *a* až *h* a mají stejný význam jako ve Vennově diagramu a Karnaughově mapě na začátku příkladu. Soustava rovnic by byla sestavena shodně jako v předcházejících řešeních.



Obr. 21: Řešení příkladu 4a pomocí Carrollova diagramu.

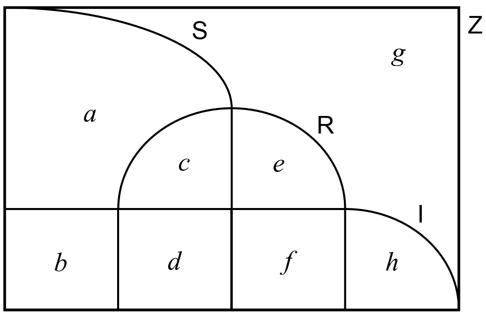
Příklad 4b

Ze 35 zaměstnanců podniku bylo 7 zaměstnanců o prázdninách na dovolené na Slovensku a stejný počet v Itálii. Řecko navštívilo 5 zaměstnanců. V žádné z těchto tří zemí nebylo 21 zaměstnanců, všechny tři země navštívil 1 zaměstnanec. V Itálii i Řecku byli 2 zaměstnanci, v Řecku i na Slovensku byl 1 zaměstnanec. Kolik zaměstnanců navštívilo o prázdninách Slovensko nebo Itálii, Řecko nebo Slovensko, Itálii nebo Řecko?

a) Vennův diagram

Příklad vyřešíme nejprve užitím Vennova diagramu pro tři podmnožiny základní množiny Z, za kterou zvolíme množinu všech zaměstnanců podniku. Označme:

- S množinu všech zaměstnanců podniku, kteří navštívili Slovensko,
- R množinu všech zaměstnanců podniku, kteří navštívili Řecko,
- I množinu všech zaměstnanců podniku, kteří navštívili Itálii.



Obr. 22: Řešení příkladu 4b pomocí Vennova diagramu.

Každé políčko Vennova diagramu označíme po řadě písmeny *a* až *h* (Obr. 22). Čteme pečlivě text úlohy a vyjádříme všechny údaje pomocí těchto neznámých. Ty odpovídají počtům prvků jistých množin. Dostaneme následující soustavu rovnic. Některé neznámé můžeme určit rovnou z textu (*d*, *g*) a zakreslit je do diagramu. Máme tedy jen 6 neznámých. Nalevo uvádím celé rovnice bez dosazení za neznámé, které známe ze zadání, vpravo po dosazení, které soustavu zjednodušilo.

$$
\begin{aligned}
d &= 1 \qquad & d &= 1 \\
g &= 21 & g &= 21 \\
a+b+c+d+e+f+g+h &= 35 & a+b+c+e+f+h &= 13 \\
a+b+c+d &= 7 & a+b+c &= 6 \\
b+d+f+h &= 7 & b+f+h &= 6 \\
c+d+e+f &= 5 & c+e+f &= 4 \\
d+f &= 2 & f &= 1 \\
c+d &= 1 & c &= 0
\end{aligned}
$$

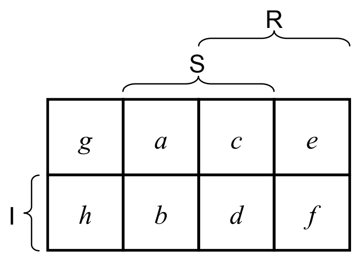
Vyřešením této soustavy rovnic zjistíme údaje potřebné k tomu, abychom mohli odpovědět na zadané otázky. Potřebujeme získat součty

- $a+b+c+d+f+h$ pro počet zaměstnanců, kteří byli o prázdninách na Slovensku nebo v Itálii
- $a+b+c+d+e+f$ pro počet zaměstnanců, kteří byli o prázdninách v Řecku nebo na Slovensku
- $b+c+d+e+f+h$ pro počet zaměstnanců, kteří byli o prázdninách v Itálii nebo v Řecku.

Řešením soustavy jsou hodnoty $a=4$, $b=2$, $c=0$, $d=1$, $e=3$, $f=1$, $g=21$, $h=3$. Ve Slovensku nebo Itálii bylo 11 zaměstnanců, do Řecka nebo na Slovensko jelo 11 zaměstnanců a v Itálii nebo Řecku strávilo dovolenou 10 pracovníků.

b) Karnaughova mapa

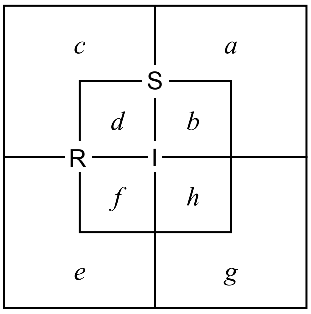
Příklad můžeme řešit také pomocí Karnaughovy mapy. Jednotlivé oblasti jsou označeny písmeny *a* až *h* a mají stejný význam jako ve Vennově diagramu. Oblasti označené stejnými písmeny si v diagramech vzájemně odpovídají. Úloha by se převedla na řešení stejných rovnic, které jsme získali již z Vennova diagramu, proto uvádím pouze diagram.



Obr. 23: Řešení příkladu 4b pomocí Karnaughovy mapy.

c) Carrollův diagram

Příklad lze zakreslit také do Carrollova diagramu. Jednotlivé oblasti jsou označeny opět písmeny *a* až *h* a mají stejný význam jako ve Vennově diagramu a Karnaughově mapě na začátku příkladu.



Obr. 24: Řešení příkladu 4b pomocí Carrollova diagramu.

Tip k řešení

Řešení těchto příkladů nezáleží na výběru diagramu (Vennův diagram, Karnaughova mapa, Carrollův diagram). Počet neznámých zůstane vždy stejný, takže soustavu nezjednodušíme. Záleží tedy jen na nás, v jakém zobrazení se nejlépe orientujeme, z jakého obrázku s největší jistotou vyčteme všechny informace potřebné k vyřešení úlohy.

5 Úlohy z logiky řešené pomocí Vennova diagramu

Vennovy diagramy nám také mohou posloužit při řešení některých logických slovních úloh. Stačí si uvědomit, jak spolu souvisí výroky, výrokové formule a množiny (kapitola 2). Díky tomu můžeme převést problém z logiky na problém s množinami a řešit ho např. pomocí Vennových diagramů.

Pro tyto účely vyjádříme výrokovou formuli obsahující logickou spojku implikace ($\Rightarrow$) pomocí ekvivalentní formule, která ji neobsahuje. Snadněji se nám potom budou zakreslovat obory pravdivosti výrokových formulí jako množiny. Výrokové formule $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\neg\varphi \vee \psi$ jsou ekvivalentní, jak lze nahlédnout v tabulce pravdivostních hodnot (Tab. 2).

Tab. 2: Tabulka pravdivostních hodnot pro ekvivalentní výrokové formule

φ	$\neg\varphi$	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$
1	0	1	**1**	**1**
1	0	0	**0**	**0**
0	1	1	**1**	**1**
0	1	0	**1**	**1**

Příklad 5a

Vyšetřování krádeže peněz v jedné bance se dostalo do mrtvého bodu. Ví se jistě, že se na loupeži nepodílel nikdo jiný než pět podezřelých A, B, C, D nebo E. Dále je známo, že loupež spáchali minimálně dva lidé. Z vyšetřování vyplynulo několik informací: Jestliže se na jakékoli loupeži podílí C a D, pak tam jistě není B. Podezřelý B pracuje vždy s C, neloupí-li zrovna s D. Podezřelý E nikdy nedělá žádnou loupež s A. Jestliže se nepodílejí na jakékoli loupeži D ani E, potom tam je A nebo C. Jestliže loupí A, je tam i B. Podezřelý D nikdy nepracuje bez C. Jste schopni z těchto informací určit nějaké viníky nebo někoho s jistotou pustit domů?

Řešení

Nejprve provedeme matematizaci podmínek úlohy. Označíme postupně písmeny A, B, C, D, E výroky:

- A: Podezřelý A se podílel na loupeži.
- B: Podezřelý B se podílel na loupeži.
- C: Podezřelý C se podílel na loupeži.
- D: Podezřelý D se podílel na loupeži.
- E: Podezřelý E se podílel na loupeži.

Všechny podmínky z textu lze potom vyjádřit pomocí výroků *A*, *B*, *C*, *D*, *E* a logických spojek takto:

- Jestliže se na jakékoli loupeži podílí C a D, pak tam jistě není B: $(C \wedge D) \Rightarrow \neg B$.
- Podezřelý B pracuje vždy s C, neloupí-li zrovna s D: $(B \wedge \neg D) \Rightarrow (B \wedge C)$.
- Podezřelý E nikdy nedělá žádnou loupež s A: $E \Rightarrow \neg A$.
- Jestliže se nepodílejí na jakékoli loupeži D ani E, potom tam je A nebo C: $(\neg D \wedge \neg E) \Rightarrow (A \vee C)$.
- Jestliže loupí A, je tam i B: $A \Rightarrow B$.
- Podezřelý D nikdy nepracuje bez C: $\neg C \Rightarrow \neg D$.

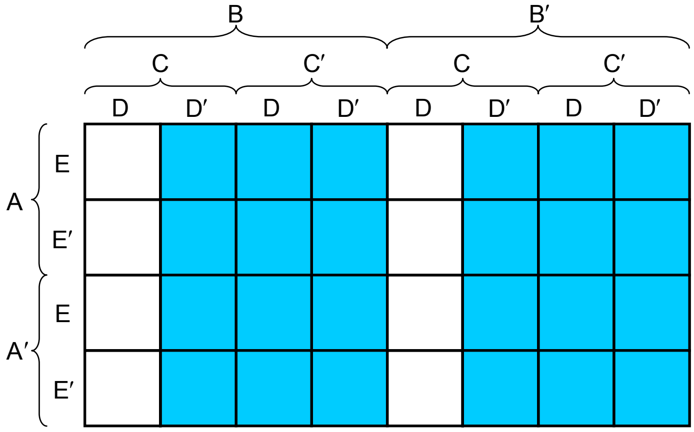
V množinovém chápání problému můžeme označit:

- A množinu všech loupeží, kterých se zúčastnil podezřelý A
- B množinu všech loupeží, kterých se zúčastnil podezřelý B
- C množinu všech loupeží, kterých se zúčastnil podezřelý C
- D množinu všech loupeží, kterých se zúčastnil podezřelý D
- E množinu všech loupeží, kterých se zúčastnil podezřelý E

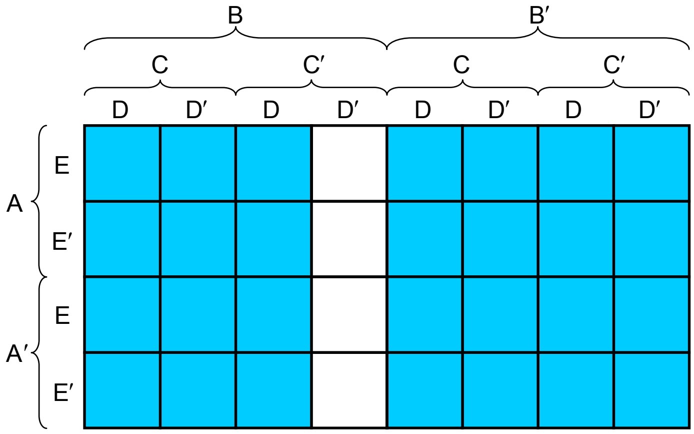
Výrok *A* (lupič A se podílel na loupeži) je tedy ekvivalentní s tvrzením, že spáchaná loupež je prvkem množiny A , analogicky pro ostatní výroky *B* až *E*. Podmínky úlohy zapsané výše pomocí výroků lze tedy přepsat pomocí množinového zápisu vyjadřujícího obor pravdivosti daného výroku následovně:

- $(C \wedge D) \Rightarrow \neg B$: Spáchaná loupež je prvkem množiny $(\mathsf{C} \cap \mathsf{D})' \cup \mathsf{B}'$, což lze upravit na $\mathsf{C}' \cup \mathsf{D}' \cup \mathsf{B}'$. Výsledná množina je zakreslena v Obr. 25.
- $(B \wedge \neg D) \Rightarrow (B \wedge C)$: Loupež je prvkem množiny $(\mathsf{B} \cap \mathsf{D}')' \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$, což upravíme na $\mathsf{B}' \cup \mathsf{D} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Množina je znázorněna v Obr. 26.
- $E \Rightarrow \neg A$: Loupež je prvkem množiny $\mathsf{E}' \cup \mathsf{A}'$, která je zobrazena v Obr. 27.
- $(\neg D \wedge \neg E) \Rightarrow (A \vee C)$: Loupež je prvkem množiny $(\mathsf{D}' \cap \mathsf{E}')' \cup (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$, což lze zapsat také jako $\mathsf{D} \cup \mathsf{E} \cup \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$. Tato množina je zakreslena v Obr. 28.
- $A \Rightarrow B$: Loupež je prvkem množiny $\mathsf{A}' \cup \mathsf{B}$, která je znázorněna v Obr. 29.
- $\neg C \Rightarrow \neg D$: Loupež je prvkem množiny $\mathsf{C} \cup \mathsf{D}'$, která je zobrazena v Obr. 30.

