**Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze**

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

## Využití logických paradoxů ve výuce matematiky na středních školách

*Logical paradoxes utilization for math teaching at high schools*

**Vedoucí diplomové práce:** Doc. RNDr. Ladislav Kvasz, Ph.D.

Kusbachová Zuzana

2008

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Využití logických paradoxů ve výuce matematiky na středních školách* vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a pramenů a za odborného vedení vedoucího práce.

V Praze dne ……………… …………………………

Zuzana Kusbachová

Děkuji vedoucímu diplomové práce Doc. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Ph.D. za trpělivost, velmi cenné rady, podnětné připomínky a metodické vedení.

## Anotace

Cílem práce je přinést nový pohled na pojetí výuky matematické logiky, hlavním tématem práce je proto využití logických paradoxů ve výuce matematiky na středních školách. Práce obsahuje stručný přehled jednotlivých paradoxů (především Zénónovy aporie a paradoxy naivní teorie množin), které jsou později využity při výuce, rozbor současné situace na českých školách a praktickou část. Praktická část je složena z konkrétních návrhů vyučovacích postupů, jejich ověření v praxi a návrhů na jejich zlepšení.

*The main goal of this work is to bring a new view on the teaching approach to the mathematical logic. The main issue is therefore the using of logical paradoxes in the math teaching at the high schools. This work contains (1) a brief overview of the particular paradoxes (mainly the Zeno's paradoxes and the paradoxes of naive set theory) which are subsequently used for practical teaching, (2) study of the present state at the Czech schools and (3) a practical part. This practical part is composed from the factual proposes of the teaching plans, verification and possible improvements of these plans.*

*Věnováno všem, kterým nikdy nebyla věnována žádná diplomová práce.*

**Obsah**

1. Úvod ................................................................ 7

2. Základní přehled paradoxů a jejich problematiky.................... 11

3. Současná situace výuky logiky na českých středních školách....... 21

3.1 Výuka matematické logiky na SŠ – výroková logika........ 24

3.2 Zpracování výrokové logiky a úvodu do teorie množin v učebnicích.................................................. 27

3.3 Pojem nekonečna a limity.................................... 36

4. Využití paradoxů při výuce matematiky.............................. 40

4.1 Historický aspekt využití logických paradoxů ve výuce... 42

4.2 Intuitivní přístup mladších studentů.......................... 43

4.3 Využití logických paradoxů ve výuce na střední škole..... 44

4.4 Konkrétní návrhy didaktických postupů..................... 45

4.5 Reflexe jednotlivých hodin a návrh na úpravu jednotlivých příprav ...................................................... 59

5. Závěr..................................................................... 67

Použitá literatura.......................................................... 69

# 1. Úvod

Inspirací ke zvolení tohoto tématu diplomové práce byla vlastní zkušenost autorky s nedostatečným vzděláním v oblasti matematické logiky získaným na střední škole (s jinak velmi kvalitní výukou matematiky), které se projevilo hned po nástupu na vysokou školu.

Současná reforma školství vede ke změně obsahů, ale hlavně ke změně chápání učiva. Již není prvořadé množství učiva v osnovách, ale spíše jeho podání žákům a jeho využití pro rozvíjení jejich kompetencí.

Tato práce by měla přinést jiný pohled především na výuku logiky na středních školách. Stručně se zmíníme o této problematice i v rámci výuky na základních školách a víceletých gymnáziích, stěžejní pro nás však bude věková skupina studentů středních škol. Ať se podíváme do osnov nebo do současných tematických plánů, všude nalezneme základní myšlenku, že matematika, jako školní předmět, by měla především rozvíjet logické myšlení a zvyšovat matematickou gramotnost studentů, schopnost spočítat například průběh funkce pomocí derivací je pak již jen vedlejší efekt. Přesto logika jako taková se v rámci předmětu matematika neprobírá vůbec (na některých typech škol jsou alespoň základní poznatky vyučovány v rámci humanitních společenskovědních předmětů), v užším vymezení se pak probírá pouze okrajově v tematickém bloku „výroková logika". Snahou tohoto textu bude nastínit několik vyučovacích hodin, které by byly vystavené na výukových metodách problémové úlohy a diskuze a na tématu logických paradoxů (od Zénónových aporií po základní paradoxy naivní teorie množin). Tato práce si nedělá nárok na vědecké zpracování problematiky logických paradoxů, ale bude se snažit o jejich pedagogické využití, tj. možné zařazení do výuky, a to vhodným způsobem především pro studenty prvních ročníků středních škol a gymnázií.

Součástí práce bude stručný historický přehled zmíněné problematiky logických paradoxů (především sémantických paradoxů a paradoxů, jež jsou součástí matematické logiky), rozbor současné výuky logiky v rámci matematiky na středních školách, přípravy na pět vyučovacích hodin, rozbor jejich zkušební realizace a návrhy na zlepšení.

Matematická logika je vědní disciplína nacházející se na rozhraní mezi logikou a matematikou. Zabývá se zkoumáním, formalizováním a matematizováním zejména těch oblastí logiky, na jejichž základech je postavena matematika. V centru jejího zájmu jsou pojmy jako důkaz, teorie, axiomatizace, model, bezespornost a jiné. Není tedy divu, že se v rámci jejího zkoumání čas od času vyskytnou i paradoxy, které nabourávají základní teorie. K jejich odstranění dochází především změnou v definování pojmů. Tudíž nelze zastírat, že v problematice logických paradoxů má velký vliv jazyk a jeho systém. Neoddiskutovatelné spojení lingvistiky (a to především sémantiky) a matematiky je právě jedna z věcí, které jsou pro studenty nepochopitelnou „španělskou“ vesnicí. Jazyk většina lidí používá jako nástroj běžného každodenního dorozumívání, jeho vliv na naše poznávání si však málo kdo plně uvědomuje. Na druhou stranu bez komunikace, která probíhá vždy pomocí nějakého systému (ať už jím je jazyk v běžném chápaní, nebo například jazyk matematických symbolů), nejsme schopni problémy ani formulovat, natož je řešit.

Slovo „paradox“ můžeme definovat jako tvrzení, které spojuje pojmy nebo výroky v běžném výkladu si odporující v neočekávaný, překvapivý smysluplný celek. Nesmyslnost paradoxu je však pouze zdánlivá (wikipedie). Pojem dle Českého etymologického slovníku pochází z řeckého *parádoxos* – nepodobný, podivný, neočekávaný, slovo je složené z *pará* – proti a *dóxa* – mínění. Není tedy divu, že nejstarší a nejznámější logické paradoxy pocházejí také z antického Řecka. Jejich autorem byl Zénón z Eleje, který se jimi pokoušel obhájit učení svého učitele Parmenida o nemožnosti pohybu a nedělitelnosti bytí. Mezi jeho nejznámější *aporie* patří Achilles a želva nebo Letící šíp. Na jeho paradoxy navazovala spousta dalších starověkých filozofů, jako například krétský filozof Epimenidés z Knóssu, který kolem roku 600 př. n. l. vyslovil jeden z nejznámějších logických paradoxů, dnes nejčastěji formulován jako paradox lháře.

O historii jednotlivých paradoxů se zmíníme v jednotlivých podkapitolách. Zdaleka to však nebude vyčerpávající seznam, vypíšeme zde pouze některé, o jejichž využití lze uvažovat v souvislosti s výukou logiky na střední škole.

Význam jednotlivých logických paradoxů není pro nás, jako pro pedagogy, v jejich řešení, ale v tom, že odhalují chyby a špatné postupy v myšlení. Chceme-li studenty dovést k tomu, aby samostatně hledali různé metody, jak řešit matematické úlohy, tedy k vyššímu stupni matematické gramotnosti, musíme se nejprve zaměřit na jejich myšlení, odstranění nežádoucích principů nebo špatných předpokladů. V momentě, kdy člověk narazí na paradox poprvé, je vystaven rozhodnutí, zda nad ním mávnout rukou jako nad nesmyslem, nebo zda si jej připustit a vystavit se tak nutnosti přehodnotit své myšlení.

Myšlení jako takové je oborem psychologie a tato práce si neklade za cíl psychologické zkoumání. Jde nám především o reálný dopad těchto změn a jejich praktické využití ve školní praxi.

Podle hypotézy genetické paralely platí, že vývoj žákovských představ koresponduje s historickým vývojem konkrétní vědecké disciplíny. A tedy i u našich žáků dochází k situacím, ve kterých by jim logika mohla pomoci překonat obtíže s uchopením složitějších a zobecňujících matematických pojmů, které přímo nesouvisí se světem, který je obklopuje. Dítě se od malička setkává s matematikou a její základní pojmy a principy přijímá intuitivně. Bez rozpaků přijme, že jedna plus jedna jsou dvě, že pomocí zlomků vyjadřujeme dělení, přes koláčový či čokoládový model přijme i operace s nimi, většinou ale první problémy nastávají s pojmem nekonečna. To však ještě nadanější dítě s trochou představivosti stále intuitivně zpracuje a vytvoří si nějaký vlastní pojem nekonečna (potenciálního). Stejně jako u většiny velkých matematických teorií, se zkrátka začíná od intuitivního budování systému. Dříve či později se narazí na problém (paradox), který nelze touto cestou překonat, a pak přichází na řadu změna myšlení. V matematické dráze běžného studenta je to několik okamžiků: násobení záporných čísel, zavedení iracionálních čísel, pravdivostní tabulka implikace, komplexní čísla, případně n-rozměrné prostory, diferenciální počet a nekonečně malé veličiny. Daly by se vyjmenovat asi i jiné momenty, ale berme toto jako ty nejtypičtější pro většinu studentů.

Způsobů jak tyto zlomové momenty překonat je hned několik, bohužel mezi současnými studenty převládá ten nejpohodlnější, tudíž přijmout to jako daný fakt a nepřemýšlet nad tím, nehledat novou cestu, ale přijmout hotové poznatky bez námitek. Bohužel i někteří učitelé často volí cestu nejmenšího odporu a přirozené dotazy studentů, na které není snadná odpověď, raději smetou ze stolu.

Tato práce o paradoxech by měla ukázat, že i náročná témata jdou zpracovat tak, aby slabší studenty nepřetěžovala, ale zvídavé a matematicky nadané inspirovala k dalšímu přemýšlení a hledání své cesty k logickému myšlení.

# 2. Základní přehled paradoxů a jejich problematiky

V této části se pokusíme předložit základní přehled významných paradoxů, nástin jejich problematiky a řešení.

### *Paradox lháře*

Mezi nejznámější a nejzmiňovanější z paradoxů antického Řecka patří paradox lháře, pod který lze zařadit několik jednotlivých paradoxů. Mezi nejstarší formulaci tohoto sporu patří verš z díla krétského básníka Epimenida z Knóssu, který datujeme do 6. století před naším letopočtem a který zní: *„Všichni Kréťané jsou lháři."* Tímto výrokem se dostáváme do bludného kruhu právě proto, že jeho autor je sám Kréťan. Výrok by tedy měl být nepravdivý. Jestliže tedy neplatí, že všichni Kréťané jsou lháři, pak je možné, že Epimenidův výrok je pravdivý, a tedy platí, že všichni Kréťané jsou lháři. Řešení tohoto paradoxu je celkem prosté, stačí nám připuštění existence alespoň jednoho Kréťana, který není lhářem, čímž celý paradox zmizí. Paradox by však zůstal neřešitelný za předpokladu, že Epimenidés je jediným Kréťanem.

Předpoklad existence právě jedné entity, o které je referováno, využívá při své formulaci analogického paradoxu další antický filozof, Eubúlidés z Mílétu, který ve 4. století před naším letopočtem pronesl tuto větu: „Jakýsi člověk říká, že lže. Je to, co říká, pravdivé či nepravdivé?" Zde se z bludného kruhu nevymotáme, protože mluví-li člověk pravdu, pak lže a naopak, pokud lže, tak mluví pravdu. Poměrně zajímavé, je to, že není známo, zda tento filozof znal Epimenidův paradox či nikoli.

Analogický paradox vzniká u dalších formulací tohoto typu, jako například: „Tato věta je nepravdivá“.

### *Zénónovy aporie*

Zénón z Eleje byl předsokratovským filozofem, který působil v pátém století před naším letopočtem. Jako žák Parmenida se snažil svými aporiemi podpořit jeho učení o nemožnosti pohybu a nedělitelnosti bytí. Slovo *aporie* je řeckého původu a doslova znamená ne-cesta, tj. neprůchodné, neřešitelné. Aporie tedy znamená neřešitelný rozpor mezi dvěma stejně dobře podloženými názory. Známé jsou především čtyři Zénónovy aporie, které se snaží ukázat, že jakýkoli pohyb a změna je pouze výtvorem našich smyslů a našeho vnímání, tedy že jsou iluzorní. Tyto aporie jsou logicky nevyvratitelné, přesto z běžného života víme, že je nelze považovat za pravdivé. I to je jeden z důvodů, proč jsou neustále středem pozornosti filozofů a logiků.

V této práci se budeme věnovat pouze třem z nich. První z nich je známa pod názvem *Achilleus*.

*„Spočívá v tom, že nejrychlejší běžec nikdy nemůže v běhu předstihnout nejpomalejšího tvora, poněvadž pronásledující musí nejprve dosáhnout bodu, odkud vyběhl pronásledovaný, takže ten pomalejší musí být vždy o něco napřed.“* [Kirk, Raven 2004, str. 352]

Zénón své tvrzení vysvětluje tím, že než se Achilles dostane do výchozího bodu želvy, tak želva popojde a bude v jiném bodě. Než se Achilles přesune do tohoto bodu, tak se želva opět posune o kousek před něj a takto pořád dál, proto ji Achilles nikdy nedoběhne.

Druhá aporie někdy známá pod názvem *Dichotomie* je v Aristotelově spisu zmíněna velmi stručně a říká nám vlastně to, že jakýkoli pohyb je nemožný.

*„...paradox tvrdí, že pohyb neexistuje, poněvadž to, co se pohybuje, musí nejprve dojít do poloviny své dráhy, než dojde k cíli...“* [Kirk, Raven 2004, str. 349]

Problematika tohoto tvrzení spočívá v tom, že cokoli, co se pohybuje, musí nejprve, než dorazí do cíle, dorazit do poloviny této cesty. Dříve než dospěje do poloviny této cesty, musí dorazit také do poloviny této poloviny a tak dále. Pohyb je tedy vyloučen, jelikož těleso nemůže dosáhnout cíle vykonáním žádného konečného počtu kroků. A protože je nemožné, aby nekonečný počet kroků byl vykonán v konečném čase, nemůže se těleso do cíle dostat. Jinými slovy pohyb se nemůže ani začít. (Zlatoš 1995, str. 76)

Poslední Zénónovou aporií, kterou v této práci zmíníme, bude Letící šíp. Na formulaci i pochopení už je o něco náročnější než dvě předcházející.

