Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Michaela Švecová

Klasické úlohy řecké matematiky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Studijní program: matematika,
učitelství matematiky - informatiky pro SŠ

2009

Chtěla bych na tomto místě poděkovat zejména svému vedoucímu práce doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc. za cenné rady, připomínky a ochotnou pomoc při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 17. 4. 2009 Bc. Michaela Švecová

Obsah

Název práce: Klasické úlohy řecké matematiky
Autor: Bc. Michaela Švecová
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
e-mail vedoucího: jindrich.becvar@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá pěti klasickými úlohami řecké matematiky. Jedná se o kvadraturu kruhu, zdvojení krychle, trisekci úhlu, rektifikaci kružnice a konstrukci pravidelných n-úhelníků. Jsou zde uvedeny důkazy neřešitelnosti těchto úloh. Dále je věnována pozornost různým snahám o jejich vyřešení. Jedná se jednak o přesné postupy, které porušují pravidla pro eukleidovské konstrukce, používají speciální pomůcky, křivky apod., jednak o nepřesná řešení, která lze sestrojit pravítkem a kružítkem. V neposlední řadě jsou zde uvedeny české příspěvky k dané tématice.

Klíčová slova: kvadratura kruhu, zdvojení krychle, trisekce úhlu, eukleidovské konstrukce.

Title: Classical Problems of Ancient Greek Mathematicians
Author: Bc. Michaela Švecová
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Supervisor's e-mail address: jindrich.becvar@mff.cuni.cz

Abstract: This diploma thesis deals with five classical problems of ancient Greek mathematics. It is circle squaring, cube duplication, angle trisection, circle rectification and regular polygons constructions. The proves of insolvability of these problems as well as various attempts to solve them are presented. These include, on one hand, exact techniques breaking the Euclidean constructions rules by using special tools, curves, etc., and, on the other hand, approximate methods using only compass and straightedge. Finally, several Czech contributions to the topic are mentioned.

Keywords: circle squaring, cube duplication, angle trisection, Euclidean constructions

Kapitola 1

Úvod

1.1 Zadání úloh

Tématem této diplomové práce je pět geometrických úloh, které bývají souhrnně označovány jako *klasické úlohy řecké matematiky.* Tyto úlohy byly zformulovány již v 5. století př. n. l. ve starověkém Řecku. Řada matematiků se je snažila řešit po více než dva tisíce let a jejich snahy přetrvaly až do 19. století, kdy byla dokázána jejich neřešitelnost.

Pod označením *klasické úlohy řecké matematiky* se skrývají následující problémy:

- kvadratura kruhu
- zdvojení krychle
- trisekce úhlu
- rektifikace kružnice
- konstrukce pravidelných n-úhelníků

Podívejme se nyní podrobněji, co tyto pojmy znamenají.

Kvadraturou kruhu rozumíme sestrojení čtverce o stejném obsahu jako má kružnice o libovolném pevně zvoleném poloměru.

Zdvojení krychle (někdy též označováno jako *duplikace krychle*, nebo *délská úloha*) představuje nalezení obecné konstrukce, pomocí níž k libovolné krychli sestrojíme hranu krychle o dvojnásobném objemu.

Trisekce úhlu znamená problém, kdy k libovolnému úhlu ($0° - 360°$) máme sestrojit úhel třetinové velikosti, tj. rozdělit původní úhel na tři stejné díly.

Rektifikace kružnice představuje převedení kružnice na úsečku, tedy sestrojení úsečky stejné délky jako má daná kružnice.

A konečně *konstrukce pravidelných n-úhelníků* neznamená nic jiného, než nalezení obecné konstrukce, podle níž by bylo možné pro libovolné přirozené n (pochopitelně $n > 2$) sestrojit pravidelný n-úhelník.

1.2 Požadovaná metoda řešení

Bylo požadováno, aby tyto úlohy byly řešeny geometricky pouze za pomoci pravítka a kružítka. Často se hovoří o tzv. *eukleidovských konstrukcích* (dále budeme pod pojmem *konstrukce pravítkem a kružítkem* rozumět právě tento způsob konstrukcí). V Eukleidových *Základech* jsou zásady pro takovéto konstrukce formulovány v tzv. postulátech (v překladu Františka Servíta [1]):

Úlohy prvotné.

1. *Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.*
2. *A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.*
3. *A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.*
4. *A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.*
5. *A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*

Co tedy jsou konstrukce pravítkem a kružítkem? Máme k dispozici libovolně dlouhé pravítko s jednou rovnou hranou, na které nejsou žádné značky, stupnice atd. Podle prvního postulátu je lze použít pouze tak, že vedeme přímku nějakými dvěma body, které máme předem dány. Nelze podle něj tedy dělat např. rovnoběžky[1]. Dále máme k dispozici kružítko s libovolně velkým „rozevřením“. Podle třetího postulátu je můžeme použít pouze v případě, že známe bod, který bude středem nové kružnice, a její poloměr. Poloměr je zde chápán v ryze geometrickém významu, tedy nikoliv jako číselná hodnota, ale jako vzdálenost dvou bodů.

[1]Rovnoběžky je možno snadno sestrojit i v souladu s pravidly pro eukleidovské konstrukce.

Navíc předpokládáme, že konstrukci lze provést naprosto přesně. V praxi je však třeba vzít v úvahu, že není možné rýsovat, aniž bychom se dopouštěli drobných nepřesností. Výsledná chyba vzniklá nepřesnostmi při konstrukci obvykle narůstá se zvyšujícím se počtem kroků konstrukce.

1.3 Motivace zavedení úloh

Jistě není od věci položit si otázku „Co vlastně vedlo ke vzniku právě těchto pěti úloh?“ K nalezení odpovědi se musíme podívat na historické souvislosti, na tehdejší vývoj matematiky. Jak je uvedeno v [3], po objevu nesouměřitelnosti úseček (5. stol. př. n. l.) dochází k tzv. první krizi matematiky. Řekové vidí východisko v přechodu od aritmetiky ke geometrii. Veličiny již nejsou chápány jako čísla, ale jako délky, obsahy a objemy, které jsou reprezentovány úsečkami, čtverci a krychlemi. Tento způsob nahlížení na matematiku bývá také označován jako *řecká geometrická algebra*. Operovat s těmito veličinami pak znamená provádět geometrickou konstrukci pravítkem a kružítkem.

Jednorozměrné veličiny, reprezentované úsečkami, je snadné sčítat a odčítat, stejně tak vytvářet jejich násobky nebo je dělit na libovolný počet částí. Problém nastává, chceme-li takto vyjádřit délku nějaké křivky. Základní a jistě i nejjednodušší takovýto objekt je kružnice. Vyjádření její délky pomocí úsečky pak ovšem není nic jiného než úloha o rektifikaci kružnice.

Dvojrozměrné veličiny jsou reprezentovány obsahy čtverců. I s nimi lze provádět základní operace. Pomocí Pythagorovy věty je můžeme sčítat i odčítat. Také je snadné libovolný n-úhelník převést na čtverec o stejném obsahu. Avšak opět narazíme u křivočarých útvarů. Převedení kruhu na rovnoplochý čtverec odpovídá úloze o kvadratuře kruhu.

U trojrozměrných veličin nastane problém hned při sčítání. Základní operace, tedy sečtení dvou jednotkových krychlí, je pak úlohou o zdvojení krychle.

Co se týká úhlů, je snadné je sčítat a odčítat, dokonce vytvářet jejich přirozené násobky. Dělit je lze bez problémů na polovinu. Avšak snaha o rozdělení úhlu na tři stejné části vedla ke zformulování úlohy o trisekci úhlu.

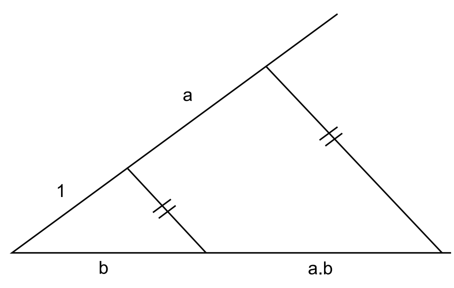
Kapitola 2

Konstrukce pravítkem a kružítkem

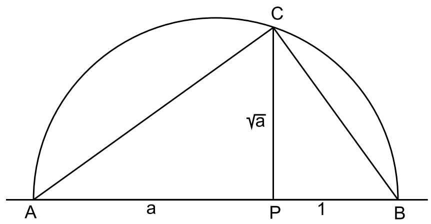
Jaké konstrukce je možné provést pravítkem a kružítkem? Konstrukce pravítkem a kružítkem znamená, že máme nějakou počáteční množinu bodů M_1, z nichž chceme sestrojit koncovou množinu bodů M_2 pouze pomocí konečného počtu sestrojení přímek a kružnic.

Připomeňme nejprve, že je třeba vždy zvolit jednotkovou úsečku. Délku libovolné úsečky můžeme vyjádřit jako a-násobek délky jednotkové úsečky, kde $a \in R$. Hovoříme pak o úsečce délky a.

Z daných délek lze sestrojit novou délku pomocí racionálních operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) a tvoření druhých odmocnin. Konstrukce jsou zřejmé z obrázků 2.1 a 2.2. Oba orázky znamenají, že při zvolené jednotce délky umíme k daným úsečkám délky a, b sestrojit úsečky délky $a \cdot b$ a $\sqrt{a}$.



Obrázek 2.1: Konstrukce úsečky délky $a \cdot b$



Obrázek 2.2: Konstrukce úsečky délky $\sqrt{a}$

Zaveďme kartézskou soustavu souřadnic. Předpokládejme pro jednoduchost, že body z výchozí množiny M_1 mají racionální souřadnice. Konstrukce pravítkem a kružítkem se skládá z následujících operací: Sestrojení přímky, sestrojení kružnice, nalezení průsečíku dvou přímek, přímky a kružnice a dvou kružnic.

Sestrojení přímky

Mějme dva body $P = [x_1, y_1]$ a $Q = [x_2, y_2]$. Přímka, která jimi prochází, má rovnici

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0,$$

neboli

$$ax + by + c = 0.$$

Protože množina racionálních čísel je uzavřená vzhledem ke sčítání, odčítání, násobení a dělení, jsou koeficienty a, b, c rovněž racionální čísla.

Sestrojení kružnice

Předpokládejme, že střed kružnice je v bodě $S = [m, n]$ a poloměr kružnice je vzdálenost dvou bodů, tedy číslo r, jehož druhá mocnina je racionální číslo.

Rovnice kružnice je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0,$$

tedy

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0,$$

neboli

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Stejně jako v předchozím případě jsou koeficienty a, b, c racionální čísla.

Průsečík dvou přímek

Mějme dvě přímky určené rovnicemi

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ px + qy + r &= 0. \end{aligned}$$

Jejich průsečík (pokud existuje) má tedy souřadnice

$$x = \frac{cp - ar}{aq - bp}, \; y = \frac{cq - br}{pb - aq}.$$

Je-li jmenovatel obou zlomků roven nule, znamená to, že přímky jsou rovnoběžné. V případě nenulových čitatelů nemají žádný společný bod, Jsou-li navíc i čitatelé obou zlomků rovny nule, znamená to, že přímky jsou totožné.

Stejně jako v předchozích případech, souřadnice nového bodu jsme získali z předchozích bodů pouze pomocí racionálních operací, jedná se tedy opět o racionální čísla.

Průsečík přímky a kružnice

Zde musíme řešit soustavu lineární a kvadratické rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ px + qy + r &= 0 \end{aligned}$$

Po vyjádření jedné neznámé z lineární rovnice a dosazení do kvadratické rovnice dostaneme kvadratickou rovnici o jedné neznámé s racionálními koeficienty. Její řešení (pokud existují) nemusí být racionální čísla, protože při výpočtu musíme použít druhou odmocninu. Vypočtené souřadnice uvažovaného průsečíu nemusí být racionlní čísla.

Průsečík dvou kružnic

Zde musíme dokonce řešit soustavu dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ x^2 + y^2 + px + qy + r &= 0 \end{aligned}$$

K jejímu vyřešení je opět kromě racionálních operací potřeba druhá odmocnina z racionálního výrazu. Může tak opět dojít k rozšíření původní množiny racionálních čísel o nová čísla.

Z předchozího textu tedy vyplývá, že konstrukce pravítkem a kružítkem je možná pouze v případě, že lze souřadnice bodů výsledné množiny M_2 vyjádřit ze souřadnic bodů výchozí množiny M_1 pomocí racionálních operací a druhých odmocnin.

Kapitola 3

Neřešitelnost úloh

Všechny zmiňované úlohy jsou pravítkem a kružítkem v plné obecnosti neřešitelné. Jejich neřešitelnost byla dokázána až v devatenáctém století, tedy více než po dvou tisíciletích od jejich vzniku.

Pro pochopení následujících důkazů jsou zapotřebí některé znalosti z algebry, které je možné získat např. v [4].

Věta 1.

Každý bod, jehož souřadnice lze vypočítat ze souřadnic daných bodů pomocí racionálních operací a výpočtu 2. odmocnin v konečném počtu, lze z těchto bodů eukleidovsky sestrojit.

Věta 2. Eisensteinovo kritérium ireducibility

Budiž p prvočíslo. Polynom n-tého stupně, $n > 1$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

jehož koeficienty jsou celá čísla a pro nějž platí

$$p \nmid a_n, \quad p | a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad p^2 \nmid a_0$$

je ireducibilní polynom nad tělesem racionálních čísel Q.

Věta 3.

Nechť je dáno r úseček o délkách $a_1, a_2, \dots, a_r$. Budiž T těleso, které vznikne z tělesa racionálních čísel Q adjunkcí čísel $a_1, a_2, \dots, a_r$. Budiž β číslo, které je kořenem rovnice

$$\zeta^n + b_1\zeta^{n-1} + \dots + b_{n-1}\zeta + b_n = 0$$

s koeficienty v T a ireducibilní nad T. Aby se úsečka o délce β dala sestrojit, k tomu je nutné, aby stupeň předcházející rovnice byla mocnina čísla 2, tedy $n = 2^l$.

A nyní již přejdeme k samotným důkazům.

3.1 Důkaz neřešitelnosti trisekce úhlu

Důkaz je v této podobě uveden v [4].

Nechť je dán v rovině úhel u. Chceme k němu sestrojit úhel třetinové velikosti, tj. takový úhel, jehož velikost oblouku je třetina velikosti oblouku původního úhlu. V rovině zvolíme pravoúhlou soustavu souřadnic tak, že počátek O zvolíme ve vrcholu úhlu a za osu x jedno jeho rameno. Pak úhel u je dán třemi body o souřadnicích $[0,0], [1,0], [\cos u, \sin u]$. Rozdělit tento úhel na tři díly znamená sestrojit bod $[\cos 1/3u, \sin 1/3u]$. Protože pro každé u platí $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, dá se podle *Věty 1* vždy eukleidovsky sestrojit úsečka o délce $\sin u$, je-li dána úsečka o délce $\cos u$. Stačí tedy hledat konstrukci úsečky o délce $\cos 1/3u$, je-li dána úsečka o délce $\cos u$. Vzorec pro $\cos 3u$ uvedený např. v [5] jednoduše upravíme na tvar

$$4\cos^3\frac{u}{3} - 3\cos\frac{u}{3} = \cos u.$$

Položíme-li $\cos u = a$, kde a je dané číslo, $-1 \leq a \leq 1$, a $\cos 1/3u = \zeta$, dostaneme rovnici:

$$4\zeta^3 - 3\zeta - a = 0,$$

kterou je třeba vyšetřovat nad tělesem $Q(a)$.

Je zřejmé, že pro některá celá čísla a je tato rovnice nad $Q(a)$ reducibilní. To znamená, že pro některé konkrétní hodnoty třetinu úhlu umíme sestrojit. Například pro $a = -1$ máme rozklad

$$4\zeta^3 - 3\zeta + 1 = (\zeta + 1)(2\zeta - 1)^2$$

a pro $a = 0$ rozklad

$$4\zeta^3 - 3\zeta = \zeta(4\zeta^2 - 3).$$

První případ znamená, že lze sestrojit úhel $1/3\pi$, druhý případ znamená, že lze sestrojit úhel $1/6\pi$. My však máme zjistit, zda eukleidovská konstrukce existuje pro libovolný úhel u. Ukážeme, že existují dokonce úhly u s racionálním $\cos u$, pro něž to učinit nelze. Například pro $a = \cos u = 3/4$ dostáváme rovnici

$$16\zeta^3 - 12\zeta - 3 = 0.$$

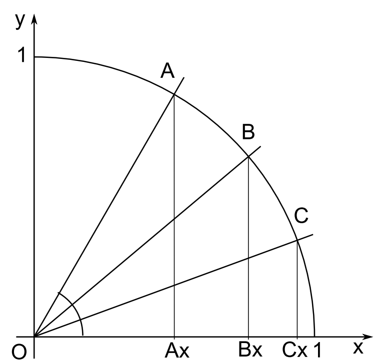
Tato rovnice je nad $Q(3/4) = Q$ ireducibilní podle *Věty 2*. Konstrukce není tedy podle *Věty 3* eukleidovsky proveditelná.

