Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická Fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Tvoření úloh žáky

Problem Posing

Diplomová práce

Autor: Marie Šilhavá

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Naďa Stehlíková, PhD.

Praha 2008

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá tvořením úloh z pohledu žáků. Tvoření úloh můžeme vidět buď jako didaktickou metodu, kterou je možno použít ve třídě, nebo může být použito jako diagnostický nástroj pro odborníky nebo učitele, jehož pomocí je možné diagnostikovat úroveň porozumění žáků danému tématu.

Ve svém výzkumu porovnávám schopnosti tvořit úlohy u žáků tří tříd, jedné se zaměřením na matematiku a dvou bez zaměření. Za použití diagnostické metody se zdálo, že žáci se zaměřením na matematiku byli schopni tvořit úlohy vysoké náročnosti, zatímco žáci bez zaměření byli schopni tvořit více úloh nižší úrovně.

Tvoření úloh je tématem, které v českém vzdělávacím kontextu vyžaduje další studie.

Abstract

This diploma thesis concentrates on problem posing from the students' point of view. Problem posing can be either seen as a teaching method which can be used in the class, or it can be used as a tool for researchers or teachers to assess the level of students' understanding of the topic.

In my research, I compare three classes, one mathematics specialist class and two generalist classes, in their ability of problem posing. As an assessment tool it seemed that mathemathics specialists were able to pose problems at a higher level of sophistication while the generalist class students could pose more questions but at a lower level of sophistication.

Problem posing is an issue that requires further study in the Czech educational context.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem uvedených pramenů a literatury.

Souhlasím se zveřejněním a dalším využitím této práce nebo jejích částí za předpokladu řádné citace.

Praha, 10. prosince 2008

Děkuji doc. RNDr. Nadě Stehlíkové, PhD. za odborné vedení diplomové práce.

Děkuji žákům a učitelům za jejich otevřenost pro tvoření úloh.

Obsah

1 Úvod

Téma tvoření úloh mě zaujalo už po několika hodinách pedagogické praxe na Základní škole Norbertov v Praze. Tam jsem se setkala s paní magistrou Timkovou, která je nadšenou pedagožkou. Její hodiny byly propracované a měla vždy připravené úlohy – jak početní, tak slovní –, na kterých mohla danou látku procvičovat. Na konci hodiny ještě dokázala shrnout, co se za hodinu probralo, případně zadat domácí úkol, a s jejím posledním slovem většinou zazvonilo. Navíc většinu úloh vymýšlela žákům sama. Rozhodla se totiž, že stejně jako její pedagogický vzor – učitel, který učil bez učebnice – ani ona nebude učebnici používat. Po několika hodinách náslechů, když jsem nastoupila já, mi dávala různé rady, čím vyučování vylepšit, oživit nebo jak sobě i žákům usnadnit práci. Jedna taková rada do hodiny 8.A zněla: „Až budete počítat lineární rovnice, dej jim za úkol nějakou vymyslet, uvidíš, že ji budou počítat raději než nějaké jiné z učebnice.“ A žáci skutečně počítali. Vůbec jim nevadilo, že vycházejí „nehezké“ zlomky a že zkouška je zdlouhavá. Byli spokojeni, že si úlohu mohli vymyslet sami, a byli na ni patřičně pyšní. Tehdy mě zaujalo tvoření úloh z pozice učitele. Můj zájem se ještě prohloubil, když jsem se v rámci kurzů ESF pořádaných Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy v Praze setkala osobně s docentem Odvárkou a profesorem Kuřinou. Ti nám poodhalili, jak přicházejí na své zajímavé úlohy, jak a kde hledají inspiraci a že tento proces není nikdy uzavřený, že vždycky mohou z nějaké úlohy např. obměnou vytvořit jinou nebo složitější úlohu.

Podobnou situaci jsem zažila hned, když jsem nastoupila na další pedagogickou praxi na Gymnázium Jírovcova, kde jsem si byla poslechnout několik hodin ve třídách se zaměřením na matematiku a přírodní vědy a přihlížela několika zajímavým diskusím na různá matematická témata. („Pane učiteli a nemohlo by to být deset nad pěti?...“) Nejčastější otázka žáků byla: „A co když...?“ Na jednu stranu jsem viděla, že pro učitele je taková hodina velice vyčerpávající, protože se celou dobu musí naplno soustředit, a že je tento styl výuky časově náročný, ale na druhou stranu bylo vidět, že minimálně ty žáky, kteří se takto ptají, matematika baví a jsou schopni matematicky uvažovat. (Jen jsem měla obavu, že si „matematicky slabší“ žáci z hodin neodnesou mnoho.) Kladla jsem si otázku, jestli pan učitel Trča žáky k takovému přemýšlení vede záměrně, a pokud ano, jakým způsobem to dělá. Způsob vedení žáků k přemýšlení a samostatnému uvažování mi po několika hodinách byl jasnější. Snaží se žáky „nakazit“ svým nadšením pro matematiku, sám se ptá žáků stylem: „Tak tady je to jasné, ale co když místo čtyřky dáme reálný parametr a?“

Už během své praxe na Gymnáziu Jírovcova jsem žákům zadala úkol, v němž měli sami vytvořit úlohu. Tématem byly právě množiny bodů daných vlastností a přesně jsem věděla, co už jsme probrali, jaké úlohy jsme procházeli nebo společně řešili na tabuli atd. Proto jsem na závěr chtěla, aby žáci vytvořili jakoukoli úlohu na téma množina bodů daných vlastností; takovou, kterou by byli schopni vyřešit (řešení bylo součástí úkolu), ale aby byla co nejobtížnější, nejobtížnější, jakou dokáží vymyslet. Žáci vytvořili zajímavé úlohy, které byly většinou správně vyřešené; naprosto jasně, srozumitelně a se všemi nutnými podmínkami zadané. Na mou otázku, jak na svou úlohu přišli, žáci většinou reagovali tím, že ji viděli v učebnici, sbírce nebo že se jim zdála těžká proto, že zkombinovali několik úloh, které jsme předtím řešili.

Výše uvedené zkušenosti byly východiskem mé práce na diplomovém úkolu.

Ve své diplomové práci nejprve popíši, co odborníci zpravidla rozumí pod pojmem úloha a tvoření úloh (problem posing, Aufgaben erfinden) a jak úlohy klasifikují. Poté se (v odstavci 2.2) zaměřím na názory odborníků na tvoření úloh v minulosti a porovnám je se současnými trendy. Následně v odstavci 2.3 nastíním několik zajímavých výzkumů k tématu tvorba úloh žáky (nebo studenty vysoké školy). V odstavci 3.1 se zaměřím na pedagogické dokumenty a popíši, jak tvoření úloh souvisí s činnostmi a kompetencemi uvedenými v Rámcovém vzdělávacím programu. Protože je mou druhou aprobací německý jazyk a v Německu jsem strávila rok svého studia, podívala jsem se i na názory německých didaktiků na danou problematiku (odstavec 3.2). Dále mě jako budoucí učitelku zajímalo, jak by měl učitel vést žáky k tvoření úloh, čeho by se měl vyvarovat, nebo naopak, na co by neměl zapomenout, a jak vytvořené úlohy klasifikovat (odstavce 3.3 a 3.4). V odstavci 3.5 shrnu, proč si didaktici matematiky tvoření úloh cení a uvedu důvody, k čemu je tvoření úloh užitečné, jak může žákům i učitelům posloužit.

Jádro práce tvoří čtvrtá kapitola, v níž podrobně popíši vlastní výzkum. který jsem provedla ve dvou třídách za gymnáziu a jedné třídě na základní škole. Práce je ukončena závěrem a doplněna dvěma přílohami.

2 Tvorba úloh

2.1 Vymezení základních pojmů

Úvodem vymezím, co bývá myšleno slovem úloha, na jaké typy odborníci úlohy zpravidla dělí, jak vypadá tvoření úloh, jak odborníci úlohy tvořené žáky klasifikují a z jakých situací je možné při tvoření úloh vycházet.

2.1.1 Úloha

Co je matematická úloha? Gonzales definovala *úlohu* pomocí několika vlastností: „Skládá se z tvrzení (jednoho nebo více), která mohou být napsaná, zadaná slovně, symbolicky, nebo graficky; ze známých a neznámých proměnných; je sadou podmínek, specifických vztahů mezi neznámou (neznámými) a daty již zadanými, a obsahuje úkol." (Gonzales, 1998)

Henderson a Pingry už v roce 1953 rozlišili dvě pojetí úlohy/problému. První hledí na úlohu/problém jako na vytvořenou otázku, která má být zodpovězena nebo vyřešena. Druhý koncept úlohy/problému bere v potaz nutnost otázky, ale bere navíc v úvahu úlohu jako otázku vztaženou k jednotlivci, kterému je otázka kladena. Druhé pojetí úlohy/problému se víc používá ve vyučovacím kontextu a je to to pojetí úlohy, které vesměs převzali učitelé matematiky. Lze dodat, že co je problémem pro žáky základní školy, by nemuselo být problémem pro studenta vysoké školy. (Gonzales 1998) Záleží tedy na zkušenostech a znalostech řešitele.

Pod pojmem *problém* většina odborníků rozumí obtížnou úlohu, která je netypická, náročnější než standardní úlohy pro žáky určitého věku. Za *příklad* je pak zpravidla považována úloha, jejíž řešení je předvedeno učitelem na tabuli.

Poznámka: Protože jsem čerpala převážně z anglických a německých zdrojů, nebylo vždy jasné, zda má autor na mysli úlohu či problém.

Schoen a Oehmke v práci z roku 1980 poukázali na to, že úlohy (problems) „leží někde mezi početními cvičeními – u kterých je okamžitě jasná strategie řešení – a hádankami – pro které neexistují správně definované podmínky řešení, kterým by potencionální řešitel rozuměl.“ (Schoen, Oehmke 1980, citováno v Gonzales 1998)

2.1.2 Dělení úloh

Kaune (2001) dělí úlohy na *konvergentní* a *divergentní*. Konvergentní úloha má jen jeden způsob řešení, při jejím řešení je užíván jeden známý postup řešení. Cílem takových konvergentních úloh je procvičení (nebo vyzkoušení) postupu řešení. Divergentní úloha má naopak více než jeden způsob řešení, a tím podporuje tvořivé myšlení. Takové úlohy bývají vědomě stručně, tudíž velice otevřeně formulovány, nebývají v nich předepsané či předkreslené žádné způsoby řešení, pojmenování a označení neznámé či známé chybí, vhodnou souřadnicovou soustavu si mohou žáci zvolit, případně bývají nevyhnutelná dodatečná zjednodušení a dodatečné podmínky. (Kaune 2001)

2.1.3 Tvoření úloh

Tvoření úloh a řešení úloh spolu velmi úzce souvisí a jsou považovány za hlavní témata ve výuce matematiky. (Pittalis a kol., 2004) „Tvoření úloh zahrnuje jak tvoření nových úloh či situací, tak přeformulovávání úloh již daných nebo známých.“ (English 1997) Tudíž vyžaduje znalosti předchozích úloh a často i jejich řešení. Tvoření úloh je (...) intelektuálně náročnější než jejich řešení, uvádí Mestre. (2002) Učitelům a didaktikům matematiky ale dlouho trvalo, než uznali, že rozvíjení schopnosti tvořit matematické úlohy je přinejmenším stejně důležité jako schopnost je řešit. (Ellerton, Clarkson 1996) Silver, Kilpatric a Schlesinger jsou názoru, že rozvoj schopností tvořit úlohy úzce souvisí s rozvojem matematického myšlení studenta vůbec. (Ellerton, Clarkson 1996)

Ellerton a Clarkson (1996) chápali tvoření úloh jinak, podle jejich názoru „tvoření úloh zahrnuje různé způsoby jazykového vyjadřování, na školní úrovni je však spojeno spíše s psaním jako nástrojem k naučení matematiky."[1] (Ellerton, Clarkson 1996, s. 1010)

Poznámka: Citáty v originále (v anglickém nebo německém jazyce) budu uvádět v poznámce pod čarou u těch citací, které pokládám za důležité nebo u kterých se mi originální znění zdálo výstižnější než český překlad.

Tvoření úloh je zkoumáno už více než šedesát let z různých pohledů. Duncker (1945) viděl tvoření úloh jako generování nové či pozměnění dané úlohy. Shukkwan (1993) chápe tvoření úloh jako formulaci sekvence matematických úloh vycházejících z dané situace. Mamona-Downs (1993) považuje tvoření úloh za aktivitu, kdy jedna úloha vyvolá vytvoření úloh dalších. Tvoření úloh zahrnuje podle Silvera (1993, 1995) jak tvoření nových úloh, které vyplynou ze situace nebo ze zkušeností, tak přeformulování již známých, daných úloh. (z Ellerton, Clarkson 1996, s. 1010) Brunner (1996) je názoru, že formulování ‚vyzývajících otázek' – výzev (‚challenging questions') je nesporně stejně důležité a stejně obtížné jako způsob dávání jasných odpovědí." (Ellerton, Clarkson 1996, s. 1010)

2.1.4 Klasifikace úloh tvořených žáky

Stoyanova (1995 cit. v Ellerton, Clarkson 1996, s. 1011) rozlišuje situace a podmínky, za kterých žák tvoří úlohy. Situace, ze kterých žáci vychází, jsou: libovolné, napůl strukturované a strukturované.

Libovolné (volné) situace pro tvoření úloh: Žáci mají za úkol generovat problém či úlohu ze zadané nebo vymyšlené situace. Např. mohou tvořit úlohy jeden pro druhého v rámci jedné třídy nebo dvě třídy navzájem pro sebe. Žáci mohou tvořit úlohy na libovolné téma nebo jim můžeme témata stanovit. Zadání můžeme ještě modifikovat např. tak, že žáci mají vytvořit takovou úlohu, kterou by kamarád těžko řešil, která by pro něj byla obtížná. (Ellerton, Clarkson 1996, s. 1011)

Jako příklad libovolné situace pro tvorbu úlohy uvádí Stoyanová (2000) situaci, kdy má žák vytvořit úlohy pro spolužáky, vrstevníky, nebo kdy má vymyslet zadání matematické olympiády.

[1] „Problem posing incorporates various modes of language, but at the school level it has been especially associated with the writing-to-learn mathematics movement."

Napůl strukturované situace pro tvoření úloh: Žákům jsou zadány otevřené situace a jsou požádáni, aby prozkoumali jejich strukturu a doplnili, co chybí. K tomu musí použít své předchozí znalosti, dovednosti a zkušenosti z matematiky. Hart (1981, cit. v Ellerton, Clarkson 1996, s. 1011) například požádal žáky, aby vytvořili úlohu, která by se hodila k zadanému výpočtu.

Napůl strukturované úlohy jsou dále například takové, které se vztahují k nějaké již zadané nebo řešené úloze nebo je zadán určitý graf (např. Gonzales, 1998) nebo tabulka či obrázek, kdy je studentům předem zadána nějaká otevřená situace a jsou vyzváni k tomu, aby prozkoumali strukturu úlohy/problému a doplnili ji vhodnými znalostmi, dovednostmi, návrhy a vztahy ze svých matematických zkušeností.

Strukturované tvoření úloh probíhá tehdy, když již zadanou úlohu máme pouze přeformulovat nebo u ní změnit podmínky zadání. Úlohy jsou tedy založeny již na nějakém daném specifickém problému či minulé úloze. Můžeme nechat žáky dokončovat nebo rekonstruovat specifickou strukturu úlohy, např. použijeme úlohy s nezadanými otázkami, úlohy s nedostatečnými nebo naopak nadbytečnými informacemi (Kruteckij, 1976, cit. v Ellerton, Clarkson 1996, s. 1011). Strukturovaným řešením úloh se zabýval též Smilansky (1984, cit. v Ellerton, Clarkson 1996, s. 1011), který zkoumal vztah mezi schopností řešit úlohy a tvořit úlohy na stejné téma. Když studenti dopsali matematický test, měli za úkol vytvořit nové úlohy do příští verze testu, které by byly zvlášť obtížné. Mezi strukturované tvoření úloh je možné řadit i „variování úloh“, o kterém píší Schupp (2002) a Schmidt (2003). Zmiňuje se o něm i Gonzales (1994) jako o „posing a related problem“ („tvoření podobné úlohy“).

Silver (1994) navíc klasifikoval tvoření problémových úloh z jiného hlediska, a sice podle toho, zda tvoříme úlohy *před jejich vyřešením*, *během jejich řešení* nebo *po vyřešení*. Argumentoval tím, že tvoření úloh může nastat dříve, než dojde k jejich řešení (když jsou úlohy generovány z daného podnětu, jako je např. příběh, obrázek, diagram, prezentace, graf atd.), během řešení úlohy, když žáci záměrně změní cíle a podmínky úlohy, nebo po vyřešení úlohy, když uplatní zkušenosti z řešení předchozí úlohy v nových situacích.

2.2 Názory odborníků na tvoření úloh v minulosti a nyní

Díky tomu, že mým druhým oborem je německý jazyk, mohla jsem čerpat i z německy psané literatury. Přehledně shrnuje vývoj názorů na tvoření úloh žáky ve světě a v Německu Schupp (2002), proto se v tomto odstavci budu opírat právě o jeho práci. V bodech popíši základní stádia vývoje a uvedu vždy autora a v hranatých závorkách (pouze pro časovou orientaci) rok, ve kterém svou myšlenku publikoval. Přesné odkazy na práce uvedených autorů je možné nalézt v Shuppově práci.

2.2.1 Tvorba úloh ve světě

- V historii byl Polya [1949], „mistr matematické heuristiky", jedním z prvních, kdo se začal tvořením úloh zabývat, kdo zpopularizoval tvoření úloh. Už v jeho zpracování závěrečné fáze řešení úlohy (zahrnující pohled zpět) stojí otázka, zda je možné tento výsledek nebo tuto metodu použít ještě pro nějakou jinou úlohu.

- Významné podněty přicházejí asi od roku 1980 a od té doby se problematice tvorby úloh věnuje stále více odborníků (především z anglicky mluvících zemí).

- Kantowski [1980] považuje variování známých úloh za jednu z těch schopností, které jsou charakteristické pro čtvrtý, nejvyšší stupeň, do něhož může řešitel úlohy dospět.

- Pro Kilpatricka [1985] jsou možnými zdroji úloh „jiné problémy, úlohy". Poukazuje v této souvislosti na strategie typu asociace, analogie, zobecňování, kontradikce a navrhuje způsoby, jak je začlenit do vyučování.

- Stevenson [1992] vytvořil šedesát „exploratory problems" (výzkumných úloh), které vybral mimo jiné podle kritéria, zda úlohy/problémy vyvolávají několik dalších úloh/problémů. Rozdělil explorační proces na fázi induktivní, deduktivní a kreativní (hledání odpovědi, zdůvodnění odpovědi, vlastní zkoumání).

- Stoyanova [1995] rozlišuje: (libo)volné, napůl strukturované a zcela strukturované situace pro tvoření úloh, podle stupně závislosti na původní úloze. Stoyanova [1999] toto dělení dále zjemňuje a vysvětluje rozdíly na mnohých příkladech. „Variace podle ní patří ke zcela, plně strukturovaným situacím pro tvoření úloh, které jsou založeny na jedné specifické úloze či problému a jsou generovány tak, že člověk buď změní slovní zadání úlohy nebo významovou strukturu problému nebo otázky." (Schupp, 2002, s. 10)

- V Norsku se skupina vědců okolo Solvanga [1997] zabývá situacemi, ze kterých úloha vychází – data, fakta, obrázky, vztahy. (Tichá (2000) také bere v potaz různé situace, ze kterých je možno vycházet při tvoření úloh. Např. situace „Na hřišti", „Tržiště"; Krummheuer (2005) pro změnu uvádí situace „Na školním dvoře" nebo „Jedeme do zoo"). Z takové situace vychází „počáteční úloha", jejíž řešení by mělo nabádat k tvoření zadání dalších úloh.

- V letech 1993 – 1996 se setkávala diskusní skupina pro „Používání úloh s otevřeným koncem v matematice" (v rámci PME-fóra – Psychology of Mathematics Education) a zabývala se i variacemi úloh. (Stejně tak se otevřenými úlohami zabýval např. i Pehkonen, 1997.)

- Leung [1997] vytvořil testy na schopnost tvořit úlohy („problem-posing-tests") a snažil se je vyhodnotit podle Guilfordových kritérií: likvidita, flexibilita, originalita vlastní produkce.

2.2.2 Tvorba úloh v Německu

V Německu je v současné době populární tzv. *variování úloh*, což je podle klasifikace Stoyanové vlastně tvoření úloh, vycházející ze strukturované situace, tedy podtypem „problem posing". (Schupp 2002, s. 10) Dále se pak mnozí didaktici staví za používání otevřených úloh.

- Steinhöfel a Reichhold [1971] považovali vyvozování závěrů za poslední krok procesu řešení úloh dokazováním. Pod pojmem vyvozování závěrů rozumí např. zobecňování, zvláštní případy, hraniční případy, převrácení dokázané věty nebo dokazování analogických vět.

- Wittmann [1971] se zasazuje o „erzeugende Probleme" („vyráběné úlohy/problémy"), které tvoří soubor příbuzných úloh, které můžeme získat analogií, obměnou, zobecněním atd.

- Bruder [1988] upozorňuje na možnost obměny úloh za účelem efektivnějšího a diferencovanějšího upevnění probíraného učiva.

- Naproti tomu Walsch [1995] mluví o „rodinách úkolů“, které jsou uvozeny vstupní úlohou. Neuvádí však, kdo je tvoří (zda žáci nebo učitelé).

- Käpnick [1996] navrhoval jako jedno opatření na podporu talentovaných žáků samostatné nacházení a formulování navazujících úloh.

- V roce 1997 se v BKL-Programu, později přejmenovaném na SINUS („Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“, neboli „Stupňování efektivity matematicko-přírodovědného vyučování“) objevila myšlenka, že variování úloh je užitečným prostředkem pro rozvoj matematické kultury žáků a jejich motivaci.

- Ulm [2001] přináší různé „cesty k rozvoji vyučování matematice“ a jako první možnost jmenuje variace zadání úloh.

- BKL-Program (později SINUS), se uplatňuje jako prostředek rozvoje kultury matematických úloh („Aufgabenkultur“) na německých školách (píší o něm i Baptist a Ulm, 2005), v jehož rámci. Díky němu je podporována tvorba úloh v každodenním vyučování a objevuje se snaha používat co nejvíce otevřené úlohy.

- Problematikou tvorby úloh se zabývá celá řada dalších autorů. Böhmer [2000] píše o variacích slovních úloh (stejně tak později Schupp 2002, 2003, Schmidt 2003).

V Čechách se tématem tvoření úloh podrobněji zabývá pouze Hošpesová, Tichá a Macháčková. (Tichá 2003; Macháčková, Tichá 2007)

2.3 Výzkumy zabývající se tvorbou úloh žáky (studenty)

V anglicky psané literatuře je k nalezení celá řada výzkumů zabývajícími se tvorbou úloh žáky. Uvedu jako příklad jen některé z těch, na které jsem narazila: De Villiers (1995), English (1997), Grundmeier (2002), Isoda a Nakagoshi (2000), Lowrie (2000, 2002), Leung a Silver (1997), Macháčková a Tichá (2007), Pittalis a kol. (2004), Silver a Cai (1996) Siswono (2005), Stoyanová (2005), Tichá (2003) a mnoho dalších. Zaujalo mě hned několik z nich a mnohé mi byly i inspirací pro můj vlastní výzkum.

Vybrala jsem proto devět z nich, které v následující kapitole podrobněji popíši.

Grundmeier (2002) zkoumal schopnost tvořit úlohy u vysokoškolských studentů, kdy měli vytvořit co nejvíce úloh, a nenechával studenty úlohy řešit. Siswono (2005) také zkoumal „problem posing" u studentů vysoké školy. Měli za úkol formulovat věty. Raději než věty formulovat, je chtěli studenti dokazovat nebo prakticky aplikovat.

Pittalis a kol. (2004) zkoumali tvoření úloh z pohledu kognitivních procesů, které při něm žáci nejvíce uplatní. Popisovali tak spíše proces, jak se úlohy tvoří, než výsledný produkt. Lowrie (2000) stejně jako Tichá (2003) a Macháčková a Tichá (2007) zkoumali tvoření úloh žáky spíše jako diagnostický nástroj a pracovali s dětmi prvního stupně. U všech těchto odborníků se jednalo o jednorázový výzkum.

