Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petr Keblúšek

Finanční deriváty

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2008

Děkuji doc. Janu Hurtovi za přínosné náměty a připomínky při psaní diplomové práce a své rodině a přátelům za podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 12.12.2008 Petr Keblúšek

Obsah

Název práce: Finanční deriváty
Autor: Petr Keblúšek
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
e-mail vedoucího: jan.hurt@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme oceňováním finančních derivátů. K vybudování oceňovacího modelu využíváme teorii stochastického kalkulu. Postupujeme přitom na dostatečně obecné úrovni, která umožňuje aplikaci pro různé druhy derivátů. Odvozujeme explicitní formule pro evropské typy opcí a forwardy a uvádíme, jakým způsobem se přistupuje k oceňování amerických typů opcí. Studujeme také citlivost portfolia na změnu různých faktorů a ukazujeme, jak můžeme portfolio zajistit pomocí finančních derivátů. Vyloženou teorii aplikujeme také na nejpoužívanější zástupce exotických opcí. Výklad doprovázíme realizací některých tvrzení ve výpočetním systému a ilustrujeme jej pomocí numerických příkladů.

Klíčová slova: Finanční derivát, Black-Sholesova formule, Greeks, Zajišťování

Title: Financial derivatives
Author: Petr Keblúšek
Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: jan.hurt@mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study methods of financial derivatives valuation. We use stochastic calculus theory to build up the pricing model and to proceed on sufficiently general level which enables us to apply the model to different types of derivatives. After deriving explicit formulae for European-style options and forwards we show how to deal with American-style options pricing as well as pricing of the most widely used exotic options. We also study the sensitivity of portfolio to change of different factors and introduce hedging methods using financial derivatives. The theory is followed by an implementation of some assertions in computational algebra system and ilustrated by numerical examples.

Keywords: Financial derivative, Black-Scholes formula, Greeks, Hedging

Motivace

Přes svou krátkou historii jsou finanční deriváty velmi oblíbeným nástrojem obchodníků na finančních trzích. Metody vedoucí k jejich správnému ocenění jsou však stále předmětem bádání mnoha matematiků a ekonomů. Pro některé z nich zatím nebyl odvozen vhodný a dostatečně univerzální vzorec. Moderní přístupy k oceňování derivátů využívají stochastického modelování, ve velké míře se uplatňuje také výkonný software. Navíc vývoj v oblasti finančních derivátů nadále pokračuje a stále vznikají nové, zpravidla složitější nástroje,

Účastníci finančních trhů čelí při své činnosti značné nejistotě. Vývoj téměř žádné z veličin, se kterými při obchodování přicházejí do styku, není možné spolehlivě určit pouze na základě historických znalostí. Proto abychom mohli stanovit hodnotu finančního derivátu, musíme umět správně odhadnout budoucí cenu podkladového aktiva. S využitím teorie stochastického kalkulu popíšeme model pro vývoj ceny akcie ve spojitém čase. Ukážeme také, jak lze tento model využít pro odhad budoucího směnného kurzu pro finanční deriváty na cizí měny. Kromě osvědčené literatury budeme vycházet také z přednášek konaných na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, především pak z přednášky Stochastické finanční modely a Stochastická analýza.

Další krok představuje metoda konstrukce portfolií, která replikují výplatu derivátů s různými výplatními funkcemi a za jistých předpokladů umožňují sestrojení explicitního vzorce pro jejich ohodnocení. Naše závěry budeme demonstrovat na příkladu evropských opcí a forwardu.

Původně byly finanční deriváty konstruovány za účelem redukce rizik, jež s sebou přináší obchodování na finančních trzích. Budeme se proto věnovat analýze citlivosti hodnoty portfolia na různé faktory a ukážeme, jakým způsobem lze derivátů využít při zajišťování.

Náš postup bude dostatečně obecný, abychom jej mohli použít i pro oceňování některých zajímavějších derivátů. Na amerických opcích ukážeme, jak určit, zda je pro obchodníka výhodná předčasná realizace kontraktu. Popíšeme také některé z exotických opcí, jejichž výplatní funkce je komplikovanější než v případě tradičních evropských opcí.

Ve výpočetním systému Mathematica pak demonstrujeme některá tvrzení, využijeme jej pro odvození matematických vzorců a v neposlední řadě aplikujeme vyloženou teorii na numerických příkladech.

Kapitola 1

Stochastický kalkulus

V této kapitole vybudujeme potřebnou teorii stochastického kalkulu, která nachází uplatnění v moderních přístupech k modelování ceny akcie, měnových kurzů i vývoje úrokových měr. Nejprve připomeneme značení a základní definice, poté zavedeme Wienerův proces pro účely konstrukce stochastického integrálu a ukážeme některé jeho důležité vlastnosti. Na závěr kapitoly se budeme věnovat stochastickým diferenciálům a stochastickým diferenciálním rovnicím, z nichž jsou některé modely odvozeny.

1.1 Wienerův proces

Při našich úvahách budeme pracovat na úplném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ a časovém intervalu $\mathcal{T} = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$. Budeme-li dále v textu zmiňovat časové okamžiky, myslíme tím prvky intervalu $\mathcal{T}$. Uveďme nejdříve několik základních pojmů.

Stochastickým procesem na intervalu $\mathcal{T}$ budeme nazývat soubor náhodných veličin

$$X = (X(t), t \in \mathcal{T}), X(t) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Budeme také značit $X = (X(t), t \geq 0) = (X_t, t \geq 0)$, pokud $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$. Pro obecnější úvahy použijeme *d-rozměrný stochastický proces* $\mathbb{X} = \left(X^1, \ldots, X^d\right)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^d$, kde X^i jsou stochastické procesy, $i = 1, \ldots, d$. Budeme jej značit zdvojeným písmem.

Říkáme, že náhodné procesy $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou *stochasticky ekvivalentní*, jestliže pro všechna $t \in \mathcal{T}$ platí $\mathbf{P}(\mathbb{X}(t) = \mathbb{Y}(t)) = 1$, říkáme také, že $\mathbb{Y}$ je *modifikací* nebo *verzí* $\mathbb{X}$. Procesy $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou *identické skoro všude* vzhledem k míře $\mathbf{P} \otimes \lambda$ na $(\Omega \times \mathcal{T}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{T}))$, pokud existuje množina $M \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{T})$, $(\mathbf{P} \otimes \lambda)(M) = 0$ a $\mathbb{X}(\omega, t) = \mathbb{Y}(\omega, t)$ pro všechny dvojice $(\omega, t) \in (\Omega \times \mathcal{T}) \backslash M$. Procesy $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou *nerozlišitelné*, jetliže mají skoro jistě shodné trajektorie, tj. existuje množina $N \in \mathcal{F}$ taková, že $\mathbf{P}(N) = 0$ a $\mathbb{X}(\omega, t) = \mathbb{Y}(\omega, t)$ pro všechna $\omega \in \Omega \backslash N$ a všechna

$t \in \mathcal{T}$. Procesy $(\mathbb{X}^i)_{i \in I}$ jsou *vzájemně nezávislé*, jestliže jsou vzájemně nezávislé σ-algebry $\sigma(\mathbb{X}^i(t) : t \in \mathcal{T})$, $i \in I$.

Jestliže pro všechny časové okamžiky $0 \leq t_0 < \ldots < t_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, platí $\mathcal{L}(\mathbb{X}(t_1), \ldots, \mathbb{X}(t_n)) = \mathcal{L}(\mathbb{Y}(t_1), \ldots, \mathbb{Y}(t_n))$, pak říkáme, že procesy $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ mají stejná *konečně-rozměrná rozdělení*. Proces $\mathbb{X}$ nazveme *gaussovským*, jestliže všechna jeho konečně-rozměrná rozdělení jsou (mnohorozměrná) normální. Funkci $K(s,t) = \mathbf{cov}\,(\mathbb{X}(s), \mathbb{X}(t))$ nazveme *kovarianční funkcí procesu* $\mathbb{X}$. Jestliže $\mathbf{E}\,(\mathbb{X}(t)) = 0$, nazveme proces $\mathbb{X}$ *centrovaným*.

Proces je *spojitý*, *rostoucí* atd., jestliže každá jeho trajektorie má stejnou vlastnost (je spojitá, rostoucí atd.). V souvislosti se zavedeným názvoslovím budeme říkat, že proces je skoro jistě spojitý, skoro jistě rostoucí atd., jestliže stejná vlastnost platí pro jeho trajektorie až na množinu nulovou vzhledem k míře $\mathbf{P}$.

Investor má k dispozici pouze historická a současná data o vývoji na trzích, na jejichž základě přijímá svá rozhodnutí. Pro popis struktury dostupných informací a jejich dynamiku zavedeme pojem *filtrace*, kterou rozumíme neklesající systém σ-algeber $F = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ s vlastností $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pro $s, t \in \mathcal{T}$, $s \leq t$, a označíme $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$. Jestliže má proces X hodnoty v nějakém metrickém podprostoru prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, označíme $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X(s), s \leq t)$ a $\mathcal{F}_\infty^X := \sigma(X(t), t \geq 0)$. Filtraci $\mathcal{F}_t^X$ budeme nazývat *kanonickou filtrací* procesu X. Říkáme, že stochastický proces X je *adaptován* na filtraci F, pokud pro všechna $t \geq 0$ platí $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$. Tato podmínka je splněna, jestliže je $X(t)$ náhodnou veličinou měřitelnou vzhledem k σ-algebře $\mathcal{F}_t$ pro každé $t \geq 0$.

Nejprve definujeme obecnější proces Brownova pohybu. Ten narozdíl od Wienerova procesu není vázán na konkrétní filtraci.

Definice 1.1. *Standardizovaný d-rozměrný proces Brownova pohybu je proces* $\mathbb{B}$*, který splňuje následující podmínky:*

- *(BM1)* $\mathbb{B}(t)$ *je spojitý v* t *skoro jistě,*
- *(BM2) pro libovolnou volbu časových okamžiků* $0 \leq t_0 < \ldots < t_n$ *jsou přírůstky* $\mathbb{B}(t_1) - \mathbb{B}(t_0), \ldots, \mathbb{B}(t_n) - \mathbb{B}(t_{n-1})$ *nezávislé,*
- *(BM3) pro libovolnou volbu časových okamžiků* $0 \leq s \leq t$ *má přírůstek* $\mathbb{B}(t) - \mathbb{B}(s)$ *normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí* $(t-s)I$*, kde* I *je jednotková matice* $d \times d$*,*
- *(BM4)* $\mathbb{B}(0) = 0$ *skoro jistě.*

Jak bude zřejmé později z vlastností Brownova pohybu, je podmínka *(BM4)* pouze doplňující. V některých zdrojích není uváděna.

Obrázek 1.1 ilustruje tři simulace Brownova pohybu. Jedná se pouze o aproximaci, neboť tento proces má být podle podmínky *(BM1)* spojitý (zatímco na obrázku jsou generovány jednotlivé body a ty jsou poté spojeny úsečkou). Ani v praxi finančního modelování se však zpravidla nesetkáme se spojitým procesem, např. akciový kurz představuje po částech konstantní funkci, která své hodnoty mění skokově.

Proces Brownova pohybu B lze zkonstruovat z náhodné procházky $\{S_n, n \geq 1\}$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i, $i = 1, \ldots, n$ jsou vzájemně nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, pro které $p := \mathbf{P}\ (X_i = 1) = \mathbf{P}\ (X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Označíme-li $Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x, platí $Z_n \xrightarrow{d} B$ pro $n \to \infty$, tedy pro všechna $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ a pro všechna $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je

$$\mathbf{P}\ (Z_n\,(t_i) \in F_i, i = 1, \ldots, k) \to \mathbf{P}\ (B\,(t_i) \in F_i, i = 1, \ldots, k) \qquad n \to \infty.$$

Abychom ukázali platnost konvergence, zkoumejme tvar charakteristické funkce veličiny $Z_n(t)$. Využijeme přitom nezávislosti veličin X_i, $i = 1, \ldots, n$ a Taylorova rozvoje exponenciální funkce.

$$\mathbf{E}\ \exp\{i\tau Z_n(t)\} = \mathbf{E}\ \exp\left\{\frac{i\tau}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i\right\} =$$

$$= \left(p \exp\left\{\frac{i\tau}{\sqrt{n}}\right\} + (1-p) \exp\left\{\frac{-i\tau}{\sqrt{n}}\right\}\right)^{\lfloor nt \rfloor} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{i\tau}{\sqrt{n}} - \frac{\tau^2}{2n} + o\left(n^{-3/2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\tau}{\sqrt{n}} - \frac{\tau^2}{2n} + o\left(n^{-3/2}\right)\right)\right]^{\lfloor nt \rfloor} =$$

$$= \left(1 - \frac{\tau^2}{2n} + o\left(n^{-3/2}\right)\right)^{\lfloor nt \rfloor} \to \exp\left\{-\frac{1}{2}\tau^2 t\right\} \qquad n \to \infty,$$

což je charakteristická funkce normálního rozdělení $N(0, t)$ odpovídající přírůstku Brownova pohybu $B(t) = B(t) - B(0)$.

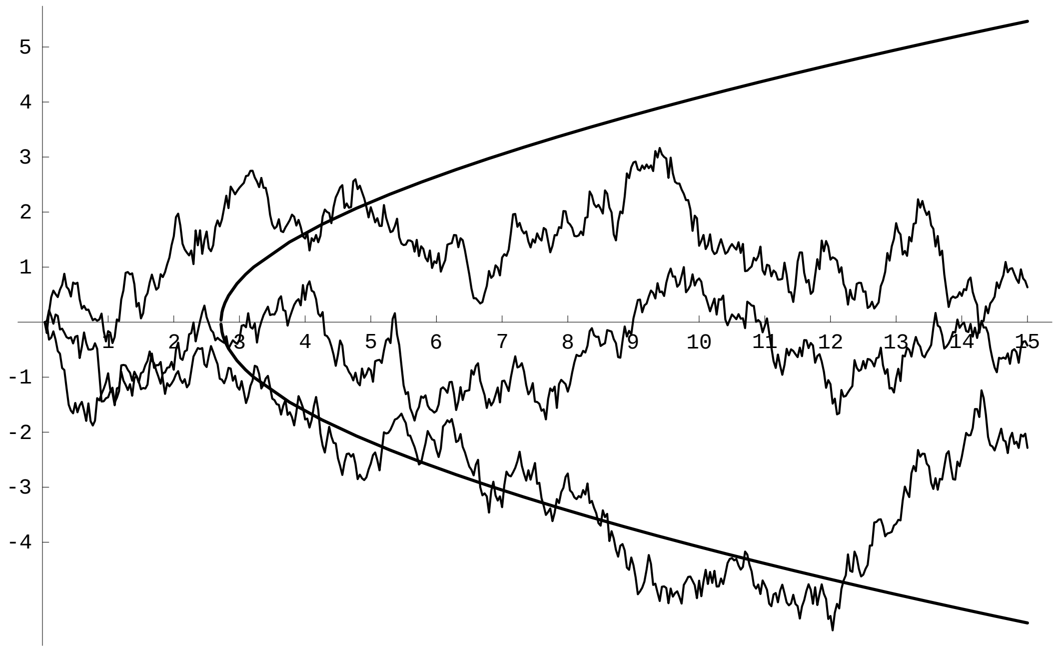
Tvrzení 1.2 (Zákon iterovaného logaritmu)**.** *Nechť B je standardizovaný proces Brownova pohybu. Potom*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1 \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = -1$$

skoro jistě.

Důkaz. Důkaz je uveden v [6], věta 2.9.23. □

Ze zákona iterovaného logaritmu vyplývá, že pro $0 \leq a < 1 < b$ nabývá proces pro všechna dostatečně velká t hodnot $B(t) < b\sqrt{2t \ln\ln t}$, zatímco pro každé $s \geq 0$ existuje $t > s$ takové, že $B(t) > a\sqrt{2t \ln\ln t}$. Hranice $\pm\sqrt{2t \ln\ln t}$ jsou zaneseny v grafu na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1. Simulace standardizovaného Brownova pohybu

Tvrzení 1.3 (Zákon velkých čísel pro Brownův pohyb)**.** *Nechť B je standardizovaný proces Brownova pohybu. Pak*

$$\frac{B(t)}{t} \to 0$$

skoro jistě pro $t \to \infty$.

Důkaz. Pro důkaz využijeme zákona iterovaného logaritmu:

$$\frac{\sqrt{2t \ln \ln t}}{t} \to 0 \qquad t \to \infty$$

Podle tvrzení 1.2 můžeme psát

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \frac{\sqrt{2t \ln \ln t}}{t} = 0$$

Navíc lze snadno ověřit, že $-B$ je také proces Brownova pohybu a tedy

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = -\limsup_{t\to\infty} \frac{-B(t)}{t} = 0$$

$\square$

Pro další aplikace je vhodné uvést, jak proces Brownova pohybu reaguje na některé transformace.

Tvrzení 1.4. *Následující transformace Brownova pohybu B jsou opět Brownovým pohybem:*

1. $\widetilde{B}(t) := cB\left(t/c^2\right), c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *(změna měřítka),*
2. $\widetilde{B}(t) := tB(1/t), t > 0, \widetilde{B}(0) := 0$ *(inverze času),*
3. $\widetilde{B}(t) := \{B(t+s) : t \geq 0\}, s \in \mathbb{R}^+$ *(časová homogenita).*

Důkaz. Důkaz tvrzení je převzat z [11], str. 8, tvrzení 1.6. Spočívá v ověření vlastností Brownova pohybu. Pro všechny zmíněné transformace probíhá obdobně, proto jej provedeme pouze pro druhou z nich. Pro $t > 0$ je $\widetilde{B}$ zřejmě spojitý proces. Podle tvrzení 1.3 platí

$$\widetilde{B}(t) = \frac{B(1/t)}{1/t} \to 0 = \widetilde{B}(0)$$

skoro jistě pro $t \to 0$ a proces $\widetilde{B}$ je tedy spojitý také pro $t = 0$.
Dále pro $0 < s < t$ rozepíšeme přírůstek

$$\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s) = tB(1/t) - sB(1/s) = -s(B(1/s) - B(1/t)) + (t-s)B(1/t)$$

Z vlastností procesu B vyplývá, že

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)\right) = 0 \\
&\mathbf{var}\left(\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)\right) = (-s)^2(1/s - 1/t) + (t-s)^2(1/t) = t - s
\end{aligned}$$

Vzhledem k normálnímu rozdělení přírůstků procesu B určují tyto dva parametry normální rozdělení přírůstků procesu $\widetilde{B}$. Protože také $\widetilde{B}(t)$ má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $t^2(1/t) = t$, platí stejný závěr i pro $s = 0$.
Nechť $0 \leq s \leq t \leq u$. Potom

$$\begin{aligned}
u - s = \mathbf{var}\left(\widetilde{B}(u) - \widetilde{B}(s)\right) &= \\
= \mathbf{var}\left(\widetilde{B}(u) - \widetilde{B}(t)\right) &+ \mathbf{var}\left(\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)\right) \\
&+ 2\,\mathbf{cov}\left(\widetilde{B}(u) - \widetilde{B}(t), \widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)\right) = \\
= u - t + t - s &+ 2\,\mathbf{cov}\left(\widetilde{B}(u) - \widetilde{B}(t), \widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)\right) \\
= u - s + 2\,\mathbf{cov}&\left(\widetilde{B}(u) - \widetilde{B}(t), \widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)\right)
\end{aligned}$$

z čehož plyne, že

$$\mathbf{cov}\left(\widetilde{B}(u) - \widetilde{B}(t), \widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s)\right) = 0,$$

tudíž proces $\widetilde{B}$ má nezávislé přírůstky.

Obdobně bychom ukázali, že jsou nezávislé i přírůstky na dvou časových intervalech, které na sebe bezprostředně nenavazují. Poslední podmínka $\widetilde{B}(0) = 0$ je splněna podle definice a proces $\widetilde{B}$ je procesem Brownova pohybu. $\square$

Tvrzení 1.5. *Pro proces Brownova pohybu B platí*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} B(t) = +\infty\right) = \mathbf{P}\left(\inf_{t\geq 0} B(t) = -\infty\right) = 1.$$

Důkaz. Pro libovolné $a > 0$ platí

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} B(t) > a\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} cB(t/c^2) > a\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{s\geq 0} B(s) > a/c\right).$$

Pravděpodobnost nezávisí na a a proto má každá trajektorie supremum rovno nule nebo ∞. Případ $\sup_{t\geq 0} B(t) = 0$ nastává pouze tehdy, když

$$B(1) \leq 0,\ \sup_{t\geq 0} (B(t) - B(1)) = 0.$$

Pokud ovšem definujeme $\widetilde{B}(t) = B(1+t) - B(1)$, mají $\widetilde{B}(t)$ a $B(t)$ stejná rozdělení a vzhledem k nezávislosti přírůstků procesu B platí

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} B(t) = 0\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(B(1) \leq 0, \sup_{t\geq 0} (B(t) - B(1)) = 0\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(B(1) \leq 0\right) \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0} \widetilde{B}(t) = 0\right) = \\ &= \tfrac{1}{2} p \end{aligned}$$

a tedy $p = 0$. Obdobně se ukáže, že $\mathbf{P}\left(\inf_{t\geq 0} B(t) = -\infty\right) = 1$. $\square$

Důsledkem právě dokázaného tvrzení je, že proces Brownova pohybu osciluje mezi kladnými a zápornými hodnotami, a to i na malých intervalech. Speciálně není tento proces diferencovatelný (důkaz např. v [4], str. 25, tvrzení 2.9).