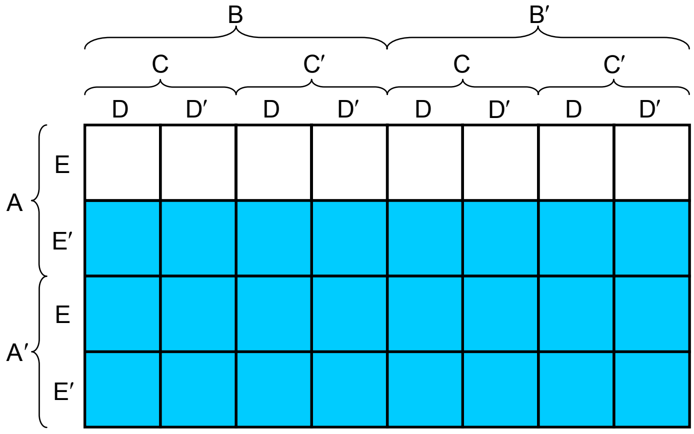
K řešení použijeme Vennovu tabulku pro pět množin. Bude přehlednější a snadněji se v ní můžeme orientovat (Obr. 25–31).



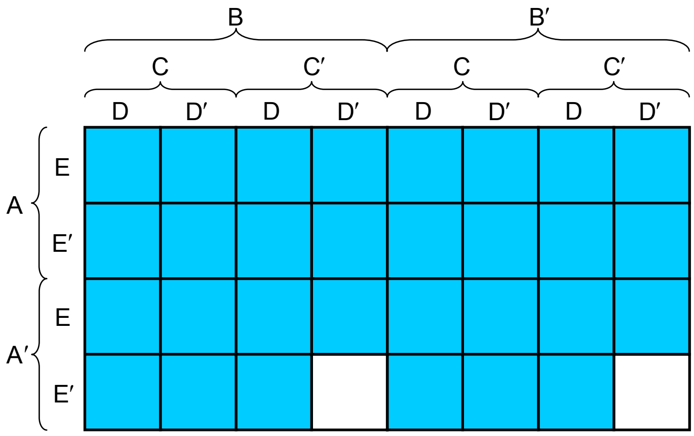
Obr. 25: Zobrazení první podmínky příkladu 5a ve Vennově tabulce.



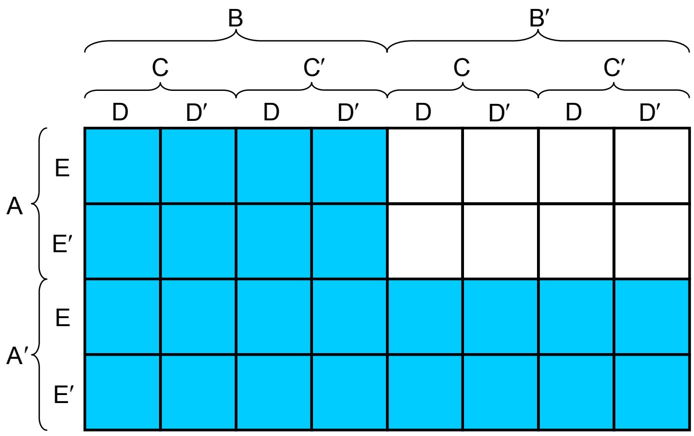
Obr. 26: Zobrazení druhé podmínky příkladu 5a ve Vennově tabulce.



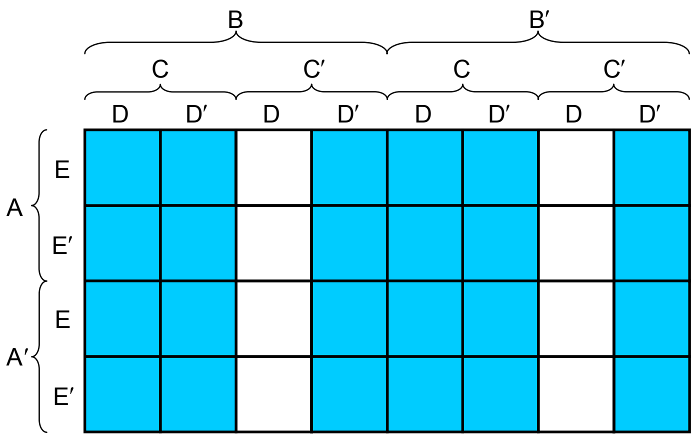
Obr. 27: Zobrazení třetí podmínky příkladu 5a ve Vennově tabulce.



Obr. 28: Zobrazení čtvrté podmínky příkladu 5a ve Vennově tabulce.

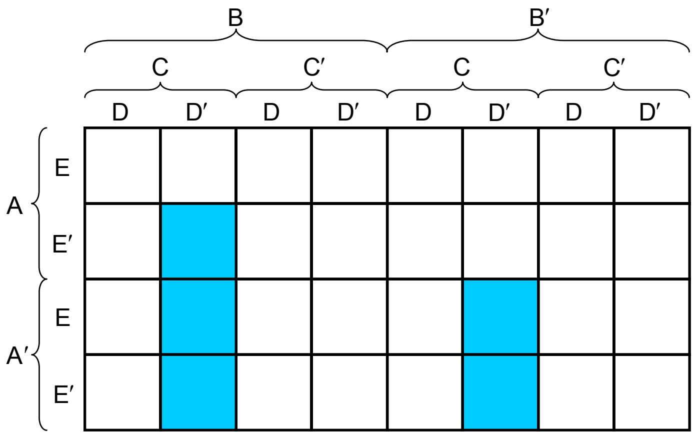


Obr. 29: Zobrazení páté podmínky příkladu 5a ve Vennově tabulce.



Obr. 30: Zobrazení šesté podmínky příkladu 5a ve Vennově tabulce.

Nyní zbývá již jen odvodit závěr ze všech tabulek. Řešením je jejich průnik. Výsledek vidíme na Obr. 31.



Obr. 31: Řešení příkladu 5a ve Vennově tabulce.

Odpověď

Každý modrý čtvereček odpovídá nějakému seskupení zlodějů. Vyšly nám tyto možnosti: Viníky jsou trojice pachatelů A, B a C, nebo E, B a C, nebo dvojice B a C, nebo E a C. Co z toho můžeme usoudit ohledně viny a neviny zlodějů? Nikde se neobjevil zloděj D, takže je určitě nevinen. Zloděj C se vyskytuje v každé skupině, takže on je určitě vinen. O ostatních nemůžeme stoprocentně rozhodnout, zda patří do vězení, či nikoli.

Tip k řešení

Výše uvedený příklad bych určitě doporučila řešit pomocí Vennovy tabulky. Pokud si ji správně nakreslíme, už jen mechanicky vybarvujeme příslušné čtverečky jednotlivých množin, které po zorientování se nalezneme velice rychle. Také průnik všech tabulek zvládneme vytvořit velice snadno i při jejich vysokém počtu.

Pozn.: Příklad je v kapitole 6 řešen také pomocí šipkového diagramu.

Příklad 5b

Honza měl na něco chuť, zašel tedy do cukrárny a koupil si tam alespoň jednu z následujících sladkostí – zmrzlinu, lízátko, dort. Jestliže si koupil zmrzlinu, ale ne lízátko, potom si koupil i dort. Buď si koupil dort i lízátko, nebo si nedal ani jedno z toho. Jestliže si koupil lízátko, koupil si i zmrzlinu. Co si vlastně Honza koupil?

Řešení

Nejprve provedeme matematizaci podmínek úlohy. Označíme postupně písmeny Z, L, D výroky:

- Z: Honza si koupil zmrzlinu.
- L: Honza si koupil lízátko.

- D: Honza si koupil dort.

Všechny podmínky z textu lze potom vyjádřit pomocí výroků Z, L, D a logických spojek takto:

- Jestliže si koupil zmrzlinu, ale ne lízátko, potom si koupil i dort: $(Z \wedge \neg L) \Rightarrow D$
- Buď si koupil dort i lízátko, nebo si nedal ani jedno z toho: $(D \wedge L) \vee (\neg D \wedge \neg L)$
- Jestliže si koupil lízátko, koupil si i zmrzlinu: $L \Rightarrow Z$

V množinovém chápání problému zavedeme základní množinu všech možných nákupů Honzy v cukrárně a označíme ji N. Dále můžeme označit:

- Z množinu nákupů, kdy si Honza koupil zmrzlinu,
- L množinu nákupů, kdy si Honza koupil lízátko,
- D množinu nákupů, kdy si Honza koupil dort.

Výrok Z (Honza si koupil zmrzlinu) je ekvivalentní s tvrzením, že Honzův nákup je prvkem množiny Z, analogicky pro výroky L a D. Podmínky úlohy zapsané výše pomocí výroků lze tedy přepsat pomocí množinového zápisu vyjadřujícího obor pravdivosti daného výroku následovně:

- $(Z \wedge \neg L) \Rightarrow D$: Honzův nákup je prvkem množiny $(\mathsf{Z} \cap \mathsf{L}')' \cup \mathsf{D}$, což lze upravit na $\mathsf{Z}' \cup \mathsf{L} \cup \mathsf{D}$.
- $(D \wedge L) \vee (\neg D \wedge \neg L)$: Nákup je prvkem množiny $(\mathsf{D} \cap \mathsf{L}) \cup (\mathsf{D}' \cap \mathsf{L}')$.
- $L \Rightarrow Z$: Nákup je prvkem množiny $\mathsf{L}' \cup \mathsf{Z}$.