Dlouhodobější výzkumy a práci s dětmi prováděli například English (např. 1997), Lowrie (2002) a Stoyanova (2005). Lowrie (2002) popisuje pětitýdenní spolupráci dětí vždy s jedním studentem vysoké školy, budoucím učitelem, který jim měl pomáhat s tvořením a řešením úloh. English (1997) připravila tříměsíční program pro děti (a 23 dětí při něm detailněji pozorovala) a zajímala ji souvislost schopností úlohy tvořit a řešit. Popisuje změnu vnímání a přístupu dětí; na závěr programu prý bylo každé dítě schopno vytvořit řešitelnou úlohu. Stoyanova (2005) se rok věnovala osmi- a devítiletým dětem a konstatovala, že na konci roku se při tvoření úloh více soustředily na jejich kvalitu a obtížnost.

Lowrie, Stoyanova a English se shodli na tom, že po uskutečněném speciálním programu pro děti, zabývajícím se tvořením úloh, byly děti schopny tvořit komplexnější úlohy, English (1997) dokonce mluví o vyšší sofistikovanosti a intelektuálnosti úloh.

Tichá (2003), Macháčková a Tichá (2007), Lowrie (2000, 2002) a Stoyanová (2005) pracovali se žáky prvního stupně, English (1997) a Pittalis a kol. (2004) pracovali s žáky druhého stupně a Grundmeier (2002) a Siswono (2005) zadávali tvorbu úloh (problémů) studentům vysoké školy.

Na Grundmeierův (2002) výzkum jsem se zaměřila nejvíce, protože jsem ho později použila ve vlastním výzkumu a stejně jako on jsem porovnávala třídu se zaměřením na matematiku se třídou bez specializace. Přesto, že Grundmeier nechával studenty tvořit úlohy a vůbec nevyžadoval, aby úlohy i řešili, byl pro mne jeho výzkum velkou inspirací.

Grundmeier

Grundmeier (2002) prezentoval ve svém výzkumu analýzu schopností studentů vysokých škol tvořit úlohy v závislosti na jejich vztahu k matematice. Zkoumal schopnosti tvořit úlohy studentů začínajících s matematikou (pre-calculus students) a srovnával je se schopnostmi pokročilých studentů matematiky (mathematical proof students). Grundmeiera zajímaly čtyři aspekty tvoření úloh: přístup k matematice, tvoření numerických úloh a nenumerických úloh a tvoření úloh obecně. Jeho cílem bylo poukázat na souvislost mezi schopností tvořit úlohy a přístupem k matematice. K tomu účelu vypracoval dotazník, ve kterém měli studenti ohodnotit svůj vztah k matematice. Měřil jím vztah studentů k matematice pomocí hodnoty, kterou studenti matematice přikládají. Celkem vytvořil dvacet jedna otázek, ve svém článku uvádí příklad jedenácti z nich. Dotazník jsem použila ve svém výzkumu, proto ho uvádím kapitole 4.

Grundmeier správně předpokládal, že studenti vyššího ročníku budou mít lepší vztah k matematice než úplní začátečníci ve studiu matematiky na vysoké škole. Z různých důvodů, ale především proto, že studenti vyšších ročníků mají víc zkušeností s matematikou, že už se rozhodli, co přesně chtějí studovat, vybrali si specializaci a umí víc ocenit hodnotu matematiky.

Druhá část výzkumu se skládala z tvoření úloh. Studenti měli dvacet pět minut na to, aby vytvořili co nejvíce úloh k zadaným dvěma situacím tak, aby jejich zadání bylo co nejnáročnější, ale řešitelné. Neměli se zdržovat řešením úloh, ale měli dbát na to, aby úlohy byly obtížné, takové, že by je spolužáci nebyli schopni vytvořit. Mohli si přidat informace či údaje, pomocí nichž by mohli vytvořit úlohu. Studentům byly zadány dvě situace, jedna založená na číselných údajích, druhá nikoliv. Situace vypadaly takto (Grundmeier, 2002):

1. situace: „Rozhodli jste se koupit pro univerzitu počítač. Nová řada nejlepších notebooků stojí 2 500 $. Máte dvě možnosti pro koupi počítače, můžete použít kreditní kartu, která má roční sazbu 13,99 %, nebo vše můžete financovat přes univerzitní

počítačový sklad po 48 měsíců za 70 $ měsíčně. Ušetříte 500 $, ale musíte být schopni zaplatit za své knihy v dalším semestru.“[2]

2. situace: „Univerzita se rozhodla postavit parkovací garáže pro potřeby studentů a zaměstnanců. Univerzita má maximální rozlohu půdy, jež může být použita, a má také minimální počet zaměstnaneckých míst a minimální počet studentských míst, které jsou potřeba v určité denní hodiny. Univerzita provedla výzkum, jenž ukazuje, že určitý počet zaměstnanců a studentů přijíždí v 8 hodin a v poledne. Univerzita je také omezena fixním rozpočtem pro placení a celkovou rekonstrukci.“[3]

U vytvořených úloh studenty pak byly posuzovány a počítány kroky potřebné při řešení úloh, jejich počet při řešení numerických a nenumerických úloh a pro celkové tvoření úloh byl statisticky vyhodnocován.

Grundmeier došel k závěru, že studenti tvoří matematické úlohy snáze k situacím, kde jsou již obsažena či zmíněna nějaká čísla. Jakmile neobsahovala situace číselné zadání, měli studenti s tvořením úloh či otázek daleko větší problémy.

Nejpřekvapivější však pro Grundmeiera bylo, že při porovnání tvoření úloh studenty matematiky a studenty nematematických oborů vyšlo najevo, že obě skupiny studentů jsou schopny tvořit úlohy na stejné úrovni, stejně dobře (či stejně špatně), že tedy schopnost tvořit úlohy nezáleží na matematických znalostech. (Přestože měly tyto skupiny studentů rozdílný zájem o matematiku, jak jsem již uvedla.) Z toho vyvozuje Grundmeier závěr, že studenti mají málo zkušeností s tvořením úloh, že tvoření problémových úloh je příliš novou myšlenkou pro mnohé z nich a že jejich tvorba může být založena na intuitivních přístupech a přístup studentů k matematice na ni nemá takový vliv.

Celkově lze říci, že studenti měli s tvořením úloh problémy. Pokud uměli tvořit úlohy založené na numerických údajích, uměli tvořit i úlohy založené na

[2] „Item #1: You have decided to purchase a computer for college. The new top of the line laptop costs $2500. You have two options for purchasing the computer, you can use your credit card, which has an annual interest rate of 13.99% or you can finance it through the University computer store for 48 months at $70 a month. You have saved $500, but you need to be able to pay for your books next semester.“

[3] Item #2: „The University has decided to build a parking garage for the use of students and staff. The University has a maximum amount of land that they can use and also have a minimum number of faculty/ staff spots and a minimum number of student spots that are needed at certain hours of the day. The university has done research that shows that a fixed number of faculty/staff and a fixed number of students arrive at 8 am and 12 noon. Also the university is restricted by a fixed budget for paying and general construction.“

nenumerických údajích a naopak. Hypotéza, že s rostoucí zkušeností studentů s matematikou se zlepšuje i schopnost tvořit úlohy na základě více otevřených situací se nepotvrdila. Korelace mezi přístupem k matematice a schopností tvořit úlohy nebyly potvrzeny. Ve skutečnosti byly výsledky studentů, kteří nemají kladný vztah k matematice, téměř identické s výsledky studentů, kteří považují matematiku za svůj oblíbený předmět. (Grundmeier 2002)

Grundmeier ze svých výsledků vyvozuje „nutnost začlenit tvoření úloh do hodin matematiky dříve, abychom umožnili studentům přemýšlet o matematice z tohoto úhlu pohledu a zapojili je více do matematiky. Budoucí matematikové, inženýři a počítačoví vědci budou jistě konfrontováni s tvořením úloh ve svých profesích.“[4] (Grundmeier, 2002) Tento důvod pro větší využití tvorby úloh považuji za pádný.

Grundmeier v závěru navrhuje několik otázek pro další studie, zvažuje možné směry v budoucnosti:

1. „Ovlivní zapojení tvoření úloh do vysokoškolských matematických seminářů přístup studentů k matematice, jejich schopnost tvořit úlohy a schopnost řešit úlohy?“
2. „Bylo by dosaženo podobných výsledků, kdyby se kladl stejný důraz na tvoření úloh, jako se klade na jejich řešení?“ „Pokud ano, co z toho vyplývá?“
3. „Je vztah mezi schopností tvořit úlohy z nenumerických situací a přístupem k matematice stejný i v dalších pokročilých třídách?“ (Grundmeier 2002)

Siswono

Siswono nechal studenty vysoké školy, obor matematika, formulovat matematické věty. Zadal jim dva axiomy a úkol: „1. Existují právě čtyři body v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. 2. Jakékoliv dva různé body leží na právě jedné přímce. 3. Odvozením z těchto axiomů zformulujte nejméně dvě věty. Můžete nejdříve

[4] „The combination of these results may imply the necessity to begin incorporating more problem posing early into mathematics classrooms to allow students to think about mathematics from this perspective and to engage them more in mathematics. Future mathematicians, engineers and computer scientists will surely be confronted with problem posing tasks in their professional activities.“

zformulovat definici daného pojetí.“ (To proto, aby studenti pochopili, že nejdříve by měli uvést definici a až následně formulovat věty.) Pro studenty nebylo lehké věty formulovat, raději by je dokazovali nebo prakticky aplikovali, než sami tvořili. Bylo to pro ně těžké, protože to vyžaduje „vyšší schopnosti řízeného myšlení, pochopení informací a axiomatického systému“. (Siswono, 2005)

Pittalis a kol.

Proces tvorby úloh můžeme analyzovat z různých hledisek. Každý se také na tento proces může dívat různě. Je tedy třeba najít nějaký rámec, pomocí něhož lze tvorbu úloh zkoumat. Proto Pittalis a kol. (2004) navrhli model („strukturální model pro tvoření úloh“), který umožňuje popsat tvoření úloh z hlediska čtyř kognitivních procesů:

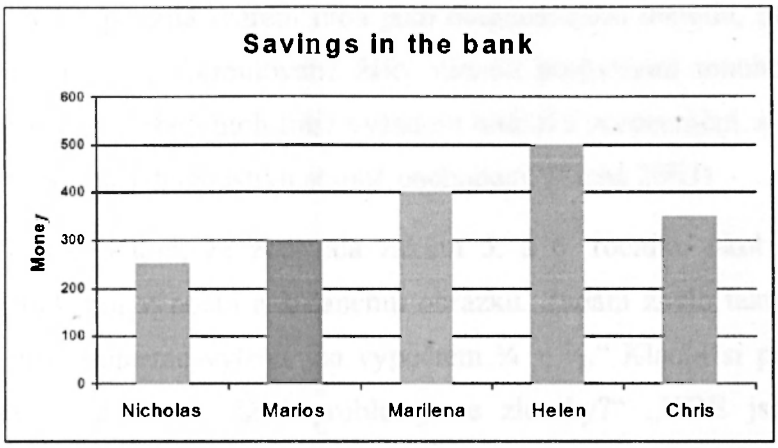
4. kognitivní procesy, které jsou potřeba k filtrování kvantitativních informací
5. převádění („translating“) z jedné kvantitativní informace do jiné
6. pochopení a organizování kvantitativních informací tím, že jim dáme význam nebo vytvoříme vztahy mezi danými informacemi
7. editování kvantitativních informací daného podnětu.

Pittalis a kol. tento rámec použili ve svém výzkumu, jehož se zúčastnilo 143 žáků šestého ročníku ze šesti tříd základních škol v urbanizované části na Kypru, konkrétně 79 chlapců a 64 dívek pocházejících z různých socioekonomických podmínek. „Každý žák vyplnil test tvoření úloh, který obsahoval situace, jež jim pomohou, aby si uvědomili různé varianty matematického kontextu.“ Test byl rozdělen do čtyř částí, které se skládaly vždy ze tří nebo čtyř úloh založených na různých matematických situacích. Úkolem žáků bylo:

1. doplnit do úlohy chybějící otázku a dopsat odpověď
2. vytvořit úlohy odpovídající dané rovnici
3. vytvořit úlohy založené na daném příběhu.
4. vytvořit úlohy k obrázkům, diagramům či grafům s matematickými údaji, přičemž by úlohy měly obsahovat (nebo neměly obsahovat) jisté operace jako: dvě sčítání nebo sčítání a odčítání atd.

1. Ke kognitivnímu procesu „filtrování“ se vztahovala např. úloha: Napiš otázku k příběhu tak, aby odpovědí bylo 285 známek. ‚Chris má 135 známek, Helen má o 15 známek víc než Chris.‘

2. O schopnosti „přenesení/přeložení“ informací byla například úloha: Napiš úlohu k danému grafu, jenž se týká úspor v bance.



3. Pochopení a organizování kvantitativních informací mohli žáci prokázat díky úkolu: Napiš vhodnou úlohu na výpočet: $(1300 + 2100) - 790 = n$

4. Schopnost editovat informace mohly děti ukázat například díky úloze: Napiš úlohu založenou na následujícímu obrázku:

(Pittalis a kol. 2004)

Žáci měli nejen vytvořit úlohy, ale měli je i vyřešit, což považuji za důležitý faktor. Ostatní autoři se totiž schopností vyřešit tvořené úlohy moc nezabývají.

Výsledky výzkumu ukázaly, že všechny čtyři kognitivní procesy přispěly ke schopnosti tvořit úlohy. Filtrování informací a editování úloh hrálo podstatnější roli než procesy pochopení strukturálních vztahů a přenesení informací.

Tichá

Tichá (2003, 2007) použila tvoření úloh jako diagnostickou metodu, protože podle jejího názoru slovní úlohy formulované žáky mohou poskytnout mnoho didakticky zajímavých informací. Tvoření úloh totiž vyžaduje hluboké porozumění, a tak se může používat i jako nástroj pro diagnostiku stupně pochopení. (Tichá 2003)

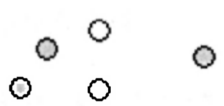
Tichá (2003) píše o tom, že zadávala žákům 5. a 6. ročníku úkol tvořit úlohy k danému aritmetickému výpočtu a k danému obrázku. Zadání znělo takto: „Vytvořte slovní úlohu, kterou můžeme vyřešit jen výpočtem ¼ + ½.“ Kladla si přitom otázky jako: „PROČ mají žáci tak vážné problémy se zlomky?“ „KDE jsou překážky v porozumění a při řešení úloh a jak přeučit věci nepochopené?“ (Tichá 2003, s. 19)

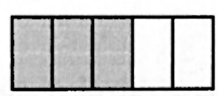
Tichá konstatovala, že učitelé žáků pak byli překvapeni množstvím a diverzitou informací o představách žáků a o úrovni jejich porozumění. Učitelé „souhlasili s tím, že tvoření úloh k daným výpočtům a obrázkovým reprezentacím jsou metody, které umožní identifikovat nebo alespoň nastínit problémy a obtíže každého žáka.“ (Tichá 2003, s. 24)

Macháčková, Tichá

Macháčková a Tichá (2007) rozvinuly výše zmíněný výzkum Tiché (2003) tím, že přidaly ještě další skupiny respondentů. Nechaly tvořit úlohy žáky 4. a 5. ročníku, 8. ročníku, studenty pedagogické fakulty – budoucí učitele prvního stupně a stávající učitele (učitele z povolání). (s. 180)

Všichni měli za úkol tvořit co nejvíce slovních úloh ke dvěma obrázkům: (s. 181)





Autorky uvádějí, že budoucí učitelé sice vytvořili celou škálu slovních úloh, ale většina z nich byla založena na sčítání (podobně jako u 10-14tiletých žáků). Úlohy na násobení se objevovaly jen zřídka. Pro autorky bylo zajímavým, ale zároveň alarmujícím zjištěním, že typy slovních úloh, navržených stávajícími učiteli, byly velice podobné těm, které utvořili žáci. „Přirozeně se lišili v úrovni jazykového vyjadřování." (s. 183)

Tichá (2008) rozlišuje pět vzájemně propojených chápání pojmu zlomek („subkonstruktů" zlomku): „část-celek, poměr, operátor, podíl, míra", přičemž subkonstrukt ‚část-celek' prostupuje všemi čtyřmi ostatními. Jejich pochopení je právě důležité při operacích se zlomky. Zlomky jsou podle názorů Macháčkové a Tiché (2007) oblastí, ve které se velice úspěšně může tvoření úloh uplatnit. „Když autor formuluje slovní úlohu, odkrývá tím svou koncepci, znalosti a pochopení určitého tématu. To znamená, že tvoření úloh může být pokládáno nejen za učební, edukační nebo reedukační nástroj, ale také za diagnostický nástroj." (Macháčková, Tichá 2007, s. 180)

Lowrie

Lowrie (2000) nechal 24 žáků, starých 8-9 let, tvořit úlohy pro žáky vyššího (4.) a nižšího (2.) ročníku. Zkoumal pak schopnost reflexe, schopnost plánování, tedy metakognitivní myšlení žáků, to vše skrze strukturu jejich úloh.

Žáci neměli předešlé zkušenosti s tvořením úloh. Po vytvoření úlohy byl každý žák tázán, proč by byla daná úloha vhodná (buď pro žáka 2. nebo 4. ročníku). Úlohy byly posuzovány podle následujících kategorií: „1. význam užitých čísel; 2. vhodnost obsahu pro daný ročník; 3. poznání, jak se úlohy řeší; 4. zainteresovanost a životní zkušenosti; 5. otevřenost úloh."

1. K významu užitých čísel uvádí Lowrie příklad Clair, která v úloze pro mladší děti použila menší čísla (6 a 20), protože se s nimi prý lépe pracuje. Pro čtvrťáky použila čísla 490 000 a 48.

2. Cathy ve své úloze pro druháky použila výpočet poloviny z padesáti, prý by to už měli znát, pro čtvrťáky násobení 11·12, prý by měli čtvrťáci znát násobky jedenácti.

3. Harriet vytvořila úlohu, u níž měla jasnou představu, že by si žáci mohli nakreslit diagramy, množiny a 24 tyčinek čokolády do těchto tří množin rozdělit.

4. Úlohu týkající se situace se života vytvořilo jen málo dětí, Christina vytvořila úlohu: „Pokud mám 3,50 $ a lízátko stojí 20 c, kolik peněz dostanu nazpátek?“

5. Hilary vymyslela otevřenou úlohu: „Katka nemůže vymyslet úlohu pro druháka. Pomůžeš jí?“

Tvoření úloh tak poskytlo třídní učitelce možnost nahlédnout do způsobu, jakým žáci získávají matematické povědomí a posloužilo jako diagnostická metoda.

Lowrie (2002) zadal 25 žákům 1. ročníku a 28 žákům 3. ročníku tvořit úlohy. Každý žák vždy pracoval ve dvojici s vysokoškolským studentem, budoucím učitelem. Tyto dvojice se setkávaly vždy hodinu týdně po dobu pěti týdnů. Budoucí učitelé se snažili žákům pomoci porozumět jejich matematickým schopnostem a povzbuzovat je během tvoření úloh a dohlédnout na to, aby žáci tvoření brzo nevzdávali. „Děti byly povzbuzovány, aby se staly vědci, učiteli a pozorovateli vlastního pokroku.“ (Lowrie 2002) Byly vedeny k tomu, aby slovně vyjadřovaly, co si myslí a o čem právě přemýšlí, čemu rozumí a jaké jsou jejich strategie. Studenti (budoucí učitelé) měli připraveny otázky, aby se dozvěděli co nejvíce informací o průběhu práce a stylu uvažování žáků. Pomáhali žákům také proto, aby úlohy, které formulují, byly řešitelné. Povzbuzovali je k tomu, aby tvořili úlohy, které je zajímají a baví. Žáci pak věděli, že u svého asistenta mohou hledat pomoc při řešení úlohy, což dalo tvoření úloh novou dimenzi. Nebyli totiž omezováni neschopností provést všechny výpočty nebo vyřešit úlohu o více krocích. Mohli se spolehnout na svého asistenta. Žákům tak byl poskytnut dostatek praxe a konkrétní instrukce a mohli tvořit otázky či úlohy pod vedením budoucího učitele, což Lowrie považuje za důležité.

Většina (84 %) žáků prvního ročníku tvořila na začátku (před započetím programu) typické slovní úlohy, jenž vyžadují jeden (72 %) či dva kroky (12 %) při jejich řešení. Netypické slovní úlohy navrhlo 12 % žáků, originální („novel“) úlohu navrhl jen jeden žák (4 %). Za netypickou slovní úlohu považuje Lowrie například: „Kolik listů novin je potřeba k zakrytí podlahy ve třídě?“ Příklad originální („novel“) úlohy: „Jak by vypadala houpačka, kdyby ty (budoucí učitel, student) sis sedl na jeden konec a já na druhý?" (Lowrie 2002) Žáci třetího ročníku tvořili daleko více úlohy, při jejich řešení byly potřeba dva kroky (například součet a pak rozdíl) (36 %) Celkově 83 % dětí úlohy i správně vyřešilo. Většina dětí totiž tvořila úlohy, u kterých si byla jista, že je správně vyřeší.

Mezi prvním a následnými setkáními byly pozorovány velké rozdíly v typu úloh, které děti tvořily. Děti tvořily více úlohy s otevřeným koncem už při třetím setkání. 48 %, to znamená 12 dětí z 1. ročníku, 57 % , to znamená 16 žáků ze 3. ročníku vytvořilo netypickou nebo originální úlohu („novel problem"). Žáci navíc čím dál méně tvořili úlohy, k jejichž vyřešení je potřeba pouze jeden krok (z 18 klesl jejich počet na 5) u žáků 1. ročníku, z 13 na 0 u žáků 3. ročníku. 60 % žáků 1. ročníku řešilo úlohy bez asistence budoucího učitele, u žáků 3. ročníku to bylo dokonce 70%.

Lowrie (2002) píše, že bylo vidět, že setkání s budoucími učiteli mělo na žáky okamžitě vliv. Děti tvoření úloh bavilo víc, připadalo jim jako dobrá výzva, byly schopny hledat u asistentů pomoc. Lowrie ukázal, že děti jsou schopny naučit se velice rychle tvořit úlohy, které jsou přirozeně komplexnější a lákají víc k vyřešení než ty úlohy, které můžeme najít v učebnicích. (Lowrie 2002)

English

English zkoumala schopnosti tvořit úlohy u žáků ze 3., 5. a 7. ročníku. (English 1997, 1998) Blíže se zaměřím na výzkum prezentovaný roku 1997, v němž zkoumala vývoj tvoření úloh u žáků sedmého ročníku. Tato studie byla finální fází tříletého zkoumání vývoje žáků základních škol ve tvoření úloh. Žáci tří sedmých tříd se učili tvořit úlohy v tříměsíčním programu tvoření úloh. Dvacet tři z nich English v tomto programu detailně pozorovala. Šest dětí se programu neúčastnilo.

Výzkum se soustředil na vztahy mezi schopnostmi tvořit a řešit úlohy a změny vnímání a přístupu dětí k tvoření a řešení úloh. Pro autorku bylo důležité, jak žáci umí tvořit úlohy z úloh s otevřeným koncem, zda chápou, co je úloha, zda jsou schopni rozpoznat strukturu úlohy a vytvořit nové úlohy a otázky. Domnívá se, že „děti by měly poznat, jaké kritické informace jsou potřeba při řešení úlohy". (English 1997) Také je pro ni důležité, aby žáci měli ponětí o struktuře úlohy a o tom, jak má úloha vypadat. To znamená, že by děti měli rozlišit povahu a roli „známé" a „neznámé" v úloze.

Navíc English (1997) uvádí, že problém při řešení úloh by mohl souviset s lingvistickými obtížemi dítěte. Je názoru, že pokud má dítě problém s chápáním sémantických vztahů, může mu unikat komplexnost úlohy, a proto může mít problémy s řešením nebo tvořením slovních úloh, které obsahují více informací a požadují více operací nebo kroků. Jde například o úlohy, které obsahují jak násobení, tak odčítání, protože jsou komplexnější než úlohy obsahující jen jedno z nich. Proto se English zaměřila také na to, jakým způsobem děti používají lingvistické a sémantické vlastnosti při tvoření svých vlastních úloh.

Program tvoření úloh probíhal po 12 týdnů, přibližně 1,5 hodiny týdně. English se snažila zapojit děti do vyučování různými aktivitami: „diskusí v malých i velkých skupinách, i v celé třídě; prezentací a posouzením navržených úloh; individuálními i celotřídními reflexemi o zlepšení, pokroku žáků a programu samotného“. (English 1997) Úkolem bylo například sestavit tři úlohy k otevřené slovní úloze o cestování (z nabídky cestovní agentury).