Proces Brownova pohybu s sebou nese některá omezení, kvůli kterým není použitelný pro finanční modelování. Na příklad proces vývoje ceny akcie nezačíná v nule, jeho přírůstky nemívají nulovou hodnotu ani jednotkový rozptyl pro každý jednotkový interval a ceny dvou akcií nejsou nekorelované. Přírůstky Brownova pohybu navíc mají normální rozdělení a tudíž existuje kladná pravděpodobnost, že proces bude nabývat záporných hodnot. Pokusme se nyní tato omezení eliminovat zobecněním některých podmínek v definici Brownova pohybu a zavedením jeho exponenciální transformace.

Definice 1.6. *Zobecněný d-rozměrný proces Brownova pohybu je d-rozměrný proces $\mathbb{B}$, který splňuje následující podmínky:*

(GBM1) $\mathbb{B}(t)$ *je spojitý v t skoro jistě,*

(GBM2) pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_0 < \ldots < t_n$ *jsou přírůstky* $\mathbb{B}(t_1) - \mathbb{B}(t_0), \ldots, \mathbb{B}(t_n) - \mathbb{B}(t_{n-1})$ *nezávislé,*

(GBM3) pro libovolné časové okamžiky $0 \leq s < t$ *existují jednoznačně určená d-rozměrná čtvercová matice* Σ *a d-rozměrný vektor* μ *takový, že přírůstek* $\mathbb{B}(t) - \mathbb{B}(s)$ *má normální rozdělení se střední hodnotou* $(t-s)\mu$ *a kovarianční maticí* $(t-s)\Sigma$*.*

Zobecněný proces Brownova pohybu můžeme zkonstruovat z procesu standardizovaného. Nechť σ je $(n \times d)$-dimenzionální matice, $\mathbb{B}_0$ a μ jsou n-dimenzionální vektory, potom

$$\mathbb{B}(t) = \mathbb{B}_0 + t\mu + \sigma\mathbb{B}(t)$$

je n-dimenzionální zobecněný proces Brownova pohybu s počáteční hodnotou $\mathbb{B}(0) = \mathbb{B}_0$, střední hodnotou přírůstků μ a kovarianční maticí přírůstků $\Sigma = \sigma\sigma^T$.

Vzhledem k normalitě přírůstků Brownova pohybu existuje kladná pravděpodobnost, že hodnota procesu bude záporná. Proto zavedeme jeho exponenciální transformaci.

Definice 1.7. *Mějme B jednorozměrný zobecněný proces Brownova pohybu. Proces S ve tvaru* $S = e^B$ *nazveme geometrickým Brownovým pohybem.*

Pro úplnost ještě dodejme, že geometrický Brownův pohyb B je markovský proces s vlastností

$$\mathbf{P}\ (S(t+h) \in A | S(t)) = \mathbf{P}\ (S(t+h) \in A | S(u), u \leq t) \qquad A \in \mathcal{F},$$

neboť Brownův pohyb má nezávislé přírůstky.

Příklad 1.8. *Geometrický Brownův pohyb nachází uplatnění při modelování ceny akcie, potažmo hodnoty finanční opce na akcii. V Black-Scholesově modelu, který představíme později, je cena akcie interpretována s využitím Brownova pohybu B jako*

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\mu t + \sigma B(t)\right\},$$

kde $S(0) > 0$*,* μ *a* $\sigma > 0$ *jsou konstanty. Zřejmě*

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \mu t + \sigma B(t)$$

je zobecněný proces Brownova pohybu.

Definice 1.9. *(Standardizovaným) d-rozměrným Wienerovým procesem vzhledem k filtraci* $F = (\mathcal{F}_t)$ *nazveme d-rozměrný náhodný proces* $\mathbb{W}$ *na intervalu* $[0, \infty)$*, který splňuje následující podmínky:*

(W1) $\mathbb{W}$ *je spojitý,*

(W2) $\mathbb{W}$ *je adaptován na filtraci* F*,*

(W3) pro $s,t \in [0,\infty)$, $0 \leq s \leq t$ *je přírůstek* $\mathbb{W}_t - \mathbb{W}_s$ *nezávislý na* $\mathcal{F}_s$ *a má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a korarianční maticí* $(t-s)I$*, kde* I *je* d*-rozměrná jednotková matice,*

(W4) $\mathbb{W}_0 = 0$ *skoro jistě.*

Podmínka *(W4)* v předchozí definici je opět pouze doplňující.

Tvrzení 1.10. *Wienerův proces je centrovaný gaussovský proces s kovarianční funkcí* $K(s,t) = \min(s,t) = s \wedge t$*.*

Důkaz. Pro Wienerův proces W platí

$$\mathbf{E}\, W_t = \mathbf{E}\, W_0 + \mathbf{E}\, (W_t - W_0) = 0,$$

neboť jeho přírůstky jsou vzájemně nezávislé a mají standardizované normální rozdělení. Dále pro $s < t$ platí

$$\mathbf{cov}\, (W_s, W_t) = \mathbf{E}\, W_s W_t = \mathbf{E}\, \left(W_s\, (W_t - W_s) + W_s^2\right) = s = s \wedge t$$

Nechť $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, ${}^nW = (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$. Označíme

$${}^n\widetilde{W} = \left(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right).$$

Pak ${}^n\widetilde{W}$ má n-rozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Protože lze rozepsat

$$\begin{aligned} &W_{t_1} = W_{t_1} \\ &W_{t_2} = W_{t2} - W_{t_1} + W_{t_1} \\ &W_{t_3} = W_{t3} - W_{t_2} + W_{t_2} - W_{t_1} + W_{t_1} \\ &atd., \end{aligned}$$

můžeme psát ${}^nW = \mathbf{A}\,{}^n\widetilde{W}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Označíme-li $\Sigma = \mathbf{ATA}^T$, dostáváme

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \wedge t_2 & \dots & t_1 \wedge t_n \\ t_1 \wedge t_2 & t_2 & \dots & t_2 \wedge t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 \wedge t_n & t2 \wedge t_n & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

a ${}^nW$ má rozdělení $N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$. □

Nechť W je Wienerův proces vzhledem k filtraci $F = (\mathcal{F}_t)$ a $G = (\mathcal{G}_t)$ je filtrace taková, že $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ pro všechna t. Jestliže pro $0 \leq s \leq t$ jsou přírůstky $W_t - W_s$ nezávislé na $\mathcal{G}_s$, pak W je také Wienerův proces vzhledem k G. Následující tvrzení ukazuje, jak Wienerův proces souvisí s procesem Brownova pohybu.

Tvrzení 1.11. *Proces W je Wienerův proces vzhledem k filtraci F, právě když*

- *W je standardizovaný proces Brownova pohybu,*
- *W je adaptován na F,*
- *$W_t - W_s$ nezávisí na $\mathcal{F}_s$, pokud $0 \leq s \leq t$.*

Důkaz. Nechť W je Wienerův proces vzhledem k F. Jestliže $0 \leq t_0 < \ldots < t_n$, jsou přírůstky $W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé, neboť pro $0 \leq i < j < n$ jsou přírůstky $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ nezávislé na $\mathcal{F}_{t_j}$ a tudíž nezávislé na přírůstku $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. Opačná implikace vyplývá přímo z definic. □

Definice 1.12. *Stochastický proces $M = M(t)$, $t \in \mathcal{T}$ je martingal vzhledem k filtraci $F = \mathcal{F}_t$, jestliže splňuje tyto podmínky:*

(M1) je adaptovaný na F,

(M2) $\mathbf{E}\,[|M(t)|] < \infty$, $t \geq 0$,

(M3) pro skoro všechna $s, t \in \mathcal{T}$, $s \leq t$ platí $\mathbf{E}\left[M(t)|\mathcal{F}_s^M\right] = M(s)$.

Pojem martingalu v našem kontextu dobře interpretuje skutečnost, že budoucí hodnoty vývoje cen na finančním trhu není možné určit na základě znalosti historických dat. Jak již bylo řečeno dříve, budeme při modelování budoucího vývoje cen akcie (měnových kurzů, úrokových měr atd.) využívat Wienerova procesu.

Příklad 1.13. *Nechť W je Wienerův proces a $F = (\mathcal{F}_t)$ filtrace generovaná tímto procesem. Pak následující procesy jsou martingaly:*

1. $Z_t = \{W_t, t \geq 0\}$,
2. $Z_t = \{W_t^2 - t, t \geq 0\}$,

3. $Z_t = \left\{\exp\left(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right), t \geq 0\right\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(tzv. Waldův martingal).*

Postup ověření je u všech výše zmíněných procesů obdobný. Využívá nezávislosti a normálního rozdělení přírůstků Wienerova procesu. Ověření ilustrujeme na Waldově martingalu. Pro $0 \leq s \leq t$ rozepíšeme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[Z_t|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbf{E}\left[\exp\left\{\lambda\left(W_t - W_s + W_s\right) - \tfrac{1}{2}\lambda^2(t-s+s)\right\}|\mathcal{F}_s\right] = \\
&= \mathbf{E}\left[Z_s \exp\left\{\lambda\left(W_t - W_s\right) - \tfrac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right\}|\mathcal{F}_s\right] = \\
&= Z_s\,\mathbf{E}\left[\exp\left\{\lambda\left(W_t - W_s\right) - \tfrac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right\}\right] = \\
&= Z_s\,\exp\left\{\tfrac{1}{2}\lambda^2\,\mathbf{var}\,(W_t - W_s) - \tfrac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right\} = \\
&= Z_s. \qquad\qquad \triangle
\end{aligned}$$

Podobně jako u Brownova pohybu můžeme zavést zobecněný Wienerův proces úpravou některých podmínek v definici.

Definice 1.14. *Zobecněným d-rozměrným Wienerovým procesem vzhledem k filtraci $F = (\mathcal{F}_t)$ nazveme d-rozměrný proces $\mathbb{W}$ na intervalu $[0, \infty)$, který splňuje následující podmínky:*

(GW1) *$\mathbb{W}$ je spojitý,*

(GW2) *$\mathbb{W}$ je adaptován na filtraci F,*

(GW3) *pro $0 \leq s \leq t$ je přírůstek $\mathbb{W}_t - \mathbb{W}_s$ nezávislý na $\mathcal{F}_s$ a má normální rozdělení se střední hodnotou $(t-s)\mu$ a korarianční maticí $(t-s)\Sigma$, kde μ je d-rozměrný vektor a Σ d-rozměrná čtvercová matice, vektor μ a matice Σ jsou určeny jednoznačně.*

Při sestrojování zobecněného Wienerova procesu můžeme použít stejný postup jako v případě Brownova pohybu, tedy lineární transformaci a přidání lineární trendové složky. Přesto jsou střední hodnoty, rozptyly a kovariance přírůstků procesu nenáhodné a konstantní v čase. Tato vlastnost je v jistých situacích poněkud omezující.

Nyní již máme dobrou představu o Wienerově procesu a můžeme učinit další krok ke zobecnění teorie stochastických procesů, který spočívá v sestrojení stochastického integrálu.

1.2 Stochastický integrál

Stochastický integrál je nástroj, který nabízí větší flexibilitu pro finanční modelování než Wienerův proces. Nejprve zavedeme pojem kvadratické variace, která nám pomůže posoudit, zda je některý proces pro konstrukci stochastického integrálu vhodný.

Připomeňme pro další úvahy předpoklad, že prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je úplný (tzn. pro každou cauchyovskou posloupnost na tomto prostoru existuje v $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ její limita) a že filtrace $F = (\mathcal{F}_t)$ je P-úplná (tj. obsahuje všechny množiny nulové vzhledem k míře P). Tím je mimo jiné zaručeno, že každá verze procesu adaptovaného na F je také adaptovaná na F.

Definice 1.15. *Nechť $X = \{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ je stochastický proces. (Totální) variaci procesu X definujeme pro $t \in \mathcal{T}$ jako*

$$V_{X(t)} = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n(\Delta)} \left| X(t_i) - X(t_{i-1}) \right|,$$

kde $\Delta = \left\{ t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n(\Delta)} \right\}$ je dělení intervalu $[0, t]$. Jestliže X splňuje podmínky

- *$V_{X(t)}(\omega) < +\infty$ pro všechna t skoro jistě,*
- *X je zprava spojitý a existují limity zleva (tj. pro všechna $t \geq 0$ platí $\lim_{h \to 0} X(t+h) = X(t)$ a existuje $\lim_{h \to 0} X(t-h)$,*
- *X je adaptován na $\mathcal{F}_t$,*

pak říkáme, že X má konečnou variaci.

Stochastický integrál vzhledem k náhodnému procesu s konečnou variací je možné zavést stejným způsobem jako Lebesgue-Stieltjesův integrál, tedy má-li proces X konečnou variaci, existují rostoucí zprava spojité procesy X^+ a X^- takové, že $X = X^+ - X^-$ skoro jistě, a Stochastický integrál můžeme definovat jako

$$\int_0^t H(u)\,\mathrm{d}X(u) = \int_0^t H(u)\,\mathrm{d}X^+(u) - \int_0^t H(u)\,\mathrm{d}X^-(u),$$

pro nějaký proces H měřitelný vzhledem k $\mathcal{F}$, přičemž oba integrály na pravé straně jsou Lebesgue-Stieltjesovy. Poznamenejme ještě, že takovýto stochastický integrál má také konečnou variaci.

Jak jsme poznali dříve, mohou být finanční trhy dobře popsány procesy, které jsou martingaly. Jediné spojité martingaly s konečnou variací jsou však skoro jistě konstantní (důkaz např. v [4], str. 51, věta 3.62). Pokud chceme sestrojit stochastický integrál vzhledem k nějakému martingalu, musíme tedy postupovat obezřetněji.

Definice 1.16. *Označme $\Delta_n(t)$ posloupnost dělení intervalu $[0, t]$, $t \in \mathcal{T}$, kde $|\Delta_n(t)| \to 0$ pro $n \to \infty$, a*

$$S^2_{\Delta_n(t)} = \sum_{\Delta_n(t)} \left(X(t_k) - X(t_{k-1}) \right)^2.$$

Existuje-li stochastický proces $\langle X\rangle = \langle X(t), t \in \mathcal{T}\rangle$ takový, že platí

$$\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} S^2_{\Delta_n(t)} = \langle X\rangle,$$

říkáme, že proces X má kvadratickou variaci $\langle X\rangle$.

Pro úplnost dodejme, že symbolem l.i.m. značíme stejně jako v [9] konvergenci podle (kvadratického) středu a platí $\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} {}^nX = X$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, \left({}^nX - X\right)^2 = 0.$$

Příklad 1.17. *Wienerův proces W má kvadratickou variaci $\langle W\rangle_t = t$, jeho variace je nekonečná.*

Bez újmy na obecnosti rozdělme interval $[0, t]$ na n stejně dlouhých podintervalů. Pak $t_k - t_{k-1} = t/n$ a přírůstky $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0, t/n)$, $k = 1, \ldots, n$ a

$$\mathbf{E}\, S^2_{\Delta_n(t)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\, \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = n\,\frac{t}{n} = t.$$

Dále je

$$\mathbf{var}\, \left(S^2_{\Delta_n(t)}\right) = \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \left((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \frac{t}{n} \right) \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - \frac{t}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{E}\, (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^4 - \left(\frac{t}{n}\right)^2 \right) =$$

$$= n \left(3 \left(\frac{t}{n}\right)^2 - \left(\frac{t}{n}\right)^2 \right) = \frac{2t^2}{n}$$

vzhledem k vlastnostem momentů normálního rozdělení, proto

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, \left(S^2_{\Delta_n(t)} - t\right)^2 = 0.$$

Protože platí

$$\sum_{k=1}^n \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 \le \max_k \left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right| \cdot \sum_{k=1}^n \left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|$$

a první činitel na pravé straně konverguje skoro jistě k nule, musí druhý činitel růst nade všechny meze a Wienerův proces má tedy nekonečnou variaci. △

Tvrzení 1.18. *Nechť M je spojitý martingal. Pak jeho kvadratická variace $\langle M\rangle$ je skoro jistě konečná, spojitá a rostoucí.*

Důkaz. Tvrzení je dokázáno např. v [4], str.52, věta 3.66. $\square$

V příkladu 1.13 jsme viděli, že je-li W Wienerův proces, je $\{W_t^2 - t, t \geq 0\}$ martingal. Definici kvadratické variace můžeme uvést v alternativním tvaru: je-li M spojitý kvadraticky integrovatelný martingal (tj. $\sup_{t\geq 0} \mathbf{E}\left(|M_t|^2\right) < \infty$), pak kvadratická variace $\langle M \rangle$ procesu M je jednoznačně určený rostoucí spojitý proces takový, že $M^2 - \langle M \rangle$ je martingal. Blíže se této problematice věnuje [2], kapitola 1.6.

Stochastický integrál sestrojíme obvyklým postupem z teorie míry: začneme případem, kdy integrandem je jednoduchý náhodný proces, a rozšíříme jej na stochastický integrál pro obecné procesy (až na některé omezující podmínky nutné pro existenci integrálu). Nebude-li uvedeno jinak, budeme písmenem W značit Wienerův proces. Pojem *neanticipativní proces vzhledem k filtraci* $F = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ značí náhodný proces $\Phi = \{\Phi_t, t \geq 0\}$, který je $\mathcal{F}_t$-měřitelný, tedy jehož hodnota v čase $t \geq 0$ je určena pouze jevy, které nastaly do času t.

Náhodný proces Φ na intervalu $[0,t]$ je *jednoduchý proces*, existuje-li dělení $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ intervalu $[0,t]$ a náhodné veličiny $\varphi, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, $\varphi \in \mathcal{F}_0$ a $\varphi_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$ takové, že Φ lze zapsat ve tvaru

$$\Phi = \varphi\,\mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i\,\mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}, \tag{1.1}$$

to znamená, že proces je po částech konstantní na deterministicky určených intervalech, $\Phi(0) = \varphi$ a $\Phi(t) = \varphi_i$ pro $t \in (t_i, t_{i+1}]$. Snadno nahlédneme, že jsou-li Φ a Ψ jednoduché procesy a c konstanta, jsou také $c\Phi$ a $\Phi + \Psi$ jednoduché procesy.

Stochastický integrál pro jednoduchý proces Φ vzhledem k Wienerově procesu W definujeme jako náhodnou veličinu

$$I_t = \int_0^t \Phi_s \,\mathrm{d}W_s = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right), \tag{1.2}$$

tedy jako vážený průměr přírůstků Wienerova procesu. Vyjádření procesu Φ není jednoznačné, můžeme volit jiné dělení intervalu $[0,t]$. Je však zřejmé, že odpovídající stochastické integrály (1.2) jsou identické.

Příklad 1.19. *Volme Φ deterministickou jednoduchou funkci s nenáhodnými koeficienty φ_i. Stochastický integrál $I_t = \int_0^t \Phi_s \,\mathrm{d}W_s$ je náhodná veličina s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right).$$

$\triangle$

Tvrzení 1.20 (Vlastnosti stochastického integrálu I)**.**

1. *Pro jednoduchý proces* Φ *platí*

$$\mathbf{E}\left[\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s\right] = 0.$$

2. *Nechť* Φ, Ψ *jsou jednoduché procesy a* c, d *čísla. Potom*

$$c\int_0^t \Phi_s\,\mathrm{d}W_s + d\int_0^t \Psi_s\,\mathrm{d}W_s = \int_0^t (c\Phi_s + d\Psi_s)\,\mathrm{d}W_s.$$

3. *Jsou-li* $\Phi \in \mathcal{L}^1$, $\Psi \in \mathcal{L}^1$ *jednoduché procesy, tj. pro všechna* $t \in \mathcal{T}$ *je* $\int_0^t |\Phi_s|\,\mathrm{d}s < \infty$ *a* $\int_0^t |\Psi_s|\,\mathrm{d}s < \infty$*, potom*

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \Phi_s\,\mathrm{d}W_s\right)\left(\int_0^t \Psi_s\,\mathrm{d}W_s\right)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t \Phi_s\Psi_s\,\mathrm{d}s\right].$$

   Je-li navíc $\Phi \in \mathcal{L}^2$*, tj. pro všechna* $t \in \mathcal{T}$ *je* $\int_0^t |\Phi_s|^2\mathrm{d}s < \infty$*, dostaneme speciálně*

$$\mathbf{var}\left[\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s\right] = \mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \Phi_s\,\mathrm{d}W_s\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^t \Phi_s^2\,\mathrm{d}s\right].$$

Rovnost v bodech 1. až 3. platí skoro jistě.