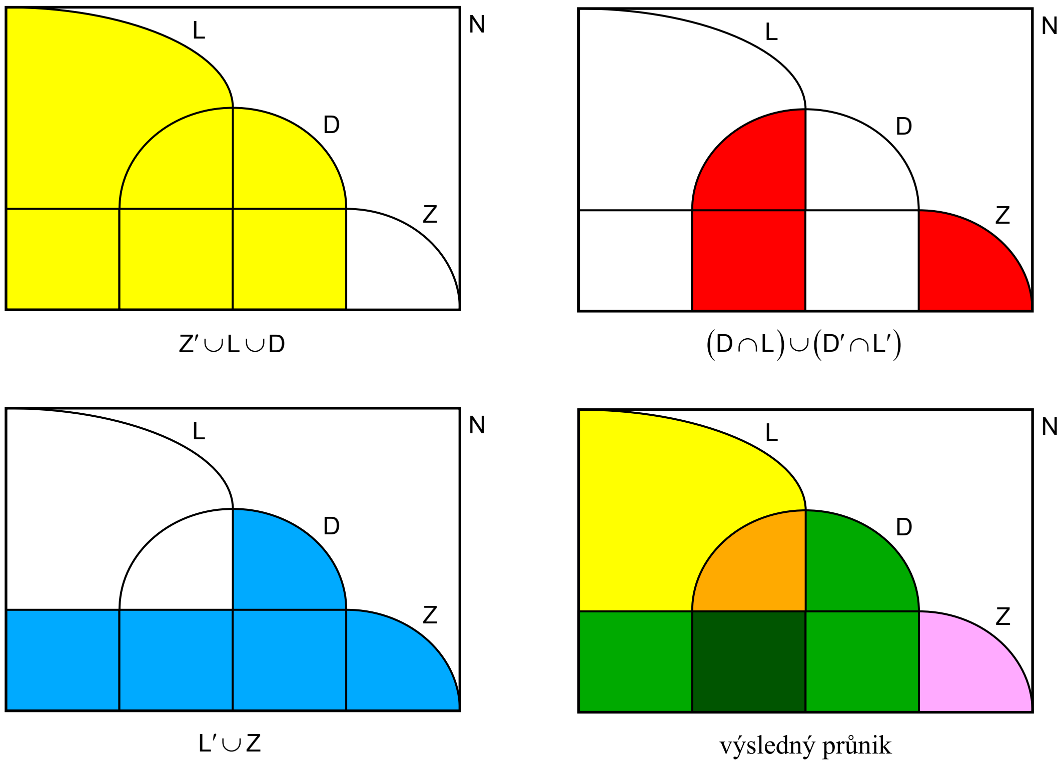
Příklad vyřešíme pomocí Vennova diagramu, Karnaughovy mapy a také pomocí Carrollova diagramu. Pomocí šipkového diagramu je vyřešen v kapitole 6.

a) Vennův diagram

Využijeme Vennův diagram pro tři množiny. Znázorníme si jednotlivé podmínky do samostatných diagramů (Obr. 32). Jelikož předpokládáme, že si koupil alespoň jednu věc, nevybarvuji část obrázku, odpovídající situaci, kdy si Honza nekoupil nic ($\mathsf{Z}' \cap \mathsf{L}' \cap \mathsf{D}'$). Na posledním diagramu znázorním průnik všech předchozích. Jelikož každý diagram má různou barvu, můžu v průniku uplatnit malířské míchání barev, stejně jako v dalších příkladech. (Např.: žlutá s modrou vytvoří zelenou atd.)

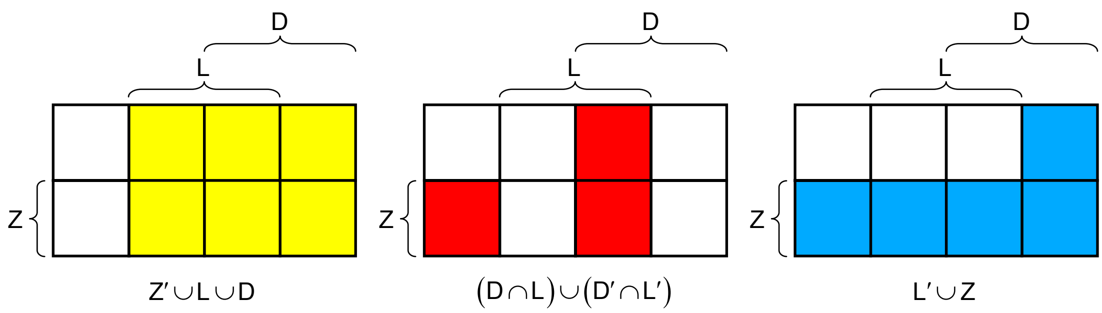
Všechny výroky musí platit zároveň. Jak vidíme v posledním diagramu na Obr. 32, průniku všech Vennových diagramů odpovídá oblast vybarvena tmavě zelenou barvou, tedy $\mathsf{L} \cap \mathsf{D} \cap \mathsf{Z}$.

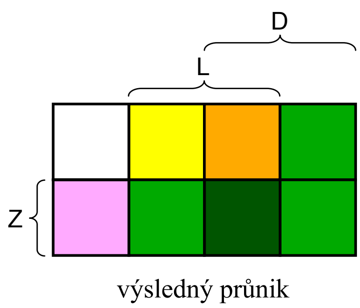
Z řešení vyplývá, že si Honza v cukrárně koupil všechny tři sladkosti.



Obr. 32: Řešení příkladu 5b pomocí Vennova diagramu.

b) Karnaughovy mapy





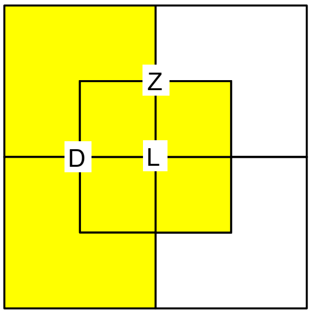
Karnaughovy mapy, které vyjadřují stejnou podmínku jako Vennovy diagramy, si barevně odpovídají. Na poslední mapě je opět výsledek (průnik) označen tmavě zelenou barvou. (Také v mapách jsem neoznačovala políčko odpovídající situaci, kdy si Honza nic nekoupil.)

Obr. 33: Řešení příkladu 5b pomocí Karnaughovy mapy.

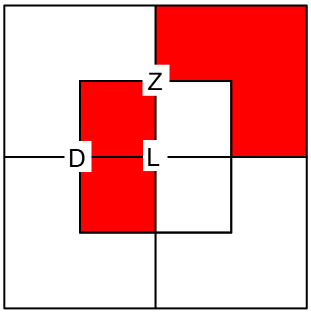
Z řešení opět vyplývá, že si Honza v cukrárně koupil všechny tři sladkosti.

c) Carrollův diagram

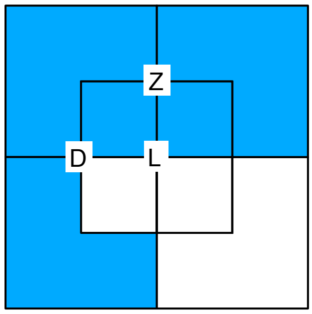
Diagram znázorní jednotlivé množiny do velkého čtverce. Každá množina bude představovat nákup jedné dobroty z cukrárny. Znázorníme si jednotlivé výroky do samostatných diagramů (Obr. 34).



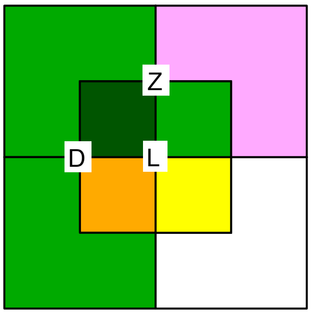
$Z' \cup L \cup D$



$(D \cap L) \cup (D' \cap L')$



$L' \cup Z$



výsledný průnik

Systém vybarvování je stejný jako u Vennova diagramu a Karnaughovy mapy. Barvy odpovídajících si množin jsou totožné. V diagramech opět nevybarvuji možnost, kdy si Honza nekoupil vůbec nic, protože ji zadání nepřipouští.

Také z tohoto řešení vyplývá, že si Honza v cukrárně koupil všechny tři sladkosti.

Obr. 34: Řešení příkladu 5b pomocí Carrollova diagramu.

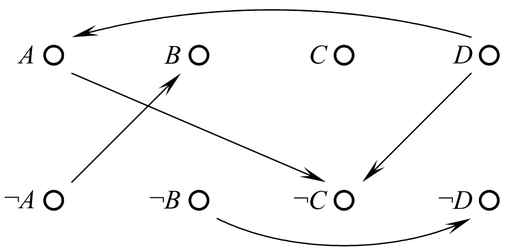
Tip k řešení

Příklad je rozhodně výhodnější řešit pomocí Vennova diagramu (příp. Karnaughovy mapy, nebo Carrollova diagramu). Nemusíme rozdělovat druhý výrok na dva a není třeba nic předpokládat o jeho částech. Pokud si správně nakreslíme Vennův diagram (nebo jiné zobrazení), s menší pravděpodobností uděláme chybu, než je tomu u šipkového diagramu. Úlohu lze také řešit pomocí tabulkové metody, která by v tomto případě byla určitě časově výhodnější.

6 Šipkové diagramy

Metoda šipkových diagramů je vhodná pro řešení logických úloh, které obsahují především implikace. Znázorňujeme v nich vztahy mezi jednotlivými výrokovými proměnnými. Obrázek vždy obsahuje všechny výrokové proměnné a jejich negace znázorněné kolečky (uzly) a šipky značící, co z čeho plyne (Obr. 35). Tyto grafy je výhodné sestrojovat tak, aby uzly znázorňující výrok a jeho negaci, byly souměrně sdružené podle zvolené osy. Do jednoho řádku budeme zakreslovat uzly znázorňující výroky a do druhého jejich negace. Šipkový diagram je v podstatě uzlový graf.

Nejjednodušší případ šipkového diagramu, je takový, ve kterém se vyskytují pouze implikace výrokových proměnných, které jsou v konjunkci. Tedy platí zároveň.



Obr. 35: Obecný příklad šipkového diagramu.

Přiřazování pravdivostních hodnot výrokům zakreslujeme do grafu vybravováním uzlů podle logických pravidel a pravidel grafu. Implikace se v diagramu znázorňují šipkami od předpokladu k závěru. Systém vyplňování diagramu vyplývá z definice implikace. Pravdivý výrok označuje zeleně vybarvené kolečko, nepravdivý výrok červené kolečko.

Logická pravidla:

- Každý výrok má právě jednu pravdivostní hodnotu.
- Výrok A a $\neg A$ mají různé pravdivostní hodnoty.
- Je-li pravdivá implikace $A \Rightarrow B$ a výrok A je pravdivý, pak je pravdivý i výrok B.
- Je-li pravdivá implikace $A \Rightarrow B$, ale výrok B je nepravdivý, není pravdivý ani výrok A.

Grafová pravidla:

- Každý uzel má jen jednu barvu.
- Uzly A a $\neg A$ mají různé barvy.
- Je-li počáteční uzel šipky vybarven zelenou barvou, je zelený i její koncový uzel.
- Je-li koncový uzel šipky červený, je červený i její počáteční uzel.

Konkrétně vidíme všechny situace v Tab. 3.

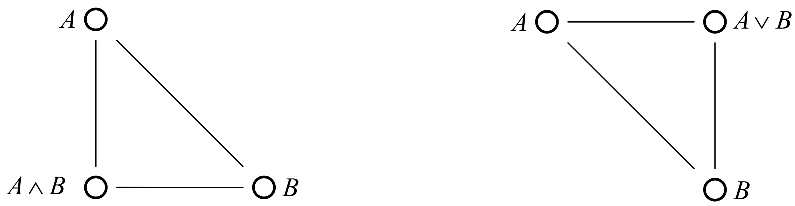
Tab. 3: Tabulka znázornění implikace v šipkovém diagramu.

A	B	$A \Rightarrow B$	grafické znázornění v šipkovém diagramu
1	1	1	● → ●
1	0	0	nemůže současně platit výrok a jeho negace
0	1	1	● → ●
0	0	1	● → ●

Vede-li šipka z pravdivého (zeleného) předpokladu, vybarvíme její konec zeleně a příslušné negace červeně. Jiná možnost vybarvení se nám nenabízí. Pokud vede šipka do červeného závěru, vybarvíme předpoklad červeně a obě negace zeleně. Pokud se nám objeví v diagramu šipka, která povede ze zeleného kolečka do červeného, je diagram sporný.