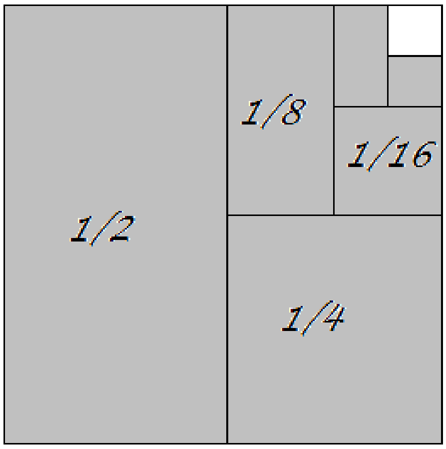
*„Třetí právě zmíněný paradox spočívá v tom, že pohybující se šíp je v klidu. To vyplývá z předpokladu, že čas se skládá ze samých ‚nyní'... Zénón ruší pohyb, když říká: ‚To co je v pohybu, se nepohybuje ani v místě, na němž je, ani v místě, na němž není.' “* [Kirk, Raven 2004, str. 353]

Letící šíp se nepohybuje, protože v každém bodě svého pohybu spočívá na jednom místě. Každému časovému okamžiku bychom tedy mohli přiřadit zcela určitý bod trajektorie letu šípu, takže v každém časovém okamžiku spočívá šíp nehnutě ve vzduchu. Kdyby se totiž v nějakém okamžiku pohyboval, nebyl by v tom okamžiku na svém místě, takže by nebyl vlastně nikde.

Řešení těchto paradoxů nám nabízí již Aristoteles, který se ve svém díle Zénónovými aporiemi zabývá. Nemožnost pohybu popsanou v Dichotomii vyvrací odmítnutím teze, že není možné dotknout se nekonečného množství bodů v konečném čase. Konečný čas je dle něho nekonečně dělitelný a *nekonečně dělitelný* čas běžci dostačuje, aby překonal *nekonečně dělitelnou* vzdálenost a dotknul se bodů vyznačujících její rozdělení. Teze by podle Aristotela byla pravdivá pouze v případě, že by vzdálenost byla chápána jako *nekonečně mnoho aktuálně existujících bodů*. Ve svém výkladu se tak dotýká problematiky aktuálního a potenciálního nekonečna. *Achilleus* je podle Aristotela pouze zábavnou obměnou předchozího paradoxu. Řešení aporie o letícím šípu je založeno na rozdílném chápání dělení času a na uchopení času jako veličiny vůbec. (Kirk, Raven 2004, str. 350-354)

Řešení těchto paradoxů nám ale kromě filozofie nabízí i matematika. První dva lze vysvětlit pomocí součtu nekonečných konvergentních řad. V prvním případě například řady 100+10+1+1/10+1/100+... uvažujeme-li, že želva měla náskok sto metrů a pohybuje se desetkrát pomaleji. Pro druhou aporii lze pak sestavit řadu 1/2 +1/4 +1/8+1/16 +..., která jak je známo konverguje k číslu jedna. Zénónův závěr je tedy z tohoto hlediska chybný. Třetí důkaz se pak vysvětluje pomocí Leibnizova a Newtonova diferenciálního počtu a nekonečně malých veličin.

Konečnost součtu řady 1/2 +1/4 +1/8+1/16 +... lze jednoduše ukázat na následujícím obrázku, který je pochopitelný i bez znalosti matematické analýzy (Veselý 1997, str. 11) :




Přesto budeme-li na Zénónovy formulace nahlížet čistě z logického hlediska, jen obtížně budeme nacházet chybu. Jednou možností „řešení" je úvaha, že z pravdivých předpokladů je zkrátka vyvozen špatný závěr. Tedy první logická chyba je obsažena vlastně až v závěru.

### *Paradoxy naivní teorie množin – 1. polovina 20. stol.*

Z antického Řecka se skokem přesuneme na začátek 20. století, které bylo obdobím velkého rozvoje matematiky i fyziky. Na přelomu 19. a 20. století vznikalo mnoho doslova revolučních teorií, nás však bude především zajímat teorie množin z rukou matematiků Bernarda Bolzana a George Cantora. Tato teorie byla budována jako jednotící prvek celé matematiky, na jejích základech bylo dle současných matematiků možno vybudovat ostatní odvětví, tedy aritmetiku, analýzu a geometrii. Vývoj teorie množin byl ale právě v této době přerušen, jelikož se objevily spory v základních představách této teorie. Jako většina matematických odvětví prošla si i teorie množin intuitivním obdobím, tzn. byla budována na základě všeobecně přijímaných představ a předpokladů. V momentě, kdy se v tomto procesu narazilo na neřešitelný spor, musela být teorie přestavěna. Většinou k tomuto kroku slouží axiomatizace, tj. vybudování matematické teorie jakoby z druhé strany, a to tak, že na základě již známých poznatků se stanoví základní pravidla - axiomy právě tak, aby se sporům a paradoxům předešlo. Sama podstata axiomatické metody spočívá ve zvláštním způsobu, kterým definujeme matematické objekty, jejich vlastnosti a vztahy. Zásluhy na vybudování axiomatického systému teorie množin mají matematici Ernest Zermelo a Adolf Fraenkel. (Mráz 1985, str. 195)

Které paradoxy naivní teorie množin tedy způsobily tento zvrat? Do našeho přehledu patří především Russellův, Richardův a Berryho paradox. Ostatní paradoxy, které bychom mohli zařadit do této skupiny (jako jsou např. Cantorův, Burali-Fortiho či Skolemův) zde uvádět nebudeme, jelikož nejsou nezbytnou součástí našeho pedagogického pojetí. Nelze je totiž na rozdíl od výše zmiňovaných vysvětlit na základě jednoduchých pojmů a základních matematických znalostí a jejich plné pochopení vyžaduje hlubší znalosti teorie množin, jako např. znalost Cantorovy věty či dobrého uspořádání. Nejsou proto z našeho pohledu vhodné k problematické výuce žáků středních škol.

***Russelův paradox***

Russellův paradox, publikovaný v roce 1901, nám říká asi toto: Uvažujme množinu R všech množin, které nejsou prvky sama sebe. Zjednodušeně můžeme psát $R = \{x; x \notin x\}$. Pak lehce nahlédneme, že z předpokladu $R \in R$ plyne $R \notin R$ a naopak, což vede ke sporu. (Zlatoš 1995, str. 72)

Jestliže existuje množina všech množin, z kterých ani jedna není prvkem sebe sama, potom tato množina, jestliže je množinou všech množin, musí být i svým vlastním prvkem, což znamená, že jako takováto množina, která je prvkem sama sebe, patří mezi množiny, které nejsou samy svými prvky, tedy ani ona nemůže být prvkem sama sebe. Jestliže však množina není svým vlastním prvkem, potom patří mezi množiny z předpokladu, a tedy je svým prvkem, což je spor.

Russell věnoval paradoxům z oblasti teorie množin velkou pozornost a dospěl k závěru, že jsou způsobeny především nesprávně utvořenými celky, které jsou budovány na základě předpokladu, že nějaký soubor objektů může obsahovat prvky, jež lze definovat pouze pomocí tohoto souboru jako celku, což vede k bludnému kruhu. Russell proto odmítá tzv. nepredikativní definice, tj. definice, jež zavádějí určitý objekt jako prvek množiny. Důsledná eliminace nepredikativních definic ovšem není v souladu s matematickou praxí. Proto Russell navrhl řešení tohoto paradoxu pomocí zavedení úplných a neúplných symbolů, které se však neujalo pro přílišnou složitost. V dnešní době je paradox řešen právě vhodnou axiomatizací teorie množin, a to tím, že objekt R popsaných vlastností se nenazývá množinou, ale vlastní třídou, která je definována tak, aby byl spor odstraněn. Přesto se nepodařilo teorii množin vybudovat na čistě logických základech, jelikož např. Russellovy axiomy *nekonečna* a *výběru* nejsou ryze logické povahy, ale naopak jde o existenční předpoklady. (Berka 1994, str. 122)

*„Podle axiomu nekonečna má platit, že je-li n nějaké kardinální číslo, pak existuje alespoň jedna třída individuí s n prvky. Axióm výběru zase vyjadřuje, že v nějaké množině M neprázdných párovitě disjunktních množin*

*existuje nějaká množina A, která má s každou množinou X z množiny M jeden společný prvek; tato množina takříkajíc vybírá z každé množiny X právě jeden prvek."* [Berka 1994, str. 124]

Je celkem běžné, že se takovéto logické paradoxy dočkají své populární analogie. Jednu publikoval sám Russell ve Filozofii logického atomizmu (Vitálošová 2007, str. 32) pod názvem paradox holiče. Problém je nastolen touto situací – v malém městě je jediný holič, který holí právě ty obyvatele ve městě, kteří se neholí sami. Opět zde dochází ke sporu: Holí holič sám sebe? Sám sebe má holit právě tehdy, když sám sebe holit nebude. Jednoduchým řešením (analogickým k řešení Russellova paradoxu) je popření existence tohoto města. Druhou nejčastější variantou řešení je polemika o totožnosti významu slov „holit se" a „holit někoho". Jde o problém autoreference a jazyka, v jednom případě jde o sloveso zvratné, v druhém případě o sloveso tranzitivní (přechodné).

### *Richardův paradox*

Richardův paradox je vlastně jakousi parodií na Cantorovu diagonální metodu (Zlatoš 1995, str. 73) a leží na hranici mezi paradoxem logickým a matematickým. Richard bere v úvahu množinu *D* všech podmnožin množiny přirozených čísel, které lze definovat pomocí vlastností, které lze popsat libovolným přirozeným (pro nás např. českým) jazykem. Jelikož takovýto výraz se nezbytně skládá pouze z konečné kombinace z konečného počtu znaků abecedě, je zřejmě taková množina *D* spočetná. A proto lze tyto vlastnosti přirozených čísel například očíslovat, potom vlastnost *V* = "Být přirozeným číslem, které nemá vlastnost, jejímž je číslem (v daném očíslování vlastností)" je také vlastnost přirozených čísel, tedy má (v daném očíslování) nějaké číslo *n*. Pak každá z možností „*n* má vlastnost *V*" i „*n* nemá vlastnost *V*" implikuje i možnost druhou, která je její negací. (wikipedie)

Řešení tohoto paradoxu je postaveno čistě na logice, tedy na rozdělení jazyka na jazyk samotný a jazyk o jazyce, tzv. metajazyk.

### *Berryho paradox*

Na podobném principu je vystaven i Berryho paradox, který spočívá v tom, že můžeme čísla definovat pomocí víceslovného výrazu v daném jazyce. Budeme-li potom uvažovat množinu *M* všech přirozených čísel, které je možné definovat pomocí výrazu skládajícího se z určitého počtu slov, např. menšího počtu slov než dvacet, musíme připustit, že tato množina je konečná, jelikož i český jazyk má jistě konečnou slovní zásobu a tedy i počet jejích kombinací do smysluplných výrazů označujících přirozená čísla bude konečný. Proto existuje přirozené číslo *n,* pro které platí, že $n \notin M$. Potom ale výraz *„nejmenší přirozené číslo, které nemůže definovat žádným výrazem českého jazyka skládajícím se z méně než dvaceti slov"* definuje nejmenší přirozené číslo *m, které* není prvkem množiny *M*. Je však již zřejmé, že právě toto je spor, jelikož číslo *m* je definováno pomocí výrazu složeného ze sedmnácti českých slov (budeme-li za slovo brát takový objekt, který je z obou stran v textu oddělen mezerou), a tedy do množiny *M* patří. I zde jde o problematiku metajazyka.

Jak je vidět převážně na paradoxech naivní teorie množin, ruku v ruce s matematickým paradoxem jde spor logický, případně dokonce lingvistický. Dovolíme-li tedy matematice zpřesnit svou terminologii a vyjadřování a zároveň budeme chápat jazyk jako nástroj popisný, systémový a nejen určující a pojmový, jsme na dobré cestě ke správnému uchopení problematiky paradoxů a jejich následnému vyřešení.

Stejný spor, který předkládá Berryho paradox, je také někdy uváděn pod názvem Paradox sta slov. Tento paradox prvně publikoval sám Bertrand Russell a to v roce 1906. Sám Russell ale všechny zásluhy na tomto „objevu“ přičítá Berrymu. Formulace problému je prakticky totožná, pouze horní hranicí pro počet slov ve výrazu je sto slov.

Jsou to především výše uvedené paradoxy naivní teorie množin, které na začátku dvacátého století podnítily velký rozvoj matematické logiky. Mnohé z nich se dočkaly zpopularizování jako například paradox holiče, jehož obměny se znovu a znovu objevují dodnes.

Populární a stále aktuální je dnes i skupina dalších paradoxů, které svou historií zasahují až do antického Řecka, a to jsou paradoxy na pomezí teologie a logiky. Mezi nejcitovanější patří jistě paradox o existenci zla, který pochází od helenistického filozofa Epikura. Stručně řečeno jde o spor mezi existencí zla a všemohoucností boha, protože jestliže je Bůh všemocný a přeje si dobro, pak je nemožné aby existovalo zlo. (Vitálošová 2007, str. 30) Paradoxy tohoto typu byly hlavním námětem především středověkých teologických diskurzů, ale myšlenka zůstává aktuální i nadále a objevuje se například v celé řadě literárních děl. Ačkoli se to na první pohled možná nejeví jako zřejmé, i poslední zmíněný paradox úzce souvisí například s pozdějšími formulacemi paradoxů naivní teorie množin. Bylo proto vhodné jej do celkového přehledu zařadit.

Mezi další, zvlášť pro naše účely vhodné paradoxy, lze zařadit například poněkud úsměvný paradox hromady písku. Tento paradox se vztahuje k problematice principu matematické indukce. Jde o to, že jedno zrnko písku hromadu netvoří. Pokud přidáme jedno zrnko k zrnkům písku, jež netvoří hromadu, opět nedostaneme hromadu. Dle principu matematické indukce tedy ani libovolný počet zrnek písku netvoří hromadu. Na druhou stranu je jasné, že např. $10^{25}$ zrnek písku je už poměrně rozměrná hromada.