Zlepšení žákovské tvorby úloh bylo veliké. Po ukončení programu bylo každé dítě schopno vytvořit řešitelnou úlohu. U šesti dětí, které se vůbec neúčastnily programu, přetrvávaly problémy s vytvořením řešitelné úlohy, 45 % úloh bylo buď neřešitelných, nebo nematematických. English pozorovala i zlepšení, jenž se týkalo „komplexnosti a sofistikovanosti, intelektuálnosti úloh“, zvýšila se i jejich sémantická úroveň, žáci prý lépe chápali „sémantické vztahy“.

Z analýzy dat dále vyplynulo, že 59 % otázek bylo podmínkového typu a 35 % bylo úkolového typu („assignment questions“) (což je v kontrastu k závěrům Silvera a Caie (1996), kde jen 5 % otázek žáků šestého a sedmého ročníku byly otázky podmiňovací). Za úlohu podmínkového typu označila English například tuto otázku: „O kolik víc byste museli zaplatit, když byste chtěli odlétat z Munster Town a pokud byste s sebou chtěli vzít kamaráda?“ Otázkou úkolového typu English například myslí otázku (o jedné poměné): „Kolik výlet stál?“

Žáci se naučili také tvořit úlohy, jejichž řešení vyžaduje 3 a více kroků. 59 % jimi vytvořených úloh totiž vyžadovalo 3 a více kroků (na začátku takových úloh bylo vytvořeno jen 10 %).

English (2007) píše, že „ač je vzorek malý a ač data patří jen k jednomu typu aktivity, objevují se souvislosti mezi kompetencemi řešit úlohy a tvořit úlohy. (...) Kompetence řešení rutinních a nových/originálních úloh (novel problems) se zdá spojená s kompetencí tvoření úloh z úloh s otevřeným koncem. (...) Za druhé se zdá, že kompetence v početním a rutinním řešení úloh souvisí s tvořením početně komplexních úloh." Děti, které neměly problémy s prací s novými/originálními („novel") úlohami, ač jim tak nešly rutinní numerické úkony, dobře tvořily úlohy a neměly problémy s divergentním myšlením. (English 1997)

Stoyanova

Stoyanova (2005) nechala osmi a devítileté žáky tvořit úlohy. (Počet žáků neuvádí.) Pracovala s nimi po celý rok, ale ve svém článku popisuje pouze úvodní situaci a pak úplné závěry, jak se po roce schopnost žáků tvořit úlohy zlepšila.

Na začátku měli žáci bez jakékoli přípravy k výpočtu $3 \times 25 + 15 \div 5 - 4$ utvořit co nejvíc úloh. Stoyanové šlo o to, zda žáci porozuměli a umí dodržovat hierarchii těchto čtyř operací. Odpovědi rozdělila do tří skupin: správné, správné – mírně pokročilé a neanalyzovatelné. Dále roztřídila úlohy do tří skupin podle povahy úlohy: na úlohy vzniklé *reformulací*, *rekonstrukcí* a *imitací*. Jedním způsobem, jakým žáci měnili úlohu, byla reformulace, kterou Stoyanova definovala jako přeorganizování prvků ve struktuře úlohy, aniž by byla změněna povaha úlohy; jako jinou prezentaci informací, přidání irelevantní struktury (jako příklad reformulace uvádí úlohu: $-4 + 15 \div 5 + 3 \times 25$). Rekonstrukci pak viděla jako modifikaci, která změní povahu úlohy (např. úloha: $-4 + 15 \div 5 + 3 \times 25$). Imitaci chápala jako přidání nějaké další (pro úlohu relevantní) struktury, to znamená, že se produkt podobá původní úloze; např. zadání: $3 \times \{(25 + [15 \div (5 - 4)]\}$.

Více však Stoyanova (2005) bohužel průběh své práce s žáky nepopisuje, prezentuje až výsledky. Po provedení svého dlouhodobého výzkumu konstatovala, že na začátku roku žáci tvořili úlohy, které byli sami schopni vyřešit, postupem roku se přestali bát a začali tvořit komplexnější úlohy – přiznali, že ještě neví řešení, ale jestli existuje, budou prý schopni ho pochopit. Na základě analýzy dat získaných od dětí, např. testů a domácích úkolů, Stoyanova (2005) tvrdí, že „dovednost tvořit úlohy, jako všechny ostatní dovednosti, by se dala rozvíjet a utvářet." Na konci roku žáci soustředili více pozornosti na kvalitu vytvořených úloh a jejich obtížnost. Snažili se vytvořit úlohy „pomocí imitace a z jiných kategorií, raději než tvořit úlohy reformulací nebo rekonstrukcí". (Stoyanova 2005)

3 Didaktický pohled

3.1 Postavení tvorby úloh v současné výuce matematiky

Protože v Čechách je určujícím dokumentem pro všechny učitele Rámcově vzdělávací program, zaměřím se na to, zda tvoření úloh odpovídá požadavkům Rámcového vzdělávacího programu pro základní školy a pro gymnázia. Na tyto dva dokumenty jsem se zaměřila proto, že jsem svůj výzkum prováděla ve třídě základní školy a dvou třídách čtyřletého gymnázia. Zajímalo mě, zda Rámcový vzdělávací program poskytuje prostor pro tvoření úloh žáky nebo zda podporuje aktivity s tvorbou úloh žáky související.

3.1.1 RVP pro základní vzdělávání

V základním vzdělávání je upřednostněno všeobecné vzdělání orientované na situace blízké životu a praktickému jednání a usiluje se v něm o naplňování těchto cílů: „umožnit žákům osvojit si strategie učení a motivovat je pro celoživotní učení; podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů; (...) pomáhat žákům poznávat a rozvíjet vlastní schopnosti v souladu s reálnými možnosti..." (RVP ZV 2005)

Konkrétně v části věnované matematice se píše: „Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost." (RVP ZV 2005)

Dále mluví autoři o důležitosti nestandardních aplikačních úloh a problémů, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. „Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní." (RVP ZV 2005) Žáci se rovněž zdokonalují v samostatné a kritické práci se zdroji informací.

Vzdělávání v oblasti matematiky směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka mimo jiné ke: „kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů; rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení (...); provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému; (...) zdokonalování grafického projevu; rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh (...); k poznávání možností matematiky (...); rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů." (RVP ZV 2005) Výše jsem vybrala pouze ty činnosti, které podle mého názoru souvisí s tvořením úloh nebo s výukou, která žáky na tvorbu úloh připravuje. Z textu je patrné, že autoři rozlišují pojmy „problém" a „úloha" podobně jako já v odstavci 2.1.1.

3.1.2 RVP pro gymnázia

Z pohledu Rámcového vzdělávacího programu má vzdělávání ve čtyřletých gymnáziích a na vyšším stupni víceletých gymnázií žáky vybavit klíčovými kompetencemi a všeobecným rozhledem na úrovni středoškolsky vzdělaného člověka. „Gymnázium má vytvářet náročné a motivující studijní prostředí," v němž žáci musí mít příležitost osvojit si některé důležité vědomosti, dovednosti, postoje a hodnoty. „Smyslem vzdělávání na gymnáziu není předat žákům co největší objem dílčích poznatků, fakt a dat, ale vybavit je systematickou a vyváženou strukturou vědění, naučit je zařazovat informace do smysluplného kontextu životní praxe a motivovat je k tomu, aby chtěli své vědomosti a dovednosti po celý život dále rozvíjet. To předpokládá uplatňovat ve vzdělávání postupy a metody podporující tvořivé myšlení, pohotovost a samostatnost žáků, využívat způsoby diferencované výuky, nové organizační formy, zařazovat integrované předměty apod." (RVP G 2007)

Když se podíváme na výčet schopností (zařazovat informace, tvořivě myslet, pohotovost, samostatnost...), všimneme si úzké souvislosti s tvořením úloh. Podobně když se podíváme na cíle vzdělávání a na kompetence:

„Na čtyřletých gymnáziích a na vyšším stupni víceletých gymnázií by si žák měl osvojit: kompetenci k učení, kompetenci k řešení problémů, kompetenci komunikativní, kompetenci sociální a personální, kompetenci občanskou a kompetenci k podnikavosti." (RVP G 2007) Podle mého názoru se matematiky a tvoření úloh týkají především kompetence: k učení, k řešení problémů, komunikativní a kompetence k podnikavosti.

V rámci jednotlivých kompetencí uvádějí autoři Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia, co vše by měl žák na konci studia ovládat. Uvedu opět pouze několik příkladů, které mě zaujaly v souvislosti s matematikou a tvořením úloh.

Vzhledem ke kompetenci k učení si žák své učení a pracovní činnost sám plánuje a organizuje, „využívá je jako prostředku pro seberealizaci a osobní rozvoj; (...) hledá a rozvíjí účinné postupy ve svém učení, reflektuje proces vlastního učení a myšlení; kriticky přistupuje ke zdrojům informací, informace tvořivě zpracovává a využívá při svém studiu a praxi; kriticky hodnotí pokrok při dosahování cílů svého učení a práce, přijímá ocenění, radu i kritiku ze strany druhých, z vlastních úspěchů i chyb čerpá poučení pro další práci." (RVP G 2007)

Při tvoření úloh je nezbytná kompetence k řešení problémů: „Žák rozpozná problém, objasní jeho podstatu, rozčlení ho na části; vytváří hypotézy, navrhuje postupné kroky, zvažuje využití různých postupů při řešení problému nebo ověřování hypotézy; uplatňuje při řešení problémů vhodné metody a dříve získané vědomosti a dovednosti, kromě analytického a kritického myšlení využívá i myšlení tvořivé s použitím představivosti a intuice; kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty a důkazy, formuluje a obhajuje podložené závěry; je otevřený k využití různých postupů při řešení problémů, nahlíží problém z různých stran; zvažuje možné klady a zápory jednotlivých variant řešení, včetně posouzení jejich rizik a důsledků.“ (RVP G 2007) Zde mi připadá, jako by autoři Rámcově vzdělávacího programu pro gymnázia mluvili o tvoření úloh, protože zmiňují stejné postupy, dovednosti a pohledy, které žáci potřebují při tvoření úloh.

Při prezentaci svých vytvořených úloh před třídou žáci rozvíjí i kompetenci komunikativní (naučí se navíc hájit vlastní názor, pokud se rozvine diskuse, proč použil takové podmínky, proč se ptal zrovna na toto atd.), musí se v matematice navíc vyjadřovat srozumitelně a jasně, protože odborná matematická terminologie se od nematematické liší. „Žák s ohledem na situaci a účastníky komunikace efektivně využívá dostupné prostředky komunikace, verbální i neverbální, včetně symbolických a grafických vyjádření informací různého typu; používá s porozuměním odborný jazyk a symbolická a grafická vyjádření informací různého typu; (...) vyjadřuje se v mluvených i psaných projevech jasně, srozumitelně a přiměřeně tomu, komu, co a jak chce sdělit, s jakým záměrem a v jaké situaci komunikuje; je citlivý k míře zkušeností a znalostí a k možným pocitům partnerů v komunikaci; prezentuje vhodným způsobem svou práci i sám sebe před známým i neznámým publikem; (...) věcně argumentuje.“ (RVP G 2007)

Jasnost je při hodnocení vytvořených úloh také jedno z důležitých kritérií. (Gonzales 1994) Citlivost vůči znalostem ostatních zohledňoval ve svém výzkumu např. Lowrie (2000, 2002) tím, že nechal žáky tvořit úlohy pro žáky o rok starší a o rok mladší.

Domnívám se, že tvoření úloh a matematika vůbec podporuje žákovu kompetenci k podnikavosti: „Žák cílevědomě, zodpovědně a s ohledem na své potřeby, osobní předpoklady a možnosti se rozhoduje o dalším vzdělávání a budoucím profesním zaměření; rozvíjí svůj osobní i odborný potenciál (...); uplatňuje proaktivní přístup, vlastní iniciativu a tvořivost, vítá a podporuje inovace; (...) usiluje o dosažení stanovených cílů, průběžně reviduje a kriticky hodnotí dosažené výsledky, koriguje další činnost s ohledem na stanovený cíl; dokončuje zahájené aktivity, motivuje se k dosahování úspěchu.“ (RVP G 2007)

V oddílu Matematika a její aplikace autoři píší: „Matematické vzdělávání napomáhá rozvoji abstraktního a analytického myšlení, rozvíjí logické usuzování, učí srozumitelné a věcné argumentaci s cílem najít spíše objektivní pravdu než uhájit vlastní názoru.“ (RVP G 2007) Důležité je, aby se žáci naučili formulovat problém a strategii jeho řešení, aby aktivně ovládli matematické nástroje a dovednosti, aby byli schopni použít aplikaci. „Matematika přispívá k tomu, aby žáci byli schopni hodnotit správnost postupu při odvozování tvrzení a odhalovat klamné závěry.“ (RVP G 2007) Schopnost formulace problému, strategie jeho řešení, pěstování schopnosti aplikace, to je přesně to, čím se tvorba úloh zabývá.

„Vzdělávání (...) vede žáka k: osvojování základních matematických pojmů a vztahů postupnou abstrakcí a zobecňováním na základě poznávání jejich charakteristických vlastností; (...) vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů, algoritmů a metod řešení úloh a k využívání osvojeného matematického aparátu; analyzování problému a vytváření plánu řešení, k volbě správného postupu při řešení úloh a problémů, k vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k zadaným podmínkám; práci s matematickými modely, k vědomí, že k výsledku lze dospět různými způsoby; rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů; pochopení vzájemných vztahů a vazeb mezi okruhy učiva a k aplikaci matematických poznatků v dalších vzdělávacích oblastech; přesnému vyjadřování a zdokonalování grafického projevu (...); zdůvodňování matematických postupů, k obhajobě vlastního postupu; rozvíjení dovednosti pracovat s různými reprezentacemi; (...) rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním; (...) pochopení matematiky jako součásti kulturního dědictví a nezaměnitelného způsobu uchopování světa.“

Z porovnání s Rámcovým vzdělávacím programem pro základní školy je zřejmé, že na gymnáziu se více klade důraz na samostatnou činnost žáka a na rozvoj jeho kritického a analytického myšlení, což je předpokladem pro tvoření úloh, ale i jeho důsledkem. Oba programy se sice zaměřují na řešení úloh, avšak tvoření úloh je nepřímo zmíněno zvláště v Rámcově vzdělávacím programu pro gymnázia ve formě matematického modelování, práce s různými reprezentacemi, pochopení vzájemných vazeb; postupná abstrakce a zevšeobecňování můžeme také vlastně chápat jako změnu podmínek v úloze.

3.1.3 Tvorba úloh v Americe, Austrálii, Německu

Základním dokumentem v USA je *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCMT, 1989, cit. v Ellerton, Clarkson, 1996, s. 1010), které konstatuje, že „by studenti deváté až dvanácté třídy měli mít zkušenost s rozpoznáváním a formulováním svých vlastních úloh; s činností, která je srdcem dělání matematiky.“ „Současná doporučení pro reformu ve výuce matematiky navrhují, aby do výuky matematiky bylo zahrnuto nejen řešení úloh již někým vytvořených ale i vedení dětí, žáků k tvoření vlastních úloh.“ (NCTM, 2000) Podobně v Austrálii *A National Statement on Mathematics for Australian Schools* říká: „Žáci by se měli zabývat celou škálou matematických aktivit, které podporují tvoření úloh, divergentní myšlení, reflexi a vytrvalost. Měli bychom očekávat, že žáci budou používat alternativní strategie a tvořit a pokoušet se o zodpovězení svých vlastních matematických otázek.“ (cit. v Ellerton, Clarkson, 1996, s. 1010) Německé vzdělávací standardy předmětu matematika pro střední vzdělávání (*Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*) uvádějí v rámci 1. kompetence (K1) schopnost „matematicky argumentovat, k čemuž patří kladení otázek, které jsou pro matematiku charakteristické („Existuje...?“, „Jak se změní...?“, „Je to vždy tak, že...?“)“ Žáci by také měli umět zdůvodnit své domněnky. Ve druhé kompetenci (K2) jde sice o matematickém řešení problémů, ale autoři do řešení úloh a problémů zahrnují i „zpracovávání zadaných a vlastních problémů“. To znamená, že autoři dokumentu počítají s tím, že budou žáci úlohy nebo problémy sami vytvářet. (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz, 2004, s. 10)[5]

3.2 Tvorba úloh ve výuce z pohledu německých (a finských) didaktiků matematiky

V Německu se didaktici zabývají jedním podtypem tvoření úloh, a sice *variováním úloh* (Schupp 2002, 2003; Knichel 2003; Schmidt 2003). Dalšími významnými tématy v evropské didaktické diskusi jsou otevřené úlohy (Pehkonen 2001)[6] a autoregulace učení (Selbstgesteuertes Lernen – například Hußmann 2004, Hubber 2004).

[5] „(K 1) Mathematisch argumentieren: Dazu gehört: Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es...?“, „Wie verändert sich...?“, „Ist das immer so ...?“) und Vermutungen begründet äußern, (...) (K 2) Probleme mathematisch lösen: Dazu gehört: vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten.“

[6] Pehkonen je sice finské národnosti, ale zabýval se německou situací, už od roku 1990 spolupracuje s Zimmermannem z univerzity v Hamburku.

3.2.1 Variace úloh

Schupp (2003) naznačuje, jak je možné úlohy variovat v hodině. Říká, že by variace měly oživit vyučování, aby bylo zajímavější, měly by být výzvou, ale ne rituálem (ne příliš časté). Podle Schuppa záleží na kvalitě, nikoliv na kvantitě variací. Pokud budeme úlohu variovat, pak prý vědomě a se zpětnou vazbou. „Při variování a procvičování je cesta k poznání stejně důležitá jako produkt."[7] (Schupp 2003) Žáci pak díky variování úloh mohou ovlivňovat pořadí, ve kterém se látka probírá.

Úspěchy vedou žáky k větší sebejistotě a sebedůvěře. Mohli bychom namítnout, že variování úloh se týká jen matematicky schopných žáků. Schupp (2003) ale říká, že úlohy by měli tvořit všichni žáci. Zkušenosti prý ukazují, že mnoho schopných a angažovaných žáků při tvoření úloh vyniká, ale v žádném případě ne všichni. „Na druhé straně nemůžeme doufat, že všichni slabší, případně nenadšení, žáci se teď najednou nadchnou pro matematiku." (Schupp 2003) Téměř v každé zkoumané skupině se však objevili mladí lidé, kteří už „vypnuli", ztratili zájem o matematiku, a najednou přišli zase s dobrými otázkami a připomínkami. Možná proto, že nešlo o nudné výpočty, ale především o návrhy, nové cesty a nové myšlenky. (Schupp 2003)

Schmidt (2003) reaguje na Schuppův článek *Variatio delectat!* (2003) a uvádí, že Schuppova myšlenka variování je sice zajímavá, ale v současnosti ještě „nepatří do každodenního repertoáru učitele". (To však ani Schupp nechtěl, protože podle jeho názoru by se variování úloh nemělo stát denním rituálem, viz výše.) Schmidt konstatuje, že ani autoři učebnice neberou ohled na variaci úloh, i když se prý většina úloh dá snadno variovat. Denní realita ve vyučování matematiky je, podle Schmidta, silně určovaná (procvičovacími) úlohami z učebnice. Proto Schmidt navrhuje jako řešení změnu učebnice, a sice přidání úloh, které by žáci mohli variovat. Na straně druhé ale poukazuje na to, že jedním z kritérií při hodnocení učebnic je jejich jasnost a strukturovanost, tedy uzavřenost. Proto nepovažuje Schmidt učebnici v žádném případě za „vhodné médium" pro zohlednění variací úloh v každodenním vyučování. Jako cestu z tohoto problému navrhuje Schmidt variaci úloh pojmout jako jednu zvláštní kapitolu v učebnici.

---

[7] „Beim Varieren und Üben ist der Lernweg genau so wichtig wie das Produkt."

Podle Büchtera a Leuderse se ve většině učebnic nacházejí především úlohy uzavřené, u kterých je zřejmé, jaký postup je nutno použít, a které mají jedno jednoznačné řešení. Pokud také ve vyučování převládají uzavřené úlohy, nese to s sebou neblahé „vedlejší účinky". (Büchter, Leuders 2005, s. 89) Žáci se domnívají, že bude dostačující, naučí-li se postup, jímž vyřeší každou úlohu daného typu, že matematika se skládá z určitých typů úloh, se kterými se setkávají jen ve škole. To může vést ale k tomu, že se žáci budou snažit „bezhlavě" uplatnit naučený postup u všech úloh. Proto také jsou pro žáky otevřené úlohy náročnější, protože postup řešení „neprobrali" a musí použít vlastní, originální cestu. (tamtéž, s. 90)

3.2.2 Otevřené problémy, otevřené situace

Pehkonen (2001) se zabýval otevřenými problémy, otevřenými situacemi a problémovými úlohami. „Možnou a dalece akceptovanou metodou, jak zajistit optimální prostředí k učení je metoda postupného otevírání vyučování. (...) Otevřené úlohy dnes platí celosvětově za vhodný prostředek, jakým můžeme dál rozvinout školní vyučování matematiky, kde v centru stojí především porozumění a kreativita." Podle mého názoru otevřené úlohy úzce souvisí s tvořením úloh žáky, protože rozvíjí jejich myšlení, uvažování o struktuře úlohy a vedou je svou otevřeností k dotváření podmínek úlohy, tedy k jisté formě tvoření úloh. Pehkonen (2001) píše, že označení ‚otevřené úlohy/problémy' je používáno pro různé typy problémů:

1. Zkoumání (investigations)
2. Nacházení problémů, jejich formulace
3. Úlohy z každodenního života, úlohy všedního dne
4. Projektová práce – je obsažnější a komplexnější, požaduje čas a hodně samostatné práce
5. Problémová pole, problémové oblasti, soubor navzájem souvisejících problémů
6. Problémy bez otázek („Probleme ohne Fragen")
7. Variace úloh (metoda co když...?).

V tomto výčtu Pehkonen dokonce uvádí jako formu otevřených problémů problémy bez otázek a variaci úloh, které do tvoření úloh patří. Pehkonen (2001) dodává, že pro zkoumaci, vyšetřovací úlohy je typické, že je žákům zadána pouze výchozí situace a žák s ohledem na danou situaci sám formuluje a řeší svůj problém. V Anglii, ve Skotsku a v Austrálii se přednostně pracuje s otevřenými úlohami tohoto typu.

Pehkonen (2001) uvádí, že v poslední době vzrostl zájem o otevřené úlohy i v Německu a že o otevřených úlohách podobně diskutují odborníci i v severských zemích, v Norsku především ve formě zkoumání (investigations) [Solvang 1997], ve Finsku ve formě problémových polí [Pehkonen 1995]. Také v Číně a Taiwanu se dnes klade důraz na práci s otevřenými úlohami ve výuce matematiky."

3.3 Zařazení tvorby úloh žáky do výuky

Jak uvádí Stehlíková a Cachová (2006), část studentů vysokých škol „dostávala během svých školních a středoškolských let jen málo příležitostí setkat se s jiným než tradičním přístupem k vyučování. Ovlivněni svými vzpomínkami pak mnozí zpočátku chápou vyučování matematice na prvním stupni zejména jako vzorné vyplňování pracovních sešitů, řešení úloh z učebnice, přepisování zápisů společně vyřešených slovních úloh do sešitů, rýsování úseček atd. (Samozřejmě, že i tyto činnosti jsou součástí vyučování matematice, ale nelze zůstat pouze u nich. Vyučování má vést děti k poznávání okolního světa a jeho zákonitostí, ne je učit reprodukovat informace, kterým ani dobře nerozumějí. Učitel má žáky pobízet k aktivním činnostem a tvořivému hledání, ne je navádět k pasivitě.)" Právě tvoření úloh je jedna z forem, jak můžeme žáky k aktivitě a k tvořivému hledání vést. A to nejen žáky prvního stupně, vedení k tvořivosti a aktivní činnosti není věkově omezené.