Důkaz. Uvedené vlastnosti plynou přímo z definice stochastického integrálu pro jednoduchý proces a z vlastností Wienerova procesu. □

Nyní zavedeme stochastický integrál pro náhodné procesy, které nejsou jednoduché. Takové procesy však můžeme aproximovat posloupností jednoduchých procesů, jak je uvedeno v následujících tvrzeních.

Definice 1.21. *Nechť* $\{{}^n\Phi, n = 1, 2, \ldots\}$ *je posloupnost jednoduchých procesů. Řekneme, že posloupnost stochastických integrálů* $\left\{\int_0^t {}^n\Phi_s \mathrm{d}W_s, n = 1, 2, \ldots\right\}$ *pro* $t \geq 0$ *je*

- *cauchyovská v pravděpodobnosti, jestliže pro* $\epsilon > 0$ *platí*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\int_0^t ({}^n\Phi_s - {}^m\Phi_s)\,\mathrm{d}W_s\right| > \epsilon\right) = 0,$$

- *cauchyovská v kvadratickém středu, pokud*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int_0^t {}^n\Phi_s \mathrm{d}W_s - \int_0^t {}^m\Phi_s \mathrm{d}W_s\right)^2 = 0.$$

Zavedeme stochastický integrál pro neanticipativní procesy $\Phi \in \mathcal{L}^2$. Nechť tedy $\int_0^T \Phi_s^2 \mathrm{d}s < \infty$. Pak existuje posloupnost jednoduchých procesů $\{{}^n\Phi, n = 1, 2, \ldots\}$ taková, že

$$p \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left({}^n\Phi_s - \Phi_s\right)^2 \mathrm{d}s = 0. \tag{1.3}$$

Předpokládejme spojitost trajektorií procesu Φ. Pokud tomu tak není, použijeme spojitou modifikaci Φ (přesné znění důkazu existence spojité verze procesu z $\mathcal{L}^2$ je uvedeno např. v [8], str. 96-97 a 105): nejprve přistoupíme ke spojitému dodefinování použitím aproximace procesu Φ funkcemi

$${}^h\Phi_t := \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \Phi_s \mathrm{d}s,$$

kde $h > 0$, $t \in \mathcal{T}$ a pro $s \notin \mathcal{T}$ položíme $\Phi_s = 0$. Platí

$$\lim_{h\to 0+} \int_0^T \left({}^h\Phi_s - \Phi_s\right)^2 \mathrm{d}s = 0 \ s.j.,$$

neboť bodů nespojitosti, které tímto způsobem dodefinujeme, je jen spočetně mnoho. Spočetná množina má však míru nula a proto nemá na hodnotu integrálu na levé straně vliv. Volbou jednoduchého procesu ${}^n\Phi_t = \Phi_{\lfloor nt \rfloor / n}$ pro $t \in \mathcal{T}$, $n = 1, 2, \ldots$ je splněna rovnost (1.3). Protože podle Minkowského nerovnosti pro prvky prostoru $\mathcal{L}^2$ je

$$\left(\int_0^T \left({}^m\Phi_s - {}^n\Phi_s\right)^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^T \left({}^m\Phi_s - \Phi_s\right)^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} + \left(\int_0^T \left({}^n\Phi_s - \Phi_s\right)^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2},$$

dostáváme

$$p \lim_{m,n\to\infty} \int_0^T \left({}^n\Phi_s - {}^m\Phi_s\right)^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Zbývá dokázat, že posloupnost $\left\{\int_0^t {}^n\Phi_s \mathrm{d}W_s, t \in \mathcal{T}\right\}$ je cauchyovská v pravděpodobnosti, k čemuž nám pomůže následující lemma. Pak budeme schopni nalézt limitu, neboť prostor $\mathcal{L}^2$ je úplný.

Lemma 1.22. *Mějme $\Phi = \{\Phi_t, t \in \mathcal{T}\}$ jednoduchý proces. Pro libovolná čísla $a > 0$, $b > 0$ platí*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathcal{T}} \left|\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s\right| > a\right) \leq \mathbf{P}\left(\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s > b\right) + 2\exp\left\{-\frac{a^2}{2b}\right\}. \tag{1.4}$$

Důkaz. Důkaz je převzat z [9], str. 114-115. Nechť Φ je jednoduchý proces, který lze zapsat ve tvaru (1.1). Označme pro $k = 1, \ldots, n$

$$Z_0 = 1, \qquad Z_k = \exp\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \left(\varphi_j \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right) - \frac{1}{2}\varphi_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right)\right\}.$$

Z definice Wienerova procesu víme, že přírůstek $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ je nezávislý na $\varphi_0, Z_1, \ldots, Z_k, \varphi_k$ a má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $t_{k+1} - t_k$. Pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$ je

$$\mathbf{E}\left[Z_{k+1} \,|\, \varphi_0 = f_0, Z_1 = z_1, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[\exp\left\{\varphi_k\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) - \frac{1}{2}\varphi_k^2\left(t_{k+1} - t_k\right)\right\} Z_k \,|\, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[\exp\left\{f_k\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) - \frac{1}{2}f_k^2\left(t_{k+1} - t_k\right)\right\} z_k \,|\, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k\right] = z_k$$

Z věty o úplné střední hodnotě dostáváme

$$\mathbf{E}\left[Z_{k+2} \,|\, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left[Z_{k+2} \,|\, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k, Z_{k+1}, \varphi_{k+1}\right] \,|\, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\left[Z_{k+1} \,|\, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k\right] = z_k.$$

Tímto postupem dospějeme k rovnosti

$$\mathbf{E}\left[Z_n \,|\, \ldots, Z_k = z_k, \varphi_k = f_k\right] = z_k, \;\; k = 0, \ldots, n-1, \;\; z_0 = 1.$$

Dále platí

$$1 \geq \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left[Z_n \,|\, \varphi_0\right]\right\} = \mathbf{E}\left[Z_n\right] \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(Z_1 \leq x, \ldots, Z_{j-1} \leq x, Z_j > x\right) \mathbf{E}\left[Z_j \,|\, Z_1 \leq x, \ldots, Z_{j-1} \leq x, Z_j > x\right] \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(Z_1 \leq x, \ldots, Z_{j-1} \leq x, Z_j > x\right) x = \mathbf{P}\left(\max_{k=1,\ldots,n} Z_k > x\right) x,$$

a tedy

$$\mathbf{P}\left(\max_{k=1,\ldots,n} Z_k > x\right) \leq \frac{1}{x}.$$

Uvážíme-li, že dělení intervalu $\mathcal{T}$ můžeme volit libovolně jemné, plyne z posledního vztahu

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in \mathcal{T}} \exp\left\{\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right\} > x\right) \leq \frac{1}{x}.$$

Nechť $a > 0$ a $b > 0$. Zaměníme-li v předchozím vzorci Φ za $\frac{a}{b}\Phi$ a zvolíme $x = exp\left\{\frac{a^2}{2b}\right\}$, dostáváme

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathcal{T}}\left(\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s - \frac{a}{2b}\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right) > \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathcal{T}} \exp\left\{\frac{a}{b}\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s - \frac{a^2}{b^2}\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right\} > \exp\left\{\frac{a^2}{2b}\right\}\right) \leq \exp\left\{-\frac{a^2}{2b}\right\}.$$

Odsud a ze stejné nerovnosti pro $-\Phi$ získáváme

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s\right| > \frac{a}{2} + \frac{a}{2b}\int_0^T \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{a^2}{2b}\right\}.$$

Navíc platí

$$\left\{\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s\right| > a\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\int_0^T \Phi_s^2 \mathrm{d}s > b\right\} \cup \left\{\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\int_0^T \Phi_s \mathrm{d}W_s\right| > \frac{a}{2} + \frac{a}{2b}\int_0^T \Phi_s^2 \mathrm{d}s\right\}.$$

Tím je lemma dokázáno. □

S využitím lemmatu 1.22 máme pro $b > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathcal{T}}\left|\int_0^t \left({}^n\Phi_s - {}^m\Phi_s\right)\mathrm{d}W_s\right| > \epsilon\right) \leq$$

$$\leq \lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\left(\int_0^T \left({}^m\Phi_s - {}^n\Phi_s\right)^2 \mathrm{d}s > b\right) + 2\exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2b}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2b}\right\}.$$

Pro $b \to 0$ dospějeme k závěru, že posloupnost procesů $\left\{\int_0^t {}^n\Phi_s \mathrm{d}W_s, n = 1, 2, \ldots\right\}$, $t \in \mathcal{T}$ je cauchyovská, a tedy konverguje ke spojitému procesu $I = \{I_t, t \in \mathcal{T}\}$. Pro dokončení definice stochastického integrálu pro obecný náhodný proces z prostoru $\mathcal{L}^2$ položme

$$\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s = I_t \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Abychom mohli právě zmíněný postup konstrukce stochastického integrálu aplikovat i pro případ $T = \infty$, musíme předpokládat $\int_0^\infty \Phi_s^2 \mathrm{d}s < \infty$. Pak ze spojitosti integrálu plyne

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s = \int_0^\infty \Phi_s \mathrm{d}W_s.$$

Definice integrálu nezávisí na zvolené posloupnosti jednoduchých funkcí. Nechť posloupnost $\left\{{}^n\tilde{\Phi}, n = 1, 2, \ldots\right\}$ splňuje (1.3). Pak této podmínce vyhovuje také posloupnost ${}^1\Phi, {}^1\tilde{\Phi}, {}^2\Phi, {}^2\tilde{\Phi}, \ldots$ a posloupnost integrálů

$$\int_0^t {}^1\Phi_s \mathrm{d}W_s, \int_0^t {}^1\tilde{\Phi}_s \mathrm{d}W_s, \int_0^t {}^2\Phi_s \mathrm{d}W_s, \int_0^t {}^2\tilde{\Phi}_s \mathrm{d}W_s, \ldots$$

konverguje k I.

Ověřme nyní ještě konvergenci v kvadratickém středu. Označme $\mathcal{H}^2$ množinu neanticipativních náhodných procesů Φ s vlastností $\mathbf{E}\int_0^t |\Phi_s|^2\,\mathrm{d}s < \infty$. Zřejmě $\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{L}^2$.

Tvrzení 1.23. *Nechť $\Phi \in \mathcal{H}^2$. Pak lze pro Φ nalézt posloupnost jednoduchých procesů $\{{}^n\Phi \in \mathcal{H}^2, n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že pro všechna $t \in \mathcal{T}$ platí*

$$\mathbf{E}\int_0^t |{}^n\Phi_s - \Phi_s|^2\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad n \to \infty.$$

Navíc platí

$$\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \int_0^t {}^n\Phi_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s.$$

Důkaz. První část tvrzení je dokázána např. v [8], lemma 4.4. Posloupnost integrálů $\int_0^t {}^n\Phi_s \mathrm{d}W_s$ konverguje v $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. To ale znamená, že také konverguje v pravděpodobnosti ke stejné limitě (viz [7], str. 35, tvrzení 6.10), tj. k integrálu $\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s$. □

Tvrzení dokládá, že stochastický integrál je možné ekvivalentně sestrojit aproximací posloupností náhodných procesů, které konvergují v kvadratickém středu. V praxi je však ověření tohoto typu konvergence obtížnější než ověření konvergence v pravděpodobnosti.

Uveďme ještě vlastnosti stochastického integrálu pro obecný neanticipativní proces z prostoru $\mathcal{L}^2$.

Tvrzení 1.24 (Vlastnosti stochastického integrálu II)**.** *Buď $\Phi = \{\Phi_t, t \geq 0\}$ neanticipativní náhodný proces. Potom*

1. $\left\{\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s, t \geq 0\right\}$ *je spojitý neanticipativní proces,*
2. *(linearita) pro libovolná čísla a, b platí*

$$\int_0^t a\Phi_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t b\Phi_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t (a\Phi_s + b\Phi_s)\mathrm{d}W_s \qquad t \geq 0,$$

3. *jestliže $\Phi \in \mathcal{H}^2$, je*

$$\mathbf{E}\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s = 0,$$

$$\mathbf{E}\int_0^t (\Phi_s \mathrm{d}W_s)^2 = \mathbf{E}\int_0^t \Phi_s^2 \mathrm{d}s \qquad t \geq 0,$$

4. *(integrace per partes) má-li trajektorie Φ spojitou derivaci $\Phi' = \{\Phi'_t, t \geq 0\}$, platí vzorec*

$$\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s = \Phi_t W_t - \int_0^t \Phi'_s W_s \mathrm{d}W_s.$$

Důkaz. První dvě vlastnosti vyplývají přímo z postupu konstrukce stochastického integrálu. Limitním přechodem v bodu 1., resp. 3. tvrzení 1.20 dostaneme vlastnosti v bodu 3. Konečně

$$\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s = p\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{kt/n} \left(W_{(k+1)t/n} - W_{kt/n}\right) =$$

$$= p\lim_{n\to\infty} \left(\Phi_t W_t - \sum_{k=1}^{n} \left(\Phi_{kt/n} - \Phi_{(k-1)t/n}\right) W_{kt/n} \right) =$$

$$= \Phi_t W_t - \int_0^t \Phi_s' W_s \mathrm{d}s.$$

□

Poznámka 1.25 (n-rozměrný stochastický integrál)**.** Nechť $\mathbb{W} = \left(W^1, \dots, W^d\right)$ je d-rozměrný Wienerův proces a $\Phi \in \mathcal{L}^2$ $n \times d$-rozměrný (maticový) neanticipativní náhodný proces

$$\Phi = \begin{pmatrix} {}_{11}\Phi & \dots & {}_{1d}\Phi \\ \vdots & & \vdots \\ {}_{n1}\Phi & \dots & {}_{nd}\Phi \end{pmatrix},$$

přičemž $\Phi \in \mathcal{L}^2$ znamená, že pro jeho komponenty platí ${}_{ji}\Phi \in \mathcal{L}^2$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, d$. Stochastický integrál procesu Φ pak definujeme jako

$$\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}\mathbb{W}_s = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^d \int_0^t {}_{1i}\Phi_s \mathrm{d}W_s^i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d \int_0^t {}_{ni}\Phi_s \mathrm{d}W_s^i \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti mnohorozměrného stochastického integrálu plynou přímo z vlastností pro případ $d = n = 1$. ○

Na závěr vyslovíme tvrzení, které dává do souvislosti pojem stochastického integrálu a martingalu.

Tvrzení 1.26 (Martingalová reprezentace)**.** *Mějme W standardizovaný Wienerův proces. Je-li M martingal vzhledem k filtraci F^W, pak existuje proces $\Phi \in \mathcal{L}^2$ takový, že až na nerozlišitelnost platí rovnost*

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s$$

Důkaz. Důkaz tvrzení je uveden v [6], tvrzení 4.16. □

1.3 Itôova formule

Dalším krokem v našich úvahách bude vytvoření náhodného procesu s přírůstky, jejichž střední hodnota a rozptyl nejsou v čase konstantní. Využijeme přitom kombinace stochastického integrálu a integrálu podle času, který je závislý na trajektorii integrandu, a tedy také náhodný.

Definice 1.27. *Řekneme, že proces X je Itôův proces, jestliže je ve tvaru*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B(s)\mathrm{d}W(s) \qquad t \in \mathcal{T}, \tag{1.5}$$

kde X_0 je náhodná veličina měřitelná vzhledem k $\mathcal{F}_0$, $A \in \mathcal{L}^1$ a $B \in \mathcal{L}^2$ jsou neanticipativní procesy a $W = \{W(t), t \in \mathcal{T}\}$ je Wienerův proces vzhledem k filtraci $F = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$. Pojmem stochastický diferenciál Itôova procesu X ve tvaru (1.5) *rozumíme výraz*

$$\mathrm{d}X(t) = A(t)\mathrm{d}t + B(t)\mathrm{d}W(t) \qquad t \in \mathcal{T}. \tag{1.6}$$

Stochastický diferenciál (1.6) je pouze jiným zápisem integrální rovnice (1.5). Pokud bude zápis stochastického diferenciálu zřejmý z kontextu, zjednodušíme jej v dalším textu vynecháním časového indexu t na

$$\mathrm{d}X = A\mathrm{d}t + B\mathrm{d}W \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Koeficient A nazýváme *driftem* a koeficient B *volatilitou* Itôova procesu X. Drift a volatilita jsou až na nerozlišitelnost jednoznačné. Z tvrzení 1.26 vyplývá, že drift Itôova martingalu je nulový. Opačná implikace však platí pouze tehdy, když je koeficient volatility B z prostoru $\mathcal{H}^2$.

Snadno nahlédneme, že Itôův proces je neanticipativní a spojitý. Z vlastností stochastického integrálu a linearity prostorů $\mathcal{L}^1$ a $\mathcal{L}^2$ vyplývá, že prostor Itôových procesů je lineární, tedy jsou-li X, Y Itôovy procesy a c konstanta, jsou také $X+Y$ a cX Itôovy procesy.

Příklad 1.28. *Nechť Z_0 je náhodná veličina měřitelná vzhledem k $\mathcal{F}_0$ a μ a σ jsou konstanty. Zobecněný Wienerův proces $Z_t = z_0 + t\mu + \sigma W_t$, $t \geq 0$ je Itôův proces se stochastickým diferenciálem $\mathrm{d}Z_t = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t$. Speciálně jsou standardizovaný Wienerův proces W a proces času t Itôovy, neboť $W_t = \int_0^t 1\mathrm{d}W_s$ a $t = \int_0^t = 1\mathrm{d}s$.* $\triangle$

Jak jsme poznali v příkladu 1.8, ve finančních modelech se často využívá transformací náhodných procesů hladkými funkcemi (v tomto případě $f = \exp$). Následující tvrzení ukazuje, jak se při těchto transformacích chová stochastický diferenciál.