Mezi další populární verze paradoxů teorie množin patří tzv. Mannouryho paradox. Mějme určitou zemi, kde každá samospráva má svého starostu a žádné dvě samosprávy nemají stejného starostu. Starosta může a nemusí bydlet v oblasti samosprávy, kde je starostou. V této zemi byl vydán zákon, jímž byla zřízena zvláštní samospráva –

Arkádie. Ta je určena výhradně pro ty starosty, kteří nesídlí v místě své samosprávy. Kde však bude sídlit starosta Arkádie? (Smullyan 2008, str. 226)

Dále se nám pro naše pedagogické účely může hodit například starověké dilema o krokodýlovi. Jistý krokodýl ukradl ve vesnici dítě. Krokodýl otci dítěte slíbil, že dítě propustí živé a zdravé, pokud on správně odpoví na otázku, zda krokodýl dítě pustí nebo ne. Co udělá krokodýl, když otec řekne, že krokodýl dítě nepustí? (Smullyan 2008, str. 227)

# 3. Současná situace výuky logiky na českých středních školách

Jak již bylo zmíněno v úvodu této práce, hlavním cílem výuky matematiky by v souladu se současným pedagogickým hlediskem neměla být kupa v běžném životě prakticky nevyužitelných znalostí, jako jsou například faktoriály a parciální zlomky, ale spíše způsob myšlení. Cílem učitelů by proto mělo být vést žáky k hledání správného způsobu, jakým přistupovat k řešení problémů, především tedy ke schopnosti analýzy situace, k přesnému zpracování informací a následně k vhodné volbě algoritmu řešení. Ať nahlédneme do libovolného tematického plánu, které mají dnes již jednotlivé školy volně přístupné na internetových stránkách, nebo do dříve platných vzdělávacích programů pro základní, střední a gymnaziální typy škol, setkáváme se s podobnými formulacemi. Za všechny citujeme výběr z konkrétního tematického plánu technického lycea:

*„Matematické vzdělávání napomáhá rozvoji abstraktního a analytického myšlení, rozvíjí logické usuzování, učí srozumitelné a věcné argumentaci. Těžiště výuky spočívá v aktivním osvojení strategie řešení úloh a problémů, v ovládnutí nástrojů potřebných v běžném životě, budoucím zaměstnání a dalším studiu. Studiem matematiky žáci získávají schopnost hodnotit správnost postupu při odvozování tvrzení, odhalovat klamné závěry, zvažovat rizika předkládaných důkazů.*“ (tematický plán 78 – 42 – M/01 Technické lyceum, SPŠ ST Panská)

O výstupních kompetencích žáků se pak ve stejném textu dozvídáme toto: *„(Žáci) Budou s porozuměním číst matematický text, vyhodnotí informace získané z různých zdrojů (grafů, diagramů, tabulek a internetu), podrobí je logickému rozboru a zaujmou k nim stanovisko. Naučí se přesnosti a preciznosti ve vyjadřování i v ostatních činnostech.*

*V afektivní oblasti směřuje vzdělávání k tomu, aby žáci získali:*

*pozitivní postoj k matematice a zájem o ni a její aplikace;*

*motivaci k celoživotnímu vzdělávání."*

V citovaném textu je poměrně často použito slovo „logický“. Bohužel v praxi už to tak často pravdou není. Spousta věcí se učí formálně, slabší studenti se většinu matematických operací naučí mechanicky bez vnitřního porozumění. Důkazy a odvozování jsou součástí hodin matematiky velmi zřídka. Existuje několik projektů (např. Tvořivá škola), které se snaží tomuto přístupu k výuce bránit. Ale i všeobecné tendence ve vyučování matematice jsou takové, že ruku v ruce s probíhající školskou reformou v ČR, která se zasadila o prosazení školních vzdělávacích programů, jde snižování množství jednotlivých faktických poznatků ve prospěch hlubšího pochopení jednotlivých principů matematických operací. Právě snížení kvantity učiva by mělo vést ke zvýšení kvality jeho osvojení. Z matematických znalostí se tak vlastně stávají nosiče pro jiné, obecnější, formy vzdělání.

Na druhou stranu zjednodušit matematiku pouze na sousloví „matematická gramotnost“ (budeme-li tento pojem chápat ve výše vymezeném smyslu jako cíl vyučování matematiky) a matematických poznatků na nosiče obecného vzdělání by bylo příliš snadné. Nebudeme-li brát v úvahu ty studenty, kteří se budou matematikou zabývat i po opuštění naší třídy, například formou studia na vysoké škole, je pravděpodobné, že většina znalostí, které jsme studentům předali, zůstane po zbytek jejich života nevyužita. Aktivně budou používat pouze základní matematické nástroje a operace. Složitější operace za ně v dnešní době vyřeší především kalkulačky a počítače. Ale právě k rozvíjení matematického myšlení, a tedy i splnění cílů výuky matematiky, je nezbytné mít širší povědomí o základních principech jednotlivých matematických disciplín, a to bez faktických poznatků nezískáme. K výběru učiva je proto potřeba přistupovat velmi zodpovědně, bude-li jej mnoho, bude to na úkor kvality, bude-li jej málo, pak se kvalita také sníží, jelikož myšlení žáků nebude dostatečně rozvíjeno a stimulováno.

Obecným cílem matematického vzdělávání je tedy výchova přemýšlivého člověka, který bude umět používat matematiku v různých životních situacích (např.: v odborné složce vzdělávání, v dalším studiu, v osobním životě, v budoucím zaměstnání, ve volném čase apod.).

Matematické vzdělávání podle současných standardů směřuje k tomu, aby žáci dovedli využívat matematické vědomosti a dovednosti především v praktickém životě, tj. při řešení běžných životních situací; aplikovat matematické poznatky a postupy v dalším vzdělávání; matematizovat reálné situace, pracovat s matematickým modelem a vyhodnotit výsledky řešení vzhledem k realitě; zkoumat a řešit problémy včetně diskuse výsledků a vyhodnotit informace získané z různých zdrojů – grafů, diagramů, tabulek a internetu, přesně se vyjadřovat a umět argumentovat.

Je všeobecně známo, že to, co činí začátky studia matematiky obtížnými, je logický základ matematických úsudků. Pravidla matematické logiky ovládají s železnou důsledností bez jakýchkoli výjimek veškeré úvahy v matematice. Každý student se jimi řídí od okamžiku, kdy se začne na základní škole s matematikou setkávat. Většinou jde však o systematicky neuspořádané, leckdy si dokonce neuvědomované úvahy. Žák se ze začátku řídí spíše intuicí a „selským rozumem“ než přesně formulovanými pravidly logiky. Nadanější studenti si s touto intuicí většinou na střední škole vystačí, a tak se stále více projevují obtíže při přechodu na vyšší, terciální stupeň vzdělávání. Studentům chybí základní pochopení pro stavbu matematických vět a definicí, obtíže jim činí formulování tvrzení a důkazy, jelikož právě znalosti o výrocích a množinách nemají systematizovány a vystavěny na logických základech. Na druhou stranu málokterý student je v prvním ročníku střední školy zralý na osvojení si logického aparátu.

Ideální by proto bylo nalezení zlaté střední cesty, kdy budou studenti v úvodu středoškolského vzdělávání seznámeni se základními pojmy těchto teorií, a to v intuitivní rovině. Během dalšího studia, tedy v rámci učiva vyšších ročníků, by se mělo více pracovat s logickými základy jednotlivých oblastí matematiky, a tedy se vracet k základním logickým pravidlům a prohlubovat jejich znalost.

## 3.1 Výuka matematické logiky na SŠ – výroková logika

V rámci základní školy se s výukou matematické logiky jako takové nesetkáváme. Logické myšlení žáků je zde rozvíjeno především na tematickém celku slovních úloh, kde si žák musí samostatně zpracovat informace a matematicky znázornit situaci. Právě přechod k matematickému zápisu, tedy matematizace konkrétní situace, činí žákům největší problémy. Ačkoli intuitivně většinou vědí, jak úlohu řešit, formulovat své úvahy pomocí matematického jazyka je pro ně obtížným krokem. Jednoduché odvozování a důkazy – a to především v geometrii - jsou zaváděny podle úrovně třídy a vůle vyučujícího.

V osnovách, respektive tematických plánech středních škol a gymnázií nacházíme samostatnou kapitolu většinou pojmenovanou jako „Úvod do výrokové logiky a teorie množin“.

Výroková logika a úvod do teorie množin jsou zařazeny v prvních ročnících středního vzdělávání, a to většinou v rámci prvního čtvrtletí. Toto řazení má svůj význam. Stejně jako v každé odborné práci bychom na začátku měli být seznámeni s vymezením jednotlivých neznámých a v textu použitých pojmů, je třeba studentům poskytnout základní prvky pro matematickou komunikaci. Většina z nich po příchodu ze základní školy není zvyklá se vyjadřovat pomocí matematických symbolů.

Nahlédneme-li do státem garantovaných standardů, to znamená do rámcových vzdělávacích programů, nacházíme tuto kapitolu učiva zpracovanou následovně, ukázka z RVP GV (www.vuppraha.cz):

*Vzdělávací obsah*

***ARGUMENTACE A OVĚŘOVÁNÍ***

*Očekávané výstupy*

***žák*** *čte a zapisuje tvrzení v symbolickém jazyce matematiky*

*užívá správně logické spojky a kvantifikátory*

*rozliší definici a větu, rozliší předpoklad a závěr věty*

*rozliší správný a nesprávný úsudek*

*vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost a nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení*

*zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému*

***Učivo***

*základní poznatky z matematiky – výrok, definice, věta, důkaz*

*množiny – inkluze a rovnost množin, operace s množinami*

*výroková logika*

V konkrétních tematických plánech najdeme podobná zpracování, například v tematickém plánu pro obor Informačních technologie na Střední odborné škole Net Office Orlová:

*2. Úvod do výrokové logiky a teorie množin*

*2.1. Výrok, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence*

*2.2. Základní množinové pojmy*

*2.3. Intervaly, druhy intervalů*

Ve výše citovaném tematickém plánu technického lycea je kapitola o výrokové logice například zpracována následovně:

| Kompetence | Učivo | Počet hodin |
|---|---|---|
| - užívá logické spojky a kvantifikátory;<br><br>- sestaví pravdivostní tabulky pro základní logické operace a řeší praktické úlohy;<br><br>- chápe pojem množina, umí určit množinu výčtem prvků a charakteristickou vlastností prvků;<br><br>ovládá základní množinové operace (sjednocení, průnik, rozdíl množin, doplněk množiny);<br><br>zapisuje a znázorňuje intervaly, určuje jejich průnik a sjednocení, aplikuje geometrický význam absolutní hodnoty reálného čísla; | **3 Úvod do výrokové logiky a teorie množin**<br><br>základy logiky<br><br>výroky a kvantifikátory, výrokové formy<br><br>přímý důkaz a důkaz sporem<br><br>- základy teorie množin<br><br>- pojem množina, vztahy mezi množinami, operace s množinami, Vennovy diagramy<br><br>-intervaly | 20 |

Na základě výše uvedených citací je tedy vidět, že ačkoli je základní problematika výrokové logiky a teorie množin do výuky zařazena, není na ni kladen příliš velký důraz. Většinou se časová dotace na probrání tohoto tematického celku pohybuje okolo dvaceti vyučovacích hodin. V učebnicích je téma zpracováno většinou poměrně kvalitně, ale bez jakéhokoli zapojení do širšího logického celku. Studenti se sice zpaměti naučí pravdivostní tabulky jednotlivých logických spojek, ale málokterý student je schopen odlišit použití spojky v běžném jazyce a v matematickém kontextu. K osvojení si logického uchopení tématu by bylo zapotřebí mnohem více času.

V rámci tematického celku výroková logika se studenti učí jednak základní poznatky o výrocích a výrokových formách a jednak problematiku jejich pravdivostní hodnoty. Seznámí se s logickým nástrojem - negací. V rámci složených výroků se probírají základní čtyři logické spojky (konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence), jejich negace a využití pro řešení slovních úloh. V neposlední řadě by studenti měli být poučeni o kvantifikátorech a kvantifikovaných výrocích. V úvodu do teorie množin se pak setkáváme se základními pojmy, jako jsou množina, prvek, charakteristická vlastnost, podmnožina, konečná a nekonečná množina, průnik, sjednocení, doplněk. Poznatky o množinách jsou i zde, stejně jako v první třídě při sčítání jablíček a hrušek, předkládány s vědomím, že je studenti budou chápat intuitivně, nepoužívá se tedy axiomatická výstavba teorie množin. Oba dva uvedené tematické celky se na závěr využijí při poučení o intervalech, se kterými se studenti budou setkávat po zbytek studia na střední škole případně gymnáziu. Tímto se vlastně celá výroková logika pro studenty většinou smrskne na použití spojky „a zároveň" a „nebo" při řešení soustavy jednotlivých rovnic či nerovnic, které na konci odpovídají buď „průniku" nebo „sjednocení" intervalů jednotlivých řešení. Co se týče zavádění matematických definicí a vět doplněných důkazy, je to na střední škole o něco lepší než na základní škole, i když na základě rozhovorů s pedagogy lze tvrdit, že ne vždy považují předvedení důkazu za důležité. Na základě dotazování mezi studenty zase můžeme tvrdit, že matematickou logiku a tedy například význam spojky „právě tehdy, když" si se zněním jednotlivých definic a vět spojí málokdo, což svědčí o nepochopení významu matematického jazyka jako typu metajazyka.

## 3.2 Zpracování výrokové logiky a úvodu do teorie množin v učebnicích

Téma výroková logika je samostatně zpracováno v několika titulech, málokterý je však vhodnou učebnicí pro střední školy a gymnázia. Prohlédneme-li knihovničky v kabinetech matematiky, nejčastěji nalezneme sbírku *Úlohy o výrocích a množinách pro 1. ročník* *gymnasia* autorů Jaroslava Šedivého, Júlie Lukátšové, Oldřicha Odvárka a Michala Zöldyho. Ačkoli sbírka byla vydána prvním vydáním v roce 1970 a v současnosti je k sehnání při troše štěstí v antikvariátu, patří dodnes k nejpoužívanějším materiálům, a to právě pro nedostatek jiných vhodných sbírek a učebnic. Tato sbírka obsahuje více než 150 příkladů k úvodu do intuitivní teorie množin a výrokové logiky. Jak se však praví již v předmluvě:

*„ Tematicky se úlohy sbírky váží k základům velmi obecných teorií – výrokové logiky, predikátové logiky a teorie množin. Základní pojmy těchto teorií se při přesné deduktivní výstavbě definují pomocí soustavy axiomů. Tento postup není z didaktických důvodů ve vyučování sledován, proto nelze vycházet z přesných definic pojmů výrok, výroková forma, množina pod. Je však nezbytné, aby studenti získali představu, které objekty, s nimiž přicházejí denně do styku, lze považovat v jistém smyslu za modely abstraktních matematických a logických pojmů.“* [Šedivý a kol. 1970, str. 3]

V úvodech k jednotlivým částem sbírky je pak tento princip blíže ujasněn, a to především s důrazem na rozvíjení schopnosti aplikovat získané poznatky v problémových situacích. Sbírka kromě základního objasnění jednotlivých pojmů a operací s nimi obsahuje velkou řadu praktických slovních úloh, které mají pro studenty vždy vyšší motivační aspekt, než příklady bez reálného podtextu. V úvodu této sbírky se setkáváme s tvrzením, že *„výroková logika je bezesporná teorie, která neselže, pokud ji dovedeme správně aplikovat.“* [Šedivý a kol. 1970, str. 4] Více se zde o teorii jako takové a její výstavbě nehovoří. Pojem výrok je pak vysvětlován jako oznamovací věta, kterou se srozumitelně sděluje něco, co může být buď jen pravdivé, nebo nepravdivé. Ve sbírce je student upozorněn i na konfrontaci matematického jazyka s běžným dorozumívacím jazykem. Přímo se zde dozvídáme, že význam jednotlivých spojek je v hovorovém jazyce nestálý.

V úvodu části o množinách se setkáváme s přehlednou tabulkou, která má naznačit tři výrazné skupiny pojmů pojmového základu moderní matematiky a logiky, termíny zapsané na témž řádku označují pojmy, jež spolu úzce souvisejí, což si studenti uvědomí dle autorů při řešení jednotlivých úloh. [Šedivý a kol. 1970, str. 43]

| | | |
|---|---|---|
| ***výrok*** | ***výroková forma*** | ***množina*** |
| | - proměnná | - prvek množiny |
| | - obor proměnné | -základní množina |
| - pravdivostní hodnota výroku | - obor pravdivosti výrokové formy | - podmnožina |
| <u>operace s výroky</u> | <u>operace s výrokovými formami</u> | <u>operace s množinami</u> |
| - negace | - negace | - doplněk |
| - konjunkce | - konjunkce | - průnik |
| - alternativa | - alternativa | - sjednocení |
| | | <u>vztahy mezi množinami</u> |
| - implikace | - implikace | - inkluze |
| - ekvivalence | -ekvivalence | - rovnost |

Hned pod tabulkou je objasněno, že pojmy jsou součástí abstraktních teorií a nelze je definovat odděleně. Pojem množiny je pak studentům přiblížen následovně. Jedná se převážně o určité souhrny matematických objektů, ale také skupiny věcí, osob apod. Jednotlivé operace s množinami jsou vysvětleny na konkrétních úlohách.