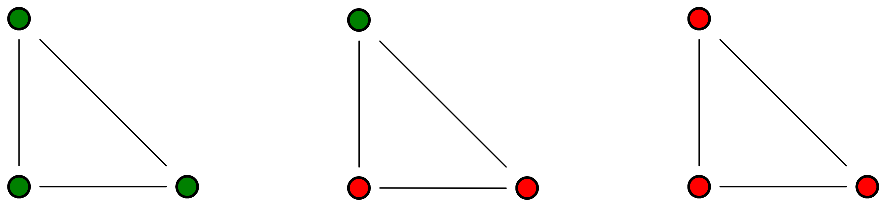
Pomocí šipkových diagramů lze řešit i úlohy, ve kterých se vyskytují i jiné logické spojky než implikace. Ekvivalenci můžeme vyjádřit jako dvě implikace (šipky na obě strany). U disjunkce si pomůžeme negacemi výroků. Pak je disjunkce vyjádřena pomocí implikace takto $(A \vee B \equiv \neg A \Rightarrow B)$.

Složitější to je s výrokovými formulemi typu $(A \vee B) \Rightarrow C$, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \wedge D)$ atd. Potom v šipkovém diagramu znázorňujeme výrokové proměnné a jejich negace na diagonále. Konjunkci a disjunkci výrokových proměnných *A*, *B* graficky znázorníme pomocí pravoúhlého trojúhelníku, který má dva vrcholy ve výrokových proměnných *A*, *B* a pravý úhel při $A \wedge B$, $A \vee B$ Pro rozlišení konjunkce a disjunkce znázorňujeme všechny konjunkce pod diagonálu (třetí vrchol trojúhelníku pod diagonálou) a disjunkce nad diagonálu (třetí vrchol trojúhelníku nad diagonálou). Případně je můžeme rozlišit typem spojnice mezi jednotlivými kolečky (přerušovanou nebo tečkovanou čarou, různými barvami apod.).

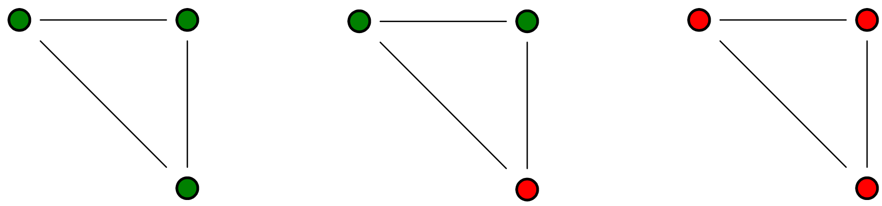


Obr. 36: Zakreslení konjunkce a disjunkce v šipkovém diagramu.

Vybarvování trojúhelníků je závislé na definici konjunkce a disjunkce. Na Obr. 37 a Obr. 38 naleznete všechny možné kombinace vybarvení trojúhelníků pro konjunkci, resp. disjunkci.



Obr. 37: Pravidla pro vybarvování konjunkce v šipkových diagramech.



Obr. 38: Pravidla pro vybarvování disjunkce v šipkových diagramech.

Výhody a nevýhody této metody řešení

Šipkové diagramy jsou vhodné hlavně pro znázorňování výroků, které obsahují implikace. Pokud se v úloze vyskytují dalšího logické operace nebo složitější složené výroky, začne být tato metoda méně přehledná. Hodí se tedy pro velice úzký okruh úloh. Ale tříbí myšlení, protože nás nutí během řešení stále přemýšlet a vracet se k předpokladům během celého příkladu.

Příklad 6a

Určete, jaký závěr vyplývá ze zadaných výroků.

- Jestliže dostanu jedničku z matematiky, dostanu ji i fyziky, ale ne ze zeměpisu.
- Jestliže dostanu jedničku z fyziky, dostanu ji i ze zeměpisu.
- Jestliže dostanu jedničku z angličtiny, dostanu ji z fyziky i z chemie.

Řešení

Nejprve provedeme matematizaci všech podmínek. Označíme postupně písmeny *M*, *F*, *Z*, *A*, *C* tyto výroky:

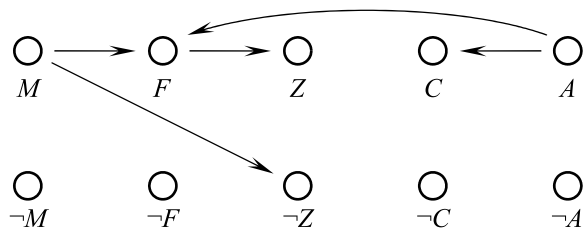
- *M*: Dostanu jedničku z matematiky.
- *F*: Dostanu jedničku z fyziky.
- *Z*: Dostanu jedničku ze zeměpisu.
- *A*: Dostanu jedničku z angličtiny.
- *C*: Dostanu jedničku z chemie.

Nejprve nalezneme symbolický zápis jednotlivých podmínek:

- $M \Rightarrow (F \wedge \neg Z)$,
- $F \Rightarrow Z$,

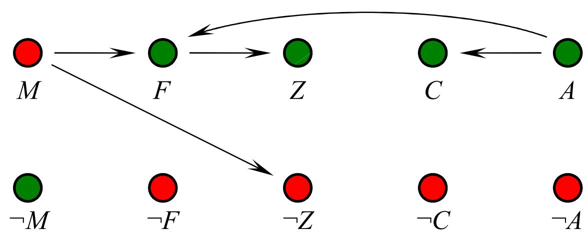
- $A \Rightarrow (F \wedge C)$.

Všechny výroky jsou implikace, nebo se dají rozložit na dvě implikace, které platí zároveň (první a třetí výrok). Šipkový diagram je znázorněn na Obr. 39.



Obr. 39: Šipkový diagram pro řešení příkladu 6a.

Nyní začneme vybarvovat diagram. Můžeme začít např. předpokladem, že výrok A je pravdivý (zelená) a snažíme se zjistit, zda ve vybarvování nedojdeme ke sporu a budeme moci vyplnit celý diagram (Obr. 40). Postup vyplňování diagramu je popsán výše.



Obr. 40: Řešení příkladu 6a v šipkovém diagramu.

Odpověď

Ze zadaných podmínek vyplývá, že dostanu jedničku z fyziky, zeměpisu, chemie a angličtiny.

Příklad 6b

Vyšetřování krádeže peněz v jedné bance se dostalo do mrtvého bodu. Ví se jistě, že se na loupeži nepodílel nikdo jiný než pět podezřelých A, B, C, D nebo E. Dále je známo, že loupež spáchali minimálně dva lidé. Z vyšetřování vyplynulo několik informací: Jestliže se na jakékoli loupeži podílí C a D, pak tam jistě není B. Podezřelý B pracuje vždy s C, neloupí-li zrovna s D. Podezřelý E nikdy nedělá žádnou loupež s A. Jestliže se nepodílejí na jakékoli loupeži D ani E, potom tam je A nebo C. Jestliže loupí A, je tam i B. Podezřelý D nikdy nepracuje bez C. Jste schopni z těchto informací určit nějaké viníky nebo někoho s jistotou pustit domů?

Řešení

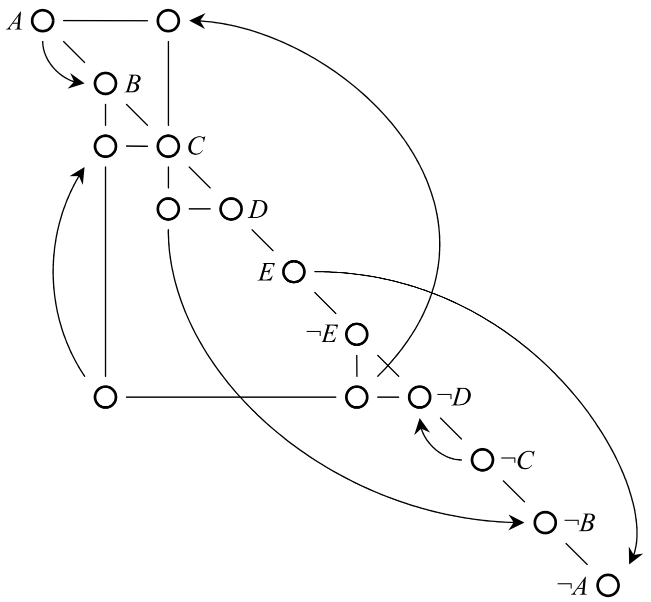
Označíme postupně písmeny A, B, C, D, E tyto výroky:

- A: Podezřelý A se podílel na loupeži.
- B: Podezřelý B se podílel na loupeži.
- C: Podezřelý C se podílel na loupeži.
- D: Podezřelý D se podílel na loupeži.
- E: Podezřelý E se podílel na loupeži.

Všechny podmínky z textu lze potom vyjádřit pomocí výroků A, B, C, D, E a pomocí logických spojek takto:

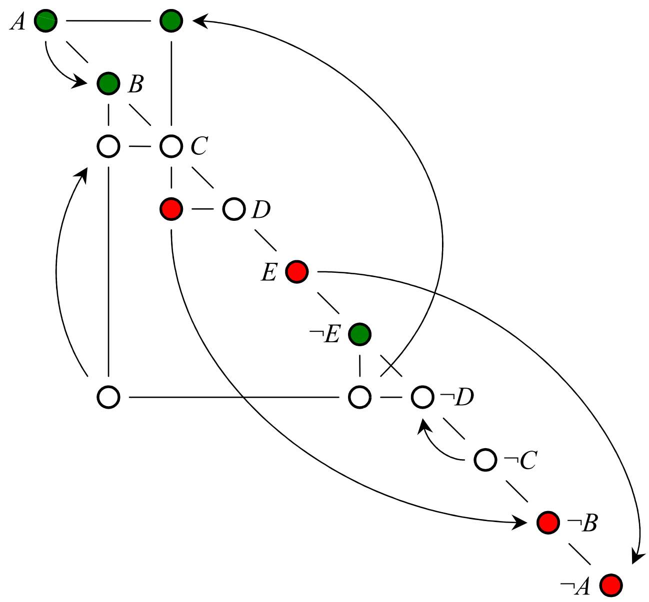
- Jestliže se na jakékoli loupeži podílí C a D, pak tam jistě není B: $(C \wedge D) \Rightarrow \neg B$
- Podezřelý B pracuje vždy s C, neloupí-li zrovna s D: $(B \wedge \neg D) \Rightarrow (B \wedge C)$
- Podezřelý E nikdy nedělá žádnou loupež s A: $E \Rightarrow \neg A$
- Jestliže se nepodílejí na jakékoli loupeži D ani E, potom tam je A nebo C: $(\neg D \wedge \neg E) \Rightarrow (A \vee C)$
- Jestliže loupí A, je tam i B: $A \Rightarrow B$
- Podezřelý D nikdy nepracuje bez C: $\neg C \Rightarrow \neg D$

Nejprve si zakreslíme prázdný šipkový diagram, z něhož budeme vycházet při řešení (Obr. 41).



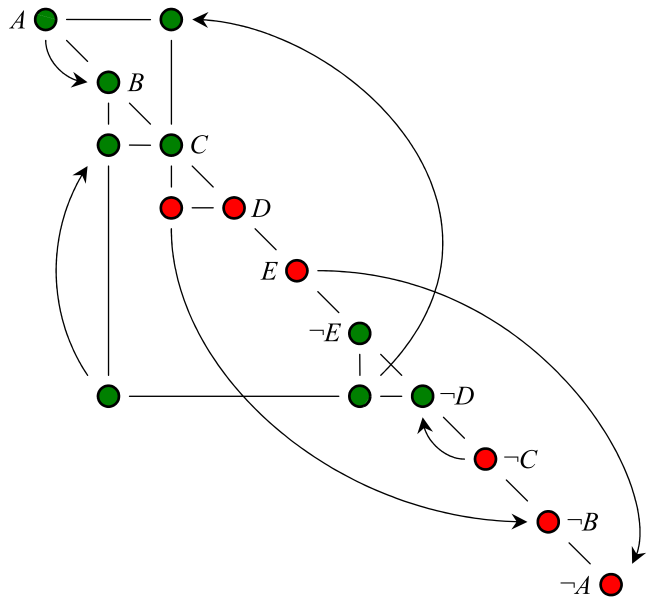
Obr. 41: Šipkový diagram pro řešení příkladu 6b.