Tvrzení 1.29 (Itôova formule)**.** *Nechť $D \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Nechť dále d-rozměrný Itôův proces $\mathbb{X}$ má komponenty $X^i = \{X^i(t), t \in \mathcal{T}\}$, $i = 1, \ldots, d$ se stochastickými diferenciály*

$$\mathrm{d}X^i(t) = A^i(t)\mathrm{d}t + B^i(t)\mathrm{d}W(t), \;\; A^i \in \mathcal{L}^1, \;\; B^i \in \mathcal{L}^2 \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Mějme funkci $f(t, x^1, \ldots, x^d) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{T} \times D)$ *s derivacemi*

$$\dot{f} = \frac{\partial}{\partial t} f,\ f_i = \frac{\partial}{\partial x^i} f,\ f_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j} f \qquad i, j = 1, \ldots, d.$$

Označme $Y = f(t, X^1, \ldots, X^d)$*. Potom proces* $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$ *je Itôův a má stochastický diferenciál ve tvaru*

$$\mathrm{d}Y = \dot{f}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d} f_i \mathrm{d}X^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} f_{ij} \mathrm{d}X^i \mathrm{d}X^j, \qquad t \in \mathcal{T}, \tag{1.7}$$

kde $\dot{f} = \dot{f}(t, X^1, \ldots, X^d)$ *atd.*

Důkaz. Limitním přechodem v příkladu 1.17 pro integrál obecného procesu na $\mathcal{L}^2$ dostáváme, že $\int_0^t (\mathrm{d}W(s))^2 = \langle W \rangle(t) = t$, je tedy $(\mathrm{d}W(t))^2 = \mathrm{d}t$ a

$$\mathrm{d}X^i(t)\mathrm{d}X^j(t) = A^i(t)A^j(t)(\mathrm{d}t)^2 +$$
$$+ \big(A^i(t)B^j(t) + B^i(t)A^j(t)\big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}W(t) + B^i(t)B^j(t)\,(\mathrm{d}W(t))^2 =$$
$$= B^i(t)B^j(t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t).$$

Přepíšeme-li (1.7) jako

$$\mathrm{d}Y(t) = \left(\sum_{i=1}^{d} A^i(t) f_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} B^i(t)B^j(t) f_{ij} \right) \mathrm{d}t + \left(\sum_{i=1}^{d} B^i(t) f_i \right) \mathrm{d}W(t),$$

vidíme, že zápis odpovídá (1.6). Dále je

$$\int_0^T \left| \sum_{i=1}^{d} A^i(t) f_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} B^i(t)B^j(t) f_{ij} \right| \mathrm{d}t < \infty,\ \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{d} B^i(t) f_i \right)^2 \mathrm{d}t < \infty.$$

Proces Y je Itôův.
Důkaz Itôovy formule (1.7) je uveden v [9], str. 120, tvrzení 1. $\square$

Poznámka 1.30 (d-rozměrná verze Itôovy formule)**.** Nechť $\mathbb{W} = \big(W^1, \ldots, W^d\big)$ je d-rozměrný Wienerův proces a komponenty X^i, $i = 1, \ldots, d$ d-rozměrného Itôova procesu $\mathbb{X}$ nechť mají stochastické diferenciály

$$\mathrm{d}X^i(t) = A^i(t)\mathrm{d}t + \sum_{l=1}^{d} B^{il}(t)\mathrm{d}W^l(t),\ A^i \in \mathcal{L}^1(\mathcal{T}),\ B^{il} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{T}) \qquad t \in \mathcal{T},$$

Mějme f a Y stejné jako v tvrzení 1.29. Pak platí vzorec (1.7). Důkaz je taktéž uveden v [9], str. 121, tvrzení 2. Výraz $\mathrm{d}X^i(t)\mathrm{d}X^j(t) = \sum_{l=1}^{d} B^{il}(t)B^{jl}(t)\mathrm{d}t$ odvodíme s využitím těchto pravidel pro násobení diferenciálů standardizovaného Wienerova procesu a procesu času:

$$(\mathrm{d}t)^2 = 0,\ \mathrm{d}t\mathrm{d}W^l = 0,\ \big(\mathrm{d}W^l\big)^2 = \mathrm{d}t,\ \big(\mathrm{d}W^k \mathrm{d}W^l\big) = 0,\ k \neq l. \qquad \bigcirc$$

Příklad 1.31. *Nechť $F(x)$ je primitivní funkce ke spojitě diferencovatelné funkci $f(x)$ na $\mathbb{R}$. Potom*

$$\mathrm{d}F(W) = f(W)\mathrm{d}W + \frac{1}{2}f'(W)\mathrm{d}t.$$

Přepisem do integrálního tvaru dostáváme

$$\int_0^t f(W_s)\mathrm{d}W_s = F(W_t) - F(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(W_s)\mathrm{d}s \qquad t \geq 0,$$

speciálně pak

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right) \qquad t \geq 0.$$

△

Příklad 1.32. *Mějme cenu akcie $S(t)$ vyjádřenu jako v příkladu 1.8, navíc předpokládejme znalost informací do času t. Namísto procesu Brownova pohybu tedy použijme Wienerův proces. Označme $Z(t) = \ln S(t)$. Pak Z je Itôův proces, neboť jej můžeme vyjádřit jako*

$$Z(t) = \ln S(0) + \int_0^t \mu \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma \mathrm{d}W(s).$$

Jeho stochastický diferenciál je ve tvaru

$$\mathrm{d}Z = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W.$$

Protože $S(t) = \exp\{Z(t)\}$, tj. $f = \exp = f' = f''$, dostáváme s využitím Itôovy formule

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}f(Z) = e^Z\mathrm{d}Z + \frac{1}{2}e^Z(\mathrm{d}Z)^2 = S\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + S\sigma\mathrm{d}W.$$

△

Příklad 1.33 (Integrace per partes)**.** *Mějme procesy X^1 a X^2 se stochastickými diferenciály*

$$\mathrm{d}X_t^i = A_t^i\mathrm{d}t + B_t^i\mathrm{d}W_t \qquad t \geq 0,\ i = 1, 2.$$

Potom

$$\mathrm{d}X^1X^2 = X^1\mathrm{d}X^2 + X^2\mathrm{d}X^1 + B^1B^2\mathrm{d}t,$$

neboli v integrální podobě

$$X^1(t)X^2(t) = X^1(0)X^2(0) + \int_0^t X^1\mathrm{d}X^2 + \int_0^t X^2\mathrm{X}^1 + \mathrm{d}X^1\mathrm{d}X^2.$$

△

Mějme neanticipativní náhodné procesy $A \in \mathcal{L}^1$, $B \in \mathcal{L}^2$ a náhodný proces γ takový, že $\gamma A \in \mathcal{L}^1$ a $\gamma B \in \mathcal{L}^2$. Stochastický integrál procesu γ vzhledem k Itôovu procesu X ve tvaru (1.5) definujeme přirozeným způsobem jako

$$\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}X(s) = \int_0^t \gamma(s)A(s)\mathrm{d}t + \int_0^t \gamma(s)B(s)\mathrm{d}W(s).$$

Tento integrál je také Itôovým procesem, speciálně je neanticipativní a spojitý.

Ukažme ještě, jak můžeme rozeznat, zda je daný Itôův proces martingalem. Pro $\alpha \in \mathcal{L}^1$ a $\beta \in \mathcal{L}^2$ zavedeme v souladu se značením v [11] *stochastickou exponencielu* předpisem

$$\epsilon[\alpha, \beta; W](t) = \epsilon[\alpha, \beta](t) = \exp\left\{\int_0^t \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta \mathrm{d}W\right\}.$$

Tvrzení 1.34. *Nechť $\beta \in \mathcal{L}^2$. Náhodný proces ve tvaru $\epsilon[0, -\beta]$ je martingal na $\mathcal{T}$ právě tehdy, když $\mathbf{E}\,\epsilon[0, -\beta] = 1$. Postačující podmínkou je tzv. Novikova podmínka*

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \beta^2 \mathrm{d}s\right\} < \infty.$$

Důkaz. Tvrzení je dokázáno v [8], tvrzení 6.1. □

Příklad 1.35. *Připomeňme příklad 1.13, ve kterém jsme popsali tzv. Waldův martingal.* △

1.4 Stochastické diferenciální rovnice

Pro naše účely vybereme z rozsáhlé teorie *stochastických diferenciálních rovnic* (SDR) jen zvláštní případ rovnice ve tvaru

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t \qquad t \geq 0 \tag{1.8}$$

s počáteční podmínkou $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ skoro jistě, kde W je Wienerův proces vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t$ a zobrazení $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelné funkce. Rovnice je definována dvojicí (b, σ), proto ji budeme označovat jako (b, σ)-SDR. Úlohou je nalézt Itôův proces X splňující (1.8) s danou počáteční podmínkou. Proces s předpisem (1.8) bývá nazýván pojmem *difúzní proces.*

Proces X nazveme *řešením* rovnice (1.8), jestliže pro skoro všechna $t \geq 0$ platí podmínky

$$\int_0^t \big(|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)\big)\mathrm{d}s < \infty,$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}W_s.$$

Příklad 1.36 (Lineární SDR). *Hledejme řešení rovnice*

$$\mathrm{d}X = \mu X \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W,\ X_0 = x_0 > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

ve tvaru $X = f(t, W)$, $f \in \mathcal{C}^2$. *Podle Itôovy formule máme*

$$\mathrm{d}X = \dot{f}(t, W)\mathrm{d}t + f_x(t, W)\mathrm{d}W + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W)\mathrm{d}t$$

a porovnáním koeficientů pro diferenciál $\mathrm{d}X$ *dostáváme*

$$\mu f(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(t, x), \tag{1.9}$$

$$\sigma f(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x). \tag{1.10}$$

Z rovnice (1.10) *vyplývá, že*

$$\frac{f_x}{f}(t, x) = \sigma \Rightarrow f(t, x) = K \exp\{\sigma x + g(t)\} \qquad K \in \mathbb{R}$$

pro nějakou funkci g, *neboť* $f(t, x)$ *nezávisí na* t. *Dosazením do rovnice* (1.9) *dostáváme tvar*

$$\mu = g'(t) + \frac{1}{2}\sigma^2,\ g(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nakonec dosazením $X(t) = f(t, W)$ *a s využitím počáteční podmínky* $X(0) = x_0$ *získáme jako řešení geometrický proces Brownova pohybu*

$$X_t = x_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t)\right\} \qquad t \geq 0.$$

△

1.5 Girsanovova věta

Až dosud jsme pracovali s jedinou pravděpodobnostní mírou $\mathbf{P}$. V praxi je však důležité ve finančních modelech správným způsobem zohlednit možnost přechodu k jiné pravděpodobnostní míře.

Definice 1.37. *Nechť* $\mathbf{P}$ *a* $\mathbf{Q}$ *jsou pravděpodobnostní míry na měřitelném prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Řekneme, že* $\mathbf{Q}$ *je absolutně spojitá vzhledem k* $\mathbf{P}$, *jestliže pro všechny* $F \in \mathcal{F}$ *platí* $\mathbf{P}(F) = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}(F) = 0$, *píšeme* $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$. *Pokud platí ekvivalence, tj.* $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ *a současně* $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$, *pak říkáme, že míry* $\mathbf{P}$ *a* $\mathbf{Q}$ *jsou ekvivalentní, píšeme* $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$.

Bez důkazu připomeneme větu z teorie míry, která ukazuje vztah mezi dvěma ekvivalentními pravděpodobnostními měrami.

Tvrzení 1.38 (Radon-Nikodým)**.** *Mějme* $\mathbf{P}$ *a* $\mathbf{Q}$ *ekvivalentní pravděpodobnostní míry na prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Pak existuje až na modifikace jednoznačně určená nezáporná náhodná veličina* $\rho \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *taková, že pro všechny* $F \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{Q}(F) = \int_F \rho \mathrm{d}\mathbf{P} = \mathbf{E_P}\left[\rho\, \mathbf{1}_F\right].$$

Navíc $\rho^{-1} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *a*

$$\mathbf{P}(F) = \int_F \rho^{-1} \mathrm{d}\mathbf{Q} = \mathbf{E_Q}\left[\rho^{-1}\, \mathbf{1}_F\right].$$

Definice 1.39. *Náhodná veličina* ρ *z věty 1.38 se nazývá Radon-Nikodýmova derivace* $\mathbf{Q}$ *vzhledem k* $\mathbf{P}$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Značíme*

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}} = \rho, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}\right|_{\mathcal{F}} = \rho^{-1}$$

skoro jistě.

Uvažujme náhodnou veličinu X definovanou na $(\Omega, \mathcal{F})$. Vztah mezi střední hodnotou vzhledem k pravděpodobnostním měrám $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ ekvivalentním vzhledem k $\mathcal{F}$ je takovýto:

$$\mathbf{E_Q}[X] = \mathbf{E_P}[\rho\, X] \qquad \mathbf{E_P}[X] = \mathbf{E_Q}[\rho^{-1}\, X].$$

Je-li $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ nějaká σ-algebra, pak $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ vzhledem k $\mathcal{G}$. Navíc pro náhodnou veličinu $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ platí

$$\mathbf{E_Q}\left[X|\mathcal{G}\right] = \frac{\mathbf{E_P}\left[\rho X|\mathcal{G}\right]}{\mathbf{E_P}\left[\rho|\mathcal{G}\right]} \tag{1.11}$$

skoro jistě. Podrobnosti a důkazy jsou uvedeny v [4], kapitola 5.

Lemma 1.40. *Pro pravděpodobnostní míry* $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ *a filtraci* $F = \{\mathcal{F}_t\}$ *označme*

$$\rho_t = \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\Big|\mathcal{F}_t.$$

Potom M *je martingal vzhledem k* $(F, \mathbf{Q})$ *právě tehdy, když* ρM *je martingal vzhledem k* $(F, \mathbf{P})$*.*

Důkaz. Abychom lemma dokázali, musíme ověřit podmínky z definice martingalu 1.12. Podmínka *(M1)* je zřejmě splněna. Platnost podmínek *(M2)* a *(M3)* plyne ze vztahu (1.11). □

Tvrzení 1.41 (Girsanovova věta pro Wienerův proces)**.** *Mějme pravděpodobnostní míry* $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ *a filtraci* $F = \{\mathcal{F}_t\}$, ρ_t *jako v lemmatu 1.40. Je-li* W *Wienerův proces vzhledem k míře* $\mathbf{P}$*, pak*

$$W^\alpha(t) = \int_0^t \alpha \mathrm{d}s + W(t)$$

je Wienerův proces vzhledem k míře $\mathbf{Q}$ *a platí* $\rho_t = \epsilon[0, -\alpha]$*.*

Kapitola 2

Oceňování finančních derivátů

V této kapitole budeme studovat metody oceňování finančních derivátů. Zaměříme se na akciové deriváty, jejichž ceny vycházejí z tzv. Black-Scholesova modelu, kdy je cena podkladového aktiva modelována pomocí geometrického Wienerova procesu. Zmíníme také metody ocenění měnových derivátů. U nich je podkladovým aktivem měnový kurz, který můžeme modelovat stejným způsobem jako kurz akcie. Při určování budoucí hodnoty podkladových aktiv finančních derivátů aplikujeme poznatky z předešlé kapitoly, v níž jsme pracovali se spojitými náhodnými procesy. Pro začátek však uvedeme diskrétní model vývoje ceny akcie, z nějž poté limitním přechodem odvodíme model spojitý.

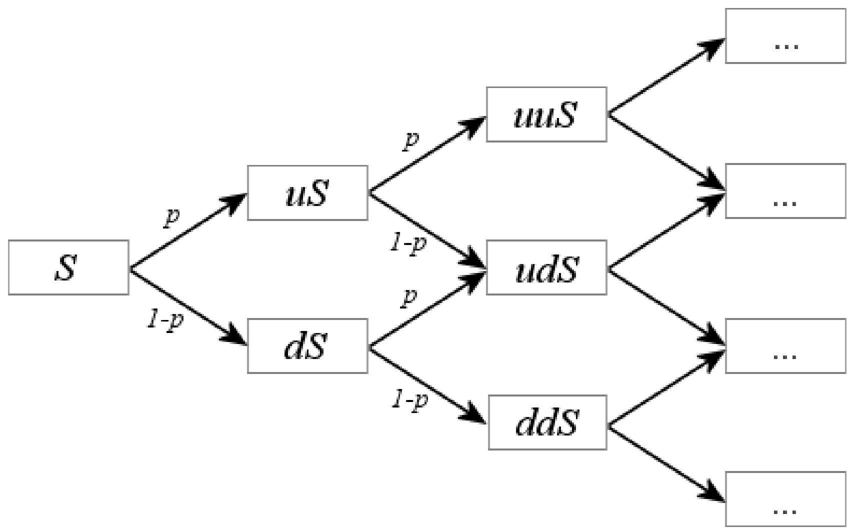
Při odvozování tzv. Black-Scholesovy formule pro oceňování finančních derivátů budeme předpokládat, že na trhu neexistují transakční ani jiné vedlejší náklady, neexistuje rozdíl mezi nabídkovou a poptávkovou cenou aktiv a že aktiva mohou být obchodovatelná v jakémkoliv množství. Připustíme také prodeje nakrátko, tj. s možností krátkodobé výpůjčky prostředků od třetí strany.

Model dále předpokládá neexistenci arbitráže. Arbitráž představuje možnost bezrizikového zisku. Vzniká v případě, kdy jsou dvě aktiva obchodována ve stejný okamžik na různých místech a s různou cenou. Obchodník tak může aktivum nakoupit za nižší cenu a prodat za vyšší cenu na jiném trhu. Jiným příkladem arbitrážní příležitosti je situace, kdy dvě aktiva mají v současnosti různé ceny, avšak jejich očekávané ceny k budoucímu datu jsou shodné. Obchodník si může vypůjčit dražší aktivum, prodat jej a koupit levnější aktivum. Poté vyčkává, až se jejich ceny budou shodovat, prodané aktivum zpět vykoupí a vrátí původnímu majiteli. Nakonec prodá druhé z aktiv. Tím realizoval zisk bez počáteční investice. Pokud připustíme možnost arbitráže, budeme předpokládat, že je tato příležitost investory ihned využita a tím eliminována.

Kromě rychlé reakce trhu na cenu jednotlivých aktiv je argumentem pro jejich modelování jako náhodných veličin také skutečnost, že celá historie se odráží v současné ceně a na budoucí cenu nemá vliv. Trh s těmito vlastnostmi se označuje jako *eficientní trh.*

2.1 Black-Scholesův model

Mějme akcii, jejíž současná cena je $S = S(0)$. Pro jednoduchost předpokládejme, že tato akcie nevyplácí dividendu. Předpokládejme dále, že za období délky 1 může cena akcie vzrůst na uS s pravděpodobností p, nebo poklesnout na dS s pravděpodobností $1-p$. Označme r bezrizikovou úrokovou míru. Zřejmě musí platit $d < 1 + r < u$, neboť jinak by bylo možné bez rizika realizovat zisk. Arbitrážní příležitosti jsme však prozatím z našich úvah vyloučili.



Obrázek 2.1. Vývoj ceny akcie v diskrétním modelu - binomický strom

Vývoj kurzu akcie podle tohoto schématu je zachycen na obrázku 2.1. Současná očekávaná cena akcie v modelu pro n období odpovídá při diskontování bezrizikovou úrokovou mírou

$$S(n) = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j} S. \tag{2.1}$$

Posloupnost

$$\left\{ \ln \frac{S(k)}{S(0)}, k = 0, 1, \dots \right\}$$

představuje náhodnou procházku s krokem velikosti $\log u$ (s pravděpodobností p) a $\log d$ (s pravděpodobností $1-p$).

Již dříve jsme ukázali, že standardizovaný Wienerův proces lze vhodnou transformací a limitním přechodem zkonstruovat z náhodné procházky s krokem 1. Tohoto závěru nyní využijeme. Při přechodu ke spojitému modelu budeme postupovat stejně jako [10], strana. 82. Mějme standardizovaný Wienerův proces W a proces $Z(t) = W_0 + \mu t + \sigma W(t)$, $t \geq 0$, kde W_0, μ a $\sigma > 0$ jsou konstanty. Proces

Z je zobecněný Wienerův proces, pro nějž $\mathbf{E}\, Z(t) = \mu t$ a $\mathbf{var} Z(t) = \sigma^2 t$, $t \geq 0$. Nechť pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny X_i, $i = 1, \ldots, n$ platí

$$p := \mathbf{P}\left(X_i = \sigma\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right), \ \mathbf{P}\left(X_i = -\sigma\right) = 1 - p.$$

Označíme-li

$$Z^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor} X_i,$$

pak $Z^n \xrightarrow{d} Z$ pro $n \to \infty$. Platnost konvergence se ukáže stejným způsobem jako pro standardizovaný Wienerův proces.

Do času t se podle binomického modelu ceny akcie uskuteční $\lfloor nt \rfloor$ kroků. Pro $n \to \infty$ požadujeme

$$\mathbf{E}\, \ln S(\lfloor nt \rfloor) - \ln S(0) = \lfloor nt \rfloor (p \ln u + (1-p) \ln d) = \lfloor nt \rfloor \left(p \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) \to \mu t,$$

$$\mathbf{var}\, \ln S(\lfloor nt \rfloor) = \lfloor nt \rfloor \left[p (\ln u)^2 + (1-p)(\ln d)^2 - (p \ln u + (1-p) \ln d)^2\right] =$$

$$= \lfloor nt \rfloor p (1-p) \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2 \to \sigma^2 t,$$

což je podle předchozích úvah splněno pro

$$u = \exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}, \ d = \exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}, \ p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right). \tag{2.2}$$

Cena akcie v čase t je tedy v souladu s příkladem 1.8 vyjádřena jako

$$S_t = S_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t\}.$$

V příkladu 1.32 jsme odvodili tvar stochastického diferenciálu procesu S_t

$$\mathrm{d}S = S\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + S\sigma \mathrm{d}W, \tag{2.3}$$

cenu akcie tedy stanovíme tak, aby vyhovovala stochastické diferenciální rovnici (2.3). Proces $\ln S_t$ je zobecněný Wienerův proces se střední hodnotou a rozptylem ve tvaru

$$\mathbf{E}\, \ln S_t = \ln S_0 + \mu t,$$

$$\mathbf{var}\, \ln S_t = \sigma^2 t.$$

V čase $t + \tau$, $\tau \geq 0$ je cena akcie vyjádřena pomocí příslušného přírůstku Wienerova procesu jako

$$S_{t+\tau} = S_t \exp\left\{\mu \tau + \sigma (W_{t+\tau} - W_t)\right\}.$$

Podle definice Wienerova procesu je přírůstek $W_{t+\tau} - W_t$ normálně rozdělený a nezávislý na $\mathcal{F}_t$ a S_t je náhodná $\mathcal{F}_t$-měřitelná veličina. Těchto poznatků využijeme při výpočtu podmíněné střední hodnoty

$$\mathbf{E}\left[S_{t+\tau}|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[S_t \exp\left\{\mu\tau + \sigma\big(W_{t+\tau} - W_t\big)\right\}|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= S_t\,\mathbf{E}\left[\exp\left\{\mu\tau + \sigma\big(W_{t+\tau} - W_t\big)\right\}\right].$$

Z tvaru charakteristické funkce normálního rozdělení (platnost příslušného vzorce je dokázána např. v [11], str. 85, tvrzení 2.29) plyne

$$\mathbf{E}\left[S_{t+\tau}|\mathcal{F}_t\right] = S_t \exp\left\{\mu\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right\} = S_t e^{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{S_{t+\tau}}{S_t}|\mathcal{F}_t\right] = e^{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}.$$

Jestliže akcie nevyplácí dividendu, můžeme výraz

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W$$

považovat za okamžitou míru výnosu této akcie.