Pro lepší porozumění si ještě ukážeme nemožnost eukleidovské konstrukce pro konkrétní případ, a to pro úhel velikosti 60°.

V kartézské soustavě souřadnic je úhel velikosti 60° zadán třemi body o souřadnicích $[0, 0], [1, 0], [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, třetí z nich označíme písmenem A.

Uvažujme ještě bod $A_x = [\frac{1}{2}, 0]$. Je zřejmé, že známe-li bod A, můžeme sestrojit bod A_x a naopak z bodu A_x bod A. Díky tomu můžeme za výchozí těleso vzít těleso racionálních čísel Q.

Chceme sestrojit bod B (viz obr. 3.1). Stejně jako v případě bodu A stačí sestrojit jeho x-ovou souřadnici.



Obrázek 3.1: Neřešitelnost trisekce úhlu

Podle stejného vzorce jako v předchozím důkazu platí:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Tedy v našem případě:

$$\frac{1}{2} - 4\cos^3 20^\circ + 3\cos 20^\circ = 0,$$

tj. pro $x = \cos 20^\circ$

$$\frac{1}{2} - 4x^3 + 3x = 0,$$

neboli

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Polynom $8x^3 - 6x - 1$ je nad Q nerozložitelný. Pokud by měl nějaký kořen z Q, musel by tento kořen být nutně z množiny $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\}$[1]. Prostým dosazením všech osmi čísel zjistíme, že ani jedno z nich není kořenem uvažovaného polynomu.

Stupeň polynomu je 3, což není mocnina čísla 2. Podle *Věty 3* není úsečka délky $\cos 20^\circ$ konstruovatelná.

3.2 Důkaz neřešitelnosti zdvojení krychle

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že původní krychle má hranu délky 1. K nalezení krychle o dvojnásobném objemu stačí sestrojit její hranu, tedy úsečku o délce $\sqrt[3]{2}$.

Číslo $\sqrt[3]{2}$ je kořenem polynomu $x^3 - 2$. Pokud by tento polynom byl reducibilní nad Q, měl by alespoň jeden racionální kořen. Tento kořen by musel být z množiny $\{2, 1, -2, -1\}$. Po dosazení všech čtyř možností zjistíme, že ani jedno z těchto čísel nevyhovuje, tedy polynom $x^3 - 2$ je nad tělesem racionálních čísel ireducibilní.

Protože stupeň tohoto polynomu je 3, což není mocnina čísla 2, není podle *Věty 3* úsečka o délce $\sqrt[3]{2}$ eukleidovsky sestrojitelná.

[1] Tentokrát využijeme následující elementární tvrzení: Je-li p/q kořenem polynomu s celočíselnými koeficieny, pak p dělí jeho absolutní člen a q dělí jeho vedoucí koeficient.

3.3 Neřešitelnost rektifikace kružnice a kvadratury kruhu

Důkazy obou úloh jsou založeny na poznatku, že číslo π je transcendentní [2], tj. že neexistuje polynom konečného stupně s racionálními koeficienty, jehož kořenem by bylo číslo π.

Máme dánu jednotkovou úsečku a zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby krajní body této úsečky měly souřadnice $[0,0]$ a $[1,0]$. Za výchozí těleso opět vezmeme těleso racionálních čísel Q.

Naším cílem je sestrojit úsečku o délce π, tedy bez újmy na obecnosti bod o souřadnicích $[\pi,0]$.

Předpokládejme, že existuje nadtěleso T_n takové, že obsahuje číslo π a stupeň rozšíření $[T_n : Q]$ je konečný. To by však znamenalo, že toto rozšíření je algebraické a tedy, že je algebraické i číslo π. Tím se ovšem dostáváme ke sporu, protože číslo π je, jak již bylo řečeno, transcendentní.

Důkaz neřešitelnosti kvadratury kruhu je analogický jako u úlohy rektifikace kružnice. Máme kruh o poloměru 1, tj. o obsahu π. Čtverec o témže obsahu nutně musí mít stranu o délce $\sqrt{\pi}$. Jak již bylo řečeno, číslo π je transcendentní. Tím spíš je pak transcendentní i jeho druhá odmocnina a eukleidovská konstrukce není možná.

3.4 Konstrukce pravidelných n-úhelníků

Některé n-úhelníky je možno pravítkem a kružítkem snadno zkonstruovat (např. $n = 3,4,6\ldots$). Otázkou je, zda lze takto zkonstruovat pravidelný n-úhelník pro libovolné přirozené číslo n.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) objevil postačující podmínku pro konstrukci pravidelného n-úhelníka. Že se jedná zároveň i o podmínku nutnou, dokázal až v roce 1837 francouzský matematik Pierre Wantzel (1814–1848).

Pravidelný n-úhelník lze sestrojit pravítkem a kružítkem právě tehdy, když číslo n je součin mocniny 2 a libovolného počtu různých Fermatových prvočísel.

[2]Důkaz transcendentnosti čísla π jako první publikoval Ferdinand von Lindemann (1852–1939) v roce 1882. Viz např. [7].

Fermatova prvočísla jsou prvočísla tvaru $F_n = 2^{2^n} + 1$, tedy:

$F_0 = 2^1 + 1 = 3$

$F_1 = 2^2 + 1 = 5$

$F_2 = 2^4 + 1 = 17$

$F_3 = 2^8 + 1 = 257$

$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$

Zatím neznáme žádná další. Jde o otevřený problém.

Podle předchozí věty je možné zkonstruovat n-úhelníky o následujících počtech vrcholů:

$4, 8, 16, 32, \dots$

$3, 6, 12, 24, 48, \dots$

$5, 10, 20, 40, 80, \dots$

$15, 30, 60, \dots$

$17, 34, 68, \dots$

$51, \dots$

$85, \dots$

$\dots$

n-úhelník o lichém počtu vrcholů lze tedy sestrojit právě tehdy, je-li počet jeho vrcholů součin nějakých Fermatových prvočísel. n-úhelník o dvojnásobném počtu vrcholů získáme tak, že sestrojíme osy středových úhlů určených dvěma sousedními vrcholy a středem kružnice opsané. Nové vrcholy $2n$-úhleníku jsou průsečíky těchto os úhlů a kružnice opsané. Tento postup můžeme libovolněkrát opakovat, takže potom se počet vrcholů původního n-úhelníka zvýší čtyřikrát, osmkrát, šestnáctkrát, atd. Je tedy zřejmé, že umíme-li sestrojit pravidelný mnohoúhelník o n vrcholech, umíme také sestrojit mnohoúhelník o $n \cdot 2^k$ vrcholech pro každé přirozené číslo k.

Nemožnost konstrukce pravidelného sedmiúhelníka

Vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice můžeme získat jako řešení rovnice

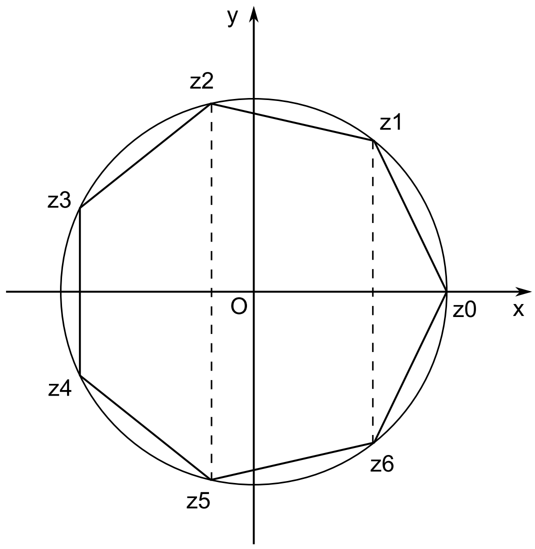
$$z^n - 1 = 0$$

v oboru komplexních čísel.

Vrcholům pravidelného sedmiúhelníka tedy odpovídá rovnice

$$z^7 - 1 = 0. \tag{3.1}$$

Řešení této rovnice a z něj plynoucí nemožnost konstrukce pravidelného sedmiúhelníka je částečně převzato z [6].



Obrázek 3.2: Řešení rovnice $z^7 - 1 = 0$

Zřejmě jedním kořenem rovnice 3.1 je číslo $z_0 = 1$. Dále platí:

$$z^7 - 1 = (z-1)\cdot\left(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right).$$

Proto dalšími kořeny rovnice 3.1 jsou kořeny rovnice

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \tag{3.2}$$

Tuto rovnici dále upravíme:

$$z^3\left(z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right) = 0 \tag{3.3}$$

$$z^3+\frac{1}{z^3}+z^2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}+1 = 0 \tag{3.4}$$

Jak je vidět z obrázku 3.2 všechna řešení leží na jednotkové kružnici. Platí:

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{z}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Tedy:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\varphi.$$

Zavedeme substituci

$$\cos\varphi=x,$$

kterou použijeme na rovnici 3.4. Dostaneme rovnici

$$8x^3+4x^2-4x-1=0. \tag{3.5}$$

V této rovnici neznámá x představuje reálné části komplexních čísel, která tvoří 6 zbývajících vrcholů 7-úhelníka.

Dokážeme, že tato rovnice nemá racionální kořen.

Pro její racionální kořen p/q musí platit, že $q|8$ a $p|1$, tedy

$$\frac{p}{q}\in\left\{\pm\frac{1}{8},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{2},\pm1\right\}.$$

Po dosazení zjistíme, že ani jedno z techto čísel není kořenem rovnice. Stupeň rovnice je 3, eukleidovská konstrukce tedy není možná.

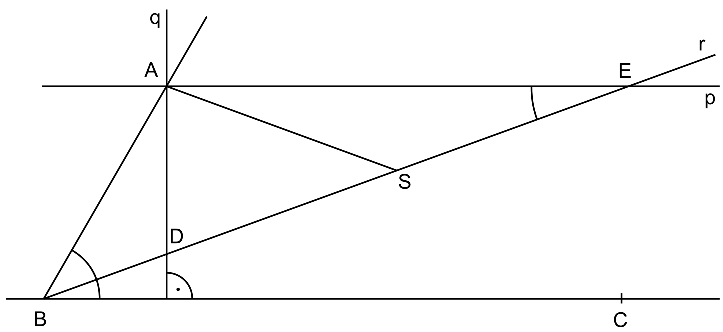
Kapitola 4

Řešení s pomocí speciálních pomůcek

4.1 Označené pravítko

Metoda vkládání

Tento postup byl nalezen v Řecku někdy v 5. či 4. století př. n. l. Používá pravítko se dvěma vyznačenými body, tedy v rozporu s pravidly pro eukleidovské konstrukce.



Obrázek 4.1: Metoda vkládání

Nechť je dán úhel $\angle ABC$, kde bod A je volen tak, aby délka $2|AB|$ byla rovna vzdálenosti vyznačených bodů na pravítku. Bodem A veďme rovnoběžku p s přímkou BC a kolmici q na přímku BC. Nyní přiložme pravítko tak, abychom podle něho mohli vést přímku r, která prochází bodem B a protíná přímky p, q v bodech E a D, jejichž vzdálenost je rovna vzdálenosti dvou vyznačených bodů na pravítku (nestandardní použití pravítka). Potom je $|\angle EBC|$ třetina $|\angle ABC|$ (více viz [8]).

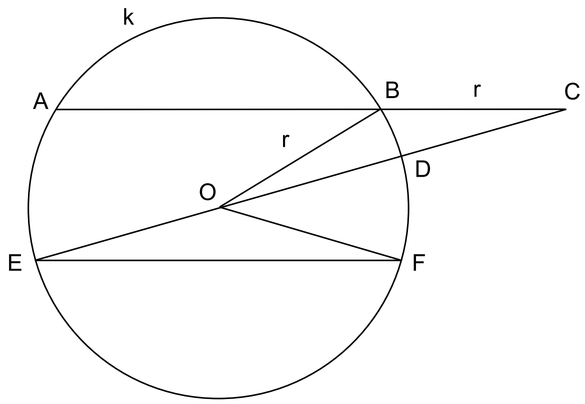
Důkaz

Sestrojme S střed úsečky DE. Protože $|SE| = |SA| = |BA|$, jsou trojúhelníky AES a BSA rovnoramenné, a proto je $|\angle AES| = |\angle EAS|$ a $|\angle ABS| = |\angle ASB|$. Protože je $\angle BSA$ vnějším úhlem trojúhelníka AES, je $|\angle BSA| = 2|\angle SEA|$. Dále si uvědomme, že úhly $\angle AES$ a $\angle SBC$ jsou střídavé. Platí tedy $2|\angle SBC| = |\angle SBA|$, tj. velikost úhlu $\angle SBC$ je třetinou velikosti úhlu $\angle ABC$.

Archimedova metoda

Obdobně jako v předchozím případě používá tato metoda pravítko se dvěma vyznačenými body.

Nechť AB je tětiva kružnice k se středem O a poloměrem r a nechť bod C ležící na polopřímce opačné k polopřímce BA má od bodu B vzdálenost r. Nechť dále polopřímka CO protíná kružnici k v bodech D a E. Potom délka oblouku AE je trojnásobkem délky oblouku BD ([9] str. 309–310).



Obrázek 4.2: Archimedova metoda

Důkaz

Sestrojme tětivu EF rovnoběžnou s AB a úsečky OB, OF. Protože jsou úhly při vrcholech E a F shodné, je

$$\begin{aligned} |\angle COF| &= 2|\angle OEF|, \\ 2|\angle OEF| &= 2|\angle BCO| \text{ díky rovnoběžnosti}, \\ 2|\angle BCO| &= 2|\angle BOD|, \text{ protože } |BC| = |BO|. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$|\angle BOF| = 3|BOD|,$$

takže oblouk BF má trojnásobnou délku než oblouk BD. Proto oblouk AE, který má stejnou velikost jako oblouk BF, má trojnásobnou délku než oblouk BD.

Toto tvrzení lze snadno využít k řešení problému trisekce. Chceme sestrojit třetinu úhlu AOE. Okolo bodu O opíšeme kružnici k o poloměru r, který je roven vzdálenosti dvou vyznačených bodů na pravítku. Přiložíme pravítko tak, aby procházelo bodem A, první vyznačený bod pravítka ležel na polopřímce opačné k OE a druhý vyznačený bod pravítka ležel na kružnici k. Průsečík takto sestrojené přímky s přímkou OE označíme C. Díky vyznačeným bodům na pravítku máme zajištěno, že přímka AC protíná kružnici k v bodě B, který má od bodu C vzdálenost r. Proto podle předchozího tvrzení je velikost úhlu $\angle BOC$ rovna jedné třetině velikosti úhlu $\angle AOE$.

4.2 Ohýbání papíru

Některé z úloh je také možné vyřešit za pomoci skládání papíru. Jak uvádí [10], *existuje mnoho spletitých skládacích manévrů a vymezit jejich sílu seznamem několika axiomů je záležitost velmi ošemetná. Zatím nejmocnější množinu axiomů origami formuloval italsko-japonský matematik Humiaki Huzita ve svém článku „Chápání geometrie skrze axiomy origami“.*

O1 Jsou-li dány dva body B_1 a B_2, můžeme složit hranu tak, aby jimi procházela.

O2 Jsou-li dány dva body B_1 a B_2, můžeme složit hranu tak, aby bod B_1 ležel na bodě B_2.

O3 Jsou-li dány dvě přímky (hrany) p_1 a p_2, můžeme složit hranu tak, aby přímka p_1 ležela na přímce p_2.

O4 Je-li dán bod B_1 a přímka p_1, můžeme složit hranu, která je kolmá k p_1 a zároveň prochází bodem B_1.