3.3.1 Osobnost učitele

Odborníci se shodují, že při vedení žáků ke tvorbě úloh je důležitá osobnost učitele. Proto bychom při něm měli začít právě u učitele. Tichá (2008) uvádí, že „tvoření úloh jako jedna z cest, jak zkvalitňovat oborově didaktické kompetence učitelů primární školy." Z toho plyne, že učitel by měl v každém případě umět tvořit úlohy. (A pokud k němu chce vést děti, měl by tvorbu úloh ovládat o to víc.) Tichá mluví o kompetencích učitele, což je podle jejího názoru „soubor dovedností, které učitel potřebuje ke kvalitnímu vykonávání své práce". (Tichá 2008) Učitel by měl disponovat jak znalostmi vědních obsahů, tak didaktickými znalostmi obsahu. „Učitel, který chce vytvořit pro žáky objevitelské klima, musí vycházet z kvalitní vlastní znalosti obsahu i možností jeho didaktického zpracování. Pokud znalosti učitele nejsou dostatečně hluboké, nemůže využít potenciál úlohy. (...) Proto dobrá znalost pojmů a chápání souvislostí jsou pro učitele předpokladem přípravy i realizace vyučování." (Tichá 2008) Učitel si také podle Büchtera a Leuderse (2005) musí věřit, a aby mohl motivovat žáky k tvoření úloh, musí mít potřebu tvořit úlohy sám.

Dalším zdrojem nesnází může být podle Tiché (2008) to, „že se nevěnuje patřičná pozornost soustavnému obohacování zásoby reprezentací a schopnosti překládat mezi různými mody reprezentace, například mezi aritmetickou operací a slovní úlohou, tedy tvoření slovních úloh." (Tichá 2008) Tichá poukazuje na význam všech čtyř modů reprezentace (mody činnostní, verbální, ikonické a symbolické). Podle jejího názoru, na střední ani na vysoké škole není dostatečně rozvíjena ikonická reprezentace a učitelé na základních školách pak „nejsou schopni při řešení úloh používat činnostní a zvláště ikonické (vizuální, obrázkové) reprezentace". (Tichá 2008) Pak se podle Tiché nemůže učitel divit, že ani děti nejsou schopné interpretovat, co vidí v grafu, co znamenají dané symboly atd.

3.3.2 Podpora aktivity žáka

Učitel je v hodině jistě důležitou postavou, ale Mason (2001) zdůrazňuje, že je důležité nechat aktivitu na žácích, že by učitel neměl veškerou pozornost strhávat na sebe, ale že by měl žáky v hodinách nechat pracovat a ptát se jich na jejich názor, na to, co si myslí. Žáci jsou pak více zapojeni do výuky, více si kladou otázky, protože jim nejsou příklady pouze předneseny. Tím pak rozvíjí své tvořivé myšlení, uvažují o podmínkách úlohy nebo příkladu prezentovaného na tabuli nebo přemýšlí i o modifikacích úloh. Proto je důležité, aby učitel nechal žákům prostor se vyjádřit: „Nejhorší část při učení (vyučování) je výzva držet jazyk za zuby, držet se zpátky. Nemluvte, neříkejte všechno, ptejte se! Nenahrazujte špatné A správným B, ale ptejte se: Odkud přišlo A? Stále se ptejte: Je to správně? Jsi si jistý/jistá? Neříkej Ne, ptej se Proč?" (Halmos (1985), cit. v Mason 2001, s. 78) Stejně tak i Mason (2001) se domnívá, že je důležité druhému naslouchat a obrnit se trpělivostí. Zároveň je podle mého názoru úkolem učitele žáky k tvořivosti vést. Jinak by tvořili úlohy stejné, jako můžeme najít v učebnicích.

Mason (2001) tedy mluví o vedení žáků k tvoření úloh, o tom, že žáci mají být vtaženi do práce na matematice, ne jen procházet rutinní úlohy nebo cvičení. „Pouhé prezentování formální matematiky žákům není efektivní.“[8] (Mason 2001, s. 80) Žáci potřebují pomoc při účasti na procesu formalizace poznatků, ale nemusí pouze pasivně naslouchat. Měli by být vtaženi do práce. Ve stejném duchu se vyjadřuje i Reinmann-Rothmeier (2003), Huber (2004) a Hußmann (2004) o autoregulaci učení z německé didaktické literatury nebo již zmíněný Schupp (2002, 2003) o variaci úloh.

Schupp (2002) si též klade otázku, kdo by měl tvořit a zadávat úlohy. Žák podle něj ani nemá šanci se na něco zeptat, bývá úlohami a otázkami zasypán. Úlohy přicházejí, „zprostředkovaně nebo přímo, buď skrze učebnice, sbírky úloh nebo didaktickou literaturu.“ (Schupp 2002, s. 6) Schupp zastává názor, že by žáci měli mít šanci se podílet na tvoření úloh. Nejde jen o to, aby uměli úlohy řešit, ale i o to, aby je uměli přizpůsobit, redukovat, dál rozvinout či zařadit do kontextu.

Huber (2004) považuje podporu samostatného učení za nadpředmětový úkol („fachübergreifende Aufgabe“). Sám žák by měl nést zodpovědnost za to, co se naučí, měl by být samostatný, samostatně pracovat, samostatně se učit. Učitelé by ho v tom měli podporovat. Později, ve vyšších třídách Huber zmiňuje význam samostatné vědecké práce. Huber (2004) se domnívá, že máme nechat žáky, aby „mysleli“ s učitelem a „spolupůsobili“ na výuce.

Na Huberovy myšlenky o ‚učení řízeném sebou‘ navazuje Hußmann (2004). Učení řízené sebou je vždy spojeno s aktivní činností žáků. Hußmann je názoru, že by takové učení mělo být přítomné i ve škole. Hledání nových myšlenek, nápadů a čerstvých objevů může upoutat pozornost žáků a probudit v nich větší zájem o matematiku. Podobně jsou Baptist a Ulm (2005) názoru, že by žáci neměli vyučování matematiky zažívat jako umělý svět, který vůbec nesouvisí s jejich osobním životem a pocity. Navíc se zabývají rolí učitele: „Učitel není žádný bavič, žák není žádný pasivní konzument. (...) Úspěšné učení je aktivní, konstruktivní, kumulativní a na cíl orientovaný proces.“[9]

[8] „Simply presenting formalised mathematics to students is ineffective.“
[9] „Der Lehrer ist kein Entertainer, der Schüler kein passiver Konsument.“ „Erfolgreiches Lernen ist ein aktiver, konstruktiver, kumulativer und zielorientierter Prozess.“

Baptist a Ulm (2005) dále uvádějí několik zajímavých podnětů, jak je možné tyto představy zrealizovat v hodině:

1. Žákům jsou předkládány problémy, tedy náročné úlohy vztažené k realitě, které jsou názorně nastíněny a diskutovány.
2. Žádné cesty k řešení nejsou zamítnuty.
3. V centru pozornosti stojí úlohy, které mají více řešení.
4. Cesty k řešení jsou podrobně prodiskutovány, často jsou důležitější než řešení samotná.
5. Ve vyučování nedominuje zkoušení, ale učení (se).
6. Také špatná řešení jsou přijímána, prodiskutována a využita jako prostředek k učení.

Baptist a Ulm (2005) zde mluví sice spíše o řešení úloh, ale takovýto postup je podle mého názoru důležitý k rozvíjení žákova přemýšlení o úlohách, jejich chápání a vnímání úloh, a proto jsou tyto činnosti vhodné i jako příprava pro tvorbu úloh.

„Slabí a nemotivovaní žáci se nemohou ve fázi aktivity žáků tak lehce „schovat" jako při frontálním vyučování." Ze začátku je potřeba obětovat hodně času, protože zpočátku je tento způsob pro učitele i žáky nezvyklý a tím náročnější, přiznávají Baptist s Ulmem (2005).

3.3.3 Motivace a klima

Motivace je bezpochyby klíčovou stránkou výuky nejen matematiky. Její podstatnou složkou je vstřícné klima. To, co ve škole potřebujeme, je naučit žáky překonat plachost a strach se ptát. Navodit prostě takovou situaci, aby se žáci nebáli zeptat se na to, čemu nerozumí. (Schupp 2002, s. 12)

Mason (2001) poukazuje na to, že v hodině je potřeba vytvořit a udržovat kontakt se studenty a vytvořit takové podmínky, aby se studenti cítili dobře, aby mohly vznikat „plodné matematické myšlenky různé náročnosti". (s. 78) Dále upozorňuje na zdroj motivace: „Jakmile se ale vnitřní podnět stane podnětem vnějším, jsou celá podstata a účel práce ztraceny." (s. 79)

Je zajímavé, že v Japonsku byla vypracována studie, kdy pomocí měření tlaku zjišťovali změnu nadšení žáků při tvoření a řešení úloh. Vědci se snažili měřit změny intenzity emocí a zjistit příčiny těchto změn při tvoření úloh a jejich řešení oproti „drilovému" stylu výuky. Styl výuky kladením otázek a tvořením úloh ukázal největší emocionální odezvu. (Isoda, Nakagoshi 2000)

Mason (2001) měl ve svém článku o tvorbě úloh na mysli spíše studenty vysoké školy (ne žáky školy základní nebo střední), proto píše o možnosti vědecké diskuse („scientific debate"): „Studenti (vysoké školy) jsou považováni za účastníky vědecké diskuse, za součást vědecké komunity..." Správná atmosféra vědecké debaty nebo diskuse je taková, kde „lidé chtějí vyzkoušet nové nápady a necítí se ani trapně ani se nestydí udělat chybu."... V hodinách to pak vypadá tak, že ti, kteří si nejsou jistí nějakým detailem, často mluví, zatímco ti, kteří jsou si jisti a řešení znají, zatím mlčí, aby potom navrhli modifikace skrze protipříklady, obrázky, otázky a jiné návrhy.

3.3.4 Úlohy

V matematice je mnoho matematického vědění zprostředkováno skrze úlohy – ať už ve formě školního procvičování, domácích úkolů nebo zkoušení či písemných prací. Baptist a Ulm (2005) úlohy považují za „stavební kameny" ve vyučování matematiky, které mají být učitelem, „architektem a stavitelem", spojeny v jeden větší celek. Rozhodující je pro tyto autory, jakým způsobem se ve vyučování s úlohami zachází. Úlohy mohou poskytovat prostor ke kreativitě. Žáci by podle nich měli dostávat prostor ke kreativním činnostem plných fantazie. K tomu nabízejí dvě cesty: „nechat žáky klást otázky nebo tvořit úlohy". (Baptist, Ulm 2005, s. 113) Jako alternativu k úlohám, které se často objevují v učebnicích, navrhují otevřené úlohy/formulace. „Otevřené formulace požadují změnu stanoviska a podporují matematickou kreativitu a fantazii." (Baptist, Ulm 2005, s. 114) Dále autoři uvádějí na konkrétních příkladech rozdíly mezi úlohami typu „vypočti" a úlohami podněcujícími ke kreativní činnosti:

„Výpočet: Vypočti: 24. ((9+8):5)

Kreativní činnost: Sestav z čísel 24, 9, 8 a 5 různé „výrazy" a spočítej je. Dej mezi tato čísla taková znaménka, aby výsledkem bylo číslo mezi 0 a 10. Najdi stejně tak znaménka, aby výsledek bylo číslo mezi 100 a 110. Vymysli početní úlohu se závorkami.

Výpočet: Vyřeš rovnici: $7x - 11 = 24$.

Kreativní činnost: Vymysli rovnici, která má řešení $x = 5$. Sestav exponenciální rovnici, která má řešení $x = 5$. Sestav kvadratickou rovnici s řešeními 1 a 5. Popiš všechny takové možné kvadratické rovnice. Vymysli k rovnici $7x - 11 = 24$ slovní úlohu. (Baptist, Ulm 2005, s. 114)

Ambrus a Hortobágyi (2001) zmiňují důležitou myšlenku, která podle mého názoru neplatí pouze pro pomalejší a propracovanější přístup k abstrakci, ale i pro tvoření úloh: „ne příliš brzy, ne příliš rychle" („nicht zu früh, nicht zu schnell"). Jde o to, aby žáci nejprve pochopili, jak se úlohy řeší, poznali jednotlivé kroky řešení a teprve později začali sami úlohy tvořit, když už budou vědět, jaké údaje musí obsahovat zadání úlohy. Na druhé straně není ale pravda, že bychom nemohli žáky na tvoření úloh připravovat již během řešení úloh, kdy můžeme diskutovat například na téma: „co když...?", a již během hodin matematiky na prvním stupni základní školy.

3.3.5 Jak vést žáky k tvoření úloh – náměty od Masona

Mason (2001) popisuje jednu z možností, jak žáky vést k tvoření úloh, jak je na tuto činnost připravit. Je možné vyjít z již vyřešené nebo zadané úlohy, požádat žáky, aby k ní sestavili jednoduchou, podobnou otázku. Potom je možné přejít k úkolu, kdy mají žáci položit „zvláštní" otázku, která by nenapadla nikoho jiného ze třídy. Na závěr můžeme žáky požádat, aby vymysleli co nejobecnější, neboli zobecněnou, otázku k této úloze. Ta zvláštní, vlastní otázka totiž žáky vyprovokuje k tomu, aby si uvědomili škálu možností, která se jim otvírá, a podpoří tak konstrukci zobecněné verze.

Mason (2001) dále navrhuje požádat studenty, aby sestavili (a vyřešili) test, soubor otázek, o kterém si myslí, že by prokázal, že někdo rozumí nějakému tématu. Případně aby sestavili otázky, které ukážou, že oni sami nějakému tématu rozumí. Tvrdí, že to, co si vyberou, ukazuje, že jsou si toho vědomi, a na tom, co chybí, je potřeba ještě zapracovat.

3.3.6 Náměty od Gonzales

Gonzales (1994) se, stejně jako autoři knihy *The art of Problem Posing* Brown a Walter (1993), zabývala schopnostmi učitelů vést žáky ke tvoření úloh a nechala se jejich podněty inspirovat. Brown a Walter (1993) na základě své zkušenosti tvrdí, že

„řada budoucích učitelů základních a středních škol nemá schopnost a sebevědomí nutně potřebné pro to, aby mohli dělat víc než jen hledat řešení dané matematické úlohy." Proto se noví, mladí učitelé tak moc spoléhají na učebnice. Na učebnici je proto nahlíženo jako na „autoritu vědění" a „průvodce k učení". Stejně jako Schupp (2002) a Büchtel s Leudersem (2005) se Gonzales domnívá, že „vlastnictví matematiky spočívá na autorech učebnic, nikoliv na učiteli ve třídě." (Gonzales 1994) Podle Gonzales (1994) je proto nutné, aby učitelé – nikoliv učebnice – převzali kontrolu nad učením ve třídě a nad vlastnictvím matematických znalostí. „Při didaktice matematiky musíme odebrat autoritu učebnic a zvýšit znalosti budoucích učitelů a jejich schopnost tvořit úlohy tak, aby měli dostatek sebevědomí při určování směru kreativního řešení úloh." Gonzales se proto snažila zavést tvoření úloh do standardních matematických kurzů pro budoucí učitele základních škol.[10] Úkolem pedagogů je umožnit budoucím učitelům, aby poznali a dokázali ocenit „dvě různé role" (řešitele a tvořitele úloh); tedy aby dokázali vystupovat jako řešitelé úloh a zároveň jako tvořitelé úloh a „aby získali flexibilitu v přecházení od jednoho způsobu ke druhému".

Nyní zde shrnu schéma Gonzalové z roku 1994, jak by bylo možné žáky k tvoření úloh vést. Jedná se o schéma navržené pro budoucí učitele, studenty pedagogických fakult (Gonzales 1994):

1. ‚Krok jedna: Učení se, jak monitorovat vlastní myšlenkový proces‘ (‚Step One: Learning to Monitor the Thought Process‘)

Nejprve je důležité, aby studenti pochopili, o čem úlohy jsou, z čeho se skládají, jaké je jejich zadání, jakým způsobem nebo způsoby můžeme postupovat při jejich řešení atd. Proto Gonzales navrhla diskusi, díky níž se studenti mohli zabývat různými strategiemi řešení slovních úloh (kreslení grafu, utvoření tabulky, sestavení rovnice, vyřešení jednodušší úlohy atd.). Pak byli studenti požádáni, aby si vedli deníček, kam by si zapisovali detaily vedoucí k řešení slovních úloh, měli popsat každý ze čtyř kroků svého myšlenkového procesu:

A) ‚Porozumění problému‘ (Zde si studenti měli „poznamenat všechny myšlenky a otázky, které je napadly při uchopování úlohy. Zodpovědět otázky jako: „O čem je tato slovní úloha?" „Co je dáno?" „Co musím zjistit?")

[10] Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity pořádala v rámci Didaktiky matematiky v nedávné době podobné kurzy.

B) ‚Vymyšlení plánu' (Zde měli popsat strategie, které budou používat.)

C) ‚Realizace plánu' znamenalo, že měli provést potřebné výpočty (nákresy, tabulky...) a popsat kroky, jakými postupují.

D) ‚Pohled zpátky' zajistil kontrolu výsledků, jiných možností, jiných výsledků, jiných strategií... Pokyn zněl: „Zkontrolujte výsledky. Pokud nedávají smysl, začněte znovu celý proces od začátku. Zkontrolujte, jestli neexistují další řešení nebo jiné postupy, které vedou ke stejnému výsledku (ke stejným výsledkům)." „Jsou ty výsledky ovlivněny různými způsoby interpretace zadaných informací, daných podmínek nebo úkolu?" (Gonzales 1994)

Studenti si mají vést podrobný deníček, mají nastínit všechny myšlenky, otázky, nápady, pokusy (správné i nesprávné), frustrace, interpretace, parametry nebo omezení, kterými úlohu pozměnili. Mají monitorovat své myšlenky, tím pak získají hlubší povědomí o daných slovních úlohách.

2. *‚Krok dva: Tvoření odvozené úlohy'* (‚Step Two: Posing Related Problem')

Když už mají studenti zkušenost s procesem řešení úloh, můžeme přejít k tvoření obdobné úlohy – její modifikací (variací nebo jejím rozšířením). Jedná se tak o pátý bod E) ‚Tvoření odvozené úlohy'. V této fázi studenti tvoří odvozené úlohy změnou hodnot zadaných dat nebo změnou kontextu originální úlohy nebo prohozením známé a neznámé.

Gonzales (1994), stejně (jako Charles a Lester 1982) dodává pátý krok – vytvoření podobné úlohy – podobně jako Polya rozdělujeřešení úloh či problémů na 4 kroky (Polya 1973), rozlišuje Gonzales čtyři kroky při řešení problémů/úloh: 1. Porozumění problému, 2. Vymyšlení plánu, 3. Realizace plánu, 4. Pohled zpátky. (1. Understanding the problem, 2. Devising a plan, 3. Carrying out the plan, 4. Looking back.) (Gonzales 1994)

3. *‚Krok tři: Tvoření slovních úloh'* (‚Step Three: Creating Verbal Problems')

V této fázi, kdy už studenti mají zkušenosti s tvořením úloh založených na nějaké úloze z učebnice, mohou začít tvořit úlohy pro děti. Gonzales (1994) uvádí například úlohy pro osmý ročník. Aby studentům tvoření úloh usnadnila, nabízí jim klasifikační tabulku, jakási pravidla pro klasifikaci objevených úloh („Guidelines for Assessment of the Discovered Problem“). Tuto tabulku jsem použila pro hodnocení úloh vytvořených žáky v odstavci 4.4 Analýza dat, proto ji neuvedu na tomto místě, ale až později ve své práci.Tabulka má pomoci nejen studentům, kteří úlohy pro žáky tvoří, ale i jejich vyučujícím, kteří pak hodnotí obtížnost, vhodnost a potenciál vytvořených úloh. Gonzales používala hodnocení body od jedné do čtyř: 1 = slabé, 2 = průměrné, 3 = dobré, 4 = výborné.

4. ‚Krok čtyři: Vytvoření plánu hodiny‘ (‚Step Four: Developing a Lesson Plan‘)

Poslední krok je krok od řešitele k tvůrci, kdy studenti mají převzít roli učitele a připravit si plán hodiny. Struktura hodiny je založena na Polyově rozlišení čtyř kroků (označené A) – D)), plus navíc pátém kroku E) ‚Tvoření odvozené, podobné úlohy‘. Gonzales (1994) nastiňuje, jaký by asi měla mít hodina průběh:

Fáze	Klíčová otázka
Porozumění úloze	Jak povedete žáky, aby porozuměli této úloze?
Návrh plánu	Jaké strategie by mohli žáci navrhnout?
Realizace plánu	Jak pomůžete žákům ve splnění plánu, který si navrhli?
Pohled zpátky	Jak můžete žáky vést k nalezení jiného možného plánu nebo jiného možného řešení, pokud takové existuje?
Tvoření podobné úlohy	Jaké možné varianty úlohy by mohli žáci navrhovat, jaké byste mohl navrhnout vy?

Studenti vysoké školy mají za úkol předvídat, jaké otázky by asi žáci mohli klást, zvažují možné strategie. Poté dostanou možnost svou navrženou hodinu zrealizovat na základní nebo střední škole a zjistí, jak důležitou roli v porozumění a interpretaci slovní úlohy hraje jazyk, výběr slov, terminologie. Získají také vhled do znalostí žáků různých ročníků a pochopí, že učitel je pomocník na cestě za znalostí spíše než její doručovatel. „Učitel se může pokusit předvídat co nejvíce otázek a strategií, ale žáci mohou přesto klást nečekané otázky a mohou navrhnout strategie, které by učitele ani nenapadly! To je to, o čem řešení a tvoření úloh je.“ (Gonzales, 1994)

3.3.7 Náměty znovu od Gonzales

Po dalších čtyřech letech, kdy se Gonzales zabývala tvořením úloh, zveřejnila další sadu námětů nyní už pro stávající učitele, jak by mohli zapojit tvoření úloh do výuky, jak by k němu mohli vést žáky. (Gonzales 1998)

1. fáze: Příprava (Getting Started)

V první fázi je pro Gonzales důležitý postupný přechod od jednoduchých otázek, které žáci kladou sami sobě, k více komplexním, kreativním formám tvoření úloh. Žáci mohou nabýt zkušenosti v kladení si promyšlených otázek, které jim pak budou výzvou k dalšímu přemýšlení, ať už si tyto otázky kladou žáci sami či je slyší od svých spolužáků. Žáci, kteří mají problémy s kladením si podnětných, zkoumavých otázek, mohou začít s aktivitami, kdy je po nich požadováno, aby sami popisovali a rozebírali svůj myšlenkový proces. Během těchto počátečních kroků žáci získají zkušenosti a zjistí, jak používat jednotlivé strategie pro řešení slovních úloh (nakreslení diagramu, načrtnutí tabulky, sestavení rovnice, vyřešení jednodušší úlohy atd.) (Gonzales 1998)

Žáci jsou nabádáni k tomu, aby detailně sepsali výčet všech otázek a myšlenek, které je napadnou při každém kroku během řešení. Tímto způsobem si sami zdokumentují svůj myšlenkový proces, na který se pak občas mohou podívat, když oba, jak žák, tak učitel, „rostou“ v technikách sebemonitorování a dotazování se.

Než se učitel zaměří na splnění čtyř kroků Poloyova procesu (viz A) – D) v předchozím odstavci), je dobré provést ‚good skill-building exercise‘ (cvičení na budování dovedností porozumět úlohám). To znamená, že pokud žáci dostanou úlohu/úlohy, je potřeba se zaměřit na pochopení úlohy, nikoliv na hledání řešení. Žáci by si měli dělat poznámky o všech myšlenkách a otázkách, které jim přijdou na mysl, a ptát se sami sebe: „O čem je ta úloha?“ „Co je zadané?“ „Co potřebuji zjistit?“ „Musím formulovat nějaké hypotézy?“ „Je víc možností, jak dané informace, dané podmínky nebo úkol interpretovat?“ Tyto otázky jsou podle Gonzales dobré k tomu, aby žák zpomalil a opravdu si promyslel úlohu, než začne „mechanicky manipulovat s proměnnými x a y. (...) Na řešení úlohy pohlížíme jako na proces a jedním krokem v tomto procesu je pochopit, o čem celá ta úloha je.“ (Gonzales 1998)

2. fáze: Tvoření podobné úlohy (Posing a Related Problem)

Nyní by žáci měli použít úlohu, kterou již řešili, jako odrazový můstek a sestavit úlohu podobnou. Mají za úkol znovu projít úlohy, které právě vyřešili, a vytvořit variaci na jednu danou úlohu nebo ji nějak prohloubit a pak ji sepsat v kompletní podobě a vlastní formou, vlastními slovy. To proto, aby tato nově vytvořená úloha stála samostatně od původní zadané úlohy.