Uvažujme dále finanční instrument se spojitým úročením v konstantní výši bezrizikové úrokové míry r. Takovým instrumentem může být např. termínovaný účet nebo vládní dluhopis. Proces, který popisuje cenu tohoto nástroje je vyjádřen jako

$$D_t = D_0 e^{rt},$$

kde $D_0 > 0$ je konstanta, tedy pro dluhopis se splatností v čase T platí vztah $D_t = \exp\{-r(T-t)\}$. Proces

$$\ln D_t = \ln D_0 + rt = \ln D_0 + \int_0^t r\mathrm{d}s$$

je Itôův. Obdobným postupem jako u procesu S_t určíme stochastický diferenciál

$$\mathrm{d}D = Dr\mathrm{d}t$$

a okamžitou míru výnosnosti

$$\frac{\mathrm{d}D}{D} = r\mathrm{d}t.$$

Proces D umožňuje zahrnout do modelu časovou hodnotu peněz. Využijeme jej pro účely diskontování ceny akcie vyjádřené procesem S bezrizikovou úrokovou mírou, neboli

$$S_t^D := \left(\frac{S}{D}\right)_t = e^{-rt} S_t = S_0 e^{(\mu - r)t + \sigma W_t}. \tag{2.5}$$

Aplikací Itôovy formule pro proces S_t^D vyjádříme stochastický diferenciál

$$\mathrm{d}\left(S_t^D\right) = S_t^D \left(\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right).$$

Tvrzení 1.34 říká, že Itôův proces je martingalem právě tehdy, když je drift jeho diferenciálu nulový. Označme

$$\alpha = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}.$$

Podle Girsanovovy věty existuje pravděpodobnostní míra $\mathbf{Q}$, vzhledem k níž je proces $W_t^\alpha = W_t + \alpha t$ taktéž Wienerovým procesem a S_t^D martingalem, neboť konstanta α vyhovuje Novikově podmínce. Příslušná stochastická diferenciální rovnice má tvar

$$\mathrm{d}S_t^D = \sigma S_t^D \mathrm{d}W_t^\alpha.$$

Cenu akcie 2.2 můžeme nyní přepsat jako martingal vzhledem k $\mathbf{Q}$ a W^α jako

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t^\alpha\right\} \qquad t \geq 0, \tag{2.6}$$

speciálně pak

$$S_T = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma\sqrt{T} Z\right\}, \tag{2.7}$$

kde Z je náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením a hustotou

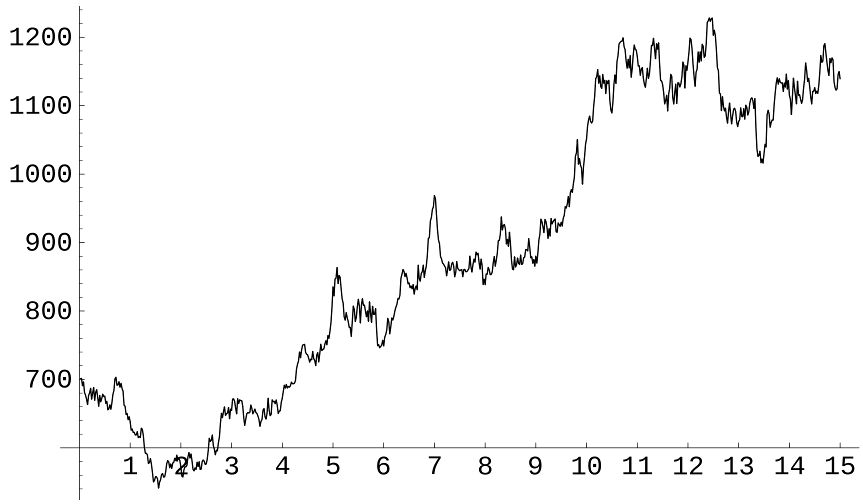
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Příklad 2.1. *Na obrázku* 2.2 *je zobrazena jedna simulace vývoje ceny akcie podle* (2.6)*. Počáteční cena akcie je* $S_0 = 700$*, bezriziková úroková míra* $r = 4\%$ *a volatilita* $\sigma = 10\%$*.* △

Ověřme ještě, zda je diskontovaná cena akcie S_t^D podle (2.6) skutečně martingal. Máme v čase t pro $\tau \geq 0$

$$\mathbf{E}_\mathbf{Q}\left[S_{t+\tau}^D | \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}_\mathbf{Q}\left[e^{-r(t+\tau)} S_{t+\tau} | \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \mathbf{E}_\mathbf{Q}\left[e^{-r(t+\tau)} S_t \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma\left(W_{t+\tau} - W_t\right)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] =$$



Obrázek 2.2. Simulace vývoje ceny akcie

$$= e^{-rt} S_t \, \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[\exp\left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2 \tau + \sigma \left(W_{t+\tau} - W_t \right) \right\} \big| \mathcal{F}_t \right] = S_t^D.$$

Navíc z markovské vlastnosti procesu S_t vyplývá, že

$$\mathbf{E}_{\mathcal{Q}} \left[S_{t+\tau} | \mathcal{F}_u, u \leq t \right] = e^{r\tau} S_t,$$

$$\mathbf{E}_{\mathcal{Q}} \left[S_T | \mathcal{F}_0 \right] = e^{rT} S_0,$$

tedy očekávaný výnos z akcie je stejný jako zhodnocení investice do bezrizikového aktiva. Ukázali jsme tím, jak probíhá přechod k bezrizikové pravděpodobnostní míře. Protože $-\frac{1}{2}\sigma^2$ je pouze korekční člen pro účely stanovení míry $\mathbf{Q}$, považujeme výraz

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

pro $\sigma > 0$ za *cenu rizika*. V rizikově neutrálním světě zřejmě platí $\mu = r$.

Vraťme se ještě k předpokladu, že akcie, která je v našich úvahách podkladovým aktivem nějakého finančního derivátu, nevyplácí dividendu. Nezřídka se však na trhu setkáme s akciemi, jejichž dividendový výnos není nulový. Uvažme nejprve případ, kdy je dividenda vyplácena spojitě v konstantní výši δ, tomu odpovídá $\delta S_t \mathrm{d}t$ za časový inteval $[t, t+\mathrm{d}t]$. Protože hodnota dividendy je zahrnuta v ceně akcie, po jejím vyplacení se cena akcie sníží. Budeme postupovat obdobně jako v případě akcie bez výplaty dividendy. Máme cenu akcie

$$S_{t;\delta} = S_0 e^{(\mu+\delta)t + \sigma W_t}$$

v čase $t \geq 0$ s diferenciálem

$$\mathrm{d}S_{t;\delta} = S_{t;\delta} \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \mathrm{d}t + S_{t;\delta} \sigma \mathrm{d}W_t + \delta S_{t;\delta} \mathrm{d}t.$$

Hledáme pravděpodobnostní míru $\mathbf{Q}$, při které je $e^{-rt}S_{t;\delta}$ martingalem. Výsledkem je cena akcie ve tvaru

$$S_{t;\delta} = S_0 e^{\left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t^\alpha}, \tag{2.8}$$

kde

$$W_t^\alpha = W_t + \alpha t \qquad \alpha = \frac{\mu - r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}.$$

Protože $\mathbf{E}_{\mathcal{Q}}\left[S_{T;\delta}|\mathcal{F}_0\right] = e^{(r-\delta)T}S_0$, použije se dále ve vzorcích $S_{0;\delta} = e^{(r-\delta)T}S_0$ namísto $e^{rT}S_0$.

Dividenda je však zpravidla vyplácena diskrétně v nenáhodných časových okamžicích $t_1, t_2, \ldots$ a v nekonstantní výši. Symbolem $\delta(t_i)$ označíme podíl z ceny akcie, který připadá na dividendu vyplacenou v čase t_i, $i = 1, 2, \ldots$ Označme dále $n(t)$ počet výplat dividendy do času t. Cenu akcie pak modelujeme jako

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \prod_{i=1}^{n(t)} (1 - \delta(t_i))$$

a namísto $e^{rT}S_0$ použijeme $S_{0;\delta} = e^{rT}S_0 \prod_{i=1}^{n(T)}(1-\delta(t_i))$.

Podobným způsobem jako s cenou akcie se zachází také s měnovými kurzy. Označme

$$^{£}D_t = e^{\gamma t} \qquad {}^{\$}D_t = e^{\rho t}$$

cenu bezrizikového aktiva (např. vládního dluhopisu) na dolarovém, resp. librovém trhu, které je úročeno úrokovou mírou ρ, resp. γ. Směnný kurz E budeme modelovat podobně jako v případě kurzu akcie pomocí geometrického Wienerova procesu, librová částka je v dolarech vyjádřena jako

$$E_t = E_0 \exp\left\{\mu t + \sigma W_t\right\} \qquad t \geq 0,$$

kde $E_0 > 0$ je konstanta. Hodnota librového dluhopisu v čase t v dolarech je pak rovna

$$E_t^D = E_t \, {}^{£}D_t = E_0 \exp\left\{(\mu + \gamma)t + \sigma W_t\right\}.$$

Měnový kurz tedy svou podstatou odpovídá Black-Scholesovu modelu. Z předchozího výkladu pro cenu akcie víme, že diskontovaný proces $e^{-\rho t}S_t$ je při pravděpodobnostní míře $\mathbf{Q}$ martingalem, tj. existuje Wienerův proces W^α vzhledem k $\mathbf{Q}$, pro který

$$E_t^D = E_0 \exp\left\{\left(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t^\alpha\right\}.$$

Na závěr uveďme, jak se odhadují parametry v modelu vývoje kurzu akcie, resp. měnového kurzu, tj. trend μ a *historická volatilita* σ. Odhady jsou převzaty z [9], kapitola 3. Předpokládejme, že máme k dispozici data o vývoji na trhu (např. denní závěrečné kurzy), tj. hodnoty S_{t_i}, $i = 0, \ldots, n$. Časové intervaly mezi jednotlivými pozorováními považujme za stejně dlouhé, jejich délku označme $\mathrm{d}t$. Máme

$$\ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right) = \mu\mathrm{d}t + \sigma\left(W_{t_k+\mathrm{d}t} - W_{t_k}\right),$$

což je náhodná veličina s normálním rozdělením $N\left(\mu\mathrm{d}t, \sigma^2\mathrm{d}t\right)$. Nestranným odhadem pro σ^2 je

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) - m\right)^2,$$

kde

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$$

je odhad μ. Přitom je nutné porovnávat odpovídající hodnoty kurzu. Např. akciový kurz je ovlivněn výplatou dividendy, výměnou akcie za několik nových s nižší hodnotou nebo naopak sloučením akcií, tyto vlivy tedy musíme vyloučit.

Příklad 2.2. *Na Burze cenných papírů Praha byly kótovány následující denní závěrečné kurzy akcie Komerční banky:*

26.6.2008	27.6.2008	30.6.2008	1.7.2008	2.7.2008
$S_0 = 3\ 531$	$S_1 = 3\ 468$	$S_2 = 3\ 530$	$S_3 = 3\ 338$	$S_4 = 3\ 393$

Dne 30.6.2008 *byla vyplacena dividenda ve výši $D = 180$ Kč. Při výpočtu volatility tedy uvažujeme tyto míry výnosnosti:*

$$\ln\frac{S_1}{S_0} = \frac{3\ 468}{3\ 531},\ \ln\frac{S_2}{S_1} = \frac{3\ 530}{3\ 468},\ \ln\frac{S_3}{S_2 - D} = \frac{3\ 338}{3\ 350},\ \ln\frac{S_4}{S_3} = \frac{3\ 393}{3\ 338}.$$

V části A přílohy uvádíme zdrojový kód pro výpočet volatility akcie společnosti ČEZ. Data pochází z Burzy cenných papíru Praha a byla pořízena 28.11.2008 za období jednoho roku, tj. 252 obchodních dní. △

V čase t známe hodnoty všech parametrů opce kromě volatility (tj. cenu podkladového aktiva S_t, realizační cenu K, termín splatnosti T, aktuální okamžik t, výši bezrizikové úrokové míry r i tržní hodnotu obchodovaného derivátu $V_t^{f(M)}$). Tu můžeme vypočítat jako řešení rovnice

$$V_t^{f(M)} = f(S_t, K, \sigma, T, t, r)$$

vzhledem k proměnné σ. Takto získaná volatilita se označuje jako *implikovaná*.

2.2 Replikační portfolio

Nebude-li řečeno jinak, budeme za podkladové aktivum finančního derivátu považovat akcii s náhodnou cenou S_t podle (2.6) v čase $t \in \mathcal{T}$.

Obchodní strategii tvoří dvojice neanticipativních náhodných procesů (ϕ, ψ), kde ϕ označuje proces určující počet akcií a ψ proces určující počet dluhopisů v *portfoliu. Hodnotu portfolia* v čase t budeme značit jako $V_t = \phi_t S_t + \psi_t D_t$. Protože připouštíme prodeje nakrátko, mohou procesy ϕ, ψ nabývat také záporných hodnot. Dále připomeňme předpoklad, že aktiva můžeme obchodovat v jakémkoliv množství.

Pro účely zajištění budeme pracovat se *samofinancujícím portfoliem*, tj. s takovým portfoliem, které vyžaduje pouze počáteční investici v čase 0 a jehož hodnotu není možné ovlivňovat dodáním nebo naopak odčerpáním finančních prostředků, např. připsáním dividend. Jediným způsobem, jak lze ovlivnit složení takového portfolia, je výměna části akcií za dluhopisy a naopak. Hodnota portfolia se mění pouze v závislosti na změně ceny akcie, resp. dluhopisu. Portfolio je tedy samofinancující, jestliže pro proces hodnoty V tohoto portfolia je splněna stochastická diferenciální rovnice

$$\mathrm{d}V_t = \phi_t \mathrm{d}S_t + \psi_t \mathrm{d}D_t.$$

Příklad 2.3. *Uvažujme dvě portfolia $P_1 = (1, 0)$ (vlastníme jednu akcii) a $P_2 = (0, S_t^D)$ (vlastníme S_t^D peněžních jednotek na bankovním účtu s úrokovou mírou r). Hodnota portfolia P_1 je $V_t(P_1) = 1 \cdot S_t + 0 \cdot D_t = S_t$, hodnota portfolia P_2 je $V_t(P_2) = 0 \cdot S_t + S_t^D \cdot D_t = S_t$, portfolia tedy mají stejnou hodnotu. Je však*

$$\mathrm{d}V_t(P_1) = (1, 0) \cdot (\mathrm{d}S_t, \mathrm{d}D_t)^T = \mathrm{d}S_t,$$

zatímco

$$\mathrm{d}V_t(P_2) = (0, S_t^D) \cdot (\mathrm{d}S_t, \mathrm{d}D_t)^T = S_t^D \mathrm{d}D_t = S_t r \mathrm{d}t \neq$$

$$\neq S_t \mu \mathrm{d}t + S_t \sigma \mathrm{d}W_t = \mathrm{d}S_t.$$

Portfolio P_1 je samofinancující, portfolio P_2 nikoliv. △

Označme $V_t^D = e^{-rt} V_t = D_t^{-1} V_t$ diskontovanou hodnotu samofinancujícího portfolia. Pomocí integrace per partes (viz příklad 1.33) určíme její diferenciál jako

$$\mathrm{d}V_t^D = \mathrm{d}D_t^{-1} V_t + D_t^{-1} \mathrm{d}V_t =$$

$$= \mathrm{d}e^{-rt}(\phi_t S_t + \psi_t D_t) + e^{-rt}(\phi_t \mathrm{d}S_t + \psi_t \mathrm{d}D_t) =$$

$$= \phi_t \mathrm{d}(e^{-rt} S_t) + \psi_t \mathrm{d}(e^{-rt} D_t) = \phi_t \mathrm{d}S_t^D.$$

Vidíme tedy, že diskontovaná hodnota celého portfolia se mění pouze v závislosti na diskontované ceně akcií. Definujme proto proces $\psi_t = V_t^D - \phi_t S_t^D$. Zřejmě $V_t = e^{rt} V_t^D$ a

$$\mathrm{d}V_t = \mathrm{d}(e^{rt}V_t^D) = (\psi_t + \phi_t S_t^D)\mathrm{d}D_t + \phi_t D_t \mathrm{d}S_t^D =$$

$$= \phi_t(S_t^D \mathrm{d}D_t + D_t \mathrm{d}S_t^D) + \psi_t \mathrm{d}D_t = \phi_t \mathrm{d}S_t + \psi_t \mathrm{d}D_t$$

a portfolio (ϕ, ψ) je samofinancující.

Výplatní funkce derivátu f je funkcí ceny podkladového aktiva. Označme

$$V^f(t, S_t) = V_t^f = D_t \, \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[D_T^{-1} f(S_T) | S_t \right] = e^{-r(T-t)} \, \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[f(S_T) | S_t \right] \tag{2.9}$$

hodnotu závazku vyplatit v čase T částku $f(S_T)$ nahlíženou v čase t. Jestliže existuje takové samofinancující portfolio, pro které $V_T = V_T^f$, pak jej nazveme *replikačním portfoliem*. Vzhledem k neexistenci arbitráže musí být hodnota V_t tohoto portfolia shodná s hodnotou derivátu V_t^f v jakémkoliv čase $t \in \mathcal{T}$, portfolio tedy replikuje výplatu při realizaci derivátu $f(S_T)$. Z opačného pohledu je zřejmé, že finanční derivát s odpovídající výplatní funkcí plně zajišťuje své replikační portfolio proti náhodným výkyvům ceny jeho složek.

Potřebný počet akcií v replikačním portfoliu se určí následujícím způsobem. Mějme samofinancující portfolio V_t. Určili jsme, že

$$\mathrm{d}V_t = \phi_t \mathrm{d}S_t + \psi_t \mathrm{d}D_t,$$

$$\mathrm{d}S_t = \sigma S_t \mathrm{d}W_t + r S_t \mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}D_t = r D_t \mathrm{d}t.$$

Podle Itôovy formule je

$$\mathrm{d}V_t^f = \frac{\partial}{\partial t} V_t^f \mathrm{d}t + \frac{\partial}{\partial S} V_t^f \mathrm{d}S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} V_t^f (\mathrm{d}S_t)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} V_t^f + r S_t \frac{\partial}{\partial S} V_t^f + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial}{\partial^2 S^2} V_t^f \right) \mathrm{d}t + \sigma S_t \frac{\partial}{\partial S} V_t^f \mathrm{d}W_t =$$

$$= (\phi r S_t + \psi r D_t)\mathrm{d}t + \phi \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

Porovnáním koeficientů u $\mathrm{d}W_t$ dostáváme

$$\phi_t = \frac{\partial}{\partial S} V_t^f \qquad \psi_t = e^{-rt} \left(V_t^f - S_t \frac{\partial}{\partial S} V_t^f \right).$$

Porovnáním koeficientů u $\mathrm{d}t$ navíc dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} V_t^f + r S_t \frac{\partial}{\partial S} V_t^f + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} V_t^f = \phi r S_t + \psi r D_t = r V_t^f. \tag{2.10}$$

Spolu s počáteční podmínkou $V(T, S_t) = f(S_t)$ jsme dospěli ke stochastické diferenciální rovnici, kterou se určí replikační portfolio.

S ohledem na (2.7) je hodnota finančního derivátu *evropského typu* (tj. s vypořádáním právě v čase T) při sjednání rovna

$$V_0 = V_T^D = e^{-rT} V_T^f =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}z}\right) e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z. \tag{2.11}$$

Ze vzorce je zřejmé, že cena derivátu nezávisí na parametru μ, který udává rychlost růstu ceny podkladového aktiva, ale pouze na volatilitě σ.

Shrňme postup, kterým sestrojíme z akcií a dluhopisů replikační portfolio:

1. nalezneme pravděpodobnostní míru $\mathbf{Q}$, vzhledem k níž je proces diskontované hodnoty akcie S_t^D martingalem,
2. vytvoříme proces $V_t^D = \mathbf{E_Q}\left[e^{-r(T-t)} f(S_T)|S_t\right]$,
3. nalezneme neanticipativní proces $(\phi_t, t \geq 0)$ takový, že $\mathrm{d}V_t^D = \phi_t \mathrm{d}S_t^D$,
4. v čase $t \in \mathcal{T}$ udržujeme portfolio tak, aby obsahovalo ϕ_t podkladových akcií a $\psi_t = V_t^D - \phi_t S_t^D$ dluhopisů.