Další materiály, které mohou sloužit k výuce výše zmíněných tematických celků na středních školách, jsou většinou součástí konkrétních učebnic pro první ročníky. Za všechny můžeme zmínit například *Základní poznatky z matematiky* (autoři: Bušek, Calda) z řady učebnic nakladatelství Prometheus Matematika pro gymnázia, jinou učebnici tohoto nakladatelství věnovanou SOŠ, například *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU 1. díl* (Calda) nebo *Matematiku pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 1. část* (autoři Calda, Petránek, Řepová), vydanou SPN v Praze. Uspořádání i zpracování jednotlivých témat jsou ve všech učebnicích podobná, liší se rozsahem a množstvím příkladů. V nové řadě učebnic pro gymnázia je téma rozpracováno celkem podrobně, setkáme se zde i s řadou příkladů. V učebnicích pro odborné školy je výroková logika zpracována jako úvodní kapitola na několika stránkách (rozsah učiva je většinou menší, chybí zde poučení o složených výrocích). Ve většině středoškolských učebnic nacházíme základní poučení o výrocích, které obsahuje vymezení pojmu výrok, negace, kvantifikátory, kapitolu o složených výrocích, a tedy vysvětlení jednotlivých logických spojek, jejich pravdivostní tabulky a pojem tautologie. Kapitoly o množinách jsou většinou srovnatelné i co do obsahu.

Za zmínku stojí ale jistě i učebnice autorů Hruši, Dlouhého a Rohlíčka *Úvod do studia matematiky*, kterou vydala jako učebnici pro pedagogické fakulty Univerzita Karlova. Nejeden učitel matematiky ji využívá při výuce na střední škole, a to i přesto, že jde v podstatě o vysokoškolskou učebnici. V první části je totiž celkem podrobně zpracováno elementární poučení o základech matematické logiky a intuitivní teorii množin a téma relace. Pro výuku na středních školách jsou šikovné především příklady a názorné představy, které jsou zde zařazeny. Například pojem množina je vysvětlen pomocí hovorové češtiny. Praví se zde, že slova množina užíváme ve stejném smyslu jako v hovorovém jazyce slov souhrn, soubor či skupina.

V rámci této práce uvedeme několik typických příkladů pro jednotlivé podkapitoly výrokové logiky a úvodu do teorie množin, aby měl čtenář představu o rozsahu a obtížnosti úloh, jež jsou po studentech v současnosti vyžadovány.

*PŘÍKLADY:*

***Výroky a operace s nimi***

1) Rozhodněte, které z následujících vět lze považovat za výroky:
   a) Úhlopříčky čtverce nejsou navzájem kolmé.
   b) Existuje rovnostranný trojúhelník.
   c) Pythagorova věta.
   d) Číslo $x$ je kladné.

*řešení: a), b)*

2) Vyslovte negace následujících výroků:
   a) Součin dvou záporných reálných čísel je kladný.
   b) Číslo $\sqrt{18}$ je dvojnásobkem čísla $\sqrt{3}$.

*řešení: a) Součin……není kladný.*
*b)Není pravda, že …*

3) Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující složené výroky.
   a) Číslo $\pi$ lze zapsat desetinným číslem 3,14159 nebo zlomkem $\frac{22}{7}$.
   b) Číslo $e$ je větší než 2 a zároveň menší než 3.
   c) Je-li číslo dělitelné třemi, potom je ciferný součet čísla dělitelný třemi.
   d) Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvanácti.

*řešení: a) nepravdivý; b) pravdivý; c) pravdivý; d) nepravdivý.*

4) Napište negace následujících složených výroků.
   a) Přijde Alena a Barbora.
   b) Přijde Cyril nebo David.
   c) Jestliže přijde Eva, potom přijde i Hana.
   d) Jan přijde právě tehdy, když přijde Iva.

*řešení: a)Nepřijde Alena nebo nepřijde Barbora.*

*b) Nepřijde Cyril a nepřijde David.*

*c) Přijde Eva a nepřijde Hana.*

*d) Přijde Jan a nepřijde Iva nebo přijde Iva a Jan nepřijde.*

5) Rozhodněte, zda uvedené výrokové formule jsou tautologiemi:

a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

b) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

*řešení: a) ano; b) ano.*

***Výroky s kvantifikátory***

1) Doplňte jedno ze slov: „existuje, každý“ tak, aby výrok byl pravdivý.

a) … trojúhelník, který je rovnostranný.

b) … přirozený násobek čísla 2 je číslo sudé.

*řešení: a) Existuje; b) každý.*

2) Doplňte jedno ze slov „aspoň, právě, nejvýše“ tak, aby výrok byl pravdivý.

a) Každé prvočíslo má …dva různé dělitele.

b) Dvě různé přímky v rovině mohou mít …jeden společný bod.

c) Nerovnici $x^2 > 5$ splňují …tři přirozená čísla.

*řešení: a) Právě; b) nejvýše; c) aspoň.*

3) Vyslovte negace následujících výroků:

a) Alespoň šest přirozených čísel splňuje nerovnost $x - 40 < 0$.

b) Každé prvočíslo je liché číslo.

*řešení:* *a) Nejvýše pět…*

*b) Existuje prvočíslo, které není liché.*

### *Operace s množinami*

1) Zapište výčtem prvků následující množiny:

a) $M_1 = \{x \in N; x^2 < 20\}$

b) $M_1 = \{x \in Z; |x| = 5\}$

*řešení: a)* $M_1 = \{1;2;3;4\}$ *; b)* $M_1 = \{-5;5\}$.

2) Najděte takové množiny A, B, pro které platí:

$A \cup B = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}, A \cap B = \{1;2;3\}, B - A = \{5;6\}.$

*řešení:* $A = \{0;1;2;3;4;7\}, B = \{1;2;3;5;6\}.$

3) Doplněk množiny $\{x \in R; -3 < x \leq 5\}$ v množině reálných čísel zapište jako sjednocení intervalů.

*řešení:* $(-\infty; -3\rangle \cup (5; \infty).$

Všechny úlohy, které byly pro přehled použity, pochází ze sbírky *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy* od autorky Petákové. Jak lehce nahlédneme, úlohy nejsou nijak obtížné. K úspěšnému řešení většinou stačí základní znalosti a „zdravý rozum“.

Obtížnější pro řešení jsou potom slovní úlohy, kde si situaci musí zhodnotit a matematizovat studenti sami. Pro názornost uvedeme pár příkladů z výše uvedené sbírky Úlohy *o výrocích a množinách pro 1. ročník gymnasia* (Šedivý a kol. 1970).

***Slovní úlohy***

1) ***Výroková logika***

a) Účast Anny, Barbory, Cyrila a Dušana na koncertě je vázána těmito podmínkami: Přijde alespoň jeden chlapec, nejvýše jedna dívka a právě jeden ze sourozenců Anna, Cyril. Barbora nepřijde bez Dušana, přitom je však vyloučeno, aby přišla Anna spolu s Dušanem. Které skupiny z této čtveřice se mohou zúčastnit a kdo na koncert určitě půjde?

*řešení: Koncertu se zúčastní jedna ze skupin: Barbora, Cyril, Dušan; Cyril s Dušanem; Cyril sám. Anna se určitě nezúčastní, zatímco Cyril určitě ano.*

b) Některý z žáků A, B, C rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A. Lze určit pachatele jednoznačně v případě, že byl jen jeden?

*řešení: Pachatelem je C.*

Řešení slovních úloh pomocí výrokové logiky má tři základní fáze, nejprve musíme přejít od slovní úlohy k úloze o pravdivostní hodnotě výroků, což uděláme na základě analýzy a matematizace poznatků získaných ze slovní úlohy. V druhé fázi vyřešíme úlohu o výrocích, většinou pomocí tabulky pravdivostních hodnot. Třetí fáze, mnohdy náročnější než první, je formulace výsledku pomocí termínů slovní úlohy, tedy převod matematického řešení zpět do reálné situace. Není třeba zdůrazňovat, že obtíže studentům činí především první a poslední fáze.

### *2) Množiny*

Otec jde s malým Jirkou do hračkářství kupovat autíčko. Jirka vyslovuje přání:

„Chci autíčko s houkačkou. Přitom ještě chci, aby mělo setrvačník a vyklápěčku, nebo to musí být plechové autíčko s houkačkou. Nechci ale vůbec plechové autíčko bez vyklápěčky.“

Prodavačka mu na to odpoví: „Tak ty chceš autíčko, které musí mít setrvačník, vyklápěčku a houkačku. Takové nemáme.“

Otec nakonec Jirkovi koupí plechové autíčko bez setrvačníku, s vyklápěčkou a houkačkou.

Odhadla prodavačka správně Jirkovo přání?

Koupil otec takové autíčko, které si Jirka přál?

*řešení: Prodavačka nepochopila správně Jirkovo přání. Otec splnil Jirkovo přání.*

V řešení takovéhoto typu úloh většinou postupujeme tak, že každou jednotlivou vlastnost přiřadíme jedné množině. V uvedeném příkladu pak vznikají tyto množiny: základní množina dětských autíček a její podmnožiny – plechová autíčka, autíčka s houkačkou, autíčka s vyklápěčkou, autíčka se setrvačníkem. Tuto situaci lze znázornit například pomocí Vennova diagramu, z něhož lze následně vyčíst řešení.

Největší obtíže opět studentům činí především vhodná matematizace reálné situace. Řešení pomocí diagramů či zápisů operací průnik a sjednocení již většinou tolik problémů nezpůsobuje.

Mezi pomůcky učitelů by bezpochyby měli patřit i různé knížky logických hádanek a hlavolamů. Například kniha Raymonda Smullyana *Jak se jmenuje tato knížka?,* Mladá fronta, Praha 1986. Kde v kapitole „Logické hádanky“ (str. 92-108) jsou nejprve vyloženy výrokové spojky, načež následuje celá řada zábavných příkladů. Nejvíce na podmíněné výroky, tzn. na implikaci, která je z logických spojek z hlediska přirozeného jazyka nejkomplikovanější, a tedy i pro pochopení studentů nejnáročnější.

Je pozitivní, že různých sborníků logických hádanek, hlavolamů a úloh typu „zebra“ (Zebra je typ úlohy, ve které máme určité věci, osoby, zvířata, jejich vlastnosti, zvyky apod. rozřadit do skupin, a to podle daných vazbových podmínek. Řešením úlohy je takové seskupení, které vyhovuje všem vazbovým podmínkám.) je na českém trhu poměrně dost, samozřejmě lze mezi nimi rozlišit knihy kvalitní a méně kvalitní.

## 3.3 Pojem nekonečna a limity

Pro rozvíjení logického myšlení studentů na středních školách mají velký význam pojmy nekonečno a limita. S oběma pojmy se pracuje opět především na intuitivní bázi a studenti se s jejich aplikací setkávají většinou až ve vyšších ročnících.

V rámci současné výuky matematice se čeští školáci setkají s pojmem nekonečno již na základní škole. Mezi klasické poučky základoškolské matematiky patří například definice rovnoběžek jako přímek, které se protínají v nekonečnu. V aritmetice se postupuje od přirozených čísel, přes celá čísla k racionálním a reálným číslům. Číselné obory se nezavádějí jako nekonečné množiny, přesto většina žáků tento fakt intuitivně zpracuje. Názornější jsou pak představy právě v geometrii, kde lépe fungují předmětové modely, takže úroveň abstraktního myšlení žáků nemusí být tak vysoká. V představách žáků základních škol jde většinou o přirozené nekonečno.

Na střední škole pak většinou dochází k upřesňování intuitivní představy nekonečna v přesněji vymezený matematický pojem. Kromě používání nekonečna pro zápis řešení rovnice a zobrazení krajního bodu číselné osy se totiž začne nekonečno používat i jako „číslo“ při různých výpočtech, a to především v diferenciálním a integrálním počtu a v tematickém celku o posloupnostech a řadách. Zde se studenti setkávají i druhým klíčovým pojmem, kterým je limita.

S pojmem nekonečna se dle státních standardů setká každý středoškolák, jelikož posloupnosti (tedy i nekonečné posloupnosti) jsou obsaženy jako učivo ve schválených rámcových vzdělávacích programech. Ovšem ne každá střední škola má ve svých osnovách zařazeny základy diferenciálního a integrálního počtu. Pokud ano, jedná se především o následující obsahy (tematický plán 78 – 42 – M/01 Technické lyceum, SPŠ ST Panská):

| | **5 Základy diferenciálního a integrálního počtu** | **Počet hodin** |
|---|---|---|
| - aplikuje získané poznatky o jednotlivých funkcích;<br>- chápe definici spojitosti funkce a umí použít věty o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí a větu o spojitosti složené funkce;<br>- chápe a používá souvislosti pojmů limita funkce v bodě **a**, spojitost funkce v bodě **a;**<br>- zná definici limity funkce v bodě a užívá věty o limitách na konkrétních příkladech;<br>- určí ze znalosti grafu funkce nevlastní limitu funkce a limitu v nevlastním bodě; | - elementární funkce, vlastnosti, grafy<br><br>- spojitost a limita funkce | 56 |
| - zná definici derivace funkce v bodě, nejdůležitější vzorce pro derivace elementárních funkcí a pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí a funkce složené;<br>- určí druhou derivaci funkce;<br>- aplikuje fyzikální a geometrický význam derivace;<br>- určit monotónnost funkce, lokální extrémy funkce a vyšetří průběh funkce;<br>- užívá poznatky o derivacích a průběhu funkce při řešení úloh z praxe;<br>- používá základní vzorce a pravidla pro výpočet primitivních funkcí na základě přímé integrace; | - derivace funkce<br><br>- fyzikální a geometrický význam derivace<br><br>- průběh funkce, užití diferenciálního počtu,<br><br>- primitivní funkce, neurčitý integrál | |
| - umí v jednoduchých případech použít substituční metodu a metodu per partes<br>- ovládá jednoduché příklady výpočtu určitého integrálu užitím primitivní funkce;<br><br>- umí užitím integrálního počtu vypočítat obsah rovinného obrazce a objem rotačního tělesa; | - integrační metody<br><br>- určitý integrál<br><br>- užití integrálního počtu | |

Ačkoli je v tabulce poměrně často uvedeno slovo definice, na základě rozhovorů s vyučujícími můžeme tvrdit, že ne vždy se lpí na znalosti přesného znění definic a vět, ale spíše na pochopení základních principů. Pokud student na střední škole jakýmkoli odpovídajícím způsobem uchopí pojem limity, lze to považovat za úspěch.

Obdobně je to i s pojmem matematického nekonečna. V teorii množin se zavádějí různé mohutnosti nekonečen. Pro jejich popis se používají pojmy jako kardinální čísla a ordinální čísla. Podstatou porovnání mohutnosti je možnost vytvoření vzájemně jednoznačného zobrazení mezi množinami. Z tohoto pohledu je například stejná mohutnost množiny přirozených, celých a racionálních čísel, ale tyto množiny mají menší mohutnost, než množina čísel reálných. Toto je pro studenty velmi obtížná představa. Setkají-li se například studenti v prvním ročníku s otevřenými intervaly a učitel jim tvrdí, že všechny typy intervalů obsahují nekonečně mnoho čísel, zpracují tuto informaci většinou jen stěží. V rozporu s touto informací je pro ně především rozdílná velikost názorného (předmětného) modelu, tedy úseku na číselné ose. Přechod k abstraktnímu chápání nekonečna, které je potřeba pro moderní pojetí teorie množin, je uskutečnění myšlenkového přechodu od potenciálního k aktuálnímu nekonečnu. Potenciálně nekonečná množina je v představách chápána jako konečná množina s možností podle potřeby přibírat další prvky. Aktuálně nekonečná množina je pak taková, která je chápána jako nekonečný celek. Jde o přechod od chápání věcí z našeho úhlu pohledu jakoby k chápání věcí podle toho, jaké jsou samy o sobě. Jako úspěch výuky na střední škole lze považovat již to, že student si začne uvědomovat víceznačnost slova nekonečno.