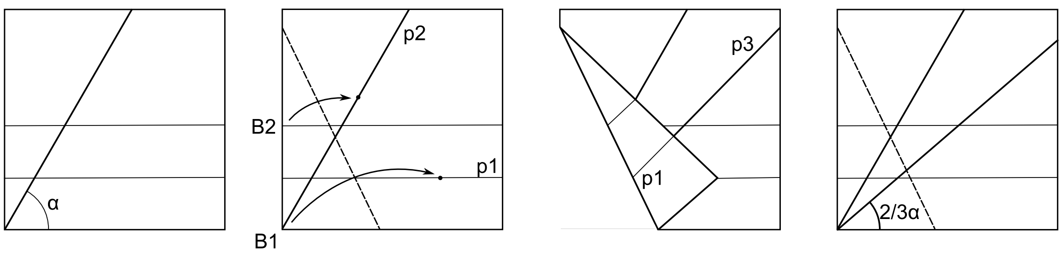
O5 Jsou-li dány dva body B_1, B_2 a přímka p_1, můžeme složit hranu tak, aby bod B_1 ležel na přímce p_1 a zároveň tato hrana procházela bodem B_2.

O6 Jsou-li dány dva body B_1, B_2 a dvě přímky p_1, p_2, můžeme složit hranu tak, aby bod B_1 ležel na přímce p_1 a zároveň bod B_2 ležel na přímce p_2.

Zatímco operace popsané axiomy O1–O5 lze provést pomocí konstrukce pravítkem a kružítkem, axiom O6 odpovídá řešení rovnice třetího stupně. S jeho pomocí lze pak vyřešit úlohy trisekce úhlu a kvadratury kruhu.

Trisekce úhlu

Tato metoda bývá také někdy označována jako Abeho trisekce podle jejího autora H. Abeho.



Obrázek 4.3: Abeho trisekce

Nechť má dělený úhel α vrchol v levém dolním rohu. Vytvořme dvě rovnoběžné ekvidistantní vodorovné hrany na spodní straně (viz obr. 4.3).

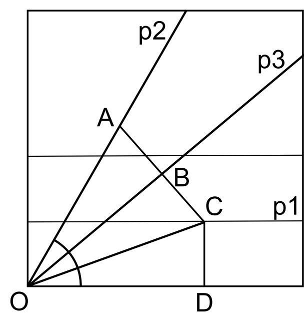
Aplikujme axiom O6: přeložme bod B_1 na hranu p_1 a bod B_2 na hranu p_2.

Nyní znovu přeložme hranu p_1 v její nové pozici – prodlužme ji nahoru. Vznikne nová hrana p_3. Rozložme hranu z předchozího kroku a prodlužme hranu p_3 dolů (měla by protnout levý dolní roh).

Dostáváme úhel $2/3\alpha$.

Důkaz

Trojúhelníky $\triangle OBA$ a $\triangle OBC$ na obrázku 4.4 jsou shodné. Oba jsou pravoúhlé, jednu odvěsnu mají společnou a druhé jejich odvěsny jsou stejně dlouhé (toto plyne z konstrukce bodů A a C). Tedy úhly $\angle BOA$ a $\angle BOC$ mají stejnou velikost. Stejně tak jsou shodné trojúhelníky $\triangle OBC$ a $\triangle ODC$. Tedy opět jsou stejně velké úhly $\angle BOC$ a $\angle DOC$. Z toho plyne, že každý z těchto tří úhlů má velikost 1/3 velikosti původního úhlu α.

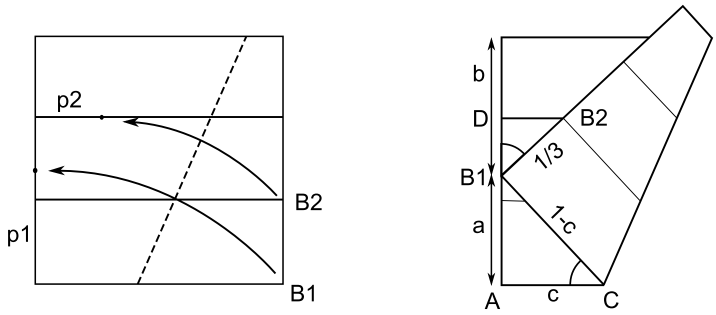


Obrázek 4.4: Důkaz Abeho trisekce

Zdvojení krychle

Opět využijeme axiomu O6, který odpovídá řešení kubické rovnice.

Výchozí čtverec rozdělíme na třetiny. Nechť jsou dány body B_1, B_2 a hrany p_1, p_2 podle obrázku 4.5. Vytvoříme novou hranu podle axiomu O6. Označme délky b a a jako části hrany p_1 rozdělené přeneseným bodem B_1. Pak poměr b/a dává hledané číslo, třetí odmocninu ze dvou.



Obrázek 4.5: Zdvojení krychle

Důkaz

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že výchozí čtverec má stranu délky 1. Můžeme tedy délku b vyjádřit jako $1 - a$ a dokazovat, že

$$\frac{1-a}{a} = \sqrt[3]{2},$$

neboli

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}. \tag{4.1}$$

Body A, C, D označíme podle obrázku 4.5. Trojúhelníky $\triangle ACB_1$ a $\triangle DB_1B_2$ jsou podobné, úhel při vrcholu C v trojúhelníku $\triangle ACB_1$ odpovídá úhlu při vrcholu B_1 v trojúhelníku $\triangle DB_1B_2$; označme jej α.

Protože $|B_1B_2| = \frac{1}{3}$, platí

$$|B_1D| = \frac{1}{3}\cos\alpha,$$

a dále

$$a + \frac{1}{3}\cos\alpha = \frac{2}{3}. \tag{4.2}$$

Hodnotu $\cos\alpha$ můžeme také vyjádřit z trojúhelníka $\triangle ACB_1$, tj.

$$\cos\alpha = \frac{c}{1-c},$$

a tento výraz dosadit do rovnice 4.2:

$$a + \frac{1}{3}\cdot\frac{c}{1-c} = \frac{2}{3}. \tag{4.3}$$

Z trojúhelníka $\triangle ACB_1$ dostaneme pomocí Pythagorovy věty

$$\begin{aligned}(1-c)^2 &= c^2 + a^2\\ c &= \frac{1-a^2}{2},\end{aligned}$$

což opět dosadíme do rovnice 4.3:

$$a + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1-a^2}{2}}{1-\frac{1-a^2}{2}} = \frac{2}{3} \tag{4.4}$$

$$3a + \frac{1-a^2}{1+a^2} = 2 \tag{4.5}$$

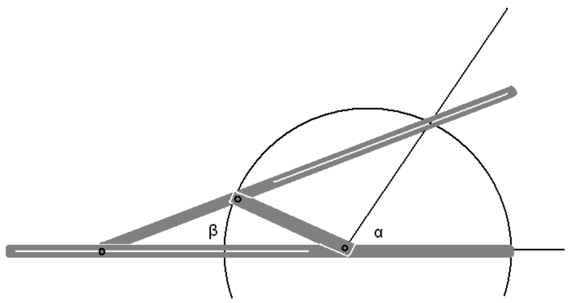
$$3a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0. \tag{4.6}$$

Po dosazení již snadno ověříme, že výraz 4.1 je skutečně řešením rovnice 4.6, což jsme chtěli dokázat.

4.3 Trisektory

Existuje celá řada speciálních nástrojů sloužících k dělení úhlu na tři stejné části. Tyto nástroje bývají souhrně označovány jako *trisektory*. Některé z nich jsou uvedeny také v kapitole 7 (str. 54 – 67).

Archimedův trisektor



Obrázek 4.6: Archimedův trisektor

Toto posuvné pravítko je jedním z neznámějších nástrojů pro trisekci úhlu. Bylo sestrojeno na základě Archimedovy metody trisekce (viz str. 22).

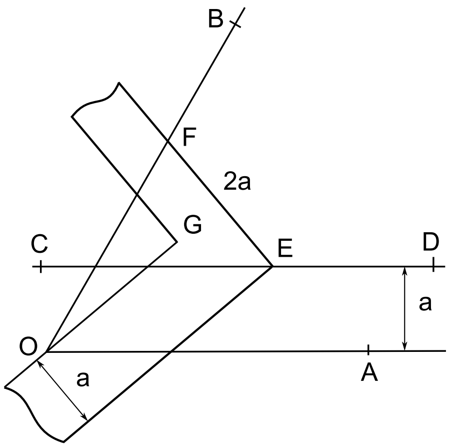
Skládá se ze tří pravítek spojených otočnými klouby. Drážka na spodním pravítku umožňuje posouvání horního pravítka do potřebné polohy, zatímco drážka na horním pravítku slouží k tomu, abychom viděli průsečík přímky s kružnicí a mohli pravítko přesně nastavit.

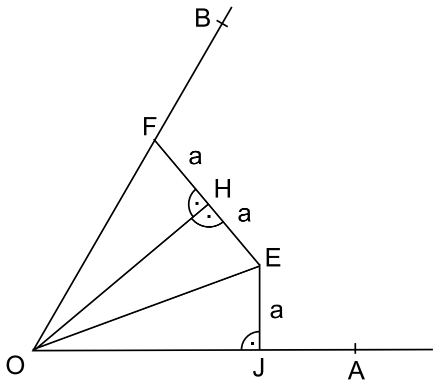
To, že s pomocí tohoto nástroje skutečně sestrojíme jednu třetinu daného úhlu, plyne z důkazu Archimedovy metody (viz str. 22).

Carpenterův příložník

Jednoduchá pomůcka, údajně z roku 1928, sloužící k sestrojení třetiny úhlu, je uvedena např. v [11] nebo [12].

Jedná se o tzv. Carpenterův příložník. Jedno jeho rameno má délku a, na druhém jsou dva vyznačené body E, F, jejichž vzdálenost je $2a$.





Obrázek 4.7: Carpenterův příložník

Mějme dán úhel $\angle AOB$ (viz obr. 4.7). Sestrojíme přímku CD, která je rovnoběžná s ramenem OA ve vzdálenosti a. Poté přiložíme nástroj tak, že bod E leží na přímce CD, jeho hrana prochází bodem O a vzdálenost EF je rovna $2a$. Pak velikost úhlu $\angle BOG$ je rovna jedné třetině velikosti úhlu $\angle AOB$.

Jak je vidět z obrázku 4.7, $\triangle OJE \cong \triangle OHE$ (oba jsou pravoúhlé a mají dvě shodné strany). Stejně tak jsou shodné trojúhelníky $\triangle OHE$ a $\triangle OHF$. Tedy původní úhel je rozdělen na tři shodné díly.

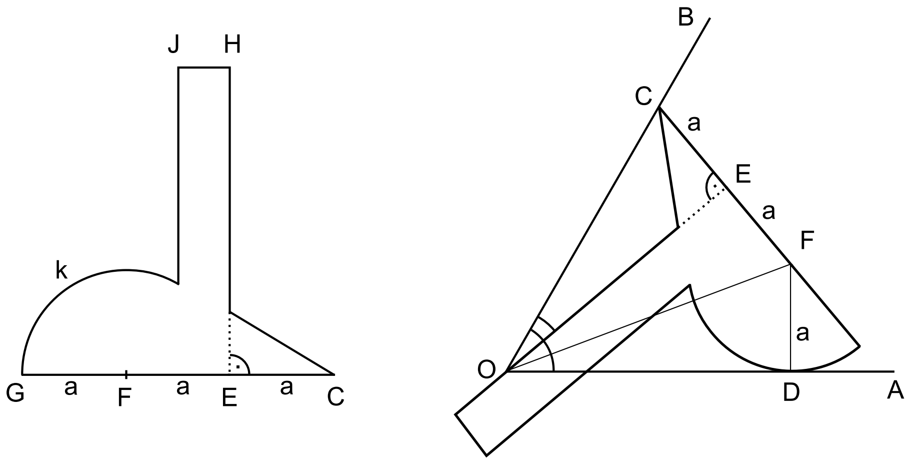
Tomahawk

Tato jednoduchá pomůcka znázorněná na obrázku 4.8, někdy také označována jako ševcovský nůž, pracuje na stejném principu jako předchozí nástroj.

Strana CG je body E a F rozdělena na tři stejné úseky. V bodě E je vztyčena kolmice EH a bod F je středem kružnice obsahující oblouk k.

Chceme-li sestrojit třetinu úhlu $\angle AOB$ přiložíme nástroj tak, že vrchol úhlu O leží na straně EH, bod C leží na ramení OB a oblouk k se dotýká ramene OA. Úhel $\angle BOE$ má pak velikost jedné třetiny velikosti původního úhlu $\angle AOB$.

Stejně jako v předchozím případě jsme získali tři shodné trojúhelníky $\triangle ODF$, $\triangle OEF$ a $\triangle OEC$. Původní úhel je tedy rozdělen na tři stejné části.



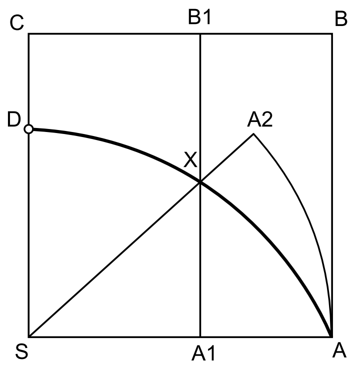
Obrázek 4.8: Tomahawk

Kapitola 5

Řešení s použitím křivek

Ačkoliv předešlé úlohy nejsou pravítkem a kružítkem řešitelné, je možné získat jejich řešení za pomoci různých křivek. Tyto křivky bývají obvykle vyšších stupňů, nejsou tedy eukleidovsky sestrojitelné. Ačkoliv zbytek konstrukce lze většinou provést pravítkem a kružítkem, nelze takovýto postup považovat za řešení úloh právě pro nemožnost eukleidovsky sestrojit potřebné křivky.

5.1 Hippiova křivka kvadratrix

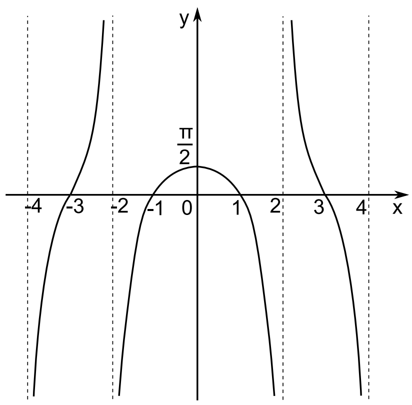


Obrázek 5.1: Křivka kvadratrix

Tuto křivku objevil Hippias z Élidy okolo roku 420 př. n. l. Je to první známá křivka, která se neskládá pouze z částí kružnic nebo úseček. Jak její název napovídá, je možné s její pomocí sestrojit kvadraturu kruhu. Také ji lze využít při řešení rektifikace kružnice, trisekce úhlu (někdy bývá též označována jako *trisektris*) a konečně i ke konstrukci pravidelných n-úhelníků.

Definice křivky je následující: Mějme čtverec $SABC$ (viz obr. 5.1). Pokud se úsečka AB bude rovnoměrně pohybovat do polohy SC a současně se úsečka SA bude rovnoměrně otáčet okolo bodu S do polohy SC, pak se v každém okamžiku tyto pohybující se úsečky protnou právě v jednom bodě. Tyto body tvoří zmiňovanou křivku kvadratrix jdoucí z bodu A do bodu D. Bod D je jakýmsi limitním bodem křivky, protože v tomto okamžiku obě úsečky splynou.

V takovéto podobě znali tuto křivku staří Řekové – tedy až na pojem limitního bodu, který byl zaveden až mnohem později. My se však ještě podíváme, jak vypadá křivka dále, budeme-li pokračovat v pohybu obou úseček (resp. přímek, které tyto úsečky obsahují). Navíc budeme uvažovat i pokračování opačným směrem, tedy před začátek předchozí křivky. Výsledná křivka je znázorněna na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: Křivka kvadratrix

Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě S tak, že $A = [1, 0]$ a $B = [0, 1]$. V této soustavě má křivka rovnici [1]

$$y = x \cdot \cot \frac{\pi \cdot x}{2}.$$

[1] Podrobné odvození rovnice je možné najít např. v [13].

Z této rovnice je zřejmé, že křivka má nekonečně mnoho větví. Její asymptoty jsou přímky $y = 2kx$ pro $k \in Z - \{0\}$ a průsečíky s osou x jsou v bodech $[(2k+1)x; 0]$, kde $k \in Z$.