Gonzales (1998) uvádí seznam několika tipů, jak je možné tvořit podobné úlohy:

1. Prohoďte danou a požadovanou informaci.
2. Přidejte informaci.
3. Přijměte podmínky a úkol, ale změňte zadané hodnoty.
4. Použijte zadané hodnoty, ale změňte úkol, otázku.
5. Použijte dané hodnoty a otázku, obměňte podmínky.
6. Změňte kontext nebo umístění úlohy.
7. Zobecněte jeden nebo více příkladů.
8. Popřete jednu nebo více částí tvrzení. (Například. „Co když ne…?“)

(Gonzales 1998)

Můžeme samozřejmě zkombinovat několik způsobů nebo si vymyslet techniky vlastní.

3. fáze: Generování otázky (Generating a Task)

„Učitel nyní může začít žáky odvádět od závislosti na úlohách zadaných a sepsaných v dokonalé a vybroušené podobě.“ (Gonzales 1998) Začít může tím, že žákům poskytne úlohy, v nichž chybí to hlavní – otázka, úkol – jedná se tedy o matematické situace. „Takové situace jsou bohatým zdrojem, který obsahuje data a informace, ale neobsahuje otázku, úkol. (…) Na studentovi je, aby otázku položil nebo aby vytvořil úlohu, inspirovanou danými informacemi.“ (Gonzales 1998) Například statistické grafy a tabulky jsou takovými matematickými situacemi. Obsahují velké množství dat, ale položení otázky už je přenecháno na čtenáři.[11] Gonzales (1998) uvádí, že někdy je možné najít matematické situace přímo v učebnici. I v českých učebnicích najdeme určité výzvy, které vedou žáky k tvorbě úloh. Např. Odvárko (1997) ve své učebnici pro pátý ročník uvádí: „Pepa si klade otázku: ‚Může mít trojúhelník všechny úhly pravé?‘“ O kousek dále se z obrázku dozvíme, že tento případ nemůže nastat – zde

[11] Tabulky a grafy se v současné době objevují v novinách, časopisech, na internetu, na letácích atd. I doc. Odvárko s nimi často pracuje ve svých učebnicích pro žáky druhého stupně základní školy nebo v nich hledá inspiraci při tvoření úloh.

si tedy průvodce celou učebnicí klade otázky, tvoří úlohy a samostatně nad matematikou uvažuje.

Jakmile žáci vytvoří variace na danou úlohu, může je učitel rozdělit na skupiny po čtyřech či pěti žácích. Každá skupina si zvolí svého vedoucího, který shromáždí všechny úlohy vytvořené jeho spolužáky a předá je dál jiné skupině. Na oplátku dostane jejich úlohy a v původní skupině řeší společně úlohy svých spolužáků. Pak mají za úkol svá řešení prezentovat před ostatními. Toto cvičení přinutí žáky projít řešení úlohy ve čtyřech krocích (jak je rozdělil Polya, 1973), přistupovat k řešení úloh jako k procesu a především porozumět úlohám. Musí totiž nejprve úlohu pochopit. Vedoucí skupiny má za úkol si celou dobu dělat poznámky, zapisovat všechny otázky, myšlenky, špatné začátky, pokusy, domněnky a tak dále.

4. fáze: Hledání matematických situací (Finding Mathematical Situations)

V této fázi můžeme žákům zadat úkol: „Najděte tři matematické situace, jež obsahují data a informace, ale neobsahují otázku. Pro každou situaci pak vymyslete úlohu, kterou můžeme vyřešit pomocí informací prezentovaných v situaci a pomocí jakýchkoli dalších informací, které si k tomu budete chtít přidat. Především dbejte na to, aby úlohy byly v ucelené formě." (Gonzales 1998)

Kde najdou žáci matematicky bohaté prostředí? Učitel je může povzbudit k hledání například v novinách, časopisech, katalozích z obchodů, na internetu, v knihách a učebnicích (učebnicích matematiky, fyziky, biologie, občanské výchovy nebo společenských věd) a v různých statistických pramenech.

Podobně jako v předchozí fázi si mohou žáci vytvořené úlohy mezi sebou vyměnit.

5. fáze: Generování úloh (Generating Problems)

Žáci by nyní měli být schopni „tvořit úlohy sami, sami klást otázky sobě i ostatním". K tomu jim pomůže právě schopnost monitorovat vlastní pokrok v řešení úloh/problémů. „Navíc jsou lépe seznámeni se všemi částmi úlohy a měli by mít dost sebevědomí k tomu, aby sami úlohy tvořili." (Gonzales 1998) Jsou již připraveni na tvoření všech důležitých podmínek a celého zadání úlohy.

Učitel může začít hrou nazvanou „pošli to dál". Začne se tím, že jeden žák udá nějakou informaci, druhý přidá další a tak dále, až žáci postupně vytvoří zadání úlohy.

Nebo nemusí zadávat informace jednotliví žáci, ale skupiny žáků. Dostaneme tak posloupnost tvrzení. Pak je naším, nebo spíše úkolem žáků, tato tvrzení spojit v jednu ucelenou úlohu. Příklad tvrzení, která vytvořili žáci střední školy:

1. Nakresli bazén.
2. Bazén má na povrchu tvar obdélníku.
3. V nejmělčí části je 8 stop (2,44 m) hluboký, v nejhlubší části 15 stop (4,57 m).
4. Na povrchu je tedy obdélníkový - o rozměrech 24 stop (7,32 m) x 18 stop (5,49 m).
5. Okolo bazénu se opaluje hodně lidí.
6. Bazén bude téměř celý naplněn vodou. Jen jedna unce do hloubky zůstane nenaplněná.
7. Kolik uncí krychlových bazénu se nezaplní?
8. Kolik uncí krychlových vody je potřeba jako náplň? (Gonzales 1998)

Pak můžeme žáky požádat, aby přepsali celou úlohu tak, aby informace byly konzistentní a úkol či otázka byla jasná. Žáci tak dostanou možnost, aby si porovnali vytvořené úlohy. Poznají tak, co jsou dobré podmínky úlohy a jak má vypadat dobré zadání.

Jiným zdrojem matematických dat a úloh může být *pokus* (Gonzales 1998). Pokusy jsou již tradičně prováděny v hodinách chemie, fyziky, zřídkakdy však v hodinách matematiky. K matematickému pokusu můžeme použít různé materiály a zdroje: čtvercové dlaždice, kvádry, kostky, ale i grafické kalkulátory, počítačové programy a další učební pomůcky.

Jako příklad poukazuje Gonzales (1998) na experiment, kdy žáci měli vymodelovat z drátu všechny možné obdélníky o obvodu 16 palců (40,64 cm) a se stranami o celočíselné délce. Pro každý obdélník měli vypočítat poměr *strana* : *výška* (a : b). Tyto poměry pak měli zanést do souřadnicového systému (jako x : y) a měli najít rovnici odpovídající grafu. Na závěr měli napsat tři úlohy, které by mohly být řešeny použitím údajů zanesených v grafu. Totéž můžeme sestavit pro vztah strana a : *obsah* atd.

Toto je návod na matematický pokus, který zahrnuje úkoly k tvoření úloh. Takový experiment si pak může každý učitel přizpůsobit k obrazu svému, záleží na tom, jaké materiály a kolik místa má k dispozici a na jaké úrovni jsou znalosti žáků.

Nový začátek (New Beginning)

Tento plán sestávající z těchto 5 fází může být použit jako nástroj, jakým můžeme rozvíjet u dětí schopnost tvořit úlohy. Kreativní učitel si samozřejmě může k postupu, který zde navrhuje Gonzales přidat cokoliv svého. Domnívám se, že je to naopak velmi žádoucí. Žáci poznají, jestli učitel přijímá probírané učivo za své, nebo jestli se s ním neztotožnil. Gonzales (1998) dodává, že také samozřejmě záleží na atmosféře ve třídě a náboji, který tomu právě učitel může dát svým nadšením pro věc.

3.4 Hodnocení vytvořených úloh

V tomto odstavci se podíváme, jak někteří autoři zabývající se tvorbou úloh vytvořené úlohy hodnotí. Konkrétně půjde o práci Gonzales (1996 a 1994).

Gonzales (1996) nechala děti tvořit úlohy ke grafu týkajícího se procentuálního podílu daní z příjmu a pak hodnotila vytvořené úlohy podle obtížnosti položené otázky. Otázky/úlohy rozdělila do pěti kategorií:

1. *dané* – otázka se vztahuje k informaci, která je daná matematickou situací (grafem). Např.: „Kolik procent denního platu připadne na zaplacení daní, když pracujete normálně 8 hodin denně?"
2. *modifikované, obměněné* – otázka se vztahuje k informaci, která byla pozměněna, tato informace je součástí otázky. Např.: „Řekněme, že pracujete na částečný úvazek. Pracujete 5 hodin denně. Nakreslete nový koláčový graf, který by ukazoval čas strávený na každé oblasti, dodržte procentuální poměr."
3. *rozšířené* – otázka se vztahuje k informaci, která zvýší význam dané informace. Např.: „Když zaměstnanec pracuje osm hodin denně, pět dní v týdnu, 52 týdnů v roce, kolik hodin ročně pracuje zaměstnanec na zaplacení státních a místních daní (state and local taxes)?"

4. *přidané* – otázka se vztahuje k informaci, která byla poskytnuta ve vytvořené otázce. Tato nová informace není k nalezení v grafu, byla vytvořena tvůrcem otázky. Je vlastně přidána k matematické situaci. Např.: „Pracujete pro IRS. Přijde muž, který pracoval loni 2 080 hodin. Vydělá 10 dolarů za hodinu. Odhadni co nejpřesněji, kolik zaplatí na federálních daních (federal taxes)."
5. *nejasné* – jde o otázky, které nedávaly smysl, nemohly být zodpovězeny kvůli nedostatečným informacím, nebo otázka úplně chyběla. (Gonzales 1996)

Další způsob, jak můžeme vytvořené úlohy hodnotit, uvedený v (Gonzales 1994) je popsán v kapitole 4.4 Analýza dat, protože jsem jej použila ve vlastní výzkumné sondě.

3.5 Důležitost tvorby úloh

V tomto odstavci shrnu, proč je vlastně tvoření úloh důležité a k čemu může sloužit.

3.5.1 Matematika jako živá věda

Schupp (2002) uvádí hned několik argumentů, proč je tvoření úloh užitečné a proč bychom měli žáky podporovat v tom, aby zaujali k úlohám vlastní postoj. Hentig (1997, cit. v Schupp 2002, s. 12) tvrdí, že přesycujeme děti odpověďmi na otázky, které si ani samy nekladly. Už v roce 1913 psal Paulsen (cit. v Schupp 2002, s. 12) o maturantech: „Po dvanáct let jsou na všechno zvyklí, jen ne na to, sami si dávat úkoly a pracovat z vlastní iniciativy, neví, co si pak s náhlou a v přehršlé míře vyvstavší akademickou svobodou počít."[12]

Schupp (2002) si stěžuje, že současný obraz matematiky je špatný. Matematika se prý stala vědou, která už nezná a nemá žádné problémy a úkoly, je „uzavřenou formální sbírkou receptů", (zcela řešitelné) úlohy slouží jen k tréninkovým účelům a hodí se jako „nářadí". „Ale kupodivu se jednoduchou variací vyřešené úlohy dostaneme k těžkým, pro žáky nebo i pro učitele neřešitelným, problémům." (Schupp 2002, s. 12)

[12] „Zwölf Jahre hindurch an alles gewöhnt nur nicht daran, sich selber Aufgaben zu stellen und aus eigenem Antrieb zu arbeiten, weiss er nun mit der so plötzlich und mit im Übermaß hereinbrechenden akademischen Freiheit nichts zu beginnen."

Matematiku je totiž potřeba brát jako živou vědu nebo „živý proces", při kterém vznikají stále nové a nové otázky. De Villiers také zastává názor, že je potřeba naučit žáky, aby se aktivně zapojovali do výuky, aby se ptali, aby kladli otázky (ať už sami sobě nebo učitelům). „Samozřejmě, cynik může říct: proč (si) klást takové otázky, když nevíme, že někam vedou. Faktem je: nikdy to nebudete vědět, pokud se nezeptáte a neprozkoumáte to."[13] (De Villiers 1995)

3.5.2 Žákovy intelektuální schopnosti

Mnoho odborníků, didaktiků matematiky, zastává názor, že tvoření úloh rozvíjí intelektuální schopnosti žáka, učí ho samostatně přemýšlet a zabývat se matematickými obsahy úplně jinak než při běžném, řešitelsky zaměřeném vyučování. „Když dovolíme žákům tvořit jejich vlastní úlohy, může to ovlivnit jejich postoje k matematice, ovládání matematiky a úspěchy v matematice."[14] (Grundmeier 2002) Tvoření úloh přispívá k širšímu porozumění matematickým konceptům a „navíc poskytuje příležitost učitelům nahlédnout do žákova porozumění matematickým konceptům a procesům." (English 1997, 1998, Pittalis 2004)

„English (1997) argumentuje, že tvoření úloh umožňuje žákům vytvořit si jiné a flexibilní myšlení způsoby, které nejen zvyšují jejich schopnost řešit úlohy, ale navíc upevňují a obohacují základní matematické pojmy.[15] (Lowrie 2002) Schopnost formulovat otázky a úlohy poukazuje na žákův vhled do situace a navíc je během procesu formulování otázek a úloh rozvíjeno vytváření modelů a užívání různých modů reprezentace (Tichá 2008). Tichá hovoří i o schopnosti přepínání mezi jednotlivými mody reprezentace, což je možné rozvíjet například činnostmi jako: Vytvořte úlohu k zadanému grafu apod.

3.5.3 Sebevědomí, vztah k matematice, motivace

[13] „Of course, a cynic may say: what is the point of asking such questions if you don't know that they lead anywhere. The point is: you'll never know unless you ask and investigate!"

[14] „Allowing students to pose their own mathematics problems can influence (...) attitudes towards mathematics, ownership of mathematics and mathematics achievement."

[15] „English 1997 argued that problem posing allowed students to generate more diverse and flexible thinking in ways that not only enhanced problem solving but also reinforced and enriched basic mathematics concepts."

Důležitou funkcí, kterou tvoření úloh plní, je posílení žákova sebevědomí. Tvoření úloh podle Schuppa (2002) vede k chápání souvislostí, dává žákovi vhled do probírané látky, zvyšuje jeho motivaci a zájem a posiluje žákovo „já". Dostatek příležitostí k rozvinutí žákovy fantazie a kreativity slouží k posílení jeho sebevědomí. Žákova zkušenost s tvořením úloh zlepšuje také jeho vnímání předmětu, má za následek zájem a motivaci, zlepšuje přístup k matematice a zvyšuje sebevědomí v ní. (Silver 1994, English 1997, Pittalis a kol. 2004)

3.5.4 Diagnostický nástroj

„Z pohledu učitele aktivity ve tvoření úloh hodně prozrazují o chápání, schopnostech a přístupech, které vnáší tvořitel úlohy do dané situace, a tak se stávají významnými hodnotícími nástroji."[16] (Lowrie 2002) Lowrie (2000) dále uvádí, že tvoření úloh nám (nebo učiteli) dává nahlédnout do způsobu, jakým žáci získávají matematické porozumění a slouží jako diagnostická metoda („assesment tool"). Podobně využívala a využívá tvoření úloh Tichá, která pomocí tvorby úloh diagnostikovala nepochopení – například nepochopení v oblasti zlomků. (Tichá 2003, 2007, 2008) Tvoření úloh navíc podle Lowrieho (2000) poskytuje vhled do přesvědčení žáků a jejich přístupu k matematice a způsobu, jak rozvíjí své matematické znalosti. Schopnější studenti jsou úspěšnější při generování úloh. Proto slouží tvoření úloh k indikaci potenciálních matematických talentů. (Lowrie 2000)

Mnozí didaktikové (Silver, Cai, 1996; English 1997; Tichá 2008) zdůrazňují potřebu rozvíjení dovednosti tvořit úlohy a spatřují v tom jednak cíl, jednak prostředek matematického vzdělávání. Ukazuje se, že tvoření úloh (zvláště slovních) je velmi dobrý diagnostický i reedukační prostředek. Analýza vytvořených úloh vede ke zjištění úrovně porozumění a k objevení eventuálních miskoncepcí a chybných úvah u každého respondenta. (Tichá 2003, 2008) Z formulací úloh je podle Tiché možno získat mnoho didakticky zajímavých a cenných informací.

3.5.5 Reedukace – tvoření úloh jako reedukační prostředek

[16] „From a teaching perspektive, problem-posing activities reveal much about the understandings, skills, and attitudes the problem poser brings to a given situation and thus become powerful assessment tools."

Tichá (2008) říká, že tvoření úloh je nejen dobrý diagnostický a edukační prostředek, ale hodí se i k reedukaci. Nestačí totiž úlohu vytvořit. „Je třeba ji i vyřešit a diskutovat o ní. Potvrzuje se tu potřeba provádění společné reflexe. Vytvořit úlohy a promyslet je pomůže uvědomit si svá vlastní neporozumění, své omyly a nedostatky.“ (Tichá, 2008)

3.5.6 Souvislost řešení a tvoření úloh

Odborníci se nemohou shodnout, zda a jak moc souvisí schopnost tvořit úlohy se schopností je řešit. Např. Leung a Silver (1997) tvrdí, že „výzkumy ukázaly, že tvoření úloh má pozitivní vliv na žákovu schopnost řešit slovní úlohy.“ Podobně další (Silver 1994, English 1997, Pittalis et al. 2004) uvádějí, že tvoření úloh zlepšuje žákovu schopnost uvažovat v matematice a řešit úlohy. Naproti tomu Lowrie (2002) uvádí, že „existují rozporuplné závěry z vědecké literatury týkající se schopnosti žáků tvořit úlohy a jejich schopnosti je řešit.“ Například se odvolává na práci Silvera a Caye (1993), kteří shrnuli, že žáci, kteří byli schopni tvořit dobré úlohy, nebyli vždycky nejschopnější řešitelé úloh.

3.5.7 Využití v práci

Grundmeier (2002) poukazuje navíc na možnost užití v práci: „Budoucí matematikové, inženýři a počítačoví vědci se jistě ve svých profesích setkají s tvořením úloh.“

Závěrem uvedu svůj osobní názor. Myslím si, že pokud bereme tvoření jako diagnostickou metodu, nemá samo o sobě veliký dopad na žákovy matematické kompetence. Když ale vezmeme v potaz reedukaci nebo přímo vedení žáků k tvoření úloh a kladení si otázek, jeho význam je podle mého názoru velký. Ukazují to i některé výše uvedené výzkumy.

4 Vlastní výzkum

V této kapitole popíši cíle, metody a závěry vlastní výzkumné sondy, kterou jsem provedla v rámci oborové praxe ve dvou třídách střední školy a následně v jedné třídě základní školy. Inspirací pro můj výzkum mi byly některé z výzkumů uvedených ve 2. kapitole.

4.1 Výzkumná otázka/otázky

V rámci své práce jsem si položila tyto otázky:

- Jak souvisí schopnost tvořit úlohy se vztahem k matematice?
- Úlohy jaké obtížnosti tvoří žáci střední školy (3.A, 3.B) a žáci 9. ročníku základní školy?
- Umí žáci své úlohy poté vyřešit?
- Troufají si vytvořit úlohy nad své možnosti nebo raději tvoří takové úlohy, u nichž jsou si jistí, že je umějí bezchybně řešit?

4.1.1 Cílová skupina

Třídu 3.A jsem si vybrala už během své pedagogické praxe na Gymnáziu Jírovcova, protože se mi s ní dobře pracovalo. Později jsem ještě zapojila třídu 3.B ze stejného gymnázia a rozhodla se, že výsledky porovnám. Při prvotním vyhodnocení výsledků se zdálo, že úlohy vytvořené žáky 3.B odpovídají předpokládaným výsledkům výborného až průměrného žáka na základní škole. Zadala jsem proto úkol vytvořit úlohy i v 9.A Základní školy Hluboká nad Vltavou. Všechny tři zkoumané třídy podrobněji popíši.

4.1.2 Třídy 3.A a 3.B a rozdíly mezi nimi

Ač jsem výzkum dělala ve 3.A a 3.B stejného gymnázia, třídy jsou naprosto odlišné úrovně. Třída 3.A je třída se zaměřením na matematiku a přírodní vědy, i když se oficiálně neliší od tříd „všeobecného gymnázia“ bez zaměření. Dříve totiž existovaly na Gymnáziu Jírovcova matematické třídy, později se začaly nazývat třídami „se zaměřením na matematiku“ a nyní již o takové třídy upadl zájem. Nicméně, už vzhledem k tradici, je každý rok nabízeno žákům otevření třídy s větší dotací hodin matematiky a přírodovědných předmětů. Zatím byla vždy taková třída otevřena (nyní 1.A, 2.A, 3.A, 4.A).[17] V učitelském sboru Gymnázia Jírovcova je dostatek kvalifikovaných učitelů, kteří mohou s takovými třídami pracovat i nad rámec běžné gymnaziální výuky matematiky. Pro třídu se zaměřením na matematiku a přírodní vědy se žáci mohou rozhodnout poté, co jsou přijati. Protože je v současné době široká nabídka studijních možností a žáci mají možnost studovat na různých středních školách, klesl počet žáků ucházejících se o studiu na gymnáziích obecně (tedy i na Gymnáziu Jírovcova). Přijímací zkoušky většina žáků ani nemusela skládat, protože byli přijímáni pouze podle průměru na vysvědčení (v osmém ročníku na konci a v devátém v pololetí). To odpovídá běžnému trendu, kdy „podmínky pro přijetí se stále zmírňují,“ jak uvedl Trča, učitel matematiky ve 3.A.

Nyní mají žáci 3.A pouhé tři hodiny matematiky týdně plus jednou za čtrnáct dní půlenou hodinu. Ve 3.B je hodinová dotace stejná, lišila se však v 1. a 2. ročníku (kdy 1.A a 2.A měla pět hodin matematiky týdně a 1.B a 2.B jen čtyři). Navíc ve 3.A učí matematiku jiný učitel než ve 3.B a učí jiným způsobem. Podle Trči (učitele matematiky ve 3.A) je rozdíl mezi 3.A a 3.B asi jeden klasifikační stupeň. Obě třídy jsou velmi početné, 3.A navštěvuje 30 žáků, 3.B 29 žáků.

4.1.3 Třída 9.A

Třída 9.A Základní školy Hluboká nad Vltavou je běžnou třídou, kterou navštěvuje 23 žáků. Není nijak specializovaná a žáci do ní nebyli nijak vybíráni. Na začátku školní docházky byli žáci podle abecedy přiděleni buď do 1.A, nebo do 1.B. V pátém ročníku odešli ti nejlepší žáci na víceletá gymnázia.

[17] Celkově je ale v Čechách trend opačný, zájem o matematiku a její popularita upadá. Tříd se specializací na matematiku postupně ubývá, a pokud nemá škola vynikající jméno a matematickou tradici, má problém s naplněním matematické třídy. V Čechách jsou takové třídy už jen na Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci a Gymnáziu na třídě Kapitána Jaroše v Brně; několik tříd existuje ještě na gymnáziu v Hradci Králové a v Plzni.

4.2 Použité metody

4.2.1 Dotazník

Žáci měli nejprve vyplnit Grundmeierův dotazník (Grundmeier 2002), teprve pak jsem jim zadala úkol tvořit úlohy. Na vyplnění Grundmeierova dotazníku, vytvoření a vyřešení úloh měli žáci vždy jednu vyučovací hodinu (45 minut). Vyplnění dotazníku nemělo zabrat více než 10 minut, takže žáci měli mít zbylých 35 minut na tvoření a řešení úloh.

Grundmeierův dotazník poukazuje na vztah žáků k matematice a ke tvoření úloh. Ve svých výzkumech používal dotazník celkem o 21 bodech, ve svém článku z roku 2002 však zveřejnil jen 11 z nich. Nicméně podle mého názoru už z těchto jedenácti otázek lze zjistit, jestli žák matematiku má nebo nemá rád.

Návod na vyplnění dotazníku pro žáky zněl: „Ohodnoťte daná tvrzení body 1 – 5, přičemž 1 znamená „vůbec nesouhlasím", 3 je neutrální a 5 „naprosto souhlasím". Nepřemýšlejte dlouze nad žádnou otázkou; prosím, zodpovězte každou spíše podle instinktu.