Někde musíme začít s vybarvováním diagramu. V podstatě je jedno kde, ale nesmíme opomenout žádné řešení. Začneme například zkoumat případ, kdy podezřelý A je vinen. Od zeleně vybarveného kolečka se dostaneme vybarvováním až k diagramu na Obr. 42 a dál již nic nezjistíme.



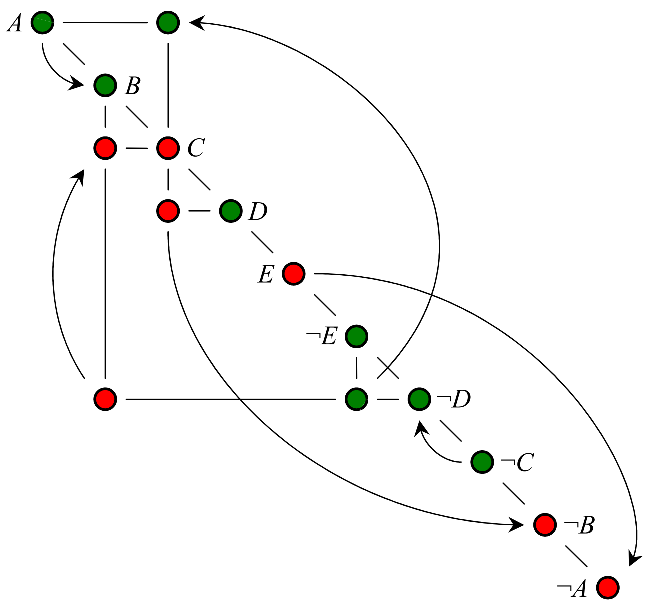
Obr. 42: Fáze prvního řešení příkladu 6b pomocí šipkového diagramu.

V tuto chvíli musíme znovu zvolit, jak budeme pokračovat. Například budeme předpokládat, že C je vinen a vybarvujeme dále (Obr. 43).



Obr. 43: První řešení příkladu 6b pomocí šipkového diagramu.

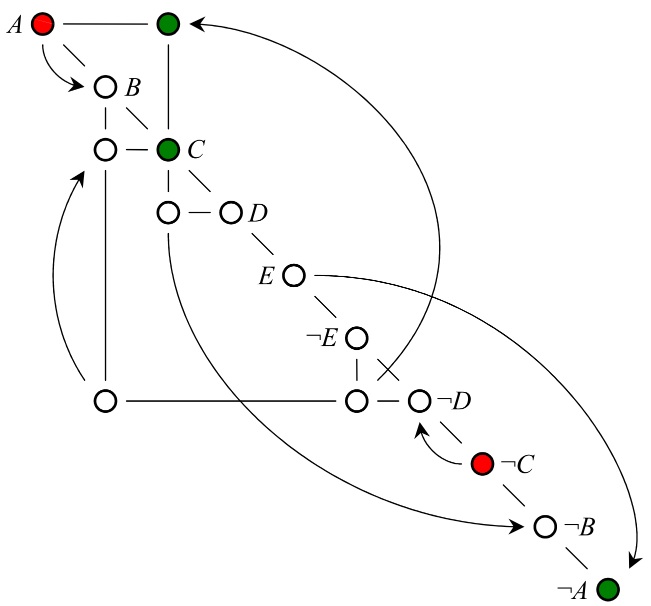
Z tohoto obrázku už můžeme vyčíst první řešení, tedy kdo se mohl podílet na loupeži. Vyšla nám trojice viníků A, B a C. Musíme ještě prozkoumat případ, jestliže je C nevinen (Obr. 44).



Obr. 44:Nevyhovující varianta prvního řešení příkladu 6b.

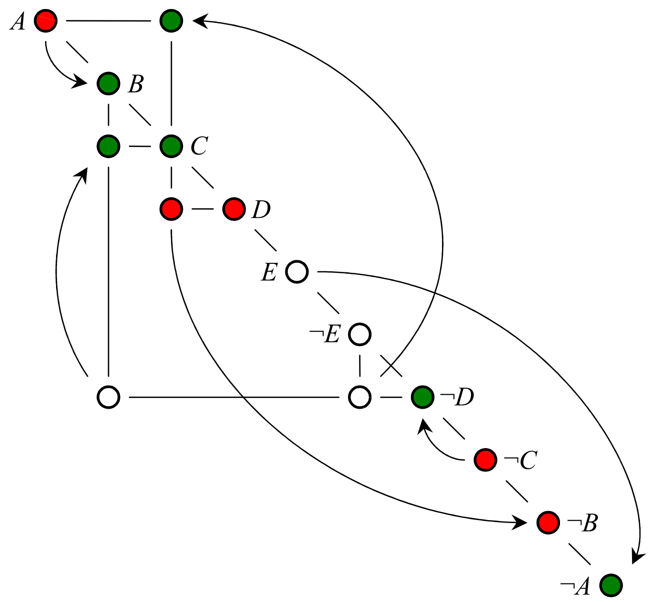
V tomto případě docházíme ke sporu. Vyšlo nám, že D je zároveň vinen i nevinen.

Nyní nás ještě čeká vrátit se zcela na začátek a předpokládat, že podezřelý A je nevinen, a zjistit závěry z tohoto předpokladu. Z toho, že A je nevinen se toho moc nedozvíme, takže musíme ještě předpokládat, že C je také vinen (Obr. 45).



Obr. 45: Fáze druhého řešení příkladu 6b pomocí šipkového diagramu.

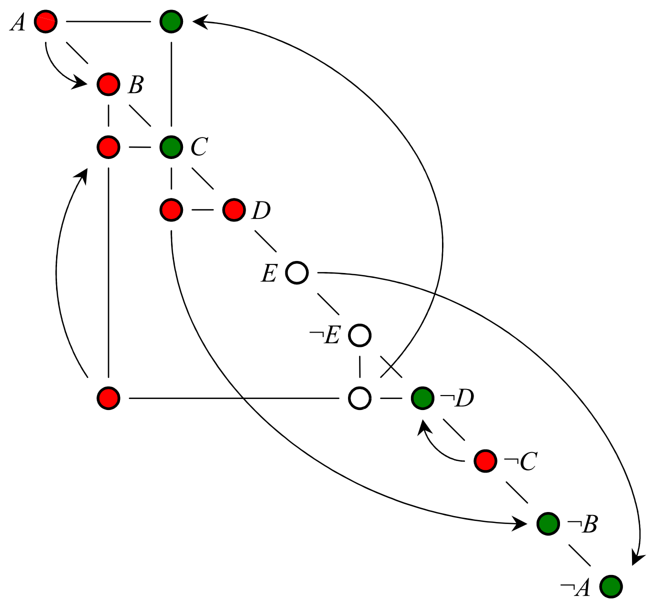
Stále máme málo informací, předpokládejme, že podezřelý B je vinen. Vybarvíme do obrázku, co ještě lze. Pořád se však nedaří vybarvit celý diagram (Obr. 46).



Obr. 46: Další fáze druhého řešení příkladu 6b.

Abychom nekreslili další diagramy, už bez znázorňování určíme, co by se stalo s Obr. 46, kdybychom předpokládali, že podezřelý E je vinen, příp. nevinen. Ani jeden z předpokladů nevede ke sporu, takže z tohoto diagramu vychází dvě řešení. Pokud je E vinen, pak jsou viníky B, C a E. Je-li E nevinen, jsou viníky pouze B a C.

Musíme ještě prozkoumat řešení, kdy je podezřelý A nevinen, C vinen a zároveň B nevinen (Obr. 47).



Obr. 47: Konečná fáze druhého řešení příkladu 6b.

Znovu jsme došli do situace, kdy musíme ještě předpokládat, zda je E vinen nebo není. Opět bez zakreslování: Pokud je E vinen, dojdeme ke dvojici lupičů C a E, v opačném případě, vychází jediný viník, a to C. Zadání ale říká, že viníci byli nejméně dva, takže tato možnost jako řešení nevyhovuje, i když jsme nedošli při vybarvování ke sporu.

Pokud bychom zkoumali ještě možnost, kdy je podezřelý A nevinen, C nevinen atd. nedošli bychom k žádné další skupině podezřelých. Proto tyto situace diagramy neuvádím, ale pro ověření si je můžete zakreslit.

Odpověď

Vyšly nám tyto možnosti: Viníky jsou trojice pachatelů A, B a C, nebo E, B a C, nebo dvojice B a C, nebo E a C. Co z toho můžeme usoudit ohledně viny a neviny zlodějů? Nikde se neobjevil zloděj D, takže je určitě nevinen. Zloděj C se vyskytuje v každé skupině, takže je určitě vinen. O ostatních nemůžeme stoprocentně rozhodnout, zda patří do vězení, či nikoli.

Tip k řešení

Dala bych přednost řešení za pomoci Vennovy tabulky. Pokud ji správně nakreslíme, pak už jen mechanicky vybarvujeme příslušné čtverečky. U šipkového diagramu musíme stále přemýšlet nad pravidly jeho vybarvování a vždy se vracet k předpokladům. Zvyšuje se tak pravděpodobnost, že na nějaké řešení zapomeneme, nebo že uděláme chybu.

Pozn.: Příklad je pomocí Vennových tabulek řešen v kapitole 5.

Příklad 6c

Honza měl na něco chuť, zašel tedy do cukrárny a koupil si tam alespoň jednu z následujících sladkostí – zmrzlinu, lízátko, dort. Jestliže si koupil zmrzlinu, ale ne lízátko, potom si koupil i dort. Buď si koupil dort i lízátko, nebo si nedal ani jedno z toho. Jestliže si koupil lízátko, koupil si i zmrzlinu. Co si vlastně Honza koupil?