2.3 Opce evropského typu

Opce je kontrakt, který představuje právo nakoupit (*call*) či prodat (*put*) určité aktivum k budoucímu předem stanovenému datu T v případě *evropských opcí*, nebo kdykoliv před tímto datem v případě *amerických opcí*. Součástí oceňovacího schématu opce jsou kromě data vypršení T ještě předem dohodnutá *realizační cena* aktiva K a specifikace podkladového aktiva s cenou S_t, $t \in \mathcal{T}$. Jelikož má majitel opce právo na její realizaci, nikoliv povinnost, platí za toto právo upisovateli opce *opční prémii*.

Mějme nejprve evropskou call opci. Její majitel zřejmě uplatní své právo v případě, kdy $S_T > K$ a jeho okamžitý zisk je ve výši $S_T - K$. Výplatní funkce má tedy tvar $f(S_T) = (S_T - K)^+$. Dosaďme do rovnice (2.11). S využitím substituce

$$z = -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x$$

dostáváme pro cenu opce při jejím sjednání (tj. v čase $t = 0$)

$$\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}z} - K\right)^+ e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma\sqrt{T}z} - K\right)^+ e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^x - K e^{-rT})^+ \exp\left\{ -\frac{\left(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T} \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} S_0 \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rt}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(x - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T} \right\} \mathrm{d}x -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} K e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rt}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T} \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= S_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rt - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] - e^{-rT} K \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rt + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]$$

Využili jsme přitom vlastností distribuční funkce Φ normovaného normálního rozdělení. Předchozím výpočtem jsme dospěli k *Black-Scholesově formuli* ve tvaru

$$c_t = S_t \Phi(d) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}), \tag{2.12}$$

kde

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

která popisuje cenu evropské call opce na akcii v čase t, tj. když do realizace zbývá doba $T - t$.

Známe-li již cenu evropské call opce c, odvodíme cenu evropské put opce p na základě tzv. *put-call parity*. Majitel put opce zřejmě uplatní své právo v případě, kdy $K > S_T$ a jeho okamžitý zisk je ve výši $K - S_T$. Výplatní funkce má tedy tvar $f(S_T) = (K - S_T)^+$. Mějme kromě zakoupené put opce ještě prodanou call opci, obě se stejnou realizační cenou, splatností a na totéž podkladové aktivum, jehož jsme majitelem. Pak hodnota takového portfolia k datu splatnosti T je

$$p_T - c_T + S_T = (K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ + S_T =$$

$$= \begin{cases} K - S_T + S_T = K, & K \geq S_T \\ -(S_T - K) + S_T = K, & S_T > K. \end{cases}$$

Je tedy za každých okolností rovna K. Proto

$$p_t = c_t + e^{-r(T-t)} K - S_t, \tag{2.13}$$

což lze pomocí Black-Scholesovy formule vyjádřit jako

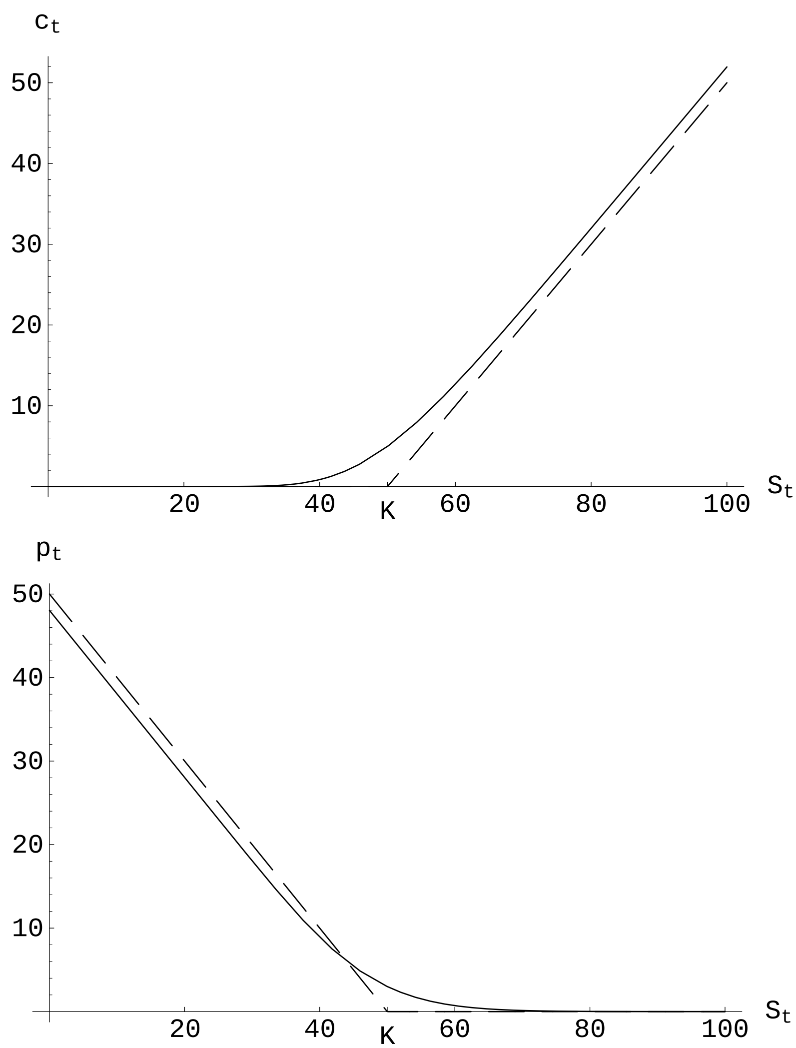
$$p_t = S_t \Phi(d) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}) + e^{-r(T-t)} K - S_t =$$

$$= S_t(\Phi(d) - 1) - e^{-r(T-t)} K (\Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}) - 1) =$$

$$= e^{-r(T-t)} K \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - d) - S_t \Phi(-d). \tag{2.14}$$

Příklad 2.4. *Závěrečný kurz akcie společnosti Microsoft na frankfurtské burze dne 5.12.2008 byl* $15,57$ *EUR, volatilita za období jednoho roku* $52,66\%$. *Uvažujme call opci na tuto akcii upsanou 5.11.2008 se splatností za* 6 *měsíců a realizační cenou* $15,25$ *EUR. Její hodnota ke dni 5.12.2008 je* $1,35$ *EUR. Hodnota put opce se stejnými parametry je* $0,77$ *EUR. Výpočet byl proveden podle Black-Scholesovy formule v programu Mathematica, zdrojový kód je uveden v části B přílohy.* $\triangle$

Na obrázku 2.3 je zobrazena hodnota výplatní funkce v okamžiku realizace (přerušovaná čára) a v čase 0 podle Black-Scholesovy formule (plná čára) pro evropskou call a put opci. Obě opce jsou vypsány na realizační cenu 50 a s dobou splatnosti 6 měsíců.



Obrázek 2.3. Call opce (nahoře) a put opce (dole) - hodnota výplatní funkce podle Black-Scholesovy formule v časech 0 a T v závislosti na ceně podkladového aktiva

Povšimněme si ještě, jaký vliv mají na hodnotu call opce jednotlivé její parametry:

- *cena akcie* S_t - jestliže cena podkladového aktiva vzroste významně nad realizační cenu, bude opce realizována s kladným ziskem. Cena opce proto roste. Pro $S_t \to \infty$ se hodnota opce blíží ceně podkladového aktiva. Pokud naopak cena podkladového aktiva klesá, snižuje se očekávaná hodnota výrazu $(S_T - K)^+$, s ní předpokládaný zisk a tedy i hodnota opce. Extrémem je případ, kdy $S_t = 0$. Pak je hodnota call opce na tuto akcii nulová.

- *doba do splatnosti* T - s klesající zbývající dobou do splatnosti se snižuje volatilita ceny akcie, která je podle předchozího výkladu na této době závislá. Hodnota opce se proto bude přibližovat výrazu $(S_T - K)^+$. Naopak jestliže $T \to \infty$, bude se diskontovaná hodnota realizační ceny blížit nule a hodnota opce se bude blížit ceně akcie.

- *volatilita* σ - při velmi nízké volatilitě se cena akcie vyvíjí obdobným způsobem jako cena bezrizikového aktiva. S rostoucí volatilitou je naopak vyšší pravděpodobnost, že opce bude zisková, proto její hodnota roste.

Reakce hodnoty evropské put opce je opačná než v případě call opce. Jestliže je $S_t = 0$, přibližuje se hodnota opce k $e^{-r(T-t)}K$, naopak pro $S_t \to \infty$ se hodnota opce blíží nule. Ostatní závislosti uvedené pro call opci platí stejně i pro put opci. Matematicky jsou tyto závislosti popsány pomocí tzv. sensitivit, o kterých pojednáme v obecnějším kontextu v další kapitole.

V Black-Scholesově modelu jsme kromě finančních derivátů na akcii zmínili také deriváty na měnové kurzy. Výpočet jejich hodnoty je velmi podobný. Výplatní funkce měnové opce je ve tvaru $f(E_T) = (E_T - K)^+$, kde K je dohodnutý realizační měnový kurz. Stejným postupem jako v případě akciových derivátů dospějeme k vyjádření hodnoty call opce na dodání librového obnosu v čase T při kurzu K

$$V^f(t, E_t) = e^{-\rho(T-t)}\, \mathbf{E_Q}\left[(E_T - K)^+ | E_t\right].$$

Dále je

$$e^{-\rho T}\, \mathbf{E_Q}\left[(E_T - K)^+ | E_t\right] = e^{-\gamma T}\, \mathbf{E_Q}\left[e^{-\rho T}(E_T^D - K e^{-\gamma T})^+ | S_t\right],$$

což je $e^{-\gamma T}$ násobek hodnoty z Black-Scholesovy formule pro realizační cenu dodávky $K e^{\gamma T}$.

2.4 Forward a futures

Forward představuje závazek jedné strany zakoupit a druhé strany prodat k určitému budoucímu datu T dané množství podkladového aktiva za dohodnutou realizační cenu K. Výplatní funkce forwardu má tvar $f(S_T) = S_T - K$.

Protože se cena podkladového aktiva (v našem případě akcie) vyvíjí náhodně, je současná cena forwardu v čase t stanovena jako $\mathbf{E_Q}\left[e^{-r(T-t)}\left(S_T-K\right)|S_t\right]$. Protože nepřipouštíme možnost arbitráže, stanoví účastníci při sjednání kontraktu (tj. v čase $t=0$) realizační cenu podkladového aktiva tak, aby

$$0=\mathbf{E_Q}\left[S_T-K|\mathcal{F}_0\right]=\mathbf{E_Q}\left(S_T|S_0\right)-K=e^{rT}S_0-K,$$

jak jsme ukázali dříve. Je tedy

$$K=S_0e^{rT}.$$

Také pro ocenění forwardu je možné využít výpočtu přímo ze vzorce (2.11), snazší je uvědomit si vztah evropské call opce a forwardu. Jestliže se cena akcie blížit nekonečnu, dojde zajisté k realizaci opce. Hodnotu forwardu v čase t tedy stanovíme jako

$$F_t=S_t-e^{-r(T-t)}K.$$

Očekávaný budoucí měnový kurz pro ocenění měnového forwardu stanovíme obdobným postupem jako

$$\mathbf{E_Q}\left[E_T\right]=E_0e^{(\rho-\gamma)T}.$$

Hodnotu forwardu pak vyjádříme jako

$$V^f(t,E_t)=e^{-\rho(T-t)}\,\mathbf{E_Q}\left[E_T-E_0e^{(\rho-\gamma)T}\right]=$$

$$=e^{-\rho(T-t)}\,\mathbf{E_Q}\left[E_t\exp\left\{\sigma\left(W_T-W_t\right)+\left(\rho-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}-E_0e^{(\rho-\gamma)T}\Big|E_t\right]=$$

$$=e^{-\gamma T}\left(e^{\gamma t}E_t-e^{\rho t}E_0\right).$$

Kontrakty *futures* mají oproti forwardům standardizované parametry, tj. z hlediska ocenění především velikost kontraktu a dobu splatnosti. Důsledkem standardizace je snazší vyhledání protistrany a tedy vyšší likvidita trhu s futures. Důležitým rozdílem je denní vypořádání, které u futures provádí *clearingové centrum* jakožto zprostředkovatel obchodu prostřednictvím maržování (marking-to-market), kdy jsou denní ztráty, resp. zisky ihned vyrovnány z příslušných maržových účtů. Snižuje se tak riziko selhání protistrany. Naproti tomu u forwardového kontraktu se protistrany obvykle dobře znají, proto je riziko selhání nízké.

Stejným způsobem jako v [3] ukážeme, že za předpokladu konstantních úrokových měr jsou ceny forwardu a futures stejné. Mějme futures na n dní s denním vypořádáním a cenou F_i na konci dne i, $i=0,\dots,n$. Nechť r_d je konstantní denní bezriziková úroková míra. Výsledek z futures ke konci i-tého dne od sjednání

$$(F_i-F_{i-1})e^{r_d i}$$

je dále úročen bezrizikovou úrokovou mírou až do konce n-tého dne, platí tedy

$$(F_i - F_{i-1})e^{r_d i}e^{r_d(n-i)} = (F_i - F_{i-1})e^{r_d n}.$$

Celková hodnota denních výsledků na konci n-tého dne je

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1})e^{r_d n} =$$

$$= e^{r_d n}[(F_n - F_{n-1}) + (F_{n-1} - F_{n-2}) + \ldots + (F_1 - F_0)] =$$

$$= (F_n - F_0)e^{r_d n}.$$

Hodnota F_n je ale shodná s cenou podkladového aktiva při realizaci, tj. $F_n = S_T$. Uvažujme navíc investici ve výši F_0 v čase 0 se stejnou bezrizikovou úrokovou mírou. Celkový výsledek z obchodu můžeme přepsat do tvaru

$$F_0 e^{r_d n} + (S_T - F_0)e^{r_d n} = S_T e^{r_d n}.$$

Nechť dále hodnota forwardu při jeho sepsání je G_0. Nákupem F_0 jednotek bezrizikového aktiva a uzavřením $e^{r_d n}$ forwardů dosáhneme taktéž výsledku $S_T e^{r_d n}$ v čase T. Obě strategie vedou ke stejnému výsledku, proto musí platit $F_0 = G_0$.

Kapitola 3

Zajišťování

Z konstrukce jednotlivých finančních derivátů je zřejmé, že jsou využitelné pro spekulativní účely, kdy jedna strana sází na pokles a druhá naopak na růst ceny podkladového aktiva. Vědomě se tak vystavují riziku opačného vývoje. Z tohoto důvodu jsou deriváty často označovány za hazardní hry.

Deriváty jsou však užitečným nástrojem v opačném případě, kdy chceme riziko redukovat. Dříve jsme uvedli, že replikační portfolio replikuje výplatu při realizaci derivátu. Z opačného pohledu derivát zajišťuje odpovídající replikační portfolio proti pohybu hodnoty jednotlivých aktiv. Toho využívají zajišťovatelé, kteří vstupují na derivátový trh za účelem ochrany svého portfolia proti nepříznivým výkyvům. Strategie obou typů investorů se na trhu vzájemně doplňují.

V této kapitole nejprve osvětlíme koncept zajišťování na obecné úrovni a poté ukážeme, jak lze k zajištění portfolia využít opcí a forwardů. Postupy budeme ilustrovat na akciových derivátech, lze je však stejným způsobem přenést i na měnové deriváty. Předpokládáme přitom, že podkladová akcie nevyplácí dividendu. Výplatu dividendy zohledníme podle postupu uvedeného v závěru kapitoly 2.1.

Pomocí tzv. Greeks vysvětlíme, jakým způsobem reaguje hodnota portfolia na změnu různých faktorů. Ukážeme vývoj těchto citlivostí v závislosti na ceně podkladového aktiva, která má ze všech uvažovaných veličin největší vliv na hodnotu derivátu.

3.1 Citlivosti - The Greeks

Zajišťování úzce souvisí s citlivostí portfolia na různé vlivy. Zajišťovatel zaujímá opačné pozice v různých typech finančních instrumentů, aby snížil dopady změn ceny aktiv, které jsou v jeho portfoliu zastoupeny.

První takový přístup jsme ukázali při stanovení ceny evropské put opce. Sestavili jsme portfolio z evropské put opce, evropské call opce a akcie. Portfolio bylo zajištěno proti pohybům v cenách podkladového aktiva aniž bylo nutné do jeho složení jakkoliv zasahovat. Navíc zajišťovatel s takovým portfoliem dosáhne bezrizikového výnosu.

Při sestrojování replikačního portfolia V pro obecný typ finančního derivátu jsme dospěli k vyjádření procesu počtu akcií v tomto portfoliu

$$\Delta = \phi = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Veličina, kterou jsme označili Δ (*delta*), vyjadřuje citlivost finančního derivátu (resp. jeho replikačního portfolia) s hodnotou V na změnu ceny akcie.

Uvažujme, že vlastníme jednu akcii s cenou S_t. Vhodným zajištěním chceme dospět k $\Delta_\Pi = 0$ pro nově vytvořené portfolio Π složené z námi vlastněné akcie a vhodného počtu derivátů, tj. k tzv. *delta-neutrální pozici*. Máme

$$\Pi_t = S_t - nV_t,$$

$$\Delta_\Pi = \Delta_S - n\Delta_V = 1 - n\Delta_V = 0,$$

Zajištění akcie dosáhneme prodejem $n = \frac{1}{\Delta_V}$ kusů derivátu na tuto akcii. Číslo n označuje tzv. *zajišťovací poměr*.

Pro evropskou call opci oceněnou podle Black-Scholesovy formule (2.12) platí $\Delta_c = \Phi(d)$. Tento vztah odvodíme derivováním (2.12) podle S_t. Označme $d_1 = d$, $d_2 = d - \sigma\sqrt{T-t}$. Pak je

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\frac{\partial}{\partial S}\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}\Phi(d_2) =$$

$$= \Phi(d_1) + S\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial(d_2)}{\partial S} =$$

$$= \Phi(d_1) + \frac{S\Phi'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Dále je

$$\frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(d_1^2 - (d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2\right)\right\} =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2\ln\left(\frac{S}{K}\right) + 2\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) - \sigma^2(T-t)\right)\right\} =$$

$$= e^{-r(T-t)}\frac{K}{S},$$

a proto

$$\Delta_c = \Phi(d).$$

Protože $\Delta_c > 0$, je hodnota call opce vždy rostoucí funkcí ceny podkladového aktiva S_t. S využitím put-call parity snadno vypočteme

$$\Delta_p = \Phi(d) - 1 = -\Phi(-d)$$

pro evropskou put opci. Platí $\Delta_p < 0$, proto je hodnota put opce vždy klesající funkcí S_t.

Δ-zajištění je také někdy označováno jako *dynamické zajišťování*, neboť zajišťovatel musí v portfoliu průběžně udržovat poměr akcií a derivátů na tyto akcie. Vezmeme-li v úvahu, že předpoklad neexistence transakčních nákladů není při reálném obchodování splněn, je dynamické zajišťování vždy ztrátové.

Jednodušší situace je u forwardu, kde vždy platí $\Delta_F = 1$. Jednu akcii tedy můžeme zajistit prodejem jednoho forwardu na tuto akcii. Δ-zajištění pomocí forwardu je označováno jako *statické zajišťování*, neboť při této strategii nejsou až do vypršení kontraktu nutné žádné další zásahy do portfolia.

Z Taylorova rozvoje hodnoty portfolia na časovém intervalu $[t, t+\delta)$, $\delta > 0$

$$V_{t+\delta} = V_t + \delta \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t} + \dots$$

je zřejmé, že Δ-zajištění chrání portfolio pouze proti malým změnám ceny podkladového aktiva. Při velkých změnách se výrazně projevuje efekt konvexity (tj. kvadratický člen Taylorova rozvoje) a portfolio není zcela zajištěno. Označme proto (*gamma*)

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Jestliže máme delta-neutrální portfolio, jehož gamma je rovna Γ a opci s gamma rovnou Γ_O, pak požadujeme

$$0 = \Gamma - m\,\Gamma_O.$$

Prodejem $m = \Gamma/\Gamma_O$ opcí zajistíme portfolio proti výkyvům způsobeným konvexitou. Pro Γ-zajištění nelze použít forward, protože $\Gamma_F = 0$. Využívají se proto opce, jejichž hodnota nezávisí na ceně podkladového aktiva lineárně a proto má nenulovou druhou derivaci podle S_t. Zahrnutí dodatečných m opcí do portfolia má vliv na citlivost delta. Proto je nutné přepočítat zajišťovací poměr, abychom udrželi delta-neutrální pozici.