Jak lze tedy využít kvadratrix k sestrojení kvadratury kruhu či rektifikace kružnice? Určíme y-ovou souřadnici bodu D:

$$y = \lim_{x \to 0}(x \cdot \cot \frac{\pi \cdot x}{2}) = \frac{2}{\pi}.$$

Máme tedy úsečku o délce $\frac{2}{\pi}$. Sestrojit z této úsečky úsečku o délce π lze pomocí operací násobení a dělení. Konstrukce je popsána v kapitole 2 (str. 9).

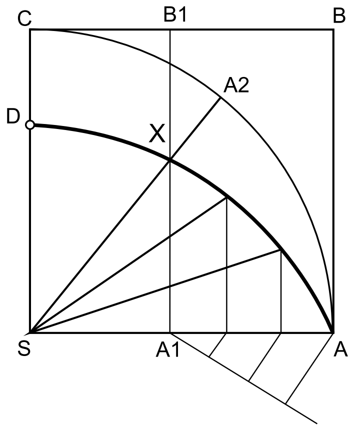
Sestrojení úsečky o délce π tedy řeší úlohu rektifikace kružnice. Pro řešení kvadratury kruhu zbývá sestrojit z této úsečky její druhou odmocninu. To lze rovněž provést známým postupem popsaným opět v kapitole 2 (str. 9).

Jak je uvedeno v [14], původní důkaz, že y-ová souřadnice bodu D je $\frac{2}{\pi}$, pochází od Dinostrata z období okolo roku 350 př. n. l. Pochopitelně nevyužívá infinitezimálního počtu. Nejprve je vyvrácena hypotéza $|SD| < \frac{2}{\pi}$ a poté rovněž hypotéza $|SD| > \frac{2}{\pi}$. Jedná se snad o historicky první případ nepřímého (apagogického) důkazu.

Naproti tomu využití této křivky pro konstrukci trisekce úhlu je založeno pouze na jejím způsobu sestrojení. Problém rozdělení úhlu se za pomoci této křivky jednoduše převede na problém dělení úsečky.

Mějme úhel $\angle ASA_2$. Rameno SA_2 protíná křivku kvadratrix v bodě X. Tím je jednoznačně určen i bod A_1. Úsečku AA_1 rozdělíme známým způsobem (viz obr. 5.3) na tři stejné části. Dělící body vyneseme na Hippiovu křivku a spojíme s bodem S. Tím je úhel $\angle ASA_2$ rozdělen na tři stejné části. Z definice Hippiovy křivky vyplývá, že bod A_2 dělí oblouk CA ve stejném poměru jako bod A_1 úsečku SA.

Je zřejmé, že takovýmto způsobem lze úhel rozdělit dokonce na libovolný počet stejných částí. To nás vede ke konstrukci pravidelného n-úhelníka. Ta totiž spočívá právě v rozdělení plného úhlu na n stejných částí. Z počátku se může jevit jako problém fakt, že pomocí křivky kvadratrix je možné rozdělit pouze úhly, jejichž velikost je menší nebo rovna 90°, zatímco pro konstrukci



Obrázek 5.3: Trisekce úhlu pomocí křivky kvadratrix

n-úhelníku bychom měli dělit úhel velikosti 360°. Vezmeme tedy úhel o velikosti 90°, ten rozdělíme výše popsaným postupem na n stejných částí a poté vezmeme čtyřnásobek takto vzniklého úhlu.

5.2 Rovnoosá hyperbola

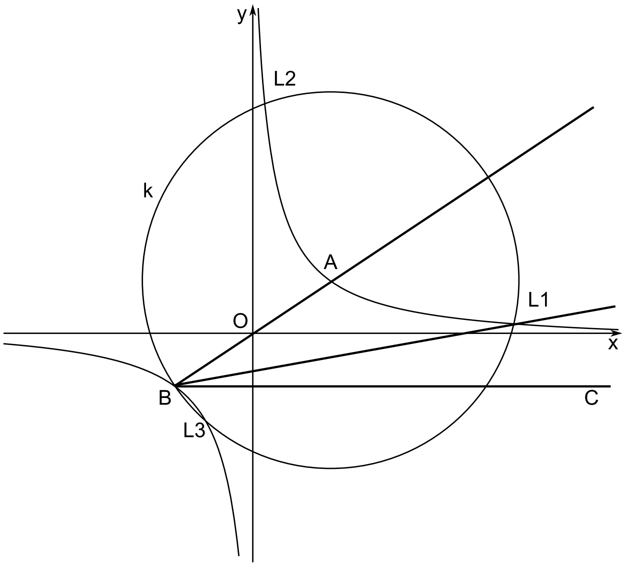
Nyní ukážeme způsob trisekce úhlu pomocí rovnoosé hyperboly, který byl v obdobné podobě publikován v [15].

Mějme kartézskou soustavu souřadnic a v této soustavě rovnoosou hyperbolu, jejíž asymptoty tvoří souřadnicové osy. Úhel $\angle ABC$, který chceme rozdělit na tři stejné části, umístíme tak, jak je znázorněno na obrázku 5.4, kde rameno BC je rovnoběžné s osou x a rameno AC prochází počátkem soustavy souřadnic.

Sestrojíme kružnici k se středem v bodě A a poloměrem AB. Kružnice k protíná hyperbolu ještě v bodech L_1, L_2 a L_3. Velikost úhlu $\angle CBL_1$ je rovna jedné třetině velikosti úhlu $\angle ABC$.

Důkaz

Jak bylo ukázáno výše v *metodě vkládání* (str. 21), je možné sestrojit třetinu úhlu, známe-li střed úsečky DE (obr. 4.1). Přímku r budeme otáčet okolo



Obrázek 5.4: Trisekce úhlu pomocí rovnoosé hyperboly

bodu B a body E, D nechť jsou její průsečíky s přímkami p a q. Pak střed S úsečky DE opíše křivku.

Na obrázku 5.5 jsou přímky p, q umístěny v kartézské soustavě souřadnic rovnoběžně se souřadnicovými osami tak, že počátek soustavy O je střed úsečky AB. V této soustavě označíme souřadnice bodu A $[a, b]$ a souřadnice pohybujícího se bodu S obecně $[x, y]$. Trojúhelníky $\triangle BRS$ a $\triangle STE$ jsou podobné. Platí tedy

$$|BR| : |RS| = |ET| : |TS|.$$

Protože navíc bod T prochází středem úsečky AE, platí $|ET| = |AT|$.

Předchozí rovnost zapíšeme pomocí souřadnic bodů S a A. (Uvědomme si, že bod B má souřadnice $[-a, -b]$.)

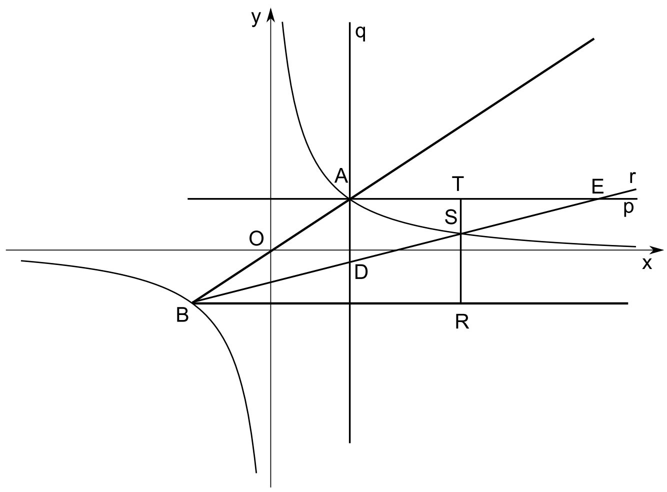
$$(x + a) : (b + y) = (x - a) : (b - y)$$

Tuto rovnost jednoduše upravíme na tvar

$$x \cdot y = a \cdot b,$$

neboli

$$y = \frac{a \cdot b}{x},$$



Obrázek 5.5: Trisekce úhlu pomocí rovnoosé hyperboly

což při pevně zvoleném bodě $A = [a, b]$ není nic jiného, než rovnice rovnoosé hyperboly.

Protože bod L_1 leží na hyperbodě, je středem úsečky DE (viz obr. 5.4) a tedy velikost úhlu $\angle CBL_1$ je skutečně rovna jedné třetině velikosti úhlu $\angle ABC$.

5.3 Parabola

Jak je uvedeno v [15], René Descartes (1596–1650) používal parabolu k řešení trisekce úhlu.

V kartézské soustavě souřadnic (O, x, y) umístíme úhel $\varphi = \angle ASB$, jehož třetinu chceme sestrojit, tak, že vrchol S leží v počátku soustavy souřadnic a rameno SA splývá s osou x. Dále mějme parabolu o rovnici $y = x^2$ a dvě pomocné kružnice $k_1 = (O, 1)$, $k_2 = (O, 2)$, jak je znázorněno na obrázku 5.6.

V bodě $[0, 2]$ sestrojme rovnoběžku m s osou x. Průsečík kružnice k_1 a ramene úhlu SB označme B_1. Tímto bodem veďme kolmici na přímku m, která ji protne v bodě M. Sestrojme nyní kružnici k se středem v tomto bodě o poloměru $|MO|$, tedy kružnici procházející počátkem. V počátku se také protíná s parabolou. S tou má kružnice k ještě další tři průsečíky, které označíme P_1, P_2 a P_3. Z těchto průsečíků spustíme kolmice na osu x, které protnou kružnici k_2 v bodech K_1, K_2 a K_3, jak je znázorněno na obrázku 5.6. A právě tyto body, tedy K_1, K_2 a K_3, určují třetinu úhlů φ, $\varphi + 360°$ a $\varphi + 720°$.

Důkaz

Celý postup vychází z rovnice $4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} = \cos\varphi$. Tuto rovnici vynásobíme dvěma a položíme $2\cos\frac{\varphi}{3} = x$ a $\cos\varphi = a$.
Dostaneme rovnici

$$x^3 - 3x - 2a = 0. \tag{5.1}$$

Mějme kartézskou soustavu souřadnic a v ní parabolu, jejíž rovnice je $y = x^2$. Dále předpokládejme, že máme kružnici k, jejíž body splňují rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ax - 4y = 0, \tag{5.2}$$

kde $a = \cos\varphi$.

Po dosazení $y = x^2$ do rovnice 5.2 získáme x-ové souřadnice průsečíků. Tedy:

$$x^2 + x^4 - 2ax - 4x^2 = 0$$
$$x^4 - 3x^2 - 2ax = 0$$

Je vidět, že jedno řešení je $x = 0$. Můžeme tedy rovnici upravit na tvar

$$x(x^3 - 3x - 2a) = 0$$

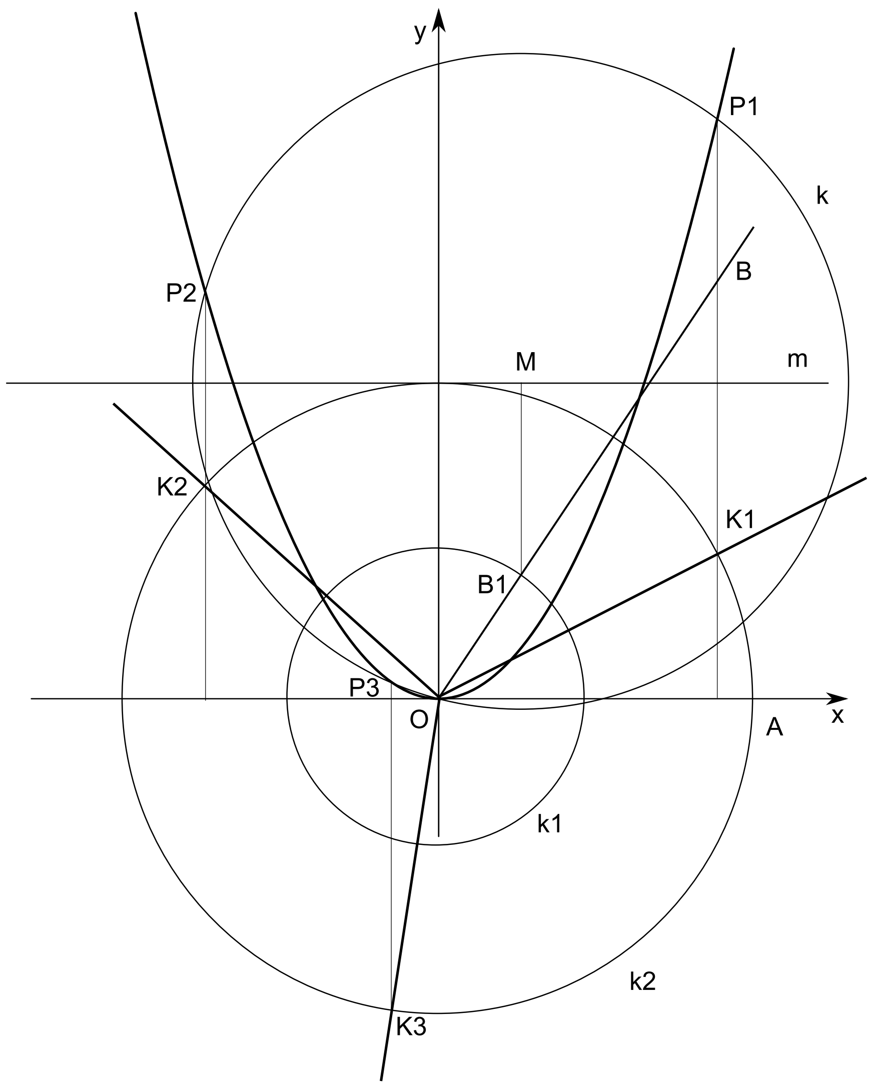
a tedy

$$x^3 - 3x - 2a = 0.$$

Nyní ukážeme, že body kružnice k tak, jak jsme ji sestrojili výše, skutečně splňují rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ax - 4y = 0.$$

Kružnice k má střed v bodě $M[\cos\varphi, 2]$, neboli po dosazení $a = \cos\varphi$ v bodě $[a, 2]$. Kružnice prochází bodem $O[0, 0]$, tedy její poloměr je $\sqrt{a^2 + 2^2}$.



Obrázek 5.6: Trisekce úhlu pomocí paraboly

Kružnice k má tedy rovnici

$$(x-a)^2 + (y-2)^2 - (\sqrt{a^2+4})^2 = 0,$$

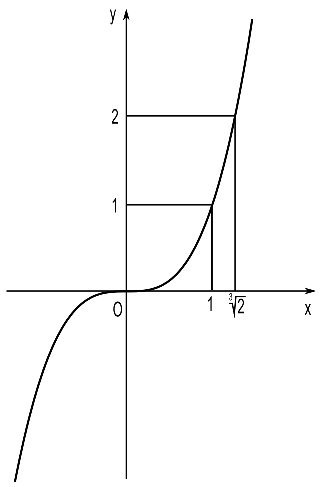
odkud po úpravě dostaneme

$$x^2 + y^2 - 2ax - 4y = 0.$$

Protože $x = 2\cos\frac{\varphi}{3}$, sestrojíme z x-ové souřadnice úhel o velikosti $\frac{\varphi}{3}$ pomocí kružnice k_2, jak je uvedeno v předchozím postupu.

5.4 Kubická parabola

Tato křivka má rovnici $y = x^3$. S její pomocí se dá velice jednoduše vyřešit úloha zdvojení krychle. Ta spočívá v sestrojení úsečky o délce $\sqrt[3]{2}$. Pouze pomocí pravítka a kružítka to není možné, avšak máme-li k dispozici kubickou parabolu, je řešení úlohy triviální. Konstrukce je zřejmá z obrázku 5.7.



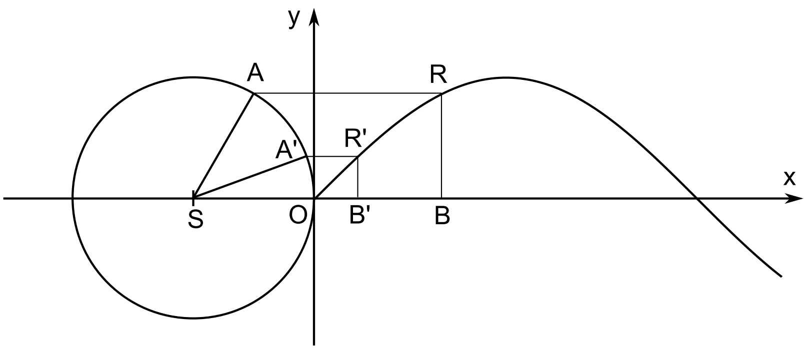
Obrázek 5.7: Zdvojení krychle pomocí kubické paraboly

5.5 Sinusoida

Nyní ukážeme řešení trisekce úhlu, kvadratury kruhu a zdvojení krychle za pomoci dvou sinusoid a jedné kružnice, které vychází z řešení publikovaného v [16]. Také ukážeme, jak tyto postupy jednoduše převést na řešení zbylých dvou úloh.

Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem O a v ní sestrojíme jednotkovou kružnici k se středem v bodě $S = [-1; 0]$. Dále mějme křivku $y = \sin x$. Úhel α, jehož třetinu chceme sestrojit, umístíme tak, aby jeho vrchol ležel ve středu kružnice k, tj. v bodě $[-1, 0]$, a jedno jeho rameno splývalo s osou x (viz obr. 5.8).

Nechť A je průsečík druhého ramene úhlu s kružnicí k. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s osou x a její průsečík se sinusoidou označíme R. Z tohoto bodu spustíme kolmici na osu x, která ji protíná v bodě B. Délka úsečky OB je stejná jako délka oblouku, který vytíná úhel α na jednotkové kružnici k. Rozdělíme ji tedy na tři části[2]. Vzniknou tak body B' a B''. Délka úsečky OB' má tedy stejnou velikost jako délka oblouku, který vytíná námi hledaný úhel na kružnici k. Zbývá jen přenést tuto délku zpět na kružnici. To provedeme obdobným způsobem. Z bodu B' vedeme kolmici na osu x, která protíná sinusoidu v bodě R'. Z něj dále vedeme rovnoběžku s osou x. Ta protíná kružnici k v bodě A'. Velikost úhlu $B'SA'$ je pak rovna jedné třetině velikosti úhlu α.



Obrázek 5.8: Trisekce úhlu pomocí sinusoidy

Správnost tohoto postupu je jistě zřejmá z definice a vlastností funkce $\sin x$, které jsou uváděny ve středoškolských učebnicích matematiky.

Stejně jako v případě řešení pomocí Hippiovy křivky i zde můžeme využít postupu pro trisekci úhlu k řešení poslední úlohy, tj. konstrukce pravidelných

[2]Použijeme stejný postup jako v předchozím textu při řešení trisekce úhlu pomocí křivky kvadratrix.

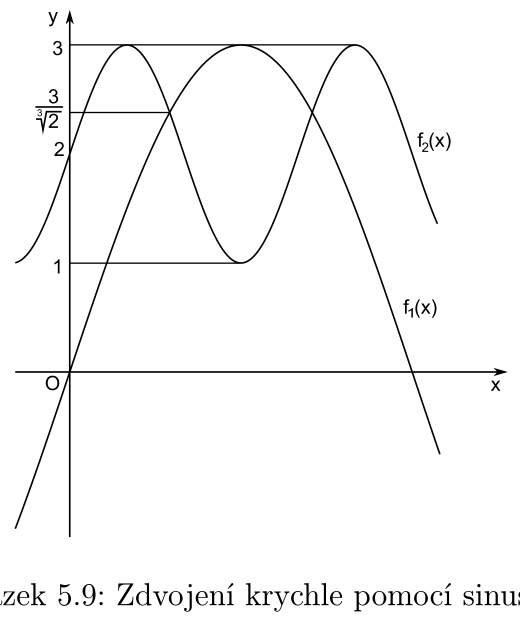
n-úhelníků. Stačí opět za výchozí úhel vzít úhel o velikosti $90°$ a příslušnou úsečku pak rozdělit ne na tři, ale na n stejných dílů. Získáme tak úhel o velikosti $90°/n$. Jeho čtyřnásobek je potom hledaný úhel.

Sestrojit s pomocí sinusoidy úsečku délky π, resp. $\sqrt{\pi}$, což jsou klíčové úsečky pro řešení rektifikace kružnice, resp. kvadratury kruhu, není nic obtížného. Stačí si jen uvědomit, že funkce sinus je 2π-periodická. Graf této funkce nám na ose x přímo vytíná úseky délky π. Sestrojit z úsečky délky π její druhou odmocninu lze potom známým způsobem popsaným v kapitole 5.1.

K řešení problému zdvojení krychle použijeme dvě křivky. Opět zavedeme kartézskou soustavu souřadnic a v ní sestrojíme grafy dvou funkcí:

$$f_1(x) : y = 3 \sin x$$
$$f_2(x) : y = 2 + \sin 3x$$

Tyto grafy se protínají v nekonečně mnoha bodech, jejichž y-ovoá souřadnice je rovna $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Odtud je již snadné sestrojit úsečku délky $\sqrt[3]{2}$, což je hledaná délka hrany krychle.



Obrázek 5.9: Zdvojení krychle pomocí sinusoidy

Důkaz

Je třeba dokázat, že y-ová souřadnice průsečíků je skutečně $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Vyjdeme z rovnic obou funkcí:

$$3\sin x = 2 + \sin 3x.$$

Použijeme známý vzorec:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Dostáváme rovnici

$$3\sin x = 2 + 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

odkud po úpravě dostaneme:

$$\sin^3 x = \frac{1}{2},$$

$$3\sin x = 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

5.6 Zdvojení krychle podle Menaichma

Menaichmovo řešení zdvojení krychle vychází z objevu Hippokrata z Chiu. Ten převedl tuto úlohu na problém nalezení dvojnásobné střední geometrické úměrné, tj. nalezení takových hodnot x, y, aby platilo:

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Tomu odpovídají rovnice

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax, \quad xy = 2a^2.$$

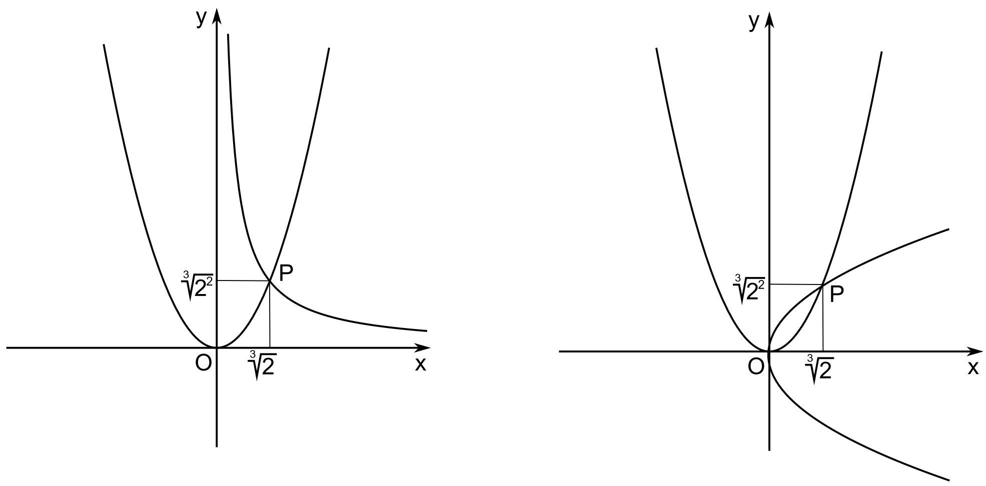
Odtud po vyloučení y obdržíme vztah $x^3 = 2a^3$, což znamená, že délka x je délkou hledané hrany krychle, která má dvojnásobný objem než krychle s hranou délky a.

Řešení pomocí paraboly a hyperboly

Mějme v rovině dvě křivky, parabolu o rovnici $y = x^2$ a hyperbolu o rovnici $y = \frac{2}{x}$. Tyto dvě křivky se protínají v bodě P, jehož x-ová souřadnice je $\sqrt[3]{2}$ a y-ová $\sqrt[3]{2^2}$ (viz obr. 5.10). Tím je zkonstruovaná hledaná délka $\sqrt[3]{2}$.

Řešení pomocí dvou parabol

Řešení je velice podobné předchozímu případu. Opět máme v rovině parabolu o rovnici $y = x^2$. Místo hyperboly však vezmeme další parabolu o rovnici $x = \frac{1}{2}y^2$. Obě paraboly se protnou v bodě P, jehož x-ová souřadnice je stejně jako v předchozím případě $\sqrt[3]{2}$ (viz obr. 5.10) a y-ová souřadnice je $\sqrt[3]{2^2}$.



Obrázek 5.10: Menaichmovo řešení zdvojení krychle

Kapitola 6

Přibližné metody řešení

Všechny zmiňované úlohy jsou pomocí pravítka a kružítka neřešitelné. Existuje však řada postupů, které vedou k přibližným řešením jednotlivých úloh. Někdy se také hovoří o geometrických aproximacích. V této kapitole ukážeme některé z nich.

6.1 Trisekce úhlu

Dělení úsečky

Jedná se o nejjednodušší a nejčastější pokus o rozdělení úhlu. Mějme úhel $\angle AVB$, který chceme rozdělit na tři shodné díly. Uvažujme situaci, kdy body A, B mají od vrcholu V stejnou vzálenost. Správně bychom měli sestrojit kružnici se středem v bodě V a dělit její oblouk. Místo toho rozdělíme na třetiny úsečku AB. Vzniknou tak body C, D, které určují přibližné třetiny původního úhlu.

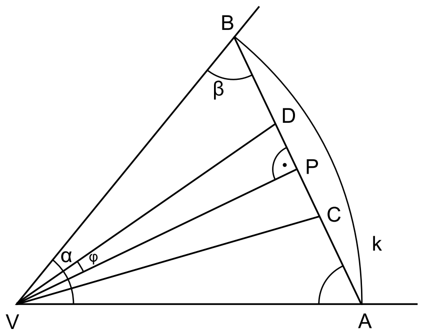
Trojúhelník $\triangle ABV$ je rovnoramenný. Označme α úhel při vrcholu V a β úhel při vrcholu B. Body C, D nechť dělí stranu AB na třetiny. Dále označme P patu výšky na stranu AB (viz obr. 6.1).

Délku úsečky AB spočítáme z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle VPB$.

$$|AB| = 2 \cdot |VB| \cdot \cos\beta$$

Z téhož trojúhelníka vyjádříme délku úsečky VP.

$$|VP| = |VB| \cdot \sin\beta.$$



Obrázek 6.1: Trisekce úhlu pomocí dělení úsečky

Dále zřejmě platí

$$|DP| = \frac{1}{6}|AB| = \frac{1}{3}|VB| \cdot \cos\beta.$$

Nyní z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle PDV$ vyjádříme velikost úhlu při vrcholu V, označme jej φ. Pokud by tato metoda skutečně dělila původní úhel α na třetiny, měl by tento úhel mít velikost $\alpha/6$.

Platí:

$$\tan\varphi = \frac{|DP|}{|PV|} = \frac{\frac{1}{3}|VB| \cdot \cos\beta}{|VB| \cdot \sin\beta} = \frac{1}{3}\cot\beta,$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{3}\cot\beta\right),$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{3}\cot\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Následující tabulka ukazuje, jak se mění velikost chyby této konstrukce se vzrůstající velikostí úhlu α.

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
φ	$1^\circ40'$	$3^\circ21'$	$5^\circ6'$	$6^\circ55'$	$8^\circ51'$	$10^\circ53'$	$13^\circ8'$	$15^\circ37'$
$2\varphi - \frac{\alpha}{3}$	$\left(0,1 \cdot 10^{-10}\right)^\circ$	$0^\circ2'$	$0^\circ12'$	$0^\circ30'$	$1^\circ2'$	$1^\circ46'$	$2^\circ56'$	$4^\circ34'$

α	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
φ	$18^\circ27'$	$21^\circ40'$	$25^\circ27'$	30°	$35^\circ53'$	$42^\circ29'$	$51^\circ12'$	$61^\circ7'$	$75^\circ17'$
$2\varphi - \frac{\alpha}{3}$	$6^\circ54'$	10°	$14^\circ14'$	20°	$27^\circ46'$	$38^\circ18'$	$52^\circ24'$	$70^\circ54'$	$93^\circ54'$

Z tabulky je zřejmé, že tato metoda je použitelná pouze pro velmi malé úhly. Již při dělení úhlu velikosti 40° je chyba $30'$. Pro větší úhly je tento postup zcela nepoužitelný.

Součet nekonečné řady

Ačkoliv je přesné řešení úlohy nemožné, můžeme sestrojit třetinu zadaného úhlu s libovolnou přesností.

Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n},$$

neboli

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

Součet této řady je $\frac{1}{3}$. Úhel o velikosti $1/2^n$ lze sestrojit pravítkem a kružítkem opakovaným dělením výchozího úhlu na polovinu. Můžeme tedy sestrojit úhel, jehož velikost odpovídá součtu konečného počtu členů této řady.

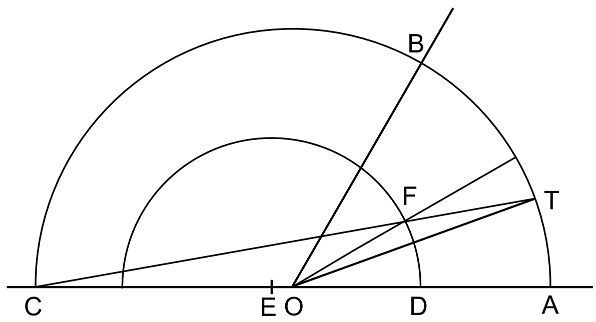
Čím více kroků konstrukce provedeme, tím více se bude sestrojený úhel blížit požadované jedné třetině původního úhlu. V praxi je však třeba vzít v úvahu, že není možné rýsovat, aniž bychom se dopouštěli nepřesností. Velikost chyby vzniklé nepřesností při provádění konstrukce prudce roste se zvyšujícím se počtem kroků konstrukce. Tato metoda je tedy zajímavá spíše z teoretického hlediska.

Následující tabulka ukazuje, jakých výsledků lze dosáhnout při použití této metody.

Počet kroků	α	$10°$	$20°$	$40°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$
	$\alpha/3$	$3°20'$	$6°40'$	$13°20'$	$20°$	$30°$	$40°$	$60°$
1	$\alpha/2$	$5°$	$10°$	$20°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
2	$\alpha/4$	$2°30'$	$5°$	$10°$	$15°$	$22°30'$	$30°$	$45°$
3	$3/8\ \alpha$	$3°45'$	$7°30'$	$15°$	$22°30'$	$33°45'$	$45°$	$67°30'$
4	$5/16\ \alpha$	$3°7'$	$6°15'$	$12°30'$	$18°45'$	$28°7'$	$37°30'$	$56°15'$
5	$11/32\ \alpha$	$3°26'$	$6°52'$	$13°45'$	$20°37'$	$30°56'$	$41°15'$	$61°52'$
6	$21/64\ \alpha$	$3°16'$	$6°34'$	$13°7'$	$19°41'$	$29°31'$	$39°22'$	$59°4'$

Přibližné řešení trisekce úhlu

Na obrázku 6.2 je znázorněna další konstrukce, pomocí které je možné sestrojit přibližnou třetinu libovolného úhlu. Konstrukce je převzata z [11].



Obrázek 6.2: Přibližná konstrukce trisekce úhlu

Mějme dán úhel $\angle AOB$, jehož třetinu chceme sestrojit. Označme D střed úsečky OA. Oblouk AB protne opačnou polopřímku k rameni OA v bodě C. Na polopřímce OC sestrojíme bod E tak, že platí

$$|EC| = 11|OE|.$$

Sestrojíme kružnici k se středem v bodě E a poloměrem $|ED|$. Osa úhlu $\angle AOB$ protne kružnici k v bodě F. Sestrojíme přímku CF, která protne původní oblouk AB v bodě T. Velikost úhlu $\angle AOT$ je přibližně jedna třetina velikosti úhlu AOB.

Přesnost této konstrukce

Určíme velikost výsledného úhlu pro původní úhel $\angle AOB$ velikosti $60°$.

Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě O tak, že bod A má souřadnice $[12; 0]$. Bod E, tj. střed kružnice k, má pak souřadnice $[-1; 0]$ a bod C $[-12; 0]$.

Souřadnice bodu F spočítáme jako průsečík osy úhlu $\angle AOB$ a oblouku AB. Tedy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y &= 0 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 7^2 \end{aligned}$$

Dostaneme

$$F \doteq [5{,}297;\ 3{,}058].$$

Kružnice, jejíž částí je oblouk AB, má rovnici

$$x^2 + y^2 = 12^2.$$

Souřadnice bodu T určíme coby průsečík přímky CF s touto kružnicí. Vyjde

$$T \doteq [11{,}2725;\ 4{,}11458].$$

Protože platí $T_y = 12 \sin \alpha$ a $T_x = 12 \cos \alpha$, spočítáme snadno výsledný úhel:

$$\alpha = 20°3'9''.$$

Pro původní úhel $\angle AOB$ velikosti $60°$ se tedy výsledný úhel liší od požadované jedné třetiny o $0°3'9''$.