1. Rád/a dělám víc, než je nutné, a zkouším vyřešit nové úlohy v matematice.
2. Matematika mě baví a dává mi nové podněty.
3. Při matematice se cítím nejistý/á a zmatený/á.
4. Zajímám se o matematiku a jsem ochotný/á ji používat mimo školu a v práci.
5. Nikdy jsem neměl/a ráda matematiku a je pro mě předmětem, kterého se nejvíc děsím.
6. Vždycky mě bavilo učit se ve škole matematiku.
7. Rád/a bych rozvíjel/a své matematické schopnosti a věnovala se tomuto předmětu víc.
8. Při matematice se cítím nepříjemně a nervózně.
9. Zajímám se o matematiku a jsem ochotný/á osvojit si další znalosti matematiky.

10. Matematika je nanic a nudná, protože nenechává žádný prostor pro vlastní názor.
11. Matematika je velice zajímavá a hodiny matematiky mě většinou bavily."

(Grundmeier 2002)

4.2.2 Zadání pro tvorbu úloh

Druhá část experimentu se skládala z tvoření úloh. Jako zadání pro tvorbu úloh jsem zvolila univerzální a, podle mého mínění, podstatná, témata matematiky základní školy:

1. společnou práci a pohyb (z 8. ročníku),
2. objemy, povrchy těles,
3. obsahy a obvody rovinných útvarů.

Žáci měli mít třicet pět minut na to, aby vytvořili úlohy ke třem zadaným situacím tak, aby jejich řešení bylo co nejnáročnější, ale řešitelné. Měli dbát na to, aby úlohy byly obtížné, takové, že by je spolužáci nebyli schopni vytvořit. Úlohy měli i vyřešit. Mohli také přidat informace či údaje, které by jim v tvoření pomohly (u 3. situace). Toto vše jim bylo řečeno ústně. Na tabuli byly pak žákům písemně zadány celkem tři situace, dvě zadané pouze tématem, třetí založená na číselných údajích.

Zadání pro tvorbu úloh vypadalo takto:

1. Společná práce nebo pohyb (úlohy z 8., 9. ročníku)
2. Obsah, obvod, objem.
3. Atletiku dělá 26 dětí, fotbal hraje 17 dětí, volejbal 58 dětí a šachy 19 dětí.

U třídy 9.A jsem předem počítala s tím, že by žáci těžko stihli vytvořit všechny tři úlohy, proto jsem třetí situaci chtěla zadat jen v případě, že se někdo bude nudit, nebo ji vůbec nezadávat.

Úlohu číslo 3 jsem plánovala spíše pro žáky 3.A, protože je mohla vést k principu inkluze a exkluze, který probírali na konci druhého ročníku. Chtěla jsem vyzkoušet, kolik z nich si na tento princip vzpomene, a pokud ano, zda úlohu zadají a vyřeší správně. Ve 3.A jsem navíc zaměnila situaci pro 3. úlohu. To kdyby se náhodou od spolužáků z 3.B dozvěděli, jaké úkoly jsem jim zadala. Nechtěla jsem, aby zadání bylo na první pohled stejné, později jsem si však uvědomila, že bych pak musela změnit i témata 1. a 2. úlohy, což by z hlediska objektivity ani nebylo možné. Pak bych výsledky v jednotlivých třídách těžko mohla porovnávat. Proto první dvě témata zůstala stejná pro všechny třídy. Jak se ukázalo, mé obavy z šíření informací byly zbytečné. Nebylo tedy nutné dávat různá zadání.

První dvě situace pro tvoření úlohy jsou podle Stoyanové (1995) (viz odstavec 2.1.4) naprosto otevřené, libovolné, protože je zadané pouze téma, jehož se úlohy mají týkat. Poslední situace je napůl strukturovaná, protože je zadáno několik informací, které jsou pro budoucí úlohu směrodatné. Formulování úlohy ze strukturované situace (podle Stoyanové), neboli variaci úlohy (podle Schuppa, 2002) jsem žákům nezadávala, protože se domnívám, že by úlohu dokázali přeformulovat nebo doplnit potřebnou informaci, pokud by znali postup řešení a měli úlohu zároveň i řešit. Snadno by se vrátili na začátek a dopsali, co v zadání chybělo. Nezaměřila jsem se ani na počet úloh (jako to ve svých výzkumech dělá Tichá (2003, 2007), kdy žáci mají vytvořit co nejvíce úloh na dané téma), důležitější pro mě byla kvalita té jedné úlohy, protože se v časovém tlaku často stává, že žáci tvoří úlohy stejného typu, jen se ptají trochu jinak nebo dokonce na to samé jinými slovy.

4.2.3 Rozhovor

Jako třetí metodu jsem zamýšlela použít rozhovor jak se žáky, tvůrci úloh, tak s jejich vyučujícím. Otázky pro žáky jsem neměla předem připravené, měla jsem v úmyslu řídit se tím, jaké úlohy vytvoří, a podle toho reagovat. U vyučujícího mě zajímalo, jak vede žáky k tvoření úloh, protože jsem již z doby své pedagogické praxe (tehdy ve 2.A) věděla, že jsou žáci zvyklí klást sobě i vyučujícímu otázky. Navíc mě zajímal jeho názor na tvoření úloh. Protože se známe již z dob mých studií na gymnáziu, mělo se jednat o neformální rozhovor.

4.3 Průběh experimentu

Experiment ve 3.A se konal 29. 9. 2008 od 14:25 do 15:10 bez přítomnosti jejich učitele. Na zadání práce bylo potřeba více času, než jsem plánovala, vyplnění dotazníku žákům trvalo také déle, než jsem předpokládala (10-12 minut), takže na tvoření úloh jim zůstalo 30-32 minut. Nutno ale podotknout, že žáci měli matematiku až osmou hodinu, což také mohlo ovlivnit kvalitu jejich výsledků.

Většina žáků se pustila do tvoření úloh ochotně. Dvě dívky pracovaly společně, jedné se totiž nechtělo nic dělat. Otázky ze strany třídy 3.A byly spíše k upřesnění zadání, ale nebylo jich mnoho.

Ve třídě 3.B tvořili žáci úlohy dopoledne, konkrétně čtvrtou hodinu (od 11:20 do 12:05) dne 26. 9. 2008, bez přítomnosti jejich učitele. Zadání proběhlo podle plánu, nebylo k němu potřeba více času. Bylo ale vidět, že žáci jsou zadáním z mé strany zaskočeni a že se jim tvořit úlohy nechce. Věděli totiž, že se to nebude počítat do jejich známkování. Jedna žákyně se zeptala: „A proč bychom to měli dělat?“ Snažila jsem se jí důvody co nejlépe vysvětlit. Postoj většiny třídy byl vyloženě odmítavý. Důvod mohl spočívat i v tom, že jsem třídu předtím neučila. (Možná by bylo lepší si vytvořit s žáky dané třídy určitý vztah, než se začne dělat taková práce.)

Žáci 9.A na základní škole tvořili úlohy také ráno, mezi 8:55 a 9:40, dne 21. 10. 2008. Netvořili úlohy ke třetí části zadání, s čímž jsem předem počítala. Žáci 9.A však neměli na tvoření úloh celých 35 minut, protože jim vyplňování dotazníku zabralo více času (celkem se zadáním tak přišli v úvodu o 15 minut z hodiny). Kladli jen doplňující otázky k zadání, šlo o drobné nejasnosti, které jsme upřesnili. Pracovali všichni, zřejmě i proto, že ve třídě se mnou byl jejich učitel matematiky.

Experimenty probíhaly v normálních učebních třídách, žáci seděli po dvojicích, výjimečně samostatně. Protože ve 3.A a ve 3.B se mnou nebyli jejich učitelé matematiky, nemohla jsem ohlídat, aby si žáci mezi sebou v náznacích nebo pomocí opisování nesdělili, jak se vlastně úlohy o společné práci nebo o pohybu řeší. Někteří měli tendenci opisovat, čemuž jsem se snažila zabránit. V 9.A se mnou vyučující byl, ale i tam si děti mezi sebou stihly rychle nastínit postup řešení těchto úloh. Opisování jsem se opět snažila zabránit.

4.4 Analýza dat

4.4.1 Výsledky dotazníku

Grundmeierovým dotazníkem jsem zjišťovala vztah dětí k matematice. Pozitivními tvrzeními v Grundmeierově dotazníku byly otázky číslo 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, negativními 3, 5, 8, 10. U negativních tvrzení jsem proto používala opačné hodnocení (1=5, 2=4, 3=3, 4=2, 5=1), abych následně mohla body sečíst a vyhodnotit je jako míru pozitivního vztahu k matematice. Minimum tedy bylo 11 bodů, maximum 55 bodů.

U jednotlivých žáků uvedu jejich bodovou hodnotu vztahu k matematice až v tabulkách ve druhém sloupci, společně s hodnocením vytvořených úloh (ve sloupci 3, 4 a 5), zde uvedu pouze průměry v jednotlivých třídách. Ve 3.A byl průměr 40,2 bodů, ve 3.B 30,3 bodů a v 9.A 34,3 bodů. To znamená, že žáci 3.A mají pozitivnější vztah k matematice než žáci 9.A, a ti mají matematiku raději než žáci 3.B. To pro mě byl zajímavý závěr, že žáci na základní škole mají k matematice pozitivnější vztah než žáci běžné, nespecializované gymnaziální třídy (konkrétněji, třídy žáků, kteří si nevybrali studium ve třídě se zaměřením na matematiku a přírodovědní vědy).

4.4.2 Hodnocení vytvořených úloh

Úlohy jsem bodovala podle stupnice uvedené v (Gonzales, 1994). Snažila jsem se, aby hodnocení bylo co nejobjektivnější, nicméně je obtížné ubránit se subjektivním postojům. Některé úlohy se zdají být zajímavější, jiné méně zajímavé a podle toho pak hodnotitel přiděluje body nebo jinak hodnotí. I další odborníci se shodují, že vyhodnocování výzkumu podobného typu není objektivní, ani když hodnotí a prochází vytvořené úlohy žáků společně s jinou osobou. Gonzales (1994) uvádí pravidla pro klasifikaci vytvořených úloh, která obsahuje následujících 16 bodů hodnocení:

1. Úloha je jasně a výstižně zadaná.
2. Použitá slovní zásoba je přiměřená pro dané žáky.
3. Matematická úroveň je vhodná.
4. Úloha je realistická nebo praktická.
5. Úloha je kreativní.

6. Kontext úlohy je zajímavý.
7. Úloha poskytuje více možností řešení.
8. Matematický úkol nabádá/vede k dalším zkoumajícím otázkám.
9. Matematická situace poskytuje studentům možnost usuzovat, zkoumat a analyzovat.
10. Úloha usnadňuje pochopení některých základních matematických konceptů.
11. Úloha podporuje použití matematických schopností.
12. Řešení vyžaduje strategii spíše než pouhou odpověď.
13. Úloha má potenciál k rozvinutí matematické argumentace.
14. Řešení úlohy poskytuje studentům možnost klasifikovat, formulovat a definovat pojmy.
15. Proces řešení podněcuje použití modelů, diagramů, grafů a symbolů k reprezentaci konceptů/různých pojetí.
16. Proces řešení poukazuje na zkušenosti v přepínání z jednoho modu/způsobu reprezentace do jiného.

Podle těchto kritérií jsem hodnotila všechny vytvořené úlohy. Gonzales (1994) navrhovala hodnocení každého bodu svých pravidel jedním až čtyřmi body, já jsem zvolila stupnici do pěti, protože i u Grundmeierova dotazníku se hodnotil vztah k matematice jedním až pěti body. Pro ilustraci přísnosti kritérií uvedu úlohu, kterou jsem ohodnotila 79 body, což je o jeden bod méně než maximum (80 bodů):[18]

„Kolik místa by se ušetřilo v jedné krabici, pakliže by vajíčka byly krychle? Pro zjednodušení berme, že normální vajíčka jsou koule o průměru d = 3 cm. Vajíčko v obalu znamená, že se kolem něho vytvoří krychlička. (viz náčrt)...

Závěr: Obal u „normálního" vajíčka zabere d^3 cm^3, což je 27 cm^3. Kdyby však bylo vajíčko krychle, tak ho obal obepíná těsně a i s obalem zabere genetické vajíčko pouze 14,12 cm^3. Se spotřebou 2 vajec na 5 dní na osobu to dělá v ČR úsporu 1898 m^3. 1 kamion = 120 m^3 => úspora

[18] Úlohy zde budou přepsány přesně podle toho, jak je žáci napsali, tedy včetně gramatických chyb a nepřesností.

jízdy 16 kamionů. Možná mohla být původně otázka kolik jízd kamionů se ušetří. ☺"

Pouze u kritéria číslo 14 (Řešení úlohy poskytuje studentům možnost klasifikovat, formulovat a definovat pojmy) se mi nezdálo, že by tato úloha splňovala celých pět bodů. Z pohledu tohoto kritéria jsem ani žádná jinou neoznačila plným počtem bodů. O definování pojmů ani při tvoření úloh na gymnáziu nešlo.

Podle English (1997) musí děti rozpoznat kritické položky informací, které jsou požadovány při řešení úlohy, měly by umět rozlišit povahu známé a neznámé v úloze. Analýza dat ukázala, že toto rozpoznání měli téměř všichni žáci jak gymnázia, tak základní školy.

Podobně by měly mít povědomí o formě úlohy a během tvorby svých vlastních úloh by měly rozpoznat kritické položky informací, jež jsou požadovány pro řešení úlohy. (English 1997) Z mého výzkumu vyplynulo, že žáci toto povědomí o formě úlohy měli a byli schopni kritické údaje rozpoznat.

Při svém výzkumu jsem se nezaměřovala na analýzu chyb, protože mi nešlo o to, diagnostikovat, co žáci neumí nebo s čím mají problémy, naopak mi šlo spíše o to, vyzdvihnout jejich schopnost tvořit úlohy.[19] Přesto u každé úlohy v tabulce níže uvádím, jakého typu chyba v řešení byla, protože u některých žáků se jednalo jen o numerickou chybu ve výpočtu nebo chybu malého významu, u jiných šlo o nepochopení celé látky – podobně jako uvádí Tichá (2003, Macháčková a Tichá 2007) ve svých výzkumech na téma zlomky.

4.4.3 Rozhovory

Poté, co žáci 3.A vytvořili úlohy a já jsem je ohodnotila, poprosila jsem pět žáků o rozhovor. Bohužel selhala technika a rozhovory nemám nahrané. Následný rozhovor s panem Trčou, učitelem matematiky ve třídě 3.A, se mi podařilo zaznamenat. Je k dispozici na přiloženém CD. Trča vyslovil několik didakticky zajímavých myšlenek a prozradil, jakým způsobem a proč se snaží učit. Část rozhovoru proto popíši v následujícím odstavci, který je věnován závěrům mé výzkumné sondy.

[19] I když pravdou je, že zvláště v 9.A a ve 3.B, jsem se z řešení úloh dozvídala zajímavé věci.

4.5 Závěry experimentu

V tabulkách vždy uvedu v prvním sloupci pořadové číslo žáka (pořadí je náhodné, jde jen o označení, o kterou práci se jedná), ve druhém seznam bodů přidělených žáky tvrzením v Grundmeierově dotazníku (kde minimum bylo 11 bodů a maximum 55) a v následujících třech (u 9.A dvou) sloupcích počet bodů přidělených vytvořeným úlohám obodovaných podle výše uvedené stupnice (Gonzales 1994). V následujícím sloupci rozepíši povahu chyb, či zda žák nějaké úlohy neřešil. U 3.A a 3.B v 7. sloupci uvedu u jednotlivých žáků součet bodů ze třech vytvořených úloh, v 8. sloupci pouze součet 1. a 2. úlohy (kvůli porovnání s 9.A).

4.5.1 Třída 3.A

Už jsem se zmínila, že jsem ve 3.A ráda pracovala, že žáci mají zájem o matematiku a jsou zvyklí na tvořivé vyučování a svým učitelem matematiky jsou vedeni k přemýšlení. To bylo na jejich pracích okamžitě vidět. V tabulce č. 1 uvedu výsledky jednotlivých žáků.

Tabulka č. 1

žáci 3.A	Grundm.	1. ú.	2. ú.	3. ú.	chyby, neřešené úlohy	celkem úlohy	pouze ú. 1, 2
1	47	67	79	66		212	146
2	52	79	0	0		79	79
3	48	76	0	0		76	76
4	52	69	71	0	neřešená úloha č. 2	140	140
5	44	67	73	0		140	140
6	47	76	79	74		229	155
7	51	74	79	79	neřešená ú. 1	232	153
8	40	61	71	0		132	132
9	41	67	0	0		67	67
10	25	67	68	0		135	135
11	40	72	0	0		72	72
12	38	70	68	69	nedořešená ú. 1	207	138
13	49	65	41	44	nedořeš ú. 1, neřeš. Ú. 2	150	106
14	51	60	61	69	neřešená ú. 1, 2, 3	190	121
15	48	neklas.	78	33	neřešená ú. 1, 2, 3	111	78
16	33	0	45	70	neřešená ú. 2	115	45
17	46	16	59	0	neřešená ú. 2	75	75
18	48	0	62	0	neřešená ú. 2	62	62
19	21	37	0	31		68	37
20	33	opsané	28	35	"objem" obdélníka	63	28
21	43	0	35	0		35	35
22	18	0	67	0	neřešená ú. 2	67	67
23	26	0	0	0		0	0
24	24	0	0	0		0	0
Celkem	965					2657	2087
Průměr	40,2083					110,7083	86,9583

Ve 3.A se výzkumu účastnilo 24 žáků (z celkových 30 žáků, 6 žáků tedy chybělo). V Grundmeierově dotazníku byl vztah k matematice označen průměrně 40,21 body. Čtyři žáci označili svůj vztah k matematice více (nebo rovno) 50 body, jedenáct více (nebo rovno) 45 body.

Na tvorbu úloh měl jistě vliv čas, jednalo se o dobu mezi 14:25 a 15:10, žáci často raději netvořili úlohu vůbec, než aby vytvořili nějakou jen napůl dobrou, nebo se jim jednoduše nechtělo tvořit. Žáci 3.A měli též o 3-5 minut méně času, než jsem plánovala, protože vyplnění dotazníku trvalo déle. 14 žáků nestihlo vůbec vytvořit úlohy ke třetí části zadání. Žáci úlohy tvořili většinou postupně a na třetí úlohu jim nezbyl čas. Ve 27 případech (z celkových 72) se žáci vůbec nepokusili úlohu vytvořit (dvě úlohy nemohly být klasifikovány), z toho dva žáci netvořili úlohy vůbec (nevytvořili ani jednu ze tří). 16 úloh jsem označila více (nebo rovno) 70 body. 32 úlohám jsem přidělila více (nebo rovno) 60 bodů. Pouze 4 z vytvořených úloh jsem ohodnotila méně než 35 body

(6 méně nebo rovno 35, vše počítáno samozřejmě kromě nevytvořených úloh). Průměr součtů tří vytvořených úloh byl 110,71, součtů první a druhé úlohy 86,96.

Stoyanova (2005) píše, že poté, co zkoumaní žáci ukončili program zaměřený na tvorbu úloh, soustředili více pozornosti na kvalitu vytvořených úloh a jejich obtížnost. Podobný závěr bych mohla napsat o tvoření úloh i ve 3.A, přestože u nich žádný speciální kurz ohledně tvoření úloh neprobíhal. (Proto jsem pak chtěla od pana Trči zjistit, jak žáky k tvoření úloh vede on.) Na vytvořených úlohách bylo navíc vidět, že jsou žáci 3.A zvyklí experimentovat a nebojí se jít dál, než kam sahalo dosud probrané učivo. Některé úlohy byly proto dobře vytvořené, ale nad jejich síly. Šest žáků z 24 nemělo řešenou jednu úlohu, dva žáci neměli řešenu ani jednu ze tří, 2 žáci měli jednu nedořešenou úlohu. Příčiny nebyly jen v tom, že by nevěděli, jak úlohy vyřešit, ale i v nedostatku času. Ale ty, které řešili, byly všechny dobře. Úlohy tedy byly, až na výjimky, správně formulovány a správně řešeny. Neobjevovaly se drobné chyby ani velké neznalosti.

Pět žáků, jejichž úlohy jsem na základě své analýzy označila za neobyčejně zajímavé (jedná se o žáky číslo 1, 4, 5, 6, 7), má velice pozitivní vztah k matematice (44 až 52 bodů v Grundmeierově dotazníku), matematika je baví a zajímá. Jeden z těchto pěti žáků v pozdějším rozhovoru přiznal, že tvoření úloh pro něj není ničím novým, že má zkušenosti z doučování a doučuje především žáky základní školy. Byl ale ve třídě výjimkou, protože zbytek třídy s tvořením úloh v takové podobě, jako jsem to po nich požadovala já, zkušenosti neměl. Jiný žák, který měl zajímavé úlohy, skromně tvrdil: „Ve třídě jsou lepší než já." Na otázku, jak tvořil úlohy, odpověděl: „Je důležité mít zkušenosti s matematikou a znát matematické zákony a pak si s nimi můžu hrát, teoretizovat; a také je potřeba nápad." Tento žák má babičku, která vyučuje matematiku, a byl odmala veden k matematice, účastnil se Matematického klokana, olympiády, korespondenčních seminářů atd.

Dva žáci si pamatovali látku z konce roku – princip inkluze a exkluze, precizně dodefinovali další množiny žáků a bezchybně úlohu vyřešili; ostatní žáci použili data k jednodušším úlohám. Uvedu např. úlohu žáka č. 1 (79 bodů, 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+4+5+5) a žáka č. 19.(31 bodů, 5+4+1+4+1+3+1+2+2+1+1+1+1+1+2).

7 dětí se učí FJ *4 se učí FJ a AJ*

10 dětí se učí NJ *5 se učí NJ a FJ*

5 dětí se učí RJ *3 se učí RJ a NJ*

16 dětí se učí AJ *2 se učí FJ, AJ, NJ*

Kolik dětí je ve třídě?

$x = A \cup B \cup C - (A \cap B + A \cap C + B \cap C) + A \cap B \cap C$

$x = 7 + 10 + 5 + 16 - 4 - 5 - 3 + 2$

$x = 28$ *lidí*

5 dětí z AJ je doma a kouká na televizi, 4 děti z FJ jsou v kině, 9 dětí z NJ je v hospodě a 1 dítě z RJ na nákupech. Kolik dětí je ve škole?

$(16 - 5) + (7 - 4) + (10 - 9) + (5 - 1) = 11 + 3 + 1 + 4 = 19$ *lidí z 38 je ve škole*

Slabší žáci v rozhovorech projevili přání, aby se v hodině víc procvičila látka – úlohy střední obtížnosti, ne aby se probíraly obtížné úlohy na celou hodinu. To mě inspirovalo k tomu, abych se pak jejich vyučujícího podrobněji vyptala, jakým způsobem koncipuje své hodiny, jak vyučuje matematiku a proč zrovna tímto způsobem.

U třetího úkolu byli žáci 3.A schopni si z výchozí, jednoduché úlohy vystavět pomocí dalších obměn a dodatečných otázek úlohu těžkou. Pokud jsou k obměňování úloh vedeni, není se čemu divit. Bylo evidentní, že žáci, kteří vytvořili těžké úlohy, stavěli úlohu postupně. Například úloha žáka č.7 (79 bodů, 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+ +5+5+5+4+5+5):

Bazén ve tvaru kvádru, kde delší strana je dlouhá 8 m, hloubka bazénu je 4 m, šířka 4m. Je navržen tak, že mozaiku tvoří šachovnici, na délce jsou dvě šachovnice vedle sebe. Kolik barvy bude potřeba na černé dlaždice, když se spotřebuje 5 l barvy na 1 m² dlaždic?"

„Bazén se napustí přívodem A za 10 hodin, přívodem B za 13 hodin a výpustí V se vypustí za 12 hodin.

a) Za jak dlouho se napustí bazén, pakliže plavčík udělal chybu a bazén napouští přívody A a B a současně vypouští výpustí V?

b) Jak se změní úloha, když si plavčík své chyby všimne a výpusť V uzavře po pěti hodinách?

4.5.2 Třída 3.B

O 3.B řekl pan Trča s nadsázkou: „Oni jsou u toho ‚S = a²' na hranici svých možností." „Nemůžou a nechce se jim." „Bojují o to, aby měli samé trojky, ty jim stačí." Dále mi sdělil i důvod jejich neochoty v matematice se snažit. Všude prý se dětem říká, že učit se vlastně není třeba. Navíc nemají důvod, proč se snažit. Na základní škole jim nic nehrozí, přijímací zkoušky na střední školu, pokud mají dobré známky, dělat nemusí, nebo si vyberou takovou školu, kde mají jistotu přijetí.