Gamma vyjadřuje citlivost delta na změnu ceny podkladové akcie. Jestliže má gamma nízkou hodnotu, znamená to, že se hodnota delta mění pouze pomalu a změny v portfoliu vedoucí k delta-neutrální pozici mohou být prováděny v delších časových intervalech. Jak vyplývá z uvedeného postupu vedoucího ke gamma-neutrální pozici, Γ-zajišťování narozdíl od Δ-zajišťování chrání portfolio i proti velkým výkyvům ceny podkladového aktiva.

Na tomto místě je nutné podotknout, že kvalita zajištění závisí do jisté míry na zvoleném modelu vývoje ceny podkladového aktiva, proto s sebou Δ-zajištění (resp. Γ-zajištění) nese riziko modelu.

Pro evropskou call opci a put opci má Γ stejnou hodnotu

$$\Gamma_c = \Gamma_p = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S} = \frac{\phi(d)}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Protože je $\Gamma_c > 0$ a $\Gamma_p > 0$, je hodnota call i put opce konvexní funkcí S_t.

Časovou citlivost portfolia vyjadřuje (*theta*)

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Pro evropskou call opci je

$$\Theta_c = -Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma\phi(d_2)}{\sqrt{T-t}} + \Phi(d_2)\right),$$

pro evropskou put opci opět použití put-call parity vede k výsledku

$$\Theta_p = \Theta_c + Kre^{-r(T-t)}.$$

Časová hodnota call opce se s rostoucím t snižuje, protože se snižuje pravděpodobnost dosažení vysokého zisku. Tomu odpovídá hodnota Θ_c, která je vždy záporná. O hodnotě put opce v závislosti na čase do splatnosti nelze s určitostí vyslovit žádný závěr. Theta má z hlediska zajišťování pouze popisnou funkci, neboť čas je deterministickou veličinou.

Podle rovnice (2.10) můžeme vyjádřit vztah mezi delta, gamma a theta citlivostí. Máme totiž

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} = rV_t,$$

což znamená

$$rV = \Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2\Gamma.$$

Při Δ-zajištění platí $\Delta = 0$. Proto nabývá-li Θ velkých kladných hodnot, musí Γ nabývat velkých záporných hodnot a naopak.

Při odvozování ceny akcie (2.6) jsme došli k závěru, že pro odhad jejího vývoje je důležitá znalost volatility σ. Předpokládali jsme, že σ je konstantní, v praxi však tento předpoklad není splněn. Reakci hodnoty portfolia na změnu volatility ceny akcie měří (*vega*)

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

V případě evropské call opce je

$$\nu_c = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} =$$

$$= S_t\phi(d_1)\frac{1}{2}\sqrt{T-t} + Ke^{-r(T-t)}\phi(d_2)\frac{1}{2}\sqrt{T-t} = S_t\phi(d)\sqrt{T-t},$$

kde $\phi = \Phi'$. Pomocí put-call parity snadno nahlédneme, že pro evropskou put opci platí $\nu_p = \nu_c$.

Pro ohodnocení dopadu změny bezrizikové úrokové míry se používá (*rho*)

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Pro evropskou call, resp. put opci platí

$$\rho_c = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

$$\rho_p = -K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

Protože $\rho_c > 0$, má zvýšení bezrizikové úrokové míry za následek zvýšení hodnoty call opce. Naopak $\rho_p < 0$ a zvýšení bezrizikové úrokové míry způsobí pokles hodnoty put opce.

V praxi bývá obtížné nalézt na trhu potřebné deriváty pro složitější typy zajištění (gamma, vega atd.). Investoři se proto snaží dosáhnout Δ-zajištění a ostatní citlivosti pouze sledují. Zasáhnou v případě, kdy vzrostou na příliš vysokou hodnotu.

[3] v dodatku 14A dává do souvislosti výše zmíněné citlivosti. Předpokládá závislost hodnoty derivátu V na (nekonstantní) volatilitě podkladového aktiva σ, ceně podkladového aktiva S a čase t. Taylorův rozvoj pro interval délky δt pro V je pak ve tvaru

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial S}\delta S + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\delta\sigma + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\delta S^2 + ...$$

Tím je demonstrován postup zajištění portfolia V. Nejprve prostřednictvím Δ-zajištění eliminujeme první lineární člen, poté Γ-zajištěním první kvadratický člen atd. Pro členy vyšších řádů je možné definovat obdobné citlivosti a dosáhnout tak efektivnějšího zajištění. Tento postup je však obtížně aplikovatelný v praxi.

Příklad 3.1. *V části C přílohy uvádíme zdrojový kód programu Mathematica na výpočet citlivostí Δ, Γ, Θ, ν a ρ. Demonstrujeme jejich průběh v závislosti na době do splatnosti T pro opci v penězích (tj. při $S_t > K$), opci na penězích (tj. $S_t = K$) a opci mimo peníze (tj. $S_t < K$), a to pro call i put opci. Dále uvádíme grafy citlivostí v závislosti na ceně podkladového aktiva S_t.* $\triangle$

Kapitola 4

Deriváty amerického typu

Derivát amerického typu se splatností v čase T může být (narozdíl od derivátu evropského typu) realizován k jakémukoliv datu $\tau \leq T$. Pro obchodníka s americkými finančními deriváty se tak klíčovým stává problém stanovení optimálního okamžiku realizace.

Pojmem *markovský čas* vzhledem k filtraci $F = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ rozumíme náhodnou veličinu $\tau \geq 0$ takovou, že

$$\{\tau(\omega) \leq t, \omega \in \Omega\} \in \mathcal{F}_t \qquad t \geq 0.$$

V teorii oceňování amerických derivátů vyjadřuje okamžik, kdy dojde k realizaci kontraktu, tedy k zastavení dalšího vývoje jeho hodnoty (proto by bylo vhodnější používat doslovný překlad anglického termínu *stopping time*, tedy okamžik zastavení). Symbolem M budeme značit množinu všech markovských časů vzhledem k filtraci F. Jestliže $(X_t, t \geq 0)$ je martingal vzhledem k F a $\tau \in M$ markovský čas, pak také *zastavený proces* $(X_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ je martingal vzhledem k F. Vlastnost vyplývá přímo z definice martingalu.

Uvažujme finanční derivát, jehož podkladovým aktivem je akcie s cenou S_t podle (2.6) v čase $t \in [0, T]$. V souladu s předchozími kapitolami budeme značit $f(S_t)$ výplatní funkci derivátu, která má pro americký i evropský typ stejný tvar, a V_t^f, resp. $V_t^{f;a}$ hodnotu evropského, resp. amerického derivátu v čase t. Americký derivát nabízí svému majiteli stejná práva jako evropský derivát, avšak s možností dřívější realizace, proto musí být jeho hodnota přinejmenším rovna hodnotě evropského derivátu se stejnými parametry. Je tedy $V_t^{f;a} \geq V_t^f$.

Pro derivát amerického typu zřejmě platí

$$V_t^{f;a} = \sup_{\tau\in M\cap[t,T]} \mathbf{E}_\mathbf{Q}\left[e^{-r(\tau-t)}f(S_\tau)|S_t\right] = \sup_{\tau\in M\cap[t,T]} V_t^f(\tau), \tag{4.1}$$

úlohou je najít optimální čas realizace τ^*, který maximalizuje hodnotu derivátu. Na americký derivát pohlížíme jako na množinu evropských derivátů se splatnostmi v časech $\tau \in M \cap [t, T]$, jejich hodnotu v čase t značíme $V_t^f(\tau)$. Rozhodnutí o předčasné realizaci učiníme na základě porovnání hodnoty dvou evropských derivátů se splatností v čase τ a T.

Tvrzení 4.1. *Supremum ve výrazu* (4.1) *je nabýváno pro*

$$\tau = \min\{t, V_t^{f;a} = f(S_t)\} \qquad \tau \in [0, T].$$

Důkaz. Důkaz sleduje [12], str. 89, lemma 4.22. V kapitole 2.2 jsme uvedli, že pro každý derivát můžeme zkonstruovat portfolio s hodnotou V_t, které replikuje jeho výplatu, navíc proces $e^{-rt}V_t^f$ je martingal. Proces $e^{-rt}V_t^{f;a}$ je supermartingalem, tj. pro $s \leq t$ platí

$$\mathbf{E_Q}[e^{-rt}V_t^{f;a}|\mathcal{F}_s] \leq e^{-rs}V_s^{f;a}.$$

Nechť $\tau^\times$ je markovský čas maximalizující $V_t^f(\tau)$. Protože $V_t^{f;a} \geq f(S_t)$, máme v čase 0

$$V_0^{f;a} \geq \mathbf{E_Q}[e^{-r\tau^\times}V_{\tau^\times}^{f;a}|\mathcal{F}_0] = \mathbf{E_Q}[e^{-r\tau^\times}V_{\tau^\times}^{f;a}] \geq$$

$$\geq \mathbf{E_Q}[e^{-r\tau^\times}f(S_{\tau^\times})] = V_0^{f;a}.$$

Proto

$$V_0^{f;a} = \mathbf{E_Q}[e^{-r\tau^\times}V_{\tau^\times}^{f;a}] = \mathbf{E_Q}[e^{-r\tau^\times}f(S_{\tau^\times})]$$

a

$$V_{\tau^\times}^{f;a} = f(S_{\tau^\times})$$

skoro jistě. Markovský čas τ^* maximalizující $V_t^f(\tau)$ splňuje $\tau^* \leq \tau^\times \leq T$, a proto

$$e^{-r\tau^*}f(S_{\tau^*}) = e^{-r\tau^*}V_{\tau^*}^{f;a} \geq$$

$$\geq \mathbf{E_Q}[e^{-r\tau^\times}V_{\tau^\times}^{f;a}|\mathcal{F}_{\tau^*}] = \mathbf{E_Q}[e^{-r\tau^\times}f(S_{\tau^\times})|\mathcal{F}_{\tau^*}].$$

Výpočtem střední hodnoty na obou stranách dostáváme

$$\mathbf{E_Q}[e^{r\tau^*}f(S_{\tau^*})] \geq \mathbf{E_Q}[e^{r\tau^\times}f(S_{\tau^\times})] = V_0^{f;a},$$

pro τ^* je supremum v 4.1 taktéž nabýváno, a proto je optimálním časem realizace amerického derivátu. □

Shrneme nyní závěry dosavadních úvah. Hodnota amerického derivátu je přinejmenším rovna hodnotě evropského derivátu se stejnými parametry a stejnou výplatní funkcí f, tj. $V_t^{f;a} \geq V_t^f$. Jestliže platí $V_t^f > f(S_t)$, je výhodnější derivát nerealizovat předčasně, jeho hodnota je v tom případě shodná s hodnotou evropského derivátu. V případě, že nastane rovnost $V_t^{f;a} = f(S_t)$, je čas t optimálním pro předčasnou realizaci derivátu.

Právě vyloženou teorii aplikujeme na příkladu americké put opce (její hodnotu v čase t označíme P_t), pro americkou call opci (hodnotu v čase t označíme C_t) vystačíme s jednoduššími úvahami. Podle předchozího výkladu je dolní hranice hodnoty americké opce dána hodnotou evropské opce, $C_t \geq c_t$ a $P_t \geq p_t$.

4.1 Americká call opce

Věnujme se nejprve americké call opci na akcii, která nevyplácí dividendu. Mějme v čase t evropskou call opci se splatností v čase T a částku $Ke^{-r(T-t)}$, kterou můžeme do času T zhodnotit bezrizikovou úrokovou mírou na částku K. Opce je realizována, jestliže $S_T > K$, a výsledná hodnota portfolia je v tom případě $(S_T - K) + K = S_T$. Jestliže naopak $S_T \leq K$, opce nebude realizována a výsledkem je K. Hodnota tohoto portfolia v čase T je $max(S_T, K) \geq S_T$. Celkově tedy máme

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} \geq S_t,$$

a proto

$$C_t \geq c_t \geq S_t - Ke^{-r(T-t)} > S_t - K. \tag{4.2}$$

Při realizaci americké opce v čase $\tau < T$ dosáhne její majitel zisku $S_\tau - K$, tedy nižší částky, než je hodnota evropské call opce v čase τ. Důsledkem je, že americká call opce nebude nikdy realizována před datem splatnosti T a její hodnota je rovna hodnotě evropské call opce se stejnými parametry.

Poznámka 4.2. Tento závěr můžeme zobecnit pro všechny americké deriváty s konvexní výplatní funkcí f, pro kterou $f(0) = 0$. Mějme evropský derivát s výplatou $f(S_T)$ v čase T, kde f je konvexní funkce, $f(0) = 0$. Pak pro $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + (1-\lambda)0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(0) = \lambda f(0).$$

Hodnota derivátu v čase t je

$$V_t^f = \mathbf{E_Q}[e^{-r(T-t)} f(S_T)|S_t].$$

Dále je

$$\begin{aligned} e^{-rt}V_t^f \geq e^{-rt}\mathbf{E_Q}[f(e^{-r(T-t)}S_T)|S_t] \geq \\ \geq e^{-rt} f(e^{rt}\mathbf{E_Q}[e^{-rT}S_T|S_t]) = \\ = e^{-rt} f(S_t). \end{aligned}$$

Využili jsme postupně konvexity funkce f, Jensenovy nerovnosti (viz např. [12], str. 91, lemma 1.23) a závěru, že $e^{-rt}S_t$ je martingal. Hodnota evropského derivátu v čase t je vyšší než výplata při realizaci amerického derivátu, neboť $V_t^f \geq f(S_t)$. Proto není nikdy optimální předčasně realizovat americký derivát na akcii bez výplaty dividendy, jehož výplatní funkce f je konvexní a $f(0) = 0$. ◯

Uvažujme dále, že podkladová akcie vyplácí dividendu v okamžicích t_i ve výši D_i, $i = 1, \ldots, n$. Dividenda je započtena do ceny akcie, která se po jejím vyplacení sníží na $S_{t_i} - D_i$. Proto má-li být americká call opce realizována předčasně, musí se tak stát bezprostředně před výplatou dividendy, tj. se ziskem $S_{t_i} - K$. Zda je optimální opci realizovat určíme opět porovnáním zisku při předčasné realizaci americké opce a hodnoty evropské opce k témuž okamžiku. Budeme přitom vycházet z úvah uvedených v [3], kapitola 8, a [12], kapitola 5.

Uvažujme nejprve, že je opce realizována před výplatou poslední dividendy, tj. v čase t_n. Příslušnou úpravou (4.2) dostáváme, že je-li

$$S_{t_n} - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geq S_{t_n} - K,$$

tedy jestliže pro výši dividendy platí

$$D_n \leq K(1 - e^{-r(T-t_n)}),$$

je výhodnější opci nerealizovat, neboť hodnota příslušné evropské opce je v takovém případě vyšší. Naopak jestliže

$$D_n < K(1 - e^{-r(T-t_n)})$$

a S_{t_n} je významně vyšší než K (tj. opce je v penězích), je optimální strategií realizace opce. Splnění této podmínky je možné v případě dostatečně vysoké dividendy, ale také v případě, kdy od vyplacení poslední dividendy D_n do doby splatnosti opce T zbývá krátká doba, tj. člen $T - t_n$ nabývá malé hodnoty.

Podobně pokud není opce realizována před výplatou předposlední dividendy v čase t_{n-1}, klesne cena akcie na $S_{t_{n-1}} - D_{n-1}$ a dalším datem realizace, které přichází v úvahu, je t_n. Proto je-li pro výši dividendy

$$D_{n-1} \leq K(1 - e^{-r(t_n - t_{n-1})}),$$

nebude opce v čase t_{n-1} realizována, neboť je výhodnější ponechat ji v platnosti alespoň do okamžiku t_n.

Zobecněním pro $i < n$ získáváme kritérium na výši dividendy, podle kterého určíme, zda je výhodné opci realizovat předčasně. Je-li

$$D_i \leq K(1 - e^{-r(t_{i+1} - t_i)}) \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

není čas t_i optimální pro realizaci americké call opce. Navíc je-li dividenda vyplácena v pravidelných časových intervalech (např. k určitému datu v roce), je

$$T - t_n \leq t_{i+1} - t_i \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

a okamžik výplaty poslední dividendy před splatností opce je jediným vhodným kandidátem pro její předčasnou realizaci.

Shrneme-li předchozí postup, můžeme hodnotu americké call opce stanovit jako maximum hodnot dvou evropských call opcí. První z nich má splatnost v čase T shodném se splatností americké opce, splatnost druhé je v čase t_n, tj. bezprostředně před výplatou poslední dividendy. Ostatní parametry jsou pro všechny tři opce stejné. V případě, že není vyplácena dividenda, nebo je vyplácena dividenda v nízké výši, není optimální opci realizovat předčasně a pro její ocenění můžeme využít Black-Scholesovu formuli.

4.2 Americká put opce

Na obrázku 2.3 je zobrazena hodnota výplatní funkce evropské put opce při realizaci k okamžiku splatnosti T (přerušovaná čára) a k nějakému datu před realizací (plná čára). Jejich průsečík dělí osu, na které je vynesena aktuální hodnota podkladové akcie, na dvě části. V první z nich je $P_t(S_t) < (K - S_t)^+$, ve druhé platí opačná nerovnost. Případ $P_t(S_t) < (K - S_t)^+$ však není v souladu s naším předpokladem neexistence arbitráže, neboť bychom mohli nakoupit akcii za S_t a opci za P_t, ihned ji realizovat a utržit tak bezrizikový zisk $K - P - S$. Z tohoto důvodu uvažujeme stejně jako v obecném případě pouze druhou nerovnost $P_t(S_t) \geq (K-S_t)^+$. Jestliže zmiňovaný dělící bod neexistuje, pak má americká put opce stejnou hodnotu jako evropská put opce a můžeme využít Black-Scholesovu formuli.

Pokud dělící bod existuje, označíme jej S_t^* pro každý okamžik t. Představuje optimální cenu podkladového aktiva, při které je vhodné opci realizovat a dosáhnout tak vyššího výnosu než při držení do splatnosti. Hranice S_t^* se mění s časem, jako nástroj pro nalezení optimálního času realizace opce použijeme *úlohu volné hranice*. Popíšeme postup řešení, který uvádí [13], str. 110, kapitola 7.4. První hraniční podmínka pro řešení rovnice v případě americké put opce je zřejmá již z grafu (2.3), představuje ji rovnice $P_t(S_t^*) = K - S_t^*$. Volba S_t^* tedy ovlivňuje hodnotu opce pro všechny $S_t > S_t^*$.

Povšimněme si dále hodnoty $\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$ při $S_t = S_t^*$. Jestliže je $\Delta < -1$, pak s rostoucí cenou akcie klesá hodnota opce rychlejším tempem, což odporuje podmínce $P_t(S_t) \geq (K - S_t)^+$, tento případ tedy nemůže nastat. Pokud je $\Delta > -1$, je možné hodnotu opce v okolí S_t^* zvýšit malým posunem po ose vyjadřující cenu akcie. V tom případě ale S_t^* není optimální hranicí. Druhou hraniční podmínkou je tedy $\frac{\partial P}{\partial S} = -1$ při $S = S_t^*$.

Dalším požadavkem pro řešení úlohy je spojitost procesu S_t a spojitost první derivace hodnoty opce $\frac{\partial P}{\partial S}$. Nesplnění této podmínky opět není v souladu s předpokladem neexistence arbitráže. Pokud by proces nebyl spojitý, bylo by možné dosáhnout bezrizikového výnosu v každém bodě nespojitosti.

Evropský finanční derivát s jakoukoliv výplatní funkcí musí splňovat parciální diferenciální rovnici (2.10). Její tvar jsme získali konstrukcí replikačního portfolia na základě výpočtu citlivosti Δ. Protože není možné udržet Δ-neutrální pozici pouze nákupem či prodejem amerických opcí z důvodu možnosti jejich předčasné realizace, přechází rovnice (2.10) v nerovnost

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0,$$

neboť výnos z portfolia nemůže být v bezarbitrážním prostředí vyšší než výnos z bezrizikového investičního nástroje, rovnost je splněna pro evropskou opci. Opce bude zřejmě realizována předčasně v čase τ pouze v případě, kdy $S_\tau < K$. Pak ale $P_\tau = K - S_\tau$ a dosazením do (2.10) dostáváme

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = -rK < 0.$$

Shrňme postup, kterým získáme optimální cenu podkladové akcie, při níž je výhodné realizovat americkou put opci předčasně. Pro každý čas $t \in [0, T]$ stanovíme hranici S_t^*. Pokud $0 \leq S_t < S_t^*$, je optimální strategií realizovat opci předčasně a platí

$$P_t = K - S_t \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0.$$

V opačném případě $S_t \geq S_t^*$ platí

$$P_t > K - S_t \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0,$$

opce není realizována. Hraniční bod S_t^* získáme z podmínek

$$P_t(S_t^*) = (K - S_t^*)^+ \qquad \frac{\partial P}{\partial S}(S_t^*) = -1.$$

Viděli jsme, že hodnotu americké put opce stanovíme podobně jako v případě call opce porovnáním s odpovídající evropskou opcí. Pro nalezení optimálního okamžiku realizace put opce však neexistuje explicitní vzorec a musíme postupovat numericky.