Oba dva výše zmíněné tematické celky se důležitou měrou podílí na rozvoji logického myšlení studentů. Málokde se totiž v rámci svého studia setkávají s takovým stupněm abstrakce jako zde. Z tohoto hlediska jsou ještě důležitou kapitolou komplexní čísla, která nejsou přímým zobrazením reálného světa, ale pouze matematickou konstrukcí. Komplexní čísla se však učí většinou jen na technických školách, kde se upřednostňuje spíše jejich praktické využití například v elektrotechnice či fyzice než jejich „logický“ význam.

Na základě výše uvedeného a rozhovorů s vyučujícími i studenty převážně pražských středních škol a gymnázií lze souhrnně o současné situaci na českých školách říci, že bohužel často ve výuce u průměrných studentů převládá formalizmus a pro velkou kvantitu učebních obsahů mnohdy nedojde k vnitřnímu osvojení problematiky, jejímu správnému pochopení a tedy i schopnosti získané poznatky správně a vhodně aplikovat.

# 4. Využití paradoxů při výuce matematiky

Tato práce by se proto měla stát jakýmsi návodem, jak se formalizmu ve vyučování matematice alespoň z části vyvarovat, především v tematických celcích, které mají přímou vazbu na matematickou logiku a teorii množin. Důležitým aspektem je v tomto směru především motivace studentů. Budou-li žáci sami přesvědčeni o důležitosti logického uvažování a jeho využití nejen v matematice, bude naše práce výrazně snazší. Způsobů jak pozitivně motivovat žáky je několik, my se budeme věnovat především motivaci na základě problémových úloh. Námětem těchto úloh budou právě logické paradoxy a paradoxy naivní teorie množin. Jedná se mimo jiné o to, přivést žáky k vlastnímu pochopení významu učiva, které má často přesah do jejich reálného života, protože potom lépe chápou smysl a význam svého učení.

Významným klíčovým momentem pro překonání formalizmu je předpoklad, že učení nezačíná u studentů se zazvoněním a nekončí se školou. Každý žák si do hodin přináší určité zkušenosti, znalosti, zážitky a hodnotové postoje, na jejichž základě má vybudovanou představu světa a jeho fungování. Toto odpovídá konstruktivistickému pojetí vyučování, v němž dochází ke konfrontaci mezi tím, co žák už zná a mezi novými poznatky, které si má osvojit. Žák pak aktivně překonává vzniklé napětí a nové poznatky začleňuje do svých pojmových struktur. Nestačí-li to, pak konstruuje nové struktury na vyšší úrovni. Podstatné je to, že žák je v tomto procesu vnitřně aktivní, což je důležitým motivačním prvkem. (Skalková 1999, str. 102)

Neméně významné je pro překonání formalistického studia vytváření takových situací, kdy si žák může vytvářet aktivní vztah a postoj k učivu. V těchto případech však hrají velkou roli dovednosti učitele, především ty, které se týkají schopnosti vytvářet vhodné problémové situace teoretického nebo praktického charakteru. Učitel by měl hledat a tvořit vhodné problémové úlohy, které budou vzbuzovat u žáků zájem a budou příznivě provokovat jejich touhu po poznání.

Pomocí těchto postupů se pak lze ve výchově a vyučování vyvarovat formalizmu, což je v podstatě zdůrazňování vnějšího obsahu před pochopením učiva. Jedná se především o mechanické pamatování učiva bez jeho pochopení a bez schopnosti jeho praktické aplikace při příkladech, které se liší od vzorových. Formalizmus je důsledkem zejména převahy verbální metody a přetížení učivem. Přestože je princip reedukace zjištěného formalizmu velmi jednoduchý, většinou stačí doplnit studentovi chybějící zkušenosti a systematizovat jeho poznatky, konkrétní realizace v praxi je poměrně náročná.

V této práci se budeme nadále věnovat pouze jedné úzké oblasti, v které lze předcházet formalizmu (dle názoru autorky) poměrně snadno. Půjde o rozvoj logického myšlení, který vlastně již sám od sebe bojuje s formalizmem a podporuje konstruktivistické metody, a to v rámci výše zmíněného tematického celku výrokové logiky a úvodu do naivní teorie množin. Konkrétním nástrojem, který by měl naše studenty dovézt k hlubšímu porozumění těchto obsahů učiva, budou právě logické paradoxy. Otázky „proč a jak je využívat ve výuce matematiky“ nám zodpoví následující kapitoly.

S tématem využití logických paradoxů ve výuce matematiky se v odborných textech setkáváme poměrně zřídka. Výše zmíněné logické paradoxy jsou většinou zmiňovány pouze ve výkladu logiky v rámci humanitních předmětů, jako jsou například Základy společenských věd, nebo jsou ojediněle a nesystematicky využity jako pozadí pro konkrétní problémové úlohy v matematice či programování. Typickou ukázkou tohoto postupu je článek *Thinking and Writing Mathematically: “Achilles and the Tortoise” as an Algebraic Word Problem* Josepha Martineze, kde autor využívá jednu ze Zénónových aporií jako motivační problémovou úlohu v hodině matematiky. Studenti zde při úvahách o paradoxu využívají pro lepší představu problému metodu modelování konkrétní situace, kdy jeden žák představuje Achilla a druhý želvu. Jako další příklad lze jmenovat velmi inspirativní studii *Preservice education of math teachers using paradoxes*, jejímiž autory jsou Nitsa Movshovitz-Hadar a Rina Hadass. Tato studie se sice zaměřuje na výuku budoucích učitelů matematiky, ale lze z ní čerpat nápady i pro výuku na středních školách.

## 4.1 Historický aspekt využití logických paradoxů ve výuce

Velkým zdrojem poučení pro současné matematické vzdělávání je historie matematiky. Jednak lze vyhledat paralelu mezi historickým vývojem matematické vědy a osvojováním si poznatků u našich žáků a jednak historická témata většinou přináší do výuky silný motivační prvek. Vezmeme-li v úvahu cestu, kterou projde žák při získávání matematických poznatků od předškolního věku až k maturitě, najdeme nejednu souvislost s historickým vývojem této přírodní vědy. V raném věku si dítě utváří představu o množství na základě pojmů hodně a málo. Celkem rychle si osvojí i význam pojmu „jedna“, a to díky uvědomování si vlastní osobnosti. V předškolním a mladším školním věku potom pokračuje v plynulém a naprosto samozřejmém poznávání vyšších čísel, jejich významu a jednotlivých operací (přidávání, odebírání, rozdělování). Celkem bez větších problému ještě většina dětí přijme zavedení záporných čísel, jako znázornění dluhů nebo záporné teploty. Existuje zde totiž jednoduchý předmětný model, tedy vazba na reálný život. Ale stejně jako matematické teorie, které byly z počátku budovány pomocí stejné intuice a stejně naivně jako dětské představy, se i představy našich žáků musí v určitém momentu odpoutat od reálného zobrazování a spokojit se s jistou mírou abstrakce. S vyšším ročníkem jich přibývá stále více a více. A právě v těchto momentech výklad tématu s exkurzem do patřičné kapitoly historie matematiky působí pozitivně motivačně. Žáci jsou ujištěni, že jejich otázky a nedůvěra k předkládaným faktům je přirozená a jsou otevřenější přijmout řešení, které matematika nabízí. Typickým příkladem tohoto didaktického postupu je seznámení žáků s odvozením čísla $\pi$ nebo náhled na problematiku *Ars magna* v úvodu do komplexních čísel.

Stejný motivační prvek mohou do výuky logiky a množin vnést příslušné paradoxy. Vždyť to byly právě ony, které v jednotlivých obdobích historického vývoje matematiky změnily náhled na danou problematiku a tím i uvažování o základních principech výstavby teorie a tedy strukturalizaci poznatků. Naši studenti by tedy mohli mít stejnou možnost jako Cantor nebo Bolzano uvědomit si, že matematika není přímým popisem reality, ale nástrojem, který k tomuto popisu slouží.

## 4.2 Intuitivní přístup mladších studentů

Na základní škole není využití logických paradoxů příliš účelné. I když budeme s žáky pracovat na rozvoji jejich logického myšlení, těžko v tomto věku dospějí k takovému rozvoji myšlenkových funkcí, aby zvládli tak náročnou abstrakci a byli schopni přijmout existenci logického paradoxu.

Přesto je vhodné se již na základní škole soustavněji zabývat rozvojem logického myšlení žáků, tříbením jejich úsudku a myšlení. Vhodnými úlohami k naplnění tohoto cíle jsou především různé logické hádanky, které se v současnosti objevují poměrně často jako součást různých matematických pohádek. Mezi dětmi jsou také velmi oblíbené úlohy typu „zebra“. Označení těchto logických slovních úloh, kde při správném řešení musíme zkombinovat zadané podmínky, je odvozeno z výskytu jmenovaného zvířete v jedné z prvních úloh tohoto typu, které byly publikovány. Zadání hlavolamů i logických hádanek lze již na základní škole upravit tak, aby úloha při správném postupu řešení neměla žádnou správnou možnost řešení anebo hned několik možností, i když na první pohled se situace bude jevit jasná. Žáci si tak budou zvykat na rozdílnost v logice a skutečnosti.

Se staršími dětmi (8. -9. ročník) můžeme ve volnějších hodinách kromě matematických hádanek zmínit i populární formy jednotlivých paradoxů, jako jsou například „Zákaz psaní zákazů“. Tento paradox spočívá v reálné situaci, kdy je na zdi ve společenské místnosti chaty napsáno spoustu zákazu – Zákaz kouření, Zákaz pobíhání, Zákaz plivání na zem apod. Mezi těmito zákazy se však jednou objeví i výše zmíněný „Zákaz psaní zákazů“. Jak lze tuto situaci řešit? Smažeme-li všechny zákazy, jelikož jsou zakázány, smažeme logicky i ten, který je zakazuje, a tedy je opět na zeď můžeme napsat. (Slavkovský 2007, str. 14)

Je až překvapivé, s kolika variantami řešení jsou schopni žáci přijít. Mezi nejčastější patří logická úvaha, že smažeme pouze zákaz o psaní zákazů, z matematického hlediska tedy popřeme jeho existenci. Další variantou řešení je změna formulace problematického zákazu – například použijeme vazbu „Zákaz psaní jiných nápisů na zeď“, z teoretického hlediska jde vlastně o rozlišení jazyka a metajazyka. Mezi další chytré nápady patřilo použití časového vymezení, tedy například použití formulace: „Od teď platí zákaz psaní zákazů.“

Žáky většinou podobné úvahy baví a jsou schopni vymyslet všelijaká řešení. Postavíme-li je ale tváří v tvář složitějším paradoxům, které potřebují již jistou dávku matematických znalostí a zároveň rozvinutou schopnost abstraktního myšlení, jako jsou například Zénónovy aporie, setkáváme se s jejich odmítnutím. Zénónova tvrzení jsou žáky smetena ze stolu jako nesmysl, jelikož jejich dosavadní poznatky z matematiky nejsou dostatečné a rozpor s reálnou situací je pro ně nepřekonatelný.

## 4.3 Využití logických paradoxů ve výuce na střední škole

V rámci výuky na střední škole máme více možností, kdy studenty konfrontovat s logickými paradoxy. V prvním ročníku je to převážně při probírání výrokové logiky a základů z teorie množin, ale i ve vyšších ročnících nalezneme vhodná témata. Za všechny uveďme, že například v rámci probírání součtů nekonečných posloupností a jejich limit lze zmínit Zénónovy aporie. S intervaly a logickými spojkami se však setkáváme v průběhu celého středoškolského vzdělávání, kdykoli tedy narazíme na řešení nerovnic nebo absolutních hodnot či jiných operací, kde jsou tyto matematické prvky využívány, můžeme zmínit paradoxy o mohutnosti jednotlivých nekonečných množin (např. Berryho paradox) nebo o pravdivostní hodnotě výroku (např. Paradox lháře).

Je nutné mít neustále na paměti, že studenti se na začátku prvního ročníku v podstatě vědomostně neliší od žáků v devátém ročníku na střední škole. Zavádět logické paradoxy do výuky si zde ale můžeme dovolit právě proto, že v úvodu prvního ročníku se studentům dostane základních poznatků o matematické výrokové logice a teorii množin.

Čtenáři této práce nyní nabídneme části několika konkrétních příprav na vyučovací hodiny matematiky, a to v různých ročnících střední školy. Všechny přípravy byly realizovány při výuce na Střední průmyslové škole sdělovací techniky v Panské v Praze, a to především na oborech průmyslové školy. Jednotlivé přípravy budou tedy doplněny kritickým komentářem založeným na konkrétních zkušenostech z výuky a zároveň návrhy na jejich úpravu či zlepšení. V rámci výzkumu bylo odučeno 11 hodin na střední škole v pěti různých třídách, a to konkrétně šest hodin během výuky prvních ročníků, jednu ve druhém ročníku a čtyři ve třetím ročníku. Podrobný rozpis počtu žáků ve třídách je uveden u jednotlivých rozborů, obecně jde o třicetičlenné třídní kolektivy.

## 4.4 Konkrétní návrhy didaktických postupů

Konkrétní přípravy na hodinu jsou vždy plánované v časovém rozpětí 43 minut, dvě minuty uvažujeme na administrativní záležitosti spojené s výukou. Náměty na jednotlivé hlavolamy jsou čerpány především z knihy R. Smullyana *Satan, Cantor a nekonečno*.

### *A) Příprava na úvodní hodinu výrokové logiky 1. ročník*

1. fáze – motivační *(8 minut)*

Jako motivační úlohu pro úvod do výrokové logiky lze použít následující úlohu. Učitel do třídy přinese dvacetikorunu a korunu. Vybranému studentovi dá možnost, jak získat jednu z mincí tím, že stanoví následující pravidla: „Teď můžete říct nějakou větu. Jestliže řeknete pravdivou větu, pak Vám dám jednu minci, ale neříkám kterou. Řeknete-li nepravdivou větu, nedostanete nic.“ (Smullyan 2008, str. 227)

Cílem studenta je samozřejmě od kantora získat dvacetikorunu.

- v případě neúspěchu prvního studenta (což je celkem pravděpodobné) dá možnost dalším několika dobrovolníkům. Správným řešením je věta: „Nedáte mi korunu.“

- rozbor úlohy, pomocí tohoto chytáku můžeme studentům zdůraznit obtížnost přesně vymezeného vyjadřování a vyjadřování s nějakým účelem.

2. fáze – výkladová

Po úvodní hře se přejde ke konkrétnímu výkladu základních pojmů výrokové logiky. Při správném podání by měla studentům úvodní motivační situace zůstat v povědomí. Dá se na ní odvolávat v jednotlivých fázích výkladu – negace, implikace apod.