Řešení

Označíme postupně písmeny Z, L, D tyto výroky:

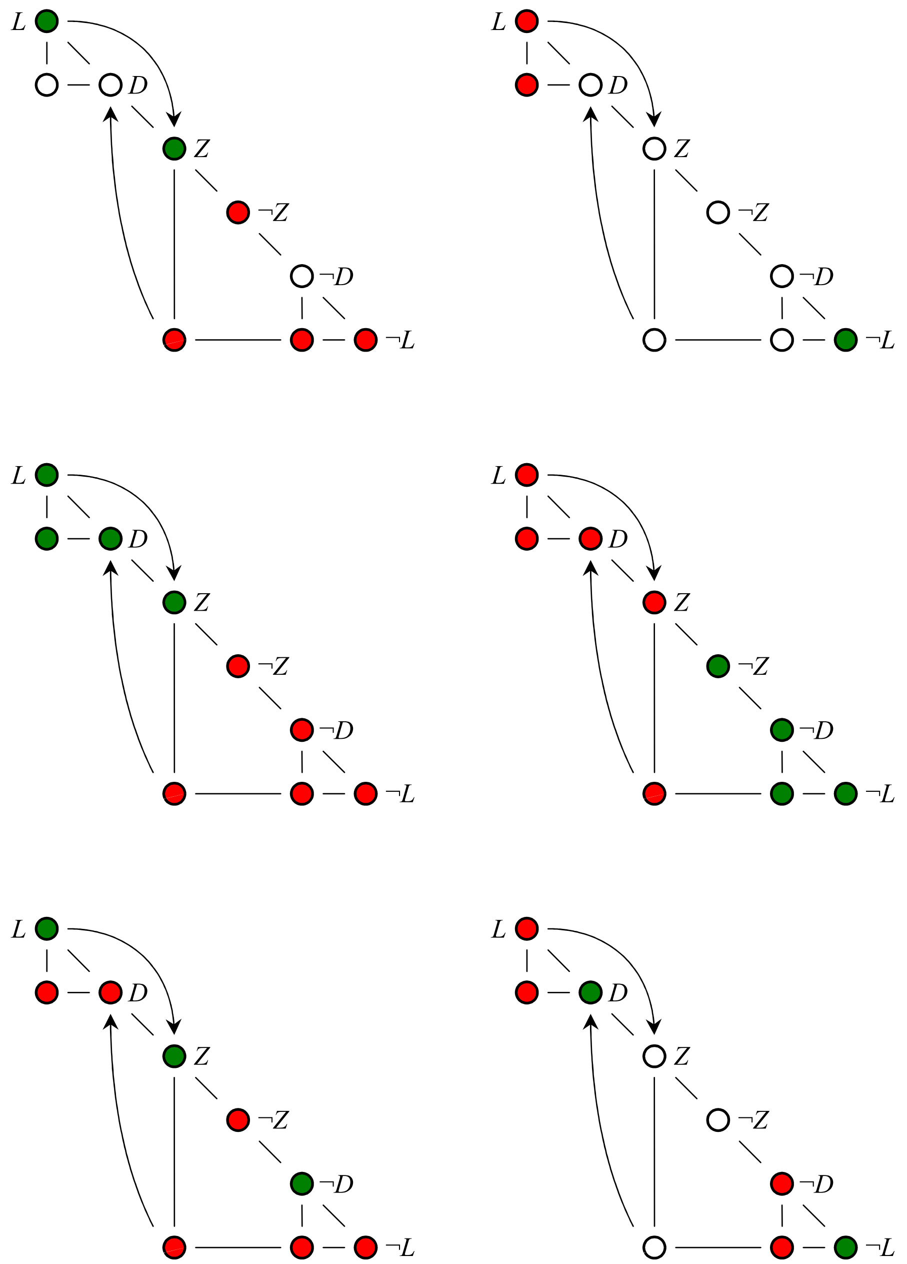
- Z: Honza si koupil zmrzlinu.
- L: Honza si koupil lízátko.
- D: Honza si koupil dort.

Všechny podmínky z textu lze potom vyjádřit pomocí výroků Z, L, D a pomocí logických spojek takto:

- Jestliže si koupil zmrzlinu, ale ne lízátko, pak si koupil i dort: $(Z \wedge \neg L) \Rightarrow D$
- Buď si koupil dort i lízátko, nebo si nedal ani jedno z toho: $(D \wedge L) \vee (\neg D \wedge \neg L)$
- Jestliže si koupil lízátko, koupil si i zmrzlinu: $L \Rightarrow Z$

Druhý výrok je na šipkové diagramy dosti komplikovaný, rozdělíme jej tedy na dvě konjunkce $(D \wedge L)$ a $(\neg D \wedge \neg L)$, které snadno zobrazíme. Aby byl druhý výrok pravdivý, musí být pravdivá alespoň jedna jeho část, což vyplývá z tabulky pravdivostních hodnot disjunkce.

Vytvoříme obecný diagram pro tuto úlohu (zde neuvádím) a začneme s jeho vybarvováním. Můžeme začít např. předpokladem, že si Honza koupil lízátko (L vybarvíme zeleně). Všechny diagramy pro tento předpoklad uvádím v levé části Obr. 48, druhou možnost (L červené) v pravé části téhož obrázku.



Obr. 48: Řešení příkladu 6c pomocí šipkových diagramů.

a) Levý sloupec diagramů

V prvním diagramu vybarvíme *L* zeleně a pokračujeme.

Ve druhém diagramu je nutné zvolit další postup. Např. *D* vybarvíme zeleně. Ke sporu nedocházíme, takže získáme první řešení. Honza si koupil všechny tři dobroty.

Do třetího diagramu zakreslíme možnost, kdy si Honza nekoupil dort, tedy *D* bude červené. I když jsme vybarvili celý diagram, aniž bychom došli ke sporu, výsledek není řešením příkladu, protože jsme požadovali, aby alespoň jedna z konjunkcí $(D \wedge L)$ a $(\neg D \wedge \neg L)$ byla pravdivá, jinak není splněna druhá podmínka.

b) Pravý sloupec diagramů

V prvním diagramu vybarvíme *L* červeně a pokračujeme.

Ve druhém diagramu je nutné zvolit další postup. Např. *D* vybarvíme červeně (nekoupil si dort). Vybarvíme, co lze, daleko se však nedostaneme a musíme ještě zvolit, zda *Z* bude zelené nebo červené. V diagramu jsem zvolila *Z* červené; druhý případ neuvádím, protože vede ke sporu. Pokud je *Z* červené, vyjde nám řešení, že si nekoupil ani jednu sladkost. Ale v zadání je uvedeno, že si Honza něco vybral, takže tato možnost není to řešením příkladu.

Do třetího diagramu zakreslíme možnost, kdy si Honza dort koupil, tedy *D* bude zelené. Tady už dál nemusíme předpokládat nic o *Z*, protože není zelená ani jedna konjunkce, které podmiňují pravdivost druhé podmínky.

Odpověď

Z řešení vyplývá, že si Honza v cukrárně koupil všechny tři sladkosti.

Tip k řešení

Příklad je rozhodně výhodnější řešit pomocí Vennova diagramu (příp. Karnafovy mapy, nebo Carrollova diagramu). Nemusíme v nich rozdělovat druhý výrok na dva a není třeba nic předpokládat o jeho částech. Správně zakreslený Vennův diagram spíše povede rychle k bezchybnému řešení.

Pozn.: Metodou Vennových diagramů je příklad vyřešen v kapitole 5.

7 Stromová struktura

Při hledání řešení některých úloh se nám hodí zakreslit obrázek v tzv. stromové struktuře. Na začátku máme určité předpoklady, které vedou postupně k různým možnostem řešení. Diagram se rozvětvuje podle potřeby, až v posledním kroku máme zakresleny všechny možnosti, které mohou v daném případě nastat. Potom jen najdeme situace, které jsou řešením naší úlohy a vyvodíme z nich potřebný závěr.

Nejčastěji se nám tato metoda zakreslení hodí u příkladů, kde hledáme všechny možné varianty řešení, nebo jen část z nich, které vyhovují, příp. v úlohách, kde zjišťujeme pravděpodobnost příznivého výsledku.

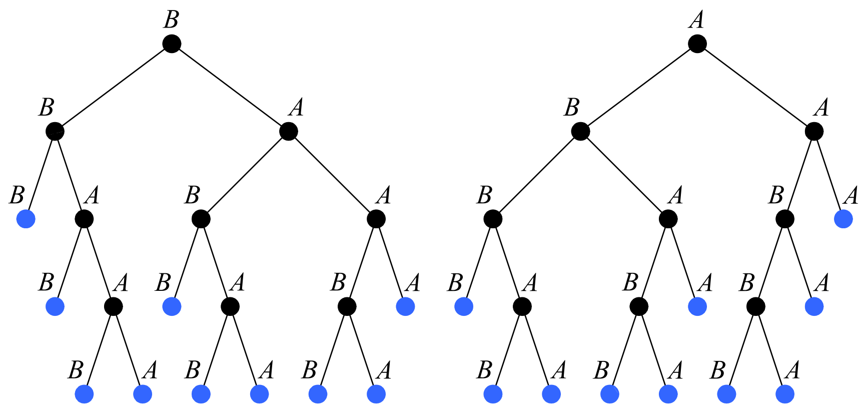
Příklad 7a[2]

Dva nejlepší šachisté A, B školního šachového kroužku se připravují na finále. Vítězem se stane ten, kdo první vyhraje tři partie – remízy se nepočítají. Vypište všechny možné varianty průběhu turnaje (bez remíz). Určete počet těchto variant.

Řešení

Ve schématu máme znázorněny všechny možné varianty, které mohou v úloze nastat (Obr. 49). Písmeno *A*, resp. *B* označuje partie, které vyhrál hráč A, resp. hráč B.

Pokud je dané písmeno i s příslušným bodem modré, znamená to třetí výhru v řadě a hráč se stává vítězem. Ze schématu je vidět, že turnaj může skončit ve dvou případech po třech partiích, v šesti případech po čtyřech partiích a ve dvanácti po pěti partiích. Celkem tedy existuje dvacet možných variant průběhu turnaje.



Obr. 49: Řešení příkladu 7a zakreslené ve stromové struktuře.

2 Převzato z [3].

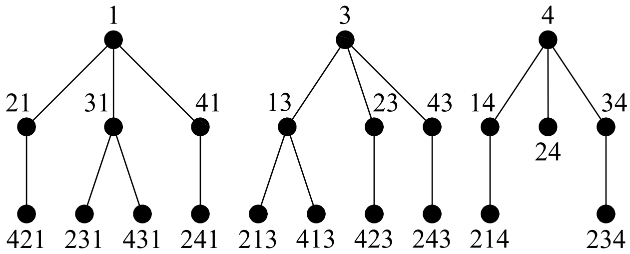
Příklad 7b[3]

Najděte počet všech trojciferných přirozených čísel, která lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4 a pro něž platí ještě tyto podmínky:

- V každém čísle se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou
- Na místě jednotek je jedna z číslic 1, 3, 4, na místě stovek číslice 4 nebo 2.

Řešení

Odpověď snadno zjistíme ze schématu. Začneme ho utvářet od místa jednotek v trojciferném čísle a pak pokračujeme dále k hledaným trojciferným číslům s požadovanými vlastnostmi. Celkem existuje 10 čísel s požadovanými vlastnostmi.



Obr. 50: Řešení příkladu 7b zakreslené ve stromové struktuře.

Příklad 7c

Na jedné čarodějnické sešlosti mají tradici o půlnoci házet do studně zlaté mince. Věří, že pokud některému účastníku padne tatáž strana mince (panna nebo orel) jako tomu před ním, pak získá dar neviditelnosti. První účastník získá tento dar, ať mu padne cokoliv. Jaká je pravděpodobnost, že prvnímu padne panna? Jaká je pravděpodobnost, že první čtyři získají dar neviditelnosti? Kolika z 28 účastníkům pravděpodobně padne stejná strana mince jako v předešlém hodu a získají tak dar?

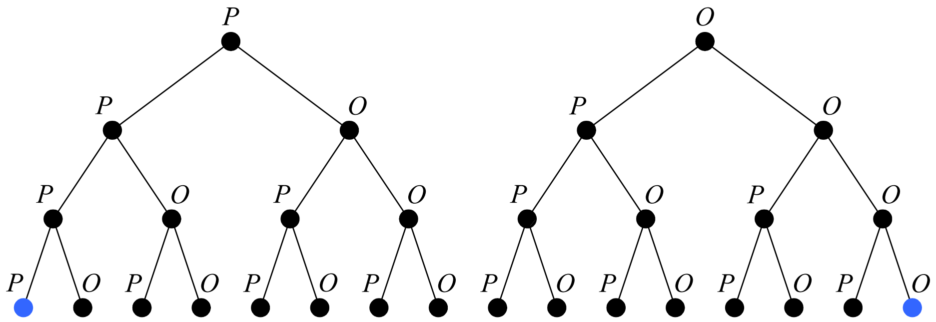
Řešení

Nakreslíme si obrázek se všemi možnostmi, které mohou při házení nastat do čtvrtého hodu včetně. Výsledek hodu označíme P, resp. O, padne-li na minci panna, resp. orel, (Obr. 51).

Označíme-li x počet případů, ve kterých může dojít k příznivému výsledku, y počet případů s nepříznivým výsledkem, $N = x + y$ počet všech možných výsledků. Pravděpodobnost příznivého výsledku potom vypočteme jako podíl $P = \frac{x}{N}$. Je jasné, že prvnímu účastníku může padnout buď panna nebo orel. Pravděpodobnost, že padne panna je $P = \frac{1}{2}$, tedy padesátiprocentní šance.