6.2 Konstrukce pravidelných n-úhelníků

Nyní ukážeme několik způsobů, jak vhodně aproximovat pouze pomocí pravítka a kružítka délky stran vybraných pravidelných n-úhelníků, které nejsou eukleidovsky sestrojitelné. Tyto aproximace jsou částečně převzaty z [6].

Ve všech následujících konstrukcích budeme předpokládat kartézskou soustavu s osami x, y a počátkem S. Dále a_n bude značit délku strany pravidelného n-úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice a a_n^* přibližnou délku strany pravidelného n-úhelníka, kterou zkonstruujeme.

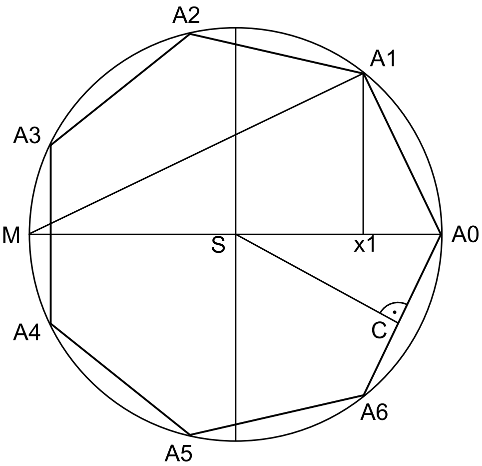
Aproximace pravidelného sedmiúhelníka

Zvolme x_1 x-ovou souřadnici vrcholu A_1 aproximovaného pravidelného sedmiúhelníka (viz obr. 6.3) takto: Zvolíme

$$x_1 = \frac{5}{8}.$$

Trojúhelník $\triangle A_0A_1M$ je pravoúhlý (podle Thaletovy věty). Délka úsečky $|A_0x_1|$ je $\frac{3}{8}$. Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí

$$a_7^* = \sqrt{\frac{3}{8} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Obrázek 6.3: Přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníka

$$a_7^* \doteq 0{,}8660$$

Délku a_7 strany pravidelného sedmiúhelníka určíme z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle A_0SC$.

$$a_7 = 2\sin\frac{\pi}{7} \doteq 0{,}8667,$$

nepřesnost této konstrukce je tedy menší než 0,0007.

Jiná aproximace pravidelného sedmiúhelníka

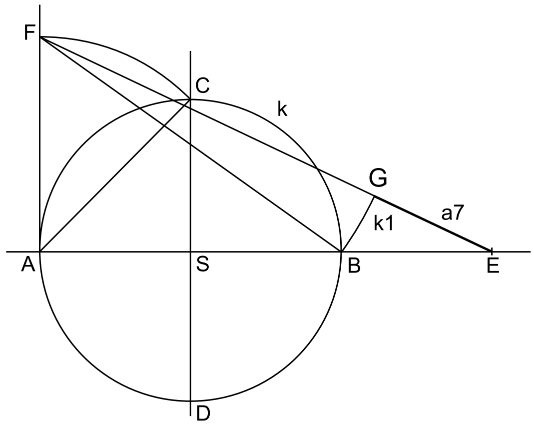
Na jednotkové kružnici k sestrojíme dva na sebe kolmé průměry AB, CD (viz obr. 6.4). Dále na polopřímce $\mapsto AB$ sestrojíme bod E tak, že $|BE| = 1$. Na tečně ke kružnici v bodě A sestrojíme bod F, pro který platí $|AF| = |AC|$. Bod F je středem kružnice k_1 o poloměru $|FB|$. Tato kružnice protíná úsečku EF v bodě G. Úsečka EG je aproximací strany pravidelného sedmiúhelníka.

Vypočítejme nyní délku sestrojené úsečky EG. Zřejmě platí $|AF| = \sqrt{2}$. Délku úsečky FB vypočítáme z trojúhelníka $\triangle ABF$ podle Pythagorovy věty.

$$|FB| = \sqrt{|AB|^2 + |AF|^2} = \sqrt{6}$$

Délku úsečky EF vyjádříme obdobným způsobem z trojúhelníka $\triangle AEF$.

$$|EF| = \sqrt{|AE|^2 + |AF|^2} = \sqrt{11}$$



Obrázek 6.4: Přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníka

Po dosazení tedy platí

$$a_7^* = |EG| = \sqrt{11} - \sqrt{6} \doteq 0{,}86714$$

Chyba při této konstrukci je menší než 0,0007.

Aproximace pravidelného devítiúhelníka

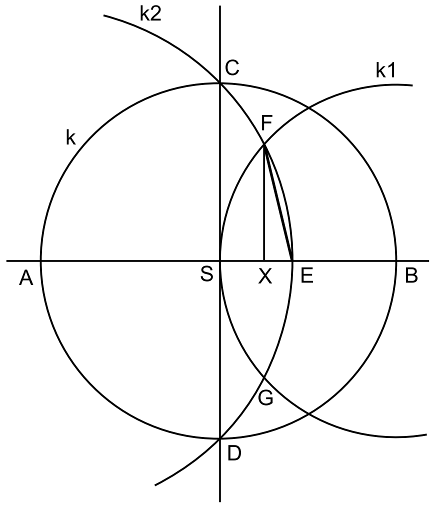
Opět sestrojíme jednotkovou kružnici k a na ní dva kolmé průměry AB, CD (viz obr. 6.5). Dále sestrojíme dvě kružnice: $k_1(B, 1)$ a $k_2(A, |AC|)$. Kružnice k_2 protne úsečku AB v bodě E, obě kružnice se pak protínají v bodech F, G. Délka úsečky EF je aproximace strany pravidelného devítiúhelníka.

Přesnou délku úsečky EF budeme počítat z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle EFX$, kde bod X je kolmý průmět bodu F na osu x. Bod F jsme získali jako průsečík dvou kružnic, musí tedy splňovat rovnice

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + y^2 &= 1\\(x+1)^2 + y^2 &= 2\end{aligned}$$

Po vyřešení dostaneme

$$F_x = \frac{1}{4},\ F_y = \frac{1}{4}\sqrt{7}.$$



Obrázek 6.5: Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníka

Dále platí:

$$|EX| = |AC| - |AX| = \sqrt{2} - \frac{5}{4}.$$

Tedy můžeme napsat

$$a_9^{*2} = \left(\sqrt{2} - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{7}\right)^2 = 4 - \frac{10\sqrt{2}}{4}$$

$$a_9^{*2} \doteq 0{,}4645$$

$$a_9^{*} \doteq 0{,}6815$$

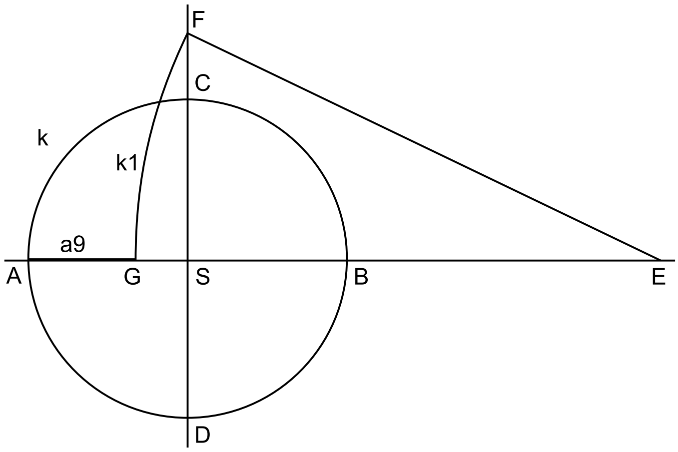
Přesná délka strany pravidelného devítiúhelníka je

$$a_9 = 2\sin\frac{\pi}{9} \doteq 0{,}6840$$

Nepřesnost této konstrukce je tedy menší než 0,0024.

Jiná aproximace pravidelného devítiúhelníka

Opět sestrojíme jednotkovou kružnici k. Souřadnicové osy na ní vytínají dva kolmé průměry AB a CD (viz obr. 6.6). Na polopřímce $\mapsto AB$ nyní sestrojíme bod E tak, že $|BE| = |AB|$. Na polopřímce $\mapsto DC$ sestrojíme bod F, pro který platí $|SF| = |AC|$. Dále sestrojíme kružnici k_1 se středem v bodě E a poloměrem $|EF|$. Její průsečík s úsečkou AS označíme G. Úsečka AG je aproximací strany pravidelného 9-úhelníka.



Obrázek 6.6: Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníka

Z Pythagorovy věty vypočítáme délku úsečky EF:

$$|EF| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{11}$$

A následně můžeme délku a_9^* vyjádřit jako

$$a_9^* = |AE| - |GE| = 4 - \sqrt{11}$$

$$a_9^* \doteq 0{,}68338$$

Přesná délka strany pravidelného 9-úhelníka je

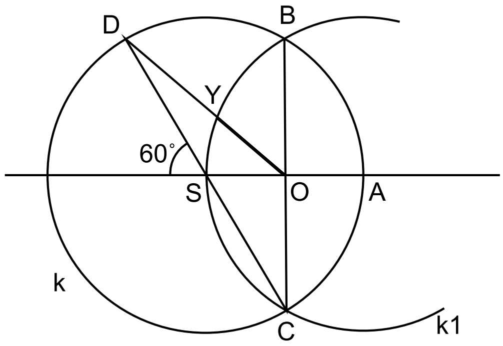
$$a_9 = 2 \sin \frac{\pi}{9} \doteq 0{,}6840$$

Nepřesnost této konstrukce je tedy menší než 0,0007.

Aproximace pravidelného jedenáctiúhelníka

Sestrojíme jednotkovou kružnici k se středem v počátku S. Její průsečík s kladnou částí osy x označíme A. Dále sestrojíme kružnici k_1 se středem v bodě A a poloměrem $|AS|$. Průsečíky těchto dvou kružnic označíme B a C. Nyní sestrojíme polopřímku $\mapsto CS$ a její další průsečík s kružnicí k označíme D. Bod O sestrojíme jako průsečík úsečky BC s úsečkou AS. Úsečka DO protíná kružnici k_1 v bodě Y.

Úsečka OY je aproximací strany pravidelného jedenáctiúhelníka.



Obrázek 6.7: Přibližná konstrukce pravidelného jedenáctiúhelníka

Bod Y jsme získali jako průsečík přímky DO s kružnicí k_1. Souřadnice bodu D jsou $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, bod O má souřadnice $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Rovnice přímky DO je tedy

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0. \tag{6.1}$$

Kružnice k_1 má rovnici

$$(x-1)^2 + y^2 = 1. \tag{6.2}$$

Po vyjádření y z rovnice 6.1 a dosazení do rovnice 6.2, určíme x-ové souřadnice průsečíku:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5 \\ x_2 &= \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

Z obrázku 6.7 je zřejmé, že x-ové souřadnici bodu Y odpovídá menší z obou hodnot, tedy x_2. Z rovnice 6.1 pak určíme, že y-ová souřadnice je rovna $\frac{6\sqrt{3}}{28}$. Tedy

$$Y\left[\frac{1}{14}; \frac{6\sqrt{3}}{28}\right].$$

Vyjádříme přibližnou délku strany jedenáctiúhelníka:

$$a_{11}^{*} = |OY| \doteq \sqrt{0{,}3214} = 0{,}5669.$$

Přesná délka strany pravidelného jedenáctiúhelníka je

$$a_{11} = 2\sin\frac{\pi}{11} \doteq 0{,}5634$$

Nepřesnost této konstrukce je tedy menší než 0,004.

Kapitola 7

České příspěvky k dané tématice

7.1 Josef Vaňous

V článku *Trisektorie* [17] popisuje Josef Vaňous skupinu křivek třetího stupně. Jde o křivky splňující rovnici

$$Ax^3 + By^3 + Cxy^2 + Dyx^2 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy = 0,$$

kde navíc platí

$$A = C, \quad B = 1 \ \text{ a } E = -F,$$

tedy

$$y^3 + A(x^2 + y^2)x + Dyx^2 + E(x^2 - y^2) + Gxy = 0.$$

Ve speciálním případě volby koeficientů A, D, E, G je tato křivka množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od kružnice a její sečny. Díky tomu lze tyto křivky použít k řešení trisekce úhlu (odtud název trisektorie).

Konstrukce trisektorie a její rovnice

Sestrojme kružnici k o poloměru r a její průměr OA. Bod O nechť je počátkem kartézské soustavy souřadnic a přímka OA osou x (viz obr. 7.1). Bodem A veďme sečnu s, která s osou x svírá úhel α. Bodem O veďme libovolnou přímku. Její průsečík se sečnou s označme B a průsečík s kružnicí D. Na této přímce sestrojíme bod M tak, že platí

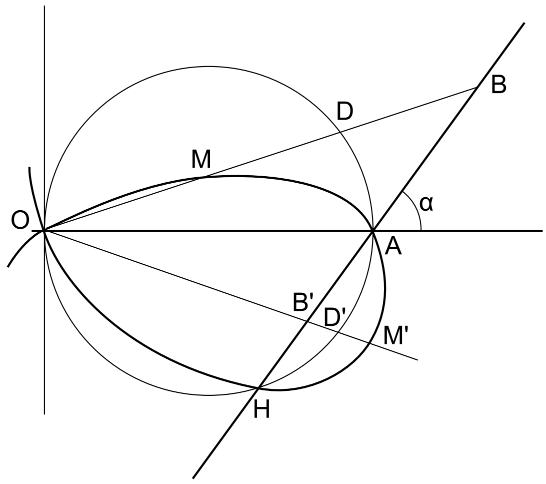
$$|MD| = |BD|.$$

Bod M je bodem křivky trisektorie a množina všech takovýchto bodů pak tvoří celou křivku.

Rovnice této křivky je

$$\left[y^2(2r+x)-x^2(2r-x)\right]a=y\left(y^2+x^2-4rx\right), \tag{7.1}$$

kde r je poloměr kružnice a $a=\tan\alpha$.[1]



Obrázek 7.1: Konstrukce trisektorie

Podívejme se na speciální případy této křivky:

1. $\alpha=0$, neboli sečna s je průměrem kružnice k.

   Všechny paprsky z bodu O se s touto sečnou protínají v bodě O.

   Dosadíme do rovnice 7.1 $a=0$ a dostaneme

   $$y^2+x^2-4rx=0,$$

   což odpovídá kružnici o dvojnásobném poloměru (viz obr. 7.2).

[1]Podrobné odvození rovnice 7.1 lze najít v [17].

2. $\alpha = 45°$, tedy $\tan \alpha = a = 1$.

   Rovnice trisektorie je následující:

$$y^3 - x^3 - 2r\left(y^2 - x^2\right) - xy\,(y - x + 4r) = 0.$$

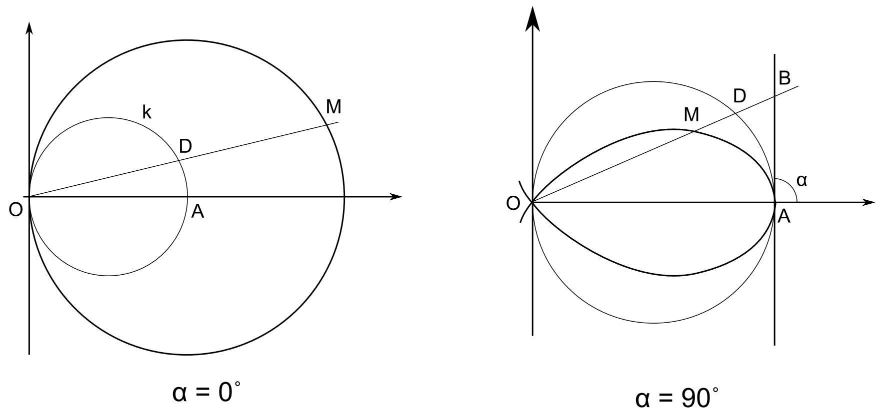
   Křivka je znázorněna na obrázku 7.1.

3. $\alpha = 90°$, tedy $\tan \alpha = a = \infty$.

   Z rovnice 7.1 obdržíme výraz

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{2r - x}{2r + x}. \qquad (7.2)$$

   Sečna s se v tomto případě stává tečnou ke kružnici k. Jak je vidět z obrázku 7.2 i z rovnice 7.2, celá křivka je souměrná podle osy x.