Dále lze ve výuce pokračovat podle běžných tematických plánů a učebnic. V rámci sestavování příprav na výuku v prvním ročníku je třeba brát v potaz nízkou hodinovou dotaci pro námi zvolená témata. K zahrnutí logických paradoxů do výuky jsme proto zvolili především formu opakovacích shrnujících hodin na závěr jednotlivých tematických celků. Tím se také vyvarujeme přílišnému tlaku na matematicky méně nadané studenty.

Přesto je vhodné do výuky zařazovat složitější slovní úlohy, které kromě základních znalostí a aplikace poznatků (jako je např. tabulka pravdivostních hodnot) vyžadují logickou úvahu, aby mohly být vyřešeny. Každou hodinu zabývající se výrokovou logikou můžeme zakončit nějakou logickou hádankou či hlavolamem, který lze vztáhnout k probíranému učivu. Jeden příklad za všechny - užití kvantifikátoru (Smullyan 2008, str. 12):

> V místnosti stojí tři lidé. Naším úkolem je poznat, který z nich je čarodějův učeň. Každý z lidí nám odpoví na otázku: Kdo z vás je čarodějův učeň?
>
> první: To jsem já.
>
> druhý: Ale kdepak, já jsem čarodějův učeň.
>
> třetí: To je zapeklité, nejvýše jeden z nás tří pokaždé mluví pravdu.
>
> *řešení: Učněm je třetí dotazovaný.*

***B) Závěrečná hodina výuky výrokové logiky – 1. ročník***

Předpokládáme následující znalosti a dovednosti studentů:

- student rozumí pojmu výrok, výroková forma, pravdivostní hodnota, složený výrok, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, existenční a obecný kvantifikátor

- umí určit pravdivostní hodnotu výroku, k určení pravdivostní hodnoty složených výroků užívá tabulku pravdivostních hodnot, dokáže znegovat jednoduchý i složený výrok, vhodně používá logické spojky

<u>1. úvodní fáze – motivační</u> *(6 minut)*

Učitel na tabuli napíše větu: „Tato věta je nepravdivá." a požádá studenty, aby určili, *zda je věta pravdivá či nepravdivá* (důležitá formulace).

Druhá otázka, kterou učitel žákům položí, bude znít takto: *Jaká je její pravdivostní hodnota?*

Třetí otázka je pak nasnadě: *Jedná se o výrok?*

- studenti by správně měli odhalit, že nelze určit, zda je věta pravdivá či nepravdivá, tedy že neexistuje její jednoznačná pravdivostní hodnota, a tedy že se z matematického hlediska nejedná o výrok, ačkoli po formální stránce by to tak na první pohled mohlo vypadat

2. fáze - výklad – historie *(14 minut)*

Po úvodní úloze následuje stručné poučení o paradoxech, jejich významu v historii a konkrétní historii tohoto paradoxu a jeho jednotlivých formulacích.

- co je to paradox, vliv na rozvoj matematiky

- seznámení s Kréťanem Epimenidem z Knóssu (6. stol. př. n. l.) a jeho formulací paradoxu

- seznámení s obecnou formulací paradoxu lháře a jeho dalšími obměnami (jako např. „Tento nápis klame.“)

3. fáze - diskuze – návrhy řešení jednotlivých paradoxů *(6 minut)*

- při úvahách o Epimenidově větě, že *„Všichni Kréťané jsou lháři.“* můžeme žáky například navádět směrem k negaci kvantifikovaného výroku.

4. fáze - výklad – jazyk a metajazyk *(5 minut)*

Učitel na tabuli napíše větu: *„Led je zmrzlá voda.“* A dotáže se žáků na pravdivostní hodnotu tohoto výroku.

- odpověď by měla být jednoznačná, výrok je pravdivý

Poté učitel na tabuli napíše pod první větu druhý výrok: *„Led má tři písmena.“* Studentům pak položí stejnou otázku.

- předpoklad je, že odpověď studentů bude opět taková, že výrok je pravdivý – na učiteli potom je, aby vhodně vysvětlil, proč je druhý výrok nepravdivý.

Poslední úlohou tedy pro studenty bude doplnit druhý výrok tak, aby byl pravdivý.

- očekáváme řešení typu: „*Slovo led má tři písmena.*“

Na základě výše zmíněného příkladu by pak měl být učitel schopen studentům srozumitelně vysvětlit pojem metajazyk a jeho vztah k přirozenému jazyku. Tato znalost se bude hodit především pro osvojování základů teorie množin.

<u>5. fáze - úloha - „Zákaz psaní zákazů“</u> *(8 minut)*

Se studenty budeme řešit stejnou úlohu, která je popsána v této práci v předchozí kapitole. Řešení by se neměla radikálně lišit od návrhů žáků základní školy.

<u>6. fáze - závěrečné shrnutí</u> *(4 minuty)*

Závěrečná reflexe hodiny, shrnutí poznatků.

***<u>Cílem</u>*** *této hodiny by mělo být prohloubení pochopení výrokové logiky, a to pomocí problémových úloh. Studenti jsou postaveni před „klasickou“ úlohu, na kterou jsou z posledních hodin matematiky zvyklí. Objevují v ní neřešitelný rozpor. Úvahou dochází k přehodnocení zadání. Studenti by si měli osvojit poznatek, že matematická logika má přesně stanovená pravidla.*

### *C) Závěrečná hodina výuky základů teorie množin – 1. ročník*

Předpokládáme následující znalosti a dovednosti studentů:

- intuitivně rozumí pojmu množina, podmnožina, prvek množiny, charakteristická vlastnost, sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk

- umí pomocí množin modelovat jednoduché reálné situace, množinu zadanou charakteristickou vlastností jejích prvků zapíše výčtem prvků či pomocí intervalu

1. úvodní fáze – motivační *(4 minuty)*

Učitel na tabuli napíše zápis množiny: $A = \{X; X \notin X\}$ a požádá studenty, aby slovy formulovali, *které prvky množina obsahuje*.

- studenti by na základě zkušenosti s formálním zápisem měli odhalit, že X je množinou (použití velkého tiskacího písmena k označení množiny), která sama sebe neobsahuje, a tedy že A je množinou všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem.

- krátká diskuze o možnosti existence takovéto množiny

2. fáze - výklad – historie *(15 minut)*

Po úvodní úloze následuje stručné poučení o historii teorie množin, intuitivní teorie, přechod k axiomatickému systému, Russelův paradox.

- teorie množin jako jednotící prvek pro celou matematiku

- situace na začátku 20. století (vznik paradoxů, ohrožení teorie – bez podrobností, pouze obecně)

- Russellův paradox (zjednodušený zápis je na tabuli), osvětlení problematiky – být svým vlastním prvkem – můžeme použít například následující příklady:

a) Množina židlí není židle – množina není svým vlastním prvkem.

b) Množina všech věcí myslitelných lidským rozumem je něčím, co je myslitelné, a proto je svým vlastním prvkem.

*odvození sporu*:

Nazvěme takové množiny jako z příkladu a) množinami obyčejnými a takové množiny jako v b) množinami neobyčejnými. Vezměme množinu všech obyčejných množin a označme ji například C. Každá obyčejná množina je tedy prvkem C a zároveň každá množina patřící do C je obyčejná. Tedy množina C neobsahuje žádnou neobyčejnou množinu. Je C prvkem sama sebe?

Předpokládejme, že C je prvkem sama sebe. Do množiny C patří pouze obyčejné množiny, musí tedy i C být obyčejnou množinou. Z předpokladu ale vychází, že je-li C svým vlastním prvkem, je množinou neobyčejnou. K analogickému sporu dojdeme i budeme-li uvažovat předpoklad, že C není prvkem sama sebe a tedy je obyčejná.

3. fáze - úloha a diskuze – návrhy řešení paradoxů *(20 minut)*

- po výkladu rozdáme studentům do skupin jednotlivé texty, na kterých je populárně formulován princip Russellova paradoxu.

a) paradox holiče

b) Mannouryho paradox o starostovy Arkádie

c) středověké dilema s krokodýlem a ukradeným dítětem

- po studentech budeme chtít, aby ve skupinách navrhli řešení *reálné* situace, kterou popisují jejich texty

- následuje seznámení se s jednotlivými texty v rámci celé třídy a rozbor jednotlivých návrhů a diskuze nad jejich platností, problém sebereflexe

- diskuze bude ukončena naznačením řešení Russellova paradoxu v matematické teorii – zavedení nového objektu – třídy, který splňuje dané vlastnosti a přitom není množinou, princip axiomatizace jako předejití sporu

4. fáze - závěrečné shrnutí *(4 minuty)*

Závěrečná reflexe hodiny, shrnutí poznatků.

***Cílem*** *této hodiny by mělo být prohloubení pochopení výstavby jednotlivých matematických teorií. Není cílem, aby student získal přesné teoretické znalosti o principech axiomatické výstavby, ale aby si uvědomil, že matematika je vybudována stejně jako ostatní teorie na základních hypotézách pomocí logických kroků a metajazyka. Tohoto poznání bychom měli opět dosáhnout pomocí konfrontace dosavadních znalostí a zkušeností z řešení úloh o množinách v rámci intuitivního přístupu a konkrétního paradoxu, který otřásá základní logikou našich úvah.*

***D) Závěrečná hodina tematického celku „Výroková logika a úvod do teorie množin" – některé další logické paradoxy***

Tato hodina bude rozdělena na dvě části, v první části se budeme věnovat omezení logiky systémem přirozeného jazyka a tedy vzniku paradoxů, které leží na rozhraní mezi logikou a sémantikou, druhá část hodiny bude věnována Zénónovým aporiím.

1. úvodní fáze – problémová úloha *(4 minuty)*

Učitel zadá studentům následující úlohu: Vymyslete takovou zjišťovací otázku (odpověď ano/ne), na kterou nelze správně odpovědět, přestože má právě jednu správnou odpověď.

*- řešením je otázka: „Odpovíte na tuto otázku „ne"?"*

- následuje diskuze nad řešením, je logicky nemožné, aby dotázaný na tuto otázku odpověděl správně, připuštění faktu, že při uvažování v rámci přirozeného jazyka na některé problémy logika nestačí

2. fáze – další paradoxy *(15 minut)*

Studenty v dalším průběhu seznámíme s Berryho paradoxem. Pro zpestření a názornost můžeme na tabuli napsat tento nápis:

„Nejmenší číslo, které se nedá popsat méně než jedenácti slovy.“

*- vtip je v tom, že nápis má slov pouze deset*

Jako další příklad nám bude sloužit například paradox hromady písku. V neposlední řadě předložíme studentům paradox zabývající se množinou nezajímavých čísel, který spočívá v existenci nezajímavých čísel. Vezmeme-li v úvahu, že existují nějaká nezajímavá čísla, pak mezi nimi určitě najdeme první nezajímavé číslo. Na tom opět na první pohled není nic paradoxního, náš paradox se objevuje až tehdy, zamyslíme-li se nad tím, že námi nalezené první nezajímavé číslo je zajímavé právě touto svojí vlastností. (Vitálošová 2007, str. 34)

- následuje diskuze a snaha o vysvětlení, proč vznikly výše zmíněné paradoxy

- problematika řádného popisu a přesné formulace, návrat k úvahám o jazyce a metajazyce, např.: vymezení pojmu pravda – nelze definovat pouze v rámci češtiny (dostali bychom se k úvodnímu paradoxu „Tato věta je nepravdivá“

<u>3. fáze - Zénónovy paradoxy</u> *(15 minut)*

K realizaci našeho záměru v této části hodiny bude učitel potřebovat několik pomůcek – Achilla a želvu. Vhodné jsou konkrétnější předměty (postavičky, dětské hračky apod.), ale vystačíme si i s obrázky či nápisy na papíře či jinými zástupnými předměty.

V třídním kolektivu vybereme dobrovolníka (je lepší volit komunikativnější typy), kterému dáme do ruky postavičku Achilla a želvy. Po té přečteme k tomuto úkolu vhodnou formulaci Zénónovy aporie a budeme chtít, aby nám student znázornil, co se v ní praví. Vhodnou formulací je pro názornost například tato:

***Achilles a želva*** *– Pro začátek řekněme, že želva má náskok 100 metrů před Achillem a běží desetkrát pomaleji než bojovník. První krok, který musí Achilles vykonat je doběhnout na místo, kde je želva, což znamená uběhnout sto metrů. Když dosáhne tohoto bodu, želva už tam není, jelikož během* *té doby uběhla deset metrů. Achilles tak musí vykonat další krok, a to uběhnout deset metrů, aby se dostal do místa, kde je želva nyní. Když se Achilles dostane do tohoto místa, je želva opět o metr dál, a tak to jde stále dokola. Kdykoli totiž Achilles dosáhne místa, kde byla želva na konci předchozího kroku, želva už tam není. Achilles tedy nikdy nemůže předběhnout želvu.* (Smullyan 2008, str. 194)

- diskuze o „řešení“ paradoxu, studenti vědí, že Zénónovo tvrzení neříká pravdu, ale z logického hlediska se zdá v pořádku

- seznámíme studenty s další Zénónovou aporií, a to dichotomií

V diskuzi navedeme studenty k následující úvaze: V každém tvrzení, které vede k nesprávnému závěru, existuje chybný krok. Najdeme jej v této aporii? Jelikož z reálného života víme, že závěr je jistě nesprávný. Předpoklady jsou logické a na názorném modelu jsme jejich realizaci viděli, prvním chybným krokem je zde tedy vyvození závěru. Zjednodušeně lze přirovnat k implikaci, z pravdivých předpokladů nepravdivý závěr, tedy celé tvrzení je nepravdivé.

<u>4. fáze - závěrečné shrnutí</u> *(5 minuty)*

Závěrečná reflexe hodiny, shrnutí poznatků, doporučení literatury a webových serverů s logickými hádankami.

např.:

Smullyan, R., M.: *Jak se jmenuje tahle knížka?* Mladá fronta, Praha 1986.

Smullyan, R., M.: *Satan, Cantor a nekonečno.* Mladá fronta, Praha 2008.

Riedlerová, I.: *Hádanky a hlavolamy pro rozvoj myšlení dětí.* Portál, Praha 2001.

Hemme, H.: *Kolumbovo vejce a jiné záludné hříčky.* Albatros, Praha 2007.

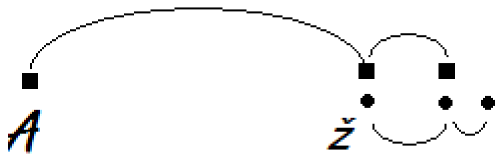
Niederman, D.: *101 hádanek pro náročné.* Portál, Praha 2006.

www.hadanky.chytrak.cz
http://brainden.com/hlavolamy/paradoxy.htm

***<u>Cílem</u>*** *této hodiny by mělo být motivování studentů k přemýšlení nad logickými úlohami, k užívání logiky v řešení konkrétních problémů a k zvážení důležitosti přesného vyjadřování a argumentace. Zároveň bychom touto hodinou měli motivovat zvídavější studenty k samostatnému rozvoji jejich logického uvažování. Zvláště u Zénónových aporií nezacházíme zbytečně do hloubky, úlohy by měli sloužit spíše k provokaci žákovských představ.*

### *E) Zénónovy aporie – 4. ročník, opakování posloupností a řad*

V této hodině budeme postupovat podobně jako v druhé části předešlé hodiny. Nemusíme však již pro názornost používat modely, ale stačí situaci schematicky znázornit na tabuli. A to pro obě dvě výše zmíněné aporie, např. takto:




Studenti by však již na rozdíl od prvního ročníku měli na základě svých dosavadních znalostí matematiky a v rámci zařazení hodiny do tematického celku „opakování posloupností a řad“ nalézt uspokojivé matematické řešení této aporie. Toto řešení spočívá v součtu nekonečných konvergentních řad. Jednotlivé součty samozřejmě konkrétně spočítáme.