Ve stručnosti ještě zmíníme zjednodušený přístup ke stanovení optimálního okamžiku realizace americké put opce, který vychází z binomického stromu vývoje její hodnoty. Binomický model jsme představili na začátku kapitoly 2.1. Snadno jej rozšíříme pro hodnotu put opce.

Hodnota evropské put opce n-období před datem splatnosti je

$$P(n) = e^{-rn} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (K - u^j d^{n-j} S)^+.$$

Označme δ (konstantní) délku časového úseku mezi jednotlivými okamžiky hodnocení, (i, j) pozici v j-té větvi binomického stromu v čase $i\delta$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, i$ a $P(i, j)$ hodnotu put opce na pozici (i, j). Pak pro americkou put opci musí platit

$$P(n, j) = (K - S(0)u^j d^{n-j})^+ \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Opce se s pravděpodobností p dostane v následujícím časovém úseku na pozici $(i+1, j+1)$, s pravděpodobností $1-p$ na pozici $(i+1, j)$ a pro hodnotu opce na pozici (i, j) proto platí

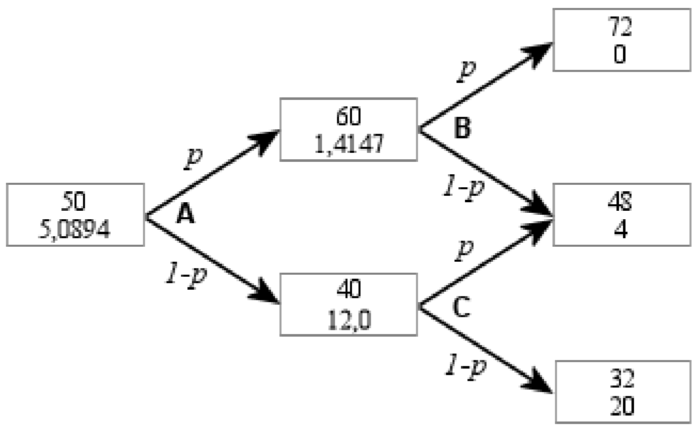
$$P(i, j) = e^{-r\delta}(pP(i+1, j+1) - (1-p)P(i+1, j)).$$

Porovnáním hodnoty americké a evropské opce pak získáváme výsledný vztah

$$P(i,j) = \max\left\{K - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-r\delta}\big(pP(i+1,j+1) + (1-p)P(i+1,j)\big)\right\},$$

$i = 0,\dots,n-1$, $j = 0,\dots,i$. Stromem postupujeme zpětně až k hodnotě P(0,0) a pro každou pozici zkoumáme, zda je výhodné opci realizovat.

Příklad 4.3. *Využití binomického stromu při oceňování americké put opce ilustrujeme příkladem z* [3]*, strana 209. Máme binomický strom pro vývoj hodnoty americké put opce s realizační cenou* 52 *za dvě období jako na obrázku* 4.1.



Obrázek 4.1. Binomický strom pro americkou put opci.

Cena podkladové akcie může ze současných 50 *vzrůst za jedno období na* 60 *s pravděpodobností* p*, nebo poklesnout na* 40 *s pravděpodobností* $1-p$*, bezriziková úroková míra je* $r = 5\%$*. Musí tedy platit*

$$50e^{0,05\cdot 1} = 60p + 40(1-p),$$

odkud získáme $p = 0,6282$*. Dalšími parametry jsou* $u = 1,2$ *a* $d = 0,8$*. Pro hodnotu v uzlech* B*,* C *a* A *platí*

$$\begin{aligned} B &= e^{-r}(0p + 4(1-p)) = 1,4147,\\ C &= e^{-r}(4p + 20(1-p)) = 9,4636,\\ A &= e^{-r}(1,4147p + 12(1-p)) = 5,0894. \end{aligned}$$

Při realizaci opce v uzlu B *bychom dosáhli výsledku* $52 - 60 = -8$*, předčasná realizace proto není výhodná. Oproti tomu hodnota opce v uzlu* C *je* $9,4636$*, zatímco zisk při okamžité realizaci je* 12*. V tomto případě je optimální strategií opci realizovat. Hodnota opce v uzlu* A *je* $5,0894$*, předčasnou realizací bychom dosáhli ztráty* 2*. Vidíme tedy, že o předčasné realizaci lze uvažovat pouze v případě* B*.* $\triangle$

Kapitola 5

Exotické opce

V kapitolách 2.3 a 4 jsme odvodili metody ocenění evropských a amerických opcí s jednoduchou výplatní funkcí $(S_T - K)^+$ v případě call, resp. $(K - S_T)^+$ v případě put opce (v anglické terminologii jsou označovány přívlastkem *vanilla*). Jedná se o opce, jejichž hodnota se od ceny podkladového aktiva odvíjí lineárně.

Deriváty se složitějšími výplatními funkcemi jsou obvykle označovány jako *exotické* a mohou být evropského i amerického typu. Výplata exotické opce může např. být ovlivněna historií vývoje ceny podkladového aktiva (její maximální hodnotou, průměrem, datem prvního překročení určité hranice atd.) nebo může během její platnosti dojít ke změně realizační ceny. V našich úvahách bude podkladovým aktivem akcie s cenou podle (2.6) a s dividendovým výnosem ve výši δ.

Za spojovací článek mezi klasickými a exotickými opcemi bývají považovány *bermudské opce*. Jedná se o nestandardní americkou opci, která může být uplatněna pouze k datu splatnosti nebo v určených okamžicích $\tau_1, \ldots, \tau_n$ před datem splatnosti. Při ocenění bermudské opce postupujeme stejným způsobem jako při stanovení hodnoty americké opce, ve vzorci (4.1) však uvažujeme supremum pouze přes markovské časy z množiny $M \cap \{\tau_1, \ldots, \tau_n, T\}$. Protože jsou časy τ_i diskrétní, můžeme při oceňování použít také binomického stromu jako v kapitole 4.2.

Zahrnutí exotických opcí do portfolia s sebou nese několik nevýhod. Především nestandardní výplatní funkce snižuje jejich likviditu. V případě, že se obchodník rozhodne upsat exotickou opci z důvodu zajištění portfolia, ale zajištění není dostatečně efektivní, je pro něj zpravidla obtížné opci zpět vykoupit popř. najít za tuto opci vhodnou náhradu.

Komplikovanost některých typů exotických opcí znemožňuje jejich obchodování na burzách, navíc klade vysoké nároky na znalost problematiky jejich oceňování, pro některé typy (stejně jako pro americké opce) neexistuje explicitní vzorec na určení aktuální hodnoty opce. S tím jsou spojeny dodatečné náklady na výpočetní techniku, kvalitní software i kvalifikované pracovníky pověřené obchodováním s těmito deriváty. Složitější bývá také zajišťování pomocí exotických derivátů, neboť jsou citlivější na změny hodnoty podkladového aktiva. Mezi výhody exotických opcí patří možnost vyššího zisku, neboť se u nich ve vyšší míře projevuje pákový efekt.

Z exotických opcí uvedeme dva druhy, které [1], str. 127, uvádí jako nejdůležitější - digitální (nebo též binární) a bariérové opce - a jako zástupce tzv. *složených derivátů* opci s volbou.

5.1 Digitální opce

Digitální opce vyplácí fixní částku A v případě, že cena podkladového aktiva v okamžiku realizace je vyšší než předem stanovená hodnota K (digitální call opce), nebo naopak nižší (digitální put opce). V opačném případě opce zaniká k datu splatnosti s nulovou výplatou. V anglické literatuře je taková opce nazývána jako *cash-or-nothing*. Výplatní funkce má tvar

$$f(S_T) = AI_{\{S_\geq K\}} = \begin{cases} A, S_T \geq K \\ 0, S_T < K \end{cases}$$

v případě call opce, digitální put opce má výplatní funkci $A - f(S_T)$. Hodnota digitální opce je

$$V_t = Ae^{-r(T-t)}\mathbf{E_Q}[I_{\{S_T\geq K\}}|S_t] = Ae^{-r(T-t)}\mathbf{Q}\left[S_T \geq K|S_t\right],$$

kde $\mathbf{Q}$ značí bezrizikovou pravděpodobnostní míru. Další postup vychází z [1], str. 130. Z (2.7) se zahrnutím dividendového výnosu δ získáme podmínku

$$S_T = S_0 e^{\left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma Z\sqrt{T}} = K,$$

při které je opce realizována. Úpravou dojdeme k závěru $Z = d_2 = d - \sigma\sqrt{T}$, kde d je stejné jako v Black-Scholesově formuli (2.12). S využitím (2.11) získáme

$$\mathbf{Q}\left[S_T \geq K\right] = \int_Z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = \Phi(-Z).$$

Hodnota evropské digitální call opce je určena vztahem

$$V_t = Ae^{-r(T-t)}\Phi(d_2).$$

Snadno nahlédneme, že hodnota evropské digitální put opce je

$$V_t = Ae^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

Kromě pevné částky může být podkladovým aktivem digitální opce akcie (pak bývá tato opce označována jako *asset-or-nothing*). Povšimněme si, že stejné výplaty, jakou získáme z evropské call opce na akcii s realizační cenou K, dosáhneme kombinací jedné asset-or-nothing opce v dlouhé pozici a jedné cash-or-nothing opce na částku K v krátké pozici. Jiným postupem tak dospějeme k Black-Scholesově formuli (2.12). [1] na straně 132 dále ukazuje, že není vhodné využívat digitální opce pro zajišťování, neboť citlivosti Δ a Γ mohou před datem splatnosti opce nabývat velmi vysokých hodnot.

Optimální strategií v případě americké digitální opce je předčasná realizace v okamžiku, kdy cena podkladového aktiva poprvé dosáhne hranice K. Její hodnotu lze stanovit podobně jako v kapitole 4.2 pomocí binomického stromu.

5.2 Bariérová opce

Výplata *bariérové opce* se uskuteční v případě, že cena podkladového aktiva dosáhla během splatnosti určité hladiny H. Opce, která se aktivuje v okamžiku, kdy cena podkladového aktiva dosáhne H, je označována jako *knock-in opce.* Naopak opce, která vyprší v okamžiku dosažení H, se nazývá *knock-out opce.* Klasická opce je zřejmě kombinací knock-in opce s cenou ${}_ic$ a knock-out opce s cenou ${}_oc$, tj. platí vztah

$$c = {}_ic + {}_oc$$

a podobně pro put opci. Postačuje tedy určit hodnotu knock-out opce.

Protože se opce aktivuje, resp. deaktivuje během své platnosti, je její cena nižší než u klasické opce. Hranice H může být libovolná, čímž je snížena likvidita bariérové opce. Proto jsou tyto opce obchodovány pouze na mimoburzovních trzích.

Existuje mnoho typů bariérových opcí. Kromě specifikace, zda se jedná o call, nebo put opci, jejich označení uvádí, zda je opce při překročení hranice aktivována (in), nebo deaktivována (out) a zda je H horní (up), či dolní (down) hranice. Např. označení up-and-in call tedy znamená call opci, která je aktivována v případě, že cena podkladového aktiva vzroste nad hranici H. Při odvození vzorce popisujícího hodnotu bariérové opce budeme postupovat stejně jako [1], str. 142.

Uvažujme down-and-out put opci s realizační cenou K, splatností T a dolní bariérou $H < K$. Označme τ_H první okamžik, kdy cena akcie dosáhne hranice H, tj. platí $S_{\tau_H} = H$. Cenu této knock-out opce stanovíme přidáním dodatečné podmínky v (2.9)

$${}_op = e^{-rT}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(K - S_T)^+ \,|\, \tau_H > T].$$

Podmínka $\tau_H > T$ je zřejmě ekvivalentní podmínce $\min_{0\leq t\leq T} S_t > H$, proto rozepíšeme

$$\begin{aligned}
{}_op = e^{-rT}\,\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\,[K - S_T \,|\, H < S_T < K] - \\
-e^{-rT}\,\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[K - S_T \,|\, H < S_T < K, \min_{0\leq t\leq T} S_t \leq H\right] = \\
= e^{-rT}\,\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\,[K - S_T \,|\, S_T < K] - e^{-rT}\,\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\,[K - S_T \,|\, S_T < H] - \\
-Ke^{-rT}\,\mathbf{Q}\left[H < S_T < K, \min_{0\leq t\leq T} S_t \leq H\right] +
\end{aligned}$$

$$+e^{-rT}\,\mathbf{E_Q}\left[S_T\,|\,H < S_T < K, \min_{0\le t\le T} S_t \le H\right].$$

Dále máme

$$e^{-rT}\,\mathbf{E_Q}\,[K - S_T\,|\,S_T < K] = e^{-rT}\,\mathbf{E_Q}\,[(K - S_T)^+],$$

což je hodnota evropské put opce s realizační cenou K, obdobným výpočtem, který vedl k Black-Scholesově formuli (2.14) získáme vyjádření pro druhý člen v předchozím rozpisu. Odvození zbývajících dvou členů je uvedeno v [1], str. 142-143. Dalšími úpravami dospějeme k výsledku

$$
\begin{aligned}
{}_op = Ke^{-rT}\Big(\Phi(-d^K + \sigma\sqrt{T}) - \Phi(-d^H + \sigma\sqrt{T})\Big) - Se^{-\delta T}\big(\Phi(-d^K) - \Phi(-d^H)\big) - \\
-Ke^{-rT}\left(\frac{H}{S}\right)^{e-1}\Big(\Phi(a - \sigma\sqrt{T}) - \Phi(b - \sigma\sqrt{T})\Big) + \\
+Se^{-\delta T}\left(\frac{H}{S}\right)^{e+1}\big(\Phi(a) - \Phi(b)\big),
\end{aligned}
$$

kde

$$d^K = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d^H = \frac{\ln\frac{S_0}{H} + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$a = \frac{\ln\frac{H}{S_0} + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad b = \frac{\ln\frac{H^2}{S_0K} + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$e = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}.$$

Obdobným postupem bychom vyjádřili hodnotu ostatních typů bariérových opcí.

5.3 Volitelné opce

Volitelné opce (anglicky *chooser*) je zástupcem složených derivátů. Svému majiteli dává právo rozhodnout se k určitému datu $\tau < T$, zda bude opce k datu splatnosti T prodejní, či kupní. Hodnota volitelné opce k datu τ je proto $\max\{c_\tau, p_\tau\}$, kde c je cena podkladové call opce, p je cena podkladové put opce, obě opce jsou vypsány na stejné podkladové aktivum a mají shodnou dobu splatnosti T. Dosazením (2.13) dostáváme

$$
\begin{aligned}
\max\{c_\tau, p_\tau\} &= \max\{c_\tau, c_\tau + Ke^{-r(T-\tau)} - S_\tau e^{-\delta(T-\tau)}\} = \\
&= c_\tau + e^{-\delta(T-\tau)}(Ke^{-(r-\delta)(T-\tau)} - S_\tau)^+.
\end{aligned}
$$

Hodnota volitelné opce je tedy součtem hodnoty evropské call opce se splatností v čase T a put opce se splatností τ a realizační cenou $Ke^{-(r-\delta)(T-\tau)}$. Pro vyčíslení přesné hodnoty se použije Black-Scholesova formule (2.12) a (2.14).

Závěr

V práci jsme se zabývali oceňováním finančních derivátů. Postupovali jsme na dostatečně obecné úrovni, která umožňuje úpravu modelů pro deriváty s libovolnou výplatní funkcí. Za pomoci teorie stochastického kalkulu jsme nejprve popsali Black-Scholesův model vývoje ceny akcie a měnového kurzu ve spojitém čase.

Poté jsme sestrojili replikační portfolio, které za určitých předpokladů umožňuje ocenění derivátu k datu jeho splatnosti. Ne vždy však bylo možné sestavit explicitní oceňovací formuli pro okamžik, který tomuto datu předchází. Pro takovéto případy jsme odvodili parciální diferenciální rovnici, jejímž numerickým řešením lze hodnotu derivátu vypočítat.

Model jsme aplikovali na výpočet hodnoty evropských opcí a forwardů. Uvedli jsme, jaký význam mají citlivosti derivátu na změnu faktorů, které ovlivňují jeho hodnotu. Finanční deriváty jsme využili pro popis metody zajišťování proti výkyvům hodnot složek portfolia.

Ukázali jsme také, jakým způsobem lze postupovat v případě amerických derivátů, jejichž majitel má právo předčasné realizace. Z řady exotických derivátů, u nichž je výplatní funkce složitější než u tradičních derivátů, jsme vybrali tři zástupce a odvodili pro ně oceňovací vzorce.

Uvedenou teorii jsme zpracovali ve výpočetním systému Mathematica a aplikovali na numerické příklady.

Příloha - modelování v systému Mathematica

Grafy a numerické výpočty prezentované v předchozích kapitolách byly provedeny ve výpočetním systému Mathematica®. Tento program (nebo některý obdobný) lze použít i pro odvození některých vzorců, neboť je v něm integrována podpora symbolických výpočtů. Zdrojové kódy a výstupy uvádíme v této příloze.

V části A ukazujeme, jakým způsobem lze generovat náhodnou procházku (*aproxWiener*) a exponenciální náhodnou procházku (*aproxSt*). Uživatel má možnost model upravovat pomocí parametrů *sigma* (volatilita kurzu akcie), r (výše bezrizikové úrokové míry), *S0* (počáteční cena akcie), *steps* (počet kroků simulace náhodné procházky) a *scale* (měřítko doby mezi kroky). Jak jsme uvedli v kapitole 1.1, limitním přechodem pro *steps* $\to \infty$ bychom získali z náhodné procházky proces Brownova pohybu, resp. Wienerův proces, který je základním stavebním kamenem v modelu vývoje ceny akcie a měnového kurzu. Dále v této části demonstrujeme zákon iterovaného logaritmu a zákon velkých čísel pro Brownův pohyb. Na příkladu akcie společnosti ČEZ ilustrujeme odhad volatility a na základě modelu vývoje ceny akcie odhadujeme její budoucí cenu.

V části B nejprve zavádíme předpis distribuční funkce a hustoty normovaného normálního rozdělení. S využitím těchto funkcí uvádíme zápis zdrojového kódu pro výpočet hodnoty evropské call a put opce a pro obě tyto opce výpočet jejich implikované volatility. Hodnota opce je odvozena v kapitole 2.3. Graficky zobrazujeme výplatní funkci opcí a jejich vnitřní hodnotu. Řešíme také příklad 2.4.

Část C využívá funkcí definovaných v části B. Počítáme v ní citlivosti evropské call a put opce na jednotlivé faktory, které ovlivňují jejich hodnotu - tzv. Greeks. Pomocí grafů zobrazujeme průběh citlivostí v závislosti na době do splatnosti a ceně podkladového aktiva. Příslušná teorie je uvedena v kapitole 3.1.

Literatura

[1] Avellaneda M., Laurence P.: *Quantitative Modeling of Derivative Secuirities From Theory to Practice*, Chapman&Hall, Boca Raton, 2000.

[2] Dupačová J., Hurt. J, Štěpán J.: *Stochastic modeling in economics and finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[3] Hull J.: *Options, futures and other derivatives* (5. vydání), Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[4] Hunt P. J., Kennedy J. E.: *Financial Derivatives in Theory and Practice*, Wiley, Chichester, 2001.

[5] Hurt J.: *Valuation of Securites: Computational Aspects*, http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼hurt/Dresdenopen.nb, 2002. [citováno 24.11.2008].

[6] Karatzas I., Shreve S. E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York, 1988.

[7] Lachout P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha, 2004.

[8] Liptser R. S., Shiryayev A. N.: *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Springer, New York, 1977.

[9] Mandl P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia, Praha, 1985.

[10] Mandl P.: *Seminář z aktuárských věd 2002/03 - Stochastické finanční modely*, Matfyzpress, Praha, 2004.

[11] Nielsen L. T.: *Pricing and Hedging of Derivative Securities*, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[12] Shreve S. E.: *Stochastic Calculus and Finance*, http://www.stat.berkeley.edu/users/evans/shreve.pdf, 2004. [citováno 1.12.2008].

[13] Wilmott P., Howison S., Dewynne J.: *The Mathematics of Financial Derivatives*, Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, 1996.