---

[3] Převzato z [3].



Obr. 51: Řešení příkladu 7c zakreslené ve stromové struktuře.

Aby první čtyři získali dar neviditelnosti, musí hodit všichni čtyři stejnou stranu mince. Z Obr. 51 nahlédneme, že existují dvě možnosti (vyznačeny modře), aby padla stejná strana mince v prvních čtyřech hodech. Pravděpodobnost tohoto jevu je potom $P = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

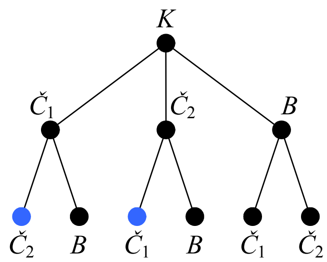
Do obrázku nebudeme zakreslovat hody všech 28 účastníků, protože je celkem zřejmé, že každý hodí stejnou stranu mince jako předešlý účastník s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (má jen dvě možnosti panna nebo orel), takže z 28 účastníků se to může podařit právě jedné polovině, tedy 14 účastníkům.

Příklad 7d

Na taneční zábavě je jako první cena pro muže večeře s královnou krásy. Do finále se probojovali dva muži. O tom, který vyhraje, rozhodne los. Je tu ale i možnost, že cena propadne a nevyhraje ji ani jeden z nich. V klobouku máme dvě černé koule a jednu bílou. Kdo si vytáhne bílou, je vítěz. Jaká je pravděpodobnost, že si oba muži vytáhnou černou kouli? Kolik různých možností pro tahy z klobouku existuje?

Řešení

Zakreslíme si situaci. Písmenem B označíme vytažení bílé koule, $Č_1$ a $Č_2$ vytažení černých koulí, klobouk označíme K. V prvním tahu může první muž vytáhnout libovolnou kouli z daných tří. Druhý muž může vytáhnout už jen jednu ze zbývajících.



Obr. 52: Řešení příkladu 7d zakreslené ve stromové struktuře.

Všech možností, jak vytáhnout koule z klobouku, je 6. Z těchto šesti možností se právě dvakrát může stát, že si oba muži vytáhnou černou kouli. Pravděpodobnost takového jevu tedy je $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Možnosti lze též vypsat do řádků:

- 1. tah $\check{C}_1$ $\check{C}_2$ B B $\check{C}_1$ $\check{C}_2$
- 2. tah B B $\check{C}_1$ $\check{C}_2$ $\check{C}_2$ $\check{C}_1$.

8 Grafy

Grafy se ve středoškolské matematice vyskytují celkem často, zejména grafy funkcí. O grafech funkcí se zmiňovat nebudu, protože s množinami tolik nesouvisí. Zaměřím se na dva hlavní druhy grafu, a to kartézský a uzlový graf, které slouží ke znázornění kartézského součinu. Kartézský součin se kdysi vyučoval v prvním ročníku středních škol, ale nyní již patří mezi nepovinnou látku.

8.1 Kartézský součin dvou množin a jeho grafické znázorňování

Pro začátek určitě neuškodí malé opakování, ve kterém shrnu, co je kartézský součin je a jak jej definujeme. Uspořádanou dvojici prvků x, y označujeme $[x,y]$. Uspořádané dvojice $[x,y]$, $[u,v]$ považujeme za sobě rovné, právě když je $x=u$ a zároveň $y=v$: $[x,y]=[u,v] \Leftrightarrow (x=u)\wedge(y=v)$.

Definice

Předpokládejme, že K, L jsou libovolné neprázdné množiny. Množinu všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $x\in\mathsf{K}$, $y\in\mathsf{L}$, nazýváme kartézský součin množin K, L a označujeme jej $\mathsf{K}\times\mathsf{L}$: $\mathsf{K}\times\mathsf{L}=\{[x,y];(x\in\mathsf{K})\wedge(y\in\mathsf{L})\}$.

Jestliže $\mathsf{K}=\mathsf{L}$, nazýváme kartézský součin $\mathsf{K}\times\mathsf{K}$ (druhou) kartézskou mocninou množiny K a značíme ji K^2.

Definice

Každou podmnožinu U kartézského součinu $\mathsf{A}\times\mathsf{B}$ nazýváme binární relací z množiny A do množiny B, zapisujeme $\mathsf{U}\subset\mathsf{A}\times\mathsf{B}$.

Pokud chceme určit kartézský součin výčtem prvků, vytváříme systematicky všechny uspořádané dvojice. U konečných množin K, L si snadno ověříme, zda máme všechny prvky kartézského součinu, protože počet prvků $\mathsf{K}\times\mathsf{L}$ je roven součinu počtu prvků množiny K a počtu prvků množiny L.

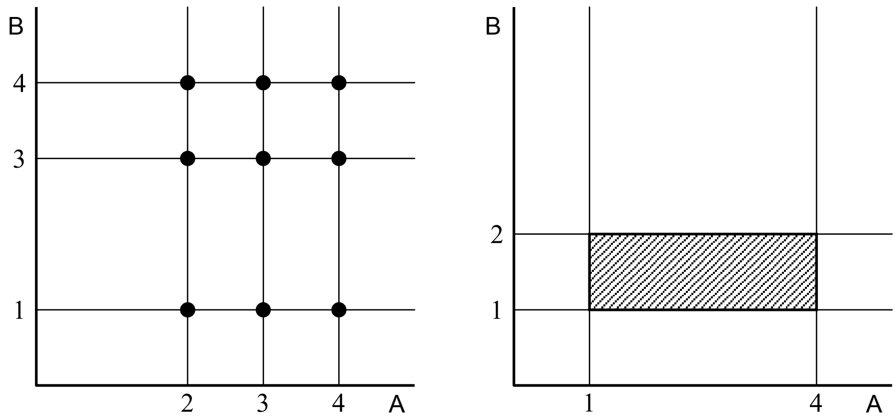
Ukážeme si několik jednoduchých příkladů (Tab. 4).

Tab. 4: Příklady kartézského součinu dvou množin.

K	L	$\mathsf{K}\times\mathsf{L}$	$\mathsf{L}\times\mathsf{K}$
$\{a, 2\}$	$\{b, 2\}$	$\{[a, b], [a, 2], [2, b], [2, 2]\}$	$\{[b, a], [b, 2], [2, a], [2, 2]\}$
$\{3, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{[3, 3], [3, 4], [4, 3], [4, 4]\}$	$\{[3, 3], [3, 4], [4, 3], [4, 4]\}$
$\{a, b, c\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [a, 4], [b, 1], [b, 2], [b, 3], [b, 4], [c, 1], [c, 2], [c, 3], [c, 4]\}$	$\{[1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c], [3, a], [3, b], [3, c], [4, a], [4, b], [4, c]\}$

I z těchto jednoduchých příkladů je vidět, že množiny $\mathsf{K} \times \mathsf{L}$ a $\mathsf{L} \times \mathsf{K}$ jsou různé, pokud se K, L liší.

Kartézský součin dvou množin si můžeme zakreslit více způsoby. Nejčastěji se asi využívá kartézské soustavy souřadnic. Na Obr. 53 (vlevo) je znázorněn kartézský součin množin $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, kde $\mathsf{A} = \{2,3,4\}$ a $\mathsf{B} = \{1,3,4\}$. Zvolíme si dvě kolmé přímky (např. vodorovnou a svislou), a pak na vodorovné přímce znázorníme prvky množiny A, na svislé prvky množiny B. Každým vyznačeným bodem vedeme kolmici k přímce, na které leží, a vyznačíme průsečíky všech takto sestrojených kolmic.



Obr. 53: Znázornění kartézského součinu v kartézské soustavě souřadnic.

Vzhled grafu kartézského součinu se mění podle toho, jak znázorníme množiny A, B. Pokud jsou to konečné množiny, pak jsou grafem izolované body na pomocných přímkách (bodová síť). Jsou-li množiny A, B intervaly, je obraz $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ plošný útvar (obdélník, pás apod.), např. $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, kde $\mathsf{A} = \langle 1;4 \rangle$ a $\mathsf{B} = \langle 1;2 \rangle$ (Obr. 53 vpravo).

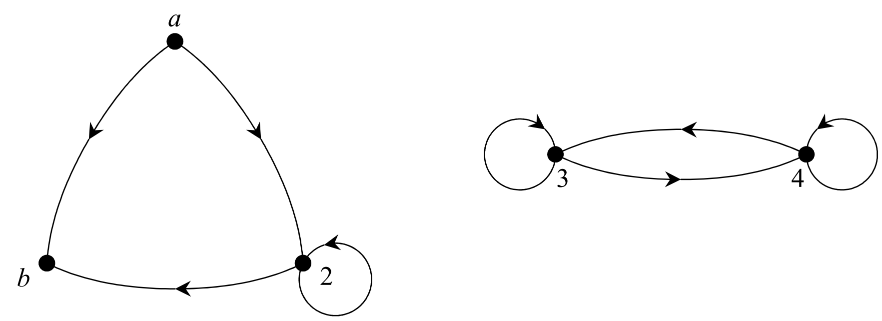
Popsaným způsobem zobrazujeme i kartézské součiny množin, jejichž prvky nejsou čísla. Příkladem může být množina studentů $\mathsf{A} = \{\text{Adam, Petr, Karel, Michal}\}$ a množina sportů $\mathsf{B} = \{\text{fotbal, hokej, běh}\}$. Množinu A znázorníme pomocí čtyř bodů na vodorovné přímce, množinu B znázorníme pomocí tří bodů na svislé přímce. Body označíme např. počátečními písmeny jmen a sportů a rozmístíme je na příslušné přímky zcela libovolně. Pouze je nutné každým dvěma různým prvkům přiřadit na příslušné přímce dva různé body. Obrazem kartézského součinu je opět bodová síť.

Zobrazujeme-li kartézský součin $\mathsf{A} \times \mathsf{A}$, znázorňujeme danou množinu A na obě kolmé přímky. Je výhodné sestrojit oba obrazy množiny A souměrně podle osy souměrnosti (osa I. a III. kvadrantu). Potom obrazy uspořádaných dvojic $[x,x]$ leží právě na této ose souměrnosti a obrazy uspořádaných dvojic $[x,y]$ $[y,x]$ jsou podle ní souměrně položeny. Takové grafy nazýváme symetrické kartézské grafy $\mathsf{A} \times \mathsf{A}$.

8.2 Uzlový graf

Další možný způsob znázornění kartézského součinu dvou množin je uzlový graf. Je výhodný pro konečné množiny s malým počtem prvků.

Jako příklad můžeme zvolit množiny z prvního řádku Tab. 4. Tedy $\mathsf{A}=\{a,2\}$ a $\mathsf{B}=\{b,2\}$. Utvoříme sjednocení $\mathsf{A}\cup\mathsf{B}=\{a,b,2\}$ a každý jeho prvek znázorníme jako kolečko – uzel grafu. Takže nezobrazujeme každou množinu zvlášť, což jsme u předchozích typů dělali. Každou uspořádanou dvojici $[x,y]$ z kartézského součinu $\mathsf{A}\times\mathsf{B}$ znázorníme jednoduchým obloučkem se šipkou mířící od uzlu x k uzlu y (Obr. 54 vlevo). Spojnice mezi uzly nazýváme orientované hrany grafu. Spojnice mezi uzly děláme co nejjednodušší. Je-li $x\in\mathsf{A}$, $y\in\mathsf{B}$ a $x=y$, zakreslujeme hranu vycházející z jednoho uzlu a končící u téhož uzlu tzv. smyčkou. Na smyčce můžeme šipku orientovat libovolným směrem, na ostatních hranách grafu musíme dodržovat směr šipky od počátečního uzlu ke koncovému. Pokud jsou prvky kartézského součinu obě uspořádané dvojice $[x,y]$, $[y,x]$, musíme každou z nich znázornit jednou hranou, případně na jednu hranu, ale se dvěma opačnými šipkami. Na Obr. 54 (vpravo) je znázorněn uzlový graf kartézského součinu $\mathsf{A}\times\mathsf{B}$ pro množiny $\mathsf{A}=\{3,4\}$ a $\mathsf{B}=\{3,4\}$.