V případě Achilla a želvy jde o součet řady

$$100+10+1+1/10+1/100+\ldots+(1/10)^n+\ldots,$$

který se rovná číslu 1000/9.

V případě dichotomie sčítáme řadu

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots,$$

která, jak je známo, konverguje k číslu jedna.

Učitelem by mělo být zdůrazněno, že z filozofického náhledu jsou tyto aporie opravdu neřešitelné, ale z matematického hlediska řešení nalezneme, protože matematici si určili, že součet nekonečné řady bude limita posloupnosti.

Součástí hodiny bude i seznámení studentů se třetí Zénónovou známou aporií, a to „letícím šípem".

***Cílem*** *této hodiny by mělo být motivování studentů k samostatnému rozvoji jejich logického uvažování. Hodina by měla studenty přimět si uvědomit, že matematika je vybudována uměle stejně jako ostatní vědecké teorie na hypotézách pomocí pravidel a vlastního metajazyka. Studenti by si měli být vědomi rozdílu mezi popisem reálného světa a nástrojem, který nám tento popis umožňuje.*

### *F) Logické paradoxy – 4. ročník, opakování základních poznatků z výrokové logiky a teorie množin*

Hodina bude koncipována podobně jako shrnující hodiny v prvních ročnících. Je vhodná především pro třídy, které o logických paradoxech ještě mnoho neslyšely.

1. úvodní fáze – motivační *(10 minut)*

Situace bude vystavena podobně jako ve výše uvedené hodině v prvním ročníku. Ovšem v rámci opakování je vhodné na tabuli nejprve napsat několik „běžných" výroků a společně s žáky určit jejich pravdivostní hodnotu. Také by mělo zaznít vymezení pojmu výrok, jako oznamovací věty, u níž lze určit pravdivostní hodnotu. Pak již můžeme na tabuli napsat větu *„Tato věta je nepravdivá"*. Diskuze by pak probíhala stejně jako v předešlé přípravě.

2. fáze – další logické paradoxy *(20 minut)*

- postupné seznámení s Epimenidovým paradoxem – Na tabuli napíšeme výrok: *„Všichni Kréťané jsou lháři“.* Zeptáme se studentů, zda přijdou na situaci, kdy by byl tento výrok stejně paradoxní, jako předešlý nápis na tabuli.

- porovnání studentských návrhů s formulacemi Eubúlida z Mílétu a paradoxu lháře

- různé parafráze Russelova paradoxu – studentům rozdáme nedokončené texty, na kterých bude tento paradox parafrázován pomocí populárních analogií, a budeme chtít, aby sami odhalili paradoxní formulaci, použijeme:

    - paradox holiče

    - dilema s krokodýlem

    - zákaz psaní zákazů

- ukázka konkrétního provedení textů:

*a) „V kasárnách byl jeden voják zaměstnán jako holič. Od svého velitele dostal tento holič rozkaz: Ať holí v kasárnách všechny muže, kteří… Doplňte velitelův rozkaz tak, aby byl pro vojáka nesplnitelný.*

*b) „V jedné tropické vesnici sebral krokodýl rodičům dítě z kolébky. Krokodýl pak nešťastným rodičům dítěte slíbil, že dítě ze svého zajetí pustí živé a zdravé, pokud oni správně zodpovědí otázku, zda krokodýl dítě pustí nebo ne, nebo pokud by nemohl dodržet své slovo. Jakou odpověď by měli dát krokodýlovi rodiče, aby nemohl splnit své slovo?“*

*c) „Představte si situaci, kdy je na stěně společenské místnosti v rekreačním objektu spousta zákazů. Některé oficiální od vedení střediska (např.: Zákaz kouření), některé neoficiální od nevychovaných návštěvníků (např.: Zákaz konzumovat jídlo z jídelny). Jaký zákaz se jednoho večera objevil na stěně, že došlo k paradoxní situaci?“*

- studentům necháme dostatek času, aby ve skupinách mohli mezi sebou diskutovat a ověřit všechny své návrhy

- pokud jejich společná práce nepovede k úspěšnému cíli, přerušíme je a poskytneme jim základní poučení o Russellově paradoxu, pokud budou diskuze smysluplné a řešení na správné cestě, necháme si matematický kontext až na závěr hodiny

3. fáze – pojem metajazyk *(10 minut)*

Závěrečná fáze hodiny bude vystavěna na obecných principech, pomocí kterých jsou v matematice překonávány jednotlivé paradoxy, máme na mysli především popření existence takového jevu – zavedení nového prvku – nebo důsledné rozlišování jazyka a metajazyka.

- studenty stručně seznámíme s možnými řešeními paradoxu holiče (neexistence holiče, holič je žena, holič bude civilista, rozlišením pojmu „holit“ a „holit se“…)

- na závěr studentům vysvětlíme pojem metajazyka, např. pomocí výroků o ledu a „ledu“.

4. fáze - závěrečné shrnutí *(5 minuty)*

Závěrečná reflexe hodiny, shrnutí nově získaných poznatků, doporučení literatury a webových serverů s logickými hádankami.

***Cílem*** *této hodiny by mělo být motivování studentů k přemýšlení nad výstavbou matematiky jako vědy, k užívání logiky v řešení konkrétních problémů a k zvážení důležitosti přesného vyjadřování a argumentace. Zároveň bychom touto hodinou měli motivovat zvídavější studenty k samostatnému rozvoji jejich logického myšlení.*

## 4.5 Reflexe jednotlivých hodin a návrh na úpravu jednotlivých příprav

Následující kapitola bude psána z pohledu autorky práce, obsahuje její dojmy a postřehy z výuky.

Všechny výše popsané postupy byly mnou (autorkou práce) realizovány na SPŠ ST Panská v Praze (obory SOŠ). V rámci výzkumu jsem odučila dle uvedených příprav celkem 11 hodin. Deset během září 2008, jednu hodinu v červnu 2008. Z toho osm hodin ve třídách, kde vyučuji matematiku (1.F, 2.A, 3.A a 3.D) a tři hodiny jako suplující učitel (1.G, 3.F). Konkrétní třídy a počty žáků budou uvedeny v jednotlivých rozborech.

Společným jmenovatelem hodin, ve kterých byly ve výuce použity logické paradoxy, by se dalo nazvat přílišné sebevědomí žáků rostoucí exponenciálně s věkem. První dojem z několika pokusů na střední škole v prvním ročníku byl naprosto odrazující. Studenti k předložené problematice přistupovali s despektem, motivační fáze nastavena formou problémové úlohy zaujala pouze některé přemýšlivější a nadanější studenty, problematika logického paradoxu byla odmítnuta jako nesmysl. Sebevědomí studentů, díky němuž jsou přesvědčeni, že vědí vše a jakákoli forma vzdělávání je pouze obtěžuje, je u současné generace středoškoláků neuvěřitelně vysoké. Přesto se mi při celkem volnější diskuzi na dané téma podařilo zapojit většinu třídy. Přípravy na jednotlivé hodiny v této práci jsou teoreticky koncipovány na první a čtvrtý ročník, který však na SPŠ ST neučím, a tak jsem odzkoušela tyto přípravy i v rámci svých tříd druhého a třetího ročníku (u přípravy E samozřejmě bez propočtu součtu nekonečných řad).

Co se týče konkrétních hodin, vezmeme-li to souhrnně, nejpodařenější byla hodina ***F*** v rámci třetích ročníků. Což bylo pravděpodobně způsobeno i tím, že v těchto třídách učím již druhým rokem, a se studenty jsme na sebe proto nejvíce zvyklí.

Nejméně se mi mé plány dařilo naplňovat právě v prvních ročnících (a to především ve třídě, kde matematiku nevyučuji).

V úvodu rozboru k jednotlivým hodinám bude vždy uvedena konkrétní třída a počet přítomných žáků z celkového počtu žáků ve třídě.

***A)*** **<u>1. F - počet žáků 32/32</u>**

Tuto motivační úlohu jsem zkusila ve své třídě v rámci úvodní hodiny do problematiky výrokové logiky. Ke správnému řešení jsem musela studenty dovést, ale přesto měla úvodní úloha poměrně velký úspěch. V rámci další výuky jsme se k ní vraceli i v dalších výkladových částech. (negace: Nedáte mi korunu.; implikace: Jestliže řeknete pravdivý výrok, pak vám dám minci. apod.)

Jednotlivé „hlavolamy“ jsem vždy zařazovala na konec hodiny a myslím, že s poměrně velkým úspěchem. Slabší studenti občas nestíhali pochopit postup jejich řešení, ale tím, že byly hádanky umístěny vždy v závěru hodiny, stávaly se poměrně často námětem hovoru i o přestávkách. Za úspěch považuji to, že někteří studenti začali jednotlivé logické hádanky a úlohy sami vyhledávat a nosili je do školy.

Kromě zvýšení zájmu o logiku jako takovou jsem si hlavně v rámci této třídy připravila poměrně slibnou půdu pro realizaci hodiny **B.**

Jelikož na matematiku mám souvisle pouze jednu třídu prvního ročníku, neměla jsem možnost tento koncept vyzkoušet v jiných třídách.

*Návrh na zlepšení:* Bylo by možná vhodné místo mincí v úvodní úloze použít jiné předměty, například v jistém smyslu můžeme tuto hru hrát i se známkami „jedničkou“ a „pětkou“. Mince ve třídě vzbudily zbytečnou diskuzi o hazardu a porušování školního řádu.

***B)* <u>1. F - počet žáků 30/32</u>**

V rámci realizace této hodiny jsem se setkala s prvním aktivním odmítnutím z řad studentů. Motivační fáze proběhla ještě víceméně v rámci představ, během výkladu však někteří studenti začali projevovat svůj nezájem o téma, a nabourávali tak ucelený průběh hodiny.

Tuto situaci jsem řešila přechodem od výkladu k diskuzi o možnosti řešení těchto paradoxů. Diskuzi, zda sama věta, že všichni Kréťané jsou lháři, je paradoxní, co zde paradox vytváří a podobně.

Závěr hodiny s tématem metajazyk se opět vydařil. Studenti poměrně rychle a správně tento pojem uchopili. Samostatně začali vytvářet i konkrétní příklady (více či méně úspěšně) na použití jazyka a metajazyka.

**<u>1. G - počet žáků 29/32</u>**

Stejný model hodiny byl odzkoušen i v rámci suplování v jiné třídě prvního ročníku. Vzhledem k tomu, že tuto třídu na matematiku neučím, ale naopak je vyučuji českému jazyku a literatuře, byla nedůvěra k mnou předkládaným informacím z jejich strany ještě větší, než v předchozím případě. Průběh hodiny byl tedy ještě o něco živější a více založen na diskuzi než v předchozím případě. Pozitivním prvkem této hodiny byla ale větší míra hry s jazykem, a to zvláště v úloze o psaní zákazů. V podstatě každý student byl schopen napsat ceduli, která by splňovala zamýšlený účel, ale nezpůsobila paradoxní situaci. Za všechna řešení např.:

- „Nedovoluje se psaní zákazů."

- „Kromě tohoto zákazu platí zákaz psaní zákazů." apod.

*Návrh na zlepšení:* Při realizaci této přípravy byli největším problémem neukáznění studenti. Návod jak toto řešit by mohl být samostatným tématem jiné práce. Primární řešení je omezit výkladovou část na minimum, studenti mohou potom být více zapojeni a tím i přesvědčeni, že to, co se jim předkládá, není úplný nesmysl.

*C)* **<u>1. F - počet žáků 31/32</u>**

První problém v této vyučovací hodině se objevil hned v úvodní fázi, a to kupodivu v nerozlišení znaku být podmnožinou a být elementem. Studenti zbytek formálního zápisu přečetli většinou správně, ale v rámci vztahu množin znají především vztah inkluze, tedy i zde dali přednost vlastnosti být podmnožinou. Po vysvětlení tohoto omylu již zbytek motivační fáze proběhl více méně dle předpokladů.

Výkladová část proběhla také dle plánu uvedeného v přípravě, historická fakta jsem omezila na minimum, tedy pouze na taková, aby studenti měli základní představu a vhled do dané problematiky. Názorné vysvětlení Russellova paradoxu na obyčejných a neobyčejných množinách bylo také celkem úspěšné.

Za vydařenou považuji třetí část hodiny, a to skupinovou práci. Zvolila jsem metodu postupného zvětšování skupin. Jednotlivé texty jsem nejprve rozdala do čtveřic (vždy dvě lavice k sobě), vzniklo mi tak osm skupin, po přibližně pěti minutách jsem dala dohromady vždy skupiny se shodným textem, aby studenti prodiskutovali svá řešení. Práce nejprve trochu vázla, a tak jsem znovu upozornila, že mi nejde o matematickou situaci, ale o konkrétní řešení reálné situace, kdyby vznikla. S tímto úkolem už si studenti poradili, např. mezi nejčastější řešení u paradoxu s Arkádií patřila novelizace zákona, ve smyslu, že starosta Arkádie může žít, kde chce. Jako časté řešení paradoxu holiče se objevovala úvaha, že jako holiče zaměstnáme ženu, nebo že holič bude dojíždět z jiné vesnice. Řešení otázky krokodýla a ukradeného dítěte bylo dle předpokladu nejoriginálnější, objevovala se řešení situace končící výrobou krokodýlí kabelky nebo prodejem zvířete do cirkusu jako rarity - mluvícího krokodýla. Skupina po sjednocení se však úspěšně shodla na tom, že krokodýl nemůže své slovo dodržet, a tedy řešení v rámci výše stanovených podmínek neexistuje.

Přesto že hodina byla poměrně vydařená co do činnosti studentů, obávám se, že cíle tak docela dosaženo nebylo. K tomu, že matematika je budována stejně jako jiné teorie, a tedy není věrným zobrazením světa, ve kterém žijeme, se studenti stavěli s velkými rozpaky.

**<u>2. A - počet žáků 24/27</u>**

Stejná hodina byla odučena i ve druhém ročníku. Výstup byl podobný jako u předchozí třídy, pouze s tím rozdílem, že v úvodní části jsme se potýkali ještě s většími problémy. Studenti bez zapojení této úlohy do tematického celku o množinách nejprve nepřiřadili velkým tiskacím písmenům význam množiny. Po korekci významu nápisu na tabuli, již vše probíhalo více méně stejně jako v prvním ročníku.

*Návrh na zlepšení:* Úlohu z třetí části o parafrázích Russellova paradoxu by možná stálo za to zařadit samostatně do nějaké další hodiny, a to z toho důvodu, aby byl dostatek času na následnou diskuzi. V časovém rozsahu jedné vyučovací hodiny diskuze dle mého nebyla dostatečná a některé důležité momenty a postřehy studentů tak zapadly.

***D)*** **<u>1. F - počet žáků 32/32</u>**

Tato hodina byla v rámci prvních ročníků nejméně vydařená. Psala-li jsem výše o až nezdravém sebevědomí studentů, nyní se projevilo ve vší síle. Ačkoli jsem předpokládala, že když jsme společně prošli předcházejícími hodinami, bude postoj studentů k paradoxům již do jisté míry změněn, jakmile jsem předložila problematiku aporií, studenti se postavili k předloženému tématu odmítavě.