Tabulka č. 2

žáci 3.B	Grund.	1. ú.	2. ú.	3. ú.	chyby	celkem bodů	povaha chyb	pouze ú. 1, 2
1	52	79	75	71		225		154
2	36	70	61	45		176		131
3	47	67	42	59		168		109
4	50	33	49	55		137		82
5	25	31	32	35		98		63
6	38	32	32	31		95		64
7	40	31	33	38		102		64
8	23	31	41	0		72		72
9	43	43	29	55		127		72
10	24	29	28	36		93		57
11	31	33	43	0		76		76
12	25	29	32	52		113		61
13	48	33	39	59	ú. 3	131	Kombinatorika	72
14	20	0	72	71	ú. 3	143	Procenta	72
15	36	32	54	72	ú. 3	158	Kombinatorika	86
16	34	32	67	55	ú. 2	154	obsah obdélníka	99
17	22	70	35	0	ú. 1	105	výpočet času- chybné celé řešeni	105
18	23	29	28	49	ú. 1	106	nesmyslné sčítání prům. rychlostí	57
19	24	29	39	0	ú. 1	68	nepřímá úměrnost- výpočet	68
20	21	31	36	32	ú. 3	99	Procenta	67
21	11	27	29	0	ú. 2	56	obsah rovnoram. lichoběžníka	56
22	32	43	27	33	ú. 1	103	obsah≠obvod	70
23	18	39	31	0	ú. 1	70	převody - hodiny – minuty	70
24	18	32	51	35	ú. 2	118	sčítání obvodů	83
25	34	33	62	37	ú. 2	132	Převody	95
26	20	38	58	0	ú. 2	96	Dosazení	96
27	22	0	0	0		0		0
Celkem	817					3021		2101
Průměr	30,2593					111,8889		77,8148

Ve 3.B se výzkumu účastnilo 27 žáků (z celkových 29 žáků, 2 žáci chyběli). Podrobné výsledky analýzy jejich práce jsou uvedeny v tabulce č. 2. V Grundmeierově dotazníku byl vztah k matematice označen průměrem 30,26 body. Dva žáci označili svůj vztah k matematice více (nebo rovno) 50 body, čtyři (více nebo rovno) 45 body.

Žáci 3.B měli celých 35 minut času, přesně jak jsem plánovala. Na tvorbu úloh ale měla vliv především motivace. Žáci sice tvořili všechny úlohy, ale evidentně to většinu moc nebavilo a nezajímalo. Raději vytvořili primitivní úlohu na obsah obdélníka nebo čtverce a tím pro ně úkol skončil, měli splněno. Tím ale, že ze 3.B pouze jeden žák netvořil úlohy vůbec a celkem nevytvořených úloh bylo pouze 9 z 81, průměr třídy ve tvoření úloh nebyl tak špatný, jak jsem se zpočátku obávala. Žáci tvořili takové úlohy, u kterých si byli jisti, že jsou schopni je správně vyřešit. Přesto se u 14 žáků z 27 (vlastně ze 26, jeden netvořil úlohy vůbec) objevila alespoň jedna závažná chyba (viz tabulka č.2). Co se týče kvality úloh, 7 jsem jich označila více (nebo rovno) 70 body a 12 úlohám jsem přidělila více (nebo rovno) 60 bodů. Ale 30 z vytvořených úloh jsem ohodnotila méně než 35 body (33 méně nebo rovno 35, vše počítáno samozřejmě bez nevytvořených úloh). Průměr součtů tří vytvořených úloh byl 111,89, součtů první a druhé úlohy 77,81.

Pro ilustraci uvedu několik úloh, které žáci 3.B vytvořili. Tatu úlohu vytvořil žák č. 8 (41 bodů, 5+5+3+5+2+3+1+2+2+2+2+2+2+1+2+2)

Zahrada o tvaru obdélníku má rozměry 50 x 40 metrů. Kolik pletiva bude potřeba na oplocení zahrady a jaká je její výměra?

$O = 2 . (a + b)$	$s = a . b$
$O = 2 . (50 + 40)$	$s = 50 . 40$
$O = 180$ *m pletiva*	$s = 2000\ m^2$

To, že si žák spletl velká a malá písmena u obvodu a obsahu, jsem nepovažovala za chybu. Tato úloha je typickou úlohou, jakou byli žáci 3.B schopni vymyslet. Navíc téměř polovina třídy měla v řešení chyby.

Další žák vymyslel úlohy (1. úloha ohodnocena 29 body 5+4+1+4+1+3+2+1+1+1+ +1+1+1+1+1+1, 2. 28 body 5+3+1+3+1+3+2+1+1+1+1+1+1+1+1+2):

1. Jeden pracovník v továrně udělá za 1 hodinu 200 výrobků. Kolik výrobků udělá za celý pracovní týden? (myšleno 40 hodin)

2. Vypočítejte objem kvádru, kde strana a = 5,6 cm; b = 6,4 cm; c = 7,8 cm.

Žáci a žákyně 3.B tvořili úlohy tohoto typu, ač jsem jim zdůrazňovala, že mají tvořit úlohy co nejtěžší, které ještě dokáží vyřešit, a že vlastně soutěží proti 3.A, že mají dokázat, že jsou lepší než 3.A. Ale i když jsem se je snažila motivovat sebevíc, během tvoření chodila mezi lavicemi a povzbuzovala je k vytvoření úloh vyšší obtížnosti, bylo vidět, že žáci nemají zájem, že je zřejmě matematika (až na výjimky) moc nebo vůbec nezajímá.

Navíc bylo zjevné, že polovina žáků ve třídě má problémy se základními matematickými tématy, jako jsou procenta, obvod, obsah, převody jednotek, dosazení do vzorce, nepřímá úměrnost, kombinatorika, fyzikální znalosti – např. průměrná rychlost. 14 žáků mělo chybu v řešení nejméně jedné úlohy, přestože se žáci 3.B jen výjimečně pouštěli do obtížnějších situací.

4.5.3 Třída 9.A

Tauber, učitel matematiky v 9.A, se původně domníval, že žáci 9.A budou mít s tvořením (možná i řešením) úloh problémy. I když nutno podotknout, že žáci úlohy na pohyb a společnou práci na začátku roku opakovali, takže by je měli mít v čerstvé paměti. Někteří však museli hodně vzpomínat, jak se vlastně tyto úlohy počítaly. Jiní se rovnou dívali k „chytřejšímu" sousedovi, aby zjistili, jak se takové úlohy počítají. U obsahů a obvodů (do objemů se většina žáků ani nepouštěla) se ale žáci 9.A, na rozdíl od žáků 3.B, pouštěli do složitějších úloh, přinejmenším vymýšleli úlohy, kde bylo za úkol vypočítat obsah (obvod) načrtnutého obrazce a jednalo se často o rovnostranný trojúhelník spojený se čtvercem o straně téže délky.

Tabulka č. 3

žáci 9.A	Grund.	1. ú.	2. ú.	chyby, neřeš.	povaha chyb	ú. 1, 2
1	45	57	0			57
2	39	30	0			30
3	36	32	40			72
4	39	0	38			38
5	22	27	0			27
6	31	31	30			61
7	41	35	31			66
8	19	58	39	neřeš. 1		97
9	32	25	36			61
10	31	32	20	ú. 1, 2	nepřehledné, výsledek nenalezen; 40·40 = 160	52
11	31	32	31	ú. 2	obsah kruhu, nedopočteno	63
12	19	32	39	ú. 2	pythagorova věta	71
13	27	32	29	ú. 2	obsah ≠ obvod	61
14	51	38	29	ú. 2	odmocnina $\sqrt{105} \neq 10{,}5$	67
15	25	30	32	ú. 1, 2	1 hod = 20 min; 60·40 = 240, zapomen. závorky	62
16	38	57	40	ú. 2	objem kvádru - vzorec, ab ≠ a + b	97
17	23	29	60	neřeš. 1, 2		89
18	45	32	39	ú. 1, 2	výpočet, nejednozn.; obvod ≠ obsah; obsah trojúh.	71
19	44	32	49	ú. 2	obsah trojúhelníka	81
20	43	32	39	ú. 2	obsah trojúhelníka	71
21	39	32	62	ú. 1, 2	převod hod – min; odpověď ≠ otázka	94
Celkem	720					1388
Průměr	34,2857					66,0952

Ve 9.A se výzkumu účastnilo 21 žáků (z celkových 23 žáků, 2 žáci chyběli). V Grundmeierově dotazníku byl jejich vztah k matematice označen průměrně 34,29 body. Jeden žák označil svůj vztah k matematice více (nebo rovno) 50 body, tři více (nebo rovno) 45 body. 8 žáků však označilo svůj vztah k matematice body mezi 36 a 44 (včetně), tedy polovina třídy má matematiku poměrně ráda.

Jak jsem uvedla dříve, úlohy tvořili všichni. Pouze 4 žáci nestihli utvořit 1 úlohu. Na druhé straně je pravda, že tvořili úlohy jen ke dvěma situacím, ne ke třem jako 3.A a 3.B. Svou roli hrála jistě i přítomnost učitele, autority, kterou žáci uznávají. Možná proto nebylo žáka, jenž by netvořil úlohy vůbec.

Žádnou z úloh jsem neoznačila více (nebo rovno) 70 body. Dvěma úlohám jsem přidělila více (nebo rovno) 60 bodů, pěti více (nebo rovno) 50 bodů. 22 z vytvořených úloh (z celkových 42) jsem ohodnotila méně než 35 body (23 méně nebo rovno 35, vše počítáno bez čtyř nevytvořených úloh). Průměr součtů první a druhé úlohy byl 66,1. Chyby měli žáci celkem v 15 úlohách (ze 42), ve 3 případech se nepokusili o řešení.

Chyby pramenily často z nepozornosti, mnoho problémů měli žáci se vzorcem pro výpočet obsahu trojúhelníka a s převody, někteří měli problémy s násobením (40·40 = 160 nebo 60·40 = 240) nebo s odmocninami, často zapomněli napsat jednotky, nebo u obsahu uvést, že se jedná o m, cm „čtvereční".

U 9.A stojí ještě za zmínku skóre žáka číslo 8, který má vyloženě negativní vztah k matematice (19 bodů v Grundmeierově dotazníku), ale vytvořil velice zajímavé úlohy, i když úlohu číslo jedna nevyřešil. (Navíc už neměl co dělat, tak jsem mu zadala úlohu číslo 3 – později jsem ji ohodnotila 51 body – a měl ji správně i vyřešenou!)

Pro ilustraci uvedu dvě úlohy, první patří k těm obtížnějším, druhá naopak k nejméně obtížným. Žák číslo 1 utvořil úlohu, kterou jsem ohodnotila 57 body (5+4+5+5+4+5+3+ +3+3+3+3+3+3+2+3+3).

1. V 6 hodin vyráží vůz s koňmi na jezdecký sraz a jede 70 km/h. V 6 h 30 min vyráží za nimi motorka a jede 90 km/h. Kdy motorka dojede vůz?

$$s_{,} = s_{,,}$$

$$70\,(x + 0{,}5) = 90$$

$$70x + 35 = 90x$$

$$70x - 90x = -35$$

$$-20x = -35 \,/ : (-20)$$

$$x = 1{,}75\ h$$

Motorka dojede auto za 1,75 h.

Žák číslo 5 vytvořil tuto úlohu (27 bodů 3+1+3+3+1+1+1+2+1+1+1+1+2+1+3+2):

Čtverec o straně 4 cm.

$S = a.a$

$S = 4.4$

$S = 16$

4.5.4 Porovnání tříd

Rozpoznání povahy známé a neznámé, o kterém English (1997) mluví (jak jsem uvedla v bodě 4.5), se u žáků všech zkoumaných tříd projevilo. Dokonce i ve třídě 3.A, kde žáci tvořili úlohy poměrně obtížné. Úlohy byly převážně jasně strukturované. Rozdíly se projevily v úrovni vytvořených úloh. Z nich bylo zřejmé, že znalosti a dovednosti žáků 3.A jsou na vyšší úrovni. Přehledné porovnání všech tří tříd z hlediska průměru z vztahu k matematice v prvním řádku, průměru bobů získaných vytvořením 1. a 2. úlohy a všech tří úloh (u 3.A a 3.B), je v tabulce č. 4.

Tabulka č. 4

Průměr	3.A	3.B	9.A
Grundm.	40,21	30,26	34,29
1., 2. ú.	86,96	77,81	66,10
1.- 3. ú.	110,71	111,89	xxxxx

Když Grundmeier (2002) porovnal schopnost tvořit úlohy u studentů matematických a nematematických oborů, vyšlo najevo, že obě skupiny studentů jsou schopny tvořit úlohy na stejné úrovni. Z mého porovnání úloh žáků 3.A a 3.B jasně vyplynulo, že žáci 3.A jsou lepšími tvůrci, i když v průměru se ukazatele vyrovnaly. Vliv na výsledek totiž měly nevytvořené úlohy a podle mého názoru i pozdní odpolední hodina zadání úkolu v 3.A.

U Grundmeiera (2002) schopnost tvořit úlohy nezáležela na matematických znalostech. Já však musím argumentovat tím, že žáci 3.A volili mnohem náročnější a originálnější úlohy než žáci 3.B a že jim záleželo na kvalitě úloh.

Korelace mezi přístupem k matematice a schopností tvořit úlohy u Grundmeiera (2002) nebyly potvrzeny. Ve skutečnosti byly výsledky studentů, kteří nemají kladný vztah k matematice, téměř identické s výsledky studentů, kteří považují matematiku za svůj oblíbený předmět. V mém případě jsem si na výsledcích všech žáků během výzkumu všimla, že pokud měli kladný vztah k matematice, snažili se i vymyslet zajímavé úlohy. Často i za cenu, že nebudou schopni úlohu vyřešit. U žáků s menším zájmem či nezájmem o matematiku se často naopak jednalo o triviální úlohy, které byly vytvořeny vyloženě z donucení.

Ve výzkumu Lowrieho (2002) 83 % dětí své první vytvořené úlohy správně vyřešilo. (Většina dětí totiž tvořila úlohy, u kterých si byla jista, že je správně vyřeší.) V případě 3.A nenastala žádná závažná chyba, mnoho úloh ale nebylo vyřešených (34,88 % z vytvořených klasifikovaných úloh). U 3.B byla chyba ve výpočtu u 15 (ze 70) vytvořených úloh, tedy v 21,43 % případů. U úloh 9.A byly 3 ze 42 úloh neřešené a chyb bylo 17, což je 43,59 % (z 39 vytvořených klasifikovaných úloh). Tudíž výsledky úspěšných řešení v mém výzkumu s Lowrieho výsledky nesouhlasí, nutno ale podotknout, že u něj úlohy tvořili a řešili žáci 1. a 3. ročníku.

4.5.5 Rozhovor

Protože mě tvoření úloh zaujalo spíše jako dlouhodobá didaktická metoda, která vede žáky k tomu, aby si kladli otázky, udělala jsem nakonec rozhovor s panem Trčou – zajímalo mě, jak vede žáky k tvořivosti on. Z výsledků práce jeho žáků jsem usoudila, že jeho metoda je účinná.

Trčův styl výuky

Na otázky, jak učí matematiku, jak vede děti k tvořivosti a k tomu, aby přemýšlely nad matematikou, odpověděl Trča slovy: „Snažím se, pokud to jenom trošku jde, aby to bylo zajímavé. „Ale na to se samozřejmě chytí jenom někdo." Trča se snaží v první řadě předat všem žákům základní matematické znalosti, to co by měl znát každý gymnazista. Ale to mu v hodinách nestačí, chce rozvíjet i matematické uvažování žáků, chce po nich, aby přemýšleli. K tomu je vede většinou problémovými úlohami. Například v olympiádách se mohou setkat „s matematickou krásou na úrovni jejich znalostí". Nechce žákům komplikovat život vysokoškolskou matematikou (například algebraickými strukturami nebo teorií množin), ale to prý nevylučuje, že by se nemohl zmínit o tom, „že máme různá nekonečna a jednoduchým příkladem mohu ukázat, že všech sudých čísel je stejně jako přirozených, což je pro ně překvapivé, a že čísel dělitelných tisícem je stejně jako přirozených…", až se tak může dostat ke spočetným a nespočetným množinám.

„A upřímně řečeno, nevím, jestli učím dobře." Trča poukazuje na nutnost improvizace v hodinách a na učitelovu schopnost přizpůsobit se dané situaci: „Učím, jak to cítím.“ V každé třídě jinak. Záleží prý na třídě, typu třídy: „Já bych řekl, že v každé třídě učím jinak.“

U žáků, kteří nemají zájem a jsou na tom špatně, funguje jenom jedno: „Dát jim úkol, který je na jejich úrovni, aby ho zvládli a mohli uplatnit daný algoritmus, a stát nad nimi, aby to vyřešili.“ Teď děti nemají, podle Trči, ani ten nutný základ ze základních škol.

Učitel, jehož hodiny se Trčovi líbily, byly hodiny docenta Mráze na vysoké škole. Byly mu inspirací. Mráz „měl hodiny hezky udělané, měly jasnou logiku“, z jednoduchých příkladů vytvořil přidáváním dalších a dalších podmínek, členů, obměnou komplexní a složité úlohy, které pak už hraničí s praxí. A musím říci, že Trča ve svých hodinách postupuje podobně. „Někdy přeženu obtížnost a pak řeknu: ‚No a tohle vašimi prostředky nejsme schopni vyřešit.‘“

„3.A se v té verzi, jak jsi jim to podala ty, s tvořením úloh ještě nesetkali.“ Ale často se jich sám ptá, „Jak bychom to mohli udělat těžší?“ nechá na žácích, aby stanovili podmínky, obměnili úlohu atd. Ptá se: „Nedalo by se to nějak zobecnit?“ Používá tvoření úloh jako mezikrok, ne jako produkt, a to ze dvou důvodů: velké množství žáků a malá hodinová dotace. „Já se přiznám, že v té matematice to tak, tak stíhám.“

Je pravda, že v hodinách matematiky není tolik času na procvičení. (Tři hodiny týdně není mnoho.) Někteří žáci by byli rádi za lehčí, procvičovací úlohy. Trča je ale jiného názoru: „Ty lehké (úlohy) 80, možná 90 procent z nich vymyslí, kdežto ty těžké by vymyslelo 10 procent. Když s nimi proberu ty těžké, tak 50 procent je schopno to vstřebat a pak použít.“

V matematice také záleží na pracovitosti. Prý se radikálně změnila její míra, žáci nedělají domácí úkoly. „No, pracovat je třeba, a nechce se, nechce se, bolí to!“ Pro učitele navíc „přibyla práce, která nebývávala“. Uvedl např. Rámcový vzdělávací program, tiskopisy, když se jede na exkurzi, je potřeba psát hlášení, provést poučení o bezpečnosti atd.

Názor Trči na tvoření úloh jako metodu

Trča je názoru, že tvoření úloh je metodou, jak žáky vést k přemýšlení o matematice, k „tvořivosti". „To nejdůležitější, co škola může dát, je umět klást si otázku, co se stane, když?" To, co někteří učitelé dělají, je prý takový, ze západu přebraný trend, jmenuje se to projektové vyučování. Používají se k němu situace z reálného života, jde v něm i o prolínání předmětů, což je „krásné a úžasné, ale je to jakási forma odlehčení. Na 1. stupni to má své opodstatnění, ale čím je to výš, je každý obor sám za sebe dost košatý." Proto se zdá Trčovi takové tvoření úloh na druhém stupni nebo na gymnáziu skoro kontraproduktivní, raději by viděl spojení reality s matematikou až v dané profesi, v praxi. Ale samozřejmě by učitel neměl zakrývat, že rovnice jsou potřeba ve fyzice. Takové úlohy podle něj slouží k oživení, motivování žáků. A aplikace jsou prý to nejsložitější.

Na otázku, zda souhlasí s myšlenkou, že tvoření úloh je důležitější než jejich řešení, poukazuje na ovzduší ve společnosti v 80. letech, kdy bylo „neradno šťourat se do čehokoliv". Nijak se nezastává zautomatizovaných postupů řešení a dodává, že se „musí najít zdravá rovnováha".

4.5.6 Shrnutí výzkumu

Z výzkumu vyplynulo, že schopnost tvořit úlohy se vztahem k matematice souvisí, protože většina žáků, kteří mají pozitivní vztah k matematice, tvořila náročnější a zajímavější úlohy než žáci, pro něž není matematika nejoblíbenějším předmětem.

Žáci třídy 3.A tvořili mnohem obtížnější úlohy než žáci 3.B. Přesto úlohy žáků 3.B byly zajímavější než úlohy žáků 9. ročníku (možná díky tříletému věkovému rozdílu).

Chyby v řešení úloh se u žáků 3.A neobjevovaly proto, že se někteří žáci nepokoušeli ani řešit, u žáků 3.B a 9.A se chyby v řešení vyskytovaly poměrně často, i když tvořili úlohy z pravidla takové, aby je uměli i vyřešit. Naopak žáci 3.A se nebáli vytvořit úlohy větší náročnosti a nechat je pak nevyřešené.

5 Závěr

Zabývat se tématem tvoření úloh bylo pro mě moc zajímavé. Čerpala jsem převážně z odborných článků, které se k tématu vyjadřovaly nebo kde na toto téma někdo popsal svůj výzkum, a ze dvou knih, k nimž jsem se dostala. Obě však obsahovaly převážně konkrétní úlohy, které by učitel nebo sami žáci mohli obměňovat, činit těžšími, zajímavějšími nebo obecnějšími – přesně totéž, o čem mluvil Trča, učitel matematiky ve 3.A. Takové úlohy je však opravdu nejlépe vyzkoušet v praxi nebo v ideálním případě by si je učitel měl vymýšlet sám. K tomu jsou ale potřeba zkušenosti.

Díky této práci jsem si mohla utvořit vlastní názor na možnosti použití tvoření úloh ve výuce. Pro mě jako budoucí učitelku matematiky je tvorba úloh důležitá jako metoda, jak vést žáky k přemýšlení o matematice, ale i jako diagnostická metoda, která je vhodná spíše pro vědecké účely nebo pro rychlou diagnostiku porozumění dané látce. Z vytvořených úloh lze zjistit , co není žákům jasné nebo co špatně pochopili, a pak se o tom s nimi může učitel bavit, nechat je navrhnout, jak by se zadání úlohy mělo pozměnit apod.

Je pravda, že pokud učitel nechává žáky tvořit úlohy, znamená to pro něj víc práce. Musí projít všechny úlohy, které žáci vytvořili, a zkontrolovat každé řešení individuálně. Ve srovnání s „normálním" opravováním, kdy má jeden typ úlohy a zkontroluje výsledek, pokud je ten špatně, projde postup řešení a má opraveno – u všech jde o tu samou úlohu. Ale podle mého názoru takový experiment jednou za čas stojí zato. Jde o to, aby se tvorba úloh nestala rutinní záležitostí (jak uvádí Schupp 2003). Domnívám se, že by bylo škoda nedávat v hodinách matematiky prostor k podobným činnostem, jako je tvoření úloh, zkoumání otázek „co když…?" Je pravda, že takové vyučování je časově náročnější, že ne vždy je tak efektní jako tradiční frontální vyučování. Také je takový styl výuky i pro učitele daleko náročnější než „normální" hodiny, zvláště ze začátku, než naučí žáky o matematice přemýšlet.

Pro mě osobně bylo velice zajímavé porovnání úloh vytvořených žáky 3.A, 3.B a 9.A. Mým cílem nebylo vyslovit obecně platné závěry, chtěla jsem porovnat schopnosti žáků tvořit úlohy žáků tří konkrétních tříd. U třídy 3.A jsem postupně zjistila, že Trčův výukový styl je důležitou cestou, jak žáky vést k tvoření úloh, i když nepřímo. Sám totiž nepovažuje tvoření úloh za prvořadý cíl, používá je spíše jako mezikrok při výuce, při „zesložiťování“ úlohy. Z výzkumu totiž vyplynulo, že žáci 3.A, třídy se zaměřením na matematiku a přírodní vědy, tvořili úlohy o vyšší náročnosti, ale nezajímal je počet vytvořených úloh, soustředili se na kvalitu (i díky pozitivnímu vztahu k matematice); zatímco žáci zbylých dvou tříd bez jakékoli specializace (s menším zájmem o matematiku) tvořili větší množství úloh na úkor jejich obtížnosti.