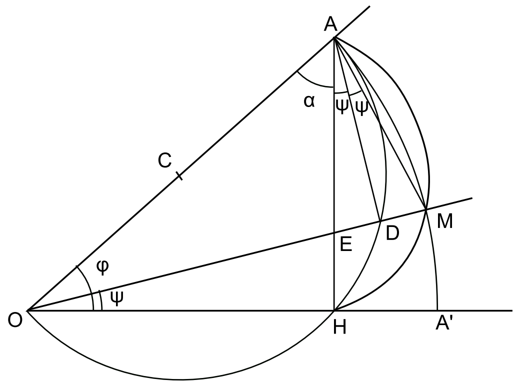


Obrázek 7.2: Případ trisektorie pro $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$

Užití trisektorie k řešení trisekce úhlu

Mějme úhel $\varphi = \angle AOA'$, jehož třetinu chceme sestrojit (viz obr. 7.3). Z bodu A spustíme kolmici na rameno OA'. Patu této kolmice označíme H. Střed úsečky OA označíme C. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě C a poloměrem $|CA| = |CO|$. Z Thaletovy věty vyplývá, že bod H nutně leží na této kružnici.

Sestrojíme trisektorii ke kružnici k a sečně AH. Bod M, průsečík trisektorie a oblouku AA', dělí oblouk AA' v poměru 1 : 2.



Obrázek 7.3: Užití trisektorie k řešení trisekce úhlu

Důkaz

Přímka OM protíná kružnici k v bodě D a sečnu AH v bodě E (viz obr. 7.3). Z vlastností trisektorie plyne

$$|DE| = |DM|.$$

Podle Thaletovy věty je úhel ODA pravý, tedy trojúhelníky $\triangle EDA$ a $\triangle MDA$ jsou shodné. Označme ψ jejich úhel při vrcholu A.

Dále platí

$$|\angle DAH| = |\angle DOH| = \psi,$$

neboť se jedná o obvodové úhly náležící tětivě DH.

Trojúhelník AMO je rovnoramenný, dostaneme tedy z trojúhelníka $\triangle ADM$

$$|\angle MAO| = |\angle AMO| = 90^\circ - \psi.$$

Dále pak

$$\begin{aligned} 90^\circ - \psi &= \alpha + 2\psi, \\ \alpha + 3\psi &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Protože trojúhelník AHO je pravoúhlý, platí

$$\alpha + \varphi = 90^\circ,$$

tedy

$$\varphi = 3\psi.$$

7.2 Jan Šrůtek

V článku *Nový způsob rektifikace čáry kruhové* [18] uvádí postup pro přibližné řešení rektifikace kružnice. Vychází přitom z poznatku, že

$$\sqrt{10} \doteq 3{,}16227$$

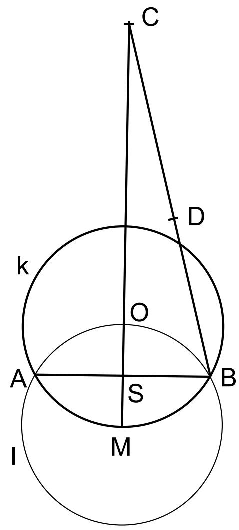
$$\frac{1}{2}\sqrt{39} \doteq 3{,}12249$$

a tedy jejich aritmetický průměr je přibližně roven hodnotě π, liší se od něj o 0,00079.

Abychom rektifikovali kružnici o poloměru 1, sestrojíme tedy hodnoty $\sqrt{10}$ a $\frac{1}{2}\sqrt{39}$, jejichž součet je hledaná délka.

7.3 Antonín Pleskot

Antonín Pleskot publikoval v [19] jednoduchou konstrukci, která přibližně řeší rektifikaci kružnice.



Obrázek 7.4: Rektifikace kružnice podle A. Pleskota

Nechť je dána kružnice k se středem O o poloměru $r = 1$ (viz obr. 7.4). Zvolme na ní bod M. Sestrojme kružnici l se středem M o poloměru r, která protne kružnici k v bodech A, B. Střed úsečky AB označme S. Na ose úsečky AB sestrojíme bod C tak, že

$$|SC| = 2|AB|.$$

Od úsečky BC odečteme dvojnásobek poloměru r, čímž dostaneme bod D.

Délka úsečky BD je přibližně rovna $\frac{\pi}{2}$.

Důkaz:

Zřejmě platí

$$|SB| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

tedy

$$|SC| = 2\sqrt{3}.$$

Z Pythagorovy věty dostaneme

$$|BC| = \frac{\sqrt{51}}{2},$$

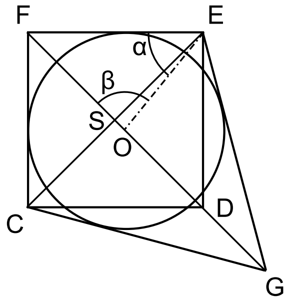
$$|BD| = \frac{\sqrt{51}}{2} - 2.$$

Přibližná hodnota délky úsečky $|BD|$ je 1,570714, od očekávané hodnoty $\frac{\pi}{2}$ se tedy liší o 0,00008.

7.4 Josef Husák

Josef Husák publikoval v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky [20] přibližné řešení kvadratury kruhu.

Mějme čtverec $CDEF$ o straně a (viz obr. 7.5). Nad úhlopříčkou CE sestrojme rovnostranný trojúhelník CGE a do deltoidu $CGEF$ vepišme kružnici k. Obsah kruhu ohraničeného touto kružnicí je přibližně roven obsahu čtverce $CDEF$.



Obrázek 7.5: Kvadratura kruhu podle J. Husáka

Důkaz:

Označme S průsečík úhlopříček čtverce $CDEF$, střed kružnice k označme O a b délku úsečky OE. Bod O leží na průsečíku os úhlů deltoidu $CGEF$.

Platí tedy

$$\alpha = \frac{60^\circ + 45^\circ}{2} = 30^\circ + \frac{45^\circ}{2}$$

a z toho dále

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 60^\circ + \frac{45^\circ}{2}.$$

K určení poloměru kružnice k nejprve vypočítáme délku b z trojúhelníka $\triangle FEO$.

$$a : b = \sin\beta : \sin 45^\circ = \sin\left(60^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right) : \sin 45^\circ,$$

a odtud

$$b = \frac{a \sin 45^\circ}{\sin\left(60^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right)}.$$

Dále platí

$$r = b \sin\alpha = b \sin\left(30^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right).$$

Po dosazení za b a po úpravě dostaneme

$$r = \frac{a \sin 45^\circ \sin\left(30^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right)}{\cos\left(30^\circ - \frac{45^\circ}{2}\right)}.$$

Součty úhlů v čitateli i jmenovateli rozvineme dle známých vzorců a zlomek dělíme $\cos\frac{45^\circ}{2}$. Obrdžíme

$$r = \frac{a\sin 45^\circ\left(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ \tan\frac{45^\circ}{2}\right)}{\cos 30^\circ + \sin 30^\circ \tan\frac{45^\circ}{2}}.$$

Dosadíme hodnoty pro jednotlivé úhly

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dostaneme

$$r = \frac{a\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\tan\frac{45^\circ}{2}\right)}{2\left(\sqrt{3} + \tan\frac{45^\circ}{2}\right)}.$$

Ze vzorce pro tangens polovičního úhlu plyne

$$\tan\frac{45^\circ}{2} = -1 + \sqrt{2},$$

což po dosazení dá

$$r = \frac{a\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)}{2\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1\right)}.$$

Zlomek usměrníme

$$r = \frac{a\left(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1\right)}{2} = \frac{a\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}.$$

Tedy

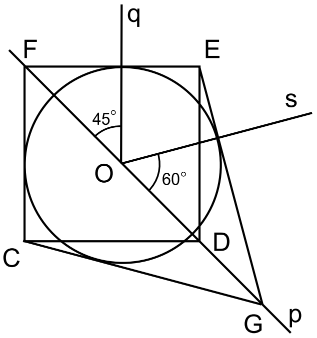
$$r = 0{,}56582625 \cdot a$$

a obsah kruhu vychází

$$\pi r^2 = 1{,}00581023 \cdot a^2.$$

Tedy obsah kruhu je přibližně o 0,6 % větší než obsah čtverce $CDEF$.

Chceme-li řešit opačnou úlohu, tj. k danému kruhu sestrojit rovnoplochý čtverec, postupujeme následovně: Středem O kružnice k veďme přímku p. Dále veďme středem O přímky q a s, které s přímkou p svírají úhly 45° a 60° (viz obr. 7.6). Sestrojme průsečíky přímek q a s s kružnicí k a veďme v nich tečny k této kružnici. Získáme tak body E a F, čímž je úloha vyřešena.



Obrázek 7.6: Kvadratura kruhu podle J. Husáka

7.5 Antonín Fail

A. Fail ve svých publikacích [21] a [22] z let 1924 a 1927 popisuje konstrukce vedoucí k řešení úloh kvadratury kruhu, trisekce úhlu a zdvojení krychle. Ačkoliv v názvu stojí „pouze pravítkem a kružítkem“, není možné považovat tato řešení za eukleidovské konstrukce právě díky způsobu používání pravítka. V případě zdvojení krychle autor používá dvě pravítka, která vzájemně posouvá, ve zbylých dvou řešeních je dokonce použito pravítka z ohebného materiálu na způsob křivítka. Nelze tedy v žádném případě hovořit o eukleidovské konstrukci.

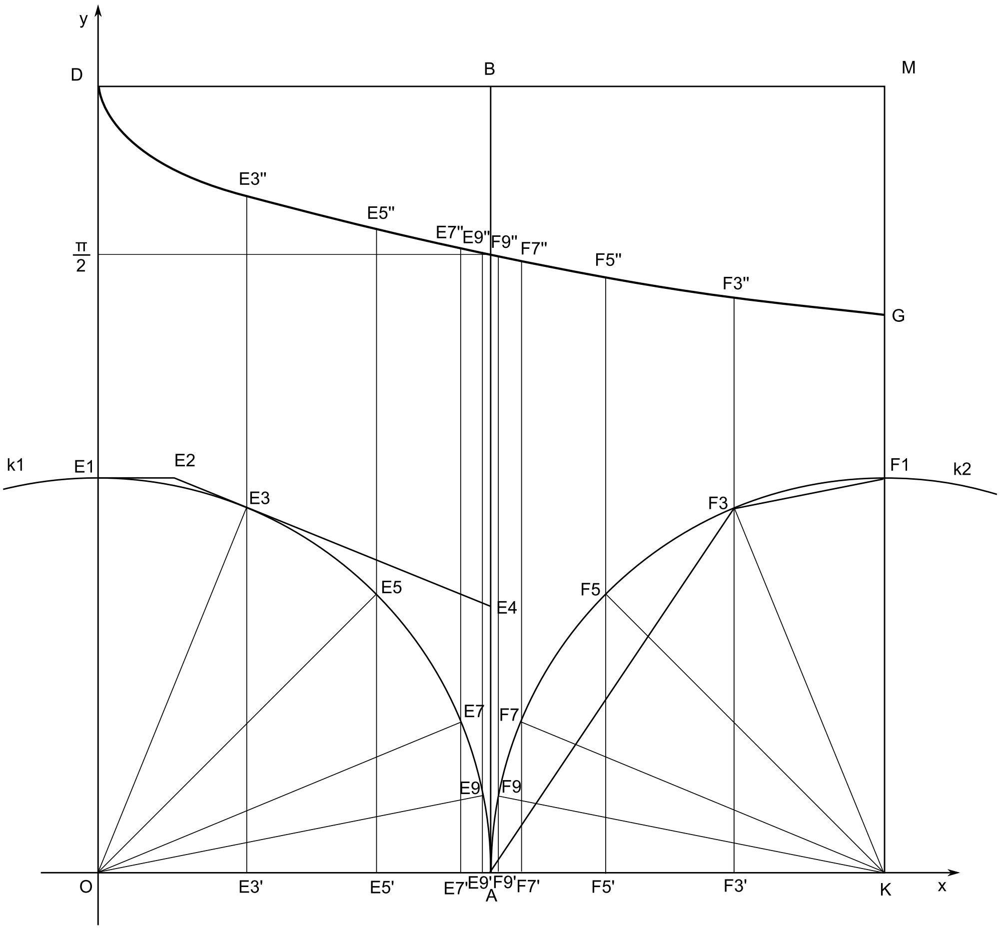
Ukažme nyní jednotlivá řešení.

Kvadratura kruhu

Tento způsob řešení kvadratury kruhu je založen na myšlence, že kružnice je přechodem od opsaných mnohoúhelníků k mnohoúhelníkům vepsaným.

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem O. V této soustavě sestrojíme dvě kružnice: $k_1(O, 1)$ a $k_2(K, 1)$, kde bod K má souřadnice $[2, 0]$. Obě kružnice mají jeden společný bod $A = [1, 0]$. Dále sestrojíme čtverec $OKMD$, kde $M = [2, 2]$ a $D = [0, 2]$. Střed úsečky DM označíme B. Průsečík kružnice k_1 s úsečkou OD označíme E_1.

Bod E_5 na obrázku 7.7 získáme rozpůlením úhlu $\angle AOE_1$. Dalším půlením získáme body E_3 a E_7, bod E_9 potom rozpůlením úhlu $\angle AOE_7$. Analogicky na kružnici k_2 sestrojíme body F_1, F_3, F_5, F_7 a F_9. Z těchto bodů dále spustíme kolmice na osu x, čímž na této ose získáme po řadě body E_3', E_5', E_7',



Obrázek 7.7: Kvadratura kruhu podle A. Faila

E_9', F_9', F_7' F_5' a F_3'. Na tyto kolmice budeme nanášet jednu čtvrtinu délek obvodů mnohoúhelníků opsaných kružnici k_1, resp. vepsaných kružnici k_2. Úsečka OD má délku jedné čtvrtiny obvodu čtverce opsaného kružnici k_1. Na druhé straně z bodu K naneseme délku strany vepsaného čtverce, čímž získáme bod G. Délka úsečky $E_5'E_5''$ je rovna $\frac{1}{4}$ obvodu pravidelného 8-úhelníka opsaného k_1, délka úsečky $F_5'F_5''$ je pak rovna $\frac{1}{4}$ obvodu vepsaného pravidelného 8-úhelníka. Stejně tak úsečky $E_7'E_7''$ a $F_7'F_7''$ mají délky jedné čtvrtiny obvodu opsaného, resp. vepsaného pravidelného 16-úhelníka a úsečky $E_9'E_9''$ a $F_9'F_9''$ pravidelného 32-úhelníka.

Body D, E_5'', E_7'', E_9'', F_9'', F_7'', F_5'' a G leží na křivce. Mezery mezi některými jejími body jsou však příliš velké. Vyplníme je tedy body, které získáme stejným způsobem s tím rozdílem, že na příslušné kolmice budeme nanášet čtvrtiny obvodů nepravidelných opsaných, resp. vepsaných mnohoúhelníků. Jako příklad jsou na obrázku 7.7 uvedeny části mnohoúhelníků $E_1\,E_2\,E_3\,E_4\,A$ a $F_1\,F_3\,A$.

Nyní je nutné použít pravítko v rozporu s pravidly pro eukleidovské konstrukce.

Autor ve své publikaci [22] píše:

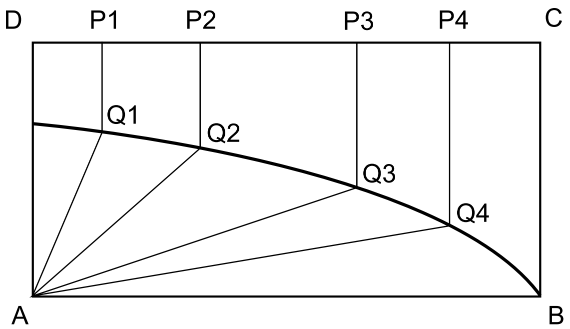
„Abychom bod $\frac{\pi}{2}$ nalezli, položme pružné (ohebné) ocelové pravítko na bok, jednou stranou kolmo k nárysné rovině a jeho k nárysné rovině přiléhající hranu veďme přesně všemi získanými (...) body, čímž obdržíme (resp. narýsujeme) křivku (...), jež na úsečce AB projde přesně bodem $\frac{\pi}{2}$."

Tedy takto sestrojená křivka protne úsečku AB v bodě, jehož y-ová souřadnice je $\frac{\pi}{2}$. Sestrojit z úsečky této délky úsečku délky $\sqrt{\pi}$ již není nic složitého.

Trisekce úhlu

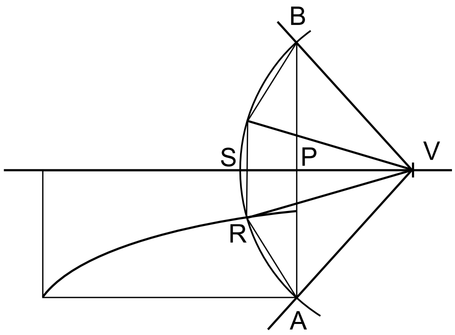
Pro řešení úlohy trisekce úhlu využívá A. Fail pravítka speciálního tvaru (viz obr. 7.8).

Sestrojíme obdélník $ABCD$ takový, že $|AB| = 2|BC|$. Z úsečky CD spustíme na úsečku AB libovolný, dostatečně velký počet kolmic. Na každé z nich najdeme bod Q_i tak, aby platilo $|Q_iA| = 2|P_iQ_i|$. Body Q_i leží na křivce, kterou sestrojíme ohnutím pravítka stejně jako v předchozím případě.



Obrázek 7.8: Trisekce úhlu podle A. Faila

Z obrázku 7.9 je zřejmé, jak zamýšlel autor této metody využít své „pravítko“ k sestrojení třetiny libovolného úhlu. Původní úhel je $\angle AVB$, úhel $\angle AVR$ má pak velikost jedné jeho třetiny.



Obrázek 7.9: Použití trisektoru A. Faila

Zdvojení krychle

Postup pro konstrukci $\sqrt[3]{2}$, což je délka hrany hledané krychle, je následující:

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic (O, x, y). Do této soustavy zaneseme následující body: $A = [0, -1]$, $B = [-1{,}25, 0]$, $Q = [2, 0]$. Sestrojíme úsečku AB a v bodě B k ní vedeme kolmici, která protne osu y v bodě C. Z tohoto bodu dále vedeme kolmici na úsečku BC, která protne osu x v bodě P.

Nyní podle těchto úseček přiložíme dva pravoúhlé trojúhelníky; na obrázku 7.10 jsou označeny DEF a RSC. Bod D leží na ose x, strana DF prochází bodem A. Bod C leží na ose y a strana CS prochází bodem P. Odvěsny DE a CR leží na jedné přímce.

Nyní posuneme pravítka tak, aby bod A stále ležel na straně DF, bod D se pohyboval po ose x, bod C po ose y a strana CS procházela nyní bodem Q o souřadnicích $[2, 0]$.

Pak má bod D souřadnice $[-\sqrt[3]{2}, 0]$.

Důkaz:

Trojúhelníky $\triangle AOD$ a $\triangle DOC$ jsou podobné podle věty uu. Platí tedy:

$$\frac{|OA|}{|OD|} = \frac{|OD|}{|OC|}.$$

Po dosazení $|OA| = 1$ lze z této rovnosti odvodit vztah

$$|OC| = |OD|^2.$$

Stejně tak trojúhelníky DOC a COQ jsou podobné podle věty uu. Platí tedy obdobný vztah:

$$\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|OQ|}{|OC|},$$

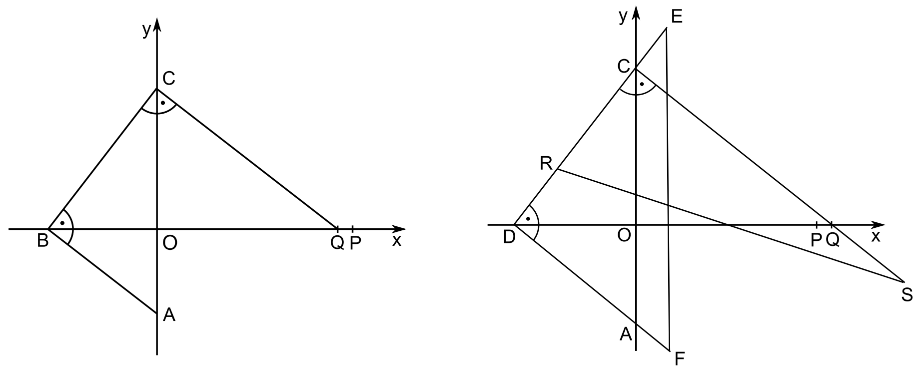
ze kterého dále odvodíme:

$$\frac{|OD|^2}{|OD|} = \frac{2}{|OD|^2}$$

a dále:

$$\begin{aligned} |OD| &= \frac{2}{|OD|^2} \\ |OD| &= \sqrt[3]{2}, \end{aligned}$$

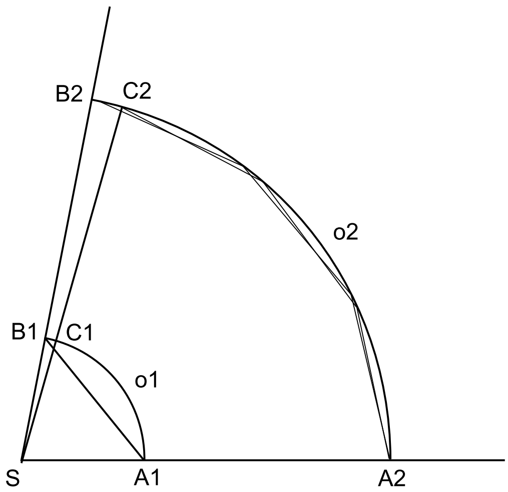
což jsme chtěli dokázat.



Obrázek 7.10: Zdvojení krychle podle A. Faila

7.6 Josef Švehla

Josef Švehla publikoval v [23] metodu dělení úhlu na libovolný počet částí. Podle jeho postupu lze tedy řešit jednak úlohu trisekce úhlu, jednak konstrukci pravidelných n-úhelníků. Jedná se o přibližnou konstrukci, kterou



Obrázek 7.11: Dělení úhlu podle J. Švehly

však lze libovolněkrát zpřesňovat, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

Postup konstrukce vychází z předpokladu, že délky oblouků kružnic jsou přímo úměrné jejich poloměrům. Chceme-li tedy rozdělit úhel na n stejných částí, sestrojíme oblouk o_1 a oblouk o_2, jehož poloměr je n-krát větší (viz obr. 7.11, kde je poloměr SA_2 třikrát větší, než poloměr SA_1). Délku tětivy oblouku o_1 naneseme n-krát na oblouk o_2 – dostaneme bod C_2. Bod C_2 spojíme s bodem S, průsečík této úsečky s obloukem o_1 označíme C_1. Nyní vezmeme délku tětivy B_1C_1 a přičteme ji k původní tětivě A_1B_1. Výslednou úsečku opět naneseme n-krát na oblouk o_2. Postup opakujeme, dokud bod C_2 nesplyne s bodem B_2, nebo se k němu alespoň dostatečně nepřiblíží.

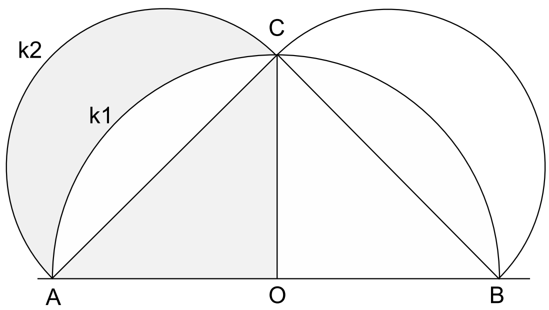
Kapitola 8

Hippokratovy měsíčky

S úlohou kvadratury kruhu souvisí také takzvané Hippokratovy menisky, neboli měsíčky. Jedná se o rovinné útvary ohraničené oblouky dvou kružnic, k nimž je možné sestrojit rovnoplochý mnohoúhelník, a tedy provést jejich kvadraturu.

Tyto měsíčky objevil Hippokrates z Chiu v 5. století př. n. l. Fakt, že je možné provést kvadraturu těchto křivočarých útvarů, patrně ve své době dával falešnou naději na úspěšné vyřešení kvadratury kruhu.

První měsíček sestrojíme následovně. Nad úsečkou AB sestrojíme Thaletovu kružnici k_1 se středem O a na ní bod C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný. Nad usečkou AC sestrojíme polokružnici k_2. Oblouky kružnic k_1 a k_2 ohraničují měsíček, jehož obsah je stejný jako obsah trojúhelníka $\triangle AOC$.



Obrázek 8.1: Kvadratura měsíčku 1

Důkaz

Označme S_m obsah měsíčku ohraničeného oblouky kružnic k_1 a k_2, dále R_1 obsah půlkruhu sestrojeného nad úsečkou AB a R_2 obsah půlkruhu sestrojeného nad úsečkou AC.

Z podobnosti plyne

$$R_2 = \frac{1}{2}R_1.$$

Dále označíme S_u obsah kruhové úseče kružnice k_1 nad úsečkou AC. Je

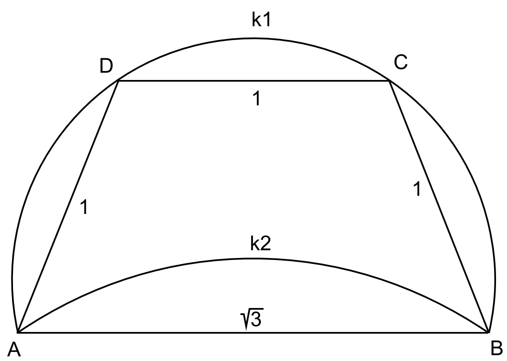
$$\frac{1}{2}R_1 - S_u = R_2 - S_u,$$

a tedy

$$S_{\Delta AOC} = S_m,$$

což jsme chtěli dokázat.

Na obrázku 8.2 je znázorněn lichoběžník $ABCD$, jehož strany mají délky 1, 1, 1 a $\sqrt{3}$. Tomuto lichoběžníku je opsána kružnice k_1 a dále je pomocí oblouku kružnice k_2 nad úsečkou AB sestrojena kruhová úseč, která je podobná úsečím nad ostatními stranami lichoběžníka. Obsah měsíčku ohraničeného oblouky kružnic k_1 a k_2 je pak roven obsahu lichoběžníka $ABCD$.



Obrázek 8.2: Kvadratura měsíčku 2

Důkaz

Zřejmě jsou kruhové úseče nad úsečkami BC, CD a AD shodné, neboť je vymezují shodné tětivy.

Označme S_{u1} obsah kruhové úseče nad úsečkou AB a S_{u2} obsah kruhové úseče nad úsečkou BC. Úseče jsou podobné s koeficientem podobnosti $\sqrt{3}$, proto je

$$S_{u1} = 3S_{u2}.$$

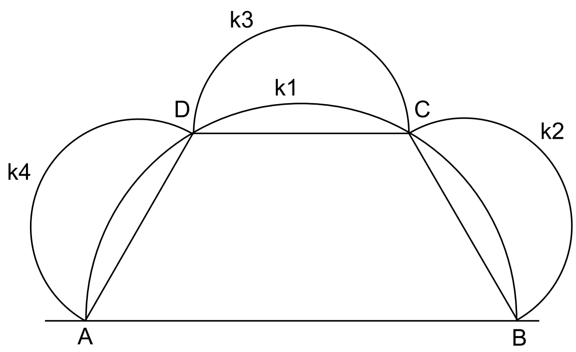
Z obrázku 8.2 je zřejmé, že

$$S_m + S_{u1} = S_{lich} + 3S_{u2},$$

tedy platí

$$S_m = S_{lich}.$$

Při konstrukci dalšího měsíčku vyjdeme z pravidelného šestiúhelníku. Jeho polovina tvoří lichoběžník $ABCD$, jemuž je opsaná kružnice k_1 (viz obr. 8.3). Nad stranami BC, CD a AD sestrojíme polokružnice k_2, k_3 a k_4. Vzniknou tak 3 shodné měsíčky. Součet jejich obsahů spolu s obsahem půlkruhu sestrojeného nad úsečkou BC je roven obsahu lichoběžníka $ABCD$.



Obrázek 8.3: Kvadratura měsíčku 3

Důkaz

Označme r poloměr kružnice k_1. Dále označme S_1 obsah půlkruhu ohraničeného kružnicí k_1, S_2 obsah půlkruhu ohraničeného kružnicí k_2 (resp. k_3,

k_4) a S_u obsah kruhové úseče ohraničené kružnicí k_1 nad úsečkou BC (resp. CD, AD).

Z podobnosti vyplývá

$$S_2 = \frac{1}{4} S_1$$

Obsah měsíčku můžeme vyjádřit jako

$$S_m = S_2 - S_u.$$

Platí tedy:

$$S_{lich} = S_1 - 3S_u = 3S_m + S_2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Kapitola 9

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s pěti klasickými úlohami řecké matematiky, jejich neřešitelností a různými typy postupů, kterými se v minulosti matematikové pokoušeli o jejich vyřešení.

Není a ani nemůže být vyčerpávajícím souhrnem všech příspěvků napsaných na toto téma. Vždyť ony úlohy jsou staré několik tisíciletí a matematiků, kteří se pokoušeli o jejich řešení bylo nepočítaně. Snažila jsem se tedy vybrat takové metody, které jsou nějakým způsobem zajímavé, např. z historického či matematického hlediska. Často jeden postup reprezentuje celou skupinu možných řešení založených na stejném principu. Budete-li se o tuto problematiku zajímat dále, jistě dříve či později najdete nebo dokonce vymyslíte řešení, které zde není uvedeno.

Přesto pevně věřím, že vám tato práce poskytla mnohé zajímavé informace týkající se nejen těchto pěti klasických úloh, ale i rozličných geometrických úvah.

Literatura

[1] Servít, F.: *Eukleidovy základy.* JČM, Praha, 1907.

[2] Bold, B.: *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* Dover Publications, INC., New York, 1982.

[3] Lomtatidze, L.: *Křivky v antické geometrii* [online]. [cit. 6. 10. 2008], <http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=507>.

[4] Kořínek, V.: *Základy algebry.* ČSAV, Praha, 1956.

[5] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* SNTL, Praha, 1987.

[6] Šofr, B.: *Euklidovské geometrické konštrukcie.* Alfa, Bratislava, 1976.

[7] Lindemann, F.: *Über die Zahl* π. Mathematische Annalen 20, München, 1882.

[8] Bečvář, J., Fuchs, E.: *Historie matematiky I.* JČMF, Brno, 1994.

[9] Heath, T. L.: *The Work of Archimedes.* Dover Publisher, Inc., Mineola, New York, 2002.

[10] Hull, T.: *Origami a geometrie* [online]. [cit. 16. 1. 2009], <http://www.origami.cz/Geometrie/axiomy.html>.

[11] Dudley, U.: *A Budget of Trisections.* Springer-Verlag, Inc., New York, 1987.

[12] Loy, J.: *Angle Trisection* [online]. [cit. 12. 3. 2009], <http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm>.

[13] Lomtatidze, L.: *Užití Hippiovy kvadratrix pro trisekci úhlu* [online]. [cit. 6. 10. 2008], <http://www.math.muni.cz/~mlc/CD/uloha2.pdf>.

[14] Kolman, A.: *Dějiny matematiky ve starověku.* Academia, Praha, 1969.

[15] Breidenbach, W.: *Die Dreiteilung des Winkels.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1951.

[16] Little, J. C., Harris, V. C.: Simultaneous Solution of the Three Acient Problems. *Mathematics Magazine* 37, 310-311, 1964.

[17] Vaňous, J. R.: Trisektorie. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 10, 153-159, 1881.

[18] Šrůtek, J.: Nový způsob rektifikace čáry kruhové. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 21, 83-88, 1892.

[19] Pleskot, A.: Poznámka k rektifikaci kruhu. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 22, 152-153, 1893.

[20] Husák, J.: Přibližné řešení kvadratury kruhu. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 26, 255-257, 1897.

[21] Fail, A.: *Dvojnásobek krychle, dělení úhlu na tři stejné díly, obvod kruhu a jeho čtverečný obsah.* J. Gusek, Kroměříž, 1924.

[22] Fail, A.: *Kvadratura kruhu, trojdílnost úhlu, dvojnásobek krychle, precisně pouze kružítkem a pravítkem.* J. Gusek, Kroměříž, 1927.

[23] Švehla, J.: *Moje dělení úhlu (kruhu) kružítkem a pravítkem.* Plzeň, 1941.