První část hodiny proběhla dle předpokladů, studenti byli zaujatí a spolupracovali. Úspěch sklidila především úloha o zajímavých číslech. Otázku, na kterou nelze správně odpovědět, vymyslela dokonce většina třídy. Zlomový moment v hodině nastal s vyřčením Zénónovy aporie o Achillovi a želvě. Toto tvrzení bylo mezi studenty absolutně odmítnuto. Příliš velká spjatost s reálným světem kolem nás, kde je tvrzení zjevně nepravdivé, byla pro studenty nepřekonatelnou bariérou. Jejich zkušenost s fungováním světa byla pro jejich vnímání určující a nebyli ochotni připustit diskuzi. Zvolený dobrovolník pod vlivem negativního postoje modeloval situaci v souladu s tím, jak by to vypadalo v reálné situaci – Achilles tedy želvu předhonil. Modely jsem tedy převzala já a snažila se situaci znázornit. Blok ze strany i nadaných studentů byl příliš velký, takže se mi ani diskuzí nepodařilo hodinu opět dostat do plánovaných kolejí. O druhé aporii jsem se tedy už ani nezmiňovala a přešla k rezervě, kterou byly různé logické hádanky.

**1. G - počet žáků 30/32**

V druhé třídě, tentokrát opět prvním ročníku, jsem proto druhou část hodiny uvedla tím, že jsem dostatečně zdůraznila fakt, že víme, **že následující tvrzení neplatí**, přesto že jsou zajímavá z logického hlediska. V této třídě již pak druhá část hodiny proběhla v souladu s mým záměrem.

Pozitivně hodnotím aktivní zájem studentů v obou třídách o doporučovanou literaturu na závěr hodiny. Lze se tedy domnívat, že hlavní cíl – motivovat studenty k uvažování nad logikou a jejími principy – byl alespoň z části splněn.

*Návrh na zlepšení:* Návrh je zde již vlastně uveden v popisu hodiny. Jelikož neplatnost Zénónových aporií je na první pohled zřejmá, musíme studenty na rozpor, který vzniká předem připravit a upozornit je, že se je **nesnažíme přesvědčit**, že Achilles želvu opravdu nepředběhne, ale že kdyby to bylo tak, jak tvrdí Zénón, pak by byla želva stále o malý kousek před ním.

***E)*** Tuto hodinu jsem, ačkoli je koncipována pro opakování ve čtvrtém ročníku, odučila ve dvou třetích ročnících. V jedné třídě v červnu před prázdninami v rámci suplování, tudíž požadované znalosti již studenti měli, v druhé třídě letos v září, tudíž byla příprava malinko pozměněna.

**<u>3. F - počet žáků 25/30</u>**

V první třídě jsme si společně na úvod zopakovali základní poznatky o tom, co je to posloupnost, co je to limita a podobně. Pak již hodina probíhala na základě výše uvedené přípravy. Třída, kde jsem měla možnost si tuto hodinu vyzkoušet, byla třída, kde podle jejich vyučujícího jsou matematicky nadanější studenti než v běžných odborných třídách. Možná i na základě této skutečnosti hodina probíhala nad očekávání. Studenti už byli na konci třetího ročníku poměrně zvyklí na přijímání nezvyklých a nečekaných poznatků (prošli např. výukou komplexních čísel), a tak prvotní odmítnutí paradoxů nenastalo. Naopak celkem živá byla diskuze nad řešením Zénónových aporií. Nutno podotknout, že k řešení pomocí součtu řady jsem je nemusela nijak navádět (stačilo zopakování příslušné látky v úvodu hodiny). Cíl hodiny byl podle mého úsudku také naplněn, jelikož diskuze se samovolně ke konci hodiny stočila na téma, jaké všechny věci v matematice jsou založeny na dohodě.

**<u>3. D - počet žáků 27/31</u>**

V druhé třídě, kde vyučování proběhlo ještě bez potřebných znalostí, jsem studenty navedla na znázornění neplatnosti aporie o Achillovi a želvě pomocí grafu spojité funkce. Do jednoho grafu, kde na ose x je čas, a na ose y je zobrazena dráha, vyneseme grafy rovnoměrného přímočarého pohybu jako spojité lineární funkce, Tyto funkce se protnou v místě, které odpovídá číslu 1000/9 (za předpokladu, že zvolíme konkrétní situaci, která je popsána v přípravě).

Zbylý čas na konci hodiny jsme v této třídě věnovali obecným logickým hádankám a hlavolamům.

*Návrh na zlepšení:* S průběhem této hodiny jsem byla spokojená, přesto bych možná doporučila stejný postup, který jsem zvolila v první třídě, tzn. na úvod hodiny zopakovat základní pojmy vztahující se k posloupnostem a řadám. Ačkoli by hodina měla být zařazena tematicky, je dobré, zopakují-li si studenti tyto poznatky, jelikož tento úvod hodiny je potom nasměruje k správnému řešení.

***F)* 3. A - počet žáků 25/27**

Jak jsem se zmínila v úvodu této kapitoly, z průběhu této hodiny jsem měla nejlepší pocit. Úlohy jsou v podstatě analogické jako v prvním ročníku, ale změna v osobnostech a uvažování studentů během tří roků na střední škole je natolik velká, že měla na průběh hodiny pozitivní vliv. Studenti byli ve většině otevřeni a ochotni přijmout existenci paradoxů a diskutovat nad důvodem jejich vzniku.

Úkol na doplnění textů tak, aby vznikl paradox, byl sice pro studenty náročnější, než jsem předpokládala, ale nakonec i tato část hodiny dopadla poměrně dobře. Postupovala jsem opět metodou postupně zvětšovaných skupin. Jednotlivá řešení byla sice zajímavá, ale málokteré se blížilo ke správnému závěru. Po deseti minutách jsem tedy přerušila práci ve skupinách a přešli jsme k hromadné diskuzi. Představili jsme si nejprve text s paradoxem holiče. Po přednesení návrhů jsem studentům prozradila správné řešení. Po přečtení druhých dvou textů už se většinou studenti byli schopni na základě analogie (možná neuvědomované) dopracovat správného řešení. Díky tomuto nám však již nezbyl čas na poslední fázi hodiny – poučení o metajazyce.

**3. D - počet žáků 28/31**

Při realizaci v druhé třídě jsem tento postup proto zvolila rovnou. Závěr hodiny tedy proběhl dle přípravy. Diskuze se opět stočila k tomu, že matematika je vlastně založená na domluvě, a že kdybychom se domluvili jinak, můžeme počítat zcela odlišně.

*Návrh na zlepšení:* Úprava přípravy je opět přímo součástí sebereflexe vyučovacích hodin. Spočívá v úpravě úlohy v druhé fázi tak, aby měli studenti návodný příklad jak postupovat při řešení.

# 5. Závěr

Zařazení logických paradoxů do výuky matematiky na střední škole má jistě svůj pozitivní přínos. Bylo prokázáno, že téma paradoxů má i pro dnešní studenty svůj půvab. Ať už je motivuje negativně či pozitivně, jejich zažité představy a způsoby uvažování jsou konfrontovány s na první pohled nesmyslnými poznatky. Již samotným překonáním prvotní nedůvěry a neochoty studentů vůbec něco takového připustit, měníme jejich stereotypní vzorce uvažování. Jakýkoli podnět, který našim studentům pro rozvoj jejich logického myšlení nabídneme, má svůj význam, i kdyby jen v tom, že možná trochu změní žákovské postoje k matematice jako k vyučovacímu předmětu.

Zařazení logických paradoxů do výuky však závisí na spoustě parametrů, od sociálního složení třídy, matematických znalostí jejích žáků po vůli učitele a v neposlední řadě na jeho ochotě obětovat několik hodin v jinak nabitém tematickém plánu.

Problematika paradoxů slouží studentům především k bourání zažitých představ. Pomocí tohoto tématu můžeme ukázat matematiku v jiném světle. Většina studentů přichází s intuitivní představou, že matematika je popisem reálného světa. V rámci střední školy se setkají s několika okamžiky ve výuce, které s touto představou nekorespondují. Na základě paradoxů a především jejich odstranění z moderní matematiky můžeme studentům ukázat, že matematika je nástrojem, který slouží k popisu nejen světa, s kterým se bezprostředně setkáváme, ale lze ji použít i v abstraktních modelech (např. množina komplexních čísel, využití matematiky při výpočtech v nekonečně velkém prostoru ve vesmíru a nekonečně malých prostorech v částicové fyzice).

Současné trendy ve vzdělávání směřují od znalostí ke klíčovým kompetencím. Tento posun je přirozený. V dnešní době žijeme ve světě informačních technologií. Jakoukoli informaci můžeme velice snadno získat pomocí internetu či odborných publikací. Zároveň je však informací tolik, že není v silách jednoho člověka obsáhnout všechny obory. Učitel proto ztrácí roli vševědoucího, který předává poznatky, jelikož k tomu už mohou sloužit jiné zdroje. Postupně tak získává novou roli, a to průvodce ve vzdělávání jedince. Získat informace není problém, obtížnější je však už tyto informace zpracovat. Učitel tedy již primárně neučí fakta, ale předává studentům potřebné zkušenosti a dovednosti, aby byli schopni s těmito informacemi účelně nakládat.

V souladu s touto společenskou změnou, na kterou reaguje i právě probíhající školská reforma v České republice, se mění i pohled na výuku matematiky, a to především na středních školách. Matematika by měla napomáhat rozvoji abstraktního a analytického myšlení, rozvíjet logické usuzování a tříbit věcnou argumentaci s cílem najít spíše objektivní pravdu než uhájit vlastní názor. Výuka matematiky v ideálním případě přispívá k tomu, aby studenti byli schopni hodnotit správnost postupu při odvozování tvrzení a odhalovat klamné závěry. Splnění těchto cílů lze dosáhnout právě třeba za pomoci logických paradoxů. Ucelenější poučení o logických paradoxech bychom mohli našim studentům poskytnout spíše v rámci matematických seminářů nebo jako součást projektových dnů. V rámci výuky nám logické paradoxy slouží, jak bylo ukázáno, spíše jako nástroj k motivování studentů a k systematizaci a prohlubování jejich dosavadních znalostí.

Tato práce si nekladla za cíl poskytnout vyčerpávající návod, který by sloužil k zařazení některých logických paradoxů z historie (nejen) matematiky do výuky na českých školách. Záměrem bylo spíše ukázat čtenáři jednu z možných cest a přimět ho zamyslet se nad přínosem podobných variant a nad možnostmi, jak rozvíjet logické myšlení našich studentů, jelikož to je jedna z nejcennějších dovedností, které jim v rámci výuky matematiky můžeme předat.

**Použitá literatura:**


Aristoteles: *Metafyzika*. Rezek, Praha 2002.

Bahník, V., Bělský, J. a kol.: *Slovník antické kultury*. Nakladatelství Svoboda, Praha 1974.

Berka, K.: *Stručné dějiny logiky*. Karolinum, Praha 1994.

Bušek, I., Calda, E.: *Matematika pro gymnázia - Základní poznatky z matematiky*. Prometheus, spol. s.r.o., Praha 2007.

Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: *Matematiku pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 1. část*. SPN, Praha 1984.

Calda, E.: *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU 1. díl*. Prometheus, spol. s.r.o., Praha 2001.

Hemme, H.: *Kolumbovo vejce a jiné záludné hříčky*. Albatros, Praha 2007.

Hruša, K., Dlouhý, Z., Rohlíček, J.: *Úvod do studia matematiky*. Univerzita Karlova, vydavatelství Karolinum, Praha 1991.

Kirk, G. S., Raven, J. E., Schofield, M.: *Předsókratovští filosofové*. OIKOYMENH, Praha 2004.

Kukal, J.: Logika. *Automatizace,* r. **51**, č. 3, 2008, str. 192.

Kvasz, L.: Ako matematika čelí svojim paradoxom. In: Slavkovský, R. A., Vydrová, J., Vydra, A. (eds.): *Paradoxy a hranice racionality*. Schola Philosophica, Pusté Úľany 2007.

Martinez, J. G. R.: Thinking and Writing Mathematically: “Achilles and the Tortoise” as an Algebraic Word Problem. *Matematics Teacher*, **Vol. 94**, No. 4, Washington 2001, str. 248-252.

Movshovitz-Hadar, N., Hadass, R.: Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics*, **Vol. 21**, No. 3, 1990, str. 265-287.

Mráz, V.: *Logika pro pedagogy*. SPN, Praha 1985.

Niederman, D.: *101 hádanek pro náročné*. Portál, Praha 2006.

Peregrin, J. a kol.: *Logika 20. století: mezi filozofií a matematikou*. Filosofia, Praha 2006.

Peregrin, J.: *Logika a logiky*. Academia, Praha 2004.

Petáková, J.: *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, spol. s r. o., Praha 2003.

Rejzek, J.: *Český etymologický slovník*. Leda, Praha 2001.

Riedlerová, I.: *Hádanky a hlavolamy pro rozvoj myšlení dětí*. Portál, Praha 2001.

Salmon, W.: *Zeno´s Paradoxes*. New York 1970.

Selucký, O.: *Logika pro střední školy*. Fortuna, Praha 1995.

Skalková, J.: *Obecná didaktika*. ISV nakladatelství, Praha 1999.

Slavkovský, R. A.: Čo sú paradoxy a aký je ich význam (pre vedu a život)? In: Slavkovský, R. A., Vydrová, J., Vydra, A. (eds.): *Paradoxy a hranice racionality*. Schola Philosophica, Pusté Úľany 2007.

Smullyan, R., M.: *Jak se jmenuje tahle knížka?* Mladá fronta, Praha 1986.

Smullyan, R., M.: *Satan, Cantor a nekonečno*. Mladá fronta, Praha 2008.

Šedivý, J., Lukátšová, J., Odvárko, O., Zöldy, O.: *Úlohy o výrocích a množinách pro I. ročník gymnasia*. Slovenské pedagogické nakladatelstvo, n. p. 1970.

Šimek, F.: *Logika pro vzdělané učitelstvo a přátele věd*. Nakladatel Fr. A. Urbánek, Praha 1880.

Švršek, J., Bartoš, R.: Významní matematikové v historii (17). *Natura* 6/2003, (http://natura.baf.cz).

van Heijenoort, J.: *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Harvard UP, Cambridge, Ma. 1967.

Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele*. Matfyzpress, Praha 1997.

Vitálošová, V.: Najznámejšie paradoxy. In: Slavkovský, R. A., Vydrová, J., Vydra, A. (eds.): *Paradoxy a hranice racionality*. Schola Philosophica, Pusté Úľany 2007.

Vlasáková, M.: *Bernard Bolzano: cesta k logické sémantice*. Filosofia, Praha 2005.

Zlatoš, P.: *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou: Úvahy o množinách, nekonečne, paradoxoch a Gödelových vetách*. Iris, Bratislava 1995.

**Další použité zdroje:**

tematický plán 78 – 42 – M/01 Technické lyceum, SPŠ ST Panská, platný od 9/2008

tematický plán 26–47-M/003 Informační technologie – aplikace osobních počítačů, SOŠ Net Office Orlová, platný od 9/2008

http://brainden.com/hlavolamy/paradoxy.htm

http://pez.cuni.cz/ezdroje/

www.ceskaskola.cz

www.hadanky.chytrak.cz

www.nosch.cz

www.panska.cz

www.rvp.cz

www.vuppraha.cz

www.wikipedie.cz