Obr. 54: Znázornění kartézského součinu v uzlovém grafu.

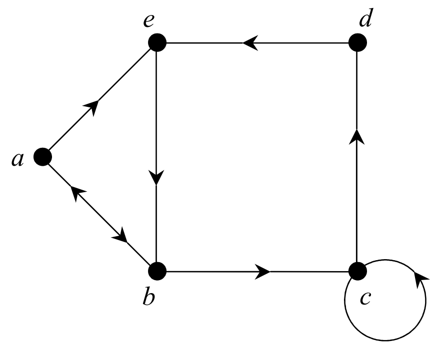
Nyní si v tabulce přehledně shrneme možnosti grafického znázornění kartézského součinu (Tab. 5).

Tab. 5: Shrnutí grafického znázornění kartézského součinu

Typ grafu	Znázornění prvku množin A, B	Znázornění prvku množiny $\mathsf{A}\times\mathsf{B}$
kartézský	bod na příslušné přímce	bod v rovině
uzlový	kroužek (uzel)	oblouk se šipkou (orientovaná hrana)

8.3 Cesty v uzlových grafech

Podívejme se podrobněji na cesty v uzlových grafech. Při sestrojování uzlových grafů postupujeme hranu po hraně. Je-li dán uzlový graf některé binární relace, který obsahuje alespoň jednu hranu, můžeme vytvářet zvláštní „smíšené“ posloupnosti uzlů a hran, ve kterých se uzly a hrany pravidelně střídají. Jde o posloupnosti, které popisují určité procházky po grafu z uzlu do uzlu po hranách, ale vždy jen ve směru šipky. Hrany s jednou šipkou představují „jednosměrky“ a hrany s dvěma šipkami obousměrné ulice. V uzlovém grafu na Obr. 55 můžeme například cestovat po takovéto cestě: $a, \overrightarrow{ae}, e, \overrightarrow{eb}, b, \overrightarrow{bc}, c, \overrightarrow{cc}, c$.



Obr. 55: Obecný uzlový graf binární relace.

Příklad 8.3a

Převozník má převézt přes řeku kozu, vlka a hlávku zelí, se kterými je na jednom břehu. Problém tkví v tom, že loďka uveze kromě převozníka již jen jednoho „cestujícího“ a koza i vlk mají hlad, takže na jednom břehu řeky nesmí zůstat bez převozníka vlk s kozou ani koza se zelím. Určete nejrychlejší způsob, jakým může převozník všechny tři převézt na druhý břeh?

Řešení

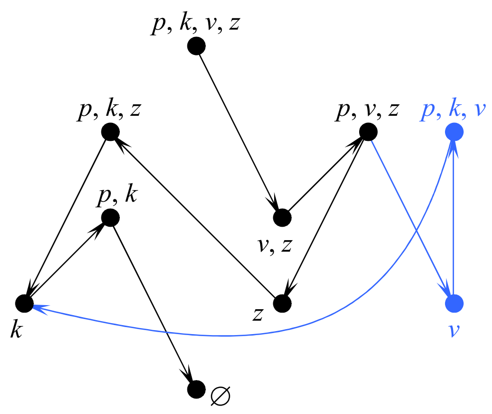
Převozníka, kozu, vlka a zelí si po řadě označíme písmeny p, k, v, z. Pracujeme se čtyřprvkovou množinou $\mathsf{V} = \{p, k, v, z\}$, která je během přepravy rozdělována na dvě disjunktní části „cestujících“ na různých březích. Každá možnost rozdělení, která může nastat, je vyjádřena jako jedna z podmnožin $\mathsf{K} \subset \mathsf{V}$ a $\mathsf{K}' \subset \mathsf{V}$. Vypíšeme si všechny možnosti, které mohou nastat na levém a pravém břehu (Tab. 6).

Některé z těchto možností jsou nepřípustné, protože odporují zadání (v tabulce podbarveny červeně). V těchto případech nelze vytvářet ani doplňkové části (podbarveny zeleně). Na prvním břehu připadají v úvahu pouze sestavy vyjádřené množinami: $\{p,k,v,z\}$, $\{p,k,z\}$, $\{p,v,z\}$, $\{p,k,v\}$, $\{p,k\}$, $\{v,z\}$, $\{z\}$, $\{k\}$, $\{v\}$, $\varnothing$.

Tab. 6: Výpis podmnožin množiny V z příkladu 8.3a a jejich doplňků

K	K′	K	K′
$\{p,k,v,z\}$	$\varnothing$	$\{k,v,z\}$	$\{p\}$
$\{p,k,z\}$	$\{v\}$	$\{p,k\}$	$\{v,z\}$
$\{p,v,z\}$	$\{k\}$	$\{p,v\}$	$\{k,z\}$
$\{p,k,v\}$	$\{z\}$	$\{p,z\}$	$\{v,k\}$

Výchozí stav na jednom břehu (např. levém) je $\{p,k,v,z\}$ a cílový je $\varnothing$. Množinu všech povolených stavů označíme M. Na této množině můžeme definovat binární relaci R: „od stavu x chceme přejít ke stavu y jedinou cestou loďky“ a zakreslíme její graf. Jeden uzel bude odpovídat vždy jednomu stavu na levém břehu. Je výhodné seřadit je tak, aby uzly se stejným počtem prvků byly vedle sebe. Hrany grafu kreslíme tak, abychom nevynechali žádnou možnost přechodu od jednoho stavu ke druhému. Na hotovém grafu (Obr. 56) pak hledáme cestu od uzlu $\{p,k,v,z\}$ k uzlu $\varnothing$.



Obr. 56: Řešení příkladu 8.3a zakreslené v uzlovém grafu.

Na obrázku je vidět, že existují dvě možné cesty, jak převézt všechny cestující na druhý břeh. V obou případech musí jet převozník přes řeku sedmkrát. První cesta je znázorněna černou spojnicí uzlů. Druhá cesta má s tou první společný začátek, dělí se v uzlu $\{p,v,z\}$, druhá pak pokračuje po modré čáře a naváže se na první cestu v uzlu $\{k\}$ a pokračuje s ní společně do koncového uzlu $\varnothing$.

Vyjádříme cestu běžnou řečí: Na začátku jsou na břehu všichni $\{p,k,v,z\}$. Nejprve převeze převozník kozu $\{v,z\}$, vrátí se sám $\{p,v,z\}$, převeze vlka $\{z\}$, vrátí se s kozou $\{p,k,z\}$, převeze zelí $\{z\}$, vrátí se sám $\{p,k\}$ a na závěr převeze kozu $\varnothing$.

Pozn.: Příklad lze řešit také úvahou nebo metodou „pokus – omyl“.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s různými typy diagramů a ukázat jejich možné použití při řešení úloh středoškolské matematiky. V práci jsou soustředěny pouze metody řešení matematických úloh, které využívají grafická znázornění vhodná pro daný typ úloh na úrovni střední školy. Zakreslení problému do diagramu může některým studentům vyhovovat více než metody, v nichž se problém řeší teoretickou cestou bez nákresu, např. tabulkou pravdivostních hodnot v úlohách z logiky nebo úvahou ve snadnějších množinových slovních úlohách.

Výroková logika a teorie množin jsou části matematiky, které se ve výuce nedostává tolik prostoru jako ostatním partiím. Vzhledem k tomu, že prolínají celou středoškolskou matematiku a je to jeden ze základních kamenů matematiky, je důležité, aby studenti toto téma pochopili a naučili se v něm základní matematická pravidla zápisu a logického myšlení.

Středoškolské učebnice, které jsou v tuto chvíli dostupné na trhu, řešení příkladů pomocí diagramů nerozvíjí a preferují jiné cesty k dosažení výsledku. Sporadicky nabízejí pouze Vennův diagram, a to pro řešení úzkého okruhu příkladů. V logických úlohách dávají tvůrci učebnic přednost tabulce pravdivostních hodnot. Je škoda, že ostatní diagramy zůstávají v pozadí a nevyužity, zvláště je-li jejich úkolem ukázat, že i matematika se dá snadno znázornit, a tak trochu „zlidštit". Současný stav českých učebnic matematiky shledávám proto v tomto ohledu za nedostačující. Autorům mohou být příkladem německé učebnice, které diagramy využívají hojněji, a to k řešení většího počtu rozmanitých úloh.

Diagramy skrývají velký potenciál využití, který je dnes na školách opomíjen. Existuje mnoho typů diagramů, se kterými se žáci nemají možnost seznámit ani na střední škole. Doufám, že má práce pomůže učitelům i žákům lépe se v této oblasti orientovat a odhalí jim krásu, kterou v sobě diagramy skrývají.

Seznam použité literatury

[1] GAJTANSKA, Milada, KOSMÁK, Ladislav. *Diagramy v matematike*. 1. vyd. Zvolen: MATCENTRUM, 1995. 86 s. ISBN 80-967315-1-3.

[2] ODVÁRKO, Oldřich, FOŘT, Jaroslav, NOVÁK, Břetislav. *Matematika pro gymnázia. Sešit 3, Učebnice pro 2. ročník gymnázia.* 3. vyd. Praha: SPN, 1982. 265 s.

[3] SÝKORA, Václav, ODVÁRKO, Oldřich, SMIDA, Jozef. *Matematika pro gymnázia. Sešit 6, část 2.* 1. vyd. Praha: SPN, 1980. 126 s.

[4] ŠEDIVÝ, Jaroslav. *O modernizaci školské matematiky.* 1. vyd. Praha: SPN, 1969. 254 s.

[5] NIEDERMAN, Derrick. *101 hádanek pro náročné: pro mládež a dospělé.* 1. vyd. Praha: Portál, 2006. 95 s. ISBN 80-7367-065-8.

[6] CARROLL, Lewis. *Logika hrou*. Z angl orig. přel. P. Lánský. 1. vyd. Praha: Pressfoto, 1972. 99 s.

[7] MANDELL, Muriel. *Logické hádanky a jak je řešit*. Z anglického originálu přeložil Stanislav Mihulka. 1. vyd. Praha: Portál, 2000. 131 s. ISBN 80-7178-502-4.

[8] CALDA, Emil. *Sbírka řešených úloh: Středoškolská matematika pod mikro-skopem.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. 131 s.

[9] ŠEDIVÝ, Jaroslav, et al. *Metody řešení matematických úloh. 2. část.* 1. vyd. Praha: SPN, 1978. 188 s.

[10] BUŠEK, Ivan, BOČEK, Leo, CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia. Zá-kladní poznatky z matematiky.* 2. vyd. Praha: Prometheus, 1994. 165 s. ISBN 80-85849-34-8

[11] CALDA, Emil, DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 2. vyd. Praha: Prometheus, 1994. 161 s. ISBN 80-85849-10-0

[12] GRIESEL, Heinz., POSTEL, Helmut. *Mathematik heute – Gymnasium. Schul-jahr 10.* Hannover: Schroedel-Schulbuchverl., 1989. 240 s. ISBN 3-507-83410-3

[13] STOYE, Werner. *Mathematik plus: Gymnasium Klasse 10.* Berlin: Volk und Wissen Verlag GmbH & Co, 2002.

[14] STOYE, Werner. *Mathematik plus: Gymnasium Klasse 7.* Berlin: Volk und Wissen Verlag GmbH & Co, 2001.