6 Literatura

AMBRUS, A.; HORTOBÁGYI, I. Einige Tendenzen im problemlösenden Mathematikunterricht in Ungarn. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 47, Heft 6, Dezember 2001. Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, 2001, s. 6-20

BAPTIST, P.; ULM, V. Anregungen zu individuellen Lernwegen. Folgerungen aus den BLK-Modellversuchen SINUS und SINUS-Transfer. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 51, Heft 2/3, 2005. Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, 2005, s. 108-125

Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Wolters Kluwer Deutschland GmbH, Luchterhand 2004. http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf [28. 11. 2008]

BROWN, S. I.; WALTER, M. I. *The Art of Problem Posing.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1990. ISBN 0-8058-0258-4

BÜCHTER, A.; LEUDERS, T. Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, 2005. ISBN 978-3-589-22122-6

CACHOVÁ, J. Katalog studentských prací MATĚJ – náměty a nápady (nejen) pro praxi. Česká Republika: http://lide.uhk.cz/home/pdf/ucitel/cachoja1/www/Matej.htm [18.11.2008]

DE VILLIERS, M. Problem Posing Variations on Fermat's Last Theorem. *KZN Mathematics Journal.* Durban, 1995

DUNCKER, K. On Problem Solving. *Psychological Monographs.* 58, 1945.

ELLERTON, N. F.; CLARKSON, P. C. Language Factors in Mathematics Teaching and Learning. In: BISHOP, A. J.; CLEMENTS, K.; KEITEL, CH.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. *International handbook of mathematic education.* Part II, Kluwer International Handbooks of Education. Kluwer Academic Publishers, 1996. ISBN 0-7923-3533-3, s. 987-1033

ENGLISH, L. Development of Seventh-Grade Students' Problem Posing. In: PEHKONEN, E. (Ed.) *Proceedings of Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Helsinki: University of Helsinki, 1997, s. 249-256

GONZALES, N. A. Problem Posing: A Neglected Component in Mathematics Courses for Prospective Elementary and Middle School Teachers. *School Science and Mathematics*, Feb 1994; 94, 2. New Mexico: University of New Mexico, Academic Research Library, 1994, s. 78-84

GONZALES, N. A. Problem Formulation: Insights from Student Generated Questions. *School Science and Mathematics*, Mar 1996; 96, 3; Academic Research Library, 1996 s. 152-157

GONZALES, N. A. Blueprint for Problem Posing. *School Science and Mathematics*, Dec 1998; 98, 8. New Mexico: University of New Mexico, Academic Research Library, 1998, s. 448-456

GRUNDMEIER, T. University Students' Problem Posing Abilities and Attitudes Towards Mathematics. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Studies*, June 2002. ProQuest Educa, 2002, s. 122-134

HALMOS, P. *I Want to Be a Mathematician: An Automathography.* New York: Springer- Verlag 1985.

HART, K (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics.* London: John Murray, 1981.

HENDERSON, K. B.; PINGRY, R. E. Problemsolving in mathematics. In: FEHR, H. G. (Ed.) *The learning of mathematics: Its theory and practice.* Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1953, s.228-270

HUSSMANN, S. Selbstgesteuertes Lernen – ein Grundbedürfnis des Menschen. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 50, Heft 3, Juni 2004. Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, 2004, s. 5-22

CHARLES, R., LESTER, R. *Teaching problem solving: What, why & how.* Palo Alto, CA: Dále Seymour, 1982.

ISODA, M; NAKAGOSHI, A. A case study of student emotional change using changing heart rate in problem posing and solving Japanese classroom in mathematics. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Eds.) *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (24th, Hiroshima, Japan, July 23-27, 2000). Hiroshima: Hiroshima University, 2000, s. 3-87-94

KAUNE, Ch. Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe". *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 47, Heft 1/2001, Februar 2001. Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, 2001, s. 35-46

KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from? In: SCHOENFELD (Ed): Cognitive science and mathematics education. Hilsdale: N.J. Lawrence Erlbaum Associates, 1987, s. 123-147

KRUMMHEUER, G. *Der Alltag im Mathematikunterricht, Beobachten-Verstehen-Gestalten.* München: Elsevier GmbH, 2005. ISBN 3-8274-1573-X

KRUTETSKIJ, V. A. *The Psychology of Mathematics Abilities in Schoolchildren* Chicago: University of Chicago Press, 1976.

LONGMAN Dictionary of Contemporary English. Harlow, Essen: Pearson Longman 2005 ISBN 1-405-811 262

LOWRIE, T. Problem Posing as a Tool for Learning, Planning and Assessment in the Primary School. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Eds.) *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (24th, Hiroshima, Japan, July 23-27, 2000). Hiroshima: Hiroshima University, 2000, s. 247-255

LOWRIE, T. Young Children Posing Problems: The Influence of Teacher Intervention on the Type of Problems Children Pose. *Mathematics Education Research Journal* 2002, Vol. 14, No. 2. s. 87-98

MACHÁČKOVÁ, J.; TICHÁ, M. Assessment of knowledge and conceptions through problem posing: The case of fractions. In: NOVOTNÁ, J. *SEMT'07 International Symposium Elementary Maths Teaching.* Prague: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007, ISBN 80-7290-307-8; s. 178-186

MAMONA-DOWNS, J. On Analysing Problem Posing. In: HIRABAYASHI, I.; NOHDA, N.; SHIGEMATSU, K.; LIN, F. L. (Eds.) *Proceedings of the Seventeenth International Konference of the Psychology of Mathematics Education* (vol. III). PME, Tsukuba, Japan, 1993, s. 41-47

MASON, J. Mathematical teaching practicies at tertiary level. In: HOLTON, D. (Ed) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, Volume 7. Dordrecht: Kulwer Academic Publishers, 2001, ISBN 0-7923-7191-7; s. 78-85

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. *Mathematisch Denken, Mathematik ist keine Hexerei. (Thinking mathematically.)* München: Oldenburg Verlag, 2006. ISBN 978-3-486-57854-6

MESTRE, P. J. Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Applied Developmental Psychology*, 2002 23, 9-50.

National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: Va, NCTM, 2000.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. *Matematika pro 6. ročník základní školy. Úhel, trojúhelník. Osová souměrnost. Krychle a kvádr.* Praha: Prométheus, 1997.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C.; MOUSOULIDES, N. & PITTA-PANTAZI, D. A structural model for problem posing. In: *The 28th International Conference Of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 4, 14–18 July 2004. Bergen, Norway, 2004

PEHKONEN, E. Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 47, Heft 6, Dezember 2001. Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, 2001, s. 60-72

REINMANN-ROTHMEIER, G. Vom selbstgesteuerten zum selbstbestimmten Lernen. *Pädagogik* 55, 2003; 5, s. 10-13

POLDAUF, I. CAHA, J., KOPECKÁ, A., KRÁMSKÝ, J. *Anglicko-český a Česko-anglický slovník.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství 1994. ISBN 80-04-23997-8

POLYA, G. *How to solve it: A new aspect of mathematical Metod.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: Výzkumný ýstav pedagogický 2005 http://www.msmt.cz/vzdelavani/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-verze-2007 [18.11.2008]

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze 2007. http://vyuka.jazyku.cz/i/File/RVP_G.pdf [18.11.2008]

SHUKKAWAN, S. L. Mathematical Problem Posing: The Influence of Tasks, Formats, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking. In: HIRABAYASHI, I.; NOHDA, N.; SHIGEMATSU, K.; LIN, F. L. (Eds.) *Proceedings of the Seventeenth International Konference of the Psychology of Mathematics Education* (vol. III). PME, Tsukuba, Japan, 1993, s. 33-40

SCHOEN, H., L.; OEMKE, T. A new approach to the measurement of problem-solving skills. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Eds.), *Problem solving in school mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980, s. 216-227

SCHMIDT, G. Aufgabenvariation im Schulbuch. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 49, Heft 5, Oktober 2003. Erhard Friedrich Verlag KG GmbH & Co., 2003, s. 52-63

SCHUPP, H. Variatio delectat! *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 49, Heft 4, August 2003, Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, 2003, s. 4-12

SCHUPP, H. *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Berlin: Verlag Franzbecker, Hildesheim 2002.

SILVER, E. A. On Mathematical Problem Posing. In: HIRABAYASHI, I.; NOHDA, N.; SHIGEMATSU, K.; LIN, F. L. (Eds.) *Proceedings of the Seventeenth International Konference of the Psychology of Mathematics Education* (vol. III). PME, Tsukuba, Japan, 1993, s. 66-85

SILVER, E. A. On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 1994, s.19-28

SILVER, E. A. The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education. Mathematical and Pedagogical Perspectives. *Zentralblatt für Didaktik der Matematik.* 1995, 27 (2) s. 67-72

SILVER, E. A.; CAI, J. An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 1996, s. 521-539

SISWONO, T. Y. E. Student Thinking Strategies in Reconstructing Theorems. In: CHICK, H. L. & VINCENT, J. L. (Eds.) *Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the Psychogy of Mathematics Education.* Vol. 4, Melbourne : PME, 2005, s. 193-200

SMILANKSY, J. Problem Solving in the Duality of Invention. *Journal of Educational Psychology.* 76, s. 377-386

STOYANOVA, E. Developing a Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics, Paper presented in the Eighteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. Darwin, 1995.

STOYANOVA, E. Empowering students' problem solving via problem posing: The art of framing „Good" questions. *Australian-Mathematics-Teacher.* 56(1), 2000, s. 33-37

STOYANOVA, E. Problem posing strategies used by years 8 and 9 students. *Australian-Mathematics-Teacher.* 61 (3), 2005, s. 6-11

STEHLÍKOVÁ, N.; CACHOVÁ, J. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe, rukopis k ESF. Hradec Králové, 2006.

TICHÁ, M. Uchopování situací; o jedné z cest posilování konstruktivního přístupu ve vyučování matematice. In: BRICKOVÁ, J. (Ed.) *Sborník Autentické vyučovynie a využitie medzipredmetových vzťahov vo vyučovní matematiky.* Banská Bystrica: Universita Mateja Bela Pedf UMB, 2000.

TICHÁ, M. Following the path of discovering fractions. In: NOVOTNÁ, J. SEMT'03 *International Symposium Elementary Maths Teaching*, Prague: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2003, ISBN 80-7290-132-X, s. 17-27

TICHÁ, M. Tvoření úloh jako jedna z cest rozvíjení profesní kompetence učitelů. *Mathematica VI*, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Olomouc: Facultas Paedagogica, 2008, v tisku

WIDIMSKÝ, F. Německo-český a česko-německý slovník. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. ISBN 80-04-25749-6

7 Přílohy

7.1.1 Některé úlohy vytvořené žáky 3.A, 3.B a 9.A

7.1.2 Záznam rozhovor s učitelem matematiky třídy 3.A

(CD přiloženo k diplomové práci)

[illegible]

žák č. 1 ze 3.A

1. 4
2. 3
3. 2 4
4. 4
5. 1 5
6. 5
7. 4
8. 2 4
9. 4
10. 1 5
11. 5

47

① Z bodu A vyjelo auto do bodu B. Ve stejnou dobu vyletěl pták z bodu B do A. Když se pták potkal s autem letěl zpět do B a poté znovu k autu.... takhle létal pořád až auto dorazilo do B. Rychlost auta $v = 60$ km/h ; rychlost ptáka $v' = 90$ km/h , dráha $s = 180$ km. Jakou vzdálenost nalétal pták?

$$\underbrace{A \longmapsto B}_{180}$$

$t = t'$

$t = \frac{s}{v}$

$t = \frac{180}{60}$

$\underline{\underline{t = 3\,h}}$

$s = v' \cdot t$

$s = 90 \cdot 3$

$\underline{\underline{s = 270\,km}}$

67 bodů

5+4+5+4+5+5+4+5+4+4+4+4+3+3+4+4

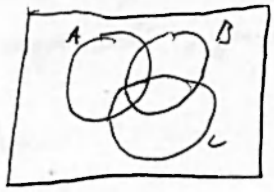
(3) Vědění   Kolik je dětí ve třídě?   [illegible] žák č. (1) ve 3.A

7 ... FJ 4 ... FJ + AJ 1 .... FJ + AJ + NJ
10 ... NJ 5 ... NJ + FJ
5 .... RJ 3 .... RJ + NJ
16 .... AJ

princip inkluse a exkluse

~~X = (7 + 10 + 5 + 16) (4 + 5 + 3) (2) =~~

~~X~~



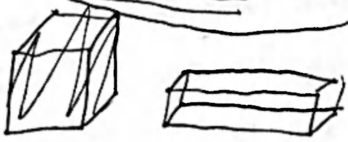
$X = \cancel{A\cap B}\ \cancel{A+B+C}\ A \cup B \cup C - (A \cap B + A \cap C + B \cap C) + A \cap B \cap C$ 79 bodů

$X = 7 + 10 + 5 + 16 - 4 - 5 - 3 + 2$

$X = 28$ lidí

5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+4+4+5+5

(2)



– bazén $a = 5\,m$; $b = 5\,m$ se ~~[illegible]~~ napustí za 10 hodin přítokem 100 l/h. Jaká je výška bazénu?

1h ..... $0{,}1\,m^3$
10h x

$x = 1\,m^3$

$V = a \cdot b \cdot c$

$1 = 5 \cdot 5 \cdot v$

$v = \frac{1}{25}\,m$

66 bodů

3+3+5+5+5+4+5+5+4+4+4+5+3+3+5+3

řeš. č. 6 ze 3.A   X1

I.

1) 4   4) 5   7) 3   10) 15
2) 4   5) 15   8) 15   11) 4
3) 24   6) 4   9) 4

47

II.

1) Bazén se napustí přívodem A za 10 hodin, přívodem B za 13 hodin a výpustí V se vypustí za 12 hodin. Za jak dlouho se napustí bazén pakliže plavčík udělal chybu a bazén napouští přívody A a B a současně vypouští výpustí V.

a)

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{13}-\frac{x}{12}=1$$

$x = 10,7$ hodin

Bude se napouštět 10,7 hodin ✓

b) Jak se změní úloha, pakliže si plavčík své chyby všimne a výpust V uzavře po 5 hodinách.

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{13}-\frac{5}{12}+\frac{x}{10}+\frac{x}{13}-\cancel{\frac{x}{12}}=1$$

$x = 3$ hodiny

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{13}-\frac{5}{12}+\frac{x}{10}+\frac{x}{13}=1$$

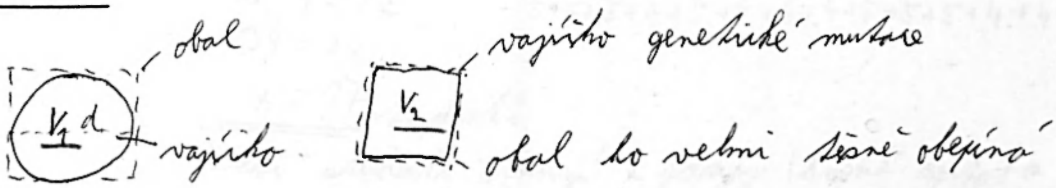
Stačí napouštět pouze 3 hodiny

76 bodů

5+5+5+5+5+5+4+5+4+5+5+5+4+4+5+5

2) Kolik místa by se ušetřilo v jedné krabici, pakliže by vajíčka byly kychle? Pro zjednodušení bereme, že normální vajíčka jsou koule o průměru d=3cm. Vajíčko v obalu znamená, že se kolem něho vytvoří kychlička.

NÁČRT:



$\boxed{V_1 = V_2}$

ŘEŠENÍ:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = a^3$$

$$14,137 = a^3$$

$$a = 2,417$$

79 bodů

5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+4+5+5

VÝPOČTY

žák č. 6 ze 3.A V_2

a) $\frac{156x + 120x - 130x}{1560} = 1$

$1560 = 146x$

$x = 10{,}7$

b) $\frac{780 + 600 + 650}{1560}$ $\frac{730}{1560}$

$\frac{830}{1560} = \frac{x}{10} + \frac{x}{13} - \frac{x}{12}$

$\frac{830}{1560} = \frac{(156x + 120x \cancel{-130x})}{1560} \quad / \cdot 1560$

$830 = \cancel{146x}\ 276x$

$x = 3$

2/ pokračování

Závěr: Obal u „normálního" vajíčka zabere d^3 cm^3 což je 27 cm^3. Kdyby však bylo vajíčko krychle pak to obal obepíná těsně a i s obalem zabere genetické vajíčko pouze 14,12 cm^3. Že spotřebou 2 vajec za 5 dní na osobu to dělá v ČR úsporu 1840 m^3 ročně, 1 kamion = 120 m^3 => úspora jízdy 160 kamionů :) možná mohla být původní otázka položena kolik jízd kamionů se ušetří :)

3/
16 AJ
7 FJ
10 NJ
5 RJ

Jaký je nejmenší počet studentů, kteří studují tyto jazyky, jestliže 1 student může maximálně studovat 2 jazyky, tolikže i tady je výjimka a jeden šprt studuje všechny 4 jazyky

poč. studentů... X

$16 + 7 + 10 + 5 = \underbrace{2x}_{\text{studenti}} + \underbrace{4}_{\text{šprt}}$

74 bodů

$38 - 4 = 2x$

$5+5+5+4+5+4+4+4+5+5+5+4+4+5+5$

$34 = 2x$

$x = 17$ studentů

Všichni studenti studují 2 jazyky (kromě šprta) a je jich 17.

① spol. práce nebo práce
② výpočet od 0 do 5

žák č. ① 3.B

①

Petr ~~se~~ chtěl navštívit svou babičku. Jako ~~cestu si~~ zdolávanou trasu si vybral koloběžku. 1. úsek byla rovinka dlouhá 1230 m, kterou ~~celou~~ projížděl rychlostí 15 km/h. 2. úsek byl do kopce. Dlouhý byl 270 m a Petr jej vyjížděl 8 km/h. 5 min po Petrově odchodu odjížděla telefonem maminka babičce Petrem návštěvu. Stihla zavolat dříve než Petr dorazil?

Řeš. zjistíme, jak dlouho trvala Petrovi cesta. Porovnáme s časem, za který maminka volala.

$t = t_1 + t_2$ ~~ARZ~~ $s = v \cdot t$, $t = \frac{s}{v}$ $v_1 = 15$ km/h, $s_1 = 1{,}23$ km $\Rightarrow t_1 = 0{,}082$ h

$t = 0{,}082 + 0{,}034$ $v_2 = 8$ km/h, $s_2 = 0{,}27$ km $\Rightarrow t_2 = 0{,}034$ h

$t = 0{,}116$ h $\cdot 60 = \underline{6{,}96 \text{ min}}$

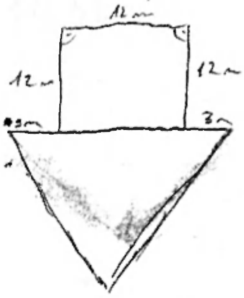
Odp. Maminka zavolá za 5 min, Petr dorazí až 2 min po té.

79 bodů

5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+4+5+5

②

Pan Horák se rozhodl postavit si bazén. Jejich Horákovic zahrada má tvar nepravidelný tvar a pí. Horáková chce část zahrady pro své růže. Naštěstí se dá zahrada rozdělit do 2 sektorů ve tvaru pravidelného n-úhelníku. Na bazén je vyčleněna sektor část zahrady. Jak hluboký ~~musí být~~ bude bazén, když bude z každé strany 1 m od plotu a vejde se do něj 200 m³ vody. ~~Rozměry zahrady jsou na~~ Plánek zahrady může (objeví další část)



Řeš. ① zjistíme, která část zahrady je určena pro bazén (sektor)

S_1 – čtverec S_2 – trojúhelník

$S_1 = a^2$ $S_2 = \frac{1}{2} v a^2$

$S_1 = 12^2 = \underline{144 \text{ m}^2}$ $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{(18^2 - 9^2)} = \underline{140{,}3 \text{ m}^2}$

② dosadíme do vzorce pro objem kvádru a vypočteme hloubku bazénu

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = a^2 \cdot h \quad / : a^2$

$h = \frac{V}{a^2}$

$h = \frac{200}{10^2} = 2$

a – strana čtvercové části zahrady zmenšená o 1 m z každé strany

75 bodů

5+5+5+5+5+5+5+5+4+4+4+5+4+4+5+5

žák č. 14

9.

1) 4b

2) 5b

3) 2b 4

4) 5b

5) 1b 5

6) 5b

7) 4b

8) 1b 5

9) 4b

10) 1b 5

11) 5b

51

1 společná práce

První traktor dělal práci 6 h druhý 9 h a třetí 12 h za jak dlouho by práci vykonali dohromady:

1. traktor . . . . 6 h

2. -"- . . . . 9 h

3. -"- . . . . 12 h

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{9}+\frac{x}{12}=1 \quad /\cdot 36$$

$$6x+4x+3x=36$$

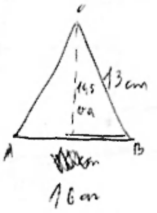
$$13x=36 \quad /:13$$

$$x=2{,}7\,h$$

38 bodů

3+5+4+4+3+3+2+2+2+1+3+1+1+1+1

2 obsah trojúhelníku



$= 100 - 169$

$$a^2 = v^2 + a^2$$

$$a^2 = 13^2 - 8^2$$

$$a^2 = 169 - 64$$

$$a = $$

$$a = 10{,}5\,cm \qquad \sqrt{105} \neq 10{,}5$$

$$S=\frac{a\cdot va}{2}$$

$$S=\frac{16\cdot 10{,}5}{2}$$

$$S = 84\,cm^2$$

29 bodů

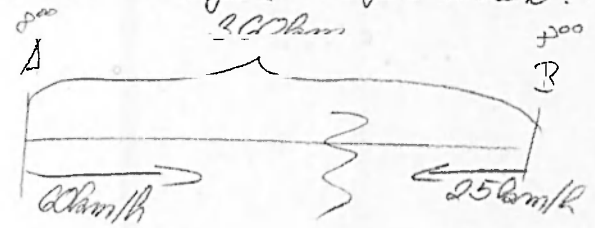
$$13^2 \neq 10{,}5^2 + 8^2$$

2+1+3+2+2+1+2+1+3+1+2+2+1+1+3+2

1, 3b.
2, 4b
3, 2b. 4
4, 4 b
5, 1b 5
6, 3b.
7, 3b.
8, 1b. 5
9, 4b.
10, 1b 5
11, 4 b
44

(1) ~~Auto jedoucí rychlostí 60km/h z bodu A~~ žák č. 19 9.A

Auto jedoucí z bodu A do bodu B jede rychlostí 60 km, vyjíždí o 8^{00}. Ve stejný čas z bodu B vyjíždí traktor jedoucí 25km/h. Dráha měří 360 km. Kde se setkají a za jak dlouho?



$s_1 + s_2 = s$

~~$s = v \cdot t$~~
~~$v = s \cdot t$~~
~~$v = 360 \cdot 8$~~
~~$v = 3,45$~~

~~$s = v \cdot t$~~
~~$t_1 = \frac{s}{v}$~~
~~$t_1 = 360 \cdot 25$~~
~~$t_1 = 14,4$~~

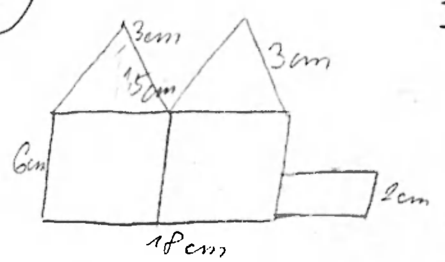
~~$t_a = 360 : 60$~~
~~$t_a = 6$~~
$s_1 = 60 \cdot x$
$s_2 = 25 \cdot x$

$s_1 + s_2 = 360$
$60 \cdot x + 25 \cdot x = 360$
$85x = 360 / : 85$
$\underline{x = 4,23}$ h

32 bodů

4+4+2+4+1+3+1+2+1+1+1+2+1+1+2+2

(2)



$O = 6 + 18 + 2 + 4 + 12 + 6$
$\underline{O = 48 cm}$

$S_{\square} = 6 \cdot 6 = 36$
$S_{\square} = 2 \cdot 6 = 12$
~~$S_\triangle = 1,5 \cdot 3 = 4,5$~~
$S_\triangle = \frac{a \cdot v_a}{2}$

$S_u = 36 + 36 + 12 + 4,5 + 4,5$
$\underline{S_u = 93 cm^3}$

49 bodů

2+1+5+3+5+1+4+4+4+3+3+4+3+1